Vorlesung
Logik

Prof. Dr. D. Schweigert
Kaiserslautern, WS 1999/2000

Verfügbar unter:

`http://kluedo.ub.uni-kl.de/Mathematik/Metadaten/script_6.html`

Zusammenfassung von Markus Heidenreich

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Konstruktion

1.1 Relationssysteme

Definition 1.1.1 Ein geordnetes Paar $\tilde{A} = (A; \tilde{r}_0, \ldots, \tilde{r}_\gamma, \ldots)$ das aus einer nichtleeren Menge (Träger) A und einer Menge von Prädikaten mit einer Stelligkeit (Arität) $n_0, \ldots, n_\gamma \in \mathbb{N}$ besteht heißt *Relationssystem.* Jedem n_i-stelligen Prädikat $\tilde{r}_{i(A)}$ wird eine n_i-stellige Relation $r_{i(A)}$ auf A zugeordnet. Die Folge $(n_0, \ldots, n_\gamma, \ldots)$ von Stelligkeiten heißt der Typ ($r_{\gamma(A)}$ ist ein Ordinalzahl).

Ein Prädikat und die zugehörige Relation wird mit dem selben Buchstaben bezeichnet. Weiterhin wird allgemein vorausgesetzt, daß die Gleichheit als Relation vorhanden ist.

Definition 1.1.2 Ein Relationssystem $(B; \tilde{r}_0, \ldots, \tilde{r}_\gamma, \ldots)$ heißt Untersystem von $(A; \tilde{r}_0, \ldots, \tilde{r}_\gamma, \ldots)$, wenn gilt:

a) $B \subseteq A$ und $B \neq \emptyset$

b) jede Relation $r_{i(B)}$ ist Einschränkung der Relation $r_{i(A)}$ auf B.

Definition 1.1.3 Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *Homomorphismus* vom Relationssystem $\tilde{A}$ in das Relationssystem $\tilde{B}$, wenn gilt: aus $r_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ folgt $r_i(f(a_1), \ldots, f(a_{n_i}))$.

Definition 1.1.4 Sei $\{\tilde{A}_i : i \in \mathbf{I}\}$ eine Familie von Relationssystemen. Dann ist das direkte Produkt $\tilde{A} = \prod_{i \in \mathbf{I}} \tilde{A}_i$ folgendermaßen definiert: $\{\prod A_i : i \in \mathbf{I}\}$ ist die (Träger-)Menge (karthesisches Produkt).
Die Relation r_i ist komponentenweise definiert. Sei $a_1, \ldots, a_{n_i} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} A_i$.
$r_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ gilt genau dann, wenn für alle Projektionen $e_i : \prod_{i \in \mathbf{I}} A_i \to A_i$ gilt: $r_i(e_i(a_1), \ldots, e_i(a_{n_i}))$.

1.2 Algebren, Bool'sche Algebra

Definition 1.2.1 Ein geordnetes Paar $\tilde{A} = (A; \tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_\gamma, \ldots)$, das aus einer nichtleeren Menge A und einer Menge von n_i-stelligen Operationssymbolen $(\tilde{f}_{n_i(A)})$ besteht, heißt *Algebra.* Jedem n_i-stelligen Operationssysmbol $\tilde{f}_{n_i(A)}$ ist eine n_i-stellige Operation $f_{n_i(A)}$ zugeordnet. Die Folge $(n_0, \ldots, n_\gamma, \ldots)$ von Stelligkeiten (Aritäten) heißt der *Typ* der Algebra.

Definition 1.2.2 Die Algebra $\tilde{B} = (B; \wedge, \vee, `, 0, 1)$ mit dem Typ $(2, 2, 1, 0, 0)$ heißt Bool'sche Algebra, wenn gilt:

a) Assoziativgesetz : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \;\; x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

b) Kommutativgesetz : $x \wedge y = y \wedge x, \;\; x \vee y = y \vee x$

c) Idempotenz : $x \wedge x = x, \;\; x \vee x = x$

d) Asorption : $x \wedge (y \vee x) = x, \;\; x \vee (y \wedge x) = x$

e) Distributivgesetz : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \;\; x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

f) De Morgan : $(x \wedge y)` = x` \vee y`, \;\; (x \vee y)` = x` \wedge y`$

g) Komplement : $x \wedge x` = 0, \quad x \vee x` = 1$

h) Doppelnegation : $x`` = x$

Definition 1.2.3 Eine Algebra $\tilde{B}$ ist Unteralgebra der Algebra $\tilde{A}$, falls für alle f_{n_i} gilt:

a) $B \subseteq A$ und $B \neq \emptyset$

b) ist $b_1, \ldots, b_{n_i} \in B$, dann ist $f_{(B)}(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in B$, wobei $f_{(B)}$ die Einschränkung von $f_{(A)}$ auf B ist.

Definition 1.2.4 Die Algebren $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ seien vom selben Typ. Eine Abbildung $h : A \to B$ heißt *Homomorphismus*, wenn gilt:

$$h(f_{n_i(A)}(a_1, \ldots, a_{n_i})) = f_{n_i(B)}(h(a_1), \ldots, h(a_{n_i}))$$

Definition 1.2.5 Sei $\{A_i : i \in \mathbf{I}\}$ eine Familie von Algebren des selben Typs. Dann ist das direkte Produkt $\tilde{A} = \prod_{i \in \mathbf{I}} \tilde{A}_i$ folgendermaßen definiert: $\prod_{i \in \mathbf{I}} A_i$ (karthesisches Produkt) ist die Trägermenge. Die Operation $f_{n_i(A_i)}$ ist komponentenweise definiert.

1.3 Strukturen

Definition 1.3.1 Eine Struktur $\tilde{A} = (A; f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots, r_0, \ldots, r_\gamma, \ldots)$ ist ein Tripel, wobei gilt:

a) A ist nicht leer

b) $(A; f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots)$ ist eine Algebra

c) $(A; r_0, \ldots, r_\gamma, \ldots)$ ist ein Relationensystem.

1.4 Filter auf Bool'schen Algebren

Definition 1.4.1 Sei $(B; \wedge, \vee, `, 0, 1)$ eine Bool'sche Algebra. Eine Teilmenge $F \subseteq B$ heißt *Filter*, wenn:

a) $1 \in F$, d.h. $F \neq \emptyset$

b) ist $x \in F$ und $x \leq y$, dann ist $y \in F$

c) sind $x, y \in F$, dann ist $x \wedge y \in F$.

Definition 1.4.2 Ein Filter heißt *Ultrafilter*, wenn weiterhin gilt:

a) $0 \notin F$

b) ist $x \in B$, dann ist entweder $x \in F$ oder $x` \in F$.

Satz 1.4.1 Jeder Filter einer Bool'schen Algebra ist in einem Ultrafilter enthalten.

Definition 1.4.3 Eine Teilmenge A von Elementen einer Bool'schen Algebra $\tilde{B}$ hat eine *endliche Durchschnitteigenschaft (EDE)*, falls der Durchschnitt jeder endlichen Teilmenge von $A \neq \emptyset$ ist.

Satz 1.4.2 Jede Teilmenge A von Elementen einer Bool'schen Algebra, welche die EDE hat, ist in einem Ultrafilter enthalten.

1.5 Kongruenzrelation

Definition 1.5.1 Sei $(A; f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots)$ eine Algebra. Eine Äquivalenzrelation ρ ist Kongruenzrelation auf A, wenn für jede Operation f gilt:

$$(a_i, b_i) \in \rho \ , \ 1 \leq i \leq n \Rightarrow (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \rho.$$

Definition 1.5.2 Die Algebra $\tilde{A}/\rho = (A/\rho; f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots)$ heißt *Faktor- oder Quotientenalgebra*. Es ist $A/\rho = \{[a] : a \in A\}$ mit $[a] = \{b : (a,b) \in \rho, \ k \in A\}$. Setze: $f_i([a_1], \ldots, [a_n]) := [f_i(a_1, \ldots, a_n)]$.

