

Bestimmung von Spannungsgradienten aus Diskreten Finite-Element-Daten

Michael Bayer*, Martin Reißel†

University of Kaiserslautern
Laboratory of Technomathematics
Geomathematics Group
67653 Kaiserslautern
P.O. Box 3049
Germany

phone: ++49 631 205-3867

fax: ++49 631 29081

email: bayer_m@yahoo.de

www: <http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwgeo>

30. April 2000

Zusammenfassung

Wir beschreiben eine Methode zur Approximation von Spannungsgradienten aus diskreten Spannungsdaten. Eine herkömmliche Diskretisierung der Ableitungen aus Funktionswerten führt zu Stabilitätsproblemen, weswegen eine Möglichkeit zur Kontrolle der Ableitungen notwendig ist (Regularisierung). Wir bestimmen zunächst das Funktional der potentiellen Energie und führen zusätzlich ein Fehlerfunktional ein, das die Anpassung an die vorgegebenen diskreten Werte ermöglicht. Durch Gewichtung der beiden Funktionale und Minimierung des Gesamtfunktionals erhält man den gewünschten Ausgleich zwischen der Fehlerkontrolle beim Ableiten einerseits und Kontrolle der Fehler bei den Randwerten andererseits.

*The support by ‘Stiftung Rheinland-Pfalz für Innovation’ is gratefully acknowledged.

†LMS Durability Technologies, Kaiserslautern.

1 Grundlagen

Im folgenden betrachten wir homogene, isotrope, elastische Materialien, deren Eigenschaften durch zwei unabhängige, elastische Konstanten beschrieben werden. Zwischen der Querdehnzahl ν , dem Elastizitätsmodul E und dem Schubmodul G z.B. besteht der Zusammenhang

$$E = 2G(1 + \nu) .$$

Weiter legen wir lineare Elastizitätstheorie zugrunde, d.h. das verallgemeinerte Hooksche Gesetz soll gelten. Der allgemeine dreidimensionale Spannungszustand ist beschrieben durch den *Spannungstensor*, einen Tensor zweiter Stufe, den man üblicherweise in Komponenten schreibt als

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} ,$$

wobei $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Die Spannungen stehen in Zusammenhang mit den den Dehnungen und Schiebungen im belasteten Körper, und diese sogenannten Verzerrungen faßt man ebenfalls zusammen durch den *Verzerrungstensor*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} .$$

Das verallgemeinerte Hooksche Gesetz beschreibt eine lineare Abhängigkeit zwischen diesen beiden Tensoren. Schreiben wir die sechs verschiedenen Komponenten jedes Tensors vereinfacht als Vektoren,

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})^t ,$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz})^t ,$$

so gilt

$$\sigma = C\varepsilon .$$

Die Matrix C hat dabei die folgende Form:

$$C = \begin{pmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} , \quad (1)$$

mit

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Für einen gegebenen Belastungsfall die Spannungen zu berechnen ist i.a. nur näherungsweise möglich, wobei heutzutage eine Analyse mit Hilfe von Finite-Element-Paketen (FE) üblich ist. Dazu unterteilt man den gesamten Körper in viele kleine Polyeder (die "finiten Elemente") an deren Eckpunkten, den FE-Knoten, die Spannungen ausgegeben werden. Die Güte der Approximation hängt dabei ganz wesentlich von der Wahl des FE-Netzes, d.h. der Anzahl, Größe und Geometrie der Elemente ab. Für eine detaillierte Beschreibung der FE-Methode, siehe z.B. [6].

Für die Lebensdauer-Berechnung mit dem Verfahren des *örtlichen Konzepts* benötigt man u.a. zunächst die elastischen örtlichen Spannungen für verschiedene Belastungsfälle (siehe z.B. [5]). Aus diesen Input-Daten berechnet bzw. approximiert das Verfahren die Dauer bis zum ersten Anriß an der Bauteil-Oberfläche. Diese benötigten Input-Daten beschafft man sich wie oben erwähnt i.a. über FE-Rechnungen. Neben den Spannungen selbst sind in Zukunft jedoch auch die Spannungsgradienten, d.h. die kleinskaligen Änderungen der Spannungen, von großem Interesse für die Schädigungsrechnung. Die zugrundeliegende Idee ist, daß ein Bauteil nicht an einem glatten Teil seiner Oberfläche anreißen wird, sondern an einer kleinen Unregelmäßigkeit wie z.B. einer Kerbe in der Oberfläche.

Die gängigen FE-Pakete liefern lediglich die Spannungen selbst an den vordefinierten FE-Knoten, nicht jedoch die Ableitungen bzw. Gradienten dieser Spannungen. Theoretische wäre es möglich, das FE-Netz sehr fein zu vermaschen, so daß man die gewünschten Ableitungen mit hinreichender Genauigkeit diskretisieren könnte. Praktisch stehen dem allerdings zwei erhebliche Probleme entgegen: erstens ist die Dimension der zu lösenden linearen Gleichungssysteme proportional zur Anzahl der FE-Knoten. Bei komplexeren dreidimensionalen Körpern erreicht man also schon bei relativ groben Netzen die Leistungsgrenze heutiger und wohl auch zukünftiger Rechner. Zweitens ist das numerische Ableiten aus diskreten Daten ein schlecht gestelltes Problem, d.h. sehr instabil. Falls die Daten, aus denen man die Ableitungen durch Diskretisierung berechnen möchte, fehlerhaft sind (was in der Praxis immer der Fall ist), so werden die Fehler beim numerischen Ableiten verstärkt. Diese Verstärkung ist umso größer, je enger das Netz der FE-Rechnung ist. Auf der anderen Seite benötigen wir aber ein enges Netz, um den Diskretisierungsfehler beim Ableiten klein zu halten. Die Gegenläufigkeit des Diskretisierungsfehlers auf der einen und der Verstärkung von Eingangsfehlern auf der anderen Seite ist ein typisches Problem für sogenannte *schlecht gestellte inverse Probleme* (siehe z.B. [3]).

