

**Dynamische Generierung
der Leptonenmassen**

**Martin Greulach
Dissertation**

Dynamische Generierung der Leptonenmassen

Martin Greulach

Dissertation

Vom Fachbereich Physik der Universität Kaiserslautern
zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“ genehmigte Dissertation

Betreuer: Prof. Dr. A. Vančura
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. V. F. Müller

Datum der wissenschaftlichen Aussprache: 26. April 2000
Universität Kaiserslautern D386

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	9
Abstract	11
Einleitung	13
I Beschreibung der Grundlagen	15
1 Modellsystem $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1) \times U(1)'$	17
1.1 Erweitertes Standardmodell	17
1.1.1 Fermionen des Standardmodells	17
1.1.2 Lokale $U(1)$ Transformation	18
1.1.3 Lokale $SU(2)_L$ Transformation	19
1.1.4 Lokale $SU(3)_{\text{color}}$ Transformation	20
1.1.5 $U(1)'$ Erweiterung des Standardmodells	20
1.1.6 Lagrangedichte des erweiterten Standardmodells	21
1.2 Anomalien des erweiterten Standardmodells	21
1.3 Pfadintegral-Quantisierung und Feynman Regeln	25
1.3.1 Feynman-Regeln für ein freies skalares Feld ϕ	26
1.3.2 Feynman-Regeln für ein freies Spinor Feld ψ	28
1.3.3 Feynman-Regeln für ein $U(1)$ Eichfeld	29
1.3.4 Ward-Takahashi Identität	31
1.3.5 Vertexfunktion	33
1.3.6 Dyson-Schwinger Gleichung	33
2 Symmetriebrechung	37
2.1 Goldstone Theorem	38
2.1.1 Goldstone Modell	39
2.1.2 Abelsches Higgs-Modell	40
2.1.3 Lineares σ Modell	42
2.1.4 Nambu-Jona-Lasinio Modell	43
2.1.5 Zusammenfassung	45

3	Experimenteller Status Neutrinos	47
3.1	Quellen von Neutrinos	47
3.2	Nachweis von Neutrinos	48
II	Dynamische Massengenerierung für die Leptonen	49
4	Massengenerierung	51
4.1	Massenlose „quenched rainbow“ Näherung	52
4.1.1	Näherung Integralgleichung	56
4.1.2	Näherung Differentialgleichung	57
4.2	Massive „quenched rainbow“ Näherung	60
4.2.1	Massive „Landau-ähnliche quenched rainbow“ Näherung	66
4.3	Ausblick	68
5	Untersuchung der Leptonenmasse	69
6	Resümee	73
III	Anhang	75
A	Allgemeine Notationen und Konventionen	77
A.1	Verwendete Symbole	77
A.2	Relativistische Notation	78
A.2.1	Dirac-Algebra im Minkowski Raum	78
A.2.2	Pauli Matrizen	79
A.2.3	Gell-Mann Matrizen	80
A.3	Feynman-Regeln	80
A.4	Rechenregeln Grassmannalgebra	81
A.5	Ward-Takahashi Identität	82
A.6	Wick Rotation	83
A.7	Fierz Identität	83
B	Nebenrechnungen Kapitel 2	85
B.1	Nebenrechnung Goldstone Modell	85
B.2	Nebenrechnung abelsches Higgs Modell	86
C	Nebenrechnungen Kapitel 4	87
C.1	Umformung Integral	87
C.1.1	Spezielle Rechnung masseloser Fall	91
C.1.2	Spezielle Rechnung massiver Fall	92

C.1.3	Landau ähnliche Eichung	98
C.2	Berechnung massive Näherung	100
C.2.1	Dimensionale Regularisierung	101
C.3	Hypergeometrische Differentialgleichung	102
D	Allgemeiner Anhang	107
	Literaturverzeichnis	107
	Lebenslauf	113
	Danksagung	115

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, wie man Masse für die Leptonen, insbesondere die Neutrinos erzeugen kann. Dazu erweitern wir das Standard Modell der Elementarteilchenphysik um eine weitere abelsche Eichgruppe. Diese Erweiterung erlaubt uns die Einführung eines Higgs Bosons zur Generierung der Masse zu vermeiden.

Wir zeigen, daß aus der Forderung der Anomaliefreiheit der Theorie keine Einschränkungen für die Hyperladungen der zusätzlichen abelschen Eichgruppe folgen.

Die Masse der Leptonen werden wir durch die sogenannte dynamische Massengenerierung erzeugen. Dabei zeigen wir, daß obwohl kein Massenterm für die Leptonen in der Lagrangedichte existiert, man doch eine Masse finden kann. Zur Untersuchung, ob dynamische Massengenerierung auftritt, verwenden wir die Dyson-Schwinger Gleichung für die Leptonen. Dabei erhält man ein System gekoppelter Integralgleichungen, das wir mit Hilfe von verschiedenen Näherungen zu lösen versuchen. Als Anhaltspunkt, ob unsere Näherungen sinnvoll sind, fordern wir, daß die Ward-Takahashi Identitäten erfüllt werden. Alle Lösungen die wir finden sind auch mit der Annahme verschwindender Leptonenmasse verträglich.

In der „masselosen quenched rainbow“ Näherung, in der wir den Vertex durch den nackten Vertex ersetzt und in dem Bosonenpropagator die Anzahl der Leptonenflavor gleich Null gesetzt haben, gelingt es zu zeigen, daß die Wellenfunktionsrenormierung in der Landau-Eichung verschwindet. In zwei Näherungen für die gefundene Integralgleichung gelingt es uns zu zeigen, daß eine Masse für die Leptonen auftritt. Die erste Näherung benutzt die Ward-Takahashi Identität und löst das Integral direkt. Bei der zweiten Lösungsmethode führen wir die Integralgleichung in eine Differentialgleichung über, die wir mit der Methode der Bifurkationsanalyse analysieren. Wir finden eine kritische Kopplung, so daß nur für Kopplungen die größer sind als die kritische Kopplung man eine dynamische Massengenerierung findet.

In der „massive quenched rainbow“ Näherung, in der wir den Vertex durch den nackten Vertex ersetzt und in dem massiven Bosonenpropagator die Anzahl der Neutrino flavor gleich Null gesetzt haben, zeigen wir die Probleme auf, die eine Erweiterung auf dieses Modell aufwirft. Insbesondere das Problem, daß die Wellenfunktionsrenormierung in keiner Eichung verschwindet wird diskutiert. Eine in der Literatur übliche Verallgemeinerung dieser Näherung, die „Landau ähnliche“ Eichung, wird auch diskutiert.

Danach deuten wir an, wie man unsere Ergebnisse aus der „quenched rainbow“ Näherung verwenden kann und eine Massenhierarchie für die Neutrinos aus den Massenverhältnissen der ge-

ladenen Leptonen berechnen kann.

Abstract

We show in this thesis a way to generate lepton masses particularly with regard to neutrinos. To generate mass we extend the Standard Model of elementary particle physics by a further abelian gauge group. This extension permits us to avoid the introduction of a Higgs-Boson to generate mass.

The requirement of an anomaly free theory places no restrictions for the hypercharges of the additional abelian group.

The lepton mass is generated by the so-called dynamic mass generation. Although no mass term is present in the Lagrangian, it is possible to find a mass. For the investigation whether dynamic generation of mass occurs we use the Dyson-Schwinger equation for the leptons. One receives a system of coupled integral equations which we try to solve by different approximations. We require that the Ward-Takahashi identities are fulfilled as a reference whether our approximations are meaningful or not. All solutions are compatible with vanishing lepton mass.

In the “quenched rainbow” approximation we replace the vertex by the naked vertex and set in the boson propagator the number of lepton flavors equal zero. We succeed showing that a mass for the leptons occurs. The first approximation uses the Ward-Takahashi identity and solves the integral directly. In the second approximation we transfer the integral equation into a differential equation. It is analyzed by the method of bifurcation analysis. Only for those couplings that are larger than the critical coupling one finds a dynamic mass generation.

In the “massive quenched rainbow” approximation we replace the vertex by the naked vertex and set in the massive boson propagator the number of lepton flavors equal zero. We point out the problems which result in this extension. In particular we discuss the problem that the wave function renormalization does not disappear in any gauge. A common generalization of this approximation called in the literature the “Landau like gauge” will also be discussed.

We suggest how one can use our results from the “quenched rainbow” approximation to generate a hierarchical mass pattern for the neutrinos from the mass ratios of the charged leptons.

Einleitung

Das GSW-Standard Modell [Wei80, Sal80, Gla80] beschreibt sehr gut alle experimentell beobachteten Effekte der Hochenergiephysik [PDG98]. Zur Zeit gibt es nur wenige indirekte und nicht von einem zweiten unabhängigen Experiment bestätigte Hinweise auf Abweichungen von den Vorhersagen des Standard-Modells. Zum Beispiel existiert ein Hinweis auf fehlenden Impuls bei e^+p Stößen an der **Hadron-Elektron-Ring-Anlage** (HERA) [Hai99] am **Deutschen Elektronen-Synchotron** DESY in Hamburg. Andere Hinweise kommen aus der Leptonen Physik, nämlich der Hinweis auf eine von Null verschiedene Masse für Neutrinos, auf die wir in Kapitel 3 näher eingehen.

Das interessante an dem Hinweis auf die Neutrinomasse ist, daß gerade die Erklärung der Masse, bzw. der Massenverhältnisse der Elementarteilchen eine Schwäche des Standard Modells ist. Da es wegen der Eichinvarianz unter der $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ Gruppe nicht möglich ist, einen expliziten Massenterm, in das Modell einzuführen, muß man einen „Trick“ anwenden, um einen skalaren Term in der Lagrangedichte zu erzeugen, der in der Form einem Massenterm entspricht. Eine Methode dies zu erreichen ist die spontane Symmetriebrechung, die wir in Kapitel 2 in Grundzügen betrachten. Im Standard Modell wird der Skalare Term, der als Massenterm interpretiert wird, durch Wechselwirkung mit einem weiteren Teilchen, dem Higgs-Boson, daß einen von Null verschieden Vakuumswert erhält, erzeugt. Dabei tritt das Problem auf, das man jede Masse eines Fermions durch einen eigenen Parameter beschreibt.

In dieser Arbeit werden wir einen anderen Mechanismus betrachten, nämlich die dynamische Generierung der Leptonenmasse. Zum ersten Mal gelang es J. Schwinger [Sch62a, Sch62b] in einem 2-dim. Modell zu zeigen, daß man auf diese Weise eine Masse generieren kann. Das interessante an diesem Mechanismus ist, das es sich um einen nichtperturbativen Effekt handelt. Aus diesem Grund hat man die berechtigte Hoffnung, daß man eine geringere Anzahl von Parametern, im Vergleich zum Standard Modell zur Beschreibung benötigt und man die Größenunterschiede der Massen der geladenen Leptonen und Neutrinos erklären kann.

Einen historischen Überblick kann man sich mit Hilfe der Artikelsammlung [FJ82], die von E. Farhi und R. Jackiw zusammengestellt wurde, verschaffen. Für eine Einführung in den allgemeinen Themenkomplex bietet sich das Lehrbuch „Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theory“ [Mir93] von A. Miransky an.

In dieser Arbeit werden wir versuchen zu zeigen, wie man durch Wechselwirkung mit einem weiteren $U(1)$ Eichboson, das wir „von Hand“ in die Theorie einführen, eine Masse für die

Leptonen erzeugen kann. Mit Hilfe der Dyson-Schwinger Gleichung* untersuchen wir, ob es gelingt einen von Null verschiedene Lösung der Gleichung für die Fermionen zu finden.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

- Im ersten Teil werden wir versuchen die Grundlagen der Theorie, soweit diese für das Verständniss der Arbeit notwendig sind zusammenzustellen.
 - Zuerst betrachten wir in Kapitel 1 unser Modellsystem und wenden den Apparat der Feldtheorie darauf an.
 - Im Kapitel 2 betrachten wir das Phänomen der Symmetriebrechung in der Feldtheorie. Dabei werden wir zum besseren Verständnis des Hauptteils einige Modellsysteme vorstellen.
 - Das letzte Kapitel 3 stellt äußerst knapp die aktuellen experimentellen Fakten bzg. der Neutrinos zusammen. Dabei beschränken wir uns auf die „Oszillationsexperimente“.
- Im zweiten Teil dieser Arbeit, dem Hauptteil, werden wir versuchen die Dyson-Schwinger Gleichung zu lösen und zu zeigen wie es möglich ist, mit Hilfe der Lösung ein Massenverhältnis für die Neutrinos zu erhalten.
 - Zuerst werden wir im Kapitel 4 Lösungen der Dyson-Schwinger Gleichung in verschiedenen Näherungen suchen.
 - In Kapitel 5 werden wir in einem Modell die Neutrinomassen abschätzen.
 - Die Ergebnisse der Arbeit fassen wir in Kapitel 6 zusammen.
- Der Anhang gliedert sich im wesentlichen in zwei Teile:
 - Im Anhang A werden die in der Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen zusammengefasst.
 - Der Anhang B enthält Nebenrechnungen zu Kapitel 2 und im Anhang C sind die Nebenrechnungen zu Kapitel 4 zusammengefasst. Ausserdem wird in Abschnitt C.1 eine Rekursionsformel für den hier verwendeten speziellen Integraltyp hergeleitet.

*Die wir in Kapitel 1.3.6 näher betrachten.

Teil I

Beschreibung der Grundlagen

Kapitel 1

Modellsystem

$$SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1) \times U(1)'$$

In diesem Kapitel betrachten wir zuerst im Abschnitt 1.1 die Eichgruppe des Modellsystems dieser Arbeit. In Abschnitt 1.2 untersuchen wir dieses Modell auf Anomalien, bzw. ob die Bedingung der Anomaliefreiheit zur Einschränkung der Parameter der Eichgruppe führt. In Abschnitt 1.3 leiten wir die im Hauptteil benötigten Feynman-Regeln der Theorie für die Fermionen, $U(1)$ Eichbosonen und den Eichboson–Fermion Vertex her. Ausserdem werden wir in Abschnitt 1.3.6 die Dyson-Schwinger Gleichung herleiten, die wir im Hauptteil der Arbeit zur Abschätzung der Leptonenmasse benutzen wollen.

1.1 Erweitertes Standardmodell

Als Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen wählen wir das Standard Modell mit der Eichgruppe $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1)$, die wir im folgenden betrachten wollen. Diese Eichgruppe wollen wir um eine weitere Eichgruppe $U(1)'$ erweitern.

Zuerst betrachten wir die Leptonen und danach die notwendigen Eichbosonen. Da wir im Rahmen dieser Arbeit nur die Leptonen untersuchen werden, betrachten wir die Quarks nur am Rande. Eine ausführlichere und vollständige Darstellung der Herleitung der Theorie, kann man in Standardliteratur über Quantenfeldtheorie [Wei95, Wei96] finden.

1.1.1 Fermionen des Standardmodells

In Tabelle 1.1 auf Seite 18 haben wir die Zuordnung der Fermionen zu den im folgenden verwendeten chiralen Projektionen $\psi_{.L}, \psi_{.R}, q_{.L}, q_{.R}$ zusammengestellt. Für die Betrachtungen dieses Kapitels ist es vollkommen ausreichend, nur eine Generation der Fermionen zu betrachten*. Wir

*Unser Modell besitzt also keine horizontale Symmetrie zwischen den verschiedenen Generationen

Leptonen		Quarks		
Ψ_{lepton}		Ψ_{quark}		
e	ν_e	u	d	erste Generation
μ	ν_μ	c	s	zweite Generation
τ	ν_τ	t	b	dritte Generation
$\underbrace{\psi_{1L} \quad \psi_{1R}}$	$\underbrace{\psi_{2L} \quad \psi_{2R}}$	$\underbrace{q_{1L} \quad q_{1R}}$	$\underbrace{q_{2L} \quad q_{2R}}$	chirale Projektionen

Tabelle 1.1: Fermionen des Standardmodells

benutzen folgende Kombinationen der Fermionen um das Transformationsverhalten zu beschreiben*:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_l(x) \\ \Psi_q(x) \end{pmatrix} \quad \Psi_{\text{lepton}}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \\ \psi_{1R} \\ \psi_{2R} \end{pmatrix} \quad \Psi_{\text{quark}}(x) = \begin{pmatrix} q_{1L} \\ q_{2L} \\ q_{1R} \\ q_{2R} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\psi_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.1.2 Lokale $U(1)$ Transformation

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\mathbf{Y}} \Psi(x) \quad (1.3)$$

Wenn wir die Invarianz des Feldes unter der lokalen $U(1)$ auch in der Lagrangedichte erreichen wollen, müssen wir ein Eichfeld $\mathbf{B}(x)$ einführen. Man findet als geeichte Lagrangedichte für die Leptonen:

$$\mathcal{L}_{U(1)}(x) = -\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{\mu\nu}(x) \mathbf{B}^{\mu\nu}(x)) + \bar{\Psi}_{\text{lepton}}(x) i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + ig' \mathbf{B}_\lambda(x) \mathbf{Y}) \Psi_{\text{lepton}}(x) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathbf{B}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu(x)$$

*Wenn die Verallgemeinerung für Quarks offensichtlich ist, wird wie im Fall der $U(1)$ und der $SU(2)_L$ nur der Fall der Leptonen betrachtet

Wobei die Matrix \mathbf{Y} der Hyperladung im Standard Modell für die Leptonen einer Generation die folgende Gestalt hat*:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{2R} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

1.1.3 Lokale $SU(2)_L$ Transformation

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\rightarrow U(x)\psi_L(x) \\ \psi_{1R}(x) &\rightarrow \psi_{1R}(x) \\ \psi_{2R}(x) &\rightarrow \psi_{2R}(x) \\ U(x) &\in SU(2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die $SU(2)$ Transformation wirkt also nur auf die linkshändigen Leptonen. Um die Eichinvarianz der Lagrange Dichte zu erhalten, müssen wir genauso viele Eichfelder $W_\lambda^a(x)$ einführen, wie die Gruppe $SU(2)$ Erzeugende besitzt. Eine fundamentale Darstellung der $SU(2)$ ist durch die Pauli-Matrizen (Siehe Seite 79 Anhang A.2.2) τ_1 , τ_2 und τ_3 gegeben. Man findet als geeichte Lagrange Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)_L}(x) &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{W}^{\rho\lambda}(x)] + \bar{\Psi}_{\text{lepton}}(x)i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + ig\mathbf{W}_\lambda^a(x)\mathbf{T}_a) \Psi_{\text{lepton}}(x) \\ \mathbf{W}_\lambda(x) &= W_\lambda^a(x) \frac{\tau_a}{2} \quad a \in \{1, 2, 3\} \\ \mathbf{W}_{\lambda\rho}(x) &= \partial_\lambda \mathbf{W}_\rho(x) - \partial_\rho \mathbf{W}_\lambda(x) + ig[\mathbf{W}_\lambda(x), \mathbf{W}_\rho(x)] \\ \mathbf{T}_a &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}\tau_a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Im weiteren Verlauf der Herleitung des Standardmodells ist es jetzt üblich die Komponenten der Eichfelder, wie folgt zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} W_\lambda^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}_\lambda^1 \mp i\mathbf{W}_\lambda^2) \\ Z_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g+g'}} (g\mathbf{W}_\lambda^3 - g'\mathbf{B}_\lambda) \\ A_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g+g'}} (g'\mathbf{W}_\lambda^3 - g\mathbf{B}_\lambda) \end{aligned} \quad (1.8)$$

*Im folgenden Kapitel 1.2 in Gleichung (1.22) werden die expliziten Parameter angegeben

Für unsere weiteren Betrachtungen sind diese Überlegungen nicht relevant, und werden deshalb nicht weiter ausgeführt. In den meisten Büchern (z.B. [Nac86]) wird jetzt die Masse durch Einführung eines Higgs Boson erzeugt. Wir verfolgen in dieser Arbeit einen anderen Ansatz zur Massengenerierung und werden daher den Higgs Mechanismus nur in dem Fall des abelschen Higgs Bosons in Abschnitt 2.1.2 betrachten.

1.1.4 Lokale $SU(3)_{\text{color}}$ Transformation

$$\begin{aligned}\psi_{\text{quark}}(x) &\rightarrow U(x)\psi_{\text{quark}}(x) \\ \psi_{\text{lepton}}(x) &\rightarrow \psi_{\text{lepton}}(x) \\ U(x) &\in SU(3)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Die $SU(3)_{\text{color}}$ Transformationen wirken also nur auf die Quarks. Um die Eichinvarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten muß man acht Eichbosonen $G_\lambda^a(x)$ einführen. Bei den Matrizen λ_a handelt es sich um die Gell-Mann Matrizen von Seite 80 Gleichung (A.9), der fundamentalen Darstellung der Gruppe $SU(3)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SU(3)_{\text{color}}}(x) &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[\mathbf{G}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{G}^{\rho\lambda}(x)] + \bar{\Psi}(x)i\gamma^\lambda(\partial_\lambda + ig_s\mathbf{G}_\lambda^a(x)\mathbf{F}_a)\Psi(x) \\ \mathbf{G}_\lambda(x) &= G_\lambda^a(x)\frac{\lambda_a}{2} \quad a \in \{1, 2, \dots, 8\} \\ \mathbf{G}_{\lambda\rho}(x) &= \partial_\lambda\mathbf{G}_\rho(x) - \partial_\rho\mathbf{G}_\lambda(x) + ig[\mathbf{G}_\lambda(x), \mathbf{G}_\rho(x)] \\ \mathbf{F}_a &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\lambda_a \end{array}\right)\end{aligned}\tag{1.10}$$

1.1.5 $U(1)'$ Erweiterung des Standardmodells

Das Standard Modell $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1)$ erweitern wir jetzt um eine weitere $U(1)'$ Gruppe mit Eichboson C , dimensionsloser Kopplung g_H und „Massenladung“ \mathbf{Y}_H .

Zusätzliche $U(1)$ Gruppen treten in vielen Erweiterungen des Standardmodells*, wie zum Beispiel „grand unified Theories“ basierend auf $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1) \rightarrow \dots$, auf. Dabei schränkt ein Teil der Modelle natürlich die möglichen Parameter stark ein. Diese Vielzahl verschiedener Modelle, die zu weiteren $U(1)$ -Gruppen führen, kann man als Hinweis deuten, daß es vernünftig ist, daß Standard Modell entsprechend zu erweitern. Da wir uns nicht eindeutig auf ein übergeordnetes Modell festlegen wollen, nehmen wir keine Einschränkung der Parameter vor.

Für eine aktuelle Zusammenstellung der Grenzen der Massen für Eichbosonen weiterer $U(1)$ Gruppen, siehe die aktuelle Zusammenstellung der Physical Data Group [PDG98]. Mögliche

*Eine Auflistung einiger Modelle enthält der Artikel [EL99]

Effekte weiterer $U'(1)$ Gruppen an zukünftigen Beschleunigern, insbesondere LEP2, werden in Artikel [MPL⁺97] und [LR97] diskutiert.

Im Gegensatz zum Fall vorher muß \mathbf{Y}_H nicht diagonal sein. Diese nichtdiagonale Gestalt der Wechselwirkung führt natürlich zur Mischung verschiedener Leptonenflavor. Das Transformationsverhalten für Leptonen* unter der $U'(1)$ -Gruppe definieren wir wie folgt:

$$\psi_{\text{lepton}}(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)\mathbf{Y}_H} \psi_{\text{lepton}} \quad (1.11)$$

Um die Invarianz der Lagrangedichte zu erreichen gehen wir entsprechend wie in Abschnitt 1.1.2 vor. Wir führen ein weiteres Eichboson $C(x)$ ein und erhalten folgende Lagrangedichte[†]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{U(1)'}(x) &= -\frac{1}{4} (\mathbf{C}_{\mu\nu}(x)\mathbf{C}^{\mu\nu}(x)) + \bar{\Psi}_{\text{lepton}}(x) i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + ig_H \mathbf{C}_\lambda(x)\mathbf{Y}_H) \Psi_{\text{lepton}}(x) \\ \mathbf{C}_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \mathbf{C}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{C}_\mu(x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bei unseren Betrachtungen werden wir auch die Möglichkeit eines Massenterms für das Boson C , der Form $-M^2 C_\mu(x)C^\mu(x)$ in der Lagrangedichte, in Betracht ziehen. Da die Skala der Symmetriebrechung für die Gruppe $U(1)'$ bei höheren Energien liegen kann, als für die anderen Symmetrien des Standard Modells, scheint eine solche Annahme nicht unvernünftig zu sein.