Definition 1.5.3 Die Abbildung $\mu : A \to A/\rho$ von der Algebra A nach der Faktoralgebra A/ρ ist der kanonische Homomorphismus. Sei $f : A \to B$ ein Homomorhpismus, dann heißt die Relation $ker(f)$ auf A der Kern der Abbildung f, wenn gilt: $(a,b) \in ker(f) \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Satz 1.5.1 (Homomorphiesatz) Sei $f : A \to B$ ein surjektiver Homomorphismus von der Algebra $\tilde{A}$ in die Algebra $\tilde{B}$. Dann ist $A/ker(f) \simeq B$.

1.6 Tarski-Lemma

Proposition 1.6.1 Sei F ein Filter auf einer Bool'schen Algebra B. Dann ist die Relation $\eta = \eta(F)$ auf B eine Kongruenzrelation, wenn gilt: $(x,y) \in \eta \Leftrightarrow$ es gibt ein $f \in F$ mit $x \wedge f = y \wedge f$.

Proposition 1.6.2 Sei F ein Filter einer Bool'schen Algebra B. Dann gilt für den kanonischen Homomorphismus $h : B \to B/\eta(F)$ genau dann $h(x) = 1$, wenn $x \in F$ ist.

Satz 1.6.1 Sei F ein Filter einer Bool'schen Algebra B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $B/\eta(F) \simeq \{0, 1\}$

b) F ist Ultrafilter

c) F ist Primfilter, d.h. ist $x \wedge y \in F$, so ist entweder $x \in F$ oder $y \in F$.

Definition 1.6.1 Sei $\{A_n : n \in \mathbf{I}\}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen einer Bool'schen Algebra, die Infima besitzt. Sei $a_n := inf(A_n)$. Ein Ultrafilter F in $\tilde{B}$ heißt *infimabewahrend* (d.h. $\wedge$-bewahrend), wenn gilt:

$$h(a_n) = inf\{h(a) : a \in A_n\},$$

wobei h der kanonische Homomorphismus von B in $B/\eta(F)$ ist.

Satz 1.6.2 (Tarski's Lemma) Für jedes Element $x \in B, \ x \neq 0$ gibt es einen Ultrafilter F mit $x \in F$, der infimabewahrend ist.

2 Aussagenlogik

2.1 Sprache der Aussagenlogik

Definition 2.1.1 Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Buchstaben aus

$$\mathbf{V} \cup \mathbf{O} \cup \{(,),=\},$$

wobei $\mathbf{V} = \{A, B, C, \dots\}$ eine abzählbare Menge von aussagenlogischen Variablen und $\mathbf{O} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ eine Menge von Operationszeichen ist.

Definition 2.1.2 Die Menge $\bar{A}$ der Aussageformen ist wie folgt rekursiv definiert:

a) jede Aussagenvariable A ist eine Aussageform

b) sind α und β Aussageformen, dann sind $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Aussageformen

c) kein Wort ist eine Aussageform, das nicht durch *endliche* Anwendung von a) und/oder b) entstanden ist.

Satz 2.1.1 (Rekursionssatz) Seien die Algebren $\tilde{A} = (\bar{A}; f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$ und $\tilde{B} = (\bar{B}; g_\neg, g_\wedge, g_\vee, g_\rightarrow, g_\leftrightarrow)$ vom selben Typ. Jede Abbildung $h : \mathbf{V} \rightarrow B$ läßt sich auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $\bar{h} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ fortsetzen.

2.2 Wahrheitswerte, Belegungen, Bewertungen

Satz 2.2.1 Die *Belegung* $h : \mathbf{V} \rightarrow \{0, 1\}$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer *Bewertung* $\bar{h} : A \rightarrow \{0, 1\}$ fortsetzen.

Definition 2.2.1 Eine Aussageform α heißt *gültig* (*Tautologie*), wenn $\bar{h}(\alpha) = 1$ für alle Belegungen h der in α vorkommenden Aussagevariablen. Man schreibt $\models \alpha$. Eine Aussageform α heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung h gibt, sodaß $\bar{h}(\alpha) = 1$ ist.

Definition 2.2.2 Sei $\Sigma \subseteq \bar{A}$ und sei $\varphi \in \bar{A}$. Aus Σ *folgt semantisch* φ (in Zeichen $\Sigma \models \varphi$) genau dann, wenn für alle Belegungen h gilt: ist $\bar{h}(\psi) = 1$ für alle $\psi \in \Sigma$, dann ist auch $\bar{h}(\varphi) = 1$.

2.3 Die Syntax der Aussagenlogik

Definition 2.3.1 Es seien die Axiome (A1), ..., (A13) wie folgt definiert:

(A1) : $\alpha \rightarrow \alpha$
(A2) : $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(A3) : $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(A4) : $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(A5) : $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ und $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
(A6) : $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

$$
\begin{aligned}
(A7): &\ (\alpha \wedge \beta) \to \alpha \text{ und } (\alpha \wedge \beta) \to \beta \\
(A8): &\ (\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta)) \\
(A9): &\ ((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)) \\
(A10): &\ ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \\
(A11): &\ (\alpha \to \beta) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \\
(A12): &\ (\alpha \wedge (\neg\alpha)) \to \beta \\
(A13): &\ \beta \to (\alpha \vee (\neg\alpha)).
\end{aligned}
$$

Die Regel (MP) laute:

$$(MP): \ \frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}.$$

Definition 2.3.2 Eine Ableitung von φ aus $\Sigma \in \bar{A}$ ist eine endliche Folge von Aussageformen $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit $\varphi_n \equiv \varphi$, sodaß jedes φ_m ein Axiom oder aus Σ ist oder mittels des Modus Ponens aus φ_k und φ_l $(k, l < m)$ hergeleitet werden kann. Man schreibt $\Sigma \vdash \varphi$.

Satz 2.3.1 (Korrektheitssatz) Ist $\Sigma \vdash \varphi$, dann ist $\Sigma \models \varphi$.

2.4 Vollständigkeitssatz

Definition 2.4.1 Sei $\bar{A}$ die Menge aller Aussageformen. Dann ist $\approx$ wie folgt definiert: $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ und $\Sigma \vdash (\beta \to \alpha)$

Proposition 2.4.1 $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 2.4.2 Man definiert auf dem Faktorraum $\bar{A}/\approx$ eine Relation $\leq$ durch: $[\alpha] \leq [\beta] \Leftrightarrow \Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$.

Proposition 2.4.2 $(\bar{A}/\approx;\ \leq)$ ist eine teilweise Ordnung.

Proposition 2.4.3 $(\bar{A}/\approx; \wedge, \vee, ‘, \bar{0}, \bar{1})$ ist bezüglich $\leq$ unter folgenden Voraussetzungen eine Bool'sche Algebra:

a) $[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$
b) $[\alpha] \vee [\beta] := [\alpha \vee \beta]$
c) $[\alpha]‘ := [\alpha‘]$

Satz 2.4.1 In der Bool'schen Algebra $(\bar{A}/\approx; \wedge, \vee, ‘, \bar{0}, \bar{1})$ gilt:

$$[\alpha] = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash \alpha,$$

d.h. die ableitbaren Formeln liegen genau in der Klasse der $\bar{1}$.

Die Algebra $\tilde{A} = (\bar{A}/\approx; \wedge, \vee, ‘, \bar{0}, \bar{1})$ heißt *Lindenbaumalgebra* der Aussagenlogik.

Proposition 2.4.4 Sei h ein Homomorphismus von der Lindenbaumalgebra $\tilde{A}$ in die Bool'sche Algebra $\{0, 1\}$. Ist f auf $\mathbf{V}$ definiert durch $f(A) := h(A)$, dann ist f eine Bewertung von $\tilde{A}$ derart, daß $f(\alpha) = \bar{h}([\alpha])$.

Satz 2.4.2 (Vollständigkeitssatz) Ist $\Sigma \models \varphi$, dann ist $\Sigma \vdash \varphi$.

Satz 2.4.3 Es gilt $\Sigma \models \varphi$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash \varphi$.

2.5 Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit

Satz 2.5.1 (Endlichkeitssatz) Gilt $\Sigma \vdash \varphi$, dann gibt es eine endliche Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, sodaß $\Sigma_0 \vdash \varphi$ gilt.

Satz 2.5.2 (Deduktionssatz) Sei Σ eine Menge von Aussageformen, dann gilt:

$$\Sigma \cup \{\Psi\} \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash (\Psi \to \varphi).$$

Definition 2.5.1 Eine Menge Σ von Aussageformen heißt konsistent, wenn nicht gleichzeitig φ und $\neg\varphi$ aus Σ ableitbar sind.

