

Frequenzanalyse getriebener Quantensysteme: Erzeugung hoher Harmonischer

Diplomarbeit von

Christian Hebell

Durchgeführt am
Fachbereich Physik
der Universität Kaiserslautern

Unter Anleitung von Herrn
Prof. Dr. H. J. Korsch

Kaiserslautern, Juli 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Physikalischer Hintergrund	5
1.2	Zu dieser Arbeit	7
2	Erzeugung Harmonischer bei Klassischer und Quantendynamik	9
2.1	Vorgehensweise	9
2.1.1	Klassische Dynamik	11
2.1.2	Quantendynamik	12
2.2	Schwaches äußeres Feld	13
2.2.1	Dynamik	13
2.2.2	Frequenzanalyse	17
2.3	Bewegung durch AC- und DC-Feld bestimmt	21
2.3.1	DC-Feld dominant	21
2.3.2	AC-Feld dominant	26
2.4	Zusammenfassung	32
3	Das Zwei-Niveau-System	33
3.1	Grundlagen	33
3.2	Fourier-Analyse	35
3.2.1	Stationäre Phase	36
3.2.2	Uniforme Approximation	45
3.3	Diskussion	48
4	Zusammenfassung	51
A	Mathematischer Anhang	53
A.1	Bessel-Funktionen	53
A.1.1	Summenformel	53
A.1.2	Integraldarstellung der Bessel-Funktion	53

A.2	Methode der stationären Phase	54
A.3	Methode des “steepest descent”	55
A.4	Uniforme Approximation mit Bessel-Funktionen	56
B	Physikalischer Anhang	59
B.1	Skalierung	59
B.2	Quantendynamik	60
B.2.1	Eichtransformation	60
B.2.2	Numerische Berechnung der Quantendynamik	61
B.2.3	Beschleunigung im Quantensystem	62
B.2.4	Gauss-Wellenpaket	63
	Literaturverzeichnis	65

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Physikalischer Hintergrund

Die Untersuchung von Atomen in Laserfeldern mit hohen Intensitäten ($\approx 10^3 W/cm^2$) brachte viele interessante und überraschende Effekte zu Tage. Dabei erweckte besonders die Erzeugung hoher Harmonischer großes Interesse, womit der Sachverhalt gemeint ist, dass man bei der Bestrahlung von Atomen mit einem Laser, der Licht mit einer Frequenz ω_0 aussendet, im Emissionsspektrum Strahlung mit Vielfachen der Anregerfrequenz feststellte. Das Überraschende und auch aus theoretischer Sicht Unerwartete dabei war nicht die Tatsache, dass so hohe Harmonische gemessen wurden, sondern die spezielle Form des Spektrums. Diese besteht aus einem anfänglichen kurzen Abfallen bei kleinen Frequenzen, gefolgt von einem Bereich mit fluktuierenden aber im Mittel konstanten Intensitäten, den man als Plateau bezeichnet, und der eine deutlich erkennbare obere Grenze besitzt, den sogenannten Cutoff. Oberhalb dieses Cutoffs fällt die Intensität schnell ab. Derartige Spektren wurden bei vielen Experimenten mit Lasern unterschiedlicher Frequenzen und Intensitäten bei der Bestrahlung verschiedener Atome gefunden. Es wurden dabei Harmonische bis zu einer Ordnung $135\omega_0$ gemessen (1053 nm Nd-Glas Laser in Neon, [L'H93]).

Es gibt einige Aspekte, die diesen Effekt der 'High Harmonic Generation' (HHG) so interessant machen: Erstens war das Plateau im Emissionsspektrum überraschend und seine Erklärung für die Theorie eine Herausforderung. Zweitens gibt es Hoffnung auf neue technische Anwendungen wie zum Beispiel den Röntgenlaser und das Erzeugen von Pulsen mit Dauern in der Größenordnung von Attosekunden [Mil00b]. Drittens hat man es hier mit einem Versagen der Störungstheorie für kleine Ordnungen bei der Wechselwirkung von Atomen mit starken Laserfeldern zu tun. Viertens hat man schließlich Anlass zu der Vermutung, dass das Plateau im HHG-Spektrum eine allgemeine Eigenschaft von angetriebenen nichtlinearen Systemen ist.

Man beobachtete ein solches Verhalten bei der Untersuchung vieler Modellsysteme, wie zum Beispiel bei dem Zwei-Niveau-System, bei ein- und dreidimensionalen $1/r$ -Potentialen sowie bei $\delta(r)$ -Potentialen [Bec94]. Allerdings hat man noch keine ebenso allgemeine Erklärung, die die physikalischen Ursachen für die Struktur des HHG-Spektrums beleuchtet

und mit den Systemparametern in Zusammenhang bringt. Nur für die Erklärung der oberen Grenze des Plateaus, des Cutoffs, hat man schon Modelle, deren quantitative Vorhersagen mit den Messungen übereinstimmen. So ist die höchste Ordnung für vor kommende Harmonische in einem ionisierbaren System durch

$$n_{\max} = (|E_P| + 3.17U_P)/\hbar\omega_0 \quad (1.1)$$

gegeben, wobei $|E_P|$ die Ionisationsenergie des Atoms und ω_0 die Laserfrequenz ist; U_P ist die über die Periode gemittelte Elektronenenergie im Laserfeld, die mit der Feldstärke F des Lasers über folgende Beziehung zusammenhängt: $U_P = F^2/4\omega_0^2$.

Die Formel (1.1) kann man mit einem semiklassischen Modell begründen: Ist ω_0 kleiner als die Tunnelfrequenz, die durch $F/\sqrt{2|E_P|}$ gegeben ist, dann durchtunnelt das Elektron die quasistatische Potentialbarriere [Kel65] und entfernt sich vom Atom. Dabei nimmt das Elektron Energie vom Laserfeld auf und fällt dann eventuell wieder — unter Abstrahlung von Energie — zum Atom zurück. Die Größe des aufgenommenen Energiebetrages hängt von der Phase des Laserfelds im Moment des Tunnelns ab. Falls das Elektron rekombiniert, kann es maximal eine Energie vom Betrag $3.17U_P$ aufgenommen haben, was durch eine Rechnung mit klassischer Mechanik gezeigt werden kann [Cor93, Lew94]. Mit diesem Drei-Schritt-Prozess aus Ionisation, Beschleunigung im Laserfeld und Rekombination kann man also das Cutoff-Gesetz (1.1) erklären, das in Übereinstimmung mit den Experimenten ist [Mil00a].

Aber auch in anderen zeitlich getriebenen Systemen tritt das Phänomen High Harmonic Generation auf, auch in solchen, bei denen es keine Möglichkeit zur Ionisation gibt. Beispiele hierfür sind das Zwei-Niveau-System und der angetriebene anharmonische Oszillator. Die Position des Cutoffs kann in keinem dieser Fälle mit Ionisation und Rekombination erklärt werden. Wie Gauthey et al. [Gau97] gefunden haben, ist die Cutoff-Frequenz im Zwei-Niveau-System durch

$$\omega_{\max} \simeq \omega_0/2 + 2\Omega_0 \quad (1.2)$$

gegeben, wobei $\Omega_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}_0/\hbar$ die Rabi-Frequenz und $\hbar\omega_0 = E_a - E_b$ ist. E_a und E_b sind die Energieeigenwerte und $\vec{\mu}$ ist das elektrische Dipol-Matrixübergangselement. Der $2\Omega_0$ -Term kann als eine Art dynamischer Stark-Shift von jedem der beiden Zustände betrachtet werden. Das heißt, dieser Term stellt die kinetische Energie dar, die vom Feld aufgenommen werden kann.

Während diese Modelle eine Aussage über die Größe des Plateaus machen können, ist es immer noch nicht klar, wo die Ursachen für das Plateau selbst liegen. Das ist nach wie vor eine wichtige Frage.

Eine vollständige Theorie über High Harmonic Generation müsste sowohl das Verhalten des einzelnen Atoms als auch das kollektive Verhalten der Atome im Laserfeld berücksichtigen und zum Beispiel der Frage nachgehen, wie das Verhältnis der Phasen der emittierten Strahlung ist, ob sich die Strahlung konstruktiv überlagert oder sich gegenseitig abschwächt. Es hat sich aber herausgestellt [L'H91, L'H92], dass bei hohen Laserintensitäten, wie sie hier vorausgesetzt werden, das Emissionsverhalten der einzelnen Atome schon der wesentliche Bestandteil beim Zustandekommen der Strahlung ist.

Deshalb wird in dieser Arbeit auf solche Effekte, die auf dem Zusammenwirken mehrerer Atome beruhen, nicht weiter eingegangen.

Um die Ursachen für den Effekt der Erzeugung hoher Harmonischer und die Form des Spektrums bei einem einzelnen System zu untersuchen, wurden viele verschiedene Modell-Systeme studiert. Dazu gehören sehr vereinfachende Modelle, die zum Teil analytisch berechnet werden können (siehe [Bie89]) oder das Zwei-Niveau-System, das trotz seiner Einfachheit auch ein typisches HHG-Spektrum hat [Gau97]. Zum anderen gibt es Berechnungen für Modelle, die wirklichkeitsgetreuere Potentiale verwenden. Es wurden hierzu Berechnungen mit eindimensionalen Modellen durchgeführt, besonders mit dem regularisierten eindimensionalen Coulomb-Potential $V(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$.

Ein weiterer Zugang zum Problem *High Harmonic Generation bei einem Atom* besteht darin, neben dem Studium der Quantendynamik des Systems auch die klassische Dynamik zu betrachten. Zum Beispiel wird untersucht, ob und unter welchen Umständen es bei klassischer Dynamik zur Erzeugung hoher Harmonischer kommt [Ban92]. Außerdem interessiert man sich dafür, wie sich chaotische Dynamik im klassischen Fall auf das quantenmechanische Emissionsspektrum auswirkt. Hierzu gibt es einige Arbeiten: [Dav82, Gog88, Ave95, Ave98, Chi98]. Averbukh und Moiseyev zeigen beispielsweise in [Ave95], dass bei dem kontinuierlich angetriebenen Rotator die Größe des Plateaus im quantenmechanischen HHG-Spektrum zur Größe des chaotischen Bereichs im Poincaré-Schnitt des Systems bei klassischer Dynamik direkt proportional ist.

1.2 Zu dieser Arbeit

Diese Arbeit wird sich nun mit High Harmonic Generation bei zwei verschiedenen Systemen befassen. In Kapitel 2 wird ein eindimensionales Modell eines Teilchens in einem räumlich periodischen Potential unter dem Einfluss eines Stark-Feldes und eines zeitlichen Wechselfeldes behandelt, in Kapitel 3 ein Zwei-Niveau-System.

Der Hamilton-Operator für das erstgenannte System hat die folgende Gestalt:

$$H = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + F_\omega x \sin(\omega_0 t) + Fx. \quad (1.3)$$

Dies dient als sehr einfaches Modell für ein Teilchen in einem Festkörper – ein sogenanntes Bloch-Teilchen – unter dem Einfluss eines Stark-Feldes und eines zeitlichen Wechselfeldes; siehe dazu [Glü98a] und [Glü98b]. Darüber hinaus gibt es für dieses Modell Anwendungen bei optischen Gittern [Dah96, Wil96, Niu96, Rai97, Mad99] und bei Halbleiter-Übergittern [Fel92, Leo92, Leo98], wo Bloch-Oszillationen in optischen Experimenten gemessen werden können.

Hier in dieser Arbeit soll erstmals untersucht werden, welche Frequenzen ein geladenes Bloch-Teilchen aufgrund seiner Bewegung abstrahlt. Außer den quantenmechanischen Rechnungen werden auch die entsprechenden Berechnungen im Rahmen der klassischen Mechanik durchgeführt. Es soll untersucht werden, in wie weit man das Frequenzspektrum des Dipolmoments durch die entsprechende klassische Bewegung verstehen kann

und wie sich aus den Ergebnissen der klassischen Dynamik Vorhersagen für die quantenmechanischen Resultate ergeben. Dabei werden mit Hilfe der Methode der stationären Phase Näherungsformeln für die HHG-Spektren in zwei Sonderfällen bei der klassischen Dynamik hergeleitet, die auch für die quantenmechanischen Spektren relevant sind.

Das andere System, das unter dem Aspekt High Harmonic Generation in dieser Arbeit untersucht wird, ist das Zwei-Niveau-System. Es wird durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hbar \begin{bmatrix} -\omega_0/2 & \Omega_0 \sin(\omega_L t) \\ \Omega_0 \sin(\omega_L t) & \omega_0/2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

beschrieben und ist ein sehr einfaches Modell für ein gebundenes Teilchen, das mehr als einen zugänglichen Zustand hat. Da aber Berechnungen gezeigt haben, dass auch hier High Harmonic Generation auftritt, ist dieses System gerade wegen seiner einfachen Struktur von Interesse. Es zeigt sich, dass man mit Hilfe einer stationären-Phase-Näherung eine quantitativ gute Aussage über die Größe des Plateaus machen kann, welche das Cutoff-Gesetz (1.2) bestätigt. Außerdem ist es möglich, qualitativ die Oszillationen im Plateaubereich zu reproduzieren. Es wird außer der Methode der stationären Phase auch die uniforme Bessel-Approximation verwendet, die in manchen Bereichen genauer als die stationäre Phase ist. Beide Näherungsmethoden werden im Anhang A erläutert.

Kapitel 2

Erzeugung Harmonischer bei Klassischer und Quantendynamik

2.1 Vorgehensweise

Ein quantenmechanisches Teilchen in einem Festkörper lässt sich in einem eindimensionalen Modell vereinfacht mit dem Hamilton-Operator

$$\tilde{H}_0(\tilde{x}, \tilde{p}) = \frac{\tilde{p}^2}{2} + \cos(\tilde{x}) \quad (2.1)$$

beschreiben. Da in dieser Arbeit zusätzlich der Einfluss eines Stark-Feldes (DC-Feld) und eines elektrischen Wechselfeldes (AC-Feld) mit zeitlich veränderlicher Amplitude auf das sogenannte Bloch-Teilchen berücksichtigt werden soll, wird folgender Hamilton-Operator verwendet¹:

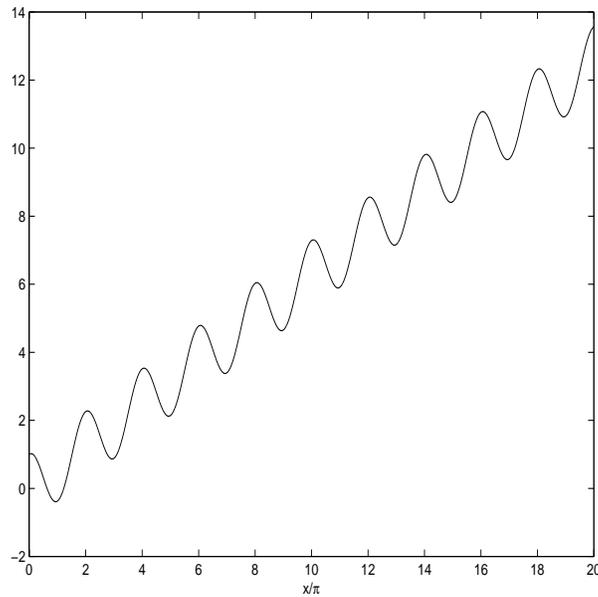
$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, t) = \frac{\tilde{p}^2}{2} + \cos(\tilde{x}) + F\tilde{x} + F_\omega\tilde{x}\sin(\omega_0 t). \quad (2.2)$$

Das hier beschriebene Teilchen soll eine Ladung besitzen, wodurch eine Wechselwirkung mit äußeren elektrischen Feldern möglich ist. Dann kann das Stark-Feld als konstante elektrische Kraft mit der Feldstärke F interpretiert werden und das AC-Feld als einfaches Modell für den Einfluss eines Lasers mit der Frequenz ω_0 und der Feldstärke F_ω . In Abbildung 2.1 ist der zeitunabhängige Teil des Potentials mit einem Stark-Feld der Feldstärke $F = 1/5$ in seiner stufenartigen Form zu sehen.

Wenn man Informationen über die Frequenzen, die das Teilchen aufgrund seiner Bewegung abstrahlen kann, erhalten möchte, ist die Dipolmomentbeschleunigung die zu bestimmende Größe. Sie ist durch

$$d(t) := \mu \ddot{x}(t) \quad (2.3)$$

¹Die hier verwendete Skalierung der physikalischen Größen ist im Anhang B.1 explizit notiert.

Abbildung 2.1: *Potential* $V(x) = \cos(x) + x/5$

für die klassische Dynamik und

$$d_{\text{QM}}(t) := \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x \rangle_t \quad (2.4)$$

für die Quantendynamik gegeben. Im Folgenden soll der Einfachheit halber das Dipolmoment μ auf den Wert $\mu = 1$ gesetzt werden, was für die Ergebnisse nur einen Faktor μ bei der Fourier-Transformierten von $d(t)$ bzw. μ^2 bei der Intensität der Strahlung ausmacht.

In diesem Kapitel wird das System für verschiedene Werte der Feldparameter F und F_ω studiert. Zu Anfang werden die Feldstärken so klein gewählt, dass unter Umständen noch eine gebundene Bewegung aufgrund des Kosinus-Potentials stattfinden kann. Sowohl die klassische Dynamik als auch die Quantendynamik ist dann Gegenstand der Untersuchung. Durch numerische Integration der Hamilton'schen Gleichungen bzw. der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung erhält man die Zeitentwicklung des Systems, woraus man mittels Fast-Fourier-Transformation die High-Harmonic-Generation-Spektren erhält, die man mit Hilfe der klassischen Bewegung zu verstehen versucht.

Während im Fall eines schwachen äußeren Feldes nur qualitative Aussagen über die Spektren gemacht werden können, sind im Falle eines das System dominierenden Stark- oder AC-Feldes auch quantitative Vorhersagen für das Spektrum möglich. Hier lassen sich mit Hilfe der Methode der stationären Phase aus den Fourier-Integralen, die bei der Frequenzanalyse der Dipolmomentbeschleunigung im klassischen System auftreten, Näherungsausdrücke ableiten. Diese machen Aussagen über die Größe des Plateaus sowie über die Intensität der Frequenzen im Plateaubereich, welche teilweise auch auf die quantenmechanischen Spektren zutreffen. Für die Anregerfrequenz wird bei Berechnungen in dieser Arbeit allein der Wert $\omega_0 = 10/6$ verwendet.

2.1.1 Klassische Dynamik

Kramers-Henneberger-Darstellung

Die klassischen Rechnungen in diesem Kapitel werden in der Kramers-Henneberger-Darstellung durchgeführt, die sich als praktisch für Berechnungen in Fällen erwiesen hat, in denen die Anregerfrequenz viel schneller ist als die ungestörte Bewegung. Die neuen kanonischen Koordinaten (x, p) hängen durch folgende Gleichungen mit den ursprünglichen Koordinaten (\tilde{x}, \tilde{p}) zusammen:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \epsilon \sin(\omega_0 t) \quad (2.5)$$

$$\tilde{p}(t) = p(t) + \epsilon \omega_0 \cos(\omega_0 t). \quad (2.6)$$

Hierbei ist der Parameter ϵ durch die Feldstärke F_ω und die Frequenz ω gegeben:

$$\epsilon = \frac{F_\omega}{\omega_0^2}. \quad (2.7)$$

Die zugehörige Erzeugende dieser kanonischen Transformation ist vom Typ $F_2(\tilde{x}, p, t)$ und hat folgende Form:

$$F_2(\tilde{x}, p, t) = p\tilde{x} + \epsilon \omega_0 \tilde{x} \cos(\omega_0 t) - \epsilon p \sin(\omega_0 t) \quad (2.8)$$

Die partiellen Ableitungen von $F_2(\tilde{x}, p, t)$ nach den Koordinaten liefern die gewünschten Transformationsgleichungen:

$$\tilde{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{x}} \quad (2.9)$$

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial p} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\epsilon \omega_0^2 \tilde{x} \sin(\omega_0 t) - \epsilon \omega_0 p \cos(\omega_0 t). \quad (2.11)$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitung von $F_2(\tilde{x}, p, t)$ nach der Zeit erhält man schließlich die Hamilton-Funktion H in den neuen kanonischen Koordinaten x und p ,

$$H(x, p, t) = \tilde{H}(\tilde{x}(x, p, t), \tilde{p}(x, p, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p^2}{2} + \cos(x + \epsilon \sin(\omega_0 t)) + Fx \\ &\quad + \epsilon F \sin(\omega_0 t) + \frac{(\epsilon \omega_0 \cos(\omega_0 t))^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ohne Berücksichtigung der für die Bewegungsgleichungen irrelevanten rein zeitabhängigen, additiven Terme lautet die neue Hamilton-Funktion H dann

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x + \epsilon \sin(\omega_0 t)) + Fx. \quad (2.14)$$

Daraus ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen für das System:

$$\dot{x} = p \quad (2.15)$$

$$\dot{p} = \sin(x + \epsilon \sin(\omega_0 t)) - F, \quad (2.16)$$

die in der x -Koordinate invariant bezüglich einer Verschiebung um 2π sind.

Stroboskopischer Poincaré-Schnitt

Um die klassische Dynamik zu analysieren, werden unter anderem stroboskopische Poincaré-Schnitte zu Hilfe gezogen. Diese werden erzeugt, indem man bei der numerischen Berechnung einer zur Zeit t_0 gestarteten Phasenraum-Bahn die Punkte zu den Zeiten $t = t_0 + 2\pi n/\omega_0, n \in \mathbb{N}$ in den zweidimensionalen Phasenraum abbildet. Da, wie schon erwähnt die Dynamik eine Symmetrie bezüglich Translationen der Koordinate x um Vielfache von 2π besitzt, werden die Phasenraumpunkte außerdem nach der Zuordnung $x \mapsto (x \bmod 2\pi)$ in den Bereich $x \in [0 : 2\pi)$ gesetzt.