Die Diskretisierung der Gradienten aus FE-Ergebnissen mit sehr feinen Netzen ist daher aus Effizienz- und Stabilitätsgründen nicht ratsam. Wir gehen nun davon aus, daß die einzigen uns zur Verfügung stehenden Daten die Spannungen an den Knoten eines bereits existierenden FE-Netzes sind. Da man die Knoten elementweise ausgeben lassen kann, formulieren wir unser Problem wie folgt.

Problemstellung: für *ein* Element eines FE-Netzes sind die Spannungsgradienten zu berechnen, wobei die Spannungen selbst in den *Element-Knoten* gegeben sind.

Bei der näherungsweise Lösung dieses Problems wollen wir Effizienz und Stabilität berück-

sichtigen:

- die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung soll garantiert sein (die Software soll *immer* ein Ergebnis liefern)
- die Verstärkung der Eingangsfehler soll kontrollierbar sein, d.h. die Lösung soll stetig von den gegebenen Daten abhängen.

2 Das Energie-Fehler-Funktional

Wir betrachten nun die näherungsweise Lösung der oben genannten Problemstellung. Seien dazu folgende Daten gegeben:

1. die Knoten eines FE-Elements, das wir im folgenden mit V bezeichnen

$$x_i \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, n;$$

2. die Spannungen in diesen Knoten

$$\begin{aligned} \sigma^{(i)} &= \left(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_6^{(i)} \right)^t \\ &= \left(\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \sigma_z^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}, \tau_{yz}^{(i)}, \tau_{xz}^{(i)} \right)^t, \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

3. die Materialparameter E, G, ν .

Hierbei ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten des Elements, im dreidimensionalen Fall z.B. $n = 4$ (Tetraeder). Gesucht ist die (kontinuierliche) Spannungsfunktion auf dem gesamten Element V

$$\begin{aligned} \sigma : V &\rightarrow \mathbb{R}^6, \\ \sigma(x) &= (\sigma_1(x), \dots, \sigma_6(x))^t, \end{aligned} \tag{2}$$

aus der wir durch Ableiten die Spannungsgradienten erhalten. Wir berechnen also *nicht* direkt die Ableitungen aus den diskreten Spannungsdaten, sondern suchen zunächst eine möglichst einfache und glatte Funktion, die sich einfach ableiten läßt.

Da man für ein gegebenes Element die Ansatzfunktionen i.a. kennt, könnte man aus den Knotenspannungen direkt die approximierten FE-Spannungen über das Element rekonstruieren, d.h. die FE-Rechnung nachbilden. Damit würden wir allerdings auch schlechte FE-Rechnungen (z.B. große, nicht vorhandene Spannungsabfälle im Element) nachbilden und beim Ableiten den Fehler entsprechend verstärken. Für diese Fälle wollen wir eine Kontrollmöglichkeit einbauen, die es erlaubt, von den gegebenen Knotenspannungen zugunsten eines glatteren Spannungsverlaufes mehr oder weniger abzuweichen. Dazu betrachten wir nun das folgende *Energie-Fehler-Funktional* für $\alpha, \beta > 0$:

$$J_{\alpha, \beta}(\sigma) = \underbrace{\alpha \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \sigma \, dV}_{=: E(\sigma)} + \beta \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\sigma(x_i) - \sigma^{(i)} \right)^t C^{-1} \left(\sigma(x_i) - \sigma^{(i)} \right)}_{=: F(\sigma)}.$$

Dabei steht σ für die unbekannte, also zu berechnende Spannungsfunktion im Element, ε steht für die zugehörige Verzerrungsfunktion. Der Ausdruck $E(\sigma)$ ist die im Element gespeicherte potentielle Energie, die durch die von der äußeren Belastung hervorgerufene Verformung und damit einhergehende Spannung σ entsteht. Der Ausdruck $F(\sigma)$ steht für die Abweichung der Funktion σ von den in den Knoten $x_i, i = 1, \dots, n$, vorgegebenen Werten. Man beachte, daß σ die gesuchte Spannungsfunktion ist, während die $\sigma^{(i)}$ angenäherte Spannungen in den Knoten sind. Man könnte die $\sigma^{(i)}$ als "Richtwerte" für σ bezeichnen. Die Idee zur Lösung unseres Problems ist nun die Minimierung des Energie-Fehler-Funktional $J_{\alpha, \beta}(\sigma)$ für gegebene $\alpha, \beta > 0$:

$$\min_{\sigma} J_{\alpha, \beta}(\sigma) . \quad (3)$$

Der Bereich aus dem σ gewählt werden darf, ist noch näher zu spezifizieren, worauf wir im nächsten Abschnitt eingehen werden. Zunächst noch einige Bemerkungen zur Wahl von α und β . In der FE-Rechnung selbst wird der Fall $\alpha = 1, \beta = 0$ untersucht, d.h. die potentielle Energie des Gesamtsystems (über alle Elemente summiert) wird minimiert, wobei die gegebenen Randbedingungen (Auflager, angreifende Lasten etc.) entsprechend zu berücksichtigen sind. In unserem Fall bleibt die Wahl von α, β dem Benutzer überlassen. Dabei stellt das Verhältnis α/β eine Gewichtung dar zwischen einem glatten Spannungsverlauf mit entsprechend glatten Gradienten und einer Anpassung des Spannungsverlaufes an die Randdaten $\sigma^{(i)}$.

Hat der Benutzer Vertrauen in seine berechneten FE-Daten, so wird er $0 < \alpha \ll \beta$ wählen und somit die gegebenen Daten recht präzise nachbilden. Erscheinen dem Benutzer die gegebenen Daten zu unrealistisch, so kann er durch $\alpha = \beta$ bzw. $\alpha > \beta > 0$ die Daten glätten, wobei er eine Abweichung von den vorgegebenen Werten $\sigma^{(i)}$ in Kauf nimmt bzw. beabsichtigt. Durch die Minimierung des gesamten Funktionals berücksichtigt man beide Punkte entsprechend ihrer Gewichtung.

3 Minimierung des Funktionals

Wir wenden uns nun der Lösung von (3) zu, d.h. in einem (noch genau zu benennenden) Hilbertraum H suchen wir eine Lösung des Variationsproblems (3):

$$\begin{aligned} & \min_{\sigma \in H} J_{\alpha, \beta}(\sigma) \\ & = \min_{\sigma \in H} \left\{ \alpha \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \sigma dV + \beta \sum_{i=1}^n \left(\sigma(x_i) - \sigma^{(i)} \right)^t C^{-1} \left(\sigma(x_i) - \sigma^{(i)} \right) \right\} . \quad (4) \end{aligned}$$

Dabei wählen wir als Ansatzfunktionen n skalare Funktionen $N_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ und in jeder Komponente lassen wir eine beliebige Linearkombination dieser Funktionen

zu, d.h. der Raum aller Testfunktionen ist gegeben durch

$$H = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} N_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ N_1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} N_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \dots \\ \dots, \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_2 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} N_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_n \end{array} \right) \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes $\sigma = C\varepsilon$ erhalten wir zunächst

$$J_{\alpha,\beta}(\sigma) = \alpha \frac{1}{2} \int_V \sigma^t C^{-1} \sigma dV + \beta \sum_{i=1}^n (\sigma(x_i) - \sigma^{(i)})^t C^{-1} (\sigma(x_i) - \sigma^{(i)}).$$

Die Frechet-Ableitung lautet dann

$$J'_{\alpha,\beta}(\sigma)(\tau) = \alpha \int_V \tau^t C^{-1} \sigma dV + 2\beta \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)^t C^{-1} \tau(x_i) - 2\beta \sum_{i=1}^n \sigma^{(i)t} C^{-1} \tau(x_i). \quad (6)$$

Für die Lösung von (4) muß die Ableitung in (6) für alle $\tau \in H$ Null werden, d.h.

$$B(\sigma, \tau) = l(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in H, \quad (7)$$

wobei die symmetrische Bilinearform $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ und das stetige lineare Funktional $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$B(\sigma, \tau) = \alpha \int_V \tau^t C^{-1} \sigma dV + 2\beta \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)^t C^{-1} \tau(x_i), \quad (8)$$

$$l(\tau) = 2\beta \sum_{i=1}^n \sigma^{(i)t} C^{-1} \tau(x_i). \quad (9)$$

Definieren wir nun in H das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\langle \sigma, \tau \rangle_H := B(\sigma, \tau),$$

so sind die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt (siehe z.B. [4]), d.h. in unserem endlich-dimensionalen Hilbertraum H existiert eine eindeutige Lösung, die wir wie im folgenden beschrieben erhalten

Für σ machen wir formal den Ansatz

$$\sigma = N\delta, \quad (10)$$

wobei N die Matrix der Ansatzfunktionen ist und δ der Vektor der Koeffizienten, d.h.

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{array} \right),$$

$$\delta = (\delta_1^1, \delta_2^1, \dots, \delta_6^1 \mid \delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_6^2 \mid \dots \mid \delta_1^n, \delta_2^n, \dots, \delta_6^n)^t.$$

Sei τ aus (6) nun z.B. die erste Ansatzfunktion in (5). Die Bedingung

$$J'_{\alpha, \beta}(\sigma)(\tau) = 0$$

liefert dann die Bedingung

$$\begin{aligned} & \alpha \int_V (N_1, 0, \dots, 0) C^{-1} N \delta dV \\ & + 2\beta \sum_{i=1}^n \delta^t N(x_i)^t (N_1(x_i), 0, \dots, 0)^t \\ & - 2\beta \sum_{i=1}^n \sigma^{(i)t} (N_1(x_i), 0, \dots, 0)^t = 0. \end{aligned}$$