Lemma 2.5.1 Sei Σ eine Menge von Aussageformen. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ist genau dann konsistent, wenn $\Sigma \vdash (\neg\varphi)$ nicht gilt.

Folgerung 2.5.1 Eine Aussagenform φ ist konsistent, wenn $\neg\varphi$ nicht ableitbar ist. Nach dem Vollständigkeitssatz ist $\neg\varphi$ nicht ableitbar, wenn $\neg\varphi$ erfüllbar.

Satz 2.5.3 Eine endliche Menge Σ_0 von Aussageformen ist genau dann konsistent, wenn Σ_0 erfüllbar ist.

2.6 Kompaktheitssatz

Satz 2.6.1 Sei Σ eine Menge von Aussageformen. Σ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

3 Prädikatenlogik

3.1 Sprache 1. Ordnung

Definition 3.1.1 Für die Sprache der Prädikatenlogik (erster Stufe) benutzen wir folgendes Alphabet Δ, das in zwei Gruppen eingeteilt ist:

I. Logische Symbole

1. Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$
2. Aussagenlogische Verknüpfungssymbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. Klammern $(,)$ evtl. Gleichheit

II. Parameter

1. Quantorensymbol $\forall x$
2. Parädikatssymoble (mit Festlegung der Stelligkeit)
3. Funktionssymbole (mit Festlegung der Stelligkeit)
4. Konstantensymbole (nullstellige Funktionssymbole)

Definition 3.1.2 Die Menge der *Terme* ist die Menge der Wörter, die von Konstantensymbolen und Variablen mit Hilfe der termbildenden Operationen erzeugt wird.
Eine *atomare Formel* ist ein Wort der Form $Pt_1 \ldots t_n$, wobei P ein n-stelliges Prädikatssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.
Die Menge der *Formeln* ist die Menge der Wörter, die von den atomaren Formeln mit Hilfe der formelbildenden Operationen aufgebaut werden.

Definition 3.1.3 Es wird definiert, wann eine Variable x *frei* in einer Formel vorkommt. Sei dazu α atomare Formel:

a) x ist frei in $\alpha \Leftrightarrow x$ kommt in α vor.

b) x ist frei in $\neg\alpha \Leftrightarrow x$ frei in α

c) x ist frei in $(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow x$ frei in α oder β

d) x ist frei in $(\forall y.\alpha) \Leftrightarrow x$ frei in α und $x \neq y$.

3.2 Strukturen und Interpretationen

Definition 3.2.1 Eine Struktur $\bar{A}$ für eine Sprache $L(\Delta)$ erster Ordnung besteht aus einer (Träger-) Menge A und den Relationen.

Satz 3.2.1 (Rekursionssatz) Sei $L(\Delta)$ eine Sprache und $\bar{A}$ eine zugeordnete Struktur. Jede Abbildung $h : \mathbf{V} \rightarrow A$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer Abbildung $\bar{h} : T \rightarrow A$, wobei T die Menge der Terme ist, sodaß gilt:

a) $\bar{h}(x) = h(x)$ für alle $x \in V$

b) $\bar{h}(f_i(t_1, \ldots, t_n)) = f_i(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_n))$ für alle Funktionssymbole.

3.3 Semantik

Definition 3.3.1 Sei Δ ein Alphabet und $L(\Delta)$ eine zugehörige Sprache. Unter einer *Belegung* der Variablen in $L(\Delta)$ versteht man eine zugehörige Struktur $\bar{A} = (A; f_1, \ldots, f_\gamma, \ldots, r_1, \ldots, r_\gamma, \ldots)$ im Zusammenhang mit einer Abbildung $h : \mathbf{V} \to A$. Nach dem Rekursionssatz gibt es genau eine Forsetzung $\bar{h} : T \to A$, wobei T die Menge der Terme bezeichnet.

Definition 3.3.2 $\bar{A}$ erfüllt eine Formel φ mit h ($\models_{\bar{A}} \varphi[h]$) wenn gilt:

a) ist φ ein Term, dann gilt $\models_{\bar{A}} \varphi[h] \;\Leftrightarrow\; \bar{h}(\varphi) \in A$.
   Dabei gilt für jede Variable $\bar{h}(x) = h(x)$ und für jedes Funktionssymbol $\bar{h}(f_i(t_1, \ldots, t_n)) = f_i(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_n))$.

b) ist φ eine atomare Formel, dann ist:
   i) für die Gleichheit: $\models_{\bar{A}} (t_1 \approx t_2)[h] \;\Leftrightarrow\; \bar{h}(t_1) = \bar{h}(t_2)$.
   ii) für P beliebiges n-stelliges Prädikatssymbol und P_A die zugehörige Relation: $\models_{\bar{A}} Pt_1, \ldots, t_n[h] \;\Leftrightarrow\; (\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_n)) \in P_A$.

c) ist φ eine nicht atomare Formel, dann ist:
   i) $\models_{\bar{A}} \neg\varphi[h] \;\Leftrightarrow \not\models_{\bar{A}} \varphi[h]$.
   ii) $\models_{\bar{A}} (\varphi \to \psi)[h] \;\Leftrightarrow \not\models_{\bar{A}} \varphi[h]$ oder $\models_{\bar{A}} \psi[h]$.
   iii) $\models_{\bar{A}} \forall x.\varphi[h] \;\Leftrightarrow \models_{\bar{A}} \varphi[h(x|a)]$ für alle $a \in A$.

Definition 3.3.3 Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel in $L(\Delta)$. Aus Γ folgt semantisch φ ($\Gamma \models \varphi$) genau dann, wenn für jede zugehörige Struktur $\bar{A}$ und jede Funktion $h : \mathbf{V} \to A$ gilt:

$$\models_{\bar{A}} \psi[h] \text{ für alle } \psi \in \Gamma \;\Rightarrow\; \models_{\bar{A}} \varphi[h].$$

Ist $\Gamma = \emptyset$, dann schreibt man $\models \varphi$ und nennt φ eine *gültige* Formel.

Satz 3.3.1 Sind h_1 und h_2 Belegungen von Variablen von $\mathbf{V}$ in A, die auf allen freien Variablen einer beliebigen Formel φ übereinstimmen, dann gilt:

$$\models_{\bar{A}} \varphi[h_1] \quad\Leftrightarrow\quad \models_{\bar{A}} \varphi[h_2]$$

Definition 3.3.4 Eine Formel σ heißt eine *Aussage*, wenn σ keine freie Variable besitzt.

Korollar 3.3.1 Für jede Aussage σ gilt, daß $\bar{A}$ die Aussage σ entweder für jedes $h : \mathbf{V} \to A$ oder mit keinem $h : \mathbf{V} \to A$ erfüllt.

Definition 3.3.5 Eine Aussage σ heißt *wahr* in $\bar{A}$ ($\models_{\bar{A}} \sigma$), wenn $\bar{A}$ die Aussage σ mit einem h erfüllt. $\bar{A}$ heißt dann ein *Modell* für σ. Ist σ nicht wahr in $\bar{A}$, dann heißt σ *falsch* in $\bar{A}$. $\bar{A}$ ist ein Modell von einer Menge von Aussagen Σ, wenn $\bar{A}$ ein Modell für jede Aussage $\sigma \in \Sigma$ ist.

Korollar 3.3.2 Sei Σ eine Menge von Aussagen und τ eine Aussage. Es gilt $\Sigma \models \tau$ genau dann, wenn jedes Modell von Σ auch ein Modell von τ ist.

3.4 Syntax

Definition 3.4.1 Eine Formel φ heißt *Generalisierung* der Formel ψ, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi \equiv \forall x_1 \ldots . \forall x_n . \psi$. Für $n = 0$ gilt: $\varphi \equiv \psi$.

Definition 3.4.2 Als Axiome werden alle Generalisierungen von Formeln der folgenden Formen definiert:

a) alle Tautologien

b) $\forall x . \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, wobei t für x in α einsetzbar ist

c) $\forall x . (\alpha \rightarrow \beta) \ \rightarrow \ (\forall x . \alpha \rightarrow \forall x . \beta)$

d) $\alpha \rightarrow \forall x . \alpha$, wobei x nicht frei in α vorkommt.