1.1.6 Lagrangedichte des erweiterten Standardmodells

Wir fassen jetzt die Gleichungen (1.4), (1.7) und (1.12) für die Lagrangedichte ohne die Terme für die Quarks wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{W}^{\rho\lambda}(x)] - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{\mu\nu}(x)\mathbf{B}^{\mu\nu}(x)) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\mathbf{C}_{\mu\nu}(x)\mathbf{C}^{\mu\nu}(x)) - M^2 C_\mu(x)C^\mu(x) \\ &\quad + \bar{\Psi}_{\text{lepton}}(x) i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + ig\mathbf{W}_\lambda^a(x)\mathbf{T}_a + ig'\mathbf{B}_\lambda(x)\mathbf{Y} + ig_H \mathbf{C}_\lambda(x)\mathbf{Y}_H) \Psi_{\text{lepton}}(x) \end{aligned}$$

(1.13)

1.2 Anomalien des erweiterten Standardmodells

Die dargestellten Ergebnisse entsprechen dem Buch von S. Weinberg „The Quantum Theory of Fields Volume II Modern Applications“ S. 383 ff.[Wei96]. Im Gegensatz zu der Darstellung

*Die Transformation unter der $U(1)'$ Gruppe für die Quarks werden entsprechend definiert.

†Wie bereits gesagt ist die Kopplungskonstante g_H dimensionslos.

von Weinberg, wollen wir in dieser Arbeit die Existenz von rechtshändigen Neutrinos nicht ausschließen. Die Anomali ist proportional zu folgendem total symmetrischen Faktor $D_{\alpha\beta\gamma}$. Für die geeichten Ströme muß also gelten [GJ82]:

$$D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr} [\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma] = 0 \quad (1.14)$$

Dabei sind die T_α die Darstellungen der Eichgruppe auf den Fermionen bzw. Antifermionenfeldern.

Wir betrachten zuerst die Gruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, also die Eichgruppe des Standard Modells. Die Parameter y (siehe Gleichung (1.5)) der abelschen Gruppe $U(1)$, die wir im folgenden benötigen, werden wie in Tabelle 1.2 aufgelistet bezeichnet.

Quarks $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$: a	Leptonen $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$: d
\bar{u}_R : b	$\bar{\nu}_{eR}$: e
\bar{d}_R : c	\bar{e}_R : f

Tabelle 1.2: Zuordnung der Variablen a-f zu den Fermionen bzw. Antifermionen

Da die Gruppe $SU(2)$ nur reelle bzw. pseudoreelle Darstellungen besitzt, tritt keine Anomali auf. Die einzigen nicht trivialen Bedingungen für die Anomaliefreiheit der Theorie werden im folgenden aufgezählt*:

$SU(3) - SU(3) - U(1)$

$$\sum_{3, \bar{3}} y = 2a + b + c = 0 \quad (1.15)$$

$SU(2) - SU(2) - U(1)$

$$\sum_{\text{doublets}} y = 3a + d = 0 \quad (1.16)$$

$U(1) - U(1) - U(1)$

$$\sum y^3 = 6a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 2d^3 + e^3 + f^3 = 0 \quad (1.17)$$

*Dabei werden die Gruppen zu denen die Darstellungen gehören aufgelistet.

graviton – graviton – U(1)

$$\sum y = 6a + 3b + 3c + 2d + e + f = 0 \quad (1.18)$$

Die Bedingungen (1.15) bis (1.18) für die Anomaliefreiheit der Theorie können durch folgende Parameterwahl* erfüllt werden:

$$a, c, \quad b = -2a - c, d = -3a, e = 2a - c, f = 4a + c \quad (1.19)$$

oder

$$c, f, \quad b = -c, e = -f, a = d = 0 \quad (1.20)$$

Damit man die Ladungen der Teilchen im Standard Modell richtig beschreibt ist es notwendig, den Parameter e für das rechtshändige Neutrino gleich Null zu setzen. Man erhält also folgende Zuordnung der Parameter im Standard Modell:

$$a \quad b = -4a, c = 2a, d = -3a, e = 0, f = 6a \quad (1.21)$$

$$a = -\frac{1}{6} \quad b = +\frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}, d = +1, e = 0, f = -1 \quad (1.22)$$

Wenn wir unser Modell um eine weitere abelsche Gruppe $U(1)'$ mit Parametern y' erweitern, müssen wir folgende Bedingungen erfüllen (Die Zuordnung der Parameter $a' - f'$ erfolgt entsprechend der Zuordnung der Parameter $a - f$ auf Seite 22). Zusätzlich zu den Bedingungen (1.15)–(1.18) erhält man noch zwei weitere Bedingungen, die die Gruppe $U(1)$ mit der Gruppe $U(1)'$ koppeln.

SU(3) – SU(3) – U(1)'

$$\sum_{3, \bar{3}} y' = 2a' + b' + c' = 0 \quad (1.23)$$

SU(2) – SU(2) – U(1)'

$$\sum_{\text{doublets}} y' = 3a' + d' = 0 \quad (1.24)$$

*Dabei sind die Parameter links die freien Parameter, also bei Gleichung (1.19) die Parameter a und c , bzw. bei Gleichung (1.20) die Parameter c und f .

$U(1)' - U(1)' - U(1)'$

$$\sum y'^3 = 6a'^3 + 3b'^3 + 3c'^3 + 2d'^3 + e'^3 + f'^3 = 0 \quad (1.25)$$

graviton – graviton – $U(1)'$

$$\sum y' = 6a' + 3b' + 3c' + 2d' + e' + f' = 0 \quad (1.26)$$

$U(1) - U(1)' - U(1)'$

$$\sum yy'^2 = 6aa'^2 + 3bb'^2 + 3cc'^2 + 2dd'^2 + ee'^2 + ff'^2 = 0 \quad (1.27)$$

$U(1) - U(1) - U(1)'$

$$\sum y^2y' = 6a^2a'^2 + 3b^2b'^2 + 3c^2c' + 2d^2d' + e^2e' + f^2f' = 0 \quad (1.28)$$

Mit der speziellen Parameterwahl aus Gleichung (1.22) erhält man für die Gleichungen (1.27) und (1.28) folgende Bedingungen:

$$\sum yy'^2 = -a'^2 + 2b'^2 - c'^2 + d'^2 - f'^2 = 0 \quad (1.29)$$

$$\sum y^2y' = a' + 8b' + 2c' + 3d' + 6f' = 0 \quad (1.30)$$

Diese Bedingungen werden durch folgende Lösungen erfüllt:

$$a', c' \quad b' = -2a' - c', d' = -3a', e' = 2a' - c', f = 4a' + c' \quad (1.31)$$

$$c' \quad b' = e' = -f' = -c', a' = d' = 0 \quad (1.32)$$

Man sieht zwar, daß wegen $e = 0$ die Kopplung e' der rechtshändigen Neutrinos nur in Gleichung (1.25) und (1.26) vorkommen, aber es trotzdem Lösungen der Gleichungen mit $e' \neq 0$ gibt. Im folgenden werden wir nur noch die Lösung (1.31) betrachten.

Die Zuordnung der $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$ bzw. $U(1)'$ Hyperladungen ist in der Tabelle 1.3 auf Seite 25 zusammengefaßt.

Zum besseren Verständnis haben wir das Verhalten der Hyperladungen $U(1)'_\nu = 2 - \frac{c}{a}$ bzw. $U(1)'_e = 4 + \frac{c}{a}$ der Leptonen in Grafik 1.1 auf der Seite 25 dargestellt.

Wie man der Grafik entnehmen kann, gibt es vier Bereiche (I–IV) in denen jeweils andere Verhältnisse zwischen $U(1)'_\nu$ und $U(1)'_e$ auftreten. Da wir nur relative Aussagen treffen können, sieht man, daß wir keine Einschränkung für die Parameter finden. Selbst die Möglichkeit von sehr großen bzw. sehr kleinen Verhältnissen ist noch vorhanden.

Fermions	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	$U(1)'$
			Y	Y_H
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	$-\frac{1}{6}$	a'
u_R^*	$\bar{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-2a' - c'$
d_R^*	$\bar{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	c'
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	$\frac{1}{2}$	$2a' - c'$
ν_{eR}^*	1	1	0	$2a' - c'$
e_R^*	1	1	-1	$4a' + c'$

Tabelle 1.3: Zuordnung der $U(1)$ bzw. $U(1)'$ Hyperladungen

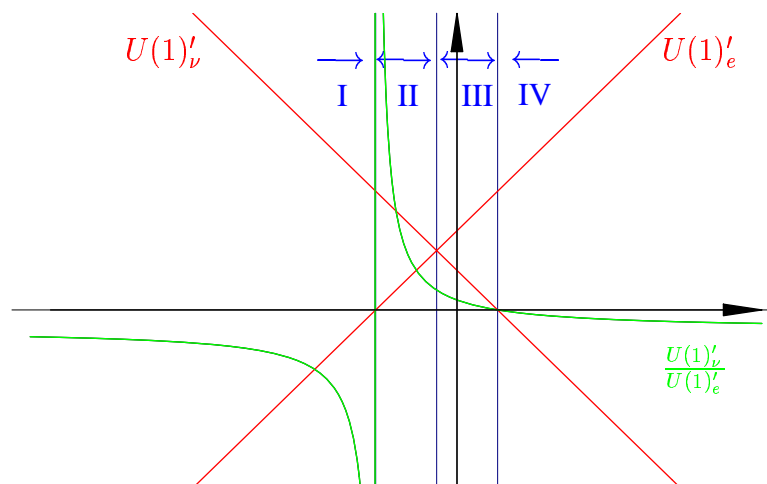


Abbildung 1.1: Qualitatives Verhalten der Parameter $U(1)'_\nu$ und $U(1)'_e$ und Qualitatives Verhalten des Quotienten $\frac{U(1)'_\nu}{U(1)'_e}$

1.3 Pfadintegral-Quantisierung und Feynman Regeln

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die Herleitung der für diese Arbeit notwendigen Beziehungen. Es genügt also den Fall eines Fermionenspinors ψ , eines $U(1)$ Eichbosons A_μ und

des Vertexes zwischen ψ und A^μ zu betrachten. Zum besseren Verständniss behandeln wir auch noch den Fall eines skalaren Feldes. Für eine allgemeine Einführung empfiehlt sich das Buch von L. H. Ryder [Ryd96]. Die Feynman Regeln sind im Anhang A.3 auf Seite 80 zusammengestellt. Wichtig in diesem Abschnitt sind ausserdem die Herleitung der Ward-Takahashi Identität in Abschnitt 1.3.4 und der Dyson-Schwinger Gleichung in 1.3.6.

1.3.1 Feynman-Regeln für ein freies skalares Feld ϕ

Wir betrachten ein skalares Feld, daß an einen äußeren Strom j koppelt*.

$$\mathcal{L}_{\text{skalar}}(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x)) + \phi(x) j(x) + \frac{i}{2} \epsilon \phi^2(x) \quad (1.33)$$

Damit finden wir folgendes erzeugendes Funktional†:

$$Z_0[j] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x (\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - (m^2 - i\epsilon) \phi^2(x)) + \phi(x) j(x))} \quad (1.34)$$

Es gilt, wenn die Oberflächenterme im Unendlichen verschwinden:

$$\int d^4x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) = - \int d^4x \phi(x) \square \phi(x) \quad (1.35)$$

Damit finden wir also:

$$Z_0[j] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-i \int d^4x (\frac{1}{2} \phi(x) (\square + (m^2 - i\epsilon)) \phi(x) - \phi(x) j(x))} \quad (1.36)$$

Wenn wir jetzt $\phi(x)$ als $\phi'(x) + \phi_0(x)$ schreiben, und $\phi_0(x)$ die Gleichung

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \phi_0(x) = j(x) \quad (1.37)$$

erfüllt, findet man folgende Lösung für $\phi_0(x)$:

$$\phi_0(x) = - \int d^4y \Delta_F(x - y) j(y) \quad (1.38)$$

mit dem Feynman Propagator $\Delta_F(x)$ definiert wie folgt:

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (1.39)$$

*Der Term $\sim i\epsilon$ ist zum verschieben der Pole von der reellen Achse notwendig

†Dieses Funktional ist einfach die Vakuum zu Vakuum Übergangsamplitude $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^j$

Wie man sieht besitzt der Feynman Propagator folgende Fourier Darstellung:

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.40)$$

bzw. folgende Impulsdarstellung

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.41)$$

Wir finden also für den Exponenten von unserem erzeugenden Funktional (1.36)

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi(x) - \phi(x) j(x) \right] \xrightarrow{\phi \rightarrow \phi' + \phi_0} \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi'(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi'(x) + \phi'(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi_0(x) \right) \quad (1.42)$$

$$+ \frac{1}{2} \phi_0(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi_0(x) - \phi'(x) j - \phi_0(x) j(x) \\ = - \frac{1}{2} \int d^4x \left(\phi'(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi'(x) + \phi_0(x) j(x) \right) \quad (1.43)$$

Wenn wir jetzt $N = \int \mathcal{D}\phi'(x) \exp[-\frac{i}{2} \phi'(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \phi'(x)]$ wählen, finden wir als erzeugendes Funktional $Z_0[j]$:

$$Z_0[j] = e^{-\frac{i}{2} \int dx dy j(x) \Delta_F(x-y) j(y)} \quad (1.44)$$

Die Funktion $Z_0[j]$ ist das erzeugende Funktional für die Green Funktionen des freien skalaren Teilchens ϕ . Betrachtet man $Z_0[j]$ im Impulsraum, findet man:

$$Z_0[j] = e^{\frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4k \frac{j(-k)j(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (1.45)$$

Die n-Punkt Funktionen τ sind wie folgt definiert:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)) | 0 \rangle \\ = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n Z_0[j]}{\partial j(x_1) \partial j(x_2) \dots \partial j(x_n)} \Big|_{j=0} \quad (1.46)$$

Für den Propagator* finden wir in Impulsdarstellung:

$$\tau(p, k) = i \Delta_F(p - k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.47)$$

*Auch zwei-Punkt Funktion genannt

1.3.2 Feynman-Regeln für ein freies Spinor Feld ψ

$$\mathcal{L}_{\text{Spinor}}(x) = i\bar{\psi}(x) \not{\partial}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + i\epsilon\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (1.48)$$

Dabei ist ψ ein Spinorfeld, $\bar{\eta}$ Quellterm für ψ und η Quellterm für $\bar{\psi}$. Bei η und $\bar{\eta}$ handelt es sich um grassmannwertige Felder, deren Rechenregeln in Anhang A.4 zusammengestellt sind. Setzen wir jetzt:

$$Q(\psi, \bar{\psi}) \equiv \bar{\psi}(x)(i \not{\partial} - (m - i\epsilon))\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \quad (1.49)$$

Das Minimum von Q findet man bei:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\min}(x) &= - \int d^4y \bar{\eta}(y) S(x-y) \\ \psi_{\min}(x) &= - \int d^4y S(x-y) \eta(y) \end{aligned} \quad (1.50)$$

mit:

$$\begin{aligned} S(x) &= (i \not{\partial} - (m - i\epsilon))^{-1} \\ (i \not{\partial} - (m - i\epsilon))S(x) &= \delta^4(x) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Wenn man (1.51) mit Gleichung (1.39) für das skalare Teilchen vergleicht, findet man folgende Lösung für die Funktion $S(x)$:

$$S(x) = (i \not{\partial} + m)\Delta_F(x) \quad (1.52)$$

bzw. in Impulsdarstellung:

$$S(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.53)$$

Setzen wir:

$$Q_{\min}(x) = Q(\psi_{\min}, \bar{\psi}_{\min}) = - \int d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \quad (1.54)$$

Damit können wir $Q(x)$ wie folgt ausdrücken:

$$Q(x) = Q_{\min}(x) + (\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_{\min}(x))(i \not{\partial} - (m - i\epsilon))(\psi(x) - \psi_{\min}(x)) \quad (1.55)$$

und finden für das erzeugende Funktional:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (Q_{\min}(x) + (\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_{\min}(x))(i\partial - (m - i\epsilon))(\psi(x) - \psi_{\min}(x)))} \quad (1.56)$$

$$= \frac{1}{N} e^{i \int d^4x Q_{\min}} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_{\min}(x))(i\partial - (m - i\epsilon))(\psi(x) - \psi_{\min}(x))} \quad (1.57)$$

Mit Hilfe der Rechenregel (A.21) von Seite 82 findet man:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x)} \det(i \not{\partial} - (m - i\epsilon)) \quad (1.58)$$

Wählen wir jetzt $\det(i \not{\partial} - (m - i\epsilon)) = N$, finden wir für das erzeugende Funktional:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x)} \quad (1.59)$$

Wir finden nun für den freien Propagator des Spinor - Feldes, in Analogie mit der Gleichung (1.47):

$$\tau(x, y) = \left. \frac{-\partial^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\partial \eta(x) \partial \bar{\eta}(y)} \right|_{\eta = \bar{\eta} = 0} = iS(x - y) \quad (1.60)$$

1.3.3 Feynman-Regeln für ein U(1) Eichfeld

$$\mathcal{L}_{Eichboson} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad \text{mit } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.61)$$

Als erzeugendes Funktional findet man

$$Z[j] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu + i\epsilon A^\mu A_\mu)} \quad (1.62)$$

Wenn wir uns jetzt die Variation der Lagrange Dichte betrachten, finden wir:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu \quad (1.63)$$

Nach der partiellen Integration erhält man, wenn man keine Oberflächenterme berücksichtigt:

$$\mathcal{L}_{Eichboson} = \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu \quad (1.64)$$

Im Gegensatz zu den vorher betrachteten Fällen besitzt der Operator $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ jedoch kein Inverses. Dieses Problem liegt darin begründet, daß die Felder A_μ noch eine Eichfreiheit $A_\mu \rightarrow$

$A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ besitzen, und die Integration über alle Felder A_μ erfolgt, also auch solche Felder A_μ die sich nur durch eine Eichtransformation unterscheiden. Um dieses Problem zu beseitigen, muß man eine bestimmte Eichung festlegen. Addieren wir zu der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Eichboson}}$ noch folgenden, die Eichung fixierenden Term $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$, mit einem festen α , dann finden wir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu(x) \quad (1.65)$$

Definieren wir jetzt:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x) &= \left(g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right)^{-1} \\ \left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) D_{\mu\nu}(x) &= \delta^4(x) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Wenn man wieder mit der Gleichung (1.39) für das skalare Teilchen vergleicht, findet man folgende Lösung* für den Propagator $D_{\mu\nu}(x)$:

$$D_{\mu\nu}(x) = - \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Delta_F(x) \Big|_{m=0} \quad (1.67)$$

Wenn wir jetzt die Herleitung der zwei Punkt Funktion ähnlich wie im Abschnitt 1.3.1 vornehmen[†], finden wir für das erzeugende Funktional:

$$Z[j^\mu] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j^\mu(y) D_{\mu\nu}(x-y) j^\nu(x)} \quad (1.68)$$

und den Propagator:

$$\tau_{\mu\nu}(x, y) = i D_{\mu\nu}(x - y) \quad (1.69)$$

bzw. in Impulsdarstellung[‡]:

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu}(p, k) &= i D_{\mu\nu}(p - k) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - k)^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{1}{(p - k)^2} \right) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Wenn wir die gleiche Herleitung für ein massives Feld A_μ durchführen, also mit zusätzlichem Massenterm $-M^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$, finden wir für den Propagator in Impulsdarstellung:

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu}^M(p, k) &= i D_{\mu\nu}^M(p - k) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - k)^2 + M^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{1}{(p - k)^2 - \alpha M^2} \right) \end{aligned} \quad (1.71)$$

*Im Gegensatz zum skalaren Teilchen haben wir hier die Masse = 0 gesetzt.

† Wir verzichten auf die Einführung der Faddeev-Popov Geister, da diese im Fall der QED nur zu einer Konstanten führen (Die Strukturkonstanten der Eichgruppe $U(1)$ sind Null).

‡ Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ werden in der Klammer vernachlässigt.

1.3.4 Ward-Takahashi Identität

Betrachten wir als Wechselwirkendes System die QED, mit einem masselosen Eichboson $A_\mu(x)$ und einem massiven Spinor $\psi(x)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 + j^\mu(x)A_\mu(x) \\ & + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Für das erzeugende Funktional $Z[j, \eta, \bar{\eta}]$ finden wir also:

$$Z[j, \eta, \bar{\eta}] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}} \quad (1.73)$$

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} ist, wenn wir die Eichfixierung $\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2$ und die Quellterme $j^\mu(x)A_\mu(x)$, $\bar{\eta}\psi$ und $\bar{\psi}\eta$ nicht berücksichtigen, invariant unter der folgenden Eichtransformation:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) & \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \\ \psi(x) & \rightarrow \psi(x) - ie\Lambda(x)\psi \\ \bar{\psi}(x) & \rightarrow \bar{\psi}(x) + ie\Lambda(x)\bar{\psi} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Das erzeugende Funktional $Z[j, \eta, \bar{\eta}]$ ist nicht invariant unter dieser Transformation, es sei denn, wir fordern, daß:

$$\left[\frac{i}{\alpha} \square \partial^\mu \frac{\partial}{\partial j^\mu} - \partial^\mu j_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] Z[j, \eta, \bar{\eta}] = 0 \quad (1.75)$$

ist, wobei wir die Felder ψ , $\bar{\psi}$ und A_μ wie folgt ausgedrückt haben:

$$\psi(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad A_\mu(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j^\mu}$$

Wenn wir jetzt $Z = e^{iW}$ setzen, können wir diese Gleichung auch mit der Funktion $W(j, \eta, \bar{\eta})$ schreiben.

$$-\frac{i}{\alpha} \square \partial^\mu \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial j^\mu} - i \partial^\mu j_\mu - ie \left(\bar{\eta} \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} - \eta \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.76)$$

Drücken wir diese Gleichung jetzt durch die Vertexfunktion

$$\Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) = W(j, \eta, \bar{\eta}) - \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + j^\mu A_\mu) \quad (1.77)$$

aus und beachten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial A_\mu(x)} &= -j^\mu(x) & \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial j_\mu(x)} &= A^\mu(x) \\
\frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \psi(x)} &= -\bar{\eta}(x) & \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}(x)} &= \psi(x) \\
\frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x)} &= -\eta(x) & \frac{\partial W(j, \eta, \bar{\eta})}{\partial \eta(x)} &= \bar{\psi}(x)
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Wir finden also für Gleichung (1.76):

$$-\frac{\square}{\alpha} \partial^\mu A_\mu(x) + i \partial^\mu \frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial A_\mu(x)} + i e \psi(x) \frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \psi(x)} - i e \bar{\psi}(x) \frac{\partial \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x)} = 0 \tag{1.79}$$

Wenn wir diese Gleichung nach $\bar{\psi}(x_1)$ und $\psi(y_1)$ differenzieren* und $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$ setzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-i \partial_x^\mu \frac{\partial^3 \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x_1) \partial \psi(y_1) \partial A_\mu(x)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=A_\mu=0} &= i e \delta(x - y_1) \frac{\partial^2 \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x_1) \partial \psi(y_1)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=A_\mu=0} \\
&\quad - i e \delta(x - x_1) \frac{\partial^2 \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x_1) \partial \psi(y_1)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=A_\mu=0}
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Wir finden also, daß die Ableitung des einteilchen-irreduziblen Elektronen-Photonen Vertex gleich dem Inversen der Elektronenpropagatoren ist. Drücken wir diese Beziehungen im Impulsraum aus[†],

$$\int \frac{dx dx_1 dy_1}{((2\pi)^4)^3} e^{-i(-kx_1 + py_1 - qx)} \frac{\partial^3 \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x_1) \partial \psi(y_1) \partial A_\mu(x)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=A_\mu=0} = i(2\pi)^4 \delta(p - k - q) \tilde{\Gamma}_\mu(p, k, q) = i(2\pi)^4 \delta(p - k - q) \Gamma_\mu(p, k) \tag{1.81}$$

$$\int \frac{dx_1 dy_1}{((2\pi)^4)^2} e^{-i(-kx_1 + py_1)} \frac{\partial^2 \Gamma(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)}{\partial \bar{\psi}(x_1) \partial \psi(y_1)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=A_\mu=0} = i(2\pi)^4 \delta(p - k) S'^{-1}(p) \tag{1.82}$$

finden wir die Ward-Takahashi Identität[‡]:

$$\boxed{(p - k)^\mu \Gamma_\mu(p, k) = S'^{-1}(p) - S'^{-1}(k)} \tag{1.83}$$

*Zur Berechnung muß man die Rechenregeln für grassmannwertige Felder aus dem Anhang A.4 berücksichtigen.

[†]Dabei nutzen wir aus, daß wegen den auftretenden δ Distributionen man die Abhängigkeit von einer Impulsvariablen in Γ und S'^{-1} vernachlässigen kann.