Fourier-Analyse

Aus der während der Propagationszeit von $t = 0$ bis $t = T$ berechneten Phasenraumbahn gewinnt man mittels der Hamilton'schen Gleichungen (2.15) und (2.16) die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$, die wie oben bemerkt mit der Dipolmomentbeschleunigung identifiziert werden soll:

$$d(t) = \ddot{x}(t) \quad (2.17)$$

Also ist $d(t)$ die zu berechnende Größe, und die Fourier-Analyse von ihr gibt schließlich Aufschluss über die emittierten Frequenzen:

$$I(\omega) = \int_0^T \ddot{x}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.18)$$

2.1.2 Quantendynamik

Die numerische Entwicklung eines Quantenzustands $\Psi(x, 0)$ erfolgt im Impulsraum, wie im Anhang B.2.2 gezeigt ist. Als Anfangszustand wählt man ein Wellenpaket mit Gaussförmiger Verteilung im k -Raum. Dadurch lassen sich die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $p(t_0) = p_0$ aus der klassischen Dynamik direkt in die quantenmechanischen Berechnungen übertragen, wenn man noch die Beziehung $k = p/\hbar$ berücksichtigt. Für die numerische Realisierung wird eine Basis aus Eigendistributionen des Impulsoperators

$$\{e^{ik_n x}, 1 \leq n \leq N \text{ mit: } n, N \in \mathbb{N}\} \quad (2.19)$$

verwendet. Die Wellenfunktionen sind dann Überlagerungen der Basiszustände:

$$\tilde{\Psi}(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) e^{ik_n x}, \quad (2.20)$$

wobei

$$c_n(t=0) = C \exp\left(-\frac{1}{5} \frac{(k_n - k_0)^2}{2} - ik_n x_0\right), \quad (2.21)$$

mit einer Normierungskonstante C . Man nennt einen solchen Zustand auch einen *kohärenten* Zustand. Die Berechnung wird in einer Eichung

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-i \frac{Fxt}{\hbar} + i \frac{F_\omega x}{\hbar \omega} \cos(\omega t)\right) \tilde{\Psi}(x, t) \quad (2.22)$$

durchgeführt, die den Erfordernissen der numerischen Berechnung entgegenkommt, da hier bei der Wahl einer Basis im Impulsraum die Wirkung des Kosinus-Potentials, nicht aber die des AC- und des DC-Felds berücksichtigt werden muss. Die lediglich 'verschiebende' Wirkung der beiden äußeren Felder geht bei der Umrechnung von $\tilde{\Psi}(x, t)$ auf den Zustand in der ursprünglichen Darstellung $\Psi(x, t)$ in die Rechnung ein.

Als quantendynamisches Analogon zur Beschleunigung wird die zweite Ableitung des Ortserwartungswertes nach der Zeit verwendet. Man erhält, wie in Abschnitt B.2.3 dargestellt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left(\hbar \sum_{n=1}^N |c_n(t)|^2 k_n \right) - F_\omega \sin(\omega_0 t) - F. \quad (2.23)$$

Bei den Berechnungen wird $\hbar = 0.4$ verwendet.

2.2 Schwaches äußeres Feld

2.2.1 Dynamik

Sind die beiden äußeren Felder abgeschaltet, d.h. die Feldstärken des Stark-Feldes (F) und des zeitlichen Wechselfeldes (ϵ) sind null, dann ist die Dynamik im klassischen System regulär. Der Poincaré-Schnitt (Abbildung 2.2) zeigt zwei markante Strukturen: Eine Insel im Zentrum ($p = 0, x = \pi$) mit geschlossenen Bahnen, die eine oszillatorische Librationsbewegung zeigen; zweitens linienförmige Strukturen zu größeren Impulsen und Auslenkungen hin mit periodischen, offenen Bahnen (Rotation). Die Poincaré-Schnitte in diesem Kapitel entstanden alle durch Überlagerung von stroboskopischen Poincaré-Schnitten vieler Trajektorien, die auf einem Gitter von Anfangskordinaten starteten.

Wird das Wechselfeld dazugeschaltet (Abbildung 2.3), entsteht ein chaotischer 'See' zwischen den Bereichen der nichtgebundenen, periodischen Bahnen im oberen und unteren

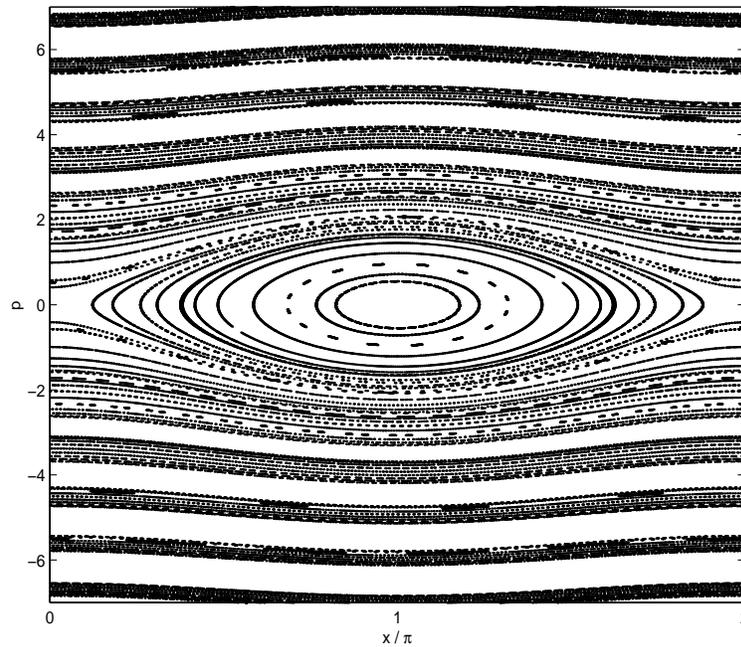


Abbildung 2.2: Poincaré-Schnitt für das System $H = p^2/2 + \cos(x)$ ohne ein äußeres Feld. Es sind die Inselstrukturen mit geschlossenen Bahnen in der Bildmitte und die linienförmigen Strukturen der offenen, periodischen Bahnen zu sehen.

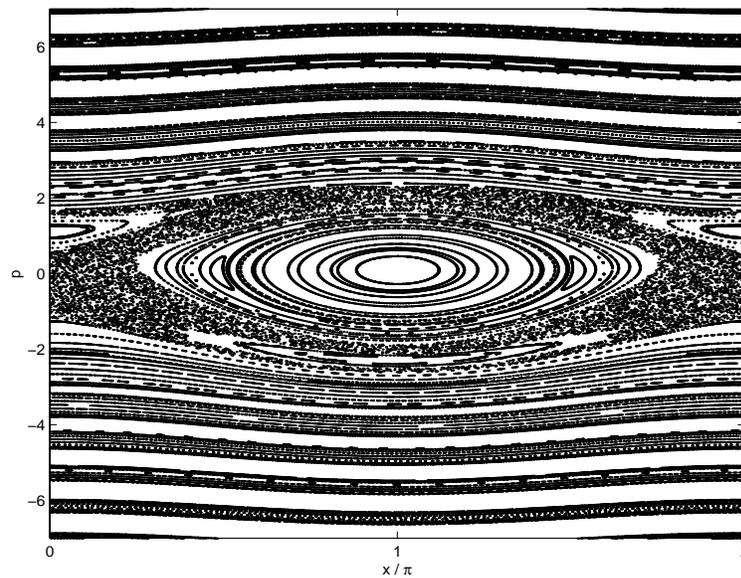


Abbildung 2.3: Poincaré-Schnitt für das System $H = p^2/2 + \cos(x + \epsilon \sin(\omega_0 t)) + Fx$, $\epsilon = 0.1$, $F = 0$. In der Umgebung der zentralen Inselstruktur ist aufgrund des Wechselfeldes ein chaotischer Bereich entstanden.



Abbildung 2.4: *Poincaré-Schnitt*, $\epsilon = 0.1, F = 0.01$. Das Stark-Feld ($F = 0.01$) zerstört bis auf zwei größere Inselstrukturen die Bereiche der offenen, periodischen Bahnen. Die Stabilitätsinsel im Zentrum bleibt bestehen.

Teil des Bildes und den gebundenen Bahnen im Zentrum. Außerdem gibt es zwei Inseln mit periodischen Bahnen; eine langgestreckte mit Zentrum bei $x = \pi, p \approx -2.1$ und eine zweite bei $x = (0 \bmod 2\pi)$ und $p \approx 1$.

Auch wenn diese Inseln durch das hinzukommende Stark-Feld deformiert werden ($\epsilon = 0.1, F = 0.01$ in Abbildung 2.5), bleiben sie als einzige Gebiete mit Startpunkten periodischer, nichtgebundener Bahnen erhalten. Während sich der chaotische Bereich zu größeren Impulsen hin ausdehnt, bleibt die zentrale Insel mit den gebundenen Bahnen im Zentrum bestehen. Die Zunahme der Punktdichte vom oberen Bildbereich ($p > 0$) nach unten ($p < 0$) erklärt sich durch ein Zusammenspiel aus der Beschleunigung

$$\dot{p}_{\text{Stark}} = -F \quad (2.24)$$

zu negativen Impulsen hin und der Art und Weise, wie der Poincaré-Schnitt berechnet wurde. Es wurden Bahnen berechnet, die von einem Stargitter ausgingen, das gleichmäßig über einen begrenzten Bereich des Phasenraums verteilt war. Dabei war hier $-8 \leq p \leq 8$ und $0 \leq x \leq 2\pi$. Während das Stark-Feld die Trajektorien zu negativen Impulsen hinlenkt, kommen von $p \geq 8$ keine weiteren nach, sodass die Dichte im oberen Bereich abnimmt.

In den Abbildungen 2.5 und 2.6 sind nun zwei Poincaré-Schnitte bei einem stärkeren zeitlichen Wechselfeld ($\epsilon = 0.6$) und den gleichen Werten für das Stark-Feld ($F = 0.0$ und $F = 0.01$) zu sehen. Der im Zentrum gelegene Bereich mit der Stabilitätsinsel ist kleiner geworden. Zusammen mit den zwei zusammenhängenden Inselpaaren, die ihn umgeben, ist er immer noch in einem chaotischen See eingebettet. Außerdem gibt es sowohl im

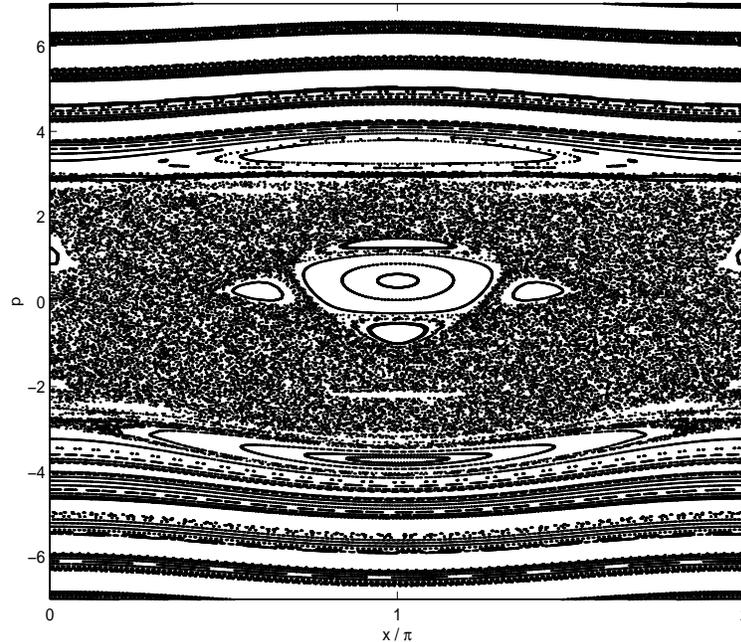


Abbildung 2.5: *Poincaré-Schnitt, $\epsilon = 0.6, F = 0$. Man kann hier deutlich drei verschiedene Bereiche erkennen: Inselstruktur im Zentrum, chaotischer See – etwa in dem Bereich $-3 \leq p \leq 3$ – und linienförmige Strukturen bei größeren Impulsen.*

chaotischen Bereich als auch im Übergangsbereich zu den linienförmigen Strukturen Inseln mit periodischen, nichtgebundenen Bahnen. Nur diese Inseln bleiben dann bei hinzugeschaltetem Stark-Feld ($F = 0.01$) bestehen, während sich die linienförmigen Strukturen als obere und untere 'Ränder' auflösen. Die Grenze zwischen verschiedenen Punktdichten im Bereich bei $p \approx 2.1$ in Abbildung 2.6 hat seine Ursache in einem 'Cantor' [Tab89], der schon in Abbildung 2.5 bei ausgeschaltetem Stark-Feld andeutungsweise zu sehen ist. Es muss hier festgestellt werden, dass man nur einen Teil der Inseln im stroboskopischen Phasenraum-Schnitt sieht, da es noch mehr kleine Inseln gibt, die nur bei genauere Auflösung zu sehen wären.

In Abbildung 2.7 sind nun Phasenraumbahnen dargestellt, die an verschiedenen Punkten starten. Die Potentialparameter F und ϵ sind immer dieselben: $F = 0.01$ und $\epsilon = 0.6$. Es sollen hier die drei typischen Bahnen gezeigt werden, die in diesem System auftreten.

Beginnt eine Trajektorie in der zentralen Stabilitätsinsel des Poincaré-Schnitts 2.6, dann führt sie erwartungsgemäß eine gebundene Bewegung durch. Dies ist im oberen Bild zu sehen; die Anfangskoordinaten sind $p = 0.2$ und $q = \pi$. Die zwei anderen Bahnen starten mit derselben x -Koordinate wie die erste, haben aber einen größeren Impuls. Während die mittlere Bahn mit einem Startimpuls $p_0 = 2.0$ in dem chaotischen See, der die Stabilitätsinsel umgibt, beginnt und der Impuls zwischen positiven und negativen Werten fluktuiert, bleibt der Impuls bei der Bahn im unteren Bild in einem eng beschränkten Bereich um den Startimpuls $p_0 = \pi$. Diese Bahn hat ihren Startpunkt in der Insel,

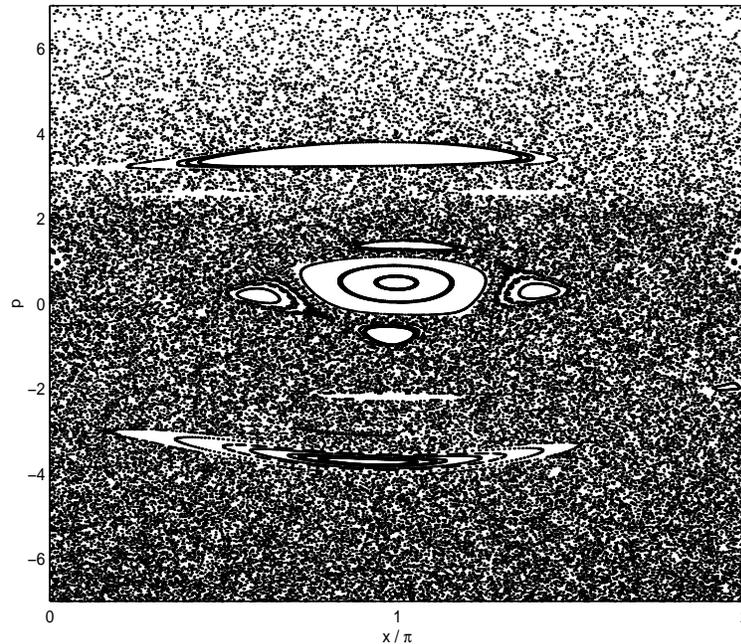


Abbildung 2.6: *Poincaré-Schnitt des Systems $H = p^2/2 + \cos(x + \epsilon \sin(\omega_0 t)) + Fx$ mit Stark- und Wechselfeld: $\epsilon = 0.6, F = 0.01$*

die im Poincaré-Schnitt in Abbildung 2.4 oben zu sehen ist, und bleibt an diese stabile Phasenraumstruktur gebunden.

2.2.2 Frequenzanalyse

Die entsprechenden Frequenzspektren der Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ von Bahnen mit Wechselfeld ($\epsilon = 0.6$) und Stark-Feld mit der Feldstärke $F = 0.01$ sind in Abbildung 2.8 zusammengestellt. Man sieht, dass die dominierende Frequenz der gebundenen Bewegung die Anregerfrequenz ω_0 ist, die in ihrer Intensität die anderen um mindestens das Zehnfache übertrifft. Trotzdem beobachtet man auch Anteile anderer Frequenzen, was man durch die Wirkung des Kosinus-Potentials verstehen kann, das die rein harmonische Bewegung in Folge des AC-Feldes stört. Das Frequenzspektrum, das zu der oberen, breitgezogenen Insel gehört (Abbildung 2.6) und im unteren Bild zu sehen ist, hat Maxima bei Vielfachen von ω_0 . Außerdem gibt es hier Nebenmaxima, die von einer Überlagerung der Anregerfrequenz und der Umlauffrequenz der Insel herrühren, die angibt, wie schnell ein Phasenraumpunkt für das Umrunden des Inselmittelpunkts benötigt. Das Frequenzspektrum der Beschleunigung, die bei der Bewegung mit dem Startpunkt im chaotischen See entsteht, zeigt dagegen keine so deutliche Struktur. Beherrscht von einem Maximum bei der Anregerfrequenz ($\omega/\omega_0 = 1$), nimmt die Intensität nach anfänglich fluktuierendem, im Mittel konstanten Niveau ab.

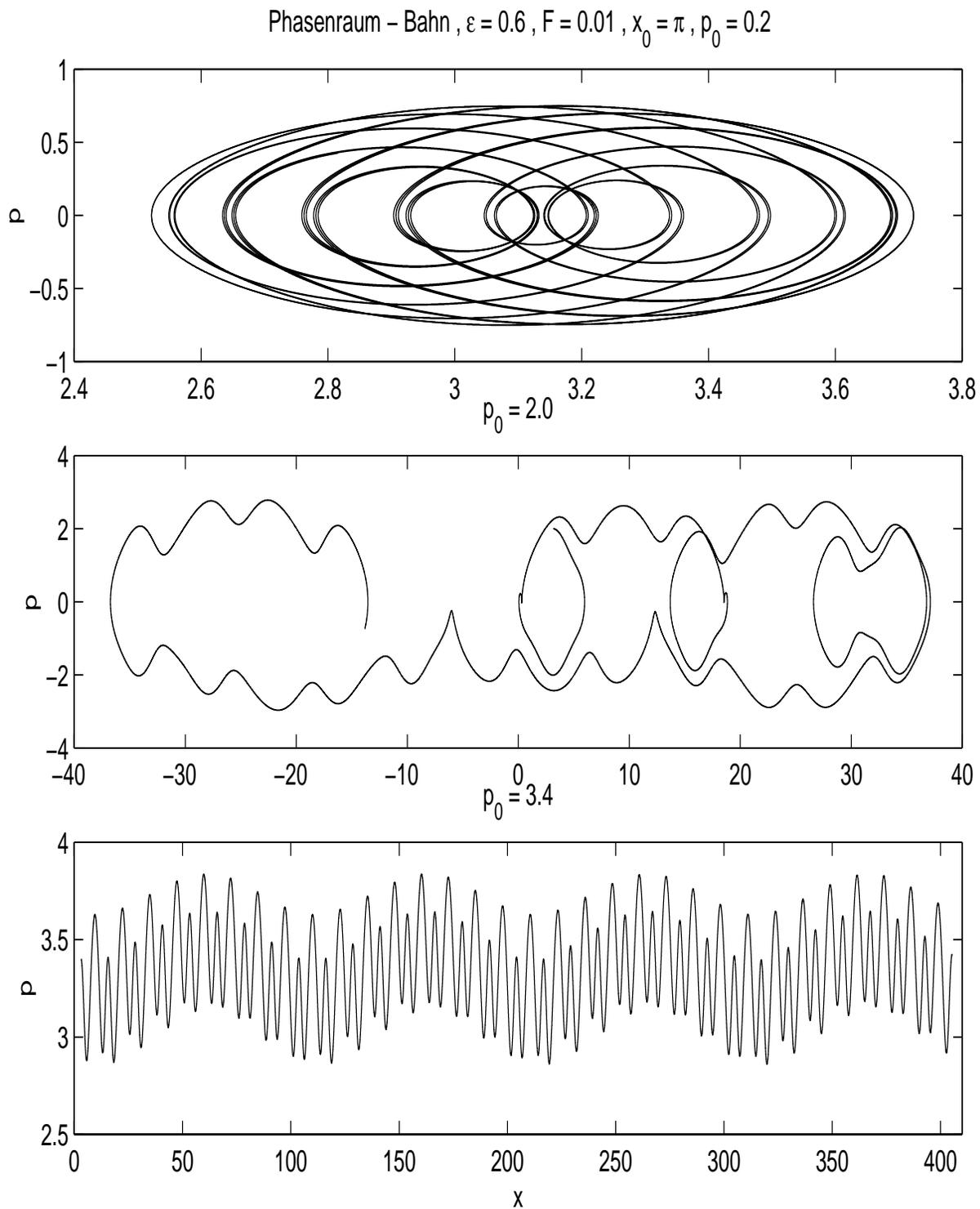


Abbildung 2.7: Phasenraumbahnen mit unterschiedlichen Anfangsimpulsen, die Parameter sind überall $\epsilon = 0.6$ und $F = 0.01$, $T = 32T_{\omega_0}$. Oben: gebundene Bahn, Mitte: chaotische Bahn, unten: offene, periodische Bahn. Man beachte die unterschiedlichen Skalen der x-Achse.