Wenn die Sprache $L(\Delta)$ ein Gleichheitszeichen ($\approx$) besitzt zusätzlich:

e) $x \approx x$

f) $x \approx y \ \rightarrow \ (\alpha \rightarrow \hat{\alpha})$, wobei α atomar ist und $\hat{\alpha}$ aus α entsteht, indem x an einer oder mehreren Stellen durch y substituiert wird.

Als einzige Regel dient der Modus ponens: $\frac{\varphi, \ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$.

Definition 3.4.3 Eine Ableitung der Formel α aus der Formelmenge Γ ist eine endliche Folge $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ mit $\varphi_n \equiv \varphi$, sodaß entweder $\varphi_i \in \Gamma$ oder φ_i Axiom oder φ_i aus φ_k und φ_l mit Hilfe des Modus ponens abgeleitet werden kann $(k, l < i)$. In Zeichen: $\Gamma \vdash \varphi$.

3.5 Der Korrektheitssatz

Satz 3.5.1 (Endlichkeitssatz) Ist $\Sigma \vdash \varphi$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, sodaß $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Satz 3.5.2 Eine Formel φ ist genau dann beweisbar, wenn die (vollständige) Generalisierung von φ beweisbar ist.

Satz 3.5.3 (Korrektheitssatz) Gilt $\Gamma \vdash \varphi$, dann ist $\Gamma \vDash \varphi$

Definition 3.5.1 Γ heißt *konsistent* (oder *widerspruchsfrei*), wenn es keine Formel φ gibt mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Γ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Struktur $\bar{A}$ und eine Belegung h gibt, sodaß $\bar{A}$ jede Formel von Γ mit h erfüllt.

Satz 3.5.4 Ist Γ erfüllbar, dann ist Γ auch konsistent.

3.6 Einige Metasätze

Satz 3.6.1 (Generalisierungssatz) Gilt $\Gamma \vdash \varphi$ und ist x gebunden, dann ist $\Gamma \vdash \forall x . \varphi$.

Lemma 3.6.1 Ist $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ und $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$ eine Tautologie, dann gilt $\Gamma \vdash \beta$.

Satz 3.6.2 (Deduktionssatz) $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$

Satz 3.6.3 (Kontraposition) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

Satz 3.6.4 (reductio ad absurdum) Ist $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inkonsistent, dann gilt auch $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

3.7 Vollständigkeitssatz

Lemma 3.7.1 Für jede Formel φ gilt:

$$[\forall x_k.\varphi] = inf\{[\varphi^{x_k}_{x_p}] : p = 1, \ldots, n\}$$

Satz 3.7.1 (Vollständigkeitssatz) Gilt $\Sigma \models \varphi$, dann gilt auch $\Sigma \vdash \varphi$.

Satz 3.7.2 Jede konsistente Menge von Formeln ist erfüllbar.

4 Mechanisches Beweisen

4.1 Die Skolem-Standard-Form

Definition 4.1.1 Atomare Formeln und deren Negation heißen *Literale*. Eine Disjunktion von Literalen heißt *Klausel*. Eine Formel in Prenex-Normal-Form hat ihre Matrix in KNF, wenn die Matrix eine Konjunktion von Klauseln ist.

Definition 4.1.2 Die logisch äquivalente Formel, die man aus einer Formel durch folgenden Algorithmus erreicht heißt in *Skolem-Standard-Form (SSF)*:

a) die Formel wird in die Form $Q_1 x_1 \ldots . Q_n x_n . \psi$ (Prenex-Normal-Form) gebracht, wobei Q_i Quantoren sind

b) der quantorenfreie Teil (Matrix) ψ wird in konjunktive Normalform gebracht

c) die Existenzquantoren werden durch *Skolemfunktionen* ersetzt.

Satz 4.1.1 Sei S eine Menge von Klauseln, die die SSF einer Formel F darstellt. F ist genau dann nicht erfüllbar, wenn S nicht erfüllbar ist.

4.2 Das Herbrand-Universum

Definition 4.2.1 Sei H_0 die Menge der Konstanten, die in der Menge S von Klauseln vorkommen. Kommt keine Konstante vor, so setzt man $H_0 = \{a\}$. Für $i := 0, 1, \ldots$ setzen wir $H_{i+1} := H_i \cup T_i$, wobei $T_i = \{f_n(t_1, \ldots, t_n\}$ mit $t_i \in H_i$ und f_n, $n \in \mathbb{N}$, die n-stelligen Funktionen, die in S vorkommen. $H = \cup_{i=0}^{\infty} H_i$, H heißt das *Herbrand-Universum*.

Definition 4.2.2 Bezeichne S eine Menge von Klauseln und H das zugehörige Herbrand-Universum. Die Menge $\{P(b_1, \ldots, b_n) : b_i \in H, i = 1, \ldots, n\}$, wobei P die Prädikatensymbole durchläuft, die in S vorkommen, heißt *Herbrand-Basis* oder *Atommenge*.

Definition 4.2.3 Ein Klausel C aus S heißt *Grundbeispiel*, wenn alle in C vorkommenden Variablen durch Elemente von H ersetzt sind.

Definition 4.2.4 Bezeichne S ein Menge von Klauseln und H das zugehörige Herbrand-Universum. Sei I eine Belegung von S durch die Elemente von H. I heißt *Herbrand-Interpretation*, wenn gilt:

a) I bildet alle Konstanten in sich ab

b) ist $\bar{f}$ ein n-stelliges Funktionssymbol und sind $h_1, \ldots, h_n \in H$, dann gibt es eine n-stellige Funktion $f : H^n \to H$ mit $f(h_1, \ldots, h_n)$

c) es gibt keine Einschränkung, die n-stelligen Prädikatssymoble zu belegen.

Eine Herbrand-Interpretation wird dargestellt durch $I = \{m_1, \ldots, m_n, \ldots\}$, wobei m_i entweder P_j oder $\neg P_j$ ist

Definition 4.2.5 Sei D eine Interpretation durch eine Struktur $\bar{D}$. I^* heißt die *zugehörige Herbrand-Interpretation*, wenn gilt:
Sei $\alpha : H \to D$ eine Abbildung mit $\alpha(h_i) = d_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ist $P(d_1, \ldots, d_n)$ erfüllbar in $\bar{D}$, dann ist auch $P(h_1, \ldots, h_n)$ wahr in H.

Lemma 4.2.1 Sei D eine Interpretation durch eine Struktur $\bar{D}$, die eine Menge S von Klauseln erfüllt. Dann erfüllt auch jede zu $\bar{D}$ gehörende Herbrand-Interpretation I^* die Menge S.

Satz 4.2.1 Eine Menge S von Klauseln ist genau dann unerfüllbar, wenn S falsch ist unter allen Herbrand-Interpretationen.

4.3 Semantische Bäume

Definition 4.3.1 Ist A eine atomare Formel, dann sind A und $\neg A$ komplementär. $\{A, \neg A\}$ heißt *komplementäres Paar*. Eine Klausel C ist genau dann eine Tautologie, wenn C ein komlementäres Paar enthält.

Definition 4.3.2 Sei S eine Menge von Klauseln und A eine Atommenge von S. Ein Baum T heißt *semantischer Baum für* S, wenn jeder Teilbaum von T nur endlich viele Literale enthält sodaß gilt:

a) Von jedem Knoten N gehen nur endlich viele Kanten aus L_i, $i = 1, \ldots, n$. Ist Q eine Konjunktion der Literale, die zu L_i gehört, so ist $Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$ eine gültige Formel.
b) Sei $I(N)$ die Vereinigung aller Mengen von Literalen, die zu dem Weg von der obersten Wurzel bis zu N gehören. Dann besitzt $I(N)$ kein komplementäres Paar.

Definition 4.3.3 Sei $A = \{A_1, A_2, \ldots\}$ die Atommenge für eine Menge S von Klauseln. Ein semantischer Baum heißt *vollständig*, wenn jeder Weg von der Wurzel bis zum Blatt entweder A_k oder $\neg A_k$ enthält.

Definition 4.3.4 Ein Knoten N heißt ein *Fehlerknoten*, wenn $I(N)$ ein Grundbeispiel der Klauselmenge S falsch macht, aber $I(N)$ dies für keinen Vorgänger N' von N macht.