[‡]Der exakte inverse Propagator wird mit S'^{-1} bezeichnet um ihn vom freien Propagator S^{-1} aus Abschnitt 1.3.2 zu unterscheiden

Wenn wir den Grenzwert $q^\mu = p^\mu - k^\mu \rightarrow 0$ bilden, finden wir die Ward Identität:

$$\boxed{\frac{\partial S'^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p, p)} \quad (1.84)$$

1.3.5 Vertexfunktion

Zur Herleitung der Vertexfunktion $i\Gamma_\mu$ für die masselose QED in Impulsdarstellung beginnen wir mit Gleichung (1.81). Nähern wir jetzt noch den Fermion Propagator S'^{-1} durch den freien Propagator S^{-1} (1.60) finden wir

$$(p - k)^\mu i\Gamma_\mu(p, k) = i(2\pi)^4(\gamma^\mu p_\mu - m) - i(2\pi)^4(\gamma^\mu k_\mu - m) \quad (1.85)$$

$$\implies i\Gamma_\mu(p, k) = i(2\pi)^4\gamma_\mu \quad (1.86)$$

Wir finden also für die Vertexfunktion in der sogenannten „rainbow“ Näherung den Ausdruck $i(2\pi)^4\gamma_\mu$.

1.3.6 Dyson-Schwinger Gleichung

Betrachten wir nun die effektive Lagrangedichte der masselosen QED aus Abschnitt 1.3.4 und ignorieren alle Terme $\sim \epsilon$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{eff}}(x) = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 + j^\mu(x)A_\mu(x) \\ & + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \end{aligned} \quad (1.87)$$

Wenn wir den Wechselwirkungsterm abspalten, finden wir für das generierende Funktional Z^{QED} :

$$\begin{aligned} Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = & \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{ie \int d^4x \bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)} \\ & e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \right)} \end{aligned} \quad (1.88)$$

Wenn wir in der ersten Exponentialfunktion im Exponent die Felder $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ und $A_\mu(x)$ wie folgt durch Ableitungen ersetzen

$$\psi(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j^\mu(x)}$$

und Integration und Differentiation tauschen, findet man:

$$\begin{aligned} Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = & e^{ie \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} \right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j^\mu(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} \right)} \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\ & e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \right)} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Wie man leicht erkennt, enthält das Integral, das wir im folgenden mit $Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu]$ bezeichnen wollen, nur die Beiträge der freien Theorie für Spinoren bzw. Eichbosonen. Setzen wir unsere Lösungen (1.59) von Seite 29 für Spinoren und (1.68) von Seite 30 für Eichbosonen ein, finden wir:

$$Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = e^{ie \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)}\right) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right)} e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j^\mu(y) D_{\mu\nu}(x-y) j^\nu(x)} \quad (1.90)$$

Das freie erzeugende Funktional $Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu]$ erfüllt jetzt folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} & (i \not{\partial} - m) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \\ &= (i \not{\partial} - m) \frac{-i}{i} \int d^4x' S(x' - x) \eta(x') Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = -\eta(x) Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} & - \left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)} Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \\ &= - \left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{-i}{2i} \int d^4x' D_{\mu\nu}(x' - x) j^\mu(x') Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \\ &= +j^\mu(x) Z_0^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \end{aligned} \quad (1.92)$$

Wenn wir jetzt in Gleichung (1.90) die Exponentialfunktion auf die linke Seite ziehen, die Gleichung mit dem Operator $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(y)} + \eta(x)$ multiplizieren, und die Gleichung (1.91) berücksichtigen, erhalten wir:

$$\left((i \not{\partial} - m) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \right) e^{-ie \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)}\right) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right)} Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = 0 \quad (1.93)$$

Somit finden wir, wenn wir die Exponentialfunktion an dem Operator vorbeiziehen und die Rechenregeln für grassmanwertige Felder aus dem Anhang A.4 berücksichtigen:

$$\left(\left((i \not{\partial} - m) + e\gamma_\mu \left(\frac{-1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)} \right) \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \right) Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = 0 \quad (1.94)$$

bzw. wenn wir Gleichung (1.90) mit dem Operator $\left(- \left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\nu(x)} - j^\mu(x) \right)$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} & \left(- \left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\nu(x)} - j^\mu(x) \right) \\ & e^{-ie \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)}\right) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)}\right)} Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

Somit finden wir:

$$\left(\left(g_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\nu(x)} - e \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} \right) - j^\mu(x) \right) Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] = 0 \quad (1.96)$$

Zur weiteren Betrachtung der Theorie kann man jetzt auch diese Gleichungen benutzen. Wir interessieren uns im folgenden insbesondere für die Gleichung (1.94). Bilden wir jetzt die Ableitung nach $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(y)}$ und setzen die äußeren Ströme gleich Null, erhalten wir:

$$\left((i \not{\partial} - m) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(y)} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} + e \gamma_\mu \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(y)} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial j_\mu(x)} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}(x)} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \eta(x) \right) Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu] \Big|_{A_\mu = \eta = \bar{\eta} = 0} = 0 \quad (1.97)$$

Wenn man beachtet, daß $\frac{\partial}{\partial \eta(y)} \eta(x) = \delta(x - y) - \eta(x) \frac{\partial}{\partial \eta(y)}$ ist und durch $Z^{\text{QED}}[\eta, \bar{\eta}, j^\mu]$ dividieren, findet man:

$$i(i \not{\partial} - m)S(x - y) - ie^2 \int d^4 z d^4 x' d^4 y' \gamma_\mu D^{\mu\nu}(x, z) S(x - x') \Gamma_\nu(z, x', y') S(y - y') - i\delta^4(x - y) = 0 \quad (1.98)$$

Wenn wir die $\delta^4(x - y)$ Distribution wie folgt interpretieren

$$(i \not{\partial} - m - \Sigma(x - y))S(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (1.99)$$

Finden wir also im Impulsraum:

$$-\Sigma(p) = -ie^2 \int d^4 k \gamma_\mu S(k) \Gamma_\mu(p, k) D^{\mu\nu}(p - k)$$

(1.100)

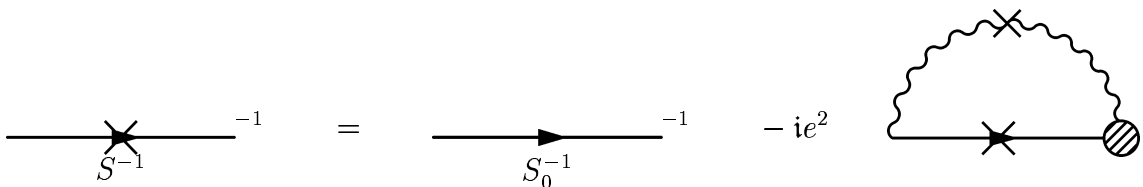


Abbildung 1.2: Dyson-Schwinger Gleichung

Die Gleichung ist in Grafik 1.2 dargestellt. Man sieht, daß in dieser Gleichung mehrere unbekannte Funktionen, nämlich der volle Fermionen-Propagator, der volle Bosonen-Propagator und die volle Vertex-Funktion, auftreten. Die unbekannte Funktion des Boson-Propagators bzw. des Vertex erfüllt auch eine Dyson-Schwinger Gleichungen, die wir im Prinzip nutzen könnten, um die Funktionen zu bestimmen. Leider benötigen wir zur Lösung dieser Gleichung die Lösung der Gleichung für den Fermionenpropagator. Daher konstruieren wir im Prinzip eine unendliche Menge gekoppelter Gleichungen.

Diese Form der Gleichungen ist nicht zu lösen. Daher ist es nötig die beteiligten Funktionen geeignet zu nähern. Eine übliche Näherung, die sogenannte „rainbow“ Näherung, ist es den Vertex $i\Gamma_\mu(p, k)$ durch den nackten Vertex $i(2\pi)^4\gamma_\mu$ zu ersetzen. Da diese Näherung im Allgemeinen die Ward Identitäten verletzt, ist es notwendig, in dieser Näherung weitere Einschränkungen in Kauf zu nehmen. Wir werden uns im Hauptteil der Arbeit näher mit diesem Problem befassen.

Kapitel 2

Symmetriebrechung

Im Allgemeinen spricht man von spontaner Symmetriebrechung, wenn die Symmetrie der Wirkung höher ist, als die Symmetrie des Grundzustandes. Wir werden im folgenden dieses Phänomen in der Quantenfeldtheorie näher betrachten.

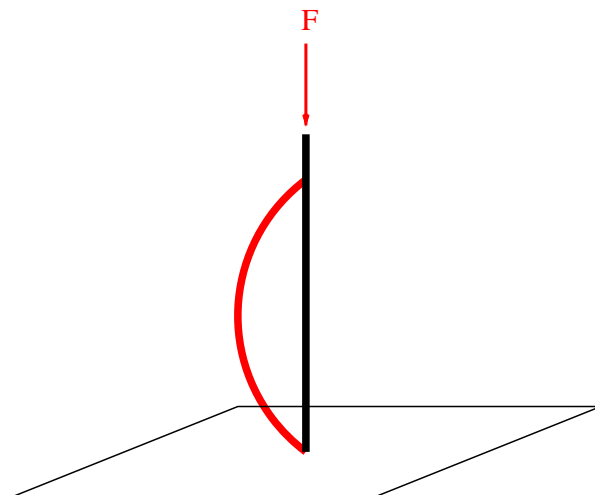


Abbildung 2.1: Gespannter dünner Stock

Betrachten wir jedoch zuerst das folgende einfache physikalische Beispiel* in Grafik 2.1. Dabei handelt es sich um einen runden Stab, der vertikal auf einem Tisch steht. Üben wir von oben eine Kraft F auf den Stab aus, passiert solange die Kraft klein ist, nichts. Übersteigt die Kraft einen kritischen Wert wird sich der Stab, wie in der Grafik angedeutet verbiegen, und willkürlich eine Ebene senkrecht zum Tisch auswählen. Die symmetrische Konfiguration wird also instabil, wenn die Kraft F einen kritischen Wert überschreitet.

*Das Beispiel stammt aus dem Buch von L. H. Ryder Quantum Field Theory [Ryd96]

Ein weiteres Beispiel für die Wichtigkeit der spontanen Symmetriebrechung sieht man in Effekten der Festkörpertheorie, wie zum Beispiel der Supraleitung. Wenn man die BCS-Theorie von J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schieffer [BCS57], insbesondere in der Formulierung von N. N. Bogoliubov [Bug58a, Bug58b], für die Supraleitung betrachtet, sieht man, daß durch Phononen vermittelte Wechselwirkung zwischen Elektronen ein korreliertes Paar Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und Spin in der Nähe der Fermi-Kante entsteht, wenn die Temperatur kleiner als eine kritische Temperatur ist. Eine wichtige Eigenschaft ist, daß eine Energielücke zwischen dem Supraleitenden Grundzustand und dem angeregten Zustand entstehen.

Diese Eigenschaften der Supraleitung regte zum Beispiel Y. Nambu [Nam60], bzw. mit J. Jonas-Lasinio zusammen [NJL61] an, es zu versuchen, ein dynamisches Modell der Elementarteilchen Physik zu entwerfen, indem man die Energielücke mit der Masse von Elementarteilchen identifiziert. Diese Analogie hat jedoch ihre Probleme und wir werden diese Analogie in dieser Arbeit nicht weiter ausführen, und einen mehr formalen Zugang zu dem Effekt der Symmetriebrechung in der Quanten Feld Theorie wählen.

2.1 Goldstone Theorem

Das folgende Theorem wurde von J. Goldstone [Gol61] vorgeschlagen, und von J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg [GSW62] bewiesen.

Theorem 2.1 (Goldstone Theorem)

Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:

- (i) Die betrachtete Theorie sei Poincaré invariant, das heißt Lorentz invariant und invariant unter linearen Verschiebungen
- (ii) Es existiere ein zu einer Lie Gruppe \mathcal{G} gehörender erhaltener Strom j_μ mit $\partial^\mu j_\mu = 0$
- (iii) Die Symmetrie von $Q \equiv \int d^3x j_{\mu=0}(x)$ sei spontan gebrochen, das heißt, es gelte, daß der Kommutator der Ladung mit lokalen Feldern ϕ_k nicht verschwindet*.

$$- \langle 0 | [iQ, \phi_k(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \delta \phi_k(x) | 0 \rangle \neq 0$$

Dann existiert ein masseloses Teilchen, das Nambu-Goldstone Teilchen, im Spektrum der Theorie, das an den Strom j_μ koppelt.

Einige Bemerkungen:

Das Nambu-Goldstone Theorem macht die Aussage, daß ein masseloses Teilchen existiert, sagt aber nichts darüber aus, ob das Teilchen im physikalischen Spektrum der Theorie auftritt.

*Oft drückt man diesen Sachverhalt einfach aus, daß $Q|0\rangle \neq 0$ ist. Dabei tritt jedoch das Problem auf, daß die Wirkung von Q auf das Vakuum nicht „wohldefiniert“ ist.

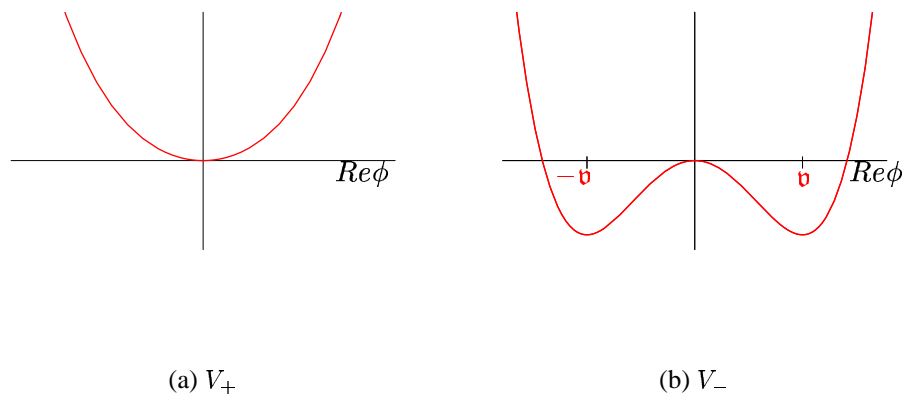


Abbildung 2.2: Verschiedene Potentialformen

Wenn die ursprüngliche Symmetriegruppe \mathcal{G} der Theorie vom Vakuum bis auf die Untergruppe \mathcal{H} spontan gebrochen wird, entspricht die Anzahl der Nambu-Goldstone Teilchen gerade der Dimension des Quotientenraums $\dim \mathcal{G}/\mathcal{H} = \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{H}$.

2.1.1 Goldstone Modell

$$\mathcal{L}_{\text{goldstone}} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - V(\phi(x), \phi^\dagger(x)) \quad (2.1)$$

mit Potential (Siehe auch Grafik 2.2 für die Fälle V_+ bzw. V_-)

$$V_\pm(\phi(x), \phi^\dagger(x)) = \pm \frac{\mu^2}{2} \phi^\dagger(x) \phi(x) + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger(x) \phi(x))^2 \quad \text{mit } \mu^2, \lambda > 0 \quad (2.2)$$

Das System besitzt folgende globale $U(1)$ Symmetrie:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x); \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x) \quad (2.3)$$

Wie man sieht, ist die Lagrangedichte mit dem Potential V_\pm invariant unter dieser globalen Phasentransformation. Wenn man das Potential näher betrachtet, sieht man, daß im Fall V_+ nur ein Minimum bei $x = 0$ und im Fall V_- ein Sattelpunkt bei $x = 0$ und ein entartetes Minimum bei $2\phi^\dagger\phi = v := \frac{\mu^2}{\lambda}$ auftritt. Im Fall V_- ist das Vakuum also bei $x = 0$ nicht stabil. Nur in diesem Fall, den wir im folgenden näher untersuchen, tritt spontane Symmetriebrechung auf.

Wenn wir jetzt $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ schreiben und als Grundzustand folgendes spezielle Vakuum auswählen

$$\phi_1 = v \quad \phi_2 = 0 \quad (2.4)$$

und folgende neue Felder

$$\varphi_1(x) = \phi_1(x) - \mathbf{v} \quad \varphi_2(x) = \phi_2(x) \quad (2.5)$$

eingeführen, finden wir unter Beachtung der Nebenrechnungen aus Anhang B.1 insbesondere der Gleichungen (B.3) und (B.4) die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{goldstone}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1(x) \partial^\mu \varphi_1(x) + \partial_\mu \varphi_2(x) \partial^\mu \varphi_2(x)) - \frac{\lambda}{4} \left((\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + 2\varphi_1(x)\mathbf{v})^2 - \mathbf{v}^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1(x) \partial^\mu \varphi_1(x) - 2\mu^2 \varphi_1^2(x)) + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2(x) \partial^\mu \varphi_2(x) \\ &\quad - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \varphi_1(x) (\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x))^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wir finden also in dieser Theorie ein massives Feld φ_1 mit Masse $\sqrt{2}\mu$ und ein masseloses Feld φ_2 , das Nambu Goldstone Teilchen.

2.1.2 Abelsches Higgs-Modell

Wir untersuchen nur den Fall des abelschen Higgs-Modell. Bei diesem Modell handelt es sich einfach um das geeichte Goldstone Modell aus Abschnitt 2.1.1. Die Lagrangedichte ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{higgs}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi(x))^\dagger D^\mu \phi(x) - V(\phi(x), \phi^\dagger(x)) \\ D_\mu \phi(x) &= \partial \phi(x) + ig A_\mu \phi(x); \quad (D_\mu \phi(x))^\dagger = \partial \phi^\dagger(x) - ig A_\mu \phi^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit dem Potential*

$$V(\phi(x), \phi^\dagger(x)) = -\frac{\mu^2}{2} \phi^\dagger(x) \phi(x) + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger(x) \phi(x))^2 \quad \text{mit } \mu^2, \lambda > 0 \quad (2.8)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter folgender lokalen $U(1)$ Transformation:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x); \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi^\dagger(x) \\ D_\mu \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x); \quad D_\mu \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} D_\mu \phi^\dagger(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - g^{-1} \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Das Minimum ist wie zuvor durch $2\phi^\dagger \phi = \mathbf{v} := \frac{\mu^2}{\lambda}$ gegeben. Wir ersetzen jetzt die komplexen Felder ϕ und ϕ^\dagger wie folgt:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x) e^{i\Theta(x)} \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x) e^{-i\Theta(x)} \quad (2.10)$$

*Wir betrachten nur den Fall mit dem negativen Vorzeichen, der zur Symmetriebrechung führt.

Die neuen Felder $\rho(x)$, $\Theta(x)$ verhalten sich unter der lokalen $U(1)$ Transformation wie folgt:

$$\rho(x) \rightarrow \rho(x); \quad \Theta(x) \rightarrow \Theta(x) + \alpha(x) \quad (2.11)$$

Es gilt offensichtlich für das Potential:

$$V(\phi, \phi^\dagger) \simeq V(\rho) = -\frac{\mu^2}{2}\rho^2(x) + \frac{\lambda}{4}\rho^4(x) \quad (2.12)$$

Wenn wir jetzt den Grundzustand, das Vakuum, wie folgt wählen

$$\rho = \mathbf{v}; \quad \theta = 0 \quad (2.13)$$

und folgendes verschobene Feld einführen

$$\rho'(x) = \rho(x) - \mathbf{v} \quad (2.14)$$

finden wir folgende Lagrangedichte, wenn man die Nebenrechnungen aus Anhang B.2, insbesondere (B.8) und (B.10), berücksichtigt und $\rho(x)$ durch $\rho'(x)$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{higgs}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\rho'(x) + \mathbf{v})^2 (\partial_\mu\alpha(x) + gA_\mu) (\partial^\mu\alpha(x) + gA^\mu) \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho'(x)\partial^\mu\rho'(x) + \frac{\mu^2}{2}(\rho'(x) + \mathbf{v})^2 - \frac{\lambda}{4}(\rho'(x) + \mathbf{v})^4 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wenn wir jetzt die Eichfreiheit (2.11) ausnützen, und $\alpha(x) = 0$ (unitäre Eichung) wählen, finden wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{higgs}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2\mathbf{v}^2 A_\mu A^\mu + g\mathbf{v}\rho'(x)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}g^2\rho'^2(x)A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho'(x)\partial^\mu\rho'(x) - 2\mu^2\rho'^2(x) + \frac{\lambda}{4}\rho'^4(x) + \sqrt{\lambda}\mu\rho'^3(x) + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wir finden in diesem Modell nach der Symmetriebrechung zwei massive Felder, nämlich ein massives Photon A_μ mit Masse $\frac{1}{\sqrt{2}}g\mathbf{v}$ und ein skalares Feld $\rho'(x)$ mit Masse $\sqrt{2}\mu$. Das Nambu-Goldstone Boson ist aus der Lagrangedichte verschwunden. Dies ist kein Widerspruch zum Goldstone Theorem [2.1], da durch die Wahl der Eichung $\alpha(x) = 0$ alle Spuren der $U(1)$ Symmetrie aus der Lagrangedichte verschwunden sind, und damit das Theorem nicht mehr anwendbar ist. Eine genauere Untersuchung des Problems zeigt, daß in allgemeiner Eichung das Nambu-Goldstone Teilchen vom physikalischen Teil des Spektrums abkoppelt.

2.1.3 Lineares σ Modell

Betrachten wir nochmal das Goldstone Modell 2.1.1 mit zusätzlicher $U_L(1) \times U_R(1)$ invarianter Wechselwirkung mit einem Fermion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sigma}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1(x) \partial^\mu \phi_1(x) + \partial_\mu \phi_2(x) \partial^\mu \phi_2(x)) - V(\phi_1, \phi_2) \\ & + i\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) - \sqrt{2}g(\phi_1(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) - \phi_2(x) \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit Potential:

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad \text{mit } \mu^2, \lambda > 0 \quad (2.18)$$

Wegen der geforderten Invarianz unter der $U_R(1) \times U_L(1)$ Transformation, müssen die Felder ϕ_1 und ϕ_2 wie folgt transformieren:

$$\phi_1(x) \sim -\bar{\psi}(x) \psi(x) \quad \phi_2(x) \sim \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x) \quad (2.19)$$

Es handelt sich bei $\phi_1(x)$ um ein skalares und bei $\phi_2(x)$ um ein pseudoskalares Feld. Wählen wir das Vakuum $\phi_1 = \mathbf{v}$ und $\phi_2 = 0$ und führen folgende neue Felder ein:

$$\sigma(x) = \phi_1(x) - \mathbf{v} \quad \kappa(x) = \phi_2(x) \quad (2.20)$$

finden wir folgende Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sigma}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - 2\mu^2 \sigma^2(x)) + \frac{1}{2} \partial_\mu \kappa(x) \partial^\mu \kappa(x) - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \sigma(x) (\sigma^2(x) + \kappa^2(x)) \\ & - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2(x) + \kappa^2(x))^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda} + i\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) \\ & - \sqrt{2}g ((\sigma(x) + \mathbf{v}) \bar{\psi}(x) \psi(x) - \kappa(x) \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sigma}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - 2\mu^2 \sigma^2(x)) + \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - \sqrt{2}g\mathbf{v}) \psi(x) \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \kappa(x) \partial^\mu \kappa(x) - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \sigma(x) (\sigma^2(x) + \kappa^2(x)) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2(x) + \kappa^2(x))^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda} \\ & - \sqrt{2}g (\sigma(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) - \kappa(x) \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wenn wir das Ergebnis betrachten, sehen wir, daß wir ein massives Feld $\sigma(x)$ mit Masse $\sqrt{2}\mu$, ein massives Fermion $\psi(x)$ mit Masse $\sqrt{2}g\mathbf{v}$, und ein masseloses Feld $\kappa(x)$.

Wir werden kurz andeuten, wie man dieses Modell in N Dimensionen verallgemeinern kann.

Wir führen das Bosonen Feld als komplexe $N \times N$ Matrix ein:

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma(x) + i\kappa) \chi^0 + \sum_{a'=1}^{N^2-1} (\sigma^{a'}(x) + i\kappa^{a'}) \chi^{a'} \right] \quad (2.23)$$

Dabei sind die Matrizen χ^a die fundamentalen Darstellungen der Flavor $U(N)$ Gruppe, mit $\text{Tr}(\chi^a \chi^b) = 2\delta_{ab}$. Das Fermionenfeld trägt auch einen Flavor Index (a) mit $a \in \{1, 2, \dots, N\}$. Die allgemeine $U_L(N) \times U_R(N)$ invariante Lagrangedichte ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sigma}}^{N \times N} = & \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M) - \frac{\lambda N}{4} \left(\text{Tr}(M^\dagger M M^\dagger M) + \frac{\delta}{N} \text{Tr}(M^\dagger M) \right)^2 \\ & - \frac{\mu^2}{2} \text{Tr}(M^\dagger M) + \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \sqrt{2} g (\bar{\psi}_L M \psi_R + \bar{\psi}_R M^\dagger \psi_L) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Führt man die Rechnung weiter, findet man, daß die $U_L(N) \times U_R(N)$ Symmetrie zur $U_V(N) = U_{L+R}(N)$ Symmetrie gebrochen wird. Es werden N^2 massive Skalare, N massive Fermionen ψ^a und N^2 pseudoskalare Nambu Goldstone Teilchen auftreten.