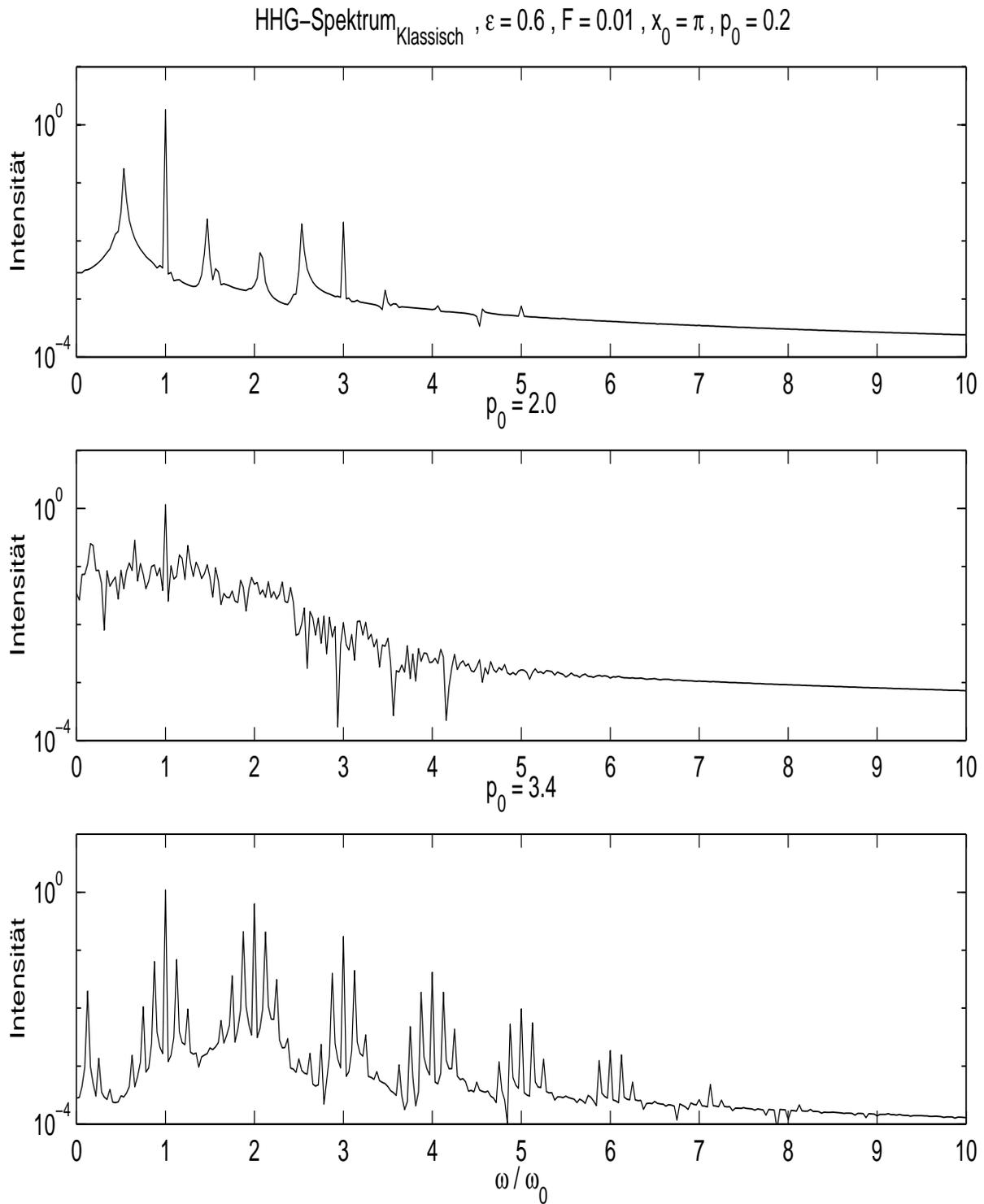


Abbildung 2.8: *HHG-Spektren (klassisch) der Phasenraumbahnen aus Abbildung 2.7. Oben: Spektrum einer gebundenen Bahn, Mitte: Spektrum einer chaotischen Bahn, unten: Spektrum einer nicht gebundenen, periodischen Bahn.*

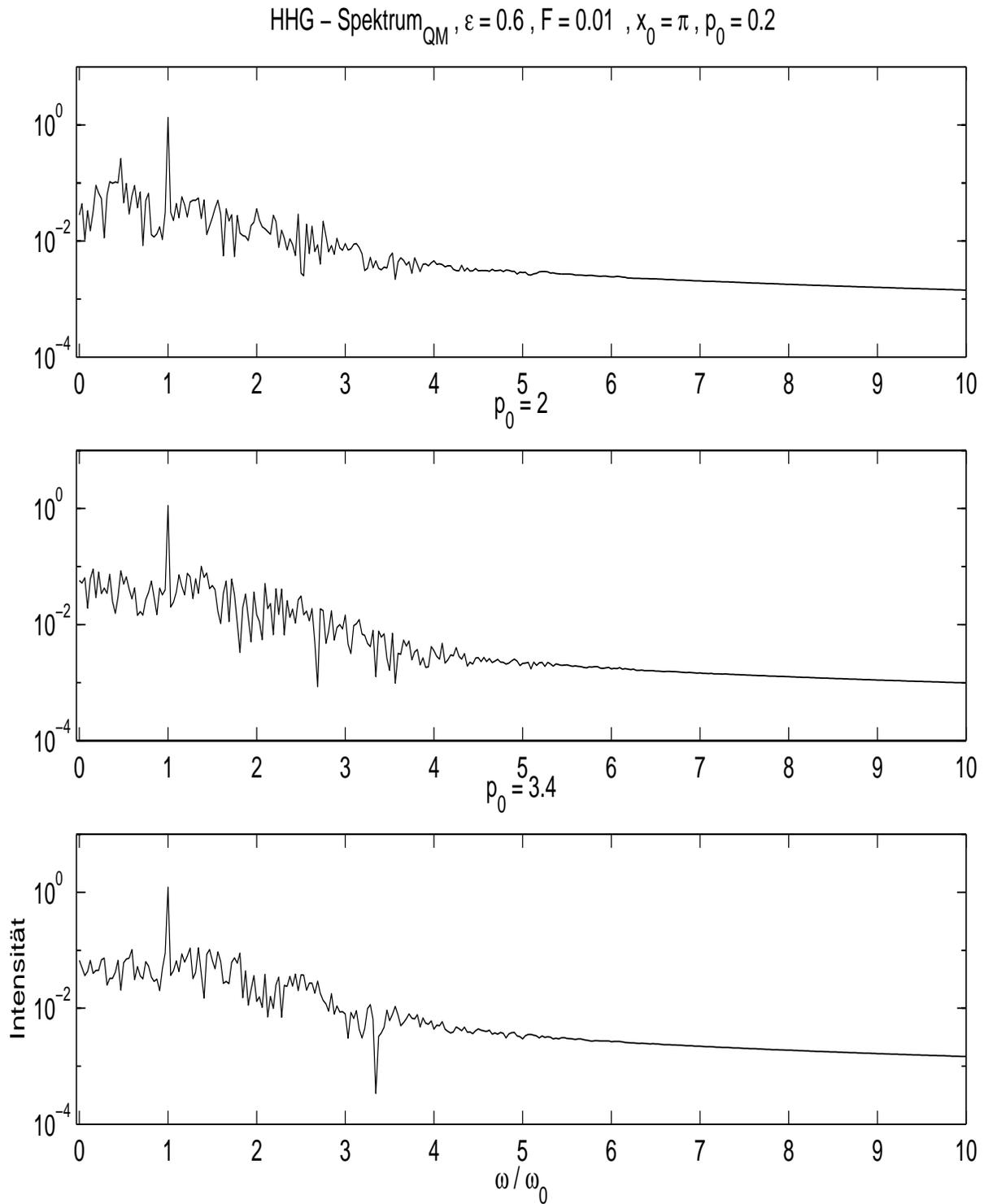


Abbildung 2.9: Quantenmechanische HHG-Spektren für Wellenpakete mit korrespondierenden Anfangsbedingungen zu Abb 2.8.

Vergleicht man mit den klassischen Frequenzverteilungen die Frequenzspektren aus den quantenmechanischen Rechnungen, die in Abbildung 2.9 zu sehen sind, dann kann man keine so deutlichen Unterschiede aufgrund unterschiedlicher Anfangsbedingungen feststellen, wie das bei Ergebnissen der klassischen Dynamik der Fall ist. Man kann allerdings in allen drei Spektren den 'Peak' bei der Anregerfrequenz ($\omega/\omega_0 = 1$) sehen, der genauso wie auch in den klassischen Spektren die Frequenz mit der größten Intensität anzeigt. Eine weitere Parallelität der Abbildungen 2.8 und 2.9 betrifft das Spektrum der Bahn mit dem Anfangsimpuls $p_0 = 0.2$, d.h. der gebundenen Bahn; in beiden Spektren sind Peaks bei der halben Anregerfrequenz zu sehen. Ansonsten stimmen nur in etwa die Größen der Spektren überein.

Die Tatsache, dass die quantenmechanischen Spektren keine so deutlichen Differenzen untereinander aufweisen, ist damit zu erklären, dass ein quantenmechanischer Zustand nicht an einem einzigen Punkt im Phasenraum konzentriert ist. Stattdessen ist er verteilt über einen Bereich und läuft mit der Zeit weiter auseinander, sodass man nicht solche deutlichen Unterschiede durch verschiedene Anfangsbedingungen erwarten kann wie bei der klassischen Bewegung.

2.3 Bewegung durch AC- und DC-Feld bestimmt

2.3.1 DC-Feld dominant

Wenn die Feldstärke F groß genug ist, um die Bewegung zu bestimmen, dann kann man die klassischen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgendermaßen nähern:

$$\dot{x} = p \quad (2.25)$$

$$\dot{p} = -F. \quad (2.26)$$

Das bedeutet, dass die Bewegung in erster Linie gleichmäßig beschleunigt ist und die Bahn einfach integriert werden kann:

$$x(t) = x_0 + p_0 t - \frac{F t^2}{2}. \quad (2.27)$$

Für die Berechnung der aktuellen Beschleunigung kann das $\cos(x)$ -Potential allerdings nicht vernachlässigt werden. Denn durch die immer schnellere Bewegung aufgrund des Stark-Feldes (F) wiederholen sich die kleinen Störungen durch das Kosinus-Potential in immer kürzeren Zeitabständen. Dadurch enthält die Beschleunigung Anteile von immer höheren Frequenzen, je länger diese Bewegung fort dauert. In Abbildung 2.10 sieht man eine Phasenraum-Bahn, die dies verdeutlichen soll. Für $d(t)$ erhält man mit der Definition (2.17) als Näherung:

$$d(t) = \sin[x(t) + \epsilon \sin(\omega_0 t)] - F \quad (2.28)$$

$$= \sin\left[x_0 + p_0 t - \frac{F t^2}{2} + \epsilon \sin(\omega_0 t)\right] - F. \quad (2.29)$$

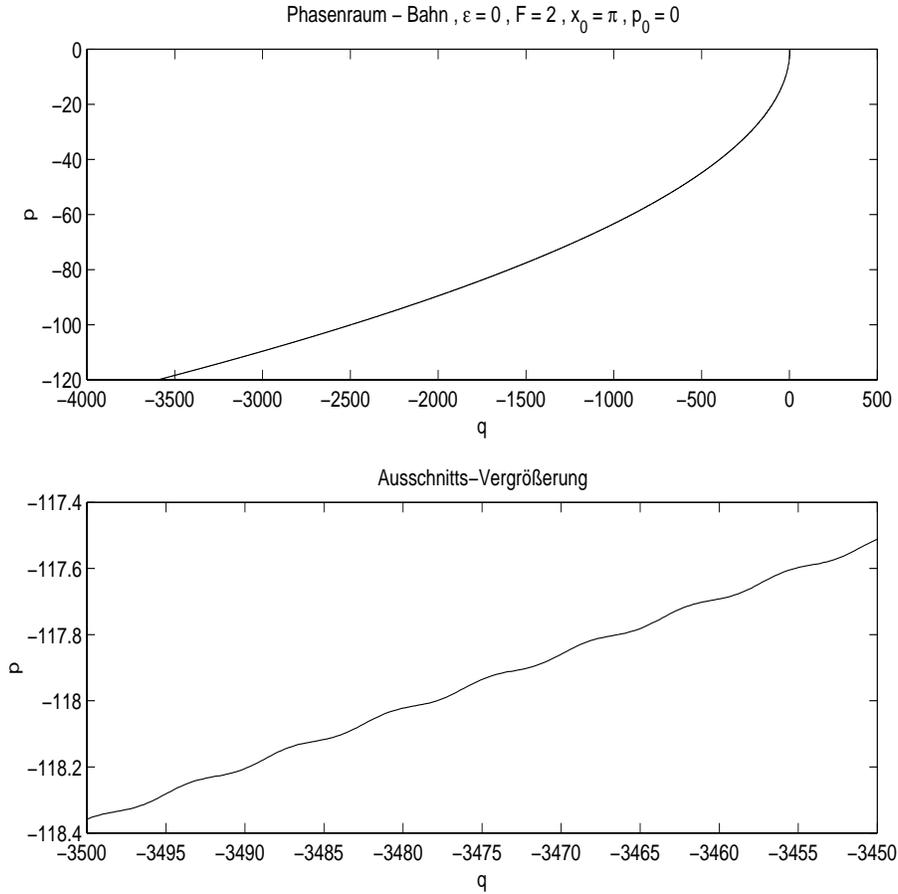


Abbildung 2.10: *Phasenraum-Bahn und Ausschnitts-Vergrößerung*, Parameter $\epsilon = 0.0$ und $F = 2.0$. ($T = 16T_{\omega_0}$, $x_0 = \pi$, $p_0 = 0.0$)

Das Wesentliche wird schon deutlich, wenn $\epsilon = 0$ und $p_0 = 0$ gesetzt werden; dann bleibt zur Fourier-Analyse folgendes Integral zu lösen:

$$I(\omega) = \int_0^T \sin\left(x_0 - \frac{Ft^2}{2}\right) e^{-i\omega t} dt \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^T \left(e^{i\left(x_0 - \frac{Ft^2}{2} - \omega t\right)} - e^{i\left(-x_0 + \frac{Ft^2}{2} - \omega t\right)} \right) dt \quad (2.31)$$

Mit Hilfe der Methode der stationären Phase lassen sich schon wesentliche Aussagen über die Gestalt von $I(\omega)$ machen. Einen wesentlichen Beitrag zum Integral liefern nämlich nur die Punkte stationärer Phase aus den beiden Exponenten, die hier durch

$$t_1 = -\frac{\omega}{F} \quad \text{für den ersten Summanden von (2.31),} \quad (2.32)$$

$$t_2 = +\frac{\omega}{F} \quad \text{für den zweiten Summanden von (2.31),} \quad (2.33)$$

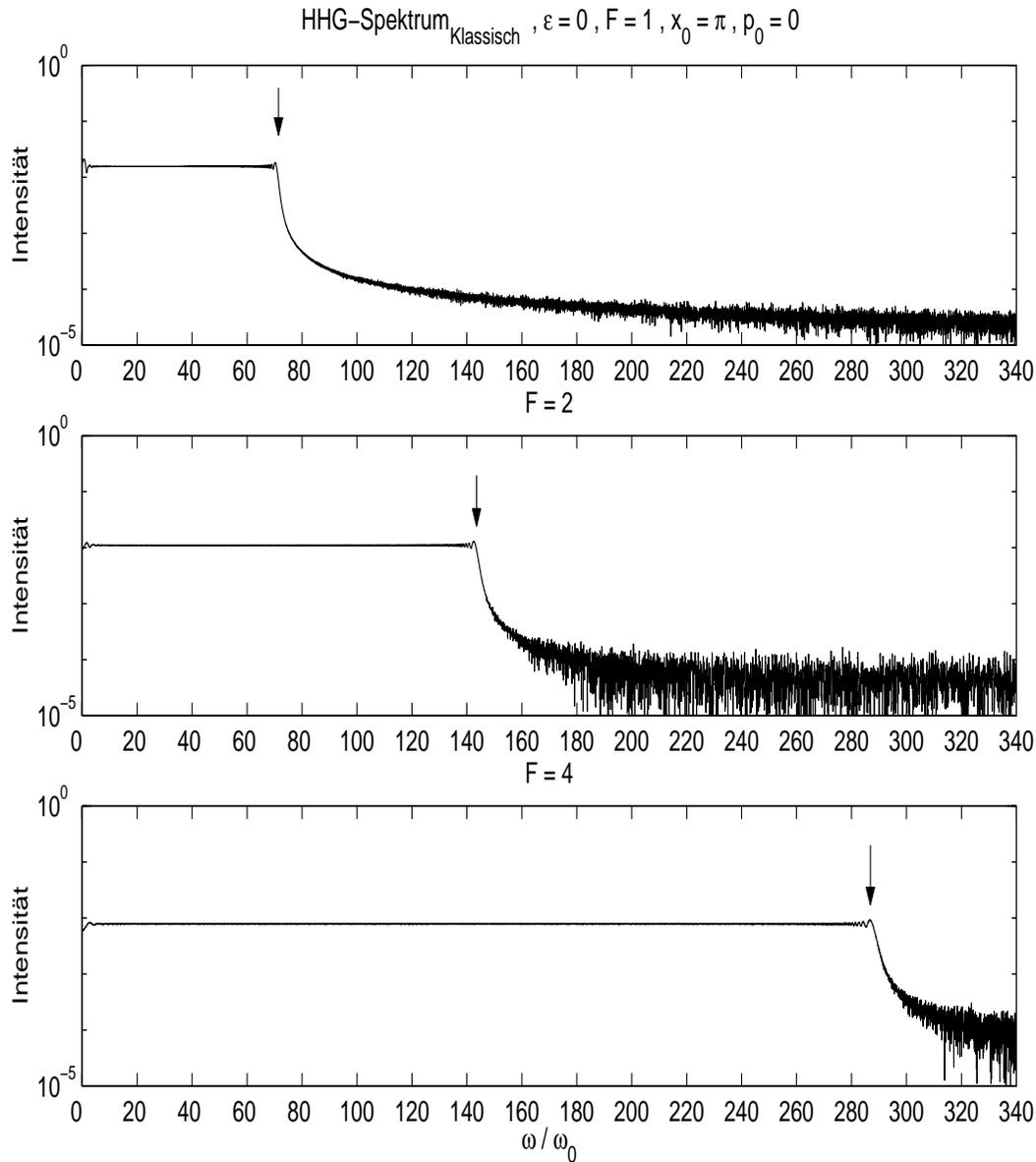


Abbildung 2.11: *HHG-Spektrum (klassisch)*, Parameter $\epsilon = 0.0$ und $F = 1.0, 2.0$ und 4.0 . ($T = 32T_{\omega_0}$, $x_0 = \pi$, $p_0 = 0.0$)

gegeben sind. Da aber die Zeit t nur in dem Bereich zwischen null und T liegt, gibt es nur Lösungen für t_2 . Für ω ergibt sich hieraus eine Obergrenze:

$$\omega \leq FT = \omega_{\max}. \quad (2.34)$$

Das bedeutet, dass das Frequenzspektrum $I(\omega)$ zu großen Werten hin durch eine Schranke ω_{\max} begrenzt ist, die entscheidend durch die Feldstärke F und die Propagationszeit T bestimmt ist. Bezeichnet man in Gleichung (2.34) die Anzahl der Perioden, die die Pro-

pagationszeit andauert, mit $A = T/T_{\omega_0}$ und setzt für die Anregerfrequenz den Zahlenwert $\omega_0 = 10/6$ ein, erhält man also folgendes Cutoff-Gesetz:

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = F \frac{T}{\omega_0} = F \frac{T}{T_{\omega_0}} \frac{T_{\omega_0}}{\omega_0} \quad (2.35)$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0^2} F A \approx 2.26 F A. \quad (2.36)$$

Das bedeutet also, dass das Spektrum laut Gleichung (2.36) nur für Frequenzen $\omega \leq 2.26 F A \omega_0$ wesentlich von null verschieden ist. Dabei sollten die Intensitäten bei diesen Frequenzen konstant sein, so dass es ein Plateau gibt; das wird ersichtlich aus dem Ausdruck (2.38), der sich mit der ausgeführten stationäre-Phase-Näherung für $I(\omega)$ (2.31) ergibt:

$$I(\omega) \approx \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{F}} e^{-ix_0} \exp\left(-i\frac{\omega^2}{2F} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.37)$$

$$|I(\omega)| \approx \sqrt{\frac{\pi}{2F}} \quad (2.38)$$

Der Betrag von $I(\omega)$ ist nämlich unabhängig von der Frequenz ω . Entsprechend dem Erklärten zeigen die HHG-Spektren in Abbildung 2.11 die Abhängigkeit (2.36) von F und A . Die Intensität fällt bei der Cutoff-Frequenz ab, die bei den verschiedenen Parametern unterschiedliche Werte hat: Bei allen drei Bildern gilt $A = 32$, und somit im Fall

$$\begin{aligned} F = 1 &\Rightarrow \omega_{\max} \approx 72.32 \omega_0, \\ F = 2 &\Rightarrow \omega_{\max} \approx 144.64 \omega_0, \\ F = 4 &\Rightarrow \omega_{\max} \approx 289.28 \omega_0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Bilder entstanden, indem zuerst die Bahn numerisch berechnet und anschließend $I(\omega)$ mit Fast-Fourier-Transformation ermittelt wurde. Dabei wurden die Bahnen immer von den gleichen Startpunkten begonnen und für die Dauer der Propagationszeit T berechnet; nur der Parameter F wurde variiert, und zwar wurden die Werte $F = 1, 2$ und 4 genommen. Als Wert für die Intensität wurde in den Bildern der Absolutbetrag von $I(\omega)$ aufgetragen.

Der Einfluss der Feldstärke F und der Propagationszeit T auf das Frequenzspektrum bestätigt den oben erwähnten Anteil des Kosinus-Potentials an der Beschleunigung. Da ein intensiveres Stark-Feld eine größere Beschleunigung bzw. ein schwächeres eine kleinere Geschwindigkeitsänderung in der Zeit bewirkt, ist auch der Parameter F entscheidend für mögliche Frequenzen im System.

In Abbildung 2.12 sind die HHG-Spektren von den entsprechenden quantenmechanischen Berechnungen zu sehen. Auch wenn sie nicht das ebene Plateau des klassischen Spektrums aufweisen, so besitzen sie doch auch einen Bereich mit größerer Intensität, der bis zu einer Abschneidefrequenz reicht, von der aus dann die Intensität stark abnimmt. Das heißt, dass die klassisch berechnete Cutoff-Frequenz eine brauchbare Abschätzung für das quantenmechanische Verhalten liefert.