Definition 4.3.5 Ein semantischer Baum B heißt *abgeschlossen*, wenn B nur endlich lange Wege besitzt, die in einem Fehlerknoten enden.

Definition 4.3.6 Ein Knoten N eines abgeschlossenen semantischen Baumes heißt *schließender* Knoten, wenn alle Nachfolger Fehlerknoten sind.

Satz 4.3.1 (Herbrand, anschaulich) Eine Menge S von Klauseln ist genau dann erfüllbar, wenn es zu jedem vollständigen semantischen Baum von S stets einen endlichen, abgeschlossenen semantischen Baum gibt.

Satz 4.3.2 (Herbrand) Eine Menge S von Klauseln ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge S' von Grundbeispielen der Menge S gibt, die unerfüllbar ist.

4.4 Algorithmus von Davis-Putnam

Definition 4.4.1 Sei G eine Menge von Grundbeispielen. Man verwendet folgende vier Schritte:

a) *Tautologieregeln*: Entferne alle Grundklauseln, die Tautologien sind. G' ist genau dann unerfüllbar, wenn G unerfüllbar ist.

b) *Ein-Literal-Regel*: Sei G eine Grundklausel, die nur aus einem Literal besteht. Entferne aus G alle Grundklauseln, die G enthält. Ist $G' \neq \emptyset$, dann entferne alle $\neg L$ aus G. G' ist genau dann unerfüllbar, wenn G unerfüllbar.

c) *Reine Literal-Regel*: Ein Literal L heißt *rein* in G, wenn $\neg L$ in keiner Grundklausel vorkommt. Ist L rein, dann entferne alle Grundklausel, die L enthält.

d) *Spaltungsregel*: Es sei möglich, daß G in folgende Form gebracht werden kann:

$$(A_1 \vee L) \wedge \ldots \wedge (A_n \vee L) \wedge (B_1 \vee L) \wedge \ldots \wedge (B_n \vee L) \wedge R$$

G ist genau dann unerfüllbar, wenn $S_1 \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ und $S_2 \equiv B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge R$ unerfüllbar sind. R sei kein Literal.

4.5 Das Resolventenprinzip der Aussagenlogik

Vorbemerkung 4.5.1 Schon bei kleinen Beispielen S von Mengen von Klauseln bringt die naive Anwendung des Satzes von Herbrand bereits einen großen Aufwand.

Vorbemerkung 4.5.2 Mit dem Resolventenprinzip ergibt sich deutlich weniger Aufwand. Es ist eine Erweiterung der Ein-Literal-Regel: Betrachte $S = \{P, \neg P \vee Q\}$. Nach der Ein-Literal-Regel hat man $S' = \{Q\}$. Man schreibt $C_1 \equiv P$, $C_2 \equiv \neg P \vee Q$ und $C_3 \equiv Q$.

Definition 4.5.1 (Das Resolventen-Prinzip) Seien zwei Klauseln C_1 und C_2 gegeben. Ist ein Literal L_1 in C_1 komplementär zu L_2 in C_2, dann streicht man die beiden aus C_1 und C_2 und bildet die Disjunktion der Klauseln.

Satz 4.5.1 Seien C_1 und C_2 zwei Klauseln und C deren Resolvente. Dann folgt C semantisch aus C_1 und C_2, d.h. die Resolventenbildung ist korrekt.

Definition 4.5.2 Sei S eine Menge von Klauseln. Eine Resolventenableitung von C in S ist eine endliche Folge von Klauseln $C_1, \ldots C_n$, sodaß C_i entweder aus S ist oder eine Resolvente aus vorhergehenden Klauseln C_j, $j < i$ und $C_n \equiv C$. Eine Resolventenbildung der leeren Klausel $\square$ aus S heißt eine Widerlegung.

4.6 Substitution und Unifikation

Definition 4.6.1 Eine *Substitution* ist eine endliche Menge folgender Form $\{t_1|x_1, \ldots, t_n|x_n\}$, wobei x_i eine Variable und t_i Terme sind. Dabei wird vereinbart, daß t_i verschieden sind zu x_i und außerdem $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Definition 4.6.2 Ein *Grundterm* ist ein Term, in dem nur Konstanten also keine Variablen vorkommen. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Grundterme sind, dann heißt die Substitution *Grundsubstitution.*

Definition 4.6.3 Seien $\theta = \{t_1|x_1, \ldots, t_n|x_n\}$ und $\lambda = \{u_1|y_1, \ldots, u_m|y_m\}$. Die Komposition der beiden Substitutionen ist definiert durch folgende Menge $\lambda \circ \theta := \{\lambda t_1|x_1, \ldots, \lambda t_n|x_n, u_1|y_1, \ldots, u_m|y_m\}$, indem man alle Elemente $\lambda t_j|x_j$ für $\lambda t_j = x_j$ und alle Elemente $u_i|y_i$ für y_i unter $\{x_1, \ldots, x_n\}$ entfernt.

Definition 4.6.4 Eine Substitution θ heißt *Unifikator* (*unifier*) für eine Menge $\{E_1, \ldots E_n\}$ von atomaren Formeln, wenn gilt $\theta E_1 = \theta E_2 = \ldots = \theta E_n$. Ein Unifikator σ heißt ein *allgemeinster Unifikator* (*most general unifier* (*mgu*)), wenn für jeden Unifikator θ eine Substitution λ exisiert, sodaß $\theta = \lambda \circ \sigma$ gilt.

4.7 Unifikationsalgortihmus

Definition 4.7.1 Sei W eine nichtleere Menge von atomaren Formeln. Sei t_k der erste Buchstabe von links, bei dem sich die Formeln aus W unterscheiden. Die *Differenz* von W (*disagreement set*) ist die Menge aller Unterformeln von W, die mit dem Buchstaben, der jeweils an der k-ten Stelle steht beginnen.

Definition 4.7.2 (Unifikationsalgorithmus, Robinson) Der Unifikationsalgorithmus besteht aus folgenden Schritten:

a) Setze $k := 0$, $W_k := W$, $\sigma_k := \varepsilon$.

b) Besteht W_k nur aus einer Formel, dann STOP.
Besteht W_k nicht nur aus einer Formel, dann bestimme die Differenz D_k von W_k.

c) Sind x_k und t_k in der Differenz D_k, wobei x_k in t_k nicht vorkommt, dann gehe nach d), sonst STOP und W ist nicht unifizierbar.

d) $\sigma_{k+1} := \sigma_k\{t_k|x_k\}$ und $W_{k+1} := W_k\{t_k|x_k\}$, d.h. $W_{k+1} := \sigma_{k+1} W_k$.

e) Setze $k := k + 1$ und gehe nach b).

Satz 4.7.1 (Unifikationssatz, Robinson) Sei W eine endliche, nichtleere, unifizierbare Menge von atomaren Formeln. Dann stoppt der Unifikationsalgorithmus nach endlich vielen Iterationen mit der zuletzt verwendeten Substitution σ_k, die allgemeinster Unifikator ist.

4.8 Das Resolventenprinzip in der Prädikatenlogik

Definition 4.8.1 Wenn zwei oder mehr Literale einer Klausel C einem allgemeinsten Unifikator besitzen, dann heißt $C\sigma$ ein *Faktor* von C.

Definition 4.8.2 Seien C_1 und C_2 zwei Klauseln, die keine Variablen gemeinsam haben. Sei L_1 bzw. L_2 ein Literal in C_1 bzw. C_2. Haben L_1 und $\neg L_2$ einen allgemeinsten Unifikator σ, dann heißt die Klausel $(C_1\sigma \setminus L_1\sigma)$ und $(C_2\sigma \setminus L_2\sigma)$ *binäre Resolvente*.

Definition 4.8.3 (Resolventenprinzip der Prädikatenlogik) Eine Resolvente von zwei Klauseln C_1 und C_2 ist eine binäre Resolvente von C_1 (oder einem Faktor von C_1) und von C_2 (oder einem Faktor von C_2). Das Resolventenprinzip ist eine Inferenzregel, die Resolventen aus Mengen von Klauseln erzeugt. Die Resolventen werden bei einer unerfüllbaren Menge von Klauseln bis zur leeren Klausel erzeugt.

