

Diskrete Systeme von Punktmengen

Markus Heidenreich, Wolfgang Eiden

22. Januar 2000

Zusammenfassung

Zerlegungen und Parkettierungen der Ebene spielen in vielen wissenschaftlichen, praktischen und künstlerischen Bereichen eine wichtige Rolle. In dieser Abhandlung werden solche diskrete Systeme von Punktmengen betrachtet. Zunächst werden Packungen einfacher Figuren durch Polyominos, diskrete Zerlegungen der Ebene sowie Zerlegungen von Polygonen in Polygone behandelt. Weiterführend werden sowohl Mosaike, als auch Parkette und deren Anwendungsbeispiele vorgestellt.

2000 Mathematics Subject Classification: 51M15, 51N05, 52C15, 52C20

Inhaltsverzeichnis

1	Lagerungen, Packungen und Zerlegungen	3
1.1	Topologische Begrifflichkeiten	3
1.2	Spezielle diskrete Packungen	3
1.2.1	Konstruktion der Klassen von Polyominos	3
1.2.2	Packungen und Zerlegungen mit Polyominos	6
1.2.3	Verwandte der Polyominos in der ebenen Geometrie	9
1.2.4	Verwandte der Polyominos in der räumlichen Geometrie	10
1.3	Reguläre und halbreadige Zerlegungen der Ebene	10
1.3.1	Reguläre Zerlegungen	12
1.3.2	Archimedische und dual-archimedische Zerlegungen	12
1.4	Diskrete Zerlegungen von Polygonen in Polygone	16
1.4.1	Zerlegung eines konvexen Polygons in reguläre Polygone	16
1.4.2	Zerlegung eines konvexen Polygons in konvexe k -Ecke	17
1.4.3	Homotetische und perfekte Zerlegungen	17
2	Mosaik und Parkette	18
2.1	Abgrenzende Definitionen und einführende Beispiele	18
2.2	Parkettierung mit einfachen Polygonen	21
2.3	Topologische Klassifizierung von Parketten	23
2.4	Anwendungsbeispiele	25
2.4.1	Anwendungen in der Industrie	25
2.4.2	Parkettierungen in der Kunst	26

1 Lagerungen, Packungen und Zerlegungen

Um überhaupt ein diskretes System von Teilmengen eines topologischen Raumes zur Betrachtung bereitzustellen, benötigt man folgende

Definition 1 Sei (T, \mathbf{O}) ein topologischer Raum. Ein System \mathcal{S} von Teilmengen von T heißt *diskret*, wenn es zu jedem Punkt $x \in T$ eine Umgebung von x gibt, die höchstens mit *endlich* vielen Mengen aus \mathcal{S} gemeinsame Punkte besitzt (*lokale Endlichkeit* von \mathcal{S}).

1.1 Topologische Begrifflichkeiten

Lemma 1 Ist ein metrischer Raum (R, d) vollständig und ist jede beschränkte Menge total beschränkt, so folgt aus der Diskretheit für ein System \mathcal{S} von Teilmengen von R die schärfere Eigenschaft:

(d*) Zu jedem Punkt $x \in R$ und zu jeder r -Umgebung U von x gibt es nur *endlich* viele Mengen aus \mathcal{S} , die mit U einen nichtleeren Durchschnitt haben.

In der folgenden Definition wird Diskretheit nicht generell vorausgesetzt, wir wollen allerdings grundsätzlich Diskretheitsvorstellungen zugrundelegen.

Definition 2 Es sei (T, \mathbf{O}) ein topologischer Raum, $M \subseteq T$ eine nichtleere Teilmenge und \mathcal{S} ein System von Teilmengen von T .

- a) \mathcal{S} heißt eine *Lagerung in M* , wenn die Vereinigung aller Teilmengen von \mathcal{S} in M liegt ($\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \subseteq M$).
- b) \mathcal{S} heißt eine *Überdeckung von M* , wenn $M \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ ist.
- c) \mathcal{S} heißt eine *Packung in M* , wenn \mathcal{S} eine Lagerung in M ist und wenn je zwei verschiedene Teilmengen A und B aus \mathcal{S} keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.
- d) \mathcal{S} heißt eine *Zerlegung von M* , wenn \mathcal{S} sowohl eine Überdeckung als auch eine Packung von M ist. Damit ist $M = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$.
- e) \mathcal{S} heißt eine *Pflasterung von M* bezüglich einer Gruppe G von Transformationen von T (oder kurz eine *G -Pflasterung*), wenn \mathcal{S} eine Zerlegung von M ist und wenn es zu $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$ stets ein $\alpha \in G$ mit $\alpha(T_1) = T_2$ gibt.

1.2 Spezielle diskrete Packungen

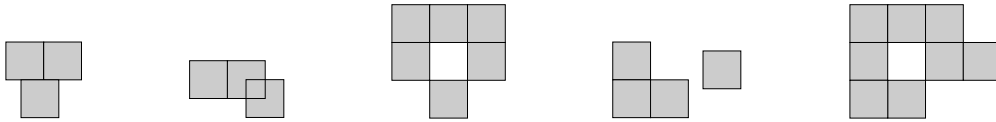
1.2.1 Konstruktion der Klassen von Polyominos

Der Begriff der Polyominos wirft die Problemstellung auf, die sich aus einfachen Legevarianten ergibt, wie man sie von Dominospiel kennt. Man legt an ein Quadrat ein weiteres dazu kongruentes so an, dass es mit dem ersten eine Quadratseite gemeinsam hat. Durch fortgesetztes Anlegen dieser Art entsteht eine *diskrete Packung* mit kongruenten Quadraten *in der Ebene*. Packungen dieser Art nennt man *Polyominos*, die wir formal erfassen können durch folgende

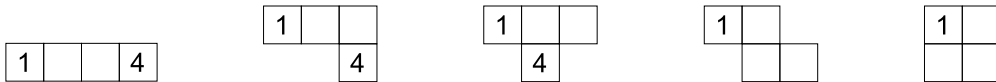
Definition 3 Ein *Polyomino* oder *n-Mino* ist eine Figur \mathbf{P} , die aus $n \geq 1$ kongruenten Quadraten besteht, für die gilt:

- a) je zwei Quadrate haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Seite gemeinsam.
- b) zu je zwei verschiedenen Quadraten Q_1 und Q^* aus \mathbf{P} gibt es eine Folge $Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q^*$ von benachbarten Quadraten aus \mathbf{P} .
- c) \mathbf{P} bildet eine einfach zusammenhängende Punktmenge.

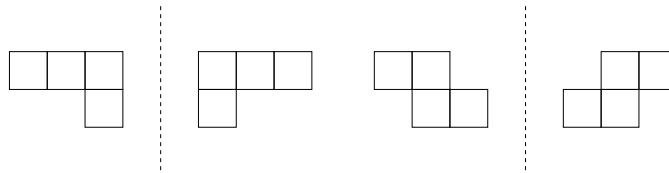
Dabei heißen zwei Quadrate *benachbart*, wenn die Menge ihrer gemeinsamen Punkte eine Seite ist. Es können o.B.d.A. stets Einheitsquadrate vorausgesetzt werden. Folgende Abbildungen stellen keine Polyominos dar:



Die linken beiden Abbildungen verletzen Forderung a), die beiden nächsten Forderung b) und die rechte Forderung c) der Definition. Für $n = 4$ werden die Polyominos *Tetrominos* genannt. Sie sind aus dem Spiel *Tetris* bekannt und leicht überschaubar:

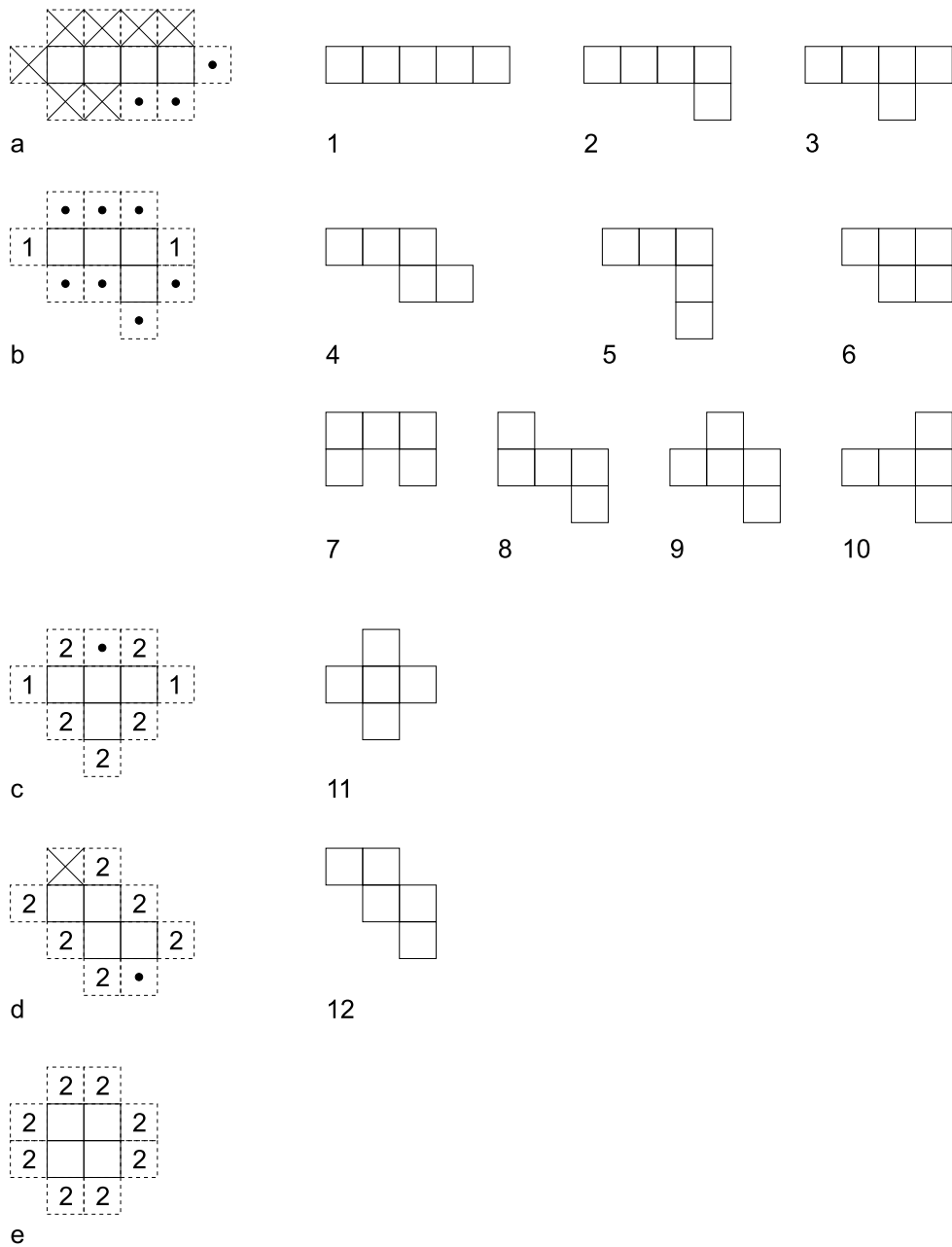


Da es sich in praktischen Sachverhalten als sinnvoll herausstellt, diejenigen Figuren hinzuzunehmen, die durch nicht orientierungserhaltende Bewegungen entstehen, ergeben sich zwei weitere Klassen von Tetrominos:



Diese zusätzlichen Klassen sollen in Zukunft nicht betrachtet werden. Im folgenden bezeichne $A(n)$ die Anzahl der Klassen kongruenter Polyominos, die sich aus n Quadraten bilden lassen. Beispielsweise gilt $A(1) = 1$, $A(2) = 1$, $A(3) = 2$ und $A(4) = 5$. Man kann ein *rekursives Verfahren* angeben, mit Hilfe dessen man aus der Kenntnis aller $(n - 1)$ -Minos mit $n \geq 2$ alle n -Minos bestimmt: Man nummeriert die Klassen der $(n - 1)$ -Minos alphabetisch durch, beginnt mit einem Repräsentanten \mathbf{P} der ersten Klasse und betrachtet alle Lagen eines Quadrats Q , die zu einem n -Mino $\mathbf{P} \cup Q$ führen würden. Diese Lagen werden mit \boxtimes oder \boxminus bezeichnet, wenn das entsprechende n -Mino zu den bisherigen

kongruent ist oder nicht. Die so entstehenden Klassen für n -Minos werden von 1 beginnend nummeriert. Dieses Verfahren wird nun für je einen Repräsentanten jeder Klasse der $(n - 1)$ -Minos durchgeführt. Entsteht so ein n -Mino, das zu einem aus einem der vorhergehenden Arbeitsschritte kongruent ist, so wird in die deshalb nicht in Frage kommende Lage von Q die Arbeitsschrittzahl des $n - 1$ -Minos, durch den der schon gefundene kongruente n -Mino entstanden ist eingetragen. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab und liefert für jede Klasse der n -Minos einen Repräsentanten. So ergeben sich aus den fünf Klassen der Tetrominos die Klassen der *Pentominos* wie folgt:



Um eine Vorstellung vom Größenverlauf für $n \leq 15$ zu bekommen, dient folgende Tabelle mit den jeweiligen Werten für $A(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	1	1	2	5	12	35	107	369	1285	4655

n	11	12	13	14	15
$A(n)$	17073	63600	238591	901971	3426576

Für $n = 24$ gilt bereits: $65 \cdot 10^{10} < A(n) < 66 \cdot 10^{10}$.

1.2.2 Packungen und Zerlegungen mit Polyominos

Satz 1 Ein Rechteck R mit ganzzahligen Seitenlängen a und b besitzt genau dann eine Packung mit Dominos, wenn a oder b gerade ist.

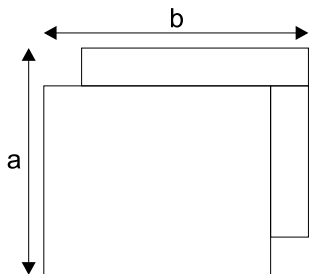
Beweis. Existiert eine solche Packung, so ist ab gerade, also auch a oder b . Sei umgekehrt o.B.d.A. a gerade, so lege man die Dominos mit ihrer Längsseite parallel zu der Rechteckseite mit Länge a .

□

Diese Packung kann auch als *Zerlegung* des Rechtecks R in kongruente Dominos angesehen werden.

Satz 2 Sei nun R eine Figur, die aus einem Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen $a, b \geq 2$ entsteht, wenn man ein Paar gegenüberliegender Eck-Einheitsquadrate entnimmt. R besitzt genau dann eine Packung mit Dominos, wenn *entweder* a oder b gerade ist.

Beweis. Existiert eine solche Packung, so muss hier offenbar gelten, dass $a \cdot b - 2$ gerade und somit a oder b gerade ist. Sei umgekehrt *entweder* a oder b gerade. O.B.d.A. sei $a := 2m$ und $b := 2n + 1$ mit $m, n \geq 1$. Man zerlegt R entsprechend unten stehender Abbildung in drei Rechtecke mit den Seitenlängen 1 und $b - 1 = 2n$ bzw. $a - 2 = 2(m - 1)$ und 1 bzw. $a - 1 = 2m - 1$ und $b - 1$.



Für die ersten beiden „schmalen“ Rechtecke existiert offensichtlich eine Packung mit Dominos, für das dritte nach Satz 1. Falls allerdings a und b gerade sind, kann wie folgt gezeigt werden, dass keine Packung mit Dominos möglich ist. Seien also a und b gerade. Man färbe die Einheitsquadrate in R schachbrettartig

schwarz und weiß ein. Nachdem den beiden ausgesparten Einheitsquadraten die gleiche Farbe zukäme (o.B.d.A. weiß), gäbe es $\frac{ab}{2}$ schwarze und $\frac{ab}{2} - 2$ weiße Felder. Gäbe es allerdings eine Packung von R mit Dominos, so müsste die Anzahl der schwarzen und weißen Feldern gleich sein, denn jedes Domino überdeckt genau ein weißes und ein schwarzes Feld.

□

Die auch im Beweis benutzte Einfärbung ist eine nützliche Methode, um die Unmöglichkeit einer bestimmten Packung zu zeigen.

Es ist nun naheliegend, die Bedingungen für eine Packung von Figuren, wie Rechtecken mit *Trominos* (3-Minos) herauszuarbeiten. Bei den Trominos stehen zwei verschiedene Formen zur Verfügung, die man nach ihrem Aussehen mit „I“ und „L“ bezeichnet.

Satz 3 Ein Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen a und b besitzt genau dann eine Packung mit Trominos der Form „I“, wenn $3|a$ oder $3|b$ gilt.

Spart man nun in einem Quadrat ein bestimmtes Feld in der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus, so können mit Hilfe einer schachbrettartigen Einfärbung mit *drei* Farben Äquivalenzbeziehungen mit der Existenz einer Packung mit Trominos der Form „I“ hergeleitet werden:

Für $a = 3n + 1$ existiert eine Packung $\Leftrightarrow i \equiv j \equiv 1 \pmod{3}$.

