Einführung in die mehrwertige Logik

Markus Heidenreich

2. Februar 2000

Zusammenfassung

Da die zweiwertige Aussagenlogik nicht nur innerhalb der Logik insgesamt, sondern auch schon in der Aussagenlogik einen vergleichbaren Platz wie die euklidische Planimetrie im Rahmen der gesamten modernen Geometrie einnimmt, soll hier eine Einführung in eine vom tertium non datur unabhängige mehrwertige Logik gegeben werden. Neben Definition und Beispielen mehrwertiger Logiken soll auch auf die Möglichkeit der Axiomatisierung sowie auf Fragen des Entscheidungsproblems in solchen Logiken eingegangen werden.

1 Definition und Beispiele

Definition 1.1 Ein Tripel $\mathcal{M} = (M,\ M^+,\ \phi)$ heißt *logische Matrix* bezüglich der Funktorbasis ϕ, wenn

a) M ist eine Menge von Wahrheitswerten

b) $M^+ \subseteq M$, $M^+ \neq \emptyset$ ist die Menge der ausgezeichneten Wahrheitswerte

c) ϕ ist eine Funktorbasis.

$\mathcal{M}$ heißt *trivial*, wenn $M^+ = M$ und *normiert*, wenn $|M^+| = 1$.

Definition 1.2 Eine Abbildung $\alpha : \mathbf{V} \to M$ heißt eine *Belegung in die Matrix* $\mathcal{M}$. α läßt sich in üblicher Weise zu einer *Bewertung* $\bar{\alpha}_\phi : \mathcal{L}_\phi \to M$ fortsetzen. Man sagt α *erfüllt* die Formel P (symbolisch $\models^{\mathcal{M}}_\alpha P$), wenn $\bar{\alpha}(P) \in M^+$.
P heißt $\mathcal{M}$*-Tautologie* (symbolisch $\models^{\mathcal{M}} P$), falls $\models^{\mathcal{M}}_\alpha P$ für alle α.

Beispiel 1.1 Im speziellen kann die uns bekannte zweiwertige Logik als ein solches Tripel $\mathcal{M}_\mathcal{B} = (\{0,1\},\ \{1\},\ \{\wedge, \vee, \neg, \to\})$ darstellbar, wobei die Funktionen durch Wertetabellen hier in üblicher Weise definiert sind.

Um zu mehrwertigen Matrizen zu gelangen, muß die Menge M einfach um Elemente erweitert werden. Darüberhinaus muß man eine Menge von ausgezeichneten Werten aus M wählen und eine möglichst sinnvolle Definition für die Funktionen aus ϕ finden.

Sei $M = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ kanonisch angeordnet und interpretiert man den neuen Wert $\frac{1}{2}$ als *vielleicht* oder *unentschieden*, so kann man für $\wedge_3, \vee_3 \in \phi$ die entsprechenden klassischen Wahrheitswertefunktionen plausibel verallgemeinern:

$$x \wedge_3 y = min\{x, y\} \qquad x \vee_3 y = max\{x, y\}$$

Mehr Freiheit hat man, wenn man versucht auf intuitive Weise eine dreiwertige $\neg$- und $\to$-Funktion zu definieren.

Beispiel 1.2 Łukasiewicz definiert $\neg_l$ und $\to_l$ durch folgende Wertetabellen:

x	$\neg_l x$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\to_l$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Die logische Matrix $\mathcal{M}_l := (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \{\wedge_3, \vee_3, \neg_l, \to_l\})$ nennt man auch die Łukasiewicz-Matrix.

Beispiel 1.3 Eine weitere Möglichkeit, dreiwertige „$\neg$“- und „$\rightarrow$“-Funktionen zu definieren ergibt sich durch die intuitionistische Matrix:

x	$\neg_i x$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$\rightarrow_i$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

insgesamt ergibt sich $\mathcal{M}_i := (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \{\wedge_3, \vee_3, \neg_i, \rightarrow_i\})$.

Sind die Funktionen aus ϕ festgelegt, so ist aufgrund deren Definition jeder Formel P bei einer Belegung $\alpha : \mathbf{V} \rightarrow M$ ein wohldefinierter Wert $\bar{\alpha}_\phi(P) \in M$ zugeordnet.

Definition 1.3 Jede logische Matrix bestimmt durch die Defintion der Funktionen eine gewisse Logik $L\mathcal{M} := \{P \in \mathcal{L}_\phi : \models^{\mathcal{M}} P\}$.