4.9 Vollständigkeit des Resolventenprinzips

Bemerkung 4.9.1 Zwischen den Resolventen und den semantischen Bäumen besteht ein Zusammenhang.

Lemma 4.9.1 (Lifting-Lemma) Seien C_1' und C_2' Beispiele von C_1 und C_2 und ist C' eine Resolvente der Beispiele, dann gibt es eine Resolvente C von C_1 und C_2, sodaß C' ein Beispiel von C ist.

Satz 4.9.1 (Vollständigkeitssatz des Resolventenprinzips) Eine Menge S von Klauseln ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine Resolventenableitung der leeren Klausel $\square$ aus S gibt.

5 Nichtklassische Logiken

5.1 Fuzzylogik

Definition 5.1.1 Sei E eine Grundmenge und μ eine Funktion von E in das Einheitsintervall.

$$\mu : E \to [0,1].$$

Dann heißt die Menge A aller Paare $(x, \mu(x))$ eine Fuzzymenge über E. μ heißt die Zugehörigkeitsfunktion und $\mu(x)$ der Grad der Zugehörigkeit (Grad der Wahrheit).

Definition 5.1.2 Sei E eine Grundmenge und A, B Fuzzymengen mit den Zugehörigkeitsgraden μ_A und μ_B. Dann gilt

$$A = B \ \Leftrightarrow \ \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ und} A \leq B \ \Leftrightarrow \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ für alle } x \in E.$$

Definition 5.1.3 Die Operationen auf Fuzzymengen sind definiert durch

a) $\bar{B} := \{\mu_{\bar{B}}(x) | \mu_{\bar{B}}(x) := 1 - \mu_B(x)\}$.
b) $A \cup B := max(\mu_A, \mu_A)$.
c) $A \cap B := min(\mu_A, \mu_A)$.

Definition 5.1.4 Eine *MV-Algebra* ist eine Algebra $\bar{A} = (A, \oplus, \odot, ^-, 0, 1)$ mit folgenden Axiomen:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A1}) &: x \oplus y = y \oplus x \quad , \quad x \odot y = y \odot x \\
(\mathrm{A2}) &: x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \quad , \quad x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z \\
(\mathrm{A3}) &: x \oplus \bar{x} = 1 \quad , \quad x \odot \bar{x} = 0 \\
(\mathrm{A4}) &: x \oplus 1 = 1 \quad , \quad x \odot 0 = 0 \\
(\mathrm{A5}) &: x \oplus 0 = x \quad , \quad x \odot 1 = x \\
(\mathrm{A6}) &: x \,\bar{\oplus}\, y = \bar{x} \odot \bar{y} \quad , \quad x \,\bar{\odot}\, y = \bar{x} \oplus \bar{y} \\
(\mathrm{A7}) &: \bar{\bar{x}} = x \\
(\mathrm{A8}) &: \bar{0} = 1 \\
(\mathrm{A9}) &: x \,\underline{\vee}\, y = y \,\underline{\vee}\, x \quad , \quad x \,\bar{\wedge}\, y = y \,\bar{\wedge}\, x \\
(\mathrm{A10}) &: x \,\underline{\vee}\, (y \,\underline{\vee}\, z) = (x \,\underline{\vee}\, y) \,\underline{\vee}\, z \quad , \quad \text{dual} \\
(\mathrm{A11}) &: x \oplus (y \,\bar{\wedge}\, z) = (x \oplus y) \,\bar{\wedge}\, (x \oplus z) \quad , \quad \text{dual,}
\end{aligned}$$

wobei $x \,\underline{\vee}\, y := (x \odot y) \oplus y$ und $x \,\bar{\wedge}\, y := (x \oplus y) \odot y$.

5.2 Grobe Mengen (rough sets)

Definition 5.2.1 Ein Näherungsraum A ist ein geordnetes Paar $A = (U, R)$, wobei U eine Menge (Universum) und R eine binäre Relation auf U ist. R ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 5.2.2 Die Äquivalenzklassen der Relation R heißen die *elementaren* Mengen von A. $\emptyset$ ist ebenfalls elementare Menge. Jede endliche Vereinigung von elementaren Mengen heißt *zusammengesetzt*.

Definition 5.2.3 Sei $X \subseteq U$. Unter einer oberen (unteren) Approximation von X in A ($\bar{A}(X)$ ($\underline{A}(X)$)) verstehen wir die kleinste (größte) zusammengesetzte Menge von A, die in X enthalten ist. $Rand_A(X) := \bar{A}(X) \setminus \underline{A}(X)$.

Bemerkung 5.2.1 Die Approximationen weisen folgende Eigenschaften und Zusammenhänge auf:

$$\begin{aligned}
(A1) &: \underline{A}(X) \subseteq X \subseteq \bar{A}(X) \\
(A2) &: \underline{A}(U) = \bar{A}(U) = U \\
(A3) &: \underline{A}(\emptyset) = \bar{A}(\emptyset) = \emptyset \\
(A4) &: \bar{A}(X \cup Y) = \bar{A}(X) \cup \bar{A}(Y) \\
(A5) &: \underline{A}(X \cup Y) \supseteq \underline{A}(X) \cup \underline{A}(Y) \\
(A6) &: \bar{A}(X \cap Y) = \bar{A}(X) \cap \bar{A}(Y) \\
(A7) &: \underline{A}(X \cap Y) \subseteq \underline{A}(X) \cap \underline{A}(Y) \\
(A8) &: \bar{A}(X') = \bar{A}(X)' \\
(A9) &: \underline{A}(X') = \underline{A}(X)' \\
(A10) &: \underline{A}(\underline{A}(X)) = \bar{A}(\underline{A}(X)) = \underline{A}(X) \\
(A11) &: \bar{A}(\bar{A}(X)) = \underline{A}(\bar{A}(X)) = \bar{A}(X)
\end{aligned}$$

Satz 5.2.1 Eine Zugehörigkeitsgradfunktion

$$\mu_X(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \underline{A}(X) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x \in Rand_A(X) \\ 0 & \text{falls } x \in U \setminus \bar{A}(X) \end{cases}$$

läßt sich nicht auf Vereinigung bzw. Durchschnitt von Mengen übertragen, d.h. $\mu_{X \cup Y}(x) \neq max(\mu_X(x), \mu_Y(x))$.

5.3 Mehrwertige Logik und die Polynomvollständigkeit

Beispiel 5.3.1 Definition der dreiwertigen Logik nach ŁUKASIEWICZ:

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

x	$\neg x$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Ergänzend die modalen Operatoren:

x	$\Box x$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

x	$\Diamond x$
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Definition 5.3.1 Sei $\bar{A} = (A;\Omega)$ eine Algebra. Wie definieren für jedes n-stellige Funktionssymbol f_i eine n-stellige wortbildende Operation W_{f_i} durch: Seien $g_1, \ldots, g_m$ Konstantensymbole aus A und seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen, dann ist $W_{f_i}(g_1, \ldots, g_m, x_1, \ldots, x_n) := f_i(g_1, \ldots, g_m, x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 5.3.2 Zwei Worte $W'_{f_i}(g_i, x_j)$ und $W''_{f_i}(g_i, x_j)$ mit $g_i = g_1, \ldots, g_m$ und $x_j = x_1, \ldots, x_n$ heißen *gleich*, wenn sie in der Algebra $(A;\Omega)$ gleich sind. Die Kongruenzklasse der Worte in der Algebra $(A;\Omega)$ sind die Polynome der Form $\tilde{P}(g_1, \ldots, g_m, x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 5.3.3 Eine Polynomfunktion $P(g_1, \ldots, g_m, x_1, \ldots, x_n)$ einer Algebra $(A;\Omega)$ ist eine Abbildung $(x_1, \ldots, x_n \mapsto \tilde{P}(g_1, \ldots, g_m, x_1, \ldots, x_n)$, die durch das Polynom definiert wird.

Bemerkung 5.3.1 Ein Term bzw. eine Termfunktion ist ein Polynom bzw. eine Polynomfunktion ohne Konstanten.

Definition 5.3.4 Eine Algebra $\bar{A}$ heißt *n-polynomvollständig*, wenn $P_n(A) = F_n(A)$ ist, d.h. jede n-stellige Funktion auf A eine Polynomfunktion ist.