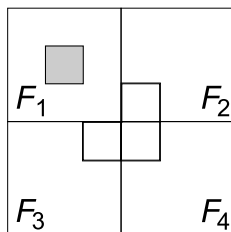
Für $a = 3n + 2$ existiert eine Packung $\Leftrightarrow i \equiv j \equiv 0 \pmod{3}$.

Für $a = 3n$ existiert keine Packung.

Satz 4 Ein Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen a und b besitzt genau dann eine Packung mit Trominos der Form „L“, wenn einer der beiden Ausdrücke ($a = 3$ und $b = 2n$ ($n \geq 1$)) oder ($a = 3m$ und $b \geq 2$ ($m \geq 2$)) gilt.

Satz 5 Wird in einem Quadrat mit Kantenlänge $a = 2^n$ ($n \geq 1$) ein beliebiges Feld ausgespart, dann gibt es für die übrige Figur stets eine Packung mit Trominos der Form „L“.

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Sei also $n > 1$. Nachdem nun auf das Quadrat mit Seitenlänge $a = 2^n$ die Aussage zutrifft, ist zu zeigen, dass das Quadrat mit Seitenlänge $a = 2^{n+1}$ der Behauptung genügt. Wie in folgender Abbildung angedeutet, lässt sich das Quadrat der Seitenlänge $a = 2^{n+1}$ in vier kongruente Teilquadrate der Kantenlänge 2^n zerlegen.



Man spart nun ein beliebiges Einheitsquadrat aus, das o.B.d.A. in F_1 liege. In

den anderen Teilquadraten lässt man entsprechend der Zeichnung je ein Einheitsquadrat aus. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für das Übriggebliebene in jedem Teilquadrat die geforderte Packung. Ferner kann aufgrund der günstigen Wahl der Aussparungen in den Teilquadraten F_2 , F_3 und F_4 dort genau ein Tromino der Form „L“ untergebracht werden. Diese Konstruktion liefert das Gewünschte.

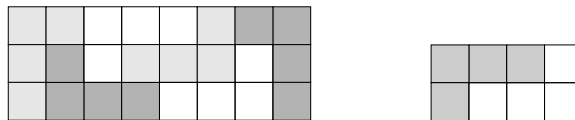
□

Als weitere Bausteine für eine Packung lassen sich die fünf Formen der Tetrominos, die nach ihrem Aussehen mit „I“, „L“, „T“, „Z“ und „O“ bezeichnet werden betrachten.

Satz 6 Ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen a und b besitzt genau dann eine Packung mit Tetrominos der Form „I“, wenn $4|a$ oder $4|b$ gilt.

Satz 7 Für ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen a und b existiert genau dann eine Packung mit Tetrominos der Form „L“, wenn $a, b \geq 2$ und $8|ab$ gilt.

Beweis. Angenommen es existiert eine solche Packung, dann muss offensichtlich $4|ab$ und $a, b \geq 2$ gelten, wobei o.B.d.A. von $2|b$ ausgegangen werden kann. Eine Einfärbung, die parallel der Seitenlänge a spaltenweise abwechselnd färbt, erzeugt folglich sowohl $\frac{ab}{2}$ schwarze, als auch $\frac{ab}{2}$ weiße Felder. Die Packung besteht aus $\frac{ab}{4}$ L-Teilen. Da jedes L-Teil entweder 1 oder 3 schwarze Felder bedeckt, muss die Anzahl der L-Teile gerade sein, also $2|\frac{ab}{4}$ und damit $8|ab$ gelten. Gelte umgekehrt $a, b \geq 2$ und $8|ab$, dann existiert eine Packung, da das Rechteck dann eine Packung folgender Rechtecke besitzt:



□

Definition 4 Eine Packung mit n -Minos (n beliebig, aber fest) heißt *minimal*, wenn jede Form *genau* einmal vorkommt.

Satz 8 Nur die Rechtecke mit den Seitenlängen $(3, 20)$, $(4, 15)$, $(5, 12)$ und $(6, 10)$ besitzen minimale Packungen mit Pentominos.

Für $(1, 60)$ und $(2, 30)$ existieren offensichtlich keine minimalen Packungen. Beim $(6, 10)$ -Rechteck hingegen existieren schon mehr als 2300 Packungsmöglichkeiten.

1.2.3 Verwandte der Polyominos in der ebenen Geometrie

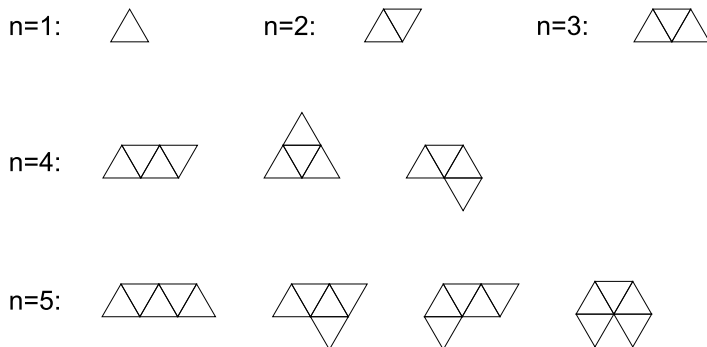
Bei den Polyominos liegen kongruente Quadrate zur regulären Zerlegung der Ebene zugrunde. Diese Eigenschaft kann - wie in Abschnitt 1.3 deutlich wird - auf Drei- und Sechsecke als reguläre Polygone erweitert werden.

Definition 5 Ein *r-reguläres Polyomino* ist eine Figur \mathbf{P} , die aus $n \geq 1$ kongruenten regulären r -Ecken mit $r = 3, r = 4$ oder $r = 6$ besteht und für die die Bedingungen a, b und c der Definition 3 gelten.

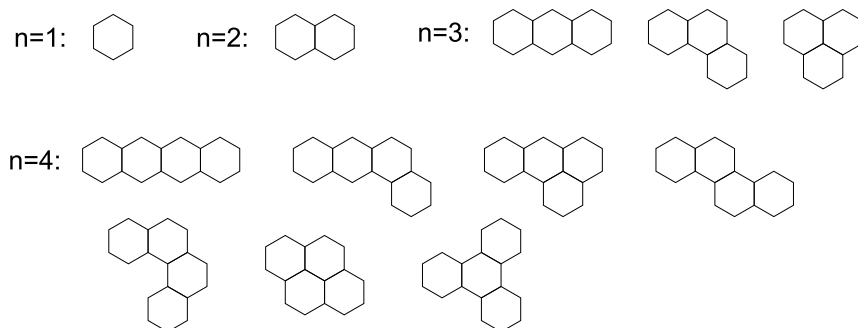
Man bezeichnet die Anzahl der Klassen kongruenten r -regulären Polyominos, die aus n regulären r -Ecken bestehen mit $A^r(n)$. Einen Vergleich der jeweiligen Anzahl bietet folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5
$A^3(n)$	1	1	1	3	4
$A^4(n)$	1	1	2	5	12
$A^6(n)$	1	1	3	7	22

Die Repräsentanten der Klassen der 3-regulären Polyominos:



Die Repräsentanten der Klassen der 6-regulären Polyominos:



Auch hier können ähnliche Packungsprobleme behandelt werden, wie es bei den Polyominos der Fall war.

1.2.4 Verwandte der Polyominos in der räumlichen Geometrie

Von den Polyominos (in der Ebene) ausgehend findet sich schnell ein entsprechendes Konzept, Einheitswürfel als Grundbausteine zu benutzen. Trotz der notwendigen Verallgemeinerung mancher Begriffe wie des *Benachbartseins* zweier Würfel, die hier eine *Seitenfläche* als gemeinsame Punktmenge besitzen können die Definitionen fast durchgängig übernommen werden. Auch hier wird zwischen gleichsinniger und ungleichsinniger Kongruenz unterschieden, was sich bei räumlichen Packungsbeispielen - gegenüber den ebenen - als wesentlich bedeutender herausstellt.

Beim *Herzberger Quader* werden elf räumliche Polyominos benutzt, um einen Quader ($5 \times 4 \times 2$) zu packen. Ein Domino, zwei Trominos und acht nicht gleichsinnig kongruente Tetrominos kommen hier zum Einsatz.

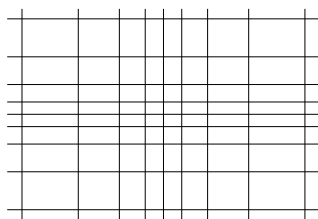
Der (3×3) große *SOMA-Würfel* wird durch sieben räumliche Polyominos gepackt. Es existieren 240 nicht kongruente Packungen des SOMA-Würfels.