Umformuliert lautet die Bedingung dann

$$\begin{aligned} & \left[\alpha \int_V (N_1, 0, \dots, 0) C^{-1} N dV + 2\beta \left(\sum_{i=1}^n (N_1(x_i), 0, \dots, 0) N(x_i) \right) \right] \delta \\ & = 2\beta \sum_{i=1}^n (N_1(x_i), 0, \dots, 0) \sigma^{(i)}. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Bedingung für die unbekanntenen Koeffizienten δ_i^j . Setzen wir nacheinander alle $6n$ Basisfunktionen aus (5) ein, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von δ . Dieses lineare System lautet

$$(\alpha K + 2\beta M) \delta = 2\beta w. \quad (11)$$

Die Matrix K in (11) hat die Form

$$K = \int_V \begin{pmatrix} N_1^2 C^{-1} & N_1 N_2 C^{-1} & \dots & N_1 N_n C^{-1} \\ N_2 N_1 C^{-1} & N_2^2 C^{-1} & \dots & N_2 N_n C^{-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ N_n N_1 C^{-1} & N_n N_2 C^{-1} & \dots & N_n^2 C^{-1} \end{pmatrix} dV, \quad (12)$$

wobei nur die N_i vom Ort x abhängen, d.h. die Integranden sind die Produkte $N_i N_j$, während C^{-1} eine konstante 6×6 -Matrix ist (die Inverse Matrix des Hookeschen Gesetzes).

Die Matrix M in (11) lautet ausgeschrieben

$$M = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} N_1^2(x_i) I & \dots & \dots & N_1(x_i) N_n(x_i) I \\ N_2(x_i) N_1(x_i) I & N_2^2(x_i) I & \dots & N_2(x_i) N_n(x_i) I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ N_n(x_i) N_1(x_i) I & \dots & \dots & N_n^2(x_i) I \end{pmatrix}, \quad (13)$$

wobei I die 6×6 -Einheitsmatrix ist. Der Vektor w der rechten Seite in (11) schließlich hat die Form

$$w = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_1^{(i)} N_1(x_i), \sigma_2^{(i)} N_1(x_i), \dots, \sigma_6^{(i)} N_1(x_i), \right. \\ \left. \sigma_1^{(i)} N_2(x_i), \sigma_2^{(i)} N_2(x_i), \dots, \sigma_6^{(i)} N_2(x_i), \right. \\ \vdots \\ \left. \sigma_1^{(i)} N_n(x_i), \sigma_2^{(i)} N_n(x_i), \dots, \sigma_6^{(i)} N_n(x_i) \right)^t. \quad (14)$$

Insgesamt hat man also ein $6n \times 6n$ lineares Gleichungssystem mit einer Blockmatrix (n Blöcke der Größe 6×6) zu lösen.

4 Die Ansatzfunktionen – Berechnung der Matrizen

Das zu lösende lineare System sowie die Lösung selbst hängen von der Wahl der Ansatzfunktionen (oft auch Formfunktionen genannt) ab. Bei der Implementierung von FE-Paketen verwendet man Basisfunktionen, die durch Transformation von einem sogenannten Master-Element auf die eigentliche Elementgeometrie abgebildet werden. Diese Methode werden wir hier ebenfalls verwenden, wobei wir den Rechenweg exemplarisch für ein schiefwinkliges achteckiges Volumenelement (“brick”) vorführen. Für Elemente mit weniger als acht Knoten (z.B. Tetraeder) kann man entweder Knoten zusammenlegen, oder aber man verwendet direkt die entsprechenden Ansatzfunktionen.

Im folgenden seien die acht Knoten $x_i, i = 1, \dots, 8$ gegeben. Diese Knoten lassen sich durch Transformation vom Master-Würfel erzeugen, wie in Abb. 1 dargestellt. Man führt dann alle Rechnungen standardisiert auf dem Master-Element aus.

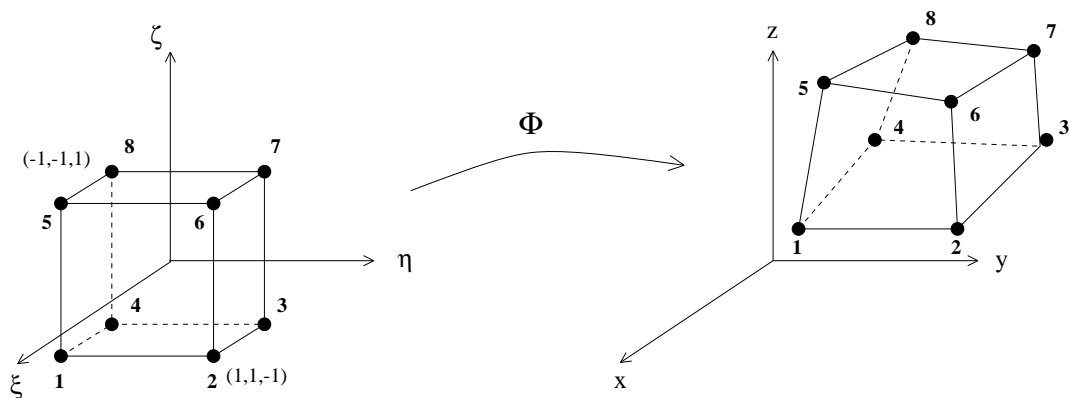


Abbildung 1: Der Master-Würfel und das Bildelement

Für unseren Master-Würfel wählen wir acht trilineare Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta), \\ \tilde{N}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta), \\ &\vdots \\ \tilde{N}_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) .\end{aligned}\tag{15}$$