2.1.4 Nambu-Jona-Lasinio Modell

Die Lagrangedichte des Nambu-Jona-Lasinio Modells sieht wie folgt aus:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}(x) = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + G^{(0)} \sum_{a=0}^{N^2-1} \left\{ \left(\bar{\psi}(x) \frac{\chi^a}{2} \psi(x) \right)^2 + \left(\bar{\psi}(x) \frac{\chi^a}{2} i \gamma_5 \psi(x) \right)^2 \right\} \quad (2.25)$$

Dabei sind die χ^a die fundamentalen Darstellungen der Flavor $U(N)$ Gruppe der Fermionen, mit der Normierung $\text{Tr} \chi_a \chi_b = 2\delta_{ab}$. Das Fermionenfeld trägt einen Flavor Index (a) mit $a \in \{1, 2, \dots, N\}$ und einen Color Index c mit $c \in \{1, 2, \dots, N_c\}$. Dabei werden die Fermionen der fundamentalen Darstellung der Color Gruppe $SU(N_c)$ zugeordnet. Soweit nicht zum Verständnis notwendig, werden die Flavor- und Color-Indices unterdrückt.

Für die χ^a Matrizen finden wir mit Hilfe der Fierz Identität (Siehe Anhang A.7) $\sum_{a=0}^{N^2-1} \frac{1}{2} \chi_{ab} \chi_{cd} = \delta_{ad} \delta_{bc}$:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}(x) = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + 2G^{(0)} \bar{\psi}_L^a(x) \psi_R^b(x) \bar{\psi}_R^b(x) \psi_L^a(x) \quad (2.26)$$

Die Lagrange Dichte ist invariant unter $U_L(N) \times U_R(N)$ Transformationen. Wir führen jetzt ein $N \times N$ dimensionales Hilfsfeld* M ein:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}(x) = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \bar{\psi}_L(x) M \psi_R(x) - \bar{\psi}_R(x) M^\dagger \psi_L(x) - \frac{1}{2G^{(0)}} \text{Tr}(M^\dagger M) \quad (2.27)$$

Mit folgender Euler-Lagrange Gleichung für das Feld M :

$$M_{ab} = -2G^{(0)} \bar{\psi}_R^a(x) \psi_L^b(x); \quad M_{ab}^\dagger = -2G^{(0)} \bar{\psi}_L^b(x) \psi_R^a(x) \quad (2.28)$$

*Es existiert kein kinetischer Term ($\sim \partial^\mu$) in der Lagrangedichte für dieses Feld

Wie man sieht, ist dieses Modell äquivalent zu dem N -dimensionalen linearen σ Modell aus Abschnitt 2.1.3, nur mit dem Unterschied, daß kein kinetischer Term für das Feld M in der Lagrangedichte existiert. Wir können die Konstanten λ mit 0 , g mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und μ^2 mit $\frac{1}{G^{(0)}}$ identifizieren. Damit muß $G^{(0)} > 0$ sein, damit eine Symmetriebrechung auftritt. Da kein kinetischer Term für das Bosonenfeld M bzw. M^\dagger in der Lagrangedichte existiert, übernimmt das „Bifermionen Feld“ $\bar{\psi}_R^a(x)\psi_L^b(x)$ bzw. $\bar{\psi}_L^b(x)\psi_R^a(x)$ die Rolle der Teilchen σ^a bzw. κ^a aus dem σ Modell.

Betrachten wir dieses Modell noch unter einem weiteren Aspekt. Die Lagrangedichte (2.27) reproduziert mit der Nebenbedingung (2.28) genau die ursprüngliche Lagrangedichte (2.25).

Wenn wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} & i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \\ & + \frac{G^{(0)}}{2} \sum_{a=0}^{N^2-1} (\bar{\psi}(x)\chi^a\psi(x)) \chi^a\psi(x) + \frac{G^{(0)}}{2} \sum_{a=0}^{N^2-1} (\bar{\psi}(x)i\chi^a\gamma_5\psi(x)) i\chi^a\gamma_5\psi(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

betrachten, und die zusammengesetzten Operatoren wie folgt vereinfachen*:

$$\begin{aligned} \frac{G^{(0)}}{2} (\bar{\psi}(x)\chi^0\psi(x))\chi^0 & \longrightarrow \frac{G^{(0)}}{N} \langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0 \rangle \equiv -m_{\text{dyn}} \\ (\bar{\psi}(x)\chi^a\psi(x)) & = 0 \quad \forall \quad a \neq 0 \\ (\bar{\psi}(x)i\chi^a\gamma_5\psi(x)) & = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

vereinfacht sich Gleichung (2.29) zu der freien Dirac Gleichung:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m_{\text{dyn}}\psi(x) = 0 \quad (2.31)$$

In dieser Gleichung ist m_{dyn} kein freier Parameter, sondern muß aus der Definition (2.30) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} m_{\text{dyn}} & = -\frac{G^{(0)}}{N} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x)|0 \rangle = \frac{G^{(0)}}{N} \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \langle 0|T\bar{\psi}(x)\psi(x)|0 \rangle \\ & = i\frac{G^{(0)}}{N} \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} S_{\text{sigma}}(x) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dabei ist

$$S_{\text{sigma}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_{\text{dyn}}}{p^2 - m_{\text{dyn}}^2 + i\epsilon} \quad (2.33)$$

der Fermionen Propagator. Somit finden wir[†]

$$m_{\text{dyn}} = \frac{G^{(0)}N_c}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} d^4p_{\text{eukl}} \frac{m_{\text{dyn}}}{p_{\text{eukl}}^2 + m_{\text{dyn}}^2} \quad (2.34)$$

*Beachte, daß $\chi^0 = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} I$ ist; die verwendete Näherung ist eigentlich nur im Fall $N_c \rightarrow \infty$ korrekt.

[†]Wir schreiben den Propagator $S_{\text{sigma}}(x)$ euklidisch und führen einen Cut-Off Λ^2 ein

Nach der Winkelintegration ergibt sich:

$$= \frac{G^{(0)}N_c}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d^2 p_{\text{eukl}} \frac{p_{\text{eukl}}^2 m_{\text{dyn}}}{p_{\text{eukl}}^2 + m_{\text{dyn}}^2} \quad (2.35)$$

Die Integration kann ausgeführt werden, und man findet:

$$m_{\text{dyn}} = \frac{G^{(0)}N_c}{4\pi^2} \left(\Lambda^2 m_{\text{dyn}} - m_{\text{dyn}}^3 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_{\text{dyn}}^2}{m_{\text{dyn}}^2} \right) \right) \quad (2.36)$$

Durch umformen erhält man folgende Gleichung:

$$m_{\text{dyn}} \left(\frac{G^{(0)}N_c \Lambda^2}{4\pi^2} - 1 \right) = \frac{G^{(0)}N_c}{4\pi^2} m_{\text{dyn}}^3 \ln \frac{\Lambda^2 + m_{\text{dyn}}^2}{m_{\text{dyn}}^2} \quad (2.37)$$

Diese Gleichung besitzt immer die triviale Lösung $m_{\text{dyn}} = 0$, aber wenn $\frac{G^{(0)}N_c \Lambda^2}{4\pi^2} > 1$ ist, existiert auch noch eine Lösung mit $m_{\text{dyn}} > 0$. Dies führt zu einer spontanen Symmetriebrechung von der chiralen $U_L(N) \times U_R(N)$ Gruppe zur $U_{L+R} = U_V(N)$ Vektor Gruppe.

2.1.5 Zusammenfassung

Wir untersuchten in diesem Kapitel das Phänomen der Symmetriebrechung. Ziel war es Massenterme für die Teilchen zu finden.

Zuerst erwähnten wir in 2.1 das Goldstone Theorem. Dieses Theorem sagt uns im wesentlichen, daß wenn eine Symmetrie gebrochen ist, masselose Teilchen, die sogenannten Nambu-Goldstone Teilchen auftreten müssen. Im folgenden betrachteten wir die Massengenerierung in verschiedenen Modellen und zeigten auf, welche Teilchen die Rolle der Nambu-Goldstone Teilchen übernehmen.

Wenn wir das Goldstone Modell 2.1.1 betrachten, sieht man, daß man vor der Symmetriebrechung zwei Tachyonen-Zustände* ϕ_1 und ϕ_2 und nach der Symmetriebrechung ein massives Boson φ_1 und ein masseloses Boson φ_2 findet.

Im Fall des Higgs Modell 2.1.2 beginnen wir mit zwei Tachyonen-Zuständen ϕ_1, ϕ_2 und einem masselosen Photon A_μ . Nach der Symmetriebrechung finden wir ein massives Boson ρ und ein massives Photon A_μ . In diesem Fall verschwindet das Nambu-Goldstone Teilchen aus dem physikalischen Spektrum des Modells.

Im linearen σ Modell 2.1.3 betrachten wir zum ersten Mal den Fall der Massengenerierung für Fermionen. Dazu addierten wir einen Wechselwirkungsterm, der skalare Felder, pseudoskalare Felder und Fermionen $U_L(N) \times U_R(N)$ invariant koppelt. Am Ende der Rechnung findet man

*Tachyonen-Zustände sind Zustände mit negativem Massenquadrat

N massive Fermionen ψ^a , N^2 massive Skalare σ^a und N^2 pseudoskalare Nambu-Goldstone Teilchen κ^a .

Als einen Vertreter für Modelle mit dynamischer Massengenerierung haben wir das Nambu-Jona-Lasinio Modell gewählt. Zum einen haben wir in diesem Modell gesehen, daß es bei geeigneter Parameterwahl zu dem linearen σ Modell äquivalent ist. Da aber kein kinetischer Term für die eingeführten Hilfsfelder in der Lagrangedichte existiert haben die „Bifermionen“ $\bar{\psi}\psi$ die Rolle der massiven Felder σ und die „Bifermionen“ $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ die Rolle der Nambu Goldstone Teilchen übernommen.

In diesem Modell zeigten wir auch noch Ansatzweise, wie man die Masse näherungsweise berechnen kann. Dabei haben wir eine Bedingung gefunden, daß erst ab einer kritischen Kopplung eine Massengenerierung stattfindet.

Kapitel 3

Experimenteller Status Neutrinos

Die Neutrinos treten in der Natur häufig auf, sind aber wegen ihres kleinen Wechselwirkungsquerschnitts nur sehr schwer nachzuweisen. Daher listen wir zuerst in Abschnitt 3.1 die Quellen für Neutrinos auf. Danach werden wir einen groben Überblick über den experimentellen Stand in Abschnitt 3.2 geben.

3.1 Quellen von Neutrinos

1. Solar Neutrinos

Bei den Solar Neutrinos handelt es sich um Neutrinos, mit einer Energie bis zu einigen MeV, die bei der Kernfusion in Sternen entstehen. Bei unserer Sonne entstehen die Neutrinos im wesentlichen durch folgende Reaktion, bei der zwei Protonen zu einem Deuterium Kern verschmelzen und dabei ein Positron und ein Neutrino freisetzen:



2. „Künstliche Neutrinos“

Bei den „künstlichen Neutrinos“ handelt es sich um vom Menschen erzeugte Neutrinos. Dabei unterscheidet man zwischen Neutrinos aus Kernreaktoren, die dort als „Abfallprodukt“ mit Energien um 4 MeV entstehen, und Hochenergie-Neutrinostrahlen, die in Beschleunigern durch Beschuß von Targets mit Energien $\lesssim 100 \text{ GeV}$ erzeugt werden.

3. Neutrino Schauer

Bei dem Abbremsen kosmischer Strahlung in den obersten Schichten der Atmosphäre entstehen als Folgeprodukte auch Neutrinos, die man auch als „atmosphärische Neutrinos“ bezeichnet

4. „Natürliche Radioaktivität“

Bei dem β Zerfall radioaktiver Kerne, insbesondere in der Erdkruste entstehen Neutrinos.

5. Neutrinos aus Supernova Explosionen

6. Neutrino Hintergrund als Folge des Urknalls

Übliche Modelle des Urknalls sagen einen Hintergrundfluß von etwa 330 Neutrinos pro $\frac{cm^2}{s}$ voraus.

3.2 Nachweis von Neutrinos

Für eine Zusammenstellung des aktuellen experimentellen Stands der Forschung empfehlen sich die Konferenz Tagungsberichte [Loc96] und [Neu99]. Eine Vielzahl von Experimenten zum Nachweis von Neutrinos sind sogenannte Oszillationsexperimente. Dabei versucht man in Abhängigkeit vom Abstand von der Quelle die Abnahme eines Neutrino Flavors, bzw. das Auftreten eines neuen Neutrino Flavors nachzuweisen. Dabei kann man grob die Modelle zur Beschreibung mit reiner Vakuum Oszillationen und Modelle mit resonantem Übergang in Materie, dem sogenannten MSW Effekt [MS86, Wol78], unterscheiden. Die folgende Grafik 3.1 zeigt qualitativ die Empfindlichkeit verschiedener Oszillationsexperimente, für ein zwei Flavor Modell* in Abhängigkeit von der Quelle bzw. dem Effekt.

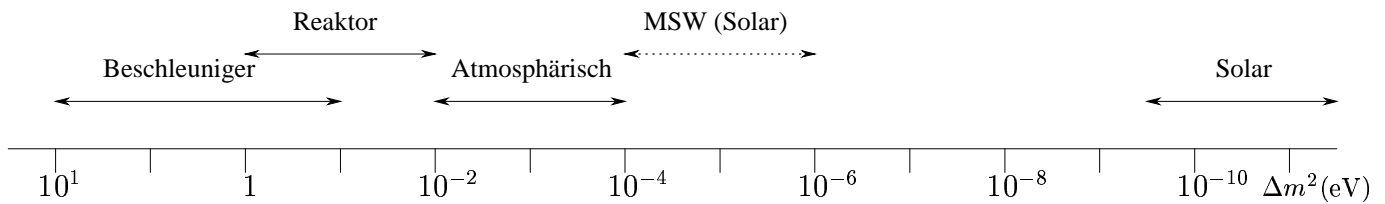


Abbildung 3.1: Nachweis Grenzen Oszillations Experimente

In diesen Experimenten bestimmt man aber nicht die Neutrinomassen m_1 und m_2 selbst sondern nur die Differenz der Massenquadrate $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Zur Zeit existieren nur zwei experimentelle Hinweise auf Neutrino Oszillationen. Die LSND (Large Scintillator Neutrino Detector) Gruppe am LAMPF (Los Alamos Meson Physics Facility) Beschleuniger in Los Alamos [AAB⁺96, AAB⁺98] hat $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ bzw. $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Neutrino Oszillationen beobachtet. Zu dieser Beobachtung ist zu sagen, daß parallel zur ersten Beobachtung 1995 [AAB⁺95] im gleichen Journal eine Veröffentlichung von J. E. Hill [Hil95] erschien, der keinen Hinweis für Neutrino Oszillationen in den Daten findet. Der andere Hinweis für eine $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ Neutrino-Oszillation [FHI⁺98] ist der „Super-Kamiokande Collaboration“ für atmosphärische Neutrinos gelungen[†]. Alle anderen experimentellen Ergebnisse für Neutrinomassen [PDG98] sind negativ, daß heißt es können nur obere Schranken für die Neutrinomasse angegeben werden.

*Nur Elektron und Myon Neutrino, bzw. Antineutrino werden berücksichtigt.

[†]Im Gegensatz zum LSND Experiment erwartet man die Bestätigung dieses Hinweises auf Oszillation für atmosphärische Neutrinos durch weitere Experimente.

Teil II

Dynamische Massengenerierung für die Leptonen im erweiterten Standardmodell in verschiedenen Näherungen

Kapitel 4

Massengenerierung

Im folgenden Teil der Arbeit werden wir die Dyson-Schwinger Gleichung in verschiedenen Näherungen betrachten. Dabei werden wir nur die Wechselwirkung zwischen Leptonen und dem zusätzlichen $U(1)'$ Eichboson C berücksichtigen*. Wie bereits gesagt werden zur Lösung der Dyson-Schwinger Gleichung der Leptonen, die Lösung der Dyson-Schwinger Gleichung des Eichbosons und des Vertex benötigt, zu deren Lösung man die Lösung der Dyson-Schwinger Gleichung für die Leptonen benötigt. Um Ergebnisse zu erhalten muß man dieses gekoppelte Gleichungssystem also nähern.

Die erste Näherung die wir durchführen werden, ist die Ersetzung des Vertex durch den sogenannten „nackten Vertex“. Diese Näherung wird auch als „rainbow Näherung“ bezeichnet. Wir ersetzen also den Vertex $i\Gamma_\mu$ durch $i(2\pi)^4\gamma_\mu$. Wir betrachten also in dieser Näherung einen rein vektoriellen Vertex[†].

Die einfachste weitere Näherung, die sogenannte „quenched Näherung“ besteht darin, die Anzahl der Leptonen-Flavor in dem exaktem Bosonen-Propagator gleich Null zu setzen. Mit diesen beiden Näherungen gelingt es die Dyson-Schwinger Gleichungen für das Lepton in der Landau-Eichung analytisch zu lösen.

Zuerst werden wir in Abschnitt 4.1 den Fall eines masselosen weiteren Eichbosons mit „nacktem Vertex“ betrachten. Danach werden wir versuchen die „quenched Näherung“ für das Eichboson, durch die Einführung eines Massenterms zu verbessern. Die Idee die dahinter steht ist, daß wie bereits gesagt, auch das Eichboson eine Dyson-Schwinger Gleichung erfüllt. Diese Gleichung sollte natürlich eine Lösung zulassen, die zu einem Massenterm für das Eichboson führt. Diesen Fall eines massiven Eichbosons mit „nacktem Vertex“ betrachten wir in Abschnitt 4.2. Da in der massiven Näherung Probleme auftreten, betrachten wir noch eine ungewöhnliche Eichung, die sogenannte „Landau-ähnliche“ Eichung, in Abschnitt 4.2.1, mit der man hofft, diese Probleme zu lösen.

Wie man diesen Bemerkungen entnehmen kann, müssen wir zur Lösung der Dyson-Schwinger

*Die Rechnung für das $U(1)$ Eichboson B würde genau gleich durchzuführen sein. Am Ende der Rechnung werden wir Bedingungen finden, die dazu führen, daß wir dieses Eichboson nicht berücksichtigen müssen.

[†]Also der Vertex ist nur proportional γ_μ .

Gleichungen Näherungen vornehmen. Um eine vernünftige Näherung zu erhalten, werden wir unsere Parameter, bzw. Bedingungen so wählen, daß die Ward-Takahashi Identitäten 1.3.4 erfüllt sind. Dabei werden wir auch Ergebnisse erhalten, die zur Auszeichnung einer bestimmten Eichung führen.

4.1 Massenlose „quenched rainbow“ Näherung

$$-\Sigma(p) = -ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \text{ (Diagramm) }$$

Abbildung 4.1: Dyson-Schwinger Gleichung (massenlos quenched rainbow)

Man findet folgende Dyson-Schwinger Gleichung (Siehe auch Grafik 4.1) in der masselosen quenched rainbow Näherung für das zusätzliche abelsche Eichboson C . Am Ende der Rechnung wird man sehen, warum wir das andere abelsche Eichboson B nicht berücksichtigt haben.*:

$$-\Sigma(p) = - \int d^4k \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{(p-k)^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2} \right) \gamma^\mu \frac{i}{(2\pi)^4} (-1) \frac{\not{k} (1 - B(-k^2)) + A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} i(2\pi)^4 \gamma^\nu \quad (4.1)$$

mit $\Sigma(p) = A(p^2) + \not{p}B(p^2)$

$$\Sigma(p) = - ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \gamma^\mu \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2} \right) (\not{k} (1 - B(-k^2)) + A(-k^2)) \gamma^\nu \quad (4.2)$$

*Der Platzhalter \odot bei $Y_{H_{R\odot}}$ steht stellvertretend für das Elektron oder das Elektron-Neutrino

Man erhält also, unter Berücksichtigung der Dirac-Algebra (A.3) von Seite 79:

$$\begin{aligned}
\Sigma(p) = & -ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
& \left(-2 \not{k} (1 - B(-k^2)) + 4A(-k^2) \right. \\
& + \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2} \left((1 - B(-k^2)) (2(\not{p} - \not{k})k \cdot (p-k) - (p-k)^2 \not{k}) \right. \\
& \left. \left. + (\not{p} - \not{k})(\not{p} - \not{k})A(-k^2) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Um jetzt die Terme $\sim A(-p^2)$ und $\sim B(-p^2)$ abzulesen, bilden wir die Spur von Gleichung (4.3) bzw. die Spur von \not{p} mal Gleichung (4.3). Wir erhalten folgendes Ergebnis für die Massenfunktion $A(-p^2)$:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[A(-p^2) + \not{p}B(-p^2)] &= 4A(-p^2) \\
&= -4ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{(3 + \alpha)A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$A(-p^2) = -ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{(3 + \alpha)A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \tag{4.5}$$

und für die Wellenfunktionsrenormierung $B(-p^2)$, wenn wir die Umrechnung aus Anhang (A.7) berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}A(-p^2) + \not{p}\not{p}B(-p^2)] &= 4p^2 B(-p^2) \\
&= -4ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
& \left(-2p \cdot k (1 - B(-k^2)) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2} \left((1 - B(-k^2)) (2p \cdot (p-k)k \cdot (p-k) - (p-k)^2 p \cdot k) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
B(-p^2) &= i \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - i\epsilon} \frac{(1 - B(-k^2))}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
& \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2} \left((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2 k^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Man sieht, daß die Gleichungen für $A(-p^2)$ und $B(-p^2)$ gekoppelt sind. Als Leitfaden für die weitere Untersuchung zieht man die Ward-Takahashi Identität (Siehe auch Abschnitt 1.3.4 von Seite 31) in Betracht. Man erhält in unser speziellen Fall der quenched rainbow Näherung (Siehe Gleichung (A.23) aus dem Anhang):

$$\not{p} - \not{k} = A(-p^2) - A(-k^2) + (1 - B(-p^2)) \not{p} - (1 - B(-k^2)) \not{k} \quad (4.8)$$

Man erkennt sofort, daß der Anteil der Ward Identität $\sim \gamma^\mu$ erfüllt ist, wenn $B(-p^2) = 0$ ist. Aus diesem Grund untersuchen wir, unter welchen Bedingungen* es möglich ist, die Wellenfunktionsrenormierung $B(-p^2) = 0$ zu wählen. Eine direkte Folge der rainbow Näherung, die einen rein vektoriellen Vertex verwendet, ist, daß die Ward-Takahashi Identität nur im Fall $A(-p^2) = \text{const}$ zu erfüllen ist.

Für die folgenden Rechnungen werden wir eine Wick Rotation (Gleichung (A.24) auf Seite 83) durchführen. Man findet folgende Euklidische Form[†] der Gleichung (4.6):

$$B(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2} \frac{(1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2} ((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2 k^2) \right) \quad (4.9)$$

$$= \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{(2\pi)^3} k^2 \frac{(1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p-k)^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2} ((k^2 + p^2)k \cdot p - 2p^2 k^2) \right) \quad (4.10)$$

Zur Auswertung der Gleichung genügt es die Winkelintegration zu betrachten. Allgemeine Überlegungen zur Winkelintegration in 4 dimensionaler euklidischer Metrik, findet man im Anhang C.1 auf Seite 87. Nach der Winkelintegration entsprechend den Ausführungen im Anhang C.1.1 Gleichung (C.15)-(C.20) und Einführung eines Cut-Off für die Impulsintegration findet man, daß

$$B(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{16\pi^2} \frac{k^2 (1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \alpha \left(\frac{(p^2 + k^2)}{\max(p^2, k^2)} - 1 \right) \quad (4.11)$$

ist.

$$B(p^2) = \alpha \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{16\pi^2} \frac{k^2 (1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \left(\frac{(p^2 + k^2)}{\max(p^2, k^2)} - 1 \right) \quad (4.12)$$

*Dabei denken wir an spezielle Grenzfälle für p^2 oder spezielle Eichungen α .

[†]Zur Vereinfachung der Schreibweise wurde darauf verzichtet k durch k_{Eukl} etc. zu ersetzen. Alle folgende Gleichungen sind bis zum nächsten Kapitel euklidisch.