1.3 Reguläre und halbreguläre Zerlegungen der Ebene

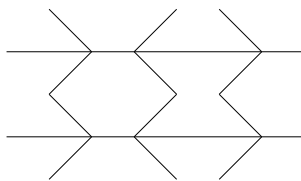
Bei den nun folgenden Zerlegungsarten setzen wir eine euklidische Ebene und Zerlegungen der Art $\mathbf{P} = \{T_i, i \in \mathbf{I}\}$ (mit \mathbf{I} beliebige Indexmenge) voraus. Die Polygone T_i nennt man *Fliesen*, wobei topologisch gesehen der Rand der Polygone zur Punktmenge T_i gehören soll. Da solche Zerlegungen noch zu allgemein sind, schränkt man sie durch folgende Definition weiter ein.

Definition 6 Eine Zerlegung $\mathbf{P} = \{T_i, i \in \mathbf{I}\}$ (mit \mathbf{I} beliebige Indexmenge) in Polygone heißt *normal*, wenn je zwei verschiedene Fliesen entweder keinen Punkt oder genau eine Ecke oder genau eine Seite gemeinsam besitzen.

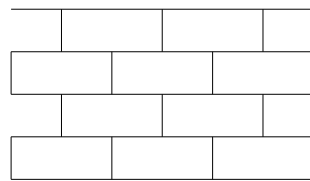
Durch die angegebenen Beispiele



(1)



(2)



(3)

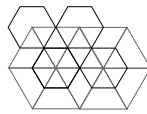
wollen wir die Definition veranschaulichen:

- Die durch die Geraden $x = \frac{n}{2}(n+1)$ und $y = \frac{n}{2}(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ gegebene Zerlegung 1 ist normal. Hierbei nehmen die Fliesen sogar einen beliebig großen Inhalt an.
- Bei der Zerlegung 2 besitzen gewisse Polygone mehr als eine Seite gemeinsam. Da es somit Ecken gibt, die nur zwei Fliesen angehören, ist diese Zerlegung nicht normal im Sinne der Definition.

- Die Zerlegung 3 ist ebenfalls nicht normal im Sinne der Definition, da der Durchschnitt zweier Fliesen eine Strecke sein kann, welche nicht Seite einer der beteiligten Fliesen ist.

Da normalen Zerlegungen ein dreidimensionales Polyederskelett zugeordnet werden kann, gelingt es den Begriff der Eckenfigur aus der Polyedergeometrie zu übertragen:

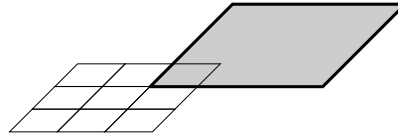
Definition 7 Ist A die Ecke einer normalen Zerlegung \mathbf{P} , dann bilden die Mittelpunkte der von A ausgehenden Kanten ein Polygon, wenn man genau diejenigen Mittelpunkte durch eine Strecke verbindet, die auf einer gemeinsamen Fliese liegen. Dieses Polygon heißt die *Eckenfigur* der Ecke A .



In diesem Zusammenhang erweist es sich ebenfalls als sinnvoll den Begriff der Orientierungsfigur einzuführen:

Definition 8 Eine *Orientierungsfigur* einer normalen Zerlegung der Ebene besteht aus einer Halbgeraden und einer anliegenden Halbebene derart, dass der Scheitelpunkt der Halbgeraden eine Ecke der Zerlegung ist und die Halbgerade eine von dieser Ecke ausgehende Kante enthält.

In einer anliegenden Halbebene muss dann genau eine Fliese liegen, die diese Kante als Seite besitzt.



Da an jeder Kante genau zwei Fliesen anliegen, gehören zu jeder Kante genau vier Orientierungsfiguren. Unter gewissen Bedingungen spricht man auch von einer maximalsymmetrischen, normalen Zerlegung:

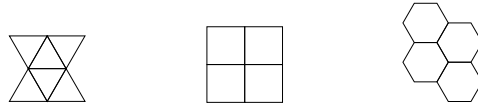
Definition 9 Eine normale Zerlegung heißt *maximalsymmetrisch*, wenn je zwei ihrer Orientierungsfiguren äquivalent sind. Hierbei heißt die Orientierungsfigur Ω_1 äquivalent zu einer Orientierungsfigur Ω_2 , wenn es eine Symmetrieabbildung von \mathbf{P} gibt, die Ω_1 auf Ω_2 abbildet.

Aus der Äquivalenz von Orientierungsfiguren folgt unmittelbar die Äquivalenz der Fliesen, Kanten und Ecken.

1.3.1 Reguläre Zerlegungen

Definition 10 Eine Zerlegung $\mathbf{P} = \{T_i, i \in \mathbf{I}\}$ (mit \mathbf{I} beliebige Indexmenge) in Polygone heißt *regulär*, wenn sie normal ist und ihre Fliesen (konvex) regulär und kongruent sind.

Aus den folgenden Beispielen für reguläre Zerlegungen



erkennt man leicht, dass hier die Eckenfiguren regulär und kongruent sind. Es ist üblich, Zerlegungen durch die zyklische Abfolge der um eine Ecke liegenden n -Ecke anzugeben, also in unserem Beispiel $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4)$ und $(6, 6, 6)$.

Satz 9 Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau drei reguläre Zerlegungen der Ebene in Polygone.

Beweis. Wir müssen den Vollwinkel an jeder Ecke in m Innenwinkelgrößen eines regulären n -Ecks zerlegen. Für den Außenwinkel $\frac{2\pi}{n}$ und den sich daraus ergebenden Innenwinkel $\pi - \frac{2\pi}{n}$ heißt es also die ganzzahligen Paare (n, m) zu finden, die der Gleichung

$$2\pi = m \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) \Leftrightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

genügen. Wie man leicht nachrechnet, ist dies nur für die Paare (n, m) mit $(n, m) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ möglich.

□

1.3.2 Archimedische und dual-archimedische Zerlegungen

Hier sollen diejenigen Eigenschaften, die bisher für die Regularität einer Zerlegung notwendig und hinreichend waren, geeignet abgeschwächt werden.

Definition 11 Sei \mathbf{P} eine normale Zerlegung der Ebene. \mathbf{P} heißt *archimedisch*, wenn die Fliesen regulär und die Ecken äquivalent, nicht aber regulär sind. Hierbei heißt eine Ecke *regulär*, wenn an ihr die Winkel zwischen benachbarten Kanten kongruent sind.

Satz 10 Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau acht archimedische Zerlegungen.

Beweis. Nach Definition müssen mindestens zwei verschiedene Arten nicht ähnlicher, aber regulärer und kongruenter Fliesen auftreten. Es können jedoch höchstens drei Arten vorkommen, da bereits bei vier Arten (also bei den regulären Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecken) für die Innenwinkelsumme gilt:

$$60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ > 360^\circ.$$

An jeder Ecke können wegen

$$5 \cdot 60^\circ + 90^\circ = 390^\circ > 360^\circ.$$

maximal fünf Fliesen zusammentreffen, mindestens jedoch drei. Also ergibt sich mit r verschiedenen Arten und m_i an einer Ecke zusammentreffenden n_i -Ecken:

$$2 \leq r \leq 3 \quad \text{und} \quad 3 \leq \sum_{i=1}^r m_i \leq 5 \quad (\text{mit } i = 1, \dots, r)$$

Wir müssen also nur die Fälle $r = 2$ und $r = 3$ betrachten.

Für $r = 2$ ergibt sich:

$$m_1 \left(\pi - \frac{2\pi}{n_1} \right) + m_2 \left(\pi - \frac{2\pi}{n_2} \right) = 2\pi,$$

was bedeutet, dass der Vollwinkel auf m_1 Innenwinkel eines regulären n_1 -Ecks und m_2 Innenwinkel eines regulären n_2 -Ecks aufgeteilt wird. Durch systematisches Probieren erhält man folgende ganzzahligen Lösungen:

n_1	n_2	m_1	m_2
3	4	3	2
3	6	4	1
3	6	2	2
3	12	1	2
4	8	1	2
5	10	2	1

Für $r = 3$ erhalten wir eine Gleichung, die besagt, dass sich in diesem Fall drei verschiedene Arten von n_i -Ecken den Vollwinkel teilen:

$$m_1 \left(\pi - \frac{2\pi}{n_1} \right) + m_2 \left(\pi - \frac{2\pi}{n_2} \right) + m_3 \left(\pi - \frac{2\pi}{n_3} \right) = 2\pi.$$

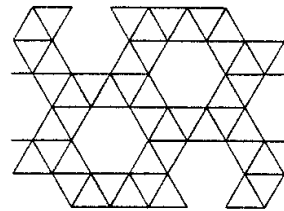
Hier erhält man folgende ganzzahligen Lösungen:

n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
3	4	6	1	2	1
3	4	12	2	1	1
3	7	42	1	1	1
3	8	24	1	1	1
3	9	18	1	1	1
3	10	15	1	1	1
4	5	20	1	1	1
4	6	12	1	1	1

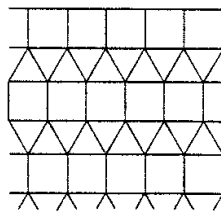
Da nur acht Tupel die in Definition 11 geforderten Eigenschaften besitzen, ergibt sich das Gewünschte.