Diese Funktionen sind gerade so gemacht, daß gilt

$$N_j(y_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, 8,$$

wenn y_i den Knoten mit der Nummer i im Master-Würfel bezeichnet, also z.B. $y_1 = (1, -1, -1)$. Mit Hilfe der Formfunktionen aus (15) kann man eine einfache Abbildung Φ definieren, die die Knoten des Master-Würfels auf die Knoten des Elements abbildet und die dazwischenliegenden Werte interpoliert. Wir setzen

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 x_i \tilde{N}_i(\xi, \eta, \zeta).\tag{16}$$

Das Element wird damit zwischen den Knoten durch trilineare Interpolation dargestellt. Wir können nun einfache Ansatzfunktionen auf dem *echten Element* V definieren durch Rücktransformation auf den Master-Würfel:

$$\begin{aligned}N_i &: V \rightarrow \mathbb{R}, \\ N_i(x) &= \tilde{N}_i(\Phi^{-1}(x)) .\end{aligned}\tag{17}$$

Dies sind nun die Formfunktionen, die wir im Verlauf der weiteren Rechnung verwenden werden.

Die Steifigkeitsmatrix K :

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix K in (12) müssen wir Integrale der Form

$$\int_V N_i(x) N_j(x) dV(x)$$

auswerten. Mit Hilfe des Substitutionssatzes für mehrdimensionale Integrale transformieren wir dieses Integral auf ein Integral über den Master-Würfel, den wir von nun ab mit $E := [-1, 1]^3$ bezeichnen. Dabei nutzen wir die Beziehungen (17) und (16) aus:

$$\begin{aligned}&\int_V N_i(x) N_j(x) dV(x) \\ &= \int_V \tilde{N}_i(\Phi^{-1}(x)) \tilde{N}_j(\Phi^{-1}(x)) dV(x) \\ &= \int_E \tilde{N}_i(\Phi^{-1}\Phi(\xi, \eta, \zeta)) \tilde{N}_j(\Phi^{-1}\Phi(\xi, \eta, \zeta)) |\det \Phi'(\xi, \eta, \zeta)| dE(\xi, \eta, \zeta) \\ &= \int_E \tilde{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \tilde{N}_j(\xi, \eta, \zeta) |\det \Phi'(\xi, \eta, \zeta)| dE(\xi, \eta, \zeta) .\end{aligned}\tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Der Master-Würfel E ist ein sehr einfaches Integrationsgebiet, und die Funktionaldeterminante der Transformation in (19) läßt sich explizit in Abhängigkeit der Knoten x_i angeben. Also läßt sich das Integral (19) und somit auch (18) explizit berechnen, ebenfalls abhängig von den x_i . Insbesondere benötigt man *keine* numerische Integration wie z.B. die Gauß-Quadratur. Schließlich läßt sich die Inverse der Matrix C (siehe (1)), die man für die Berechnung der Matrix K benötigt, ebenfalls explizit vorab bestimmen.

Die Fehlermatrix M :

Wir betrachten nun die Fehlermatrix wie in (13), die wir zum Aufstellen des linearen Gleichungssystems (11) brauchen. Wir haben unsere Ansatzfunktionen in (17) gerade so gewählt, daß

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (20)$$

gilt. Also gilt für die Produkte in (13)

$$N_l(x_i) N_m(x_i) = \delta_{li} \delta_{mi} .$$

Mit anderen Worten, die Matrix M hat nur auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden Einträge, und diese sind gerade 1. Also:

$$M = I_{6n \times 6n} ,$$

die reelle $6n \times 6n$ -Einheitsmatrix.

Die rechte Seite:

Die rechte Seite in (11) ist bestimmt durch den Vektor w in (14). Dieser Vektor läßt sich ähnlich leicht berechnen wie die Fehlermatrix. Unter Ausnutzung von (20) erhält man sofort

$$w = \left(\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \dots, \sigma_6^{(1)} \mid \sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}, \dots, \sigma_6^{(2)} \mid, \dots, \mid \sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_6^{(n)} \right)^t ,$$

d.h. der Vektor der rechten Seite hat als Einträge gerade die Randdaten $\sigma_i^{(j)}$. Im Spezialfall $\alpha = 0$ (den wir hier eigentlich ausgeschlossen haben) und $\beta = 1$ erhalten wir einfach die Linearkombination der Basisfunktionen mit den Knotenspannungen als Koeffizienten.

Zusammenfassend kann man sagen, daß das Aufstellen des linearen Gleichungssystems relativ einfach ist, da die Daten (Knotenkoordinaten x_i und Spannungen $\sigma_i^{(j)}$) einfach als Konstanten in das System eingehen und explizit weiterverarbeitet werden können.