Betrachten wir jetzt die Massenfunktion $A(p^2)$ aus Gleichung (4.5) und führen auch eine Wick-Rotation durch:

$$A(p^2) = - (3 + \alpha) g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{(2\pi)^3} \frac{k^2 A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) \frac{1}{(p - k)^2} \quad (4.13)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln (C.14) von Seite 91 findet man:

$$A(p^2) = - (3 + \alpha) g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{(2\pi)^3} \frac{k^2 A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \frac{\pi}{2 \max(p^2, k^2)} \quad (4.14)$$

$$A(p^2) = - \frac{(3 + \alpha) g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2}{\max(p^2, k^2)} \frac{A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)}$$

(4.15)

Man sieht in Gleichung (4.12), daß $B(p^2) \sim \alpha$ ist, also im Fall der Landau-Eichung ($\alpha = 0$) man einen Teil der Ward Identität* (4.8) mit $B(p^2) = 0$ erfüllt. Ausserdem sieht man in Gleichung (4.15), daß mit dieser Wahl des Eichparameters $A(p^2)$ nicht automatisch auch gleich Null ist. In der Landau-Eichung sind dann die Gleichungen (4.12) für die Wellenfunktionsrenormierung $B(p^2)$ und Gleichung (4.15) für die Massenfunktion $A(p^2)$ entkoppelt. Wir finden also folgendes Gleichungssystem:

$$B(p^2) = 0$$

$$A(p^2) = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2}{\max(p^2, k^2)} \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)}$$

In Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

(4.16)

Das verschwinden der Wellenfunktionsrenormierung $B(p^2) \forall p^2$ tritt nur in der Landau-Eichung auf. Eine Erklärung, welche Eigenschaft die Landau-Eichung gegenüber den anderen Eichungen auszeichnet, ist nicht bekannt. Da wir jedoch sehr weitgehende Näherungen vorgenommen haben um zur Gleichung (4.16) zu gelangen, scheint es nicht unwahrscheinlich, daß bei dieser Prozedur, die Eichinvarianz verletzt wird. Leider sind analytische Rechnungen nur an dem entkoppeltem System möglich.

*Man muß beachten, daß die Ward Identität im Minkowski Raum formuliert ist.

Zur weiteren Analyse der Gleichung werden wir zwei verschiedene Wege einschlagen. Bei der ersten Methode, die entsprechend dem Nambu-Jona-Lasinio Modell aus Abschnitt 2.1.4 durchgeführt wird, betrachtet man in Gleichung (4.16) die Funktion $A(p^2)$ am Punkt $p^2 = m^2$. An diesem Punkt ist natürlich $A(p^2 = m^2) = m$. Außerdem ersetzt man die Funktion $A(k^2)$ im Integral auch durch $A(p^2 = m^2) = m$. Begründen kann man die Näherung damit, daß in der Nähe der Singularität $p^2 = m^2$ des Propagators die Beiträge des Integrals am größten sein sollten.

Die andere Methode der Analyse führt die Integralgleichung in eine Differentialgleichung über. Die Differentialgleichung kann entweder durch numerische Verfahren oder mit Hilfe der Bifurkationsanalyse [Atk91] gelöst werden. Dabei ersetzen wir die exakte Differentialgleichung durch eine linearisierte Version der Gleichung. Diese linearisierte Gleichung nähert die korrekte Gleichung in der Nähe des Phasenübergangs erstaunlich gut an.

4.1.1 Näherung Integralgleichung

Zur Berechnung gehen wir ähnlich vor, wie in Gleichung (2.34)-(2.37) aus Abschnitt 2.1.4 (Nambu-Jona-Lasinio Modell). Als Ausgangspunkt wählen wir Gleichung (4.16).

$$A(p^2) = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2}{\max(p^2, k^2)} \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \quad (4.17)$$

Setzen wir jetzt $A(k^2) = A(p^2)$ und betrachten die Gleichung am Punkt $p^2 \rightarrow m^2$

$$m = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2}{\max(m^2, k^2)} \frac{m}{k^2 + m^2} \quad (4.18)$$

Da $\Lambda^2 > m^2$ ist, können wir das Integral wie folgt umschreiben:

$$m = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \left(\int_0^{m^2} dk^2 \frac{k^2}{m^2} \frac{m}{k^2 + m^2} + \int_{m^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{m}{k^2 + m^2} \right) \quad (4.19)$$

Die Integration kann ausgeführt werden, und man erhält:

$$m = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{m^2} \left(m^3 - m^3 \ln \left(\frac{m^2 + m^2}{m^2} \right) \right) + m \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) - \ln \left(\frac{m^2 + m^2}{m^2} \right) \right) \right) \quad (4.20)$$

$$m = - \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} m \left(1 - 2 \ln 2 + \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right) \quad (4.21)$$

$$m \left(1 + \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} (1 - 2 \ln 2) \right) = -\frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{8\pi^2} m \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \quad (4.22)$$

Setzen wir jetzt $\zeta \equiv -\frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{8\pi^2}$ und beachten, daß $2 \ln 2 > 1$ ist, finden wir:

$$m(1 + \zeta(2 \ln 2 - 1)) = \zeta m \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \quad (4.23)$$

Diese Gleichung besitzt offensichtlich immer die triviale Lösung $m = 0$. Aber es existiert auch noch folgende Lösung für $m \neq 0$ und $\zeta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \zeta(2 \ln 2 - 1)}{\zeta} &= \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \\ \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} &= e^{2 \ln 2 - 1} e^{\frac{1}{\zeta}} \\ m^2 &= \Lambda^2 \frac{1}{e^{2 \ln 2 - 1} e^{\frac{1}{\zeta}} - 1} \end{aligned}$$

Die physikalische Forderung, daß die Masse der Leptonen sehr viel kleiner als der Cut-Off ist, also $0 < m^2 \ll \Lambda^2$ ist, führt zu einer Einschränkung für den Parameter ζ . Wie man sich einfach überlegen kann, ist diese Bedingung im Fall $\zeta < 0$ nicht zu erfüllen. Da wir jedoch keine Einschränkung für unsere Parameterwahl $Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}$ in Kapitel 1.2 gefunden haben, können wir fordern, daß $Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} < 0$ ist und damit $\zeta > 0$. Da die Masse $m^2 < \Lambda^2$ sein muß, finden wir als obere Schranke für den Parameter $\zeta \leq \frac{1}{1 - \ln 2} \lesssim 3.3$.

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\Lambda^2}{e^{2 \ln 2 - 1} e^{\frac{1}{\zeta}} - 1} \\ m^2 &\simeq e^{-2 \ln 2 + 1} \Lambda^2 e^{-\frac{1}{\zeta}} \quad \text{für } 0 < \zeta \ll 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.1.2 Näherung Differentialgleichung

Zur anderen Auswertung setzen wir* $\lambda := -\frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2}$ und führen die Integralgleichung (4.16) für $A(p^2)$ in eine Differentialgleichung über. Dazu schreiben wir zuerst die Gleichung für $A(p^2)$, da $\Lambda^2 > p^2$ ist, wie folgt um:

$$A(p^2) = \lambda \int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2}{p^2} \frac{A(k^2)}{k^2 + A(k^2)} + \lambda \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \quad (4.25)$$

*Die Konstante λ ist natürlich identisch mit der Konstanten ζ aus der vorigen Rechnung. Die Konstanten werden trotzdem unterschiedlich benannt, da die Konstanten unterschiedliche Bedingungen erfüllen müssen.

Wenn wir die Ableitung von $A(p^2)$ nach p^2 bilden, finden wir:

$$\begin{aligned}\partial_{p^2} A(p^2) &= \lambda \frac{-1}{(p^2)^2} \int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2 A^2(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} + \lambda \frac{k^2}{p^2} \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \Big|_{k^2=p^2} \\ &\quad - \lambda \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \Big|_{k^2=p^2} \\ &= - \frac{\lambda}{(p^2)^2} \int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2 A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Multiplizieren wir jetzt mit $(p^2)^2$, finden wir:

$$(p^2)^2 \partial_{p^2} A(p^2) = - \lambda \int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2 A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \quad (4.27)$$

Wenn man die Gleichung (4.27) noch einmal nach p^2 ableitet, finden wir:

$$(p^2)^2 \partial_{p^2}^2 A(p^2) + 2p^2 \partial_{p^2} A(p^2) = - \lambda \frac{k^2 A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \Big|_{k^2=p^2} \quad (4.28)$$

$$p^2 \partial_{p^2}^2 A(p^2) + 2 \partial_{p^2} A(p^2) + \lambda \frac{A(p^2)}{p^2 + A^2(p^2)} = 0 \quad (4.29)$$

Wenn wir die Randbedingungen betrachten, finden wir im IR ($p^2 \rightarrow 0$) aus Gleichung (4.27) folgende Differentialgleichung:

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} ((p^2)^2 \partial_{p^2} A(p^2)) = 0 \quad (4.30)$$

Für die Bedingung im UV ($p^2 \rightarrow \Lambda^2$) zu finden betrachten wir p^2 mal Gleichung (4.25) und differenzieren nach p^2 :

$$\partial_{p^2} (p^2 A(p^2)) = \lambda \partial_{p^2} \int_0^{p^2} dk^2 k^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} + \lambda \partial_{p^2} \left(p^2 \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \right) \quad (4.31)$$

$$(4.32)$$

$$\begin{aligned}A(p^2) + p^2 \partial_{p^2} A(p^2) &= \lambda k^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \Big|_{k^2=p^2} \\ &\quad + \lambda \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A(k^2)} - \lambda p^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \Big|_{k^2=p^2}\end{aligned}\quad (4.33)$$

$$A(p^2) + p^2 \partial_{p^2} A(p^2) - \lambda \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} = 0 \quad (4.34)$$

Wenn wir jetzt den Grenzwert $p^2 \rightarrow \infty$ bilden, findet man:

$$\lim_{p^2 \rightarrow \Lambda^2} \left(A(p^2) + p^2 \partial_{p^2} A(p^2) - \lambda \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \right) = \quad (4.35)$$

$$= A(\Lambda^2) + \Lambda^2 \partial_{p^2} A(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2} = 0 \quad (4.36)$$

Wir erhalten also folgende Differentialgleichung mit den Nebenbedingungen im IR und UV:

$$\begin{aligned} p^2 \partial_{p^2}^2 A(p^2) + 2 \partial_{p^2} A(p^2) + \lambda \frac{A(p^2)}{p^2 + A^2(p^2)} &= 0 \\ \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left((p^2)^2 \partial_{p^2} A(p^2) \right) &= 0 \\ A(\Lambda^2) + \Lambda^2 \partial_{p^2} A(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2} &= 0 \end{aligned}$$

(4.37)

Wie man sieht, ist die triviale Lösung $A(p^2) = 0 \quad \forall p^2$ durch die Randbedingungen nicht ausgeschlossen. Numerische Lösungen dieser Gleichung sind in dem Artikel von R. Fukuda und T. Kugo [FK76] und dem Artikel von B. G. Dragović, D. P. Mavlo und A. T. Philippov [DP78] zu finden. Eine ausführlichere Beschreibung der numerischen Lösung der Gleichung kann in der Doktorarbeit von P. Maris [Mar93] gefunden werden.

Führen wir jetzt die Bifurkationsanalyse durch. Wir ersetzen im Nenner von Gleichung (4.37) $A^2(p^2)$ durch $m^2 \neq 0$. Somit findet man folgende quasi-lineare Differentialgleichung:

$$p^2(p^2 + m^2) \partial_{p^2}^2 A(p^2) + 2(p^2 + m^2) \partial_{p^2} A(p^2) + \lambda A(p^2) = 0 \quad (4.38)$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine hypergeometrische Differentialgleichung, die wir im Anhang C.3 näher untersuchen. Wegen den Nebenbedingungen im IR aus Gleichung (4.37) findet man folgende Lösung:

$$\frac{A(p^2)}{m} = {}_2\mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; 2; -\frac{p^2}{m^2} \right) \quad (4.39)$$

Wie man im Anhang C.3 sieht, insbesondere Gleichung (C.82)-(C.87), ist die Bedingung im UV nur für Werte der Kopplung $\lambda_c > \frac{1}{4}$, bei endlichem Cut-Off zu erfüllen.

Der Fall $n = 1$ führt in Gleichung (C.87) zu einem stabilen Vakuum. Wir finden also in der Nähe der kritischen Kopplung:

$$\boxed{m_{\text{dyn}} \simeq 4\Lambda e^{-\frac{\pi}{\tilde{\omega}}}} \quad \text{mit: } \tilde{\omega} \equiv \sqrt{4\lambda - 1} \quad (4.40)$$

Dieses Ergebnis haben wir durch unsere Näherung des Nenners $p^2 + A(p^2)$ von Differentialgleichung (4.37) durch $p^2 + m^2$, also der Bifurkationsnäherung, erhalten*. Wir haben im Prinzip zur Herleitung den Leptonenpropagator durch folgenden Propagator ersetzt:

$$S_{\text{bifur}} \sim \frac{\not{p} + A(p)}{p^2 + m_{\text{dyn}}^2} \quad (4.41)$$

Dieser Leptonenpropagator besitzt natürlich einen Pol bei $p^2 = -m_{\text{dyn}}^2$, den man mit der Masse identifiziert.

Zusammenfassung

Wie wir sehen haben wir in beiden Näherungen mit Gleichung (4.24) und (4.40) ein qualitativ ähnliches Ergebnis gefunden. Die Näherung durch die Differentialgleichung liefert uns zusätzlich eine kritische Kopplung λ_c . Diese kritische Kopplung führt dazu, daß das andere $U(1)$ Eichboson B keinen Beitrag zu der Masse liefert, da die Kopplung kleiner wie die kritische Kopplung ist. Die kritische Kopplung ist ein Effekt, den man auch bei rein numerischen Näherungen der Dyson-Schwinger Gleichung findet.

4.2 Massive „quenched rainbow“ Näherung

$$-\Sigma(p) = -ig_H^2 Y_{H_L} Y_{H_R} \text{ (rainbow diagram) }$$

Abbildung 4.2: Dyson-Schwinger Gleichung (massiv quenched rainbow)

Versuchen wir jetzt, wie bereits im Vorspann gesagt, durch Einführung einer Masse für das Boson C die Näherung zu verbessern. Es besteht auch die Hoffnung, daß es durch diese Masse gelingt, eine dem Problem eigene Massenskala einzuführen.

*In der Berechnung haben wir die äussere Masse $m_0 = 0$ gesetzt. Die dynamisch erzeugte Masse m_{dyn} ist in diesem Fall identisch mit der physikalischen Masse m .

Die Dyson-Schwinger Gleichung (Siehe auch Grafik 4.2) hat in der massiven quenched rainbow Näherung folgende Form*:

$$\begin{aligned}
 -\Sigma(p) = & - \int d^4k \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \right) \\
 & \gamma^\mu \frac{i}{(2\pi)^4} (-1) \frac{\not{k} (1 - B(-k^2)) + A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} i(2\pi)^4 \gamma^\nu
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\text{mit } \Sigma(p) = A(p^2) + \not{p} B(p^2)$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) = & -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
 & \gamma^\mu \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \right) (\not{k} (1 - B(-k^2)) + A(-k^2)) \gamma^\nu
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Man erhält also, unter Berücksichtigung der Umformungen (A.3) von Seite 79:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) = & -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
 & \left(-2 \not{k} (1 - B(-k^2)) + 4A(-k^2) \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \left((1 - B(-k^2)) (2(\not{p} - \not{k})k \cdot (p-k) - (p-k)^2 \not{k}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\not{p} - \not{k})(\not{p} - \not{k})A(-k^2) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Um jetzt die Terme $\sim A(-p^2)$ und $\sim B(-p^2)$ abzulesen, bilden wir die Spur von Gleichung (4.44) bzw. die Spur von \not{p} mal Gleichung (4.44). Wir erhalten, entsprechend zu der Rechnung

*Der Platzhalter \odot bei $Y_{H_{R\odot}}$ steht stellvertretend für das Elektron oder das Elektron-Neutrino

aus dem letzten Abschnitt 4.1, folgendes Ergebnis für die Massenfunktion $A(-p^2)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[A(-p^2) + \not{p}B(-p^2)] &= 4A(-p^2) \\ &= -4ig_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\ &\quad \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \left(1 + (\alpha - 1) \frac{(p-k)^2}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} A(-p^2) &= -ig_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\ &\quad \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{(p-k)^2}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

und für die Wellenfunktionsrenormierung $B(-p^2)$, wenn wir die Gleichung (A.7) aus dem Anhang berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{p}A(-p^2) + \not{p} \not{p}B(-p^2)] &= 4p^2 B(-p^2) \\ &= -4g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \frac{1}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\ &\quad \left(-2p \cdot k (1 - B(-k^2)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \left((1 - B(-k^2)) (2p \cdot (p-k)k \cdot (p-k) - (p-k)^2 p \cdot k) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} B(-p^2) &= i \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \frac{(1 - B(-k^2))}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\ &\quad \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 - \alpha M^2} \left((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2 k^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Gleichungen für $A(-p^2)$ und $B(-p^2)$ sind genau wie im masselosen Fall gekoppelt. Die Form der Ward Identität ändert sich im Vergleich zum masselosen Fall (4.8) nicht. Aus diesem Grund untersuchen wir, ob es eine Bedingung gibt, entsprechend der Landau-Eichung in der masselosen quenched rainbow Näherung, in der die Wellenfunktionsrenormierung $B(-p^2) \rightarrow 0$ geht.

Für die folgenden Rechnungen werden wir eine Wick Rotation (Gleichung (A.24) auf Seite 83)

durchführen. Man findet folgende Euklidische Form* der Gleichung (4.48):

$$B(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \frac{1}{(p - k)^2 + M^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p - k)^2 + \alpha M^2} \left((k^2 + p^2)k \cdot p - 2p^2 k^2 \right) \right) \quad (4.49)$$

$$= \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{(2\pi)^3} k^2 \frac{(1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p - k)^2 + M^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p - k)^2 + \alpha M^2} \left((k^2 + p^2)k \cdot p - 2p^2 k^2 \right) \right) \quad (4.50)$$

Wenn wir die Nebenrechnung aus dem Anhang C.1.2 berücksichtigen, insbesondere Gleichung (C.34), finden wir:

$$B(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{8\pi^2} \frac{k^2 (1 - B(k^2))}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \left(-\frac{1}{2} - (\alpha - 1)^2 \frac{1}{2} \frac{p^2 + k^2}{2pk} + \frac{p^2 + k^2}{4M^2} \left(\frac{2pk}{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}} - \frac{2pk}{p^2 + k^2 + \alpha M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + \alpha M^2)^2 - 4p^2 k^2}} \right) + \frac{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - (p^2 + k^2 + M^2) \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} \right) \quad (4.51)$$

Wie man sieht, führt in diesem Fall die Wahl der Landau Eichung nicht zum gewünschten Ziel $B(p^2) = 0$. Man sieht, daß auch keine andere Eichung zu diesem Ziel führt. Betrachten wir jetzt die Massenfunktion $A(p^2)$ aus Gleichung (4.46):

$$A(p^2) = -g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{(2\pi)^3} \frac{k^2 A(k^2)}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) \frac{1}{(p - k)^2 + M^2} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{(p - k)^2}{(p - k)^2 + \alpha M^2} \right) \quad (4.52)$$

*Zur Vereinfachung der Schreibweise wurde darauf verzichtet k durch k_{Eukl} etc. zu ersetzen. Alle folgende Gleichungen sind bis zum nächsten Kapitel euklidisch.

Berücksichtigen wir jetzt die Nebenrechnungen (C.35)-(C.40) von Seite 96, finden wir für den Fall $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 A(p^2) = & g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{8\pi^2} \frac{k^2 A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \\
 & \left(4 \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} \right. \\
 & + \left(\frac{2pk}{M^2(p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2})} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2pk}{M^2(p^2 + k^2 + \alpha M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + \alpha M^2)^2 - 4p^2 k^2})} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

und im Fall $\alpha = 0$, wenn wir Gleichung (C.41) berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 A(p^2)|_{\alpha=0} = & 3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{8\pi^2} \frac{k^2 A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \\
 & \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

Im Gegensatz zum masselosen Fall aus 4.1 sieht man, daß wir im massiven Fall keine Eichung α finden können für die $B(p^2)$ Null wird. Es ist also nicht möglich die Gleichungen zu entkoppeln. Um weitere Aussagen treffen zu können, nimmt man üblicherweise an, daß es in der Landau-Eichung $\alpha = 0$ ein vernünftiger Ansatz ist mit $B(p^2) = 0$ die Rechnung zu beginnen. Der Grund für diese Annahme liegt in der Tatsache begründet, daß im Grenzwert $p^2 \rightarrow \infty$ in niedrigster Ordnung die Wellenfunktions-Renormierung $B(p^2)$ in der Landau-Eichung verschwindet. Wegen der unterschiedlichen Polstruktur des masselosen und des massiven Falls, kann man den masselosen Fall nicht als Grenzfall des massiven Falls $\lim_{M^2 \rightarrow 0}$ für alle Werte α betrachten. Betrachten wir den Grenzfall $M^2 \rightarrow 0$ für Gleichung (4.51) und Gleichung (4.53):

$$\begin{aligned}
 B(p^2) = & \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{16\pi^2} \frac{(1 - B(k^2))}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \\
 & \left(\frac{p^2 + k^2}{\max(p^2, k^2)} - 1 - (\alpha - 1)^2 \frac{p^2 + k^2}{(4pk)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

$$A(p^2) = -g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{4\pi^2} \frac{A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \frac{k^2}{\max(p^2, k^2)}$$

Man sieht, obwohl der Ausdruck in Gleichung (4.55) für $A(p^2)$ im Fall verschwindender Massen M nicht mehr von der Eichung abhängt, daß man im wesentlichen das Ergebnis (4.15) des masselosen Falls wieder findet. Nur unterscheidet sich der Ausdruck für $B(p^2)$ in Gleichung (4.55) wesentlich von dem Ausdruck des masselosen Falls (4.12). Es ist also nicht möglich, einen Grenzfall für $B(p^2)$ im $\lim_{M^2 \rightarrow 0}$ für $\alpha \neq 1$ zu finden, der dem masselosen Fall entspricht. Es ist schwer zu begründen, daß man $B(p^2) = 0 \quad \forall p^2$, wie im masselosen Fall in der Landau Eichung $\alpha = 0$, setzen kann. Wie bereits gesagt, darf man diese Annahme nur im Grenzfall $p^2 \rightarrow \infty$ verwenden.

Die Vermutung liegt nahe, daß das Problem darin begründet liegt, daß man im Grenzfall $M \rightarrow 0$ für die Wellenfunktionsrenormierung $B(p^2)$ und die Massenfunktion $A(p^2)$ nicht den masselosen Fall wiederfindet. Um dieses Problem des Grenzfalls zu lösen, haben T. Maskawa und H. Nakajima [MN74, MN75] folgenden Propagator für das massive Eichboson vorgeschlagen:

$$iD_{\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M^2} \right) \quad (4.56)$$

Diese „ungewöhnliche Eichung“ bezeichnet man in der Literatur im Fall $\alpha = 0$ als „Landau-ähnliche“ Eichung. Wie man sieht besitzt diese „Landau-ähnliche“ Eichung die gleiche Polstruktur wie die masselose Theorie. Dieser Ansatz löst jedoch das grundsätzliche Problem nicht, wie wir im nächsten Abschnitt 4.2.1 sehen werden.

Ein weiteres Problem ist, daß die Rechenmethoden aus dem Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2 scheitern, da beide Methoden wesentlich von der Annahme abhängen, daß wir den Integralkern in eine Summe von Integralkernen für $p^2 < k^2$ bzw. für $p^2 > k^2$ zerlegen können. Diese Eigenschaft hängt eng mit der Darstellung der Wurzel $\sqrt{(p^2 + k^2)^2 - 4p^2 k^2}$ als $\text{Abs}(p^2 - k^2)$ zusammen.

Es ist möglich eine Lösung zu Gleichung (4.54) für die Massenfunktion $A(p^2)$ zu finden, wenn wir fordern, daß $B(p^2) = 0$ ist. Es ist zwar möglich die Gleichung (4.54) direkt zu integrieren, jedoch führt dies zu keinem einfachen Ergebnis. In Anhang C.2 zeigen wir einen weiteren Lösungsweg mit Hilfe der dimensional Regularisierung, die wir schon in der Diplomarbeit [Gre94] verwendet haben. Leider führt die letzte Integration auch zu einem mehr als unübersichtlichem Ergebnis.