□

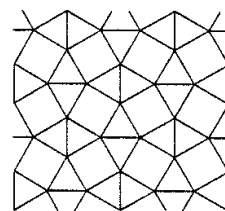
Die folgenden Abbildungen



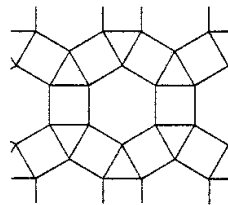
(3,3,3,3,6)



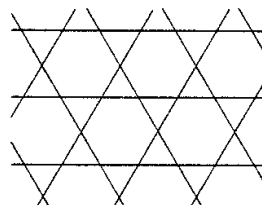
(3,3,3,4,4)



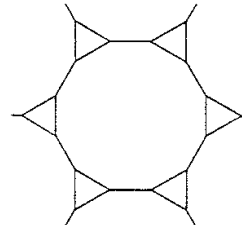
(3,3,4,3,4)



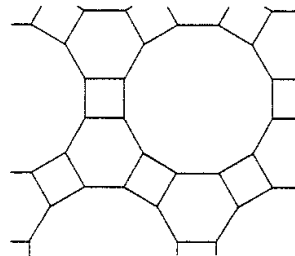
(3,4,6,4)



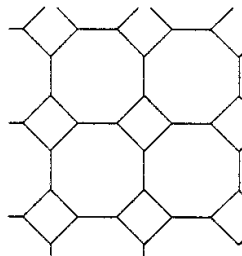
(3,6,3,6)



(3,12,12)



(4,6,12)



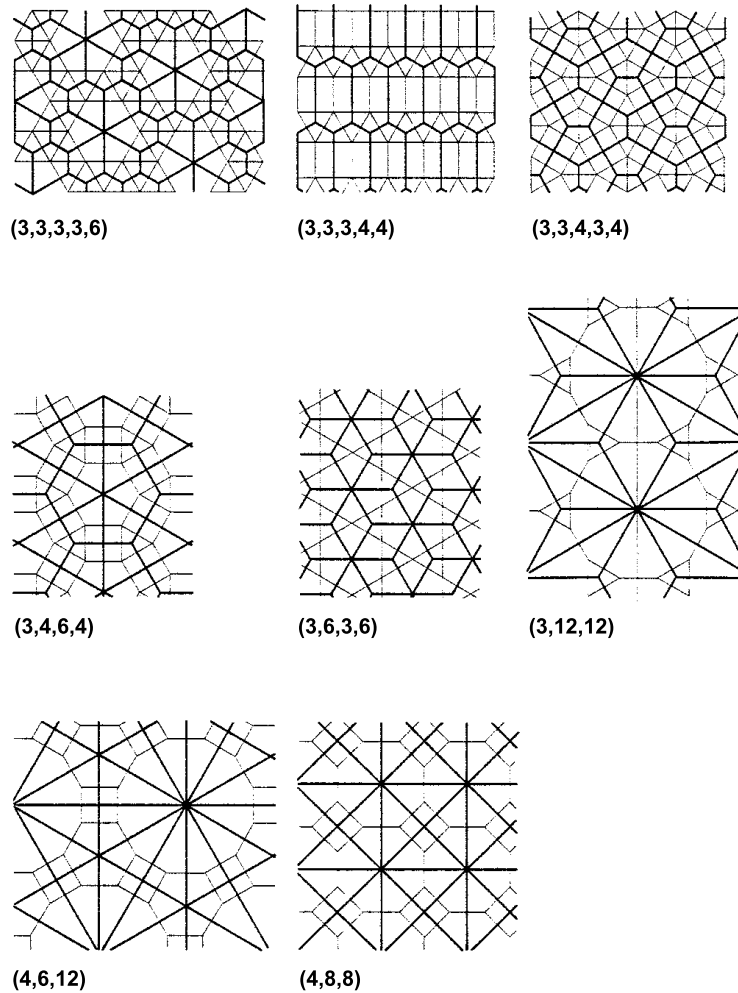
(4,8,8)

geben einen Überblick über die archimedischen Zerlegungen.

Betrachten wir nun die dual-archimedischen Zerlegungen.

Definition 12 Sei \mathbf{P} eine archimedische Zerlegung. Verbindet man die Mittelpunkte derjenigen Fliesen von \mathbf{P} durch eine Strecke, die eine gemeinsame Kante besitzen, so nennt man die durch diese Strecken bestimmte normale Zerlegung \mathbf{P}' die zu \mathbf{P} *dual-archimedische* Zerlegung.

Ein Überblick über die dual-archimedischen Zerlegungen gibt folgende Abbildung:



Satz 11 Ist $\mathbf{D} = \{D_i, i \in \mathbf{I}\}$ eine dual-archimedische Zerlegung, dann gilt:

- a) die Fliesen sind äquivalent, aber nicht regulär.
- b) die Ecken sind regulär.
- c) jede Fliese besitzt einen Innenkreis.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine archimedische Zerlegung \mathbf{P} mit

$$\mathbf{P}' = \mathbf{D}.$$

Aus der Äquivalenz der Ecken von \mathbf{P} ergibt sich aufgrund der Konstruktion von \mathbf{P}' die Äquivalenz der Fliesen von $\mathbf{P}' = \mathbf{D}$. Genauso ist die Regularität der Ecken von \mathbf{D} begründet. Jede Ecke von \mathbf{P} hat aufgrund der Konstruktion von \mathbf{P}'

den gleichen Abstand zu allen Seiten der entsprechenden Fliese (von $\mathbf{P}' = \mathbf{D}$), in der sie liegt. Also ist sie Innenkreismittelpunkt. Da in \mathbf{P} wenigstens zwei Arten nicht ähnlicher regulärer Fliesen vorkommen, können die Innenwinkel einer Fliese von $\mathbf{P}' = \mathbf{D}$ nicht die gleiche Größe haben, d.h. die Fliesen von \mathbf{D} sind nicht regulär.

□

Da man zeigen kann, dass gilt

- a) Ist \mathbf{P} eine normale Zerlegung mit den Eigenschaften aus Satz 11, dann ist \mathbf{P}' eine archimedische Zerlegung
- b) Für jede archimedische Zerlegung \mathbf{P} gilt: $(\mathbf{P}')' = \mathbf{P}$.

ist eine normale Zerlegung genau dann dual-archimedisch, wenn sie die Eigenschaften aus Satz 11 besitzt. Diese Tatsache motiviert die folgende Definition:

Definition 13 Eine Zerlegung heißt *halbregulär*, wenn sie entweder archimedisch oder dual-archimedisch ist.

1.4 Diskrete Zerlegungen von Polygonen in Polygone

Die Fragestellung der Zerlegung von begrenzten Teilmengen M der euklidischen Ebene in Polygone ist sehr allgemein. Deshalb sollen im folgenden Einschränkungen dieser Frage vorgenommen werden. Ist die Zerlegung diskret, also endlich und sind die Teile T_i der Zerlegung konvex, dann ist $M = \cup T_i$ ein Polygon.

1.4.1 Zerlegung eines konvexen Polygons in reguläre Polygone

MALKEWITCH hat folgenden Satz bewiesen:

Satz 12 Für ein konvexes n -Eck existiert genau dann eine normale Zerlegung in reguläre Drei- oder Vierecke, wenn $3 \leq n \leq 12$.

Eine Präzisierung gibt WILDGRUBE mit folgendem Satz an:

Satz 13 Existiert für ein konvexes n -Eck M eine normale Zerlegung in reguläre k_i -Ecke, dann ist $3 \leq n \leq 12$ und $k_i \in \{3, 4, 5, 6, 12\}$.

Zur Veranschaulichung sind hier einige einfache Zerlegungen abgebildet:



Zur Beschreibung kann man auch hier die an einer Ecke auftretenden regulären k_i -Ecke in zyklischer Abfolge notieren.

1.4.2 Zerlegung eines konvexen Polygons in konvexe k -Ecke

Satz 14 Jedes konvexe n -Eck M kann für alle $m \geq n - 2$ in m Dreiecke zerlegt werden.