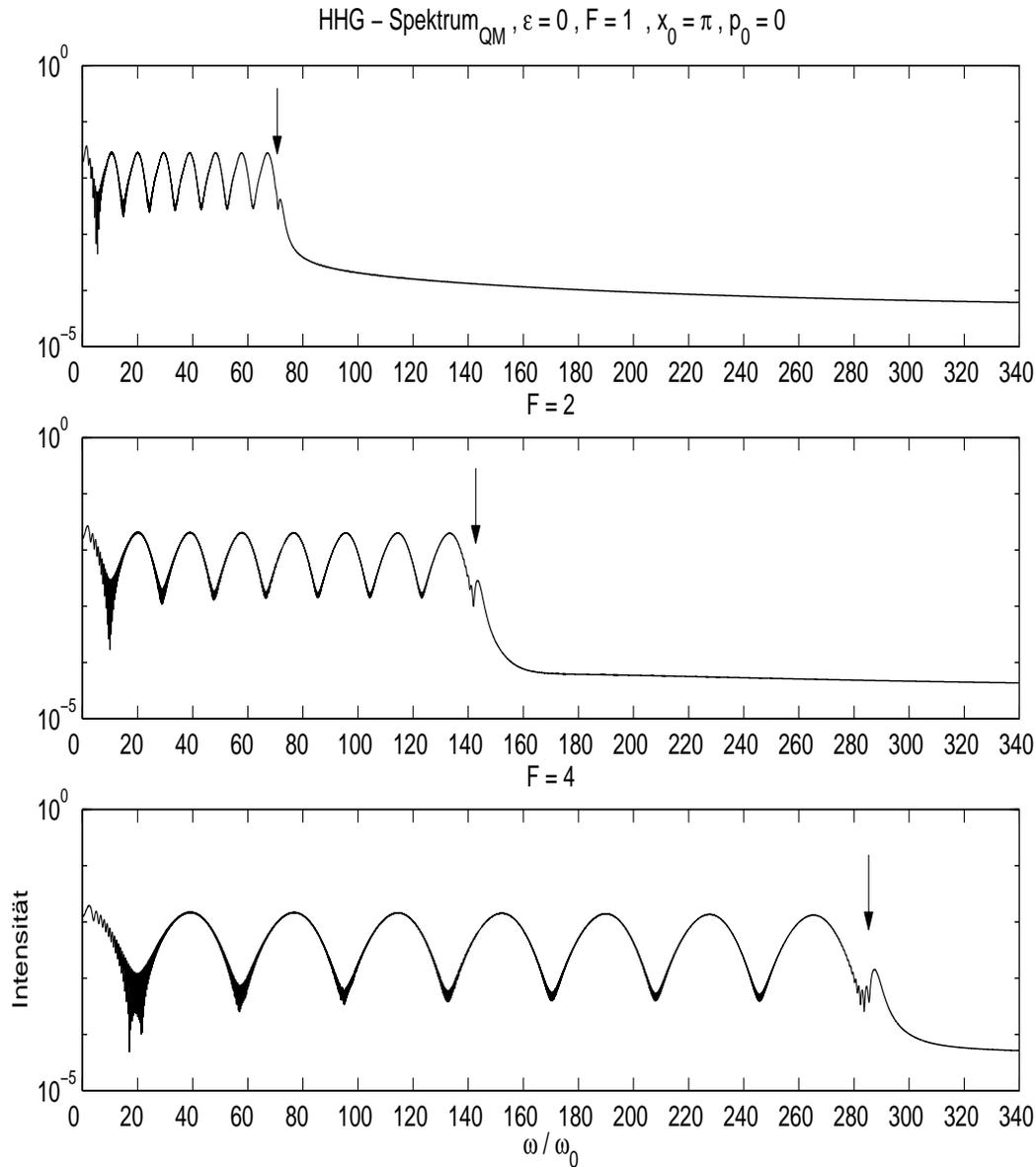


Abbildung 2.12: *HHG-Spektrum* (quantenmechanisch $\hbar = 0.4$), Parameter $\epsilon = 0.0$ und $F = 1.0, 2.0$ und 4.0 ($T = 32T_{\omega_0}$, $x_0 = \pi$, $p_0 = 0$).

Der deutlichste Unterschied zu den klassischen Spektren sind die Modulationen im Plateaubereich. Aus den Spektren geht hervor, dass die Periode der Oszillationen proportional zu F ist. Dies deutet auf die Bloch-Frequenz hin, die ebenfalls einen Wert proportional zu F hat und die in Wannier-Stark-Systemen natürlicherweise auftritt: Haben zwei Zustände einen Orts-Abstand $\Delta x = 2\pi$, dann ist ihre Energiedifferenz aufgrund des Stark-Feldes $\Delta E = 2\pi F$. Die Frequenz, die dieser Energiedifferenz entspricht ist

die Bloch-Frequenz $\omega_B = 2\pi F/\hbar$. Sie tritt in Wannier-Stark-Systemen als Frequenz der Bloch-Oszillationen auf.

In der Tat kann man den quantenmechanischen Frequenzverlauf $|I_{\text{KI}}(\omega)|$ im Vergleich zu den klassischen Frequenzspektren in erster Näherung durch die Beziehung

$$|I_{\text{QM}}(\omega)| \approx |I_{\text{KI}}(\omega)| \left(1 + \alpha \cos \left(2\pi \frac{\omega}{\omega_B} \right) \right) \quad (2.40)$$

ausdrücken. In Einheiten von ω_0 hat die Periode der abgebildeten Spektren den Wert

$$\frac{\omega_B}{\omega_0} = \frac{2\pi F}{\hbar\omega_0} = 3\pi F \quad \text{mit: } \hbar = 0.4, \omega_0 = 10/6, \quad (2.41)$$

in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Ein möglicher Erklärungsversuch kann in etwa folgendermaßen aussehen: Sowohl experimentell [And98] als auch theoretisch [Chi00] fand man, dass ein Zustand in einem Wannier-Stark-System in Pulsen zerfällt, die im Abstand von $\Delta t = 2\pi/\omega_B$ entstehen und deren Schwerpunkt der klassischen Bewegung folgt. Dieses Verhalten tritt immer auf, wenn der Anfangszustand sich über mehrere Perioden erstreckt [Glü00]. Man kann annehmen, dass im hier betrachteten Fall ein ähnliches Verhalten auftritt und dass wegen den starken Feldstärken F der Anfangszustand sehr schnell zerfällt, sodass er nach kurzer Zeit schon eine sehr geringe Amplitude hat. Deshalb besteht die resultierende Dipolmoment-Beschleunigung $d(t)$ im wesentlichen aus der Summe der Beiträge der ersten beiden Pulse:

$$d_{\text{ges}}(t) = d(t) + \alpha d(t - \Delta t), \quad (2.42)$$

wobei der Faktor $\alpha \leq 1$ die relative Höhe des kleineren Pulses beschreibt. Die Fourier-Transformierte von $d_{\text{ges}}(t)$ ist dann näherungsweise

$$|I_{\text{QM}}(\omega)| \approx |I_{\text{KI}}(\omega)| \left| 1 + \alpha \exp \left(i 2\pi \frac{\omega}{\omega_B} \right) \right|. \quad (2.43)$$

Wenn man (2.43) für kleines α nähert, ergibt sich der beobachtete Kurvenverlauf (2.40).

In dem hier beschriebenen Fall konnte man das HHG-Spektrum des klassischen Systems quantitativ gut beschreiben. Durch Modifikationen dieses Resultats war man in der Lage auch das quantenmechanische Ergebnis zu erklären.

2.3.2 AC-Feld dominant

Wenn das AC-Feld die Bewegung bestimmt und $F = 0$ ist, dann führt die zeitlich periodische Kraft

$$\dot{p}_{\text{AC}} = -\epsilon\omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.44)$$

dazu, dass die Bewegung hauptsächlich eine Schwingung ist, die durch das Kosinus-Potential zusätzlich modifiziert wird. Die Abbildungen 2.13 und 2.14 zeigen Poincaré-Schnitte für das System mit diesen Parametern; Abbildung 2.15 zeigt eine typische Phasenraumbahn. Die Dipolmoment-Beschleunigung ist in diesem Fall als Funktion der Zeit

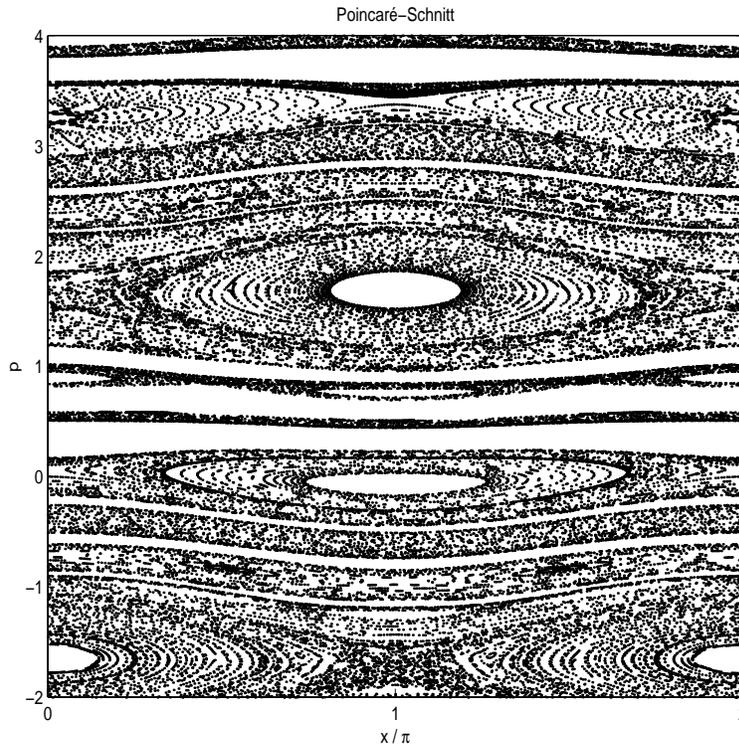


Abbildung 2.13: *Poincaré-Schnitt*, $\epsilon = 100$, $F = 0$, Ortsbereich $x \in [0 : 2\pi]$, Impulsbereich $p \in [-2 : 4]$

folgendermaßen gegeben:

$$d(t) \approx \sin(x_0 + p_0 t + \epsilon \sin(\omega_0 t)) \quad (2.45)$$

Man erwartet, dass das zeitliche Verhalten von $d(t)$ im Wesentlichen durch die Anregerfrequenz ω_0 und Vielfache davon geprägt ist, was bei einer Entwicklung von $d(t)$ nach Bessel-Funktionen mit Hilfe der Formeln (A.1) und (A.2) aus dem Anhang A deutlich wird:

$$d(t) \approx \sin(x_0 + p_0 t) \cos(\epsilon \sin(\omega_0 t)) + \cos(x_0 + p_0 t) \sin(\epsilon \sin(\omega_0 t)) \quad (2.46)$$

$$= \sin(x_0 + p_0 t) \left[J_0(\epsilon) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\epsilon) \sin(2k\omega_0 t) \right] \quad (2.47)$$

$$+ 2 \cos(x_0 + p_0 t) \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\epsilon) \sin((2k+1)\omega_0 t) \quad (2.48)$$

Aus der Formel wird ersichtlich, dass $d(t)$ von $\sin(n\omega_0 t)$ -Termen abhängt. Im Falle, dass der Anfangsimpuls p_0 null ist, setzt sich $d(t)$ ausschließlich aus Schwingungen mit den Frequenzen $n\omega_0$ ($n \in \mathbb{N}$) zusammen, deren Amplitude durch eine Bessel-Funktion gegeben ist:

$$I(n\omega_0) \sim J_n(\epsilon) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (2.49)$$

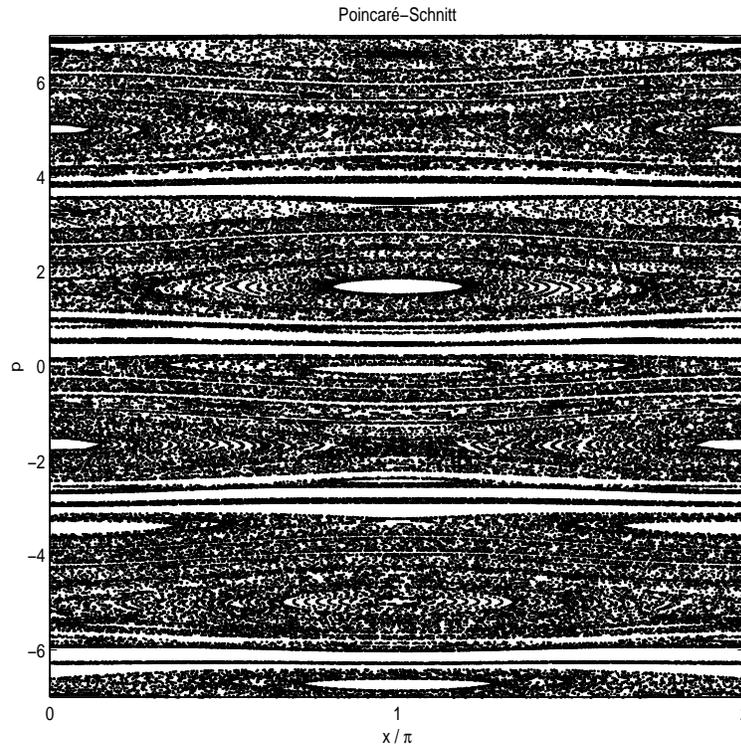


Abbildung 2.14: *Poincaré-Schnitt*, $\epsilon = 100, F = 0$, Ortsbereich $x \in [0 : 2\pi]$, Impulsbereich $p \in [-10 : 10]$

In Abbildung 2.16 sind drei HHG-Spektren zu sehen, die das eben beschriebene Verhalten veranschaulichen sollen. Es sind Frequenz-Spektren für $F = 0$ und drei verschiedene Werte von ϵ zu sehen. Mit Hilfe einer Eigenschaft der Bessel-Funktionen, die hier kurz dargestellt werden soll, lässt sich die Größe des Plateaus abschätzen. Wenn man die Integraldarstellung der Bessel-Funktion (A.7) aus dem Anhang A

$$J_m(\epsilon) = e^{im\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\epsilon \cos(t) - imt} dt, \quad (2.50)$$

mit Hilfe der stationären Phase näherungsweise ausrechnen möchte, sind die stationären Punkte durch die Bedingung bestimmt, dass der Exponent dort ein lokales Minimum besitzen muss:

$$\frac{d}{dt}(-\epsilon \cos(t) - mt) = 0 \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow \sin(t) = \frac{m}{\epsilon}. \quad (2.52)$$

Die letzte Gleichung ist für reelle t nur erfüllbar, wenn

$$m \leq \epsilon. \quad (2.53)$$

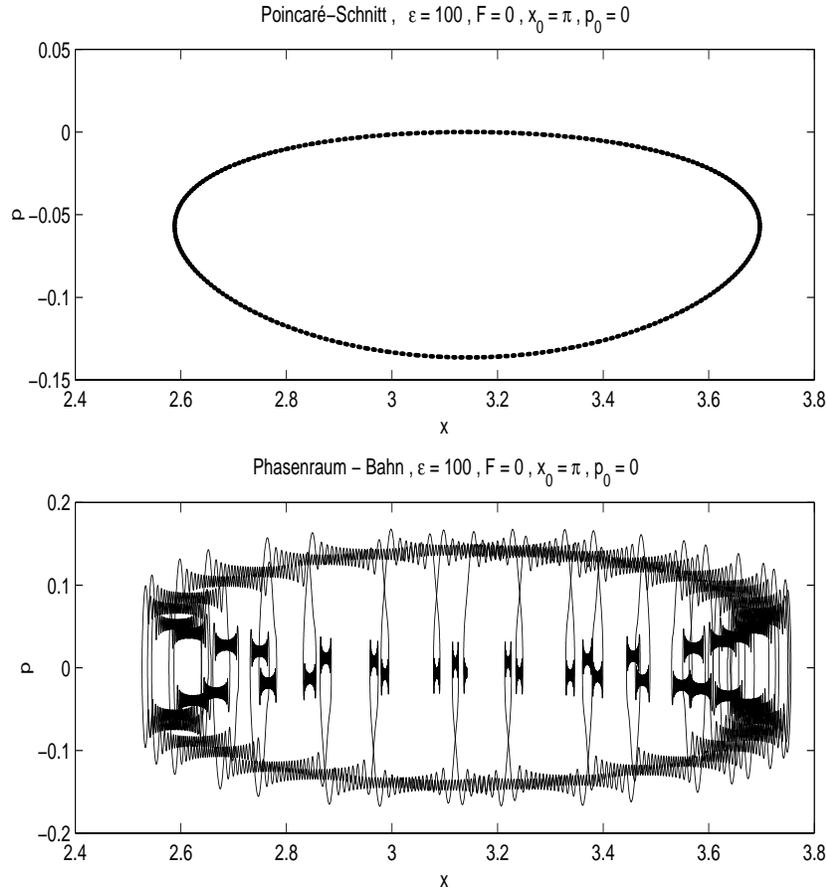


Abbildung 2.15: *Poincaré-Schnitt* (Propagationsdauer $T = 800T_{\omega_0}$) und *Phasenraum-Bahn* ($T = 32T_{\omega_0}$, $\epsilon = 100$, $F = 0$).

Bei weiterer Auswertung von (2.50) mittels stationärer Phase erhält man:

$$|J_m(\epsilon)| \sim \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon^2 - m^2}} \quad \text{für } m \leq \epsilon \quad (2.54)$$

$$|J_m(\epsilon)| \approx 0, \quad \text{sonst.} \quad (2.55)$$

Dies bedeutet also für die Bessel-Funktionen $J_n(\epsilon)$, dass für ein bestimmtes Argument ϵ nur diejenigen Funktionen einen wesentlich von null verschiedenen Betrag haben, deren Indizes im Bereich $m \leq \epsilon$ liegen. Deswegen ist die Cutoff-Frequenz in etwa durch

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = \epsilon \quad (2.56)$$

gegeben, was in den berechneten HHG-Spektren (Abbildung 2.16) bestätigt wird. Es wird auch deutlich, dass sich die 'Peaks' in der Intensitätskurve bei den Frequenzen $n\omega_0$ nach ihrer Höhe in zwei Gruppen aufteilen, diejenigen mit ungeradem Frequenzverhältnis ω/ω_0

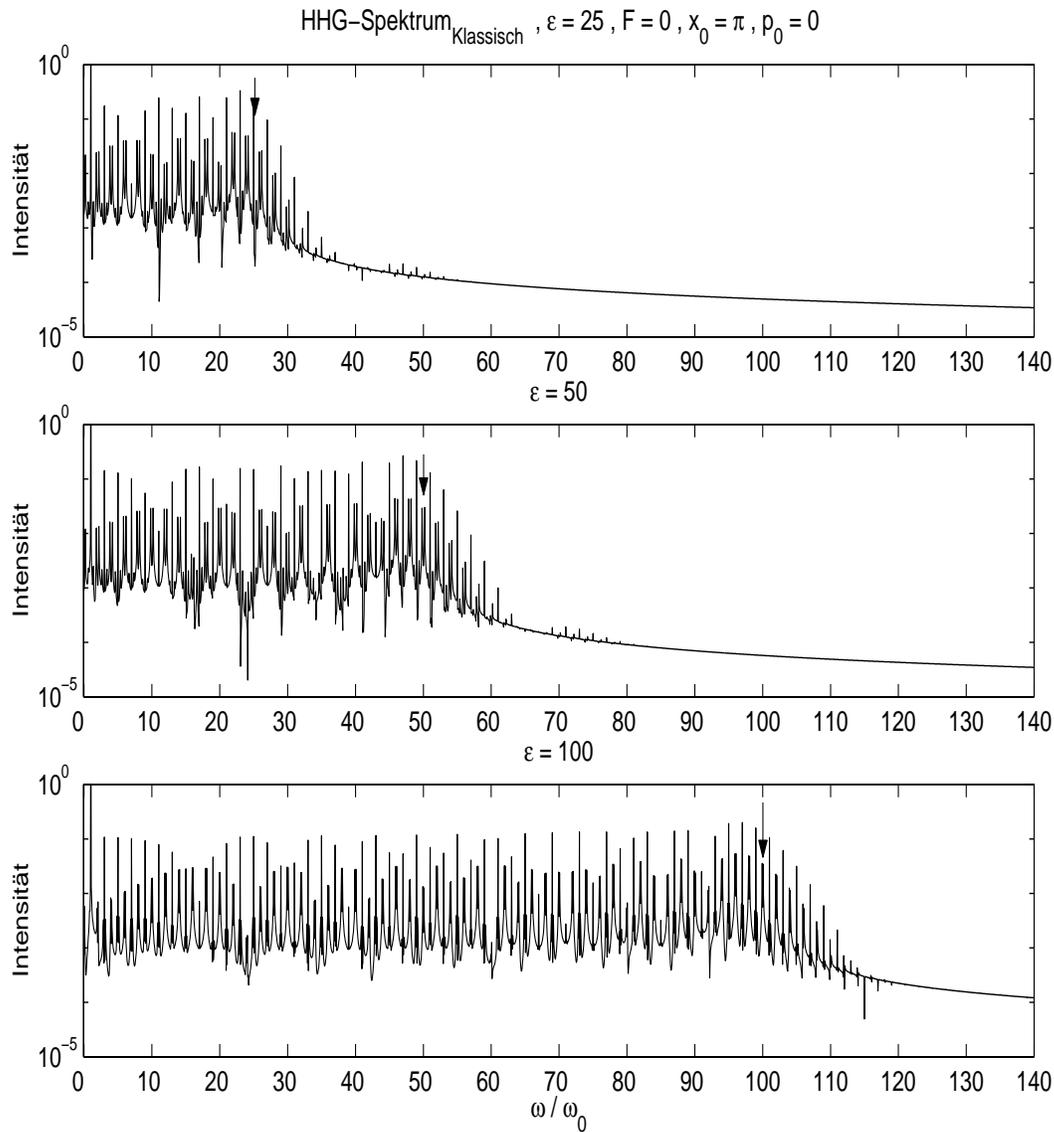


Abbildung 2.16: *HHG-Spektrum (klassisch)*, Parameter $F = 0$ und $\epsilon = 25, 50$ und 100 . ($T = 16T_{\omega_0}, x_0 = \pi, p_0 = 0$)

mit höherer Intensität und die mit geradem Verhältnis ω/ω_0 mit geringerer. Allerdings sind *beide* Gruppen von Frequenzen im Spektrum vertreten, obwohl die Anfangsbedingung $x_0 = \pi, p_0 = 0$ zusammen mit den Vorfaktoren $\sin(x_0) = 0$ in (2.46) und $\cos(x_0) = -1$ in (2.47) allein die Frequenzen mit $\omega/\omega_0 \in 2\mathbb{N} + 1$ zulassen. Hierin wird nur deutlich, dass es sich bei der obigen Überlegung um eine Näherung handelt, da angenommen wurde, dass die Bewegung in erster Linie vom zeitlichen Wechselfeld bestimmt wird.