In der Literatur ist es üblich in der Landau Eichung mit der Annahme von $B(p^2) = 0$ in dem „massiven quenched rainbow“ Modell zu rechnen. Im Gegensatz zu unserer Darstellung betrachtet J. Hošek [Hoš87] auch die Beiträge des anderen $U(1)$ Eichbosons B und fordert eine zusätzliche Bedingung für die Kopplungen. Diese Bedingung zwischen den Kopplungen führt dazu, daß der Divergenzgrad der Integralgleichung für die Massenfunktion sich ändert und man ein ähnliches Ergebnis, wie in der masselosen „quenched rainbow“ Näherung (4.24) findet. In diesem Modell ist es nicht möglich für geladene Leptonen und Neutrinos mit dem gleichen Mechanismus eine Masse zu erzeugen, da die Neutrinos nicht mit dem Eichboson B koppeln.

In den Arbeiten von H. Pagels [Pag79, Pag80] wird das asymptotische Verhalten der Lösungen untersucht. Für unsere Betrachtungen helfen uns diese asymptotische Betrachtung nicht weiter.

4.2.1 Massive „Landau-ähnliche quenched rainbow“ Näherung

Wie bereits gesagt versucht man mit dem „Landau-ähnlichen“ Propagator, aus Gleichung (4.56), die Polstruktur der masselosen Theorie zu „immitieren“*.

$$\begin{aligned}
 -\Sigma(p) = & - \int d^4k \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2 - M^2} \right) \\
 & \gamma^\mu \frac{i}{(2\pi)^4} (-1) \frac{\not{k} (1 - B(-k^2)) + A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} i(2\pi)^4 \gamma^\nu \\
 & \text{mit } \Sigma(p) = A(p^2) + \not{p} B(p^2)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Wenn wir alle Schritte des massiven Falls wiederholen erhalten wir folgendes Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}
 A(-p^2) = & -i g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{A(-k^2)}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
 & \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{(p-k)^2}{(p-k)^2 - M^2} \right) \\
 B(-p^2) = & i \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - M^2 - i\epsilon} \frac{(1 - B(-k^2))}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
 & \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 - M^2} \left(((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2 k^2) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\tag{4.59}$$

Damit finden wir für $B(p^2)$, wenn wir insbesondere Gleichung (C.42)-(C.49) aus Anhang C.1.3 berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 B(p^2) = & \frac{g_H^2 Y_{HL} Y_{HR\odot}}{p^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{8\pi^2} \frac{k^2 (1 - B(-k^2))}{-k^2 (1 - B(-k^2))^2 + A^2(-k^2)} \\
 & \left(\alpha \left(\frac{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - (p^2 + k^2 + M^2) \sqrt{(p^2 + k^2 M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} - 2 \right) \right. \\
 & - (\alpha - 1) M^2 \frac{(p^2 + k^2 + M^2) - \sqrt{(p^2 + k^2 M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} \\
 & \left. - (\alpha - 1) M^2 \frac{1}{2\sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}} \right)
 \end{aligned}$$

(4.60)

*Man muß beachten, daß im Nenner vom Propagator der Term $\sim \alpha M^2$ durch M^2 ersetzt ist.

Für $A(p^2)$ finden wir entsprechend, wenn wir Gleichung (C.50)-(C.54) berücksichtigen:

$$A(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 A(k^2)}{k^2(1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \left((3 + \alpha) \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} - (\alpha - 1) \frac{M^2(p^2 + k^2 + M^2)}{4p^2 k^2 \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}} + (\alpha - 1) \frac{M^2}{4p^2 k^2} \right)$$

(4.61)

Wenn wir uns die Gleichungen (4.61) für $A(p^2)$ und die Gleichung (4.60) für $B(p^2)$ im Grenzfall $M^2 \rightarrow 0$ betrachten, findet man:

$$B(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{p^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 (1 - B(k^2))}{16\pi^2 k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \alpha \left(\frac{p^2 + k^2}{\max(p^2, k^2)} - 1 \right)$$

$$A(p^2) = \frac{g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{(3 + \alpha) A(k^2)}{k^2 (1 - B(k^2))^2 + A^2(k^2)} \frac{k^2}{\max(p^2, k^2)}$$

(4.62)

Wie man sieht, nähert man hier im Grenzfall verschwindender Masse M , wegen der gleichen Polstruktur, den masselosen Fall für $B(p^2)$ an. Trotzdem sieht man, daß man in Gleichung (4.60) nur im Grenzfall $M \rightarrow 0$ das Ergebnis $B(p^2) = 0$ der Landau Eichung findet. Im Fall $M \neq 0$ ist der Anteil der Wellenfunktionsrenormierung $B(p^2)$ aus Gleichung (4.60), der in der Landau Eichung nicht verschwindet, proportional M^2 .

Zusammenfassung

Wie wir in diesem Abschnitt gesehen haben, ist es nicht möglich, die einfachen Ergebnissen der masselosen „quenched rainbow“ Näherung auf den massiven Fall zu verallgemeinern. Dabei wird die außergewöhnliche Stellung der Landau-Eichung in dem masselosen Fall klar. Diesen Zusammenhang kommentierte A. Cohen und H. Georgi sehr treffend wie folgt*: „Miraculously, the Integral in the second equation vanishes upon angular integration“ ([CG89]S.9 Absatz 3)

*Mit „second equation“ ist die Gleichung für die Wellenfunktionsrenormierung $B(p^2)$ (4.12) im Falle $\alpha = 0$ gemeint

4.3 Ausblick

Eine weitere Verbesserung der Näherung ist die Verbesserung des Ansatzes für den Vertex. Dabei geht man zum Finden besserer Ansätze für den Vertex wie folgt vor.

Man drückt den Vertex Γ^μ wie folgt aus:

$$i\Gamma^\mu(p, k) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) i\Gamma^\nu(p, k) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} i\Gamma^\nu(p, k), \quad \text{mit } q = p - k \quad (4.63)$$

Drücken wir den Vertex ganz rechts mit Hilfe der Ward-Takahashi Identität (1.83) aus, finden wir:

$$i\Gamma^\mu(p, k) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) i\Gamma^\nu(p, k) + i\frac{q^\mu}{q^2} (S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p)) \quad (4.64)$$

Dieser Vertex erfüllt natürlich die Ward-Takahashi Identität. Interessant ist, daß man den transversalen Vektor $\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) i\Gamma^\nu(p, k)$ durch einen beliebigen transversalen Vektor $\Gamma_T^\mu(p, k)$ ersetzen kann, und dieser auch die Ward-Takahashi Identität erfüllt. Man muß nur darauf achten, daß dieser transversale Vektor $\Gamma_T^\mu(p, k)$ auch die Ward Identität (1.84) erfüllt.

Mit diesem Konstruktionsprinzip ist es also möglich eine Vielzahl von verbesserten Vertices zu konstruieren. Eine besonders schöne Untersuchung mit einem solchen verbesserten Vertex wurde von D. C. Curtis und M. R. Pennington [CP92] und [CP93] vorgenommen. Dabei wurde in [CP93] mit numerischen Methoden gezeigt, daß mit dem verwendeten besseren Vertex Ansatz, die kritische Kopplung unabhängig von der gewählten Eichung ist.

Natürlich führt die Verbesserung des Vertex zu einer wesentlich komplizierteren Rechnung, die analytisch nicht zu lösen ist. Ausserdem benötigt man zusätzliche Argumente, aus einer übergeordneten Theorie, um zu entscheiden welchen transversalen Vektor wir bevorzugen.

Kapitel 5

Untersuchung der Leptonenmasse

Wie bereits im Abschnitt 1.1.5 erwähnt, muß die Basis der Neutrino massenzustände ν_1, ν_2 und ν_3 , nicht identisch mit der Basis der Flavorzustände ν_e, ν_μ und ν_τ sein. Nehmen wir an, daß wir den Zusammenhang zwischen den beiden Basen durch folgende einfache Beziehung beschreiben können*:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (5.1)$$

Zur Zeit gibt es eine Vielzahl von verschiedenen numerischen Parametrisierungen der Massenmatrizen $U_{\alpha a}$ für Leptonen, entsprechend der Kobayashi-Maskawa Matrix für die Quarks, um die verschiedenen Ergebnisse der Neutrinoexperimente, die wir kurz in Kapitel 3 betrachtet haben, konsistent zu betrachten. Als Ansatz wählen wir ein einfaches Modell aus dem Artikel von T. Ohlsson und H. Snellman[OS99], bei dem man von folgenden Annahmen ausgeht:

- Man betrachtet drei Flavor
- Man vernachlässigt eine mögliche CP Verletzung
 - ⇒ Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix der Leptonen ist reell
 - ⇒ Es genügen zur Beschreibung der Lösungen drei Mischungswinkel $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ und zwei Massenquadratdifferenzen Δm^2 und ΔM^2 .
- Keine Berücksichtigung eines möglichen Neutrino losen doppelten Beta-Zerfalls
 - ⇒ Die Neutrinos besitzen wie die geladenen Leptonen einen Dirac-Massenterm und keinen Majorana-Massenterm [Maj37].

*Im folgenden läuft der Index α über die Flavor Zustände und der Index i bzw. j über die Masseneigenzustände

- Die positiven Ergebnisse des LSND-Experiments [AAB⁺96, AAB⁺98] Experiments für Neutrinooszillationen zwischen Elektronneutrino und Myonneutrino bzw. deren Antiteilchen werden nicht berücksichtigt.
- Es tritt kein meßbarer MSW Effekt [MS86, Wol78] in der Sonne oder der Erde auf.
- Maximale Mischung zwischen den Masseneigenzuständen ν_1 und ν_2 , maximale Mischung zwischen den Masseneigenzuständen ν_2 und ν_3 und keine Mischung zwischen den Masseneigenzuständen ν_1 und ν_3 .
- Zur Beschreibung des Kamiokande Ergebnisses für hochenergetische atmosphärische Neutrinos verwenden wir den Ansatz daß $\Delta M^2 = m_3^2 - m_2^2 \simeq 1 \text{ eV}^2$ ist.
- Die zweite Massenquadratdifferenz $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ legen wir nicht fest.

Wir erhalten also folgende Cabbibo-Kobayashi-Maskawa Matrix für Leptonen:

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Betrachten wir jetzt die Lösung die wir in der masselosen quenched rainbow Näherung im Abschnitt 4.1.2 gefunden haben*:

$$\frac{m_{dyn}}{4\Lambda} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4\lambda_{\odot}(g)-1}}} \quad (5.3)$$

$$\lambda_{\odot}(g) \sim g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}$$

Wie wir mit unserer Schreibweise andeuten, hängt die effektive Kopplung $\lambda_{\odot}(g)$ von der Familie (Parameter g) und davon ab, ob es sich bei den Teilchen um Neutrinos oder geladene Leptonen[†] handelt (Index $\odot \in \{\nu, \}$).

Wir werden jetzt versuchen mit Hilfe der bekannten Massen der geladenen Leptonen [PDG98] ein Massenschema für die Neutrinos entsprechend aufzubauen. Dabei sind die Ergebnisse abhängig von der Massenskala Λ die wir wählen. Da wir jedoch nur an qualitativen Ergebnissen interessiert sind ist dies nicht weiter von großer Bedeutung. Die folgende Tabelle 5.1 zeigt eine mögliche Lösung für die geladenen Leptonen[‡].

Um eine Lösung für die Neutrinos zu finden gehen wir jetzt wie folgt vor:

*Wie wir gesehen haben, besitzen alle Lösungen qualitativ das gleiche Verhalten, so daß die Ergebnisse einfach zu übertragen sind. Im Prinzip entspricht die $\sqrt{4\lambda_{\odot}(g)-1}$ im wesentlichen der effektiven Kopplung in der Näherungen des Integrals in Abschnitt 4.1.1. Die Division durch 4Λ bietet sich an, um die Rechnung zu vereinfachen.

[†]Als Index für die Geladenen Leptonen verwenden wir ein Leerzeichen.

[‡]Die Rechnungen wurden, wegen der Rundungsfehler, immer mit genaueren Werten durchgeführt.

Lepton	Masse	$\frac{m_{dyn}}{4\Lambda}$	$\sqrt{4\lambda(g) - 1}$	$\lambda(g)$
e	0,5 MeV	$1 \cdot 10^{-20}$	0,068	0,2512
μ	106 MeV	$2,1 \cdot 10^{-18}$	0,077	0,2515
τ	1777 MeV	$3,6 \cdot 10^{-17}$	0,083	0,2517

Tabelle 5.1: Geladene Leptonenmasse für $\Lambda \simeq 10^{20}$ MeV

- Wir wählen den Massezustand $m_3 = 1$ eV.
 \Rightarrow Der zweite Massenzustand m_2 muß sehr viel kleiner als m_3 sein, damit die Differenz $\Delta M^2 = 1$ eV ist.
- Wir berechnen den Wert der effektiven Kopplung $\lambda_\nu(3)$, der zur Masse $m_3 = 1$ eV gehört.
- Wir nehmen an, daß die Verhältnisse der effektiven Kopplungen nur von den Generationen abhängen, und nicht davon, ob es sich um geladene Fermionen oder Neutrinos handelt.

$$\frac{\lambda(i)}{\lambda(j)} = \frac{\lambda_\nu(i)}{\lambda_\nu(j)} \quad (5.4)$$

- Wir ermitteln das Verhältnis zwischen den Generationen für die geladenen Leptonen aus der Tabelle 5.1 und berechnen damit die Werte der Kopplungen für die Neutrinos der anderen Generationen mit der festgelegten effektiven Kopplung $\lambda_\nu(3)$ für den Massenzustand m_3 .

Folgende Tabelle 5.2 gibt die Ergebnisse dieser Rechenschritte wieder.

Lepton	Masse	$\frac{m_{dyn}}{4\Lambda}$	$\sqrt{4\lambda_\nu(g) - 1}$	$\lambda_\nu(g)$
ν_3	1 eV	$2 \cdot 10^{-26}$	0,053	0,2507
ν_2	$2 \cdot 10^{-6}$ eV	$4,6 \cdot 10^{-32}$	0,044	0,2505
ν_1	$5 \cdot 10^{-31}$ eV	$9,9 \cdot 10^{-57}$	0,024	0,2502

Tabelle 5.2: Neutrinomassen für $\Lambda \simeq 10^{20}$ MeV

Die absoluten Werte besitzen natürlich keine Bedeutung. Damit man ein Gefühl für die Abhängigkeit von Λ bekommt, haben wir in der folgenden Tabelle 5.3 die Rechnung mit einem größeren Masseverhältnis* noch einmal durchgeführt.

*In etwa der Bereich der Planck Masse M_{Planck}

Lepton	Masse	$\frac{m_{dyn}}{4\Lambda}$	$\sqrt{4\lambda_{\odot}(g) - 1}$	$\lambda_{\odot}(g)$
e	0,5 MeV	$1 \cdot 10^{-26}$	0,053	0,2507
μ	106 MeV	$2,1 \cdot 10^{-24}$	0,058	0,2508
τ	1777 MeV	$3,6 \cdot 10^{-23}$	0,061	0,2509
ν_3	1 eV	$2 \cdot 10^{-32}$	0,043	0,2505
ν_2	$2 \cdot 10^{-4}$ eV	$7,7 \cdot 10^{-35}$	0,039	0,2504
ν_1	$3 \cdot 10^{-20}$ eV	$6,5 \cdot 10^{-46}$	0,030	0,2502

Tabelle 5.3: Leptonenmassen für $\Lambda \simeq 10^{26}$ MeV

Wir haben gezeigt, wie man durch die Wechselwirkung mit einem weiteren Eichboson eine dynamische Masse für die Leptonen finden kann. Wenn man jetzt von der Annahme ausgeht, daß die Verhältnisse der Massen zwischen den Familien für Neutrinos und geladenen Leptonen gleich sind, ist es möglich realistische Massen für die Neutrinos zu finden.

Kapitel 6

Resümee

Wir haben im Teil I „Beschreibung der Grundlagen“ das Standard Modell um eine abelsche Eichgruppe erweitert. Im Teil II „Dynamische Massengenerierung für die Leptonen“ haben wir gezeigt, wie man mit Hilfe der dynamischen Massengenerierung, Masse für Leptonen erhalten kann. Die absoluten Zahlenwerte sind nicht wichtig, sondern nur die grundsätzliche Möglichkeit das Problem zu lösen. Die einzige Einschränkung, die wir fanden, ist in der „masselosen quenched rainbow“ Näherung, das Auftreten der kritischen Kopplung α_c .

Man sieht, daß man im Vergleich zur Einführung des Higgs Boson im Standard Modell nichts gewinnt. Auch der Prozess der dynamischen Massengenerierung, in der in dieser Arbeit beschriebenen Weise, führt dazu, daß jede Masse durch einen eigenen Parameter beschrieben wird. Dies liegt darin begründet, daß wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben, die Kopplungen relativ zueinander in diesem Modell keiner Beschränkung unterliegen.

Es ist aber noch zu berücksichtigen, daß wir nicht die komplette Theorie entwickelt haben. So haben wir die Frage welche Teilchen die Rolle der Nambu-Goldstone Bosonen übernehmen unbeantwortet gelassen. Möglich wäre, daß wie beim Higgs-Mechanismus 2.1.2, die Nambu-Goldstone Bosonen vom physikalischen Teil des Spektrums abkoppeln, oder wie im Fall des Nambu-Jona-Lasinio Modells 2.1.4, Bifermionen Felder diese Rolle übernehmen.

Bei dem Versuch die Theorie auf Quarks zu verallgemeinern, treten wegen der starken Wechselwirkung und dem „confinement“, weitere Probleme auf. Diese Probleme führen dazu, daß in den meisten Arbeiten die Quarks wie die Leptonen behandelt werden und nur die Kopplung durch eine „laufende“ Kopplung ersetzt wird.

Die Lösung der Dyson-Schwinger Gleichung für die Bosonen führt wegen der Leptonen-Schleifen (Loops) zu erheblichen Problemen, da die Kopplungen nicht asymptotisch frei sind. Selbst wenn es möglich wäre, dieses Gleichung für die Bosonen zu lösen, haben wir in Abschnitt 4.2 angedeutet, zu welchen Problemen ein Massenterm für das Eichboson in der Dyson-Schwinger Gleichung der Leptonen führt.

Die wichtigste Frage, die in der Zukunft beantwortet werden muß, ist, welcher Vertex die Natur am besten approximiert. Wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, legt die Ward-Takahashi Identität den transversalen Anteil des Vertexes nicht fest. Diesen Anteil des Vertexes muß man mit

Hilfe anderer Überlegungen festlegen. In diesem Zusammenhang steht auch die Frage, was die Landau Eichung in der „masselosen quenched rainbow“ Näherung auszeichnet.

Zum Abschluß dieser Arbeit kann man sagen, daß es uns gelungen ist, zu zeigen, wie der Prozeß der dynamischen Massengenerierung in einer einfachen Erweiterung des Standard Modells einzuführen ist. Dabei haben wir Masse für die Leptonen, insbesondere die Neutrinos gefunden.

Teil III

Anhang

Anhang A

Allgemeine Notationen und Konventionen

In dieser Arbeit verwenden wir das natürliche Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Die Umrechnung auf das experimentell gebräuchlichere cgs-System erfolgt wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ MeV} &\simeq 1.602 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ 1 \text{ MeV}^{-1} &\simeq 197.328 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ 1 \text{ MeV}^{-1} &\simeq 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ s} \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.1 Verwendete Symbole

Tabelle A.1: Notationen und Konventionen

Symbol	Bedeutung
\mathbf{C}	Euler-Konstante
$\mathcal{O}(x)$	Terme der Ordnung x
\simeq	entspricht
$a, b, c, \dots \in \{1, 2, 3\}$	römische Indizes
$\mu, \nu, \xi, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$	griechische Indizes in Minkowski Metrik
$\mu, \nu, \xi, \dots \in \{1, 2, 3, 4\}$	bzw. in euklidischer Metrik
τ_1, τ_2, τ_3	Pauli-Matrizen
γ_μ γ_5	Dirac γ -Matrizen

Symbol	Bedeutung
$\square = \partial_\mu \partial^\mu$	D'Alembert Operator
∂_{p^2}	$\frac{\partial}{\partial p^2}$
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$	Divergenz
†	h.c. Hermitesch konjugiert
$\epsilon_{\mu\nu\xi\varphi}$	Total antisymmetrischer Tensor
$\text{Tr}(\dots)$	Spur
$\max(\dots, \dots)$	Maximum
$[\dots, \dots]$	Kommutator
$\{\dots, \dots\}$	Antikommutator
$\left(\begin{array}{c c} \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right)$	Matrix, die aus Untermatrizen* aufgebaut ist
$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array} \right)$	Metrischer Tensor (Minkowski Raum)

A.2 Relativistische Notation

A.2.1 Dirac-Algebra im Minkowski Raum

Kommutatoren:

$$\begin{aligned}
 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \\
 \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\
 \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

*Die Dimension der Untermatrizen muß nicht gleich sein

Kontraktionen

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \\
\gamma_5 \gamma_5 &= 1 \\
\gamma_\mu \not{\epsilon} \gamma^\mu &= -2a \\
\gamma_\mu \not{\epsilon} \not{b} \gamma^\mu &= 4ab \\
&\dots \\
\not{\epsilon} \not{k} \not{q} &= 2 \not{q} k \cdot q - q^2 \not{k}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Projektionsoperatoren

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \tag{A.4}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = 0 \tag{A.5}$$

Berechnung Spuren

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(a) &= 4a \\
\text{Tr}(\not{\epsilon}) &= 0 \\
\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu} \\
\text{Tr}(\sigma_{\mu\nu}) &= 0 \\
\text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \cdots \not{\epsilon}_{2n+1}) &= 0 \\
\text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \cdots \not{\epsilon}_{2n}) &= \sum_{k=2}^n (-1)^k a_1 a_k \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \cdots \not{\epsilon}_{2n})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Eine spezielle Umrechnung:

$$\begin{aligned}
2p \cdot (p - k) k \cdot (p - k) - (p - k)^2 p \cdot k &= 2(p^2 - p \cdot k)(k \cdot p - k^2) - (p^2 - 2p \cdot k + k^2) \\
&= 2(p^2 k \cdot p - p^2 k^2 - (p \cdot k)^2 + k^2 k \cdot p) - (p^2 + k^2) p \cdot k + 2(k \cdot p)^2 \\
&= 2(p^2 + k^2) p \cdot k - (p^2 + k^2) p \cdot k - 2p^2 k^2 \\
&= (p^2 + k^2) p \cdot k - 2p^2 k^2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2.2 Pauli Matrizen

$$\begin{aligned}
[\tau_i, \tau_j] &= 2i\epsilon_{ijk} \tau_k \\
\text{Tr } \tau_i &= 0; \quad \det \tau_i = 1
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Darstellung:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A.2.3 Gell-Mann Matrizen

$$\begin{aligned} [\lambda_a, \lambda_b] &= 2i f_{abc} \lambda_c \\ \text{Tr } \lambda_a &= 0; \quad \det \lambda_a = 1 \end{aligned} \tag{A.9}$$


Darstellung:


$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A.3 Feynman-Regeln


Die Herleitung der Propagatoren erfolgt in Kapitel 1.3 mit Methoden der Pfadintegralquantisierung.