5 Berechnung der Gradienten

Das lineare Gleichungssystem sei gelöst, d.h. wir haben eine Darstellung des Spannungsvektors σ in der Form (10). Exemplarisch berechnen wir den Gradienten von $\sigma_x = \sigma_1$ in den Knoten des Elements V . Diese Komponente hat ausgeschrieben die Darstellung

$$\sigma_1(x) = \sum_{i=1}^8 \delta_i^1 \tilde{N}_i(\Phi^{-1}(x)) .$$

Hier sind die $\delta_i^1 \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8$ die berechneten Koeffizienten zu unseren Basisfunktionen und $\Phi : E \rightarrow V$ ist wieder die Transformation vom Master-Würfel ins Bildelement. Dann gilt für den Gradienten mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \nabla_x \sigma_1(x) &= \sum_{i=1}^8 \delta_i^1 \nabla_x \tilde{N}_i(\Phi^{-1}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^8 \delta_i^1 \nabla_y \tilde{N}_i(y) (\Phi^{-1}(x))' \\ &= \sum_{i=1}^8 \delta_i^1 \nabla_y \tilde{N}_i(y) (\Phi'(y))^{-1}, \end{aligned}$$

wobei wie oben $x \in V$ einen Punkt im Bildelement bezeichnet und $y = (\xi, \eta, \zeta) \in E$ den zugehörigen Punkt im Master-Würfel. Schreiben wir dieses Ergebnis als Spaltenvektor auf, so erhalten wir

$$(\nabla_x \sigma_1(x))^t = \sum_{i=1}^8 \delta_i^1 \left((\Phi'(y))^t \right)^{-1} \left(\nabla_y \tilde{N}_i(y) \right)^t. \quad (21)$$

Die Formel (21) erlaubt also, den Gradienten einer Spannungskomponente (hier σ_1) an einem Punkt im Element V zu berechnen, wenn man den zugehörigen Ursprung y im Master-Würfel kennt, d.h. denjenigen Punkt $y \in E$, für den gilt: $x = \Phi(y)$. Man kann nun den Master-Würfel aufgrund seiner einfachen Geometrie mit geringem Aufwand vernetzen und die Spannungsgradienten auf diesem Wege auf einem beliebig dichten Netz im Element ausgeben. Die oben beschriebene Methode funktioniert natürlich für alle anderen Spannungskomponenten genauso, man muß dann nur die entsprechenden Koeffizienten δ_i^j betrachten.

In Kurzform:

- Input: $y_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in E$
- Rechnung:
 1. berechne $\left((\Phi'(y))^t \right)^{-1} \Big|_{y=y_0}$
 2. berechne $\nabla_y \tilde{N}_i(y) \Big|_{y=y_0}$, $i = 1, \dots, 8$
 3. multipliziere 1. auf 2., $i = 1, \dots, 8$ und summiere über i
- Output: $\nabla_x \sigma_1(x) \Big|_{x=\Phi(y_0)}$

6 Beispiele

Schließlich geben wir noch einige Beispiele, um den Effekt der Wichtungs-Parameter α, β zu verdeutlichen.

6.1 Ein Element

Wir betrachten ein Element eines großen FE-Netzes, so daß die sechs (vom FE-Paket ermittelten) Spannungskomponenten in den acht Knotenpunkten vorliegen.

In Abb. 2 bis 4 ist die mit dem oben beschriebenen Verfahren ermittelte σ_x -Spannung für verschiedene Parameter dargestellt. Dabei ist deutlich der Einfluss des Parameters α , der die Glattheit steuert, zu sehen: je größer das Gewicht von α im Gegensatz zu β , desto glatter wird die resultierende Funktion (die Farbskala ist bei allen Abbildungen gleich). Dadurch können übergroße Gradienten bei zu groben FE-Netzen oder unregelmäßigen Elementen vermieden werden.

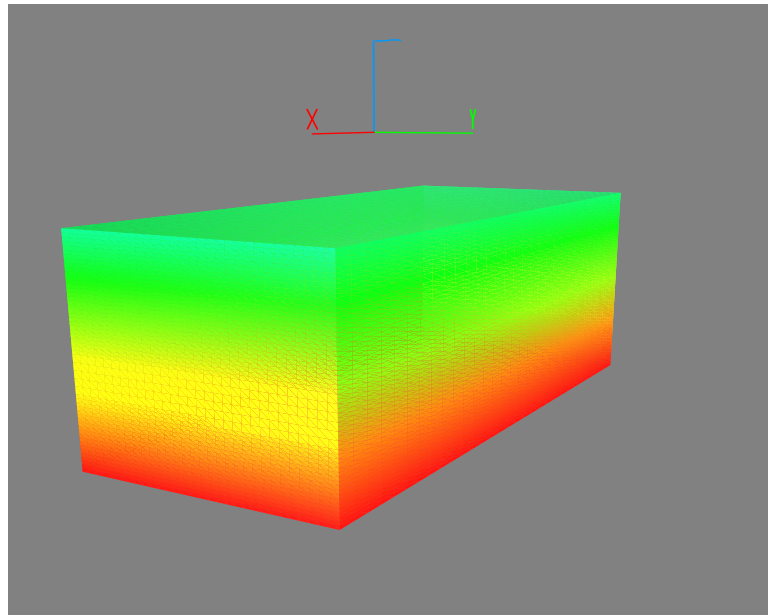


Abbildung 2: $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow$ keine Glättung, exakte Approximation der FE-Daten