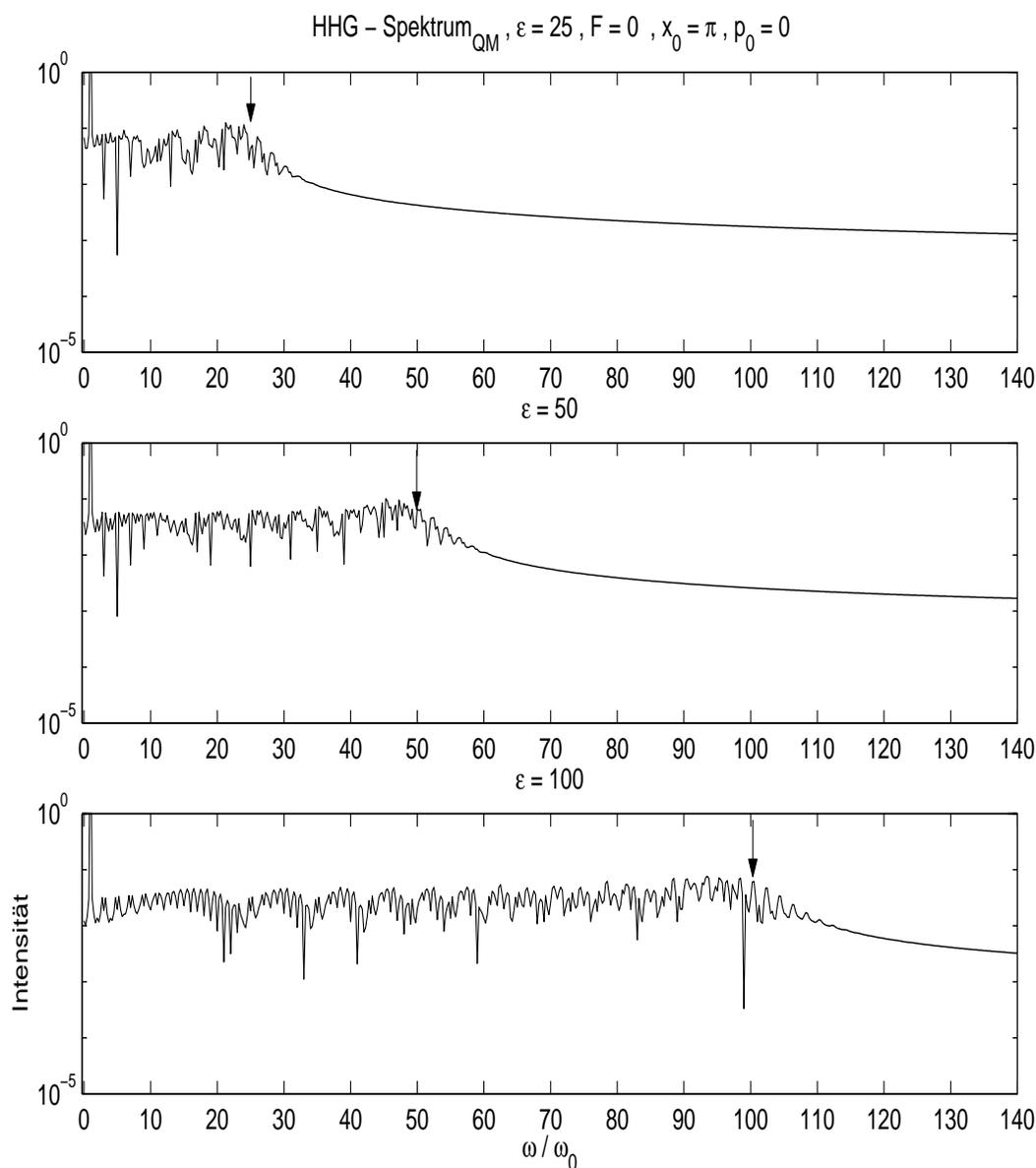


Abbildung 2.17: *HHG-Spektrum (quantenmechanisch)*, Parameter $F = 0$ und $\epsilon = 25, 50$ und 100 . ($T = 4T_{\omega_0}$, $x_0 = \pi$, $p_0 = 0$)

Die entsprechenden HHG-Spektren mit denselben Parametern aus den quantenmechanischen Rechnungen sind in Abbildung 2.17 zu sehen. Sie zeigen in ihrer Form eine große Übereinstimmung mit den klassischen Spektren. Es gibt auch hier einen Bereich um eine Cutoff-Frequenz bei $\omega/\omega_0 = \epsilon$, der das Spektrum in zwei unterschiedliche Teile trennt; zu kleineren Frequenzen hin schwankt die Intensität im Mittel um ein konstantes Niveau; nach der Cutoff-Frequenz nimmt die Intensität ab und weist keine Schwankungen mehr auf.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Versuch unternommen, das Emissionsverhalten eines geladenen Bloch-Teilchens in einem Stark- und einem zeitlichen Wechselfeld zu untersuchen. Dabei wurde das System sowohl klassisch als auch quantenmechanisch analysiert. Durch diese Herangehensweise war es möglich, quantitative Abschätzungen für das Quantensystem zu machen, die in guter Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Verhalten waren. Es wurden bei der Analyse der klassischen Dynamik zwei Beziehungen hergeleitet, die aus den Systemparametern – den Feldstärken F und ϵ – und der Propagationszeit T eine Cutoff-Frequenz ω_{\max} bestimmen, die sowohl für das klassische als auch das quantenmechanische Spektrum gültig sind. Dieses Ergebnis ist ein Beispiel dafür, wie man durch das Studium der klassischen Dynamik eines Systems Formeln herleiten kann, die einen Hinweis auf das quantenmechanische Verhalten geben.

Kapitel 3

Das Zwei-Niveau-System

Das Ziel dieses Kapitels ist es, das HHG-Spektrum des Zwei-Niveau-Systems näherungsweise zu berechnen, die Größe des Plateaus zu bestimmen und den Intensitätsverlauf im Bereich des Plateaus qualitativ nachzuvollziehen.

Das Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Nach einer Einführung der theoretischen Grundlagen des Zwei-Niveau-Systems wird gezeigt, dass man mit Hilfe einer stationären-Phase-Näherung einen Ausdruck für die Cutoff-Frequenz des Spektrums ableiten kann. Anschließend wird versucht, auch die Intensität der einzelnen Frequenzen zu ermitteln. Da an zwei Punkten im Spektrum die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Methode der stationären Phase nicht gegeben sind und das berechnete Spektrum in der Umgebung der zwei Punkte divergiert, wird das Spektrum außerdem mit einem verbesserten Näherungsverfahren, der uniformen Approximation mit Bessel-Funktionen nach [Sti73], berechnet. Diese Näherung bringt eine bessere Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten als die einfachere Methode der stationären Phase.

3.1 Grundlagen

Das Zwei-Niveau-System ist ein Modell für zwei gekoppelte Zustände, deren Energieniveaus einen Abstand von $\hbar\omega_0$ haben und an ein elektrisches Feld gekoppelt sind [Gau97]. Bezeichnet man mit $\vec{E}(t)$ das zeitlich variable elektrische Feld

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\omega_L t), \quad (3.1)$$

so ergibt sich der Hamilton-Operator \hat{H} zu

$$\hat{H} = \hbar \begin{bmatrix} -\omega_0/2 & \Omega_0 \sin(\omega_L t) \\ \Omega_0 \sin(\omega_L t) & \omega_0/2 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Hier bezeichnet Ω_0 die Rabi-Frequenz:

$$\Omega_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}_0 / \hbar, \quad (3.3)$$

wobei $\vec{\mu}$ das elektrische Dipol-Matrixübergangselement ist und ω_L die Laser-Frequenz. Das System hat die zwei Energieeigenwerte:

$$E_{\pm}(t) = \pm \hbar \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + (\Omega_0 \sin \omega_L t)^2}. \quad (3.4)$$

Der Zustand des Systems kann durch zwei Amplituden c_1 und c_2 beschrieben werden:

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Als Ausdruck für das Dipolmoment erhält man

$$d(t) = \mu \begin{pmatrix} c_1^*(t) \\ c_2^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$= \mu [c_1^*(t)c_2(t) + c_1(t)c_2^*(t)] \quad (3.7)$$

Für die Berechnung der Funktionen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ muss die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (3.8)$$

gelöst werden, die mit (3.2) und (3.5) in ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem übergeht hat:

$$\begin{aligned} i \dot{c}_1(t) &= -\frac{\omega_0}{2} c_1(t) + \Omega_0 \sin \omega_L t c_2(t) \\ i \dot{c}_2(t) &= \Omega_0 \sin \omega_L t c_1(t) + \frac{\omega_0}{2} c_2(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dieses hat zwei linear unabhängige Lösungen $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$:

$$\vec{x}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{e_1^2 + 1}} \begin{pmatrix} e_1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i/\hbar E_+ t} \quad \text{mit } e_1 = \frac{\Omega_0 \sin \omega_L t}{\omega_0/2 + E_+/\hbar}, \quad (3.10)$$

$$\vec{x}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{e_2^2 + 1}} \begin{pmatrix} e_2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i/\hbar E_- t} \quad \text{mit } e_2 = \frac{\Omega_0 \sin \omega_L t}{\omega_0/2 + E_-/\hbar}, \quad (3.11)$$

$$|\vec{x}_1(t)|^2 = 1, |\vec{x}_2(t)|^2 = 1.$$

Wenn die allgemeine Lösung aus einer Linearkombination dieser beiden adiabatischen Zustände

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = a_1 \vec{x}_1(t) + a_2 \vec{x}_2(t) \quad \text{mit } |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad (3.12)$$

in den Ausdruck für $d(t)$ (3.7) eingesetzt wird, erhält man daraus

$$d(t) = \mu [(|a_1|^2 - |a_2|^2) \cos 2\Theta(t) + 2 \sin 2\Theta(t) \operatorname{Re}(a_1 a_2^* e^{i\Phi(t)})], \quad (3.13)$$

wobei a_1 und a_2 die Amplituden der adiabatischen Zustände bezeichnen. Die zeitabhängige Größe $\Theta(t)$ ist durch folgende Gleichung definiert

$$\cos 2\Theta(t) = \frac{\Omega_0 \sin \omega_L t}{\sqrt{(\omega_0/2)^2 + (\Omega_0 \sin \omega_L t)^2}}. \quad (3.14)$$

Dabei erhält man die adiabatische Phase $\Phi(t)$ durch Integration über die Differenz zwischen den adiabatischen Energien:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 1/\hbar \int_0^t [E_+ - E_-] dt \\ &= 2 \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + (\Omega_0 \sin \omega_L t)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wenn in diesem Kapitel konkrete Zahlenwerte berechnet werden, dann gehen in die Gleichungen folgende Größen ein [Gau97]:

$$\Omega_0 = 0.8, \quad \omega_L = 0.0258 \text{ a.u.}, \quad \omega_0 = 0.3 \text{ a.u.} \quad (3.16)$$

3.2 Fourier-Analyse

Für die Frequenzanalyse wird nur der dominierende und schneller oszillierende Teil $\exp(i\Phi(t))$ des Dipolmoment-Erwartungswertes (3.13) verwendet:

$$d_{\text{appr}}(t) = 2\mu \sin 2\Theta(t) \operatorname{Re}(a_1 a_2^* e^{i\Phi(t)}) \quad (3.17)$$

wobei den Parametern a_1 , a_2 und μ bestimmte Werte zugeordnet werden:

$$a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}, \quad \mu = 1. \quad (3.18)$$

Da die folgende Analyse nur die grundlegenden Eigenschaften, die sich im Fourier-Spektrum des Dipolmomenterwartungswertes wiederfinden, herausarbeiten soll, wird nur der Term $\exp(i\Phi(t))$ berücksichtigt, sodass die Näherung folgendermaßen aussieht:

$$d_{\text{appr}}(t) = e^{i\Phi(t)} \quad (3.19)$$

Die Fourier-Transformierte von $d(t)$ (Gleichung (3.13) mit (3.18)) und $d_{\text{appr}}(t)$ sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt. In beiden zeigt es sich, dass es ein Plateau mit einer Grenze zu größeren Frequenzen hin, dem Cutoff, gibt. Die Intensitäten im Bereich des Plateaus oszillieren. Wie der Vergleich der beiden Spektren (Abbildung 3.3) verdeutlicht, ist die Übereinstimmung bei der Größe des Plateaus gut, bei dem genauen quantitativen Verlauf der Intensität in Abhängigkeit von der emittierten besteht teilweise eine große Diskrepanz durch die vernachlässigten Terme, die Struktur der Spektren im

Plateaubereich ist jedoch sehr ähnlich. Zur Fourier-Analyse von $d_{\text{appr}}(t)$ ist also das Integral

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\Phi(t) - \omega t)} dt \quad (3.20)$$

zu berechnen, mit:

$$\Phi(t) = 2 \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + (\Omega_0 \sin(\omega_L t'))^2} dt' . \quad (3.21)$$

Um das Integral in eine für spätere Zwecke praktischere Form zu bringen wird der Term $\sin^2(\omega_L t)$ durch $\frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega_L t))$ ersetzt und für die Zeit t eine dimensionslose Variable $x = 2\omega_L t$ eingeführt:

$$\Phi(t) = \int_0^t \sqrt{(\omega_0^2 + 2\Omega_0^2) - 2\Omega_0^2 \cos(2\omega_L t')} dt' \quad (3.22)$$

$$= \int_0^{2\omega_L t} \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 2\Omega_0^2}{(2\omega_L)^2} - \frac{2\Omega_0^2}{(2\omega_L)^2} \cos(x')} dx' \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

Durch Einführung weiterer Abkürzungen vereinfacht sich der Ausdruck für $\Phi(t)$ zu

$$\Phi(t) = \int_0^{2\omega_L t} \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} dx' , \quad (3.25)$$

$$A^2 := \frac{\omega_0^2 + 2\Omega_0^2}{(2\omega_L)^2}, \quad B^2 := \frac{2\Omega_0^2}{(2\omega_L)^2}, \quad \alpha := \frac{\omega}{2\omega_L} . \quad (3.26)$$

Wenn man jetzt für $\Phi(t) - \omega t$ eine neue Funktion $f(x)$ definiert,

$$f(x, \alpha) := \int_0^x \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} dx' - \alpha x , \quad (3.27)$$

erhält man als Ausdruck für das zu berechnende Integral schließlich:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\omega_L} \int_{-\infty}^{\infty} e^{if(x, \alpha)} dx . \quad (3.28)$$

3.2.1 Stationäre Phase

Cutoff-Gesetz

In diesem Abschnitt soll das Integral

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\omega_L} \int_{-\infty}^{\infty} e^{if(x, \alpha)} dx$$

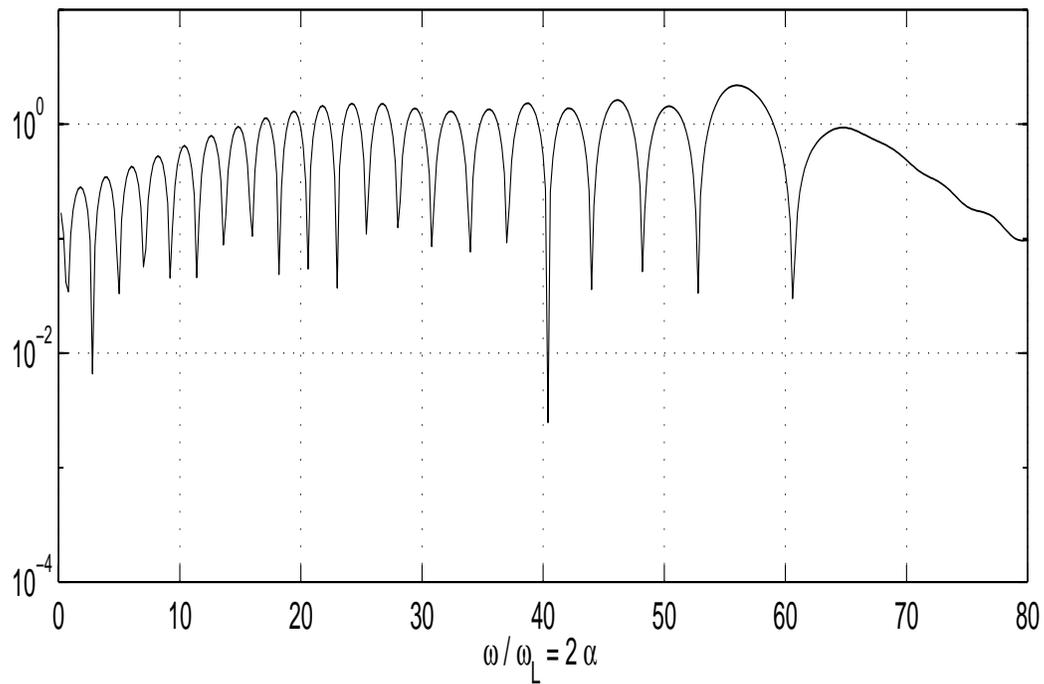
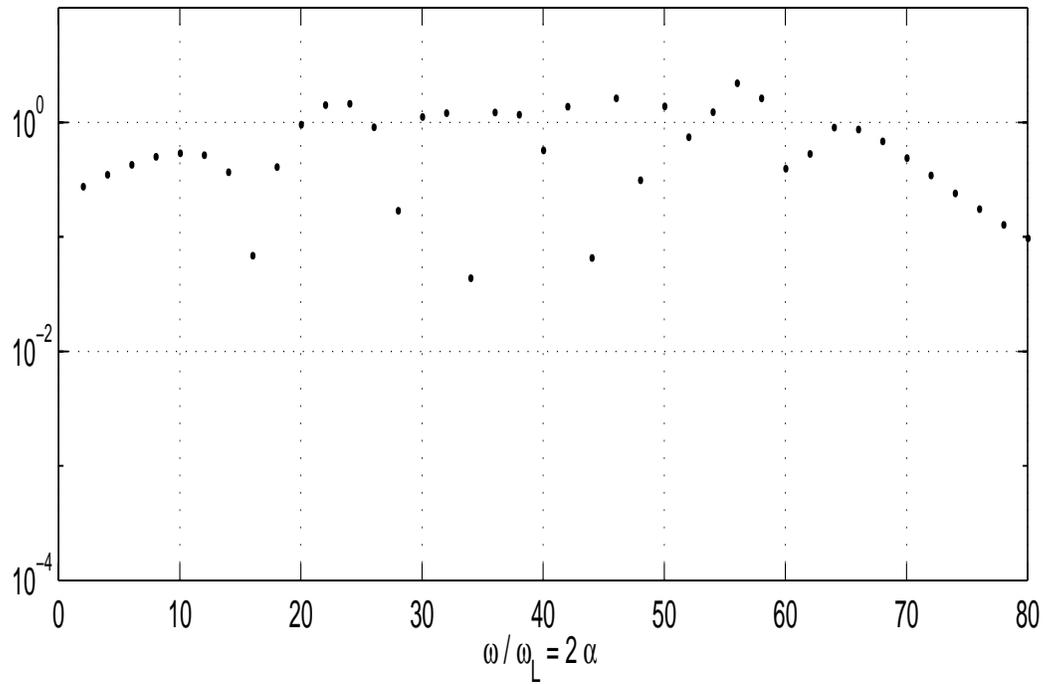


Abbildung 3.1: *Exaktes, numerisch berechnetes Dipolmoment-Frequenzspektrum mit dem Dipolmoment aus Formel (3.13).*

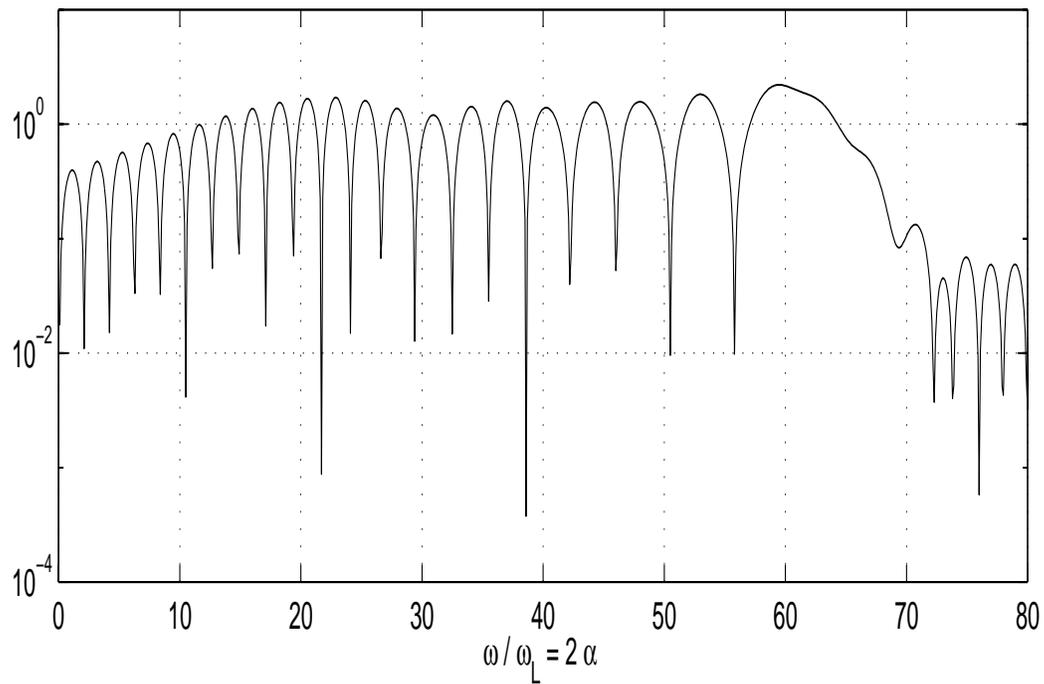
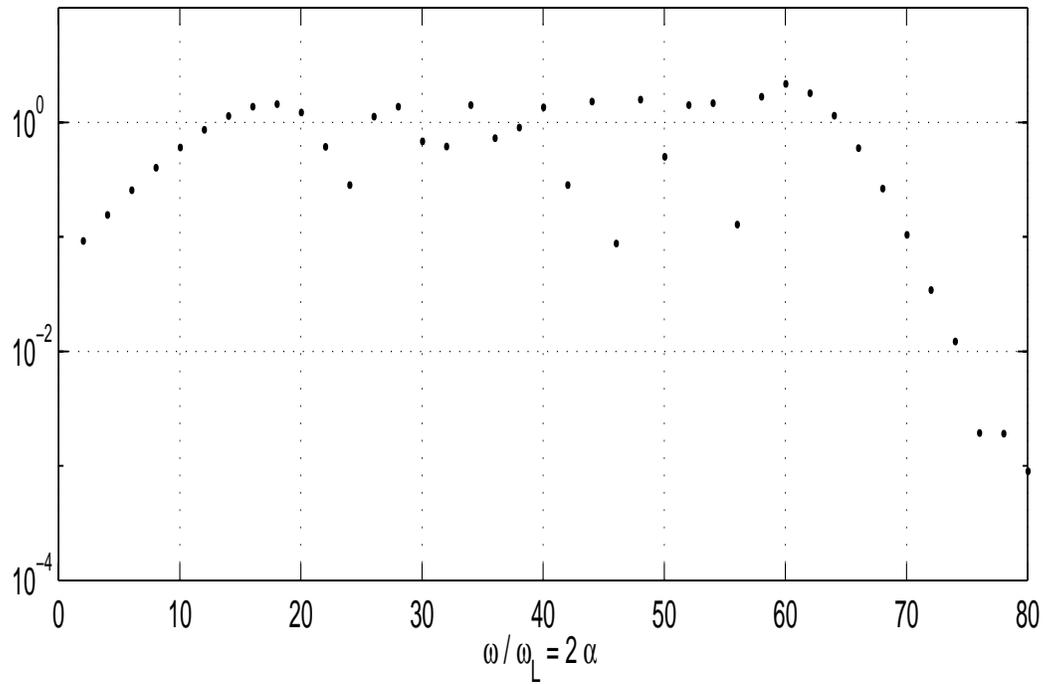


Abbildung 3.2: Numerisch berechnetes genähertes Dipolmoment-Frequenzspektrum mit dem Dipolmoment aus Formel (3.19).