Beweis. Die von einer beliebigen Ecke von M ausgehenden $n - 3$ Diagonalen (dies sind die Verbindungsstrecken mit allen anderen Ecken, sofern sie noch nicht Seiten sind) zerlegen M in $n - 2$ Dreiecke. Ist $m > n - 2$, so können diese Dreiecke in weitere Dreiecke zerlegt werden, sodass eine gewünschte Zerlegung von M in m Dreiecke resultiert.

□

Satz 15 Jedes Dreieck kann für $m \geq 3$ in m konvexe Vierecke zerlegt werden.

Beweis. Da sich jedes Dreieck in drei konvexe Vierecke und ebenso in ein konvexes Viereck und ein Dreieck zerlegen lässt, wie unten stehende Abbildungen zeigen, gilt die Behauptung.



□

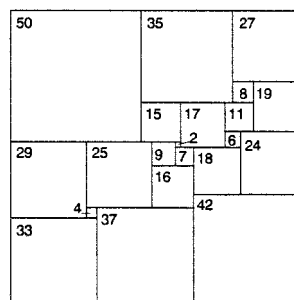
Es zeigt sich, dass sich jedes Polygon in Dreiecke, in konvexe Vierecke bzw. in konvexe Fünfecke zerlegen lässt.

1.4.3 Homotetische und perfekte Zerlegungen

Definition 14 Eine diskrete Zerlegung $\{T_i\}$ eines Polygons M heißt *homotetisch*, wenn alle Teile T_i zu M ähnlich sind. Sie heißt *perfekt*, wenn sie homotetisch ist und alle Teile T_i paarweise inkongruent sind.

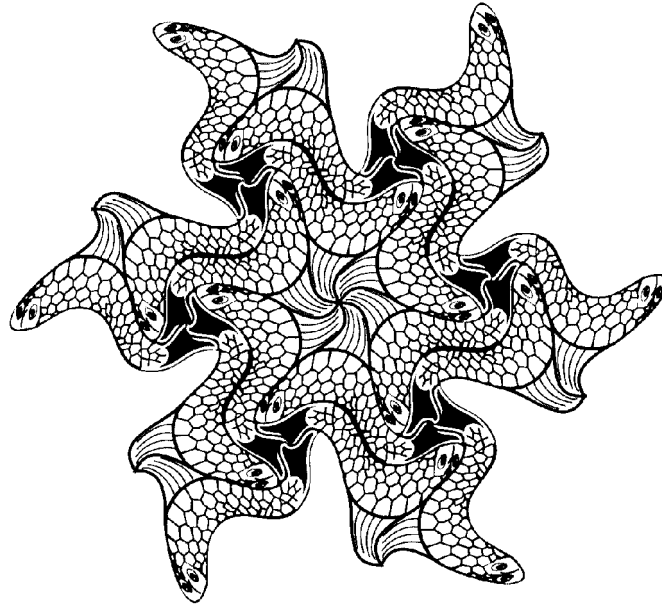
Also trifft für jede homotetische und insbesondere für jede perfekte Zerlegung die Forderung von Definition 2 der Pflasterung zu.

Ein Beispiel für eine perfekte Zerlegung zeigt folgende Abbildung:



2 Mosaik und Parkette

Das Interesse an Parkettierungen der Ebene hat laut [2] in den vergangenen Jahren außerordentlich zugenommen. Bei der Untersuchung der mathematischen Strukturen von Parketten kamen geometrische, topologische und gruppentheoretische Methoden zur Anwendung und man erkannte sehr schnell, dass der Begriff der Symmetrie ein tragendes Konzept zur Beschreibung dieser Strukturen liefert.

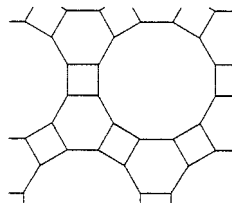


2.1 Abgrenzende Definitionen und einführende Beispiele

Zunächst führen wir den Begriff des Mosaiks ein:

Definition 15 Eine diskrete Zerlegung $\mathbf{M} = \{T_i, i \in \mathbf{I}\}$ der Ebene heißt *Mosaik*, wenn jede Fliese $T_i \in \mathbf{M}$ homöomorph (und somit topologisch äquivalent) zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass auch jede Fliese eines Mosaiks kompakt und zusammenhängend ist, da die topologische Äquivalenz die Existenz einer bijektiven Abbildung impliziert, die offene Mengen auf offene Mengen und somit auch abgeschlossene Mengen auf abgeschlossenen Mengen abbildet. Jede diskrete Zerlegung der Ebene in Polygone ist also ein Mosaik, wie beispielsweise:

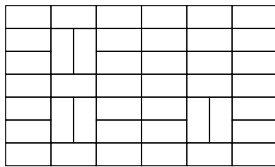


Durch die Charakterisierung von weiteren Eigenschaften können wir nun verschiedene Arten von Mosaiken herausstellen:

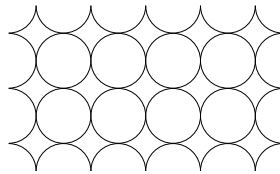
Definition 16 Sei \mathbf{M} ein Mosaik. Dann heißt \mathbf{M}

- a) *Kachelung*, wenn die Symmetriegruppe $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ eine Ornamentgruppe ist (d.h. wenn die Menge der Translationen dieser Gruppe zweidimensional ist).
- b) *isohedral*, wenn je zwei Fliesen äquivalent sind (d.h. wenn es zu zwei Fliesen T_1 und T_2 eine Bewegung α gibt mit $\alpha(T_1) = T_2$).
- c) *monohedral*, wenn je zwei Fliesen kongruent sind (und somit in ihren Längen und Winkeln übereinstimmen).

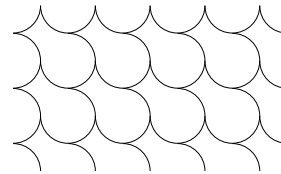
Durch die angegebenen Beispiele



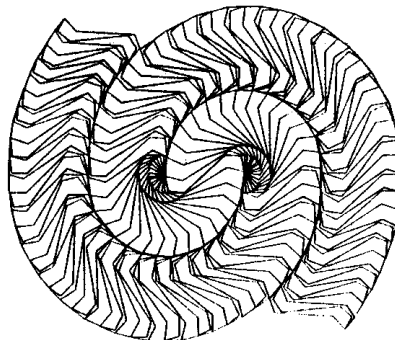
(1)



(2)



(3)



(4)

möchten wir die Definition veranschaulichen:

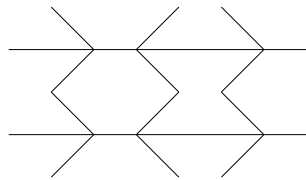
- Das Mosaik \mathbf{M}_1 ist monohedral, die Symmetriegruppe $\mathbf{S}(\mathbf{M}_1)$ besteht aufgrund der eingeplanten „Störung“ aber nur aus der Identität. Also ist \mathbf{M}_1 weder isohedral noch eine Kachelung.
- Das Mosaik \mathbf{M}_2 ist eine Kachelung, da seine Symmetriegruppe die Ornamentgruppe \mathbf{W}_4^1 ist (die höchste Ordnung der Drehsymmetriezentren ist vier und das Drehzentrum liegt nicht außerhalb der Achsen).
- Das Mosaik \mathbf{M}_3 hingegen ist eine isohedrale Kachelung.
- Durch das Mosaik \mathbf{M}_4 wird die Ebene in kongruente neuneckige Polygone zerlegt, ist also ein monohedrales Mosaik. Das Mosaik ist aber weder eine Kachelung noch isohedral.

Auf Basis der „Normalität“ einer Zerlegung der Ebene in Polygone definieren wir

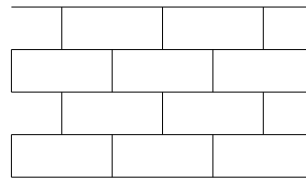
Definition 17 Ein Mosaik \mathbf{M} heißt *normal*, wenn gilt:

- a) \mathbf{M} ist topologisch äquivalent zu einer normalen Zerlegung in Polygone.
- b) Es existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, sodass sich jede Fliese durch eine offene Kreisscheibe mit dem Radius r überdecken lässt.