Fermion


Fermionpropagator	$iS(p) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\not{p} - \Sigma(p)}; \quad \Sigma(p) \equiv A(p^2) + \not{p}B(p^2)$ $iS(p) = \frac{i}{2\pi} (-1) \frac{\not{p}(1-B(p^2)) + A(p^2)}{-p^2(1-B(p^2))^2 + A^2(p^2) - i\epsilon}$	
-------------------	--	---

Fermionpropagator (frei)	$iS(p) = \frac{i}{2\pi} (-1) \frac{\not{p} + m}{-p^2 + m^2 - i\epsilon}$	
-----------------------------	--	---

U(1) Eichboson

Eichboson Propagator $iD_{\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{k^2 - \Pi(k^2) + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \alpha \Pi(k^2)} \right)$ 

Eichboson Propagator (massiv, quenched) $iD_{\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \alpha M^2} \right)$ 

Eichboson Propagator (masselos, quenched) $iD_{\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ 

U(1) Eichboson - Fermion Vertex

Vertex $i\Gamma_\mu$ 

Vertex („rainbow Näherung“) $i(2\pi)^4 \gamma_\mu$ 

A.4 Rechenregeln Grassmannalgebra

Es gilt für zwei Grassmannvariablen C_i, C_j :

$$\{C_i, C_j\} = C_i C_j + C_j C_i = 0 \Rightarrow C_i^2 = 0 \tag{A.10}$$

$$f(C_1, C_2) = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2 \tag{A.11}$$

Differentiation von links:

$$\frac{\partial^L f(C_1, C_2)}{\partial C_1} = a_1 + a_3 C_2 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^L f(C_1, C_2)}{\partial C_2} = a_2 - a_3 C_1 \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \left(C_1 \frac{\partial^L}{\partial C_1} + \frac{\partial^L}{\partial C_1} C_1 \right) f(C_1, C_2) = f(C_1, C_2) \quad (\text{A.14})$$

$$\left\{ C_i, \frac{\partial^L}{\partial C_j} \right\} = 1 \quad \left\{ \frac{\partial^L}{\partial C_i}, \frac{\partial^L}{\partial C_j} \right\} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Integraldefinition (dC_i sei Grassmannvariable)

$$\int dC_i C_i = 1 \quad \int dC_i = 0 \quad (\text{A.16})$$

Integration und Differentiation führen zum gleichen Ergebnis

$$\int dC_1 f(C_1, C_2) = \frac{\partial^L f(C_1, C_2)}{\partial C_1} \quad (\text{A.17})$$

Bei den hier angegebenen Rechenregeln handelt es sich um Verallgemeinerung der Rechenregeln für Grassmannvariablen auf grassmannwertige Felder.

$$\{C(x), C(y)\} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial^{L,R} C(x)}{\partial C(y)} = \delta(x - y) \quad (\text{A.19})$$

$$\int dC(x) = 0 \quad \int dC(x) C(x) = 1 \quad (\text{A.20})$$

Für eine Matrix A und zwei grassmannwertige Felder α und $\bar{\alpha}$ gilt:

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} A \alpha} = \det A \quad (\text{A.21})$$

A.5 Ward-Takahashi Identität

Für die allgemeine Herleitung siehe Kapitel 1.3.4.

$$i(p_\mu - k_\mu) \Gamma^\mu = iS^{-1}(p) - iS^{-1}(k) \quad (\text{A.22})$$

Rainbow Näherung $i\Gamma^\mu = i(2\pi)^4 \gamma^\mu$

$$\not{p} - \not{k} = A(p^2) - A(k^2) + (1 - B(p^2)) \not{p} - (1 - B(k^2)) \not{k} \quad (\text{A.23})$$

A.6 Wick Rotation

Bei der Definition der Lagrangedichte im Minkowski-Raum wird ein Term $\sim -i\epsilon$ addiert, um die Singularitäten der Propagatoren von der reellen Achse ins komplexe zu verschieben.. Zur Berechnung von Integralen ist es notwendig die Integrale von dem Minkowski-Raum in den Euklidischen-Raum überzuführen. Dabei werden die Komponenten im Euklidischen im Allgemeinen von 1-4 durchgezählt.

Man führt eine Drehung in der komplexen Ebene, die keine Singularitäten des Propagators schneidet, wie folgt durch[Wic54]:

$$\begin{aligned}
 q^0 &\rightarrow iq_{\text{euklidisch}}^4 \\
 q^i &\rightarrow q_{\text{euklidisch}}^i \\
 q^2 &\rightarrow -q_{\text{euklidisch}}^2 \\
 d^4q &\rightarrow id^4q_{\text{euklidisch}}
 \end{aligned}
 \tag{A.24}$$

Die Integration im Euklidischen-Raum erfolgt einfach über den \mathbb{R}^4 .

A.7 Fierz Identität

Betrachten wir eine orthogonale Matrix-Basis B^A im Raum \mathbb{M} der $n \times n$ Matrizen M mit Skalarprodukt $\text{Tr}(M_1 M_2)$. Es gilt also:

$$\text{Tr}(B^A B^C) = l^A \delta_{AC} \tag{A.25}$$

Aus der Vollständigkeitsrelation folgt dann:

$$\sum_A \left(\frac{1}{l^A} \right) B_{mn}^A B_{ik}^A = \delta_{mk} \delta_{ni} \quad \text{mit } \{m, n, i, k\} \in \{1, 2, \dots, n\} \tag{A.26}$$

Also findet man für $M, L \in \mathbb{M}$

$$M_{mk} L_{nl} = \sum_A \left(\frac{1}{l^A} \right) (M B^A L)_{ml} B_{nk}^A \tag{A.27}$$

Diese Gleichung ist die allgemeine Fierz Identität.

Anhang B

Nebenrechnungen Kapitel 2

B.1 Nebenrechnung Goldstone Modell

In dieser Nebenrechnung vereinfachen wir den Ausdruck für das Potential V_- in den Variablen ϕ_1 und ϕ_2 . Beachte $\mathbf{v}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

$$\begin{aligned} V_-(\varphi_1, \varphi_2) &= -\frac{\mu^2}{2} \left((\varphi_1^2 + \mathbf{v})^2 + \varphi_2^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left((\varphi_1^2 + \mathbf{v})^2 + \varphi_2^2 \right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4} \left(-2\mathbf{v}^2 \left((\varphi_1^2 + \mathbf{v})^2 + \varphi_2^2 \right) + \left((\varphi_1^2 + \mathbf{v})^2 + \varphi_2^2 \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung erhalten wir:

$$V_-(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\lambda}{4} \left(\left((\varphi_1^2 + \mathbf{v})^2 + \varphi_2^2 - \mathbf{v}^2 \right)^2 - \mathbf{v}^4 \right) \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left((\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\mathbf{v}\varphi_1)^2 - \mathbf{v}^4 \right) \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left(\varphi_1^4 + 2\varphi_1^2\varphi_2^2 + 4\mathbf{v}\varphi_1^3 + \varphi_2^4 + 4\mathbf{v}\varphi_1\varphi_2^2 + 4\mathbf{v}^2\varphi_1^2 - \mathbf{v}^4 \right)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left((\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 + 4\mathbf{v}\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 4\mathbf{v}^2\varphi_1^2 - \mathbf{v}^4 \right)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \right)^2 + \lambda\mathbf{v}\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \lambda\mathbf{v}^2\varphi_1^2 - \frac{\lambda}{4}\mathbf{v}^4$$

Wenn wir jetzt wieder \mathbf{v} durch $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ ausdrücken, erhalten wir:

$$V_-(\varphi_1, \varphi_2) = \mu^2\varphi_1^2 + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Nebenrechnung abelsches Higgs Modell

Die Ableitungen $D_\mu \phi^\dagger(x) D^\mu \phi(x)$ werden durch die neuen Felder $\rho(x)$ und $\alpha(x)$ ausgedrückt.

$$(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (\rho(x) e^{i\alpha(x)})^\dagger \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu (\rho(x) e^{i\alpha(x)}) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \rho(x) + \rho(x) (-i) e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x))$$

$$(e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \rho(x) + \rho(x) (i) e^{i\alpha(x)} \partial^\mu \alpha(x))$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x) - i\rho(x) \partial_\mu \alpha(x)) (\partial^\mu \rho(x) + i\rho(x) \partial^\mu \alpha(x))$$

$$(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x) + \frac{1}{2} \rho^2(x) \partial_\mu \alpha(x) \partial^\mu \alpha(x) \quad (\text{B.6})$$

$$(D_\mu \phi(x))^\dagger D^\mu \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\partial_\mu - igA_\mu) \rho(x) e^{-i\alpha(x)})^\dagger \frac{1}{\sqrt{2}} ((\partial^\mu + igA^\mu) \rho(x) e^{i\alpha(x)}) \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu (\rho(x) e^{-i\alpha(x)}) \partial^\mu (\rho(x) e^{i\alpha(x)}) + \partial_\mu (\rho(x) e^{-i\alpha(x)}) igA^\mu \rho(x) e^{i\alpha(x)}$$

$$- igA_\mu \rho(x) e^{-i\alpha(x)} \partial^\mu (\rho(x) e^{i\alpha(x)}) - igA_\mu \rho(x) e^{-i\alpha(x)} igA^\mu \rho(x) e^{i\alpha(x)})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x) - \rho^2(x) \partial_\mu \alpha(x) \partial^\mu \alpha(x)$$

$$+ igA^\mu \rho(x) (\partial_\mu \rho(x) + i\rho(x) \partial_\mu \alpha(x))$$

$$- igA_\mu \rho(x) (\partial^\mu \rho(x) + i\rho(x) \partial^\mu \alpha(x)) + g^2 \rho^2(x) A_\mu A^\mu)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x) + \rho^2(x) \partial_\mu \alpha(x) \partial^\mu \alpha(x)$$

$$+ 2g\rho^2(x) A_\mu \partial^\mu \alpha(x) + g^2 \rho^2(x) A_\mu A^\mu)$$

$$(D_\mu \phi(x))^\dagger D^\mu \phi(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x) + \rho^2(x) (\partial_\mu \alpha(x) + gA_\mu) (\partial^\mu \alpha(x) + gA^\mu)) \quad (\text{B.8})$$

Jetzt drücken wir noch das Potential $V(\phi(x), \phi^\dagger(x))$ durch $\rho'(x)$ aus. Beachte das $\mathbf{v}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$ und $\rho'(x)\rho(x) - \mathbf{v}$ ist.

$$V(\rho'(x)) = \frac{\mu^2}{2} (\rho'(x) + \mathbf{v})^2 - \frac{\lambda}{4} (\rho'(x) + \mathbf{v})^4 \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{\mu^2}{2} \rho'^2(x) + \mu^2 \mathbf{v} \rho'(x) + \frac{\mu^2}{2} \mathbf{v}^2$$

$$- \frac{\lambda}{4} (\rho'^4(x) + 4\mathbf{v} \rho'^3(x) + 6\mathbf{v}^2 \rho'^2(x) + 4\mathbf{v}^3 \rho'(x) + \mathbf{v}^4)$$

$$= \frac{\mu^2}{2} \rho'^2(x) + \frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}} \rho'(x) + \frac{\mu^4}{2\lambda} - \frac{\lambda}{4} \rho'^4(x) - \sqrt{\lambda} \mu \rho'^3(x) - \frac{3}{2} \mu^2 \rho'^2(x) - \frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}} \rho'(x) - \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

$$V(\rho'(x)) = 2\mu^2 \rho'^2(x) - \frac{\lambda}{4} \rho'^4(x) - \sqrt{\lambda} \mu \rho'^3(x) - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (\text{B.10})$$

Anhang C

Nebenrechnungen Kapitel 4

C.1 Umformung Integral

Wir werden uns im folgenden mit allgemeinen euklidischen Integralen der Form

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(p^2, k^2, p \cdot k) = \int_0^\infty \frac{dk^2}{(2\pi)^3} k^2 \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) f(p^2, k^2, pk \cos \Theta) \quad (\text{C.1})$$

beschäftigen. Zuerst betrachten wir das reine Winkelintegral folgender spezieller einfacher Form mit $x, y \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) f(p^2, k^2, pk \cos \Theta) := \int_0^\pi d\Theta \frac{(-2pk \cos \Theta)^x \sin^2(\Theta)}{(p^2 + k^2 - 2pk \cos(\Theta))^y} \quad (\text{C.2})$$

Die allgemeine Form der Integrale ist also wie folgt zu beschreiben (In unserem Fall ist $a \geq |b|$):

$$I_y^x(a, b) := \int_0^\pi d\Theta \frac{(b \cos(\Theta))^x \sin^2(\Theta)}{(a + b \cos(\Theta))^y} \quad (\text{C.3})$$

mit $a = p^2 + k^2$ und $b = -2pk$

Bei dieser Wahl ist $a \geq |b|$. Man kann jetzt für x, y Rekursionsformeln finden. Wie man sofort sieht gilt für $y > 0$ bei festem x :

$$I_{y+1}^x(a, b) = -\frac{1}{y} \partial_a I_y^x(a, b) \quad (\text{C.4})$$

Zur Reduktion des Grades x im Nenner kann man folgenden Trick verwenden:

$$b \cos(\Theta) = \underbrace{(a + b \cos(\Theta))}_A - a \quad (\text{C.5})$$

Der Anteil A der vorigen Gleichung entspricht genau dem Nenner der Integrale vom Typ $I_y^x(a, b)$ aus Gleichung (C.3). Mit diesem Trick können wir Integrale mit $x > 0$ im Nenner immer auf eine Form abhängig von $x - 1$ bringen.

$$\begin{aligned} I_y^x(a, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{(b \cos(\Theta))^x \sin^2(\Theta)}{(a + b \cos(\Theta))^y} \\ &= \int_0^\pi d\Theta \frac{((a + b \cos(\Theta)) - a)(b \cos(\Theta))^{x-1} \sin^2(\Theta)}{(a + b \cos(\Theta))^y} \\ &= \int_0^\pi d\Theta \frac{(b \cos(\Theta))^{x-1} \sin^2(\Theta)}{(a + b \cos(\Theta))^{y-1}} - \int_0^\pi d\Theta \frac{a(b \cos(\Theta))^{x-1} \sin^2(\Theta)}{(a + b \cos(\Theta))^y} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Man kann also folgende Rekursionsformel für $x, y > 0$ ablesen:

$$I_y^x(a, b) = I_{y-1}^{(x-1)} - a I_y^{(x-1)} \quad (\text{C.7})$$

Für unsere Rechnungen genügt es, wegen der Beziehungen (C.4) und (C.7), die Werte der Integrale $I_0^0(a, b)$ und $I_1^0(a, b)$ zu berechnen. Für das Integral $I_0^0(a, b)$ findet man:

$$I_0^0(a, b) = \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.8})$$

Die Berechnung des Integrals $I_1^0(a, b)$ ist komplizierter. Die Winkelintegration führt man am besten wie folgt ins Komplexe über:

$$\begin{aligned} \Theta &\rightsquigarrow t = e^{i\Theta} \\ \frac{dt}{d\Theta} &= it \\ d\Theta &= \frac{1}{it} dt \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen gehen über in die Integration über den Einheitskreis

$$\int_0^\pi = \frac{1}{2} \oint_C$$

Die Funktionen im Zähler und Nenner drückt man wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \sin(\Theta) &= \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right) \\ \cos(\Theta) &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ a + b \cos(\Theta) &= a + \frac{1}{2} b \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(ta + \frac{1}{2} bt^2 + \frac{1}{2} b \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten also für unser Integral:

$$\begin{aligned} I_1^0(a, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + b \cos(\Theta)} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{it} dt \frac{(\frac{1}{2i})^2 (t - \frac{1}{t})^2}{\frac{1}{t}(ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b)} \\ &= \frac{i}{8} \oint_C dt \frac{(t - \frac{1}{t})^2}{ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Mit Hilfe des Cauchy Integralsatzes $\frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta f(\zeta) = \sum_{i=1}^k \text{Res}[f(z), t_i]$ findet man:

$$\frac{i}{8} \oint_C dt \frac{(t - \frac{1}{t})^2}{ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b} = \frac{i}{8} (2\pi i) \sum_{i=1}^k \text{Res} \left[\frac{(t - \frac{1}{t})^2}{ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b}, t_i \right] \quad (\text{C.10})$$

wobei die Summe über alle Residuen t_i im Einheitskreis gebildet wird. Folgende Singularitäten der Funktion sind für unsere Rechnung interessant:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Wenn wir beachten, daß

$$\begin{aligned} a &= p^2 + k^2 > 0; & b &= -2pk < 0 \\ \Rightarrow a + b &\geq 0 & \Rightarrow \frac{b}{a} &\geq -1 & \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} = \text{Abs} \left(\frac{a}{b} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq \text{Abs} \left(\frac{a}{b} \right)$$

findet man*:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b^2}}{-b} \\ 0 = t_0 &\leq t_1 \leq 1 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Wenn man sich den Integrationsweg in der komplexen Ebene in Abbildung C.1 auf Seite 90 ansieht, erkennt man, daß nur die Polstellen bei $t_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{-b}$ und $t_0 = 0$ innerhalb des Einheitskreises liegen. Man findet also für die Residuen:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{(t - \frac{1}{t})^2}{ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b}, t_0 \right] &= -4 \frac{a}{b^2} \\ \text{Res} \left[\frac{(t - \frac{1}{t})^2}{ta + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}b}, t_1 \right] &= 4 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

*Man muß beachten, daß $b < 0$ ist!

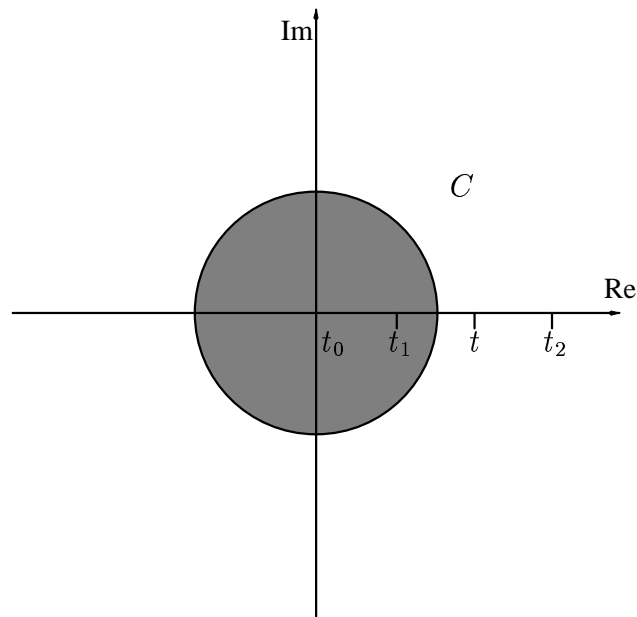


Abbildung C.1: Residuum der Funktion

und damit für das Integral

$$\int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + b \cos(\Theta)} = \pi \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \quad (\text{C.15})$$

bzw. durch p, k ausgedrückt:

$$\int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{p^2 + k^2 - 2pk \cos(\Theta)} = \pi \frac{1}{2 \max(p^2, k^2)} \quad (\text{C.16})$$

Zusammenfassend haben wir also folgende Rechenregeln bzw. speziellen Werte für die Integrale* gefunden:

*Wir drücken auch a, b wieder durch k, p aus.

$$\begin{aligned}
I_{y+1}^x(a, b) &= -\frac{1}{y} \partial_a I_y^x(a, b) \\
I_y^x(a, b) &= I_{y-1}^{x-1}(a, b) - a I_y^{x-1}(a, b) \\
I_0^0(a, b) &= I_0^0 = \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) = \frac{\pi}{2} \\
I_1^0(a, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + b \cos(\Theta)} = \pi \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \\
&\simeq \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{p^2 + k^2 - 2pk \cos(\Theta)} = \pi \frac{1}{2 \max(p^2, k^2)}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

C.1.1 Spezielle Rechnung masseloser Fall

Man findet also folgende Winkelintegration* aus Gleichung (4.9) von Seite 54, wenn man p, k durch $a = p^2 + k^2$ und $b = -2pk$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Theta(a, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p-k)^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha-1}{(p-k)^2} \left(((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2k^2) \right) \right) \\
&= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + b \cos(\Theta)} \left(-b \cos(\Theta) - \frac{\alpha-1}{a + b \cos(\Theta)} \left(\frac{-ab}{2} \cos(\Theta) + \frac{b^2}{2} \right) \right) \tag{C.15} \\
&= -I_1^1(a, b) + (\alpha-1) \frac{a}{2} I_2^1(a, b) - (\alpha-1) \frac{b^2}{2} I_2^0(a, b)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Überlegungen aus Abschnitt C.1 und den Rechenregeln (C.14) findet man:

$$I_2^0(a, b) = - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2} \frac{2a}{b^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \tag{C.16}$$

$$I_1^1(a, b) = I_0^0(a, b) - a I_1^0(a, b) \tag{C.17}$$

$$I_2^1(a, b) = I_1^0(a, b) - a I_2^0(a, b) = I_1^0(a, b) - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \tag{C.18}$$

*Die wir mit $\mathcal{B}_\Theta(a, b)$ bezeichnen

Man erhält also:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Theta(a, b) &= -I_0^0(a, b) + aI_1^0(a, b) + (\alpha - 1)\frac{a}{2} \left(I_1^0(a, b) - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \right) \\
&\quad - (\alpha - 1) \left(\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \right) \\
&= -I_0^0(a, b) + (\alpha + 1)\frac{a}{2} I_1^0(a, b) - (\alpha - 1)\frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(-1 + (\alpha + 1)\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} - (\alpha - 1)\sqrt{a^2 - b^2}\frac{(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{b^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(-1 + (\alpha + 1)\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} - (\alpha - 1)\frac{a\sqrt{a^2 - b^2} - (a^2 - b^2)}{b^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(-1 + (1 - \alpha)\frac{b^2}{b^2} \right. \\
&\quad \left. + (1 + \alpha)\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} - (1 - \alpha)\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \alpha \left(2\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{C.19}$$

wenn man jetzt die Winkelintegration $\mathcal{B}_\Theta(a, b)$ wieder durch p, k ausdrückt, erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Theta(a, b) &\doteq \frac{\pi}{2} \alpha \left(2\frac{(p^2 + k^2)}{4p^2k^2} (p^2 + k^2 - \text{Abs}(p^2 - k^2)) - 1 \right) \\
&\doteq \frac{\pi}{2} \alpha \left(\frac{(p^2 + k^2)}{\max(p^2, k^2)} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{C.20}$$

C.1.2 Spezielle Rechnung massiver Fall

Im Massiven Fall ändern sich die Rechenregeln bzw. speziellen Werte für die Integrale, wenn wir alle Schritte aus dem Abschnitt C.1 wiederholen* wie folgt:

$$I_y^x(a + M^2, b) := \int_0^\pi d\Theta \frac{(b \cos(\Theta))^x \sin^2(\Theta)}{(a + M^2 + b \cos(\Theta))^y} \tag{C.21}$$

*Zum besseren Verständniss schreiben wir die Formeln für $a + M^2$. Wir drücken auch a, b wieder durch k, p aus.

$$\begin{aligned}
I_{y+1}^x(a + M^2, b) &= -\frac{1}{y} \partial_a I_y^x(a + M^2, b) \\
I_y^x(a + M^2, b) &= I_{y-1}^{x-1}(a + M^2, b) - (a + M^2) I_y^{x-1}(a + M^2, b) \\
I_0^0(a + M^2, b) &= I_0^0 = \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) = \frac{\pi}{2} \\
I_1^0(a + M^2, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} = \pi \frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} \\
&\simeq \pi \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2}}{4p^2k^2}
\end{aligned}$$

(C.22)

Man findet also folgende Winkelintegration* aus Gleichung (4.49) von Seite 63, wenn man p, k durch $a = p^2 + k^2$ und $b = -2pk$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Theta^M(a, b) &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p-k)^2 + M^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 + \alpha M^2} (((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2k^2)) \right) \\
&= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} \left(-b \cos(\Theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha - 1}{a + \alpha M^2 + b \cos(\Theta)} \left(\frac{-ab}{2} \cos(\Theta) + \frac{b^2}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

(C.23)

Bei der weiteren Berechnung muß man beachten, daß wir im Gegensatz zu den Nebenrechnungen im masselosen Fall C.1.1 im massiven Fall folgende Polstellen haben:

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0 \\
t_{1,2}^{M^2} &= \frac{-(a + M^2) \pm \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b} \\
t_{1,2}^{\alpha M^2} &= \frac{-(a + \alpha M^2) \pm \sqrt{(a + \alpha M^2)^2 - b^2}}{b}
\end{aligned}$$

(C.24)

mit den Polstellen definiert wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} b (t_{1,2}^{M^2})^2 + (a + M^2) t_{1,2}^{M^2} + \frac{1}{2} b &= 0 \\
\frac{1}{2} b (t_{1,2}^{\alpha M^2})^2 + (a + \alpha M^2) t_{1,2}^{\alpha M^2} + \frac{1}{2} b &= 0
\end{aligned}$$

(C.25)