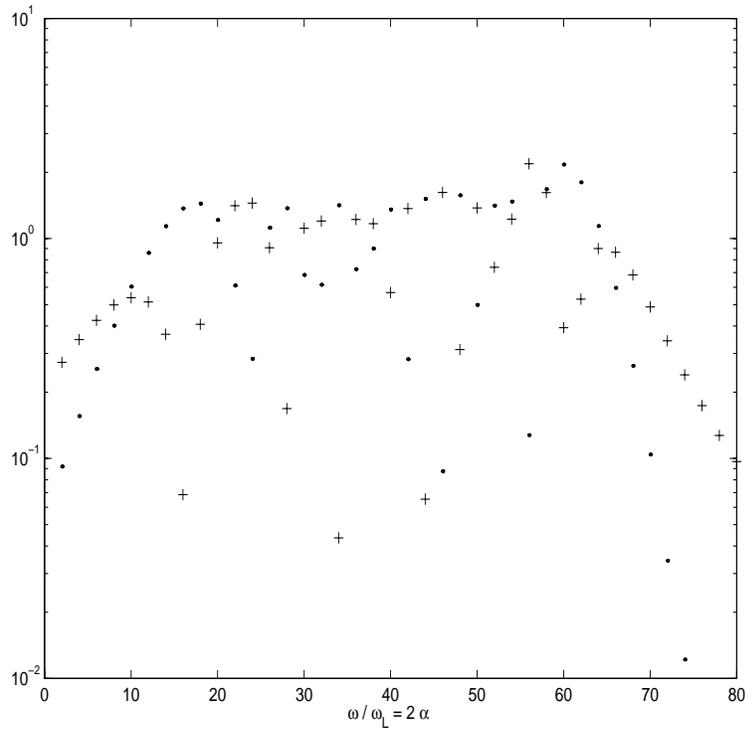


Abbildung 3.3: Vergleich der auf verschiedene Art berechneten HHG-Spektren. Numerische Berechnung mit der Näherung (3.19) für das Dipolmoment(.), exakte, numerische Rechnung mit dem Dipolmoment (3.13)(+).

mit Hilfe der Methode der stationären Phase begerechnet werden, die im Anhang A.2 näher erklärt wird. Als Ergebnis erhält man eine Näherung für das Integral, in die nur die Funktionswerte und die zweite Ableitung des Exponenten an den Punkten mit

$$\frac{d}{dx}f(x, \alpha) = 0, \quad (3.29)$$

d.h. den Punkten stationärer Phase, eingehen [Ble75]:

$$I(\alpha) = \sum_{s, f'(x_s, \alpha)=0} \left(\frac{2\pi}{|f''(x_s, \alpha)|} \right)^{1/2} e^{i(f(x_s, \alpha) + \text{sign}(f''(x_s, \alpha))\pi/4)}. \quad (3.30)$$

Wie man durch Ableitung der Gleichung (3.27) sieht, werden also die Werte von x gesucht, für die gilt:

$$\sqrt{A^2 - B^2 \cos(x)} - \alpha = 0. \quad (3.31)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich schon ein Cutoff-Gesetz ableiten; da für reelles x die Ungleichung $\cos(x) \leq 1$ gilt, ist α nach oben beschränkt:

$$\alpha \leq \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (3.32)$$

In den Größen Ω_0 , ω_L und ω_0 ausgedrückt, erhält man folgende maximale Frequenz:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 + 4\Omega_0^2} = 63.0962 \omega_L. \quad (3.33)$$

Da es nur für Frequenzen $\omega \leq \omega_{\max}$ einen reellen stationären Punkt gibt, ist zu erwarten, dass das HHG-Spektrum ein Plateau mit oberer Grenze bei ω_{\max} aufweist. Dies bestätigen die Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.4.

Intensitätsverlauf

Um auch den Intensitätsverlauf nach stationärer Phase zu berechnen, sind jetzt die stationären Punkte mittels Gleichung (3.31) zu bestimmen. Diese Gleichung wird gelöst, wenn gilt:

$$\cos(x) = \frac{A^2 - \alpha^2}{B^2}. \quad (3.34)$$

Es gibt demnach abzählbar unendlich viele Lösungen für x , jeweils zwei, deren Realteil im Intervall $[2\pi n, 2\pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$ liegt:

$$x_{(a,n)}(\alpha) = 2\pi n + x_a(\alpha) \quad (3.35)$$

$$x_{(b,n)}(\alpha) = 2\pi n + x_b(\alpha), \quad (3.36)$$

wobei $\text{Re}(x_\nu(\alpha)) \in [0 : 2\pi)$, mit $\nu = a, b$. In Abhängigkeit von α kann x_ν reell oder komplex sein. Es sind hier drei Bereiche zu unterscheiden, je nachdem ob $\cos(x_a(\alpha)) > 1$, $\cos(x_a(\alpha)) < -1$ oder $|\cos(x_a(\alpha))| \leq 1$:

- $\cos(x_a(\alpha)) > 1$ bzw. $\alpha < \sqrt{A^2 - B^2}$

$$x_a(\alpha) = i \operatorname{accosh} \left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2} \right), \quad x_b(\alpha) = x_b^*(\alpha) \quad (3.37)$$

- $|\cos(x_a(\alpha))| \leq 1$ bzw. $\sqrt{A^2 - B^2} \leq \alpha \leq \sqrt{A^2 + B^2}$

$$x_a(\alpha) = \arccos \left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2} \right), \quad x_b(\alpha) = 2\pi - x_a(\alpha) \quad (3.38)$$

- $\cos(x_a(\alpha)) < -1$ bzw. $\alpha > \sqrt{A^2 + B^2}$

$$x_a(\alpha) = \pi + i \operatorname{accosh} \left(\frac{\alpha^2 - A^2}{B^2} \right), \quad x_b(\alpha) = x_a^*(\alpha). \quad (3.39)$$

Mit Hilfe der Definition (3.27) von $f(x, \alpha)$ als Integral und der Periodizität des Kosinus lässt sich nun folgende Gleichung herleiten, mit der sich die Formel für $I(\alpha)$ vereinfacht:

$$f(x + 2\pi n, \alpha) = 2\pi n m(\alpha) + f(x, \alpha), \quad (3.40)$$

wobei

$$m(\alpha) := \frac{f(2\pi, \alpha)}{2\pi}. \quad (3.41)$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$f(x + 2\pi n, \alpha) = \int_0^{x+2\pi n} \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha \quad (3.42)$$

$$= \left(\int_0^{2\pi n} + \int_{2\pi n}^{2\pi n+x} \right) \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha \quad (3.43)$$

$$= \left(\int_0^{2\pi n} + \int_0^x \right) \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha \quad (3.44)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} + \int_0^x \right) \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha. \quad (3.45)$$

Wegen der 2π -Periodizität des Kosinus gilt:

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha. \quad (3.46)$$

Daraus folgt:

$$f(x + 2\pi n, \alpha) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} + \int_0^x \right) \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha \quad (3.47)$$

$$= \left(n \int_0^{2\pi} + \int_0^x \right) \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} \, dx' - (2\pi n + x)\alpha \quad (3.48)$$

$$= nf(2\pi) + f(x, \alpha) \quad (3.49)$$

und unter Berücksichtigung von (3.41) folgt dann (3.40):

$$f(x + 2\pi n, \alpha) = 2\pi nm(\alpha) + f(x, \alpha).$$

Das bedeutet für die Funktionswerte von $f(x, \alpha)$ an den stationären Punkten

$$f(x_{(a,n)}, \alpha) = f(2\pi n + x_a, \alpha) \quad (3.50)$$

$$= 2\pi nm(\alpha) + f(x_a, \alpha) \quad (3.51)$$

$$f(x_{(b,n)}, \alpha) = f(2\pi n + x_b, \alpha) \quad (3.52)$$

$$= 2\pi nm(\alpha) + f(x_b, \alpha), \quad (3.53)$$

wobei hier $m(\alpha)$ noch eine reelle Zahl sein kann. Wie sich gleich zeigen wird, ergibt sich bei weiterem Umformen der ursprünglichen Formel für $I(\alpha)$ (3.30) eine Bedingung, wonach

$I(\alpha)$ nur für ganzzahlige Werte von $m(\alpha)$ einen Wert ungleich Null annehmen kann. Mit den folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_\nu(\alpha) &:= f(x_\nu, \alpha) \\ f''_\nu(\alpha) &:= f''(x_\nu, \alpha) \\ \mu_\nu &:= \text{sign}(f''(x_\nu, \alpha)) \quad \text{mit } \nu = a, b \end{aligned} \quad (3.54)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\omega_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{|f''(x_a, \alpha)|} \right)^{1/2} \left[e^{i(f(x_{(a,n)}, \alpha) + \mu_a \pi/4)} + e^{i(f(x_{(b,n)}, \alpha) - \mu_b \pi/4)} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi m(\alpha)n} \right] \sum_{\nu=a,b} \left(\frac{2\pi}{|f''_\nu(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{i(f_\nu(\alpha) + \mu_\nu \pi/4)} \\ &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \sum_{\nu=a,b} \left(\frac{2\pi}{|f''_\nu(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{i(f_\nu(\alpha) + \mu_\nu \pi/4)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Das Integral $I(\alpha)$ ist jetzt also gegeben durch eine Summe über die beiden stationären Punkte x_a und x_b und einer Summe über δ -Funktionen, die sicherstellt, dass $m(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ist. Da aber $f_\nu(\alpha)$ wie auch x_ν komplex werden kann und $i f_\nu(\alpha)$ als Exponent in die Formel eingeht, muss hier darauf zuerst eingegangen werden.

Im Fall $x_\nu \in [0 : 2\pi)$ ist f_ν reell, die Summe von $\exp(i f_\nu(\alpha))$ über die beiden stationären Punkte ist eine beschränkte, komplexe Funktion von α , und ihr Betrag oszilliert, wie sich später noch zeigen wird.

$$\sqrt{A^2 - B^2} \leq \alpha \leq \sqrt{A^2 + B^2}:$$

$$f_a(\alpha) = \int_0^{\arccos\left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2}\right)} \sqrt{A^2 - B^2 \cos(x')} dx' - \alpha \arccos\left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2}\right) \quad (3.56)$$

$$f_b(\alpha) = 2\pi m(\alpha) - f_a(\alpha) \quad (3.57)$$

Wenn x_ν komplex wird, nimmt auch f_ν komplexe Werte an, und zwar sind $f_a(\alpha)$ und $f_b(\alpha)$ komplex konjugiert zueinander. Deshalb kann nur der Term $\exp(i f_\nu(\alpha))$ mit $\text{Im}(f_\nu(\alpha)) > 0$ weiterverwendet werden, um ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu erhalten. $f_\nu(\alpha)$ hat hier folgende Form:

$$\alpha < \sqrt{A^2 - B^2}:$$

$$f_a(\alpha) = i \left[\int_0^{\text{accosh}\left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2}\right)} \sqrt{A^2 - B^2 \cosh(x')} dx' - \alpha \text{accosh}\left(\frac{A^2 - \alpha^2}{B^2}\right) \right] \quad (3.58)$$

$$f_b(\alpha) = f_a(\alpha)^* \quad (3.59)$$

$\alpha > \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$f_a(\alpha) = i \left[\int_0^{\operatorname{accosh}\left(\frac{\alpha^2 - A^2}{B^2}\right)} \sqrt{A^2 + B^2 \cosh(x')} dx' - \alpha \operatorname{accosh}\left(\frac{\alpha^2 - A^2}{B^2}\right) \right] \quad (3.60)$$

$$f_b(\alpha) = f_a(\alpha)^* \quad (3.61)$$

Im ersten Fall für ($\alpha < \sqrt{A^2 - B^2}$) ist $\operatorname{Im}(f_a(\alpha)) > 0$ ($\nu = a$), im anderen Fall für ($\alpha > \sqrt{A^2 + B^2}$) ist $\operatorname{Im}(f_b(\alpha)) > 0$ ($\nu = b$).

Jetzt sollen noch die Vorzeichen von $f''_\nu(\alpha)$ bestimmt werden.

$$f''(x, \alpha) = \frac{d}{dx}(\sqrt{A^2 - B^2 \cos(x)} - \alpha x) \quad (3.62)$$

$$f''(x_a, \alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{A^2 - B^2}{\alpha^2}\right) \left(\frac{A^2 + B^2}{\alpha^2} - 1\right)} \quad (3.63)$$

$$f''_b(\alpha) = -f''(x_a, \alpha). \quad (3.64)$$

Als Ergebnis für $I(\alpha)$ erhält man schließlich für die drei verschiedenen Bereiche von α :

- $\alpha < \sqrt{A^2 - B^2}$:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_a(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{i(f_a(\alpha) + \pi/4)} \\ &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_a(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{-\operatorname{Im}(f_a(\alpha)) + i\pi/4} \end{aligned} \quad (3.65)$$

- $\sqrt{A^2 - B^2} \leq \alpha \leq \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_a(\alpha)|} \right)^{1/2} (e^{i(f_a(\alpha) + \pi/4)} + e^{-i(f_a(\alpha) + \pi/4)}) \\ &= \frac{1}{\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_a(\alpha)|} \right)^{1/2} \cos((f_a(\alpha) + \pi/4)) \end{aligned} \quad (3.66)$$

- $\alpha > \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_b(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{i(f_b(\alpha) + \pi/4)} \\ &= \frac{1}{2\omega_L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \right] \left(\frac{2\pi}{|f''_b(\alpha)|} \right)^{1/2} e^{-\operatorname{Im}(f_b(\alpha)) + i\pi/4} \end{aligned} \quad (3.67)$$

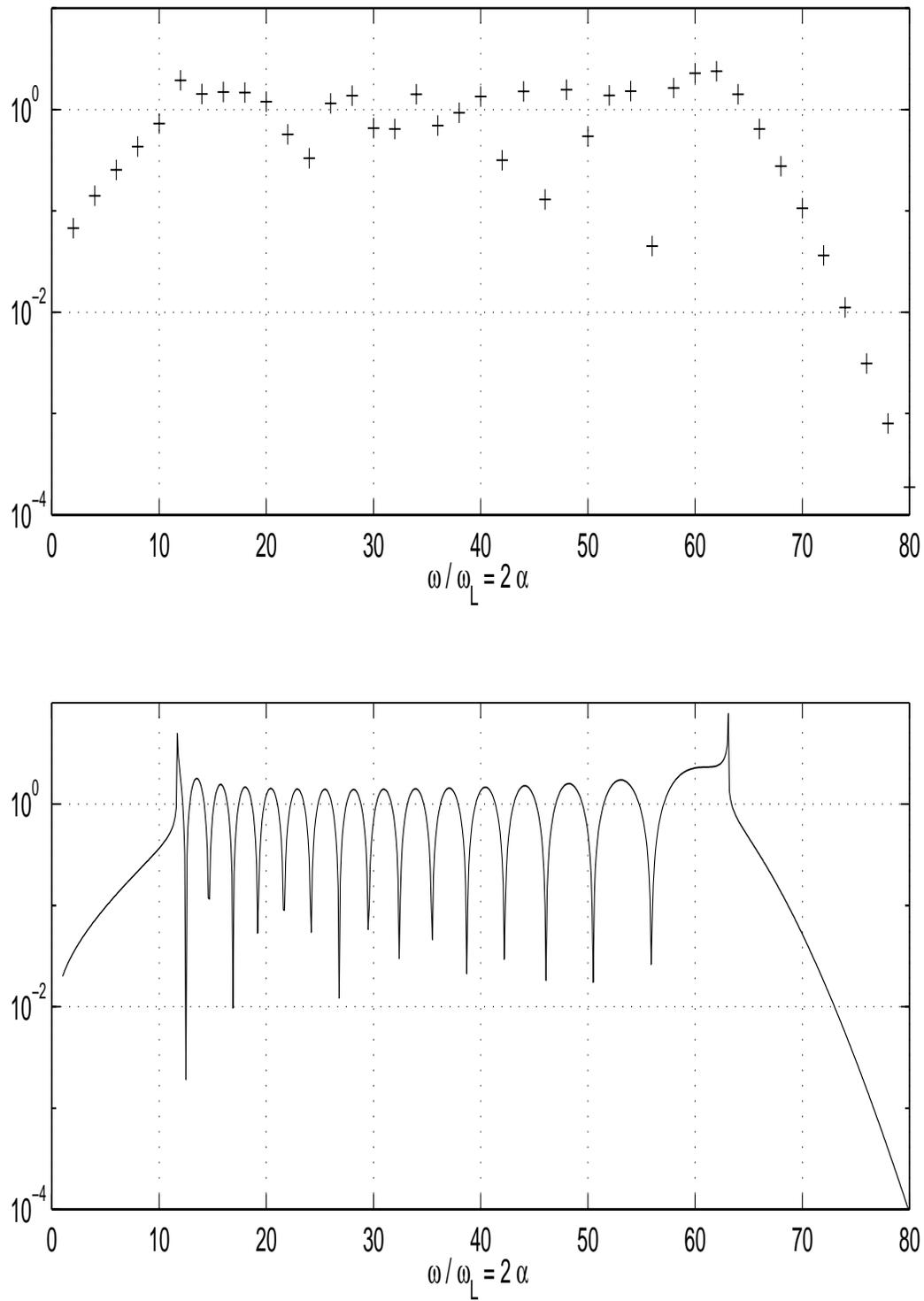


Abbildung 3.4: $I(\alpha)$ (mit stationärer Phase nach (3.65)-(3.67) berechnet)

Das Resultat der Rechnung ist in Abbildung 3.4 zu sehen. Wie bei der Fourier-Analyse von $d_{\text{appr}}(t)$ (Abbildung 3.2) erhält man auch hier ein Frequenzspektrum mit einem Plateau, das durch ein abruptes Abfallen der Intensität bei ω_{max} begrenzt ist. Darüber hinaus werden auch die Fluktuationen der Intensität richtig wiedergegeben. Allerdings treten an zwei Punkten, den sogenannten kritischen Punkten, Divergenzen auf. Deshalb soll im nächsten Abschnitt mit der uniformen Bessel-Approximation ein besseres Näherungsverfahren zur Anwendung kommen.

3.2.2 Uniforme Approximation

Die uniforme Approximation mit Bessel-Funktionen ist – wie die Methode der stationären Phase – ebenso eine Näherung für ein Integral mit einem schnell oszillierenden Integranden, dessen dominierender Beitrag zum Integral im Bereich der stationären Punkte liegt. Um aber die Singularität, die wegen des Terms $(2\pi/|f''_\nu|)^{1/2}$ an den beiden Stellen mit $f''_\nu(\alpha) = 0$ auftritt, zu vermeiden, wird eine Transformation der Integrationsvariablen von x nach t durchgeführt. Sie ist implizit durch die folgende Gleichung definiert:

$$f(x(t), \alpha) = A(\alpha) - \zeta_\alpha \cos(t) - m_\alpha t. \quad (3.68)$$

Das zu untersuchende Integral wird anschließend auf eine Bessel-Funktion abgebildet. Hier sind $A(\alpha)$ und ζ_α Parameter, die angepasst werden müssen. Wie im Anhang genauer gezeigt wird, erhält man als Näherung einen Ausdruck ohne Singularität. In diesem Abschnitt soll $I(\alpha)$ nun mit Hilfe dieser uniformen Bessel-Approximation näherungsweise berechnet werden, um auch bei den kritischen Punkten ($\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\alpha = \sqrt{A^2 - B^2}$) eine bessere Übereinstimmung mit den genauen Werten zu erhalten.

Zunächst wird das Integral (3.28) umgeformt in eine Summe von Integralen, um dann nach einem weiteren Schritt die uniforme Approximation anwenden zu können:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\omega_L} \int_{-\infty}^{\infty} e^{if(x,\alpha)} dx \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2\omega_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{if(x,\alpha)} dx \quad (3.70)$$

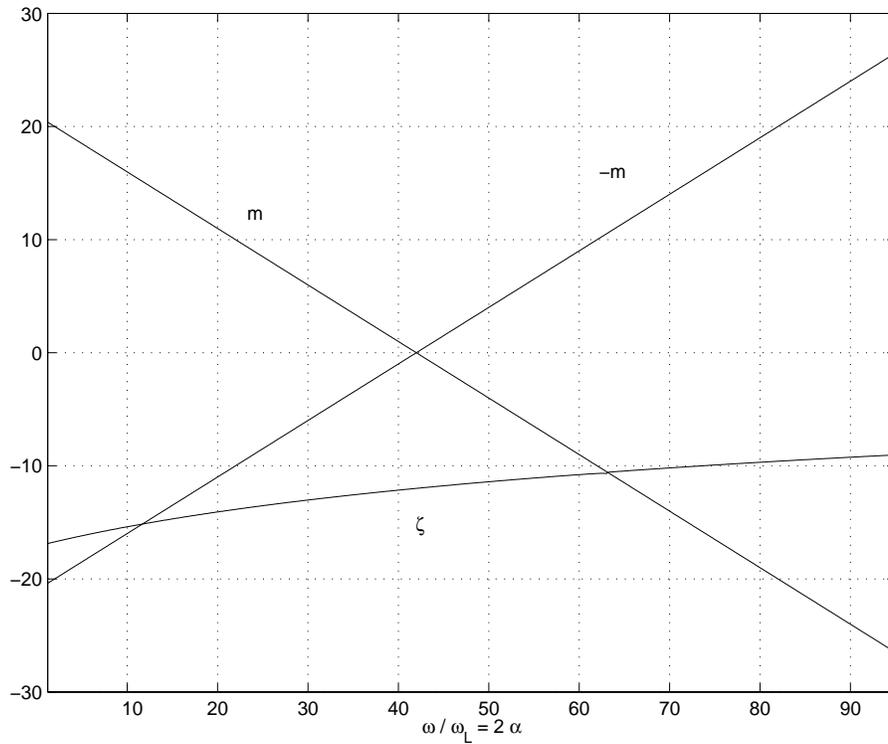
$$= \frac{1}{2\omega_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{if(x+2\pi n,\alpha)} dx \quad (3.71)$$

Wenn man hier wieder Gleichung (3.40) ($f(x+2\pi n, \alpha) = 2\pi m(\alpha)n + f(x, \alpha)$) verwendet, kann man weiter umformen:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\omega_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi m(\alpha)n} \int_0^{2\pi} e^{if(x,\alpha)} dx, \quad (3.72)$$

und man erhält:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\omega_L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \int_0^{2\pi} e^{if(x,\alpha)} dx. \quad (3.73)$$

Abbildung 3.5: $\zeta(\alpha)$, $m(\alpha)$ und $-m(\alpha)$

$I(\alpha)$ ist jetzt ein Produkt, bestehend aus einer Summe von δ -Funktionen, die nur für $m(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ungleich Null ist, und einem Integral, das mit der uniformen Approximation mit Bessel-Funktionen näherungsweise berechnet werden soll.