Proposition 5.3.1 Wenn $\bar{A}$ n-polynomvollständig ist, dann ist $\bar{A}$ auch m-polynomvollständig für alle $m \leq n$.

Lemma 5.3.1 Wenn für $n \geq 2$, $a \neq b$ und $\varphi \in F_n(A)$ ist, dann ist auch

$$\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \begin{cases} a & \text{falls } (g_1, \ldots, g_n) \neq (u_1, \ldots, u_n) \\ b & \text{falls } (g_1, \ldots, g_n) = (u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

auch eine Polynomfunktion $\varphi \in P_n(A)$.

Lemma 5.3.2 Sei $n \leq 2$ und $\rho \in P_n(A)$ eine Polynomfunktion. Wenn ψ eine Funktion ist mit:

$$\psi(g_1, \ldots, g_n) = \begin{cases} \rho(g_1, \ldots, g_n) & \text{falls } (g_1, \ldots, g_n) \neq (u_1, \ldots, u_n) \\ \rho(g_1, \ldots, g_n) & \text{falls } (g_1, \ldots, g_n) = (u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

dann ist ψ eine Polynomfunktion.

Satz 5.3.1 Wenn die Algebra $\bar{A}$ 2-polynomvollständig ist, dann ist $\bar{A}$ auch n-polynomvollständig.

5.4 Clones und der Satz von Rosenberg

Definition 5.4.1 Eine *Clone* $\bar{H} = (H; \circ, \xi, \tau, \Delta, e)$ ist eine Algebra vom Typ $(2, 1, 1, 1, 0)$, wobei die Operationen wie folgt definiert sind:

a) $(f \circ g)(x_i, x_j) := f(g(x_i), x_j)$, wobei f n-stellig und g m-stellig ist, also $x_i = x_1, \ldots, x_m$ und $x_j = x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}$
b) $(\xi f)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_2, \ldots, x_n, x_1)$
$(\xi f)(x_1) := f(x_1)$
c) $(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$
$(\tau f)(x_1) := f(x_1)$
d) $(\Delta f)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$
$(\Delta f)(x_1) := f(x_1)$
e) $e(x_1, x_2) = x_1$, also die 1. Projektion.

Bezeichnung 5.4.1 Sei $\bar{A} = (A, \Omega)$ eine Algebra und $F(A)$ der Clone aller Funktionen auf der Menge A. Dann ist der Unterclone $P(A)$, der von den konstanten Funktionen $\{c_a \mid a \in A\}$ und den Operationen aus Ω erzeugt wird der Clone der Polynomfunktionen. $T(A)$ ist der Unterclone, der nur durch die Operationen aus Ω erzeugt wird.

Definition 5.4.2 Sind C_1 und C_2 zwei Unterclones von $F(A)$, dem Clone aller Funktionen auf der Menge A, dann ist auch $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$ ein Clone. $C_1 \vee C_2$ ist der kleinste Unterclone, der C_1 und C_2 umfaßt. $C_1 \vee C_2 := < C_1 \cup C_2 >$.

Bezeichnung 5.4.2 Die k-stelligen Funktionen eines Clones bezeichnet die Menge $C^{(k)} := \{f \mid f \in C,\ f\ k\text{-stellig}\}$.

Definition 5.4.3 Eine n-stellige Relation ρ ist eine Teilmenge von A^n. Eine n-stellige Relation $\rho \subseteq A^n$ heißt *Invariante* eines Clones C, wenn jedes $f \in C^{(k)}$ die Relation ρ bewahrt. Für jedes $f \in C^{(k)}$ und alle

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{kn}) \in \rho$$

ist dann

$$(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{k1}, \ldots, a_{kn})) \in \rho.$$

Bezeichnung 5.4.3 $Pol(\rho)$ ist die Menge aller Funktionen, die ρ bewahren. $Inv(C)$ bezeichnet die Invariante des Clones C.

Satz 5.4.1 Zwischen der teilweise geordneten Menge $L(C)$ aller Unterclones von $F(A)$ auf der Menge A und der teilweise geordneten Menge $L(R)$ aller Invarianten gibt es eine Galoisverbindung und damit einen Antiautomorphismus.

Bemerkung 5.4.1 Ist $C_1 \subseteq C_2$, dann ist $Inv(C_2) \subseteq Inv(C_1)$. Ist $R_1 \subseteq R_2$, dann ist $Pol(R_1) \subseteq Pol(R_2)$.

Definition 5.4.4 Ein Clone C auf A heißt *funktional vollständig*, wenn $C = F(A)$ ist, d.h. alle Funktionen umfaßt. Die Algebra $\bar{A}$ heißt *primal* (*termvollständig*), wenn $T(A) = F(A)$ ist. $\bar{A}$ heißt *polynomvollständig*, wenn $P(A) = F(A)$ ist.

Bezeichnung 5.4.4 ρ heißt *total reflexiv*, wenn ρ jedes k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ enthält mit $|\{a_1, \ldots, a_k\}| < k$, d.h. es gibt mindestens zwei $a_i = a_j$ mit $i \neq j$. ρ heißt *total symmetrisch*, wenn $(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(k)}) \in \rho$ für alle $(a_1, \ldots, a_k) \in \rho$ und jede Permutation $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$. Eine total reflexive und total symmetrische Relation heißt *zentral*, wenn es eine Menge Z mit $\emptyset \subsetneq Z \subsetneq A$ gibt, sodaß $(z, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$ für alle $z \in Z$.

Satz 5.4.2 (Rosenberg) Die maximalen Clones auf einer endlichen Menge A sind alle Clones $Pol(\rho)$, wobei ρ wie folgt definiert ist:

- Typ O : ρ ist eine teilweise geordnete Menge mit dem kleinsten Element 0 und dem größten Element 1.
- Typ L : auf A (mit $|A| = p^n$) ist eine abel'sche Gruppe $(A, +)$ mit der Relation $\rho = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$ quasilinear.
- Typ C : ρ ist eine nichttriviale Äquivaltenzrelation.
- Typ Z : ρ ist ein zentrale Relation.
- Typ P : $\rho = \{(a, s(a)) \mid a \in A\}$, wobei ρ eine Permutation mit Zyklen gleicher Primzahllänge ohne Fixpunkt ist.
- Typ R : ρ ist eine reguläre Relation.

5.5 Über Toleranzen und zentrale Relationen

Definition 5.5.1 Sei $\bar{A} = (A, \Omega)$ eine Algebra. Eine binäre Relation ρ auf A heißt *kompatibel*, wenn für jede Operation f_i gilt: Ist $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \rho$, dann ist $(f_i(a_1, \ldots, a_n), f_i(b_1, \ldots, b_n)) \in \rho$. Eine kompatible Relation ρ auf einer Algebra $\bar{A}$ heißt *Toleranz*, wenn ρ reflexiv und symmetrisch ist. Eine Toleranz ρ von $\bar{A}$ heißt Kongruenzrelation, wenn ρ transitiv ist.

Definition 5.5.2 Eine Algebra $\bar{A}$ heißt *zentral-polynomvollständig*, wenn jede zentrale Funktion $F(A)$ eine Polynomfunktion $P(A)$ ist.

5.6 Modale Logiken und Rahmen

Definition 5.6.1 Eine modale Algebra $\bar{A} = (A; \wedge, \vee, ', 0, 1, \Box, \Diamond)$ entspricht einer Bool'sche Algebra $(A; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ mit den Operationen $\Box$ für Notwendigkeit und $\Diamond$ für Möglichkeit, die folgende Axiome erfüllen:

a) $\Box 1 = 1$

b) $\Box(x \wedge y) = (\Box x) \wedge (\Box y)$

c) $\Diamond x = (\Box x')'$

Wegen Dualiät gelten ebenso:

d) $\Diamond 0 = 0$

e) $\Diamond(x \vee y) = (\Box x) \vee (\Box y)$

f) $\Box x = (\Diamond x')'$.

Definition 5.6.2 Eine Bewertung (valuation) v auf $\bar{A}$ ist eine Funktion von der modalen Aussagenlogik in die modale Algebra mit folgenden Bedingungen:

a) $v(\neg A) = \neg v(A)$

b) $v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$

c) $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B)$

d) $v(\Box A) = \Box v(A)$

e) $v(\Diamond A) = \Diamond v(A)$.