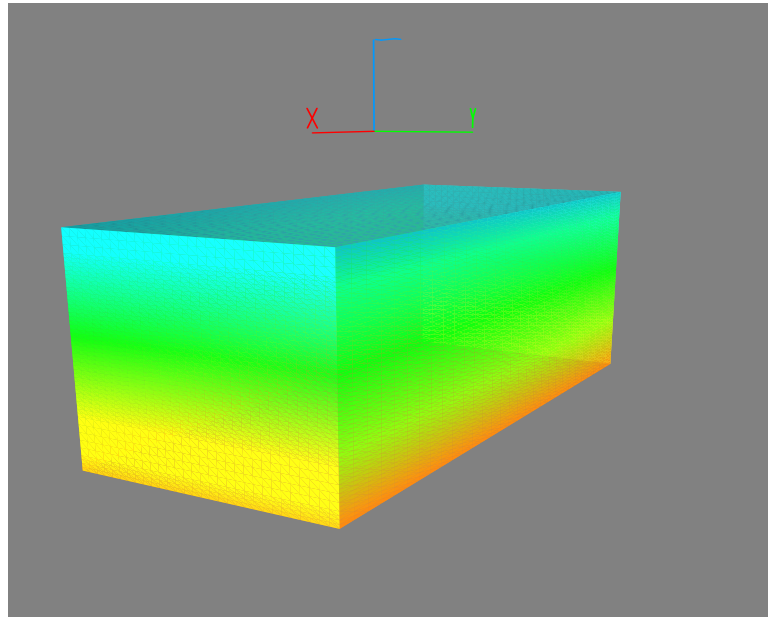


Abbildung 3: $\alpha = 0.2, \beta = 0.8 \Rightarrow$ leichte Glättung, noch gute Approximation der FE-Daten

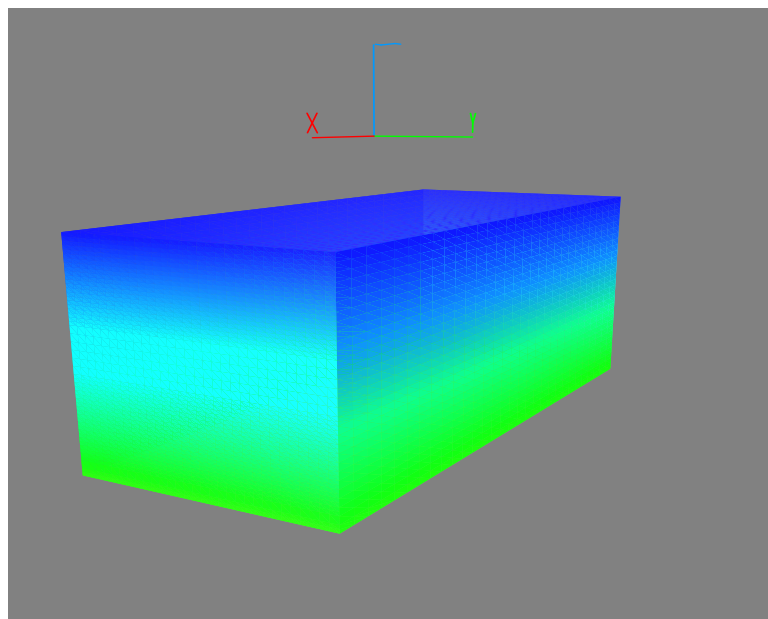


Abbildung 4: $\alpha = 0.5, \beta = 0.5 \Rightarrow$ extrem geglättete FE-Daten

6.2 Zylinder unter Biegebeanspruchung

Nun betrachten wir einen Zylinder, der durch Biegung belastet wird. Die mit dem oben beschriebenen Verfahren erhaltenen Ergebnisse geben wir nun für den ganzen Zylinder aus, d.h. für alle in der Rechnung verwendeten Elemente.

In Abbildung 5 ist die σ_x -Spannung ohne Glättung zu sehen, während in Abbildung 6 der Gradient durch Hinzunahme des Energieausdruckes gedämpft wurde.