Dabei müssen nun Werte für A und ζ für jedes α bestimmt werden. A wird aus m und den Funktionswerten von f an den stationären Punkten bestimmt:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}[f_a(\alpha) + f_b(\alpha)] + m_\alpha \frac{\pi}{2} \quad (3.74)$$

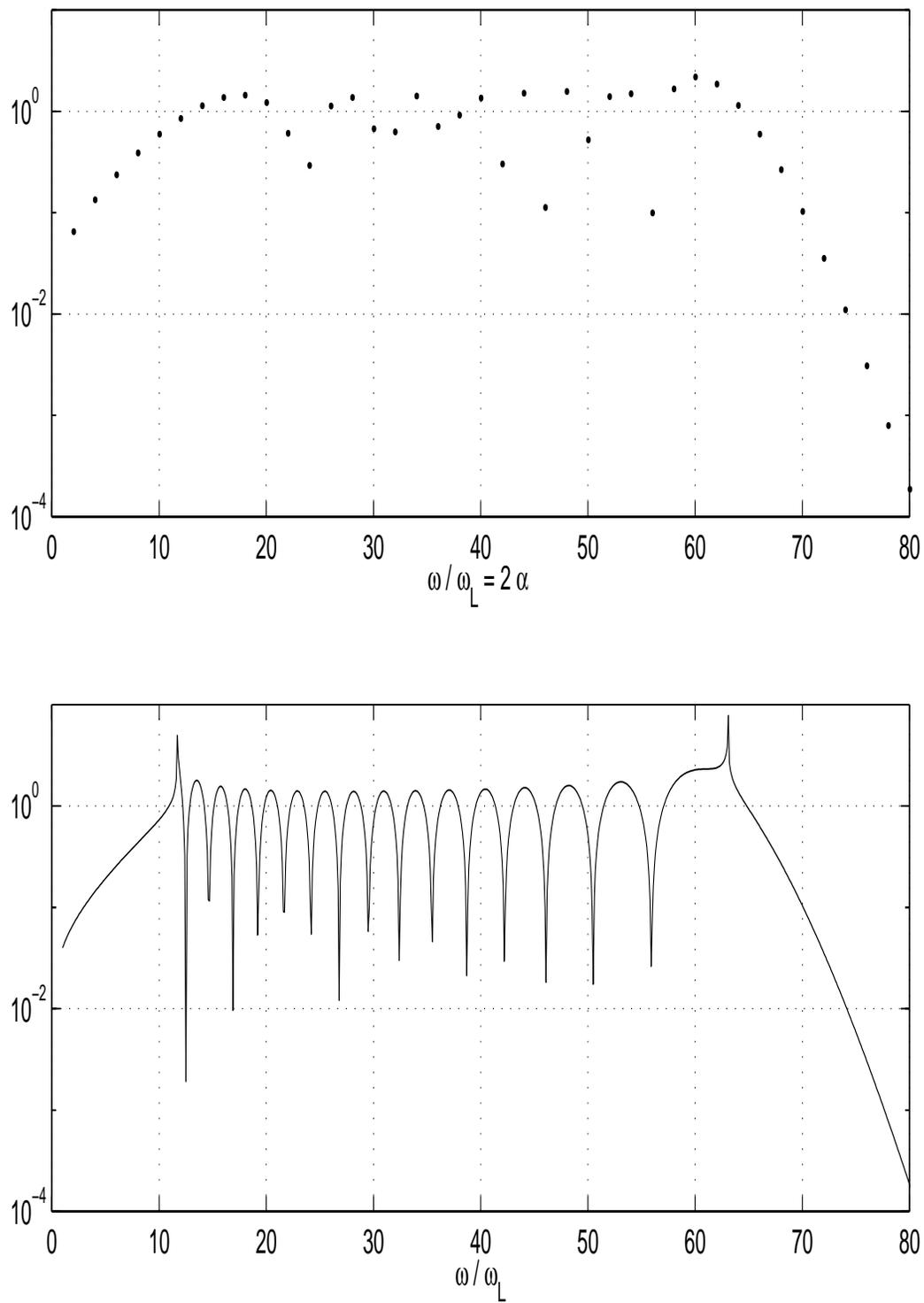
ζ erhält man durch Lösung einer Gleichung, die nicht analytisch lösbar ist, sondern numerisch behandelt werden muss:

$$(\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/2} - m_\alpha \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right) = \frac{1}{2}(f_b(\alpha) - f_a(\alpha)) \quad (3.75)$$

Die analytische Fortsetzung von (3.75) ist:

$$(m_\alpha^2 - \zeta_\alpha^2)^{1/2} - m_\alpha \operatorname{accosh}\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right) = -\frac{i}{2}(f_b(\alpha) - f_a(\alpha)) \quad (3.76)$$

In Abbildung 3.5 sind ζ , m und $-m$ dargestellt. Es ist zu erkennen, dass in den kritischen Punkten $\zeta = m$ bzw. $\zeta = -m$ ist. Dazwischen ist ζ betragsmäßig kleiner als $|m|$, in

Abbildung 3.6: $|I(\alpha)|$ (mit *uniformer Approximation* berechnet)

Übereinstimmung mit Gleichung (3.75).

Mit den Definitionen

$$P(\alpha) := \frac{2\pi}{|f''(x_a(\alpha), \alpha)|} \quad \text{und} \quad (3.77)$$

$$B(\alpha) := \frac{e^{-im\pi/2}}{2\omega_L} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m(\alpha) - k) \quad (3.78)$$

erhält man nun als Ergebnis für $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = B(\alpha)e^{iA(\alpha)} 2P^{1/2}(\alpha)(\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/4} J_{m_\alpha}(\zeta_\alpha). \quad (3.79)$$

In diesem Ausdruck für $I(\alpha)$ gibt es zwar immer noch wie bei der stationäre-Phase-Näherung den multiplikativen Beitrag $1/(|f''(x_\alpha, \alpha)|)^{1/2}$, der an den beiden kritischen Punkten divergiert; diesem wirkt hier allerdings der Term $(\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/4}$ entgegen, da er wegen $\zeta_\alpha = \pm m_\alpha$ an den kritischen Punkten den Wert null annimmt. Die Tatsache, dass im unteren Bild von Abbildung 3.6 trotzdem Sprünge auftreten, muss mit numerischen Ungenauigkeiten erklärt werden. Allerdings kommen diese letztendlich nicht zum Tragen, wenn wegen (3.78) nur die Frequenzen mit $m(\alpha) \in \mathbb{Z}$ berücksichtigt werden.

3.3 Diskussion

Bei dem Vergleich des Frequenzspektrums von $d_{\text{appr}}(t)$ mit dem durch die stationäre-Phase-Näherung erhaltenen Resultat (Abbildung 3.7 oben) ist eine gute Übereinstimmung festzustellen, wobei die Differenzen im Bereich der kritischen Punkte nicht größer sind als die bei anderen Frequenzen. Das untere Bild von 3.7, in dem die Frequenzanteile von $d_{\text{appr}}(t)$ dem mit Hilfe der uniformen Bessel-Approximation berechneten Spektrum gegenübergestellt sind, lässt erkennen, dass dieses kompliziertere Verfahren eine bessere Näherung für das Fourier-Spektrum von $\exp(i\Phi(t))$ darstellt.

Als Ergebnis dieses Kapitels bleibt festzuhalten, dass man das HHG-Spektrum des Zwei-Niveau-Systems mit der Näherung durch $d_{\text{appr}}(t)$ gut beschreiben kann. Durch eine Näherung mit Hilfe der Methode der stationären Phase lässt sich ein Cutoff-Gesetz herleiten. Außerdem stellte sich heraus, dass die Oszillationen der Intensitäten im Plateaubereich mit der Überlagerung der Beiträge der (zwei) stationären Punkte erklärt werden können.

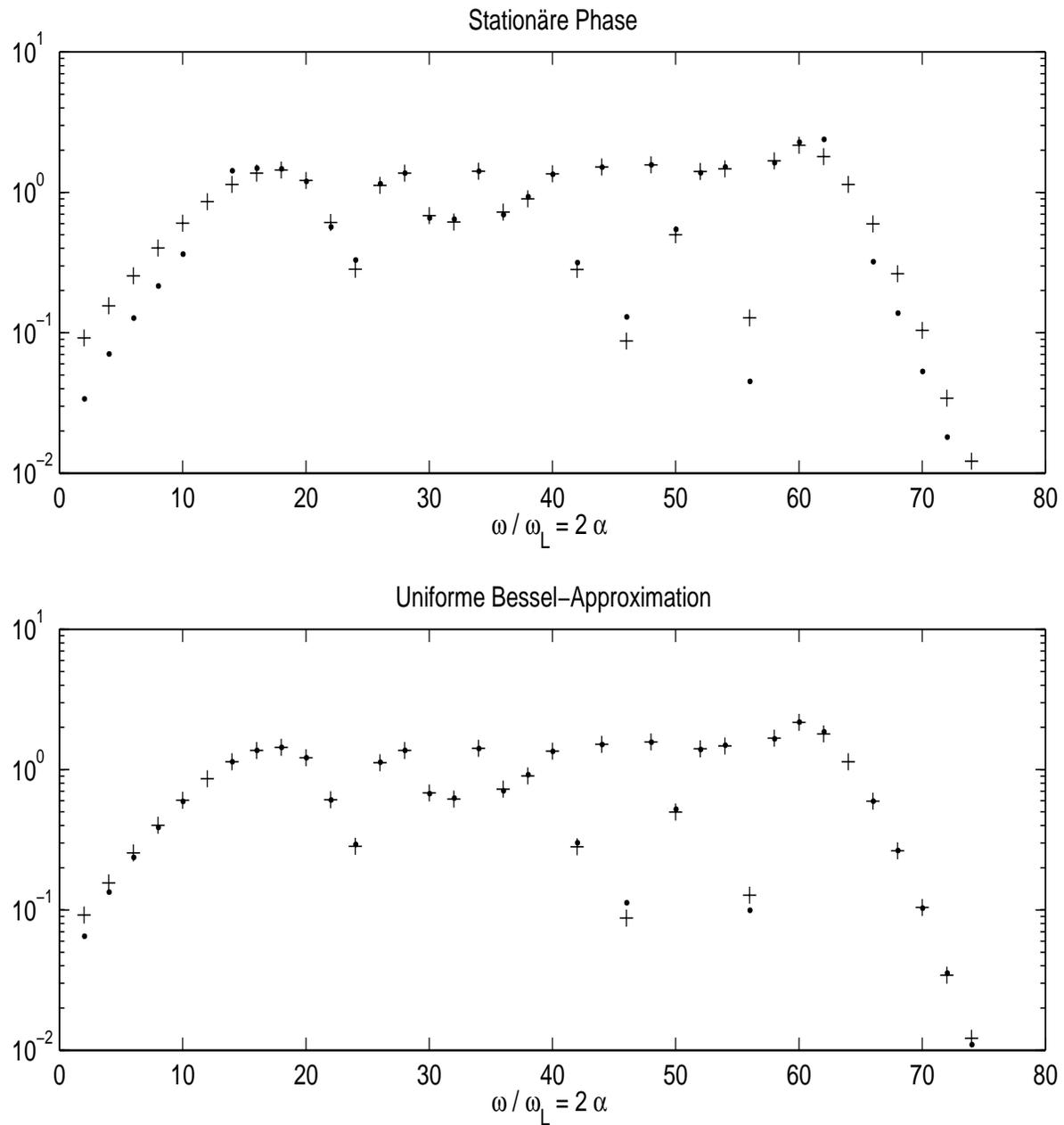


Abbildung 3.7: Vergleich der auf verschiedene Art berechneten HHG-Spektren. Oben: Stationäre Phase (.), numerische Rechnung des Dipolmoment mit der Näherung (3.19) (+), unten: Uniforme Bessel-Approximation (.), (+) wie oben.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat sich der Aufgabe gewidmet, quantitative Abschätzungen für Emissionsspektren eines geladenen Teilchens in starken äußeren Feldern zu liefern. Es wurde hierzu in Kapitel 2 der Weg beschritten, zuerst das System mit klassischer Dynamik zu beschreiben, wobei man unter Umständen aus den klassischen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen analytische Ausdrücke ableiten kann, und mit diesen Ergebnissen die Grenzen abzustecken, innerhalb derer sich das Quantensystem entwickeln kann. Ähnlich wie bei dem in der Einleitung erwähnten Modell, das die Cutoff-Frequenz für ein Atomelektron aus semiklassischen Überlegungen ableitet, konnten hier für ein Bloch-Teilchen zwei Cutoff-Gesetze abgeleitet werden. Sie gingen aus Näherungen der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen hervor, wenn die Bewegung entweder durch das Stark-Feld oder das zeitliche Wechselfeld beherrscht wird, und stimmten mit den numerischen Ergebnissen der klassischen Dynamik gut überein. Darüber hinaus konnten sie sogar die quantenmechanischen Resultate bestätigen, was von Bedeutung ist, da die Ableitung quantitativer Ausdrücke bei der Quantendynamik solcher zeitabhängiger Systeme sehr große Schwierigkeiten bereitet und meist nur numerisch – nicht analytisch – möglich ist.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 3) wurde mit dem Zwei-Niveau-System ein quantenmechanisches System behandelt, das aufgrund seiner einfacheren Struktur analytische Ausdrücke zulässt. Hier wurde aus der Formel für den Erwartungswert des Dipolmoments ein Ausdruck abgeleitet, der die Größe des Plateaus im HHG-Spektrum bestimmt. Außerdem konnte man bei der näherungsweise Berechnung des Spektrums mittels stationärer Phase zeigen, dass die Fluktuationen im Bereich des Plateaus durch die Überlagerung der Beiträge der beiden stationären Punkte verursacht wird.

Diese Arbeit versuchte also, grundlegende Mechanismen der Erzeugung hoher Harmonischer bei solchen vereinfachten Modellen zu verstehen, was auch teilweise gelang. Es bleibt allerdings noch die Aufgabe, nicht nur eindimensionale Modelle zu untersuchen, wie hier geschehen, sondern auch mehrdimensionale Modelle als Grundlage für Berechnungen zu nehmen. Durch die Fülle an Experimenten auf dem Gebiet der Quantenoptik und der nichtlinearen Atomphysik, auf die schon in der Einleitung hingewiesen wurde, wird es viele Anwendungsmöglichkeiten und neue Fragestellungen für die Analyse getriebener Quantensysteme geben.

Anhang A

Mathematischer Anhang

A.1 Bessel-Funktionen

A.1.1 Summenformel

Hier sollen zwei nützliche Formeln aus [Abr72](S.361, 9.1.42-43) zitiert werden, die es erlauben, die Terme $\sin(\epsilon \sin(x))$ und $\cos(\epsilon \sin(\omega t))$ in Summen über $\sin((2k+1)\omega t)$ bzw. $\sin(2k\omega t)$ ($k \in \mathbb{N}$) zu entwickeln, in denen die Koeffizienten durch Bessel-Funktionen $J_{2k+1}(\epsilon)$ bzw. $J_{2k}(\epsilon)$ gegeben sind:

$$\sin(\epsilon \sin(\omega t)) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\epsilon) \sin((2k+1)\omega t) \quad (\text{A.1})$$

$$\cos(\epsilon \sin(\omega t)) = J_0(\epsilon) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\epsilon) \sin(2k\omega t) \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Integraldarstellung der Bessel-Funktion

Für Bessel-Funktionen mit ganzzahligem Index und ihre Ableitungen gibt es eine Integraldarstellung, die in der in dieser Arbeit gebrauchten Form hier notiert werden soll:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\zeta \cos(t) - imt} dt = e^{-im\pi/2} J_m(\zeta). \quad (\text{A.3})$$

Durch Ableitung nach ζ erhält man die Integraldarstellung für $J'_m(\zeta)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) e^{-i\zeta \cos(t) - imt} dt = -ie^{-im\pi/2} J'_m(\zeta). \quad (\text{A.4})$$

Diese Form der Integraldarstellung kann man von der Form (A.5) aus dem Buch von Gradshteyn und Ryzhik [Gra94](S.952) ableiten:

$$J_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\zeta \sin(t) - imt} dt \quad (\text{A.5})$$

Wenn man die Variablensubstitution $t \rightarrow t + \pi/2$ durchführt, erhält man:

$$J_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} e^{-i\zeta \cos(t) - imt + im\pi/2} dt \quad (\text{A.6})$$

Wegen

$$\int_{-\pi/2}^0 e^{-i\zeta \cos(t) - imt} dt = \int_{3/2\pi}^{2\pi} e^{-i\zeta \cos(t) - imt} dt$$

kann man die Integrationsgrenzen in (A.6) zu 0 und 2π setzen, und es resultiert schließlich

$$J_m(\zeta) = e^{im\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\zeta \cos(t) - imt} dt, \quad (\text{A.7})$$

womit (A.3) und damit auch (A.4) gezeigt sind.

A.2 Methode der stationären Phase

Die Methode der stationären Phase ist nützlich bei der näherungsweise Berechnung von Integralen der Form

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda f(x)} dx, \quad (\text{A.8})$$

wenn der Term $\exp(i\lambda f(x))$ schnell oszilliert. Unter diesen Voraussetzungen ist die Annahme gerechtfertigt, dass nur die Bereiche mit langsam veränderlichem $f(x)$, d.h. die Umgebung von Stellen mit $f'(x) = 0$, einen wesentlichen Beitrag zum Integral leisten. Gesucht sind also die Punkte stationärer Phase:

$$f'(x_s) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Der Einfachheit halber kann man zunächst von nur einem stationären Punkt ausgehen und später den allgemeinen Fall mehrerer stationärer Punkte behandeln. Man kann nun $f(x)$ um den stationären Punkt x_s in eine Taylor - Reihe bis zum quadratischen Term entwickeln ,

$$f(x) = f(x_s) + \frac{1}{2} f''(x_s) (x - x_s)^2 + o((x - x_s)^2), \quad (\text{A.10})$$

und dann I als Gauss - Integral lösen:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda(f(x_s) + \frac{1}{2} f''(x_s) (x - x_s)^2)} dx \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda |f''(x_s)|} \right)^{1/2} e^{i\lambda f(x_s)} e^{i \operatorname{sign}(f''(x_s)) \pi/4}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Wenn $f(x)$ mehrere stationäre Punkte besitzt, erhält man als Näherung für I eine Summe über die stationären Punkte [Sch81], [Ble75]:

$$I(\lambda) = \sum_i \left(\frac{2\pi}{\lambda |f''(x_i)|} \right)^{1/2} e^{i\lambda f(x_i)} e^{i \operatorname{sign}(f''(x_i))\pi/4}, \quad (\text{A.12})$$

wobei die Summe über alle stationären Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$ geht.

A.3 Methode des “steepest descent”

Ziel der Methode des “steepest descent” ist die Analyse von Integralen der Form

$$I_\alpha(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda f(z, \alpha)} dz, \quad (\text{A.13})$$

wenn λ gegen Unendlich geht. C ist hierbei ein komplexer Integrationsweg, $g(z)$ und $f(z, \alpha)$ sind komplexwertige Funktionen. Das Vorgehen besteht aus 4 Schritten:

1. Aufsuchen der kritischen Punkte des Integranden. Das sind hier Stellen, bei denen $df(z, \alpha)/dz = 0$ ist.
2. Bestimmung der Richtungen des steilsten Abstiegs (steepest descent) an jedem kritischen Punkt.
3. Deformation des Integrationsweges in die Richtungen des steilsten Abstiegs (falls möglich). Man verwendet hierzu den Cauchyschen Integralsatz.
4. Auswertung des Integrals entlang dieses deformierten Wegs.

Die Richtung des “steepest descent” ist dann, wenn $\nabla u(z) \neq 0$, gegeben durch $-\nabla u(z)$; hierbei ist $f(z) = u(z) + iw(z)$. Als Ergebnis erhält man schließlich [Ble75]

$$I_\alpha(\lambda) \simeq g(z_s) \left(\frac{\pi}{2\lambda |f''(z_s, \alpha)|} \right)^{1/2} e^{(\lambda f(z_s, \alpha) + i(2p+1)\pi/2 - i\gamma/2)}, \quad p = 0, 1 \quad (\text{A.14})$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass $d^2 f(z, \alpha)/dz^2$ nicht verschwindet. Die Abkürzung γ ist dann durch folgende Gleichung definiert:

$$\left. \frac{d^2 f(z, \alpha)}{dz^2} \right|_{z=z_s} = ae^{i\gamma}. \quad (\text{A.15})$$

A.4 Uniforme Approximation mit Bessel-Funktionen

Die uniforme Approximation mit Bessel-Funktionen ist eine Methode, um näherungsweise ein Integral der Form

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} g(x) e^{if(x,\alpha)} dx \quad (\text{A.16})$$

zu berechnen. Entwickelt wurde sie von J.R. Stine und R.A. Marcus [Sti73]; eine weitere Darstellung ist außerdem in einem Buch von M.S. Child ([Chi91], S.352) zu finden. Bei diesem Verfahren wird vorausgesetzt, dass $f(x, \alpha)$ zwei stationäre Punkte hat, $x_a(\alpha)$ und $x_b(\alpha)$, und dass $\exp(if(x, \alpha))$ außerhalb der Bereiche stationärer Phase so schnell oszilliert, dass der Integrand dort nur unwesentlich zum Integral beiträgt. Im Falle, dass f reell ist, soll $f''_a(\alpha) > 0$ (lokales Minimum) und $f''_b(\alpha) < 0$ (lokales Maximum) sein. $f(x, \alpha)$ muss ausserdem folgende Bedingung erfüllen:

$$f(x + 2\pi, \alpha) = 2\pi m_\alpha + f(x, \alpha), \quad m_\alpha \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.17})$$

Das Ziel dieser Methode ist es, $I(\alpha)$ mit Hilfe von $\{f_\nu\}$, $\{f''_\nu\}$ und $\{g_\nu\}$ ($\nu = a, b$) auszudrücken und außerdem Singularitäten an kritischen Punkten zu vermeiden, wie sie bei der Methode der stationären Phase an den stationären Punkten mit $f''(x_s) = 0$ auftreten können.