Beispiel 1.4 Wie leicht einzusehen ist, sind die Formeln

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \quad \text{und} \quad ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$$

sowohl in $\mathcal{M}_l$ als auch in $\mathcal{M}_i$ Tautologien. Dagegen sind die klassisch gültigen Formeln

$$(P \vee \neg P) \quad \text{und} \quad (((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$$

weder in $\mathcal{M}_l$ noch in $\mathcal{M}_i$ gültig.

2 Eigenschaften der Matrizen

Es ist also gelungen, logische Systeme zu konstruieren, in denen das tertium non datur nicht gilt. Man hat sich allerdings nicht zu stark von der klassischen Logik entfernt, da jede $\mathcal{M}_l$- bzw. $\mathcal{M}_i$-Tautologie auch eine klassische Tautologie ist. Man erkennt diesen Umstand leicht, da die klassische Logik eine Submatrix von $\mathcal{M}_l$ bzw. $\mathcal{M}_i$ darstellt. Wir wollen nun nachprüfen, welche bekannten Eigenschaften der klassischen Logik in unserem allgemeineren Konstrukt gelten.

Satz 2.1 $L\mathcal{M}_l$ und $L\mathcal{M}_i$ sind gegenüber der Anwendung des Modus ponens abgeschloßen.

Beweis. Seien $\models^{\mathcal{M}_l} P$ und $\models^{\mathcal{M}_l} P \to Q$ und eine Belegung $\alpha : \mathbf{V} \to M$ gegeben. Dann ist $\bar{\alpha}(P) = \bar{\alpha}(P \to Q) = 1$. Aus $1 = \bar{\alpha}(P \to Q) = \bar{\alpha}(P) \to_l \bar{\alpha}(Q)$ folgt aufgrund der Definition von $\to_l$, daß $\bar{\alpha}(Q) = 1$ gelten muß. So folgt aus $\models^{\mathcal{M}_l} P$ und $\models^{\mathcal{M}_l} P \to Q$, daß $\models^{\mathcal{M}_l} Q$ gilt und somit der Modus ponens.
Für $\mathcal{M}_i$ verläuft der Beweis analog.

□

Es läßt sich also das klassische Folgern verallgemeinern. Genauso kann die logische Äquivalenz durch $P \models_{\mathcal{M}} Q$ genau dann, wenn $\bar{\alpha}(P) = \bar{\alpha}(Q)$ für alle $\alpha : \mathbf{V} \to M$ verallgemeinert werden. Man sieht leicht, daß $P \models_{\mathcal{M}} Q$ und $Q \models_{\mathcal{M}} P$ genau dann, wenn $P \to Q, Q \to P \in L\mathcal{M}$, also hier zum klassischen Fall analoge Kennzeichnung der logischen Äquivalenz.

3 Mehrwertige Logik nach Post

Interessant ist, daß unabhängig von Łukasiewicz auch Post ein mehrwertiges Logiksystem entwickelte und dies kurz nach Łukasiewicz veröffentlichte. Überraschenderweise unterscheidet sich der Ansatz von Post nur wenig von dem Łukasiewicz'schen. Auch Post versucht, die zweiwertige Logik so zu verallgemeinern, daß diese ein Spezialfall bleibt und entfernt sich ebenfalls nicht zu stark von ihr. Er formuliert folgende

Definition 3.1 Seien $1, 2, \dots, n$ Wahrheitswerte und n eine endliche Zahl. Seien die Grundfunktionen die zyklische Negation und die Alternative, also

a) $[N^P\alpha] = [\alpha] + 1$, falls $1 \leq [\alpha] \leq n-1$
$[N^P\alpha] = 1$, falls $[\alpha] = n$

b) $[A\alpha\beta] = min([\alpha], [\beta])$

funktional vollständig und für $n = 2$ sind N^P und A die bekannten zweiwertigen Funktionen. Eine Tautologie ist ein Ausdruck, der immer einen solchen Wert i annimmt, daß $1 \leq i \leq s$, wobei $1 \leq s < n$. Man nennt dann die Werte $1, \dots, s$ ausgezeichnete Wahrheitswerte.

Post entwickelte auch eine Methode zur Axiomatisierung seiner n-wertigen Aussagenlogik, womit wir uns in Abschnitt 5 auch befassen wollen.