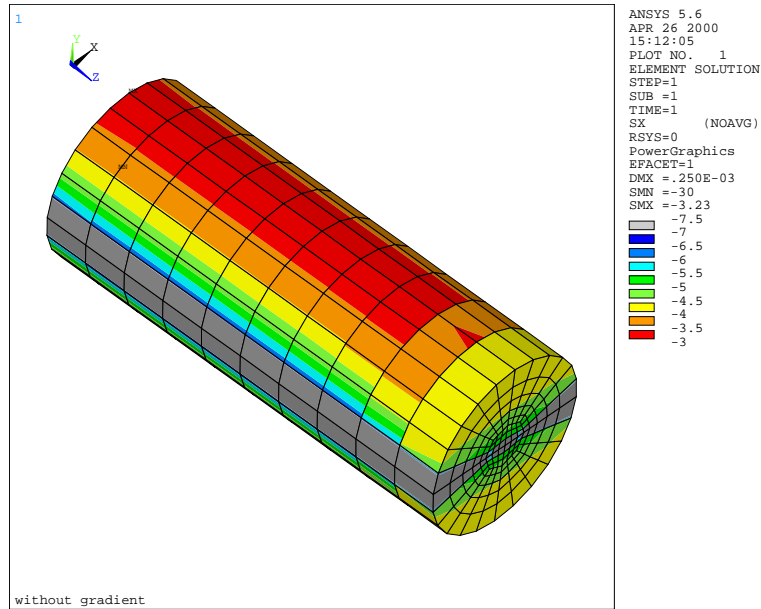


Abbildung 5: Zylinder ohne Glättung

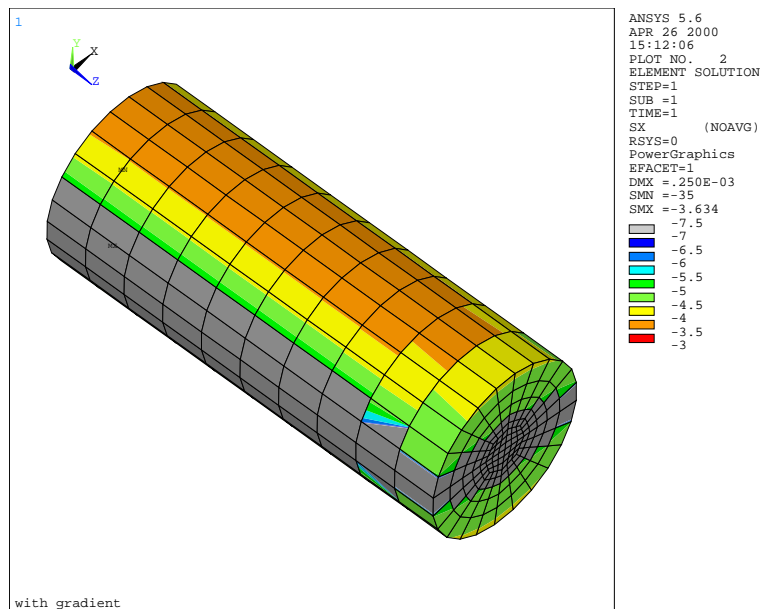


Abbildung 6: Zylinder mit Glättung

6.3 Ein Automobil-Schwenklager

Im letzten Beispiel untersuchen wir ein Schwenklager eines großen deutschen Automobil-Herstellers. Auch für so komplexes Bauteil ist der Dämpfungseinfluß deutlich zu sehen: in Abbildung 7 ohne, in Abbildung 8 mit Glättung.

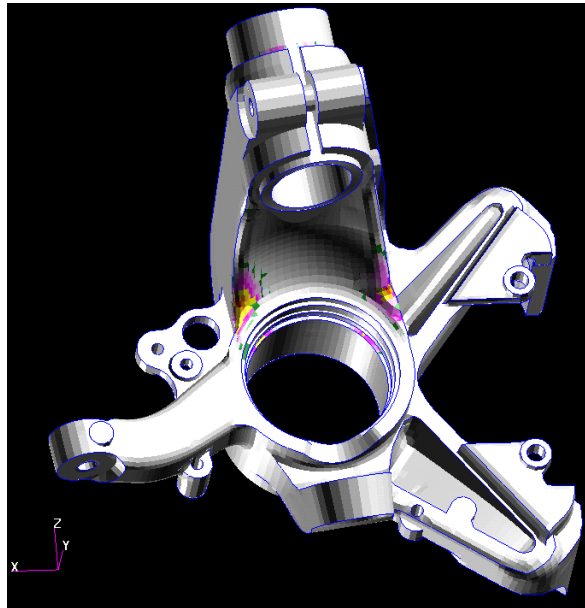


Abbildung 7: Schwenklager ohne Glättung

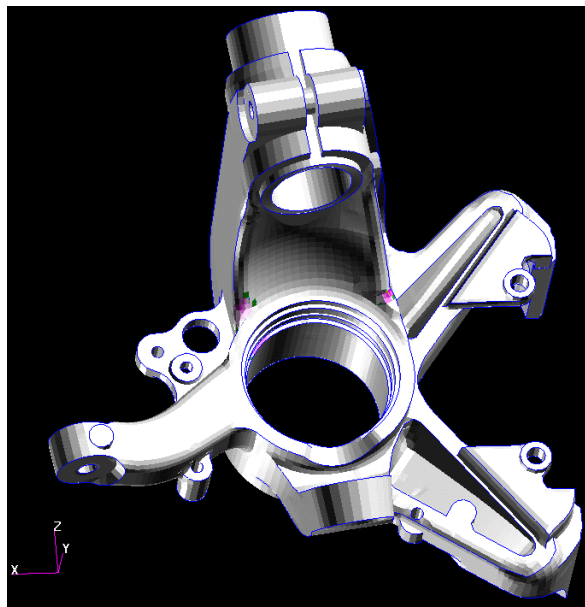


Abbildung 8: Schwenklager mit Glättung

Literatur

- [1] Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T. (1981) *Finite Elements: An Introduction (Volume I)*, Prentice-Hall.
- [2] Hahn, H.G. (1991) *Technische Mechanik*, Carl Hanser Verlag.
- [3] Louis, A.K. (1989) *Inverse und Schlecht Gestellte Probleme*, B.G Teubner.
- [4] Oden, J.T., Carey, G.F. (1983) *Finite Elements: Mathematical Aspects (Volume IV)*, Prentice-Hall.
- [5] Unterlagen zur Weiterbildungsveranstaltung des Fachbereiches Werkstoffmechanik, TH Darmstadt (1975) *Betriebsfestigkeit auf der Grundlage örtlicher Beanspruchungen*.
- [6] Zienkiewicz, O.C. (1975) *Methode der Finiten Elemente*, Carl Hanser Verlag.