Die Vorgehensweise ist folgendermaßen: Zuerst wird eine Transformation der Integrationsvariablen so definiert, dass f auch in den neuen Variablen zwei stationäre Punkte besitzt. Dann wird das Integral $I(\alpha)$ in der neuen Form näherungsweise gelöst und auf eine Bessel-Funktion und ihre Ableitung zurückgeführt.

Am Anfang erfolgt eine Variablensubstitution von x nach t , sodass folgende Identität gilt:

$$f(x(t), \alpha) = A(\alpha) - \zeta_\alpha \cos(t) - m_\alpha t. \quad (\text{A.18})$$

Daraus folgt für $I(\alpha)$ nun:

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} g(x) \left(\frac{dx}{dt} \right) e^{i(A - \zeta \cos(t) - mt)} dt. \quad (\text{A.19})$$

Indem man die Punkte stationärer Phase in den verschiedenen Koordinaten einander zuordnet, ist man in der Lage, Gleichungen für A und ζ aufzustellen:

$$x_a \leftrightarrow t_a = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right) \quad (\text{A.20})$$

$$x_b \leftrightarrow t_b = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right). \quad (\text{A.21})$$

Eingesetzt in (A.18) ergibt sich daraus:

$$f_a(\alpha) = A - \frac{m_\alpha \pi}{2} - (\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/2} + m_\alpha \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right) \quad (\text{A.22})$$

$$f_b(\alpha) = A - \frac{m_\alpha \pi}{2} + (\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/2} - m_\alpha \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right). \quad (\text{A.23})$$

Durch weitere Umformung erhält man jetzt Bedingungen für A und ζ , um die Identität (A.18) zu erfüllen:

$$A = \frac{m_\alpha \pi}{2} + \frac{1}{2}(f_b(\alpha) + f_a(\alpha)); \quad (\text{A.24})$$

dabei ist ζ Lösung der transzendenten Gleichung

$$\frac{1}{2}(f_b(\alpha) - f_a(\alpha)) = (\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/2} - m_\alpha \arccos\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right), \quad (\text{A.25})$$

wenn $\zeta > m$, und von

$$-\frac{i}{2}(f_b(\alpha) - f_a(\alpha)) = (m_\alpha^2 - \zeta_\alpha^2)^{1/2} - m_\alpha \operatorname{accosh}\left(\frac{m_\alpha}{\zeta_\alpha}\right), \quad (\text{A.26})$$

im Falle, dass $\zeta < m$. Um jetzt das Integral (A.19) auszuwerten, werden zwei Näherungen gemacht: Erstens wird $dx(t)/dt$ durch den Wert an den Punkten stationärer Phase ersetzt. Diesen erhält man durch zweimaliges Ableiten von (A.18):

$$f_\nu'' \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \pm (\zeta_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{1/2}, \quad \nu = a, b. \quad (\text{A.27})$$

Zweitens verwendet man die Abschätzung:

$$g(x(t)) \left(\frac{dx}{dt} \right) \simeq X - Y \cos(t). \quad (\text{A.28})$$

Damit erhält man für $I(\alpha)$ einen Ausdruck, den man mit Hilfe der Integraldarstellungen von $J_m(\zeta)$ und $J'_m(\zeta)$ lösen kann:

$$I(\alpha) \simeq \int_0^{2\pi} (X - Y \cos(t)) e^{i(A - \zeta \cos(t) - mt)} dt, \quad (\text{A.29})$$

Mit (A.3) und (A.4) erhält man hieraus:

$$I(\alpha) = 2\pi e^{-im\pi/2} e^{iA} [X J_{m_\alpha}(\zeta_\alpha) - iY J'_{m_\alpha}(\zeta_\alpha)]. \quad (\text{A.30})$$

Definiert man

$$P_a := 2\pi \frac{g_a^2}{f_a''}, \quad (\text{A.31})$$

$$P_b := -2\pi \frac{g_b^2}{f_b''}, \quad (\text{A.32})$$

so ergeben sich X und Y aus den Gleichungen (A.20), (A.27) und (A.28) als

$$X = (8\pi)^{-1/2} (P_a^{1/2} + P_b^{1/2}) (\zeta^2 - m^2)^{1/4} \quad (\text{A.33})$$

$$Y = -(8\pi)^{-1/2} (P_a^{1/2} - P_b^{1/2}) \zeta (\zeta^2 - m^2)^{-1/4}. \quad (\text{A.34})$$

Ausgeschrieben bedeutet das für $I(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) = & e^{-im\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{iA} [(P_a^{1/2} + P_b^{1/2})(\zeta^2 - m^2)^{1/4} J_{m_\alpha}(\zeta_\alpha) \\
 & + i(P_a^{1/2} - P_b^{1/2})\zeta(\zeta^2 - m^2)^{-1/4} J'_{m_\alpha}(\zeta_\alpha)]
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

In dieser Form treten im Gegensatz zur Methode der stationären Phase auch an den kritischen Punkten mit $f''(x_s) = 0$ keine Singularitäten auf. Aus (A.18) und (A.27) erkennt man nämlich, dass aus $f''(x_s) = 0$ folgt:

$$\zeta = \pm m. \tag{A.36}$$

Deshalb ist an diesen Stellen

$$P_\nu^{1/2}(\zeta^2 - m^2)^{1/4} = 0. \tag{A.37}$$

Anhang B

Physikalischer Anhang

B.1 Skalierung

Die Hamilton-Funktion für ein eindimensionales System mit einem Potential der räumlichen Periode $2\pi\lambda$, zusätzlich einem Stark-Feld mit der Amplitude F_2 und einem zeitlichen Wechselfeld mit der Amplitude F_3 und der Periode ω hat die folgende Form:

$$H = \frac{p^2}{2m} + F_1 \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right) + F_2 x + F_3 x \sin(\omega t). \quad (\text{B.1})$$

Daraus ergeben sich die kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \frac{F_1}{\lambda} \sin\left(\frac{x}{\lambda}\right) - F_2 - F_3 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Wenn die Hamilton-Funktion in eine Form gebracht werden soll, in der die Masse und der Vorfaktor nicht mehr explizit auftauchen, dann müssen die kanonischen Parameter x und p sowie die Zeit t wie folgt umskaliert werden:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{mF_1}}, \quad \tilde{t} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_1}{m}} t. \quad (\text{B.3})$$

In diesen neuen Koordinaten nimmt die Hamilton-Funktion dann die folgende Gestalt an

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}^2}{2} + \cos(\tilde{x}) + F \tilde{x} + F_\omega \tilde{x} \sin(\tilde{\omega} \tilde{t}), \quad (\text{B.4})$$

$$F = \frac{\lambda}{F_1} F_2, \quad F_\omega = \frac{\lambda}{F_1} F_3, \quad \tilde{\omega} = \lambda \sqrt{\frac{m}{F_1}} \omega, \quad (\text{B.5})$$

in der wie gefordert die Masse m und die Feldstärke F_1 nicht mehr erscheinen, und aus der schließlich die entsprechenden Bewegungsgleichungen folgen:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \\ &= \sin(\tilde{x}) - F - F_\omega \sin(\tilde{\omega} \tilde{t}).\end{aligned}\tag{B.6}$$

Diese sind mit den alten Bewegungsgleichungen (B.2) identisch, wenn man die Koordinaten mit Hilfe von (B.3) ausdrückt.

B.2 Quantendynamik

B.2.1 Eichtransformation

Zur Berechnung der Quantendynamik eines Zustandes $\Psi(x, t)$ mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \cos(\hat{x}) + F\hat{x} + F_\omega \hat{x} \sin(\omega t)\tag{B.7}$$

nach der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t)\tag{B.8}$$

wird die Eichtransformation

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-i\frac{Fxt}{\hbar} + i\frac{F_\omega x}{\hbar\omega} \cos(\omega t)\right) \tilde{\Psi}(x, t).\tag{B.9}$$

durchgeführt. Der transformierte Hamilton-Operator hat dann die Form

$$\tilde{H} = \frac{(\hat{p} - Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t))^2}{2} + \cos(\hat{x}),\tag{B.10}$$

Er ist also bis auf eine Verschiebung des Impulses um den Betrag $-Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t)$ identisch mit dem Hamilton-Operator für ein Teilchen in einem Potential $V(x) = \cos(x)$:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2} + \cos(\hat{x}).\tag{B.11}$$

Mit (B.9) und (B.10) lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(x, t) = \tilde{H} \tilde{\Psi}(x, t).\tag{B.12}$$

Sie hat also ihre Struktur beibehalten.

B.2.2 Numerische Berechnung der Quantendynamik

Die Berechnung der zeitlichen Entwicklung der quantenmechanischen Zustände

$$\tilde{\Psi}(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \tilde{H}(t') dt'} \tilde{\Psi}(x, 0), \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{H} \tilde{\Psi}(x, t) = \left[\frac{(\hat{p} - Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t))^2}{2} + \cos(\hat{x}) \right] \tilde{\Psi}(x, t), \quad (\text{B.14})$$

kann hier numerisch am einfachsten in einer Darstellung im 'k-Raum' durchgeführt werden. Den Zustand $\tilde{\Psi}(x, t)$ entwickelt man nach Eigendistributionen des Impuls-Operators:

$$\tilde{\Psi}(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) e^{ik_n x}, \quad (\text{B.15})$$

wobei die Koeffizienten $c_n(t)$ normiert sind:

$$\sum_{n=1}^N |c_n(t)|^2 = 1. \quad (\text{B.16})$$

Wenn man diese spezielle Darstellung (B.15) von $\tilde{\Psi}(x, t)$ verwendet, nimmt die Gleichung (B.14) die folgende Form an:

$$\tilde{H} \tilde{\Psi}(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) \left[\frac{(\hbar k_n - Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t))^2}{2} e^{ik_n x} + \cos(x) e^{ik_n x} \right]. \quad (\text{B.17})$$

Nutzt man die Beziehung

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad (\text{B.18})$$

so erhält man:

$$\tilde{H} \tilde{\Psi}(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) \left[\frac{(\hbar k_n - Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t))^2}{2} e^{ik_n x} + \frac{1}{2} (e^{i(k_n+1)x} + e^{i(k_n-1)x}) \right] \quad (\text{B.19})$$

Diese Gleichung kann man in der Basis $\{e^{ik_n x}, n \in \{1, \dots, N\}\}$ als Matrixgleichung schreiben:

$$\tilde{H} \mathbf{c}(t) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & h_{33} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right] \mathbf{c}(t), \quad (\text{B.20})$$

wobei

$$h_{nn} = (\hbar k_n - Ft + F_\omega/\omega \cos(\omega t))^2, \quad 1 \leq n \leq N \quad (\text{B.21})$$

und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Wenn man das in die Schrödinger-Gleichung (B.13) einsetzt, erhält man als Lösung im 'k-Raum':

$$\mathbf{c}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \tilde{H}(t') dt'} \mathbf{c}(0). \quad (\text{B.23})$$

Für einen kleinen Zeitschritt Δt kann man das nähern:

$$\mathbf{c}(t + \Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}(t) \Delta t} \mathbf{c}(t). \quad (\text{B.24})$$

Aus dieser Gleichung kann man sukzessiv die zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Zustands berechnen:

$$\mathbf{c}(t_{m+1}) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_m) \Delta t} \mathbf{c}(t_m), \quad (\text{B.25})$$

$$t_{m+1} = t_m + \Delta t, \quad m \geq 0. \quad (\text{B.26})$$

Der Wert von $\mathbf{c}(t)$ für die Zeiten $t = t_0 + n\Delta t$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ wird jeweils bestimmt durch das Wirken des Matrixoperators $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}(t_m) \Delta t\right)$ auf den Zustandsvektor $\mathbf{c}(t_m)$.

B.2.3 Beschleunigung im Quantensystem

Um die Beschleunigung in der klassischen Dynamik mit einer quantenmechanischen Größe zu vergleichen, wird als Erwartungswert für die Beschleunigung die zweite Ableitung des Ortserwartungswertes nach der Zeit verwendet:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle \quad (\text{B.27})$$

Wenn man die folgende bekannte Gleichung verwendet,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle, \quad (\text{B.28})$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in den verwendeten Einheiten die Masse m des Teilchens nicht erscheint, dann ist also Folgendes zu berechnen:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle. \quad (\text{B.29})$$

Der Erwartungswert für den Impuls, ausgedrückt mit den in (B.9) definierten Zuständen $\tilde{\Psi}$, lautet:

$$\langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle = \langle \tilde{\Psi} | \hat{p} | \tilde{\Psi} \rangle + \frac{F_\omega}{\omega} \cos(\omega t) - Ft. \quad (\text{B.30})$$

Wenn man jetzt für $\tilde{\Psi}$ die explizite Form (B.15) annimmt, dann ist der Impulserwartungswert:

$$\langle \tilde{\Psi} | \hat{p} | \tilde{\Psi} \rangle = \hbar \sum_{n=1}^N |c_n(t)|^2 k_n. \quad (\text{B.31})$$

Die Formeln (B.29), (B.30) und (B.31) zusammen führen zu einem Ausdruck für den Erwartungswert der Beschleunigung, die der Zustand $\tilde{\Psi}$ in (B.15) bei der zeitlichen Evolution mit dem Hamilton-Operator (B.9) erfährt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\hbar \sum_{n=1}^N |c_n(t)|^2 k_n) - F_\omega \sin(\omega t) - F \quad (\text{B.32})$$

Wenn man das zeitliche Verhalten dieses Ausdrucks mittels Fourier-Analyse auf die vorkommenden Frequenzen untersucht, ist ersichtlich, dass die Anregungsfrequenz ω mindestens mit einer Intensität vorkommt, die proportional zu F_ω ist.

B.2.4 Gauss-Wellenpaket

Um die quantenmechanischen Berechnungen durchzuführen, wurden als Zustände sogenannte Gauss-Pakete benutzt. Man konnte also die Wellenfunktionen immer so wählen, dass ihre Erwartungswerte von Ort und Impuls zum Zeitpunkt t_0 den gewünschten Anfangsbedingungen entsprachen:

$$\langle \hat{x} \rangle_{t_0} = x_0, \quad (\text{B.33})$$

$$\langle \hat{p} \rangle_{t_0} = p_0. \quad (\text{B.34})$$

Die Umrechnung des Impulses auf einen Wellenvektor geschieht mit der Beziehung von DeBroglie:

$$k = p/\hbar \quad (\text{B.35})$$

Da das Problem numerisch zu bearbeiten ist, wird dann eine geeignete Basis aus N Zuständen im k -Raum definiert:

$$\{e^{ik_n x} : 1 \leq n \leq N \text{ mit } n, N \in \mathbb{N}\}, \quad (\text{B.36})$$

mit der hier verwendeten Anfangsbedingung (x_0, p_0) :

$$c_n(t=0) = C \exp\left(-\frac{1}{5} \frac{(k_n - k_0)^2}{2} - ik_n x_0\right). \quad (\text{B.37})$$

Der Faktor $1/5$ im Exponent, der für die Breite des Wellenpakets entscheidend ist, erwies sich als sehr geeignet für die numerische Berechnung. Die Konstante C ist dabei so zu wählen, dass das Wellenpaket die Norm eins hat:

$$\sum_{n=1}^N |c_n(0)|^2 = 1. \quad (\text{B.38})$$

Literaturverzeichnis

- [Abr72] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, New York, 1972.
- [All75] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [And98] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*, *Science* **282** (1998) 1686.
- [Ave95] V. Averbukh and N. Moiseyev, *Cutoff in molecular harmonic-generation spectra resulting from classical chaotic dynamics*, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 3911.
- [Ave98] V. Averbukh and N. Moiseyev, *Classical versus quantum harmonic-generation spectrum of a driven anharmonic oscillator in the high-frequency regime*, *Phys. Rev. A* **57**(2) (1998) 1345.
- [Ban92] G. Bandarage, A. Maquet, T. M enis, R. Taieb, V. V eniard, and J. Cooper, *Harmonic generation by laser-driven classical hydrogen atoms*, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 380.
- [Bec94] W. Becker, S. Long, and J. K. McIver, *Modeling harmonic generation by a zero-range potential*, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 1540.
- [Bie89] L. C. Biedenharn, G. A. Rinker, and J. C. Solem, *Solvable approximate model for the harmonic radiation from atoms subjected to oscillatory electric fields*, *J. Opt. Soc. Am. B* **6** (1989) 221.
- [Ble75] N. Bleistein and R. A. Handelsman, *Asymptotic expansions of integrals*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
- [Blo28] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, *Z. Phys* **52** (1928) 555.
- [Chi91] M. S. Child, *Semiclassical mechanics with molecular applications*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [Chi98] W. Chism, T. Timberlake, and L. E. Reichl, *High harmonic generation in systems with bounded chaos*, *Phys. Rev. E* **58** (1998) 1713.

- [Chi00] M. L. Chiofalo and M. P. Tosi, *Output from Bose Condensates in Tunnel Arrays: The Role of Mean-Field Interactions and of Transverse confinement*, *Phys. Lett. A* **268** (2000) 406.
- [Cor93] P. B. Corkum, *Plasma perspective on strong field multiphoton ionization*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1994.
- [Dah96] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4508.
- [Dav82] M. J. Davis and R. E. Wyatt, *Surface-of-section analysis in the classical theory of multiphoton absorption*, *Chem. Phys. Lett.* **86** (1982) 235.
- [Fel92] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, B. A. B. Miller, J. E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink, *Optical Investigation of Bloch Oscillations in a Semiconductor Superlattice*, *Phys. Rev. B* **46** (1992) 7252.
- [Gau97] F. I. Gauthey, B. M. Garraway, and P. L. Knight, *High harmonic generation and periodic level crossings*, *Phys. Rev. A* **56** (1997) 3093.
- [Glü98a] M. Glück, A. R. Kolovsky, and H. J. Korsch, *Bloch particle in presence of dc and ac fields*, *Phys. Lett. A* **249** (1998) 483.
- [Glü98b] M. Glück, A. R. Kolovsky, H. J. Korsch, and N. Moiseyev, *Calculation of Wannier-Bloch and Wannier-Stark states*, *Eur. Phys. J. D* **4** (1998) 239.
- [Glü00] M. Glück, Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000.
- [Gog88] M. E. Goggin and P. W. Milonni, *Driven Morse oscillator: Classical chaos, quantum theory, and photodissociation*, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 796.
- [Gra94] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 5. edition, 1994.
- [Hen68] W. C. Henneberger, *Perturbation Method for Atoms in Intense Light Beams*, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 838.
- [Kel65] L. V. Keldysh, *Ionization in the field of a strong electromagnetic wave*, *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1307.
- [Leo92] K. Leo, P. H. Bolivar, F. Brüggemann, R. Schwedler, and K. Köhler, *Observation of Bloch Oscillations in a Semiconductor Superlattice*, *Solid State Comm.* **84** (1992) 943.
- [Leo98] K. Leo, *Interband Optical Investigation of Bloch Oscillations in Semiconductor Superlattices*, *Semicond. Sci. Technol.* **13** (1998) 249.

- [Lew94] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, A. L'Huillier, and P. B. Corkum, *Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields*, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 2117.
- [L'H91] A. L'Huillier, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, *Higher-order harmonic generation in xenon at 1064 nm: The role of phase matching*, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2200.
- [L'H92] A. L'Huillier, Ph. Balcou, S. Candel, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, *Calculations of high-order harmonic-generation processes in xenon at 1064 nm*, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 2778.
- [L'H93] A. L'Huillier and Ph. Balcou, *High-order harmonic generation in rare gases with a 1-ps 1053-nm laser*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 774.
- [Mad99] K. W. Madison, M. C. Fischer, and M. G. Raizen, *Observation of the Wannier-Stark Fan and the Fractional Ladder in an Accelerating Optical Lattice*, *Phys. Rev. A* **60** (1999) R1767.
- [Mil00a] D. B. Milošević, *Cut-off law for high-harmonic generation by an elliptically polarized laser field*, *J. Phys. A* **33** (2000) 2479.
- [Mil00b] D. B. Milošević and W. Becker, *Attosecond pulse trains with unusual nonlinear polarization*, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 011403.
- [Niu96] Qian Niu, Xian-Geng Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, *Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark ladders in Optical Potentials*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4504.
- [Rai97] M. G. Raizen, C. Salomon, and Qian Niu, *New light on quantum transport*, *Physics Today* July (1997) 30.
- [Sch81] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [Sti73] J. R. Stine and R. A. Marcus, *Semiclassical transition probabilities by an asymptotic evaluation of the S matrix for elastic and inelastic collisions. Bessel uniform approximation*, *J. Chem. Phys.* **59** (1973) 5145.
- [Tab89] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley, New York, 1989.
- [Wan60] G. H. Wannier, *Wave Functions and Effective Hamiltonian for Bloch Electrons in an Electric field*, *Phys. Rev.* **117** (1960) 432.
- [Wil96] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Qian Niu, and M. G. Raizen, *Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4512.

Danksagung

Folgenden Menschen möchte ich zum Abschluss meiner Arbeit herzlich danken:

Herrn Prof. Dr. H. J. Korsch, Herrn Prof. Dr. A. R. Kolovsky, Herrn Markus Glück, Herrn Michael Hankel, Herrn Frank Keck, Herrn Bernd Schellhaas und Herrn Andreas Jablonski.

Jeder hat auf seine Weise durch Anregungen und seine Hilfsbereitschaft zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern für die Unterstützung während meines Studiums sowie meinen Schwestern.