4 Die Matrix der gespaltenen Wahrheit

Wir wollen hier eine anwendungsnahe Konstruktion einer dreiwertigen Logik beleuchten, bei der gewisse philosophische Aspekte einfließen. So wollen wir A als einen privilegierten Personenkreis - die Autorität - und B als die Untergeordneten - das gewöhnliche Volk - bezeichnen. Wie in einer solchen Gesellschaftsstruktur denkbar, verfügt A über einen Informationsmonopol. Um dies zu modellieren führen wir drei verschiedene Arten von Informationen ein:

a) die öffentliche Wahrheit, d.h. A und B verfügen gleichermaßen über eine zutreffende Information und geben einer solchen Aussage den Wert 1

b) den Wert $\frac{1}{2}$ wollen wir geheimen Wahrheiten zuweisen, d.h. wahren Aussagen von denen nur der privilegierte Personenkreis A weiß

c) grundsätzlich falschen Aussagen weisen wir den Wert 0 zu.

Nun können alleinstehenden Variablen (sogenannten atomaren Aussageformen) in eindeutiger Weise Werte zugewiesen werden, wenn wir uns eine Belegungsfunktion $\alpha : \mathbf{V} \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ als gegeben vorstellen. Um nun allgemeinen Aussageformen (wir lassen die Funktoren $\neg_s$ und $\to_s$ zu) Werte zuweisen zu können, führen wir zunächst eine Relation $\Vdash$ zwischen den Elementen der Menge $\{A, B\}$ und Verkettungen der atomaren Aussagen P und Q ein und definieren für $S \in \{A, B\}$:

a) $S \Vdash P$ nach oben genannter Wertzuweisung für atomare Aussagen

b) $S \Vdash \neg_s P$ genau dann, wenn $A \nVdash P$

c) $S \Vdash P \to_s Q$ genau dann, wenn $A \Vdash P \Rightarrow A \Vdash Q$.

Aufgrund dieser Definition ergeben sich folgende Wertetabellen für $\neg_s$ und $\to_s$:

P	$\neg_s P$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$\to_s$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Es soll $\{1\}$ als die Menge der ausgezeichneten Werte gelten, d.h. eine Aussage X ist wahr über $\mathcal{M}_s$, wenn $\bar{\alpha}(X) = 1$ für alle $\alpha : \mathbf{V} \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$. Auch hier sieht man durch die Wertetabellen für $\neg_s$ und $\to_s$ leicht ein, daß jede über $\mathcal{M}_s$ wahre Aussage auch eine klassische Tautologie darstellt, da die klassische Logik auch hier Submatrix von $\mathcal{M}_s$ ist. Es gilt also $Lk \supseteq L\mathcal{M}_s$. Obwohl das ausschlaggebende Argument für die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}_l$ und $\mathcal{M}_i$ bezüglich des Modus ponens hier nicht angewendet werden kann, gilt in $\mathcal{M}_s$ der Modus ponens dennoch. Dies zeigt folgender

Satz 4.1 $L\mathcal{M}_s$ ist gegenüber der Anwendung der Modus-ponens-Regel abgeschloßen.

Beweis. Man wendet hier einen Trick an und setzt die Menge $\{1, \frac{1}{2}\}$ als die Menge der ausgezeichneten Werte. Es werden also sowohl öffentliche als auch geheime Wahrheiten als Tautologien über $\mathcal{M}_s$ betrachtet. Führt man nun eine neue Belegungsfunktion $\beta : \mathbf{V} \to \{1, 0\}$ ein, für die gilt: $\bar{\beta}(X) = 1$, falls $\bar{\alpha}(X) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ und $\bar{\beta}(X) = 0$ sonst, so verläuft der Beweis der Abgeschlossenheit analog zum Beweis in Satz 2.1.

□

Auf die gleiche Weise gelingt der Beweis, daß $Lk \subseteq L\mathcal{M}_s$, daß also auch jede klassische Tautologie $\mathcal{M}_s$-Tautologie ist. Damit gilt insgesamt $Lk = L\mathcal{M}_s$.

5 Axiomatisierung mehrwertiger Logiken

Obwohl $\mathcal{M}_l$ bzw. $\mathcal{M}_i$ nicht funktional vollständig sind, da keine Formel angegeben werden kann, die konstant zu $\frac{1}{2}$ ausgewertet werden könnte, sind sowohl $\mathcal{M}_l$ als auch $\mathcal{M}_i$, ähnlich wie die klassische Logik durch ein Axiom-Regel-Kalkül darstellbar. Sowohl $L\mathcal{M}_l$ als auch $L\mathcal{M}_i$ sind unmittelbare Vorgänger von Lk im Verband der strukturellen Logiken, die als einzige zulässige Regel den Modus ponens besitzen.