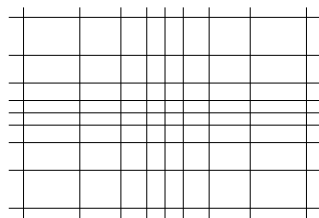
Nach Definition 17 haben bei einer normalen Zerlegung je zwei Fliesen als gemeinsame Punktmenge also entweder keinen Punkt oder genau einen Punkt oder einen Bogen (als topologisch äquivalentes Bild einer Strecke), wobei die Fliesen einheitlich beschränkt sind. Bei normalen Zerlegungen und normalen Mosaiken handelt es sich aber, wie die folgenden Beispiele zeigen, um genau zu differenzierende Zerlegungsarten:



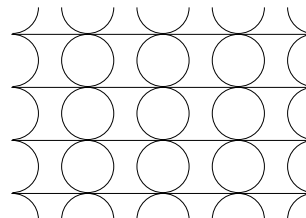
(1)



(2)



(3)



(4)

- Bei den Zerlegungen 1 und 2 handelt es sich zwar um normale Mosaiken, aber um keine normale Zerlegung der Ebene in Polygone, da eine Zerlegung in Polygone nach Definition genau dann normal ist, wenn je zwei verschiedene Fliesen entweder keinen Punkt oder genau eine Ecke oder genau eine Seite gemeinsam besitzen.
- Bei Mosaik 3 handelt es um kein normales Mosaik, da sich offensichtlich keine reelle Zahl r im Sinne der Definition finden lässt, sodass jede Fliese durch eine offene Kreisscheibe mit dem Radius r überdeckt wird.
- Bei Mosaik 4 handelt es sich ebenfalls um kein normales Mosaik, da diese Zerlegung nicht topologisch äquivalent zu einer normalen Zerlegung in Polygone ist.

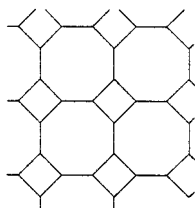
Motiviert durch diese Definition können wir nun Parkette definieren:

Definition 18 Ein Mosaik heißt *Parkett*, wenn es eine normale und isohedrale Kachelung ist.

Bei den regulären Zerlegungen der Ebene in Polygone handelt es sich also um Parkette, wie beispielsweise:



Im Gegensatz hierzu handelt es sich bei den archimedischen Zerlegungen, wie beispielsweise:



zwar um eine normale Kachelungen, aber nicht um Parkette.

2.2 Parkettierung mit einfachen Polygonen

Wir wollen nun untersuchen, zu welchen Polygonen es ein Parkett derart gibt, sodass die Fliesen zu diesen kongruent sind. Hierbei betrachten wir einfache Polygone:

Definition 19 Ein Polygon heißt *einfach*, wenn der Rand topologisch äquivalent zu einer Kreislinie ist (also ein einfach geschlossener Streckenzug zugrunde liegt).

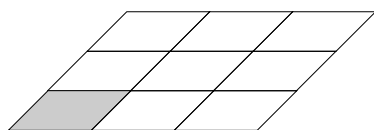
Wir zeigen nun zunächst die Parkettierbarkeit einer Ebene für spezielle Polygone:

Satz 16 Sei \mathbf{E} eine Ebene. Dann ist \mathbf{E} mit jedem

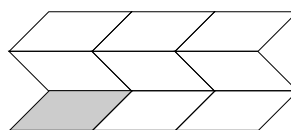
- a) Dreieck.
- b) Parallelogramm.
- c) Viereck.
- d) zentralsymmetrischen Sechseck.

als Fliese parkettierbar.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die ersten beiden Behauptungen. Ist die Fliese T ein Parallelogramm, so gibt es beispielsweise folgende Möglichkeiten der Parkettierung:

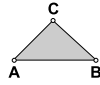


(1)

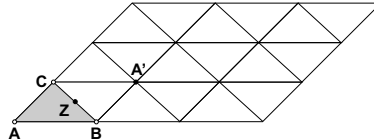


(2)

Sei also T ein Dreieck ABC .



Spiegeln wir das Dreieck ABC am Mittelpunkt Z der Seite BC , dann erhalten wir das Bilddreieck $A'BC$. Somit ergibt die Vereinigung dieser beiden Dreiecke das Parallelogramm $P = ABA'C$:



Damit gibt es auch, wie bereits gezeigt, ein Parallelogrammparkett \mathbf{M} mit P als Fliese. Zu jeder Fliese $P_1 \in \mathbf{M}$ existiert genau eine Translation aus der Symmetriegruppe $\mathbf{S}(\mathbf{M})$, die die Fliese P auf die Fliese P_1 abbildet. Damit können wir die Diagonale BC des Parallelogramms P auf alle Fliesen von \mathbf{M} übertragen und erhalten damit eine normale Zerlegung \mathbf{M}' der Ebene in Dreiecke, die zu T kongruent sind. Die durch die Translationen aus $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ und die Spiegelung am Punkt Z erzeugte Gruppe ist offenbar eine Ornamentgruppe. Daher operiert diese transitiv über den Fliesen von \mathbf{M}' .

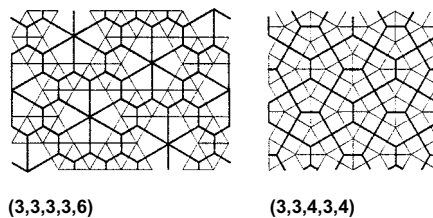
□

Ein Parkett mit regelmäßigen Fünfecken ist nicht möglich, da es, wie wir bereits früher bewiesen haben, keine reguläre Zerlegungen mit Fünfecken gibt. Motiviert durch diese Überlegungen und Satz 16 stellt sich nun die Frage, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 3$ zumindest ein isohedrales Mosaik mit einfachen n -Ecken gibt. Das dies so ist, zeigt der folgende Satz:

Satz 17 Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 3$ gibt es ein isohedrales Mosaik der Ebene mit einfachen n -Ecken.

Beweis. Für $n \in \{3, 4, 6\}$ gibt es nach Satz 16 Parkettierungen der Ebene mit einfachen n -Ecken und somit auch isohedrale Mosaik.

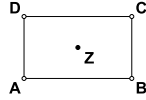
Für $n = 5$ gibt es, wie die zwei dual-archimedischen Zerlegungen



zeigen, durchaus Parkette mit konvexen Fünfecken und somit isohedrale Mosaik.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Behauptung des Satzes auch für $n > 6$ gilt.

Um dies zu beweisen, wählen wir ein Rechteck $T = ABCD$ mit dem Symmetriezentrum Z :



Von einem inneren Punkt R der Seite AB ziehen wir einen Streckenzug

$$RP_1 \dots P_k Z$$

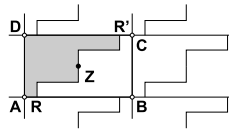
in alternierender Parallelität zu den Strecken AD und AB , sodass

$$RP_1 \parallel AD \text{ und } P_1 P_2 \parallel AB$$

gilt. Durch Spiegelung am Symmetriezentrum Z des Rechtecks erhalten wir den Streckenzug

$$RP_1 \dots P_k P_{k'} \dots P_1' R'$$

der das Rechteck T in zwei $(4 + 2k)$ -Ecke (mit $k \geq 1$) teilt, die aufgrund der Konstruktion symmetrisch bezüglich des Punktes Z zueinander liegen:



Auf Grundlage des Rechtecks mit der Fliese T ergibt sich entsprechend der Vorgehensweise aus Beweis 16 ein isohedrales Mosaik mit dem $(4 + 2k)$ -Eck

$$ARP_1 \dots P_k P_{k'} \dots P_1' R'D$$

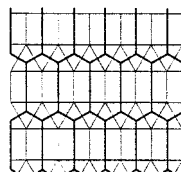
als Fliese. Damit ist der Satz für alle geradzahigen $n \geq 6$ bewiesen.

Der Beweis für alle ungeradzahigen $n \geq 7$ verläuft analog. Hierbei wird allerdings ein zentralsymmetrisches Sechseck verwendet.

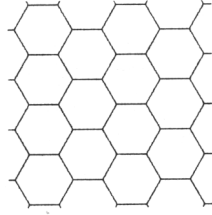
□

2.3 Topologische Klassifizierung von Parketten

Da die vorgeführten Zerlegungen in $(4 + 2k)$ - beziehungsweise $(5 + 2k)$ -Ecke nicht normal im Sinne der Definition sind, ist bei der Formulierung des Satzes 17 bewusst der Begriff des Parketts vermieden worden. Offensichtlich sind diese Zerlegungen aber topologisch äquivalent zur dual-archimedischen Zerlegung $(3, 3, 3, 4, 4)$



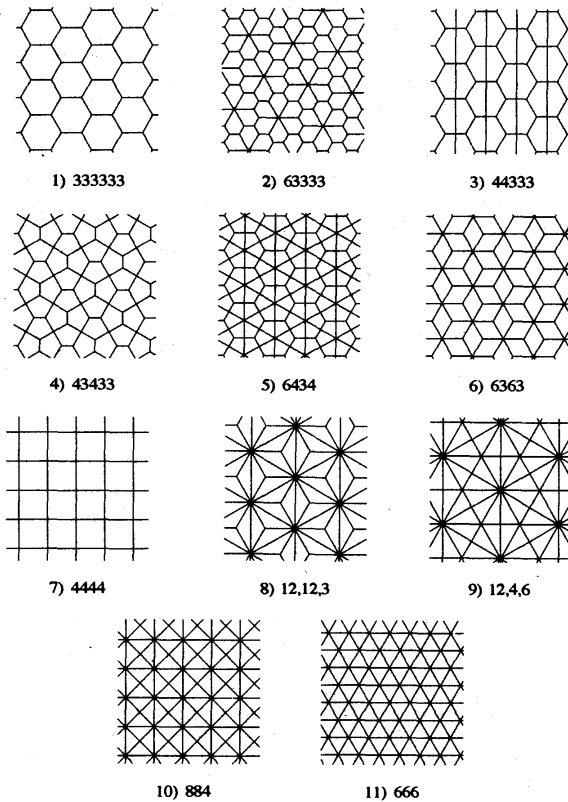
beziehungsweise zur regulären Zerlegung mit dem Knüpfmuster $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.



und sind damit Parkette. Dies motiviert die Klassifizierung von Parketten nach topologischen Aspekten. Hierbei können insgesamt elf verschiedene Parkette unterschieden werden.