Ein *algebraisches Modell* $(\tilde{A}, v)$ ist eine modale Algebra $\tilde{A}$ mit der Bewertung v. $\tilde{A}$ ist genau dann *wahr* oder *verifiziert* in diesem Modell, wenn $v(A) = 1$. Eine Formel ist genau dann in einer modalen Algebra wahr, wenn sie in allen Modellen der modalen Algebra wahr ist.

Definition 5.6.3 Ein *Rahmen* (*frame*) $\underline{F} = (W, R)$ besteht aus einer Menge W und einer binären Relation R auf W. Eine Bewertung V auf einem Rahmen $\underline{F}$ ist eine Funktion, sodass $V(A, x) \in \{F, T\}$, die für jede Aussagenformel A und $x \in W$ folgende Bedingungen erfüllt:

a) $V(\neg A, x) = T \;\Leftrightarrow\; V(A, x) = F$

b) $V(A \wedge B, x) = T \;\Leftrightarrow\; V(A, x) = T$ und $V(B, x) = T$

c) $V(A \vee B, x) = T \;\Leftrightarrow\; V(A, x) = T$ oder $V(B, x) = T$

d) $V(\Box A, x) = T \;\Leftrightarrow\; \forall x.(xRy \rightarrow V(A, y) = T)$

e) $V(\Diamond A, x) = T \;\Leftrightarrow\; \exists x.(xRy \wedge V(A, y) = T)$

Ein Modell $(\underline{F}, V)$ ist ein Rahmen $\underline{F}$ mit einer Bewertung V. A ist erfüllbar, wenn $V(A, x) = T$ für alle $x \in W$.

Definition 5.6.4 Eine modale Logik heißt *normal*, wenn

A1) : sie alle Tautologien enthält

A2) : $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$

und sie abgeschlossen ist unter

R1) : $\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$

R2) : $\frac{A}{\Box A}$

Definition 5.6.5 Die modale Logik von Gödel ist eine normale modale Logik, für die zusätzlich gilt:

A3) : $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

6 Unvollständigkeit

6.1 Prädikatenlogik zweiter Stufe

Definition 6.1.1 Ist X eine n-stellige Prädikatsvariable und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist $X(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel zweiter Stufe. Ist φ ein Formel zweiter Stufe und ist Y eine Prädikatsvariable, dann ist $\forall X.\varphi$ eine Formel zweiter Stufe. Ebenso für Funktionsvariablen.

Definition 6.1.2 Eine *Belegung zweiter Stufe* in einer Struktur $\bar{A}$ ist eine Abbildung, die jeder Variablen x_i ein Element aus A und jeder Prädikatsvariablen X_i^n eine n-stellige Relation von $\bar{A}$ zuordnet.

Definition 6.1.3 Ist $\bar{A}$ eine Struktur und h eine Belegung der zweiten Stufe in $\bar{A}$, dann setzen wir:

a) $\bar{A} \vDash X(t_1, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn $((t_1, \ldots, t_n) \in h(X)$, d.h. wenn $(t_1, \ldots, t_n)$ in der Relation $h(X)$ steht.

b) $\bar{A} \vDash \forall X.\varphi$ genau dann, wenn jede Belegung h von X, d.h. für alle n-stelligen Relationen von A die Formel φ erfüllt wird.

Satz 6.1.1 Jedes Modell der Peano-Axiome ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

6.2 Rekursive Funktionen

Definition 6.2.1 Die Peano-Arithmetik (PA) besteht aus folgenden Axiomen der formalen Zahlentheorie der ersten Stufe mit den Parameter S, 0, +, sowie den primitiv rekursiven Funktionen:

A1) : $0 \neq Sx$

A2) : $Sx = Sy \to x = y$

A3) : $x < z \leftrightarrow \exists y.(x + y = z)$

A4) : $x + \tilde{0} = x \qquad x \cdot \tilde{0} = \tilde{0}$

A5) : $x + Sy = S(x + y) \qquad x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$

A6) : $p_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$

A7) : $c_n^k(x_1, \ldots, x_k) = \tilde{n}$

A8) : $\tilde{f}$ ist durch primitive Rekursion aus $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ definiert, wenn gilt:

i) $\tilde{f}(0, x_1, \ldots, x_k) = \tilde{g}(x_1, \ldots, x_k)$

ii) $\tilde{f}(Sx, x_1, \ldots, x_k) = \tilde{h}(\tilde{f}(x, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$

$\tilde{f}$ gehört zu PA, wenn $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ zu PA gehören.

A9) : $\tilde{f}$ ist durch Komposition aus $\tilde{g}$, $\tilde{h_1}$ und $\tilde{h_n}$ definiert, wenn gilt:

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_k) = \tilde{g}(\tilde{h_1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \tilde{h_k}(x_1, \ldots, x_k))$$

$\tilde{f}$ gehört zu PA, wenn $\tilde{g}$ und $\tilde{h_1}, \ldots, \tilde{h_k}$ zu PA gehören.

A10) : $f(\tilde{0}) \wedge \forall x.(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x.\varphi(x)$
(abgeschwächtes Induktionsprinzip).

Definition 6.2.2 Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen ist die kleinste Menge, die die Funktionen A6 und A7 enthält und abgeschlossen ist unter primitiver Rekursion aus A8 und der Komposition von aus A9.

6.3 Gödelzahlen und modale Logik

Definition 6.3.1 (Gödelisierung) Wir ordnen jedem Symbol des Alphabets der Sprache der formalen Zahlentheorie eine Zahl zu:

$$\begin{array}{ccc}
0 & \mapsto & 1 \\
\vee & \mapsto & 3 \\
\neg & \mapsto & 5 \\
\exists & \mapsto & 7 \\
S & \mapsto & 9 \\
+ & \mapsto & 11 \\
\cdot & \mapsto & 13 \\
= & \mapsto & 15 \\
< & \mapsto & 17 \\
x_i & \mapsto & 2i
\end{array}$$

Definition 6.3.2 Die Gödelzahlen der Terme sind folgendermaßen definiert :

$$\begin{array}{lcl}
\ulcorner x_i \urcorner & = & < 2i > \\
\ulcorner 0 \urcorner & = & < 1 > \\
\ulcorner St \urcorner & = & < 9, \ulcorner t \urcorner > \\
\ulcorner s + t \urcorner & = & < 11, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \\
\ulcorner s \cdot t \urcorner & = & < 13, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner >
\end{array}$$

und die Gödelzahlen der Formeln wie folgt:

$$\begin{array}{lcl}
\ulcorner s = t \urcorner & = & < 15, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner > \\
\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner & = & < 3, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner > \\
\ulcorner \neg \varphi \urcorner & = & < 5, \ulcorner \varphi \urcorner > \\
\ulcorner \exists x_i.\varphi \urcorner & = & < 7, \ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner >
\end{array}$$

Bemerkung 6.3.1 Die Terme t und die Formeln φ wurden Gödelzahlen $\ulcorner t \urcorner$ und $\ulcorner \varphi \urcorner$ zugeordnet. Damit kann die Syntax rekursiv simuliert werden. Zudem können Ableitungen (formale Beweise) als endliche Folgen von Formeln betrachtet werden.

6.4 Unvollständigkeitssätze

Satz 6.4.1 (Löb) Für alle Aussagen φ, ψ gilt:

a) gilt $PA \vdash \varphi$, dann gilt auch $PA \vdash \Box \ulcorner \varphi \urcorner$

b) $PA \vdash ((\Box \ulcorner \varphi \urcorner \wedge \Box \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to \Box \ulcorner \psi \urcorner)$

c) $PA \vdash (\Box \ulcorner \varphi \urcorner \to \Box(\Box \ulcorner \varphi \urcorner))$.

Satz 6.4.2 (Diagonalisierungslemma) In der Formel ψ sei nur eine Variable x frei. Dann gibt es eine Aussage φ, sodaß gilt $PA \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner))$.

Satz 6.4.3 (Gödel) Sei $PA \vdash (\varphi \leftrightarrow \neg\Box(\ulcorner \varphi \urcorner))$. Dann gilt:

a) $PA \nvdash \varphi$

b) $PA \nvdash \neg\varphi$