In folgender Tabelle sind die zur Axiomatisierung benötigten Formeln für $\mathcal{M}_l$ und $\mathcal{M}_i$ aufgelistet:

Axiomensystem für $L\mathcal{M}_l$:

$A_l1.$ $P \to (Q \to P)$

$A_l2.$ $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$

$A_l3.$ $((P \to \neg P) \to P) \to P$

$A_l4.$ $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$

Axiomensystem für $L\mathcal{M}_i$:

$A_i1.$ $P \to (Q \to P)$

$A_i2.$ $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$A_i3.$ $(P \land Q) \to P$

$A_i4.$ $(P \land Q) \to Q$

$A_i5.$ $(P \to Q) \to ((P \to R) \to (P \to (Q \land R))$

$A_i6.$ $P \to (P \lor Q)$

$A_i7.$ $Q \to (P \lor Q)$

$A_i8.$ $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \lor Q) \to R))$

$A_i9.$ $(P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)$

$A_i10.$ $\neg P \to (P \to Q)$

$A_i11.$ $P \lor (P \to Q) \lor (Q \to R)$

Regel für $L\mathcal{M}_l$ und $L\mathcal{M}_i$:

MP. $\frac{P,\ P \to Q}{Q}$

6 Das Entscheidungsproblem

Das Entscheidungsproblem für eine beliebige Logik L ist die Frage nach einem Algorithmus, der für eine Formel P entscheidet, ob $P \in L$ gilt oder nicht. Eine dazu analoge Frage stellt es dar, entscheiden zu wollen, ob in einem deduktiven System $X \vdash P$ für eine Formelmenge X und eine Formel P gilt oder nicht. Für Lk löst das Entscheidungsproblem des deduktiven $\vdash^k$-Systems der Tableau-Kalkül.

Um für eine beliebige strukturelle Logik L das Entscheidungsproblem positiv lösen zu können, benötigt man die endliche Axiomatisierbarkeit und folgende endliche Modelleigenschaft.

Definition 6.1 Eine Logik L besitzt die *endliche Modelleigenschaft*, wenn es eine Menge $\mathcal{X}$ endlicher logischer Matrizen gibt, sodaß $P \in L$ genau dann, wenn

$$P \in L\mathcal{X} := \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{X}} L\mathcal{M}.$$

Definition 6.2 Das strukturelle System $\vdash$ besitzt die *endliche Modelleigenschaft*, wenn es eine Menge $\mathcal{X}$ endlicher Matrizen gibt, sodaß für alle P und alle endlichen $Y \subseteq \mathcal{L}$ genau dann $Y \vdash P$ gilt, wenn $Y \models^{\mathcal{M}} P$ für alle $\mathcal{M} \in \mathcal{X}$ ist.

Satz 6.1 Sei τ entweder eine Logik oder ein deduktives System. Ist τ endlich axiomatisierbar und besitzt τ die endliche Modelleigenschaft, so ist das Entscheidungsproblem für τ positiv lösbar.

Beweis. Die endliche Axiomatisierbarkeit stellt die prinzipielle Möglichkeit der effektiven Aufzählung aller Tautologien bereit. Aufgrund der endlichen Modelleigenschaft ist jede Nicht-Tautologie in mindestens einer adäquaten Matrix falsifizierbar. Dadurch ergibt sich auch deren Auflistbarkeit. So ist es möglich, bei einer vorgegebenen Formel P zu warten, in welcher der beiden Listen P auftaucht, was prinzipiell einen Entscheidungsalgorithmus darstellt.

□

Literatur

[1] Wolfgang Rautenberg. Klassische und nichtklassische Aussagenlogik. Logik und Grundlagen der Mathematik; Bd. 22. Vieweg. Braunschweig, Wiesbaden, 1979. ISBN 3-528-08385-9.

[2] Alexander A. Sinowjew. Über mehrwertige Logik. Ein Abriß. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Aus dem Russischen übersetzt und bearbeitet von Dr. Horst Wessel. Berlin, 1968.

[3] Alexander A. Sinowjew, Horst Wessel. Logische Sprachregeln. Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1975. ISBN 3-7705-1264-2