Satz 18 Es gibt bis auf topologische Äquivalenz genau elf verschiedene Parkette. Hierbei heißt ein Mosaik $\mathbf{M} = \{T_i, i \in \mathbf{I}\}$ *topologisch äquivalent* zu einem Mosaik $\mathbf{M}' = \{T'_i, i \in \mathbf{I}'\}$, wenn es einen Homöomorphismus γ der Ebene mit $\mathbf{M}' = \{\gamma(T), T \in \mathbf{M}\}$ gibt.

Beweis. Die regulären und die dual-archimedischen Zerlegungen der Ebene in Polygone sind Parkette mit paarweise voneinander verschiedenen Knüpfmütern:



Folglich sind diese Parkette paarweise nicht topologisch äquivalent und damit gibt es wenigstens elf Äquivalenzklassen. Da LAVES bewiesen hat, dass es nicht mehr als elf Äquivalenzklassen gibt, bleibt nichts mehr zu zeigen.

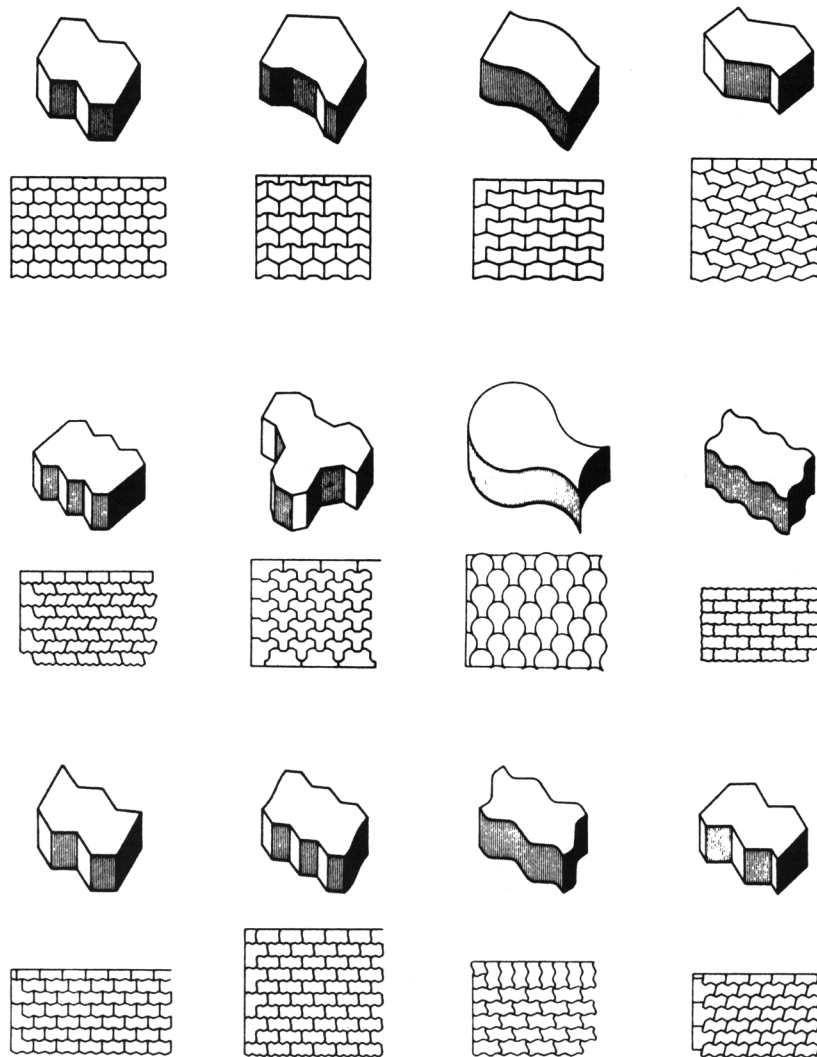
□

2.4 Anwendungsbeispiele

Zum Abschluss möchten wir zwei Anwendungsgebiete für Parkettierungen vorstellen. Zum einem aus dem Bereich der Industrie und zum anderen aus dem Bereich der Kunst.

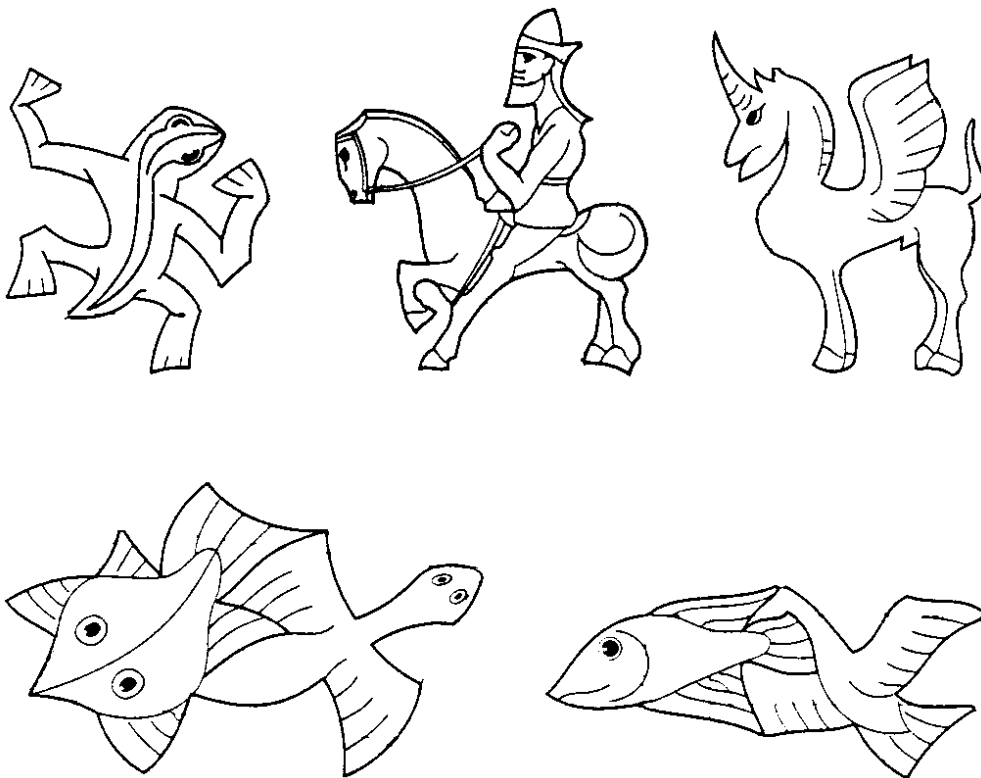
2.4.1 Anwendungen in der Industrie

Bei der Pflasterung von Straßen, Wegen und Plätzen werden ebene Flächen aus zueinander kongruenten Teilen zusammengesetzt. Am bekanntesten hierbei sind die Beton-Verbund-Pflastersteine, wie beispielsweise:



2.4.2 Parkettierungen in der Kunst

Fasst man Parkettierungen als Ornamente oder als Muster auf, so können wir eine Brücke zum Kunsthandwerk und zur Kunst schlagen. Die Werke des holländischen Künstlers M. C. ESCHER verblüffen durch die Möglichkeit der lückenlosen und überlappungsfreien Überdeckung einer euklidischen Ebene mit recht naturgetreuen Figuren oder Fabelfiguren, wie beispielsweise:



Literatur

- [1] Quaisser E.: *Diskrete Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1994. ISBN 3-86025-309-3.
- [2] Bigalke H.-G., Wippermann H.: *Reguläre Parkettierungen*. Mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst. BI-Wissenschaftsverlag, 1994. ISBN 3-411-16711-4.