*Die wir mit $\mathcal{B}_\Theta^M(a, b)$ bezeichnen

Die Überlegungen zur Lage der Polstellen gelten entsprechend dem masselosen Fall, und somit müssen wir t_0 , $t_1^{M^2}$ und $t_1^{\alpha M^2}$ beachten. Zum vereinfachen der Nenner benutzen wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b(t_1^{M^2})^2 + (a + \alpha M^2)t_1^{M^2} + \frac{1}{2}b &= (\alpha - 1)M^2 t_1^{M^2} \\ \frac{1}{2}b(t_1^{\alpha M^2})^2 + (a + M^2)t_1^{\alpha M^2} + \frac{1}{2}b &= -(\alpha - 1)M^2 t_1^{\alpha M^2} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Unter Berücksichtigung der Definition (C.21) und mit Hilfe unserer Rechenregeln (C.22) und Beziehung (C.26) für die Nenner, findet man:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= -I_1^1(a + M^2, b) \\ &+ \frac{(\alpha - 1)\frac{a}{2}}{(\alpha - 1)M^2 t_1^{M^2}} I_1^1(a + M^2, b) + \frac{(\alpha - 1)\frac{a}{2}}{-(\alpha - 1)M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^1(a + \alpha M^2, b) \\ &- \frac{(\alpha - 1)\frac{b^2}{2}}{(\alpha - 1)M^2 t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) - \frac{(\alpha - 1)\frac{b^2}{2}}{-(\alpha - 1)M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= -I_0^0(a + M^2, b) + (a + M^2)I_1^0(a + M^2, b) \\ &+ \frac{a}{2M^2 t_1^{M^2}} I_0^0(a + M^2, b) - \frac{a}{2M^2 t_1^{M^2}} (a + M^2)I_1^0(a + M^2, b) \\ &- \frac{a}{2M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_0^0(a + \alpha M^2, b) + \frac{a}{2M^2 t_1^{\alpha M^2}} (a + \alpha M^2)I_1^0(a + \alpha M^2, b) \\ &- \frac{b^2}{2M^2} \left(\frac{1}{t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) - \frac{1}{t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= - \left(1 - \frac{a}{2M^2 t_1^{M^2}} + \frac{a}{2M^2 t_1^{\alpha M^2}} \right) I_0^0 + (a + M^2)I_1^0(a + M^2, b) \\ &- \frac{a}{2M^2} \left(\frac{a + M^2}{t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + \alpha M^2}{t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \right) \\ &- \frac{b^2}{2M^2} \left(\frac{1}{t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) - \frac{1}{t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Drücken wir die Integrale I_1^0 auch durch $t_1^{M^2}$ bzw. $t_1^{\alpha M^2}$ aus:

$$\begin{aligned} I_1^0(a + M^2, b) &= \pi \frac{a + M^2 - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} = -\pi \frac{t_1^{M^2}}{b} \\ I_1^0(a + \alpha M^2, b) &= \pi \frac{a + \alpha M^2 - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} = -\pi \frac{t_1^{\alpha M^2}}{b} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Somit finden wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= - \left(1 - \frac{a}{2M^2 t_1^{M^2}} + \frac{a}{2M^2 t_1^{\alpha M^2}} \right) \frac{\pi}{2} - \pi \frac{a + M^2}{b} t_1^{M^2} \\ &\quad - \frac{a}{2M^2} \left(-\pi \frac{a + M^2}{b} + \pi \frac{a + \alpha M^2}{b} \right) - \frac{b^2}{2M^2} \left(-\frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= \left(1 - \frac{a}{2M^2 t_1^{M^2}} + \frac{a}{2M^2 t_1^{\alpha M^2}} \right) \frac{\pi}{2} - \pi \frac{a + M^2}{b} t_1^{M^2} \\ &\quad - (\alpha - 1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{M^2} \left(-\frac{M^2}{b} + \frac{\alpha M^2}{b} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi a}{4M^2} \left(\frac{1}{t_1^{M^2}} - \frac{1}{t_1^{\alpha M^2}} \right) - \pi \frac{a + M^2}{b} t_1^{M^2} - (\alpha - 1)^2 \frac{\pi}{2} \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Theta}^M(a, b) &= -\frac{\pi}{2} - (\alpha - 1)^2 \frac{\pi}{2} \frac{a}{b} + \frac{\pi a}{4M^2} \left(\frac{b}{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{a + \alpha M^2 - \sqrt{(a + \alpha M^2)^2 - b^2}} \right) \\ &\quad + \pi \frac{a + M^2}{b} \frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} &\simeq -\frac{\pi}{2} - (\alpha - 1)^2 \frac{\pi}{2} \frac{p^2 + k^2}{2pk} \\ &\quad + \pi \frac{p^2 + k^2}{4M^2} \left(\frac{2pk}{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2pk}{p^2 + k^2 + \alpha M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + \alpha M^2)^2 - 4p^2 k^2}} \right) \\ &\quad + \pi (p^2 + k^2 + M^2) \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Betrachten wir die Winkelintegration $A(p^2)$

Betrachten wir jetzt Gleichung (4.52):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Theta^M(a, b) &:= \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) \frac{1}{(p-k)^2 + M^2} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{(p-k)^2}{(p-k)^2 + \alpha M^2} \right) \\ &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\theta)} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{a + b \cos(\theta)}{a + \alpha M^2 + b \cos(\theta)} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Die Definitionen und Rechenregeln entsprechen Gleichung (C.21)-(C.26). Bei der weiteren Berechnung müssen wir für den Fall $\alpha \neq 0$ die drei Polstellen t_0 , $t_1^{M^2}$, und $t_1^{\alpha M^2}$ berücksichtigen*. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Theta^M(a, b) &= 4I_1^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1) \left(\frac{a}{(\alpha - 1)M^2 t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{-(\alpha - 1)M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\alpha - 1)M^2 t_1^{M^2}} I_1^1(a + M^2, b) + \frac{1}{-(\alpha - 1)M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^1(a + \alpha M^2, b) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Theta^M(a, b) &= 4I_1^0(a + M^2, b) + \frac{a}{M^2 t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a}{M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \\ &\quad + \frac{1}{M^2 t_1^{M^2}} I_0^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{M^2 t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) \\ &\quad - \frac{1}{M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_0^0(a + \alpha M^2, b) + \frac{a + M^2}{M^2 t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Theta^M(a, b) &= 4I_1^0(a + M^2, b) + \left(\frac{1}{M^2 t_1^{M^2}} - \frac{1}{M^2 t_1^{\alpha M^2}} \right) I_0^0 \\ &\quad - \frac{1}{t_1^{M^2}} I_1^0(a + M^2, b) + \frac{1}{t_1^{\alpha M^2}} I_1^0(a + \alpha M^2, b) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

*Im Fall $\alpha = 0$ ist die Singularität $t_{1,2}^{\alpha M^2}$ eine hebbare Singularität. Am Ende der Rechnung geben wir das Ergebnis für $\alpha = 0$ an.

Berücksichtigen wir Gleichung (C.22) und (C.30) um die Integrale auszudrücken, finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Theta}^M(a, b) &= -4\pi \frac{t_1^{M^2}}{b} + \left(\frac{1}{M^2 t_1^{\alpha M^2}} - \frac{1}{M^2 t_1^{M^2}} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b} - \frac{\pi}{b} \\
&= \pi \frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{M^2(a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{M^2(a + \alpha M^2 - \sqrt{(a + \alpha M^2)^2 - b^2})} \right)
\end{aligned} \tag{C.39}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Theta}^M(a, b) &\doteq 4\pi \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2}}{4p^2k^2} \\
&+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{2pk}{M^2(p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2pk}{M^2(p^2 + k^2 + \alpha M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + \alpha M^2)^2 - 4p^2k^2})} \right)
\end{aligned} \tag{C.40}$$

Betrachten wir jetzt noch den Fall $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Theta}^M(a, b)|_{\alpha=0} &= 3I_1^0(a + M^2, b) \\
&= 3\pi \frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} \\
&\doteq 3\pi \frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2}}{4p^2k^2}
\end{aligned} \tag{C.41}$$

C.1.3 Landau ähnliche Eichung

Bei der Landau ähnlichen Eichung simuliert man die Polstruktur der masselosen Theorie.

$$\mathcal{B}_\Theta^L(a, b) \simeq \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p-k)^2 + M^2} \left(2p \cdot k - \frac{\alpha - 1}{(p-k)^2 + M^2} \left(((k^2 + p^2)k \cdot p + 2p^2 k^2) \right) \right) \quad (\text{C.42})$$

$$= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} \left(-b \cos(\Theta) - \frac{\alpha - 1}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} \left(\frac{-ab}{2} \cos(\Theta) + \frac{b^2}{2} \right) \right) \quad (\text{C.43})$$

Mit Hilfe unserer Rechenregeln (C.26) findet man:

$$I_2^0(a + M^2, b) = - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2} \frac{2(a + M^2)}{b^2 \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \quad (\text{C.44})$$

$$I_1^1(a + M^2, b) = I_0^0(a + M^2, b) - (a + M^2) I_1^0(a + M^2, b) \quad (\text{C.45})$$

$$I_2^1(a + M^2, b) = I_1^0(a + M^2, b) - (a + M^2) I_2^0(a + M^2, b) = I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \quad (\text{C.46})$$

Man erhält also:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Theta^L(a, b) &= -I_0^0(a + M^2, b) + (a + M^2) I_1^0(a + M^2, b) \\ &+ (\alpha - 1) \frac{a}{2} \left(I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \right) \\ &- (\alpha - 1) \left(\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Wenn wir jetzt die Gleichung wie folgt ergänzen, finden wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Theta^L(a, b) &= \left. \begin{aligned} &-I_0^0(a + M^2, b) + (a + M^2) I_1^0(a + M^2, b) \\ &- (\alpha - 1) \left(\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} I_1^0(a, b) \right) \\ &+ (\alpha - 1) \frac{a + M^2}{2} \left(I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \right) \end{aligned} \right\} I \\ &- (\alpha - 1) \frac{M^2}{2} \left(I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \right) \left. \right\} II \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Der Teil I der Gleichung entspricht genau Gleichung (C.19) der Rechnung im masselosen Teil, nur daß wir a durch $a + M^2$ ersetzen müssen. Wir können also einfach unser Ergebnis übernehmen. Betrachten wir jetzt noch den zusätzlichen Teil II :

$$\begin{aligned} & \left(I_1^0(a + M^2, b) - \frac{a + M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} I_1^0(a + M^2, b) \right) = \\ & \pi \left(\frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - \frac{(a + M^2)(a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2})}{b^2 \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right) = \\ & \pi \left(\frac{2(a + M^2) \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2} - 2(a + M^2)^2 + b^2}{b^2 \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right) \\ & 2\pi \left(\frac{(a + M^2) - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - \frac{1}{2\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right) \end{aligned}$$

Damit finden wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Theta^L(a, b) &= \pi \alpha \left(\frac{(a + M^2)^2 - (a + M^2) \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - 2 \right) \\ & - (\alpha - 1) (M^2 \pi) \left(\frac{(a + M^2) - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - \frac{1}{2\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \right) \\ \mathcal{B}_\Theta^L(a, b) &= \pi \alpha \left(\frac{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - (p^2 + k^2 + M^2) \sqrt{(p^2 + k^2 M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} - 2 \right) \\ & - (\alpha - 1) M^2 \pi \frac{(p^2 + k^2 + M^2) - \sqrt{(p^2 + k^2 M^2)^2 - 4p^2 k^2}}{4p^2 k^2} \\ & + (\alpha - 1) M^2 \pi \frac{1}{2\sqrt{(p^2 + k^2 M^2)^2 - 4p^2 k^2}} \end{aligned} \quad (C.49)$$

Untersuchen wir jetzt die Massenfunktion α :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Theta^L(a, b) &\simeq \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{(p - k)^2 + M^2} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{(p - k)^2}{(p - k)^2 + M^2} \right) \\ &= \int_0^\pi d\Theta \frac{\sin^2(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} \left(4 + (\alpha - 1) \frac{a + b \cos(\Theta)}{a + M^2 + b \cos(\Theta)} \right) \end{aligned} \quad (C.50)$$

Mit den Rechenregeln (C.44) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Theta^L(a, b) &= 4I_1^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1)aI_2^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1)I_2^1(a + M^2, b) \\
&= 4I_1^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1)aI_2^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1)I_1^0(a + M^2, b) \\
&\quad - (\alpha - 1)(a + M^2)I_2^0(a + M^2, b) \\
&= (3 + \alpha)I_1^0(a + M^2, b) + (\alpha - 1)M^2I_2^0(a + M^2, b)
\end{aligned} \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned}
&= (3 + \alpha)I_1^0(a + M^2, b) - (\alpha - 1)\frac{M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}I_1^0(a + M^2, b) \\
&= (3 + \alpha)\pi\frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} \\
&\quad - (\alpha - 1)\pi\frac{M^2}{\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}\frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2}
\end{aligned} \tag{C.52}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Theta^L(a, b) &= (3 + \alpha)\pi\frac{a + M^2 - \sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}}{b^2} - (\alpha - 1)\pi\frac{M^2(a + M^2)}{b^2\sqrt{(a + M^2)^2 - b^2}} \\
&\quad + (\alpha - 1)\pi\frac{M^2}{b^2}
\end{aligned} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Theta^L(a, b) &\simeq \alpha\pi\frac{p^2 + k^2 + M^2 - \sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2}}{4p^2k^2} \\
&\quad - (\alpha - 1)\pi\frac{M^2(p^2 + k^2 + M^2)}{4p^2k^2\sqrt{(p^2 + k^2 + M^2)^2 - 4p^2k^2}} + (\alpha - 1)\pi\frac{M^2}{4p^2k^2}
\end{aligned} \tag{C.54}$$

C.2 Berechnung massive Näherung

$$A(p^2) = -3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{A(k^2)}{k^2 + A^2(k^2)} \frac{1}{(p - k)^2 + M^2} \tag{C.55}$$

Ersetzen wir jetzt im Integral $A(k^2)$ durch $A(p^2)$ und werten die Gleichung am Punkt $p^2 = m^2$ aus, dann erhalten wir:

$$m = -3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p - k)^2 + M^2} \tag{C.56}$$

Wenn wir jetzt eine Feynman Parameterisierung durchführen, ergibt sich:

$$m = -3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{((k - \alpha m)^2 + (1 - \alpha^2)m^2 + \alpha M^2)^2} \tag{C.57}$$

Tauschen wir jetzt die Integrationsreihenfolge und ersetzen die Integrationsvariable $k \rightarrow k' = k - \alpha m$

$$m = -3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} m \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 (k'^2 + (1 - \alpha^2)m^2 + \alpha M^2)^2} \quad (C.58)$$

Drücken wir das Integral jetzt durch eine dimensionslose Integrationskonstante $k = \frac{k'}{M}$ aus finden wir:

$$m = -3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}} m \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2 + (1 - \alpha^2)m^2 + \alpha M^2)^2} \quad (C.59)$$

Werten wir das Integral mit Hilfe der dimensional Regularisierung C.2.1 aus und beachten, daß der singuläre Term $\sim \frac{1}{4-\omega}$ für $\omega \rightarrow 4$ durch einen geeigneten Kompensationsterm zu beseitigen ist. Wir finden also, wenn wir insbesondere Gleichung (C.72) berücksichtigen:

$$m \simeq \frac{3g_H^2 Y_{H_L} Y_{H_{R\odot}}}{(4\pi)^2} m \int_0^1 d\alpha \log \left((1 - \alpha^2) \frac{m^2}{M^2} + \alpha \right) \quad (C.60)$$

Die α Integration kann zwar ausgeführt werden, führt aber zu einem unübersichtlichem Ergebnis.

C.2.1 Dimensionale Regularisierung*

Beginnen wir mit einigen Formeln zur Vorbereitung:

- Oberflächenelement in einem Raum der Dimension ω mit Hypersphäre $S_{\omega-1}$:

$$\int_{S_{\omega-1}} d\Omega = \frac{2 \pi^{\frac{\omega}{2}}}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \quad (C.61)$$

- Variablensubstitution in 1-dimensionalen Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{1}{(m^2)^\alpha} \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(\frac{q^2}{m^2} + 1)^\alpha} \\ q &\longrightarrow r = \frac{q^2}{m^2} \quad ; \quad \frac{dr}{dq} = 2 \frac{q}{m^2} \\ \Leftrightarrow I &= \frac{1}{2 (m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \int_0^\infty dr \frac{r^{\frac{\beta+\omega}{2}-1}}{(r+1)^\alpha} \end{aligned} \quad (C.62)$$

*Dieses Kapitel entspricht dem Anhang B.3.2 der Diplomarbeit [Gre94]

- Beta-Funktion [AS72]:

$$\mathcal{B}(x, y) = \int dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{C.63})$$

Für ein allgemeines euklidische Integral gilt:

$$I(\beta, \alpha) = \int \frac{d^\omega q}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\beta}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{C.64})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^\omega} \int_{S_{\omega-1}} d\Omega \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{C.65})$$

$$\stackrel{\text{C.61}}{=} \frac{1}{(2\pi)^\omega} \frac{2 \pi^{\frac{\omega}{2}}}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{C.66})$$

$$\stackrel{\text{C.62}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{2}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{2 (m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \int_0^\infty dq \frac{q^{\frac{\beta+\omega}{2}-1}}{(q+1)^\alpha} \quad (\text{C.67})$$

$$\stackrel{\text{C.63}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}} \Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\beta+\omega}{2}, \alpha - \frac{\beta+\omega}{2}\right) \quad (\text{C.68})$$

Wir benötigen für unsere Rechnung nur den Spezialfall $\beta = 0, \alpha = 2$. Für diesen Spezialfall findet man:

$$I(0, 2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}} \Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{(m^2)^{2 - \frac{\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{2}, 2 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{C.69})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{(m^2)^{2 - \frac{\omega}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{2}) \Gamma(2 - \frac{\omega}{2})}{\Gamma(2)} \quad (\text{C.70})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{(m^2)^{2 - \frac{\omega}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{C.71})$$

Dieses Integral besitzt jetzt einen Pol im Grenzfall $\omega \rightarrow 4$. Wenn wir das Integral in einer Laurent-Reihe um den Pol bei $\omega = 4$ entwickeln finden wir:

$$I(0, 2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4 - \omega} - \mathbf{C} + \ln(4\pi) - \ln m^2 \right) + \mathcal{O}(4 - \omega) \quad (\text{C.72})$$

C.3 Hypergeometrische Differentialgleichung

Wir betrachten folgende hypergeometrische Differentialgleichung aus Kapitel 4.1

$$p^2(p^2 + m^2) \partial_{p^2}^2 A(p^2) + 2(p^2 + m^2) \partial_{p^2} A(p^2) + \lambda A(p^2) = 0 \quad (\text{C.73})$$

Mit Nebenbedingungen:

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} ((p^2)^2 \partial_{p^2} A(p^2)) = 0 \quad (\text{C.74})$$

$$A(\Lambda^2) + \Lambda^2 \partial_{p^2} A(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2} = 0 \quad (\text{C.75})$$

Zuerst bringen wir die Gleichung auf die in der Literatur [AS72] bzw. [Bat53] übliche Standardform.

$$z(1-z)\partial_z^2 \omega(z) + (c - (1+a+b)z)\partial_z \omega(z) + ab\omega(z) = 0 \quad (\text{C.76})$$

Dazu setzen wir $z := -\frac{p^2}{m^2}$, $A(-m^2 z) = \tilde{A}(z)$ und berücksichtigen, daß $\partial_{p^2} = -m^2 \partial_z$ ist. Wir erhalten also:

$$z(1-z)\partial_z^2 \tilde{A}(z) + (2-2z)\partial_z \tilde{A}(z) + \lambda \tilde{A}(z) = 0 \quad (\text{C.77})$$

Wenn man dies mit der Standardform der hypergeometrischen Differentialgleichung (C.76) vergleicht, findet man:

$$c = 2; \quad a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; \quad b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \quad (\text{C.78})$$

Die Allgemeine Lösung der Gleichung (C.73) ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\begin{aligned} A(p^2) = & \text{const}_1 {}_2\mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; 2; -\frac{p^2}{m^2} \right) \\ & + \text{const}_2 \mathcal{G}_{22}^{20} \left(-\frac{p^2}{m^2} \middle| \begin{array}{cc} -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} & -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \\ -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Bei der Funktion ${}_2\mathcal{F}_1(a, b; c; d)$ handelt es sich um die hypergeometrische Funktion und bei \mathcal{G}_{22}^{20} um die Meijer G Funktion*. Wenn man sich jetzt die Nebenbedingung im IR (C.74) betrachtet, findet man, wenn man die Lösung $A(p^2)$ aus Gleichung (C.79) betrachtet, daß $\text{const}_2 = 0$ ist[†], da $\mathcal{G}_{22}^{20}(\dots) \sim \mathcal{O}(\frac{1}{p^2})$ ist, und

$$\begin{aligned} \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left((p^2)^2 \partial_{p^2} {}_2\mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; 2; -\frac{p^2}{m^2} \right) \right) \\ \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left((p^2)^2 {}_2\mathcal{F}_1 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; 3; -\frac{p^2}{m^2} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

*Für die Definition der Funktionen siehe [Bat53]

†Siehe [AS72] Gleichung (15.5.18) bzw. (15.5.19) für eine Darstellung der Lösungen der Differentialgleichung in der Nähe von Null.

Die Konstante const_1 legen wir durch die Bedingung fest, daß $A(p^2 = m^2) = m$ sein soll. Wir erhalten also, wenn wir die Funktion $\mathcal{F}(\lambda)$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{F}(\lambda) \equiv {}_2\mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; 2; -1 \right) = \frac{4 \cos \left(\pi \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \right)}{\pi \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \right) \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \right)}$$

mit Werten: $\mathcal{F} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{4}{\pi} \simeq 1.27$; $\mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\Gamma \left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \right) \Gamma \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \right)} \simeq 1.60$

(C.80)

Somit erhalten wir:

$$\text{const}_1 \equiv m_\lambda = \frac{m}{\mathcal{F}(\lambda)} \quad (C.81)$$

Bis jetzt haben wir noch nicht ausgeschlossen, daß $A(p^2)$ einen konstanten Anteil $(m_0)^2$ enthält. Die Bedingung im UV (C.75) führt zu einer Relation zwischen m , m_0 , und λ . Um diese Bedingung zu finden, betrachten wir die asymptotische Form dieser Gleichung:

$$B(p^2) \underset{p^2 \gg m^2}{\simeq} \begin{cases} m_\lambda \left(\frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(\frac{\omega+1}{2})\Gamma(\frac{\omega+3}{2})} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^{-\frac{\omega-1}{2}} \frac{\Gamma(-\omega)}{\Gamma(\frac{1-\omega}{2})\Gamma(\frac{3-\omega}{2})} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^{-\frac{(\omega+1)}{2}} \right) & \text{für } \lambda > \frac{1}{4} \\ \frac{2m_\lambda}{\pi} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{p^2}{m^2} + 2(2 \ln 2 - 1) \right) & \text{für } \lambda = \frac{1}{4} \\ m_\lambda \left(\frac{8 \text{cth} \frac{\pi \tilde{\omega}}{2}}{\pi \tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} \ln \frac{p^2}{m^2} + \tilde{\omega}(2 \ln 2 - 1) \right) & \text{für } \lambda < \frac{1}{4} \end{cases} \quad (C.82)$$

mit: $\omega \equiv \sqrt{1 - 4\lambda}$ $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{4\lambda - 1}$

Wenn wir die Näherungen in die UV Bedingung (C.75) einsetzen finden wir in den verschiedenen Fällen:

(a) $\lambda < \lambda_{\text{crit.}} = \frac{1}{4}$

$$m_0 \simeq m_\lambda \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(\frac{\omega+1}{2}) \Gamma(\frac{\omega+3}{2})} \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^{\omega-1} \quad (C.83)$$

Diese Beziehung zeigt, daß bei endlichem Cut-Off Λ , wenn die Masse $m_0 = 0$ ist, auch die physikalische Masse gleich Null ist. Es tritt also keine spontane Symmetriebrechung in diesem Fall auf. ab

(b) $\lambda = \lambda_{\text{crit.}} = \frac{1}{4}$

$$m_0 \simeq \frac{4m_\lambda}{\pi} \left(\ln \frac{\Lambda}{m} + 2 \ln 2 - 1 \right) \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^{-1} \quad (\text{C.84})$$

Wie im zuvor behandelten Fall, tritt keine spontane Symmetriebrechung bei endlichem Cut-Off Λ auf, wenn die Masse $m_0 = 0$ ist.

(c) $\lambda > \lambda_{\text{crit.}} = \frac{1}{4}$

$$m_0 \simeq m_\lambda \frac{m}{\Lambda} \left(\frac{2 \operatorname{cth} \frac{\pi \tilde{\omega}}{2}}{\pi \tilde{\omega}} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\tilde{\omega} \ln \frac{\Lambda}{m} + \arg \frac{\Gamma(1 + i\tilde{\omega})}{\Gamma^2 \left(\frac{1+i\tilde{\omega}}{2} \right)} \right) \quad (\text{C.85})$$

Wenn wir jetzt den chiralen Grenzwert mit $m_0 = 0$ betrachten, finden wir folgende Beziehung:

$$\sin \left(\tilde{\omega} \ln \frac{\Lambda}{m_{\text{dyn}}} + \arg \frac{\Gamma(1 + i\tilde{\omega})}{\Gamma^2 \left(\frac{1+i\tilde{\omega}}{2} \right)} \right) = 0 \quad (\text{C.86})$$

Diese Gleichung besitzt also eine unendliche Anzahl nichttrivialer Lösungen. In der Nähe der kritischen Kopplung $\alpha - \alpha_c \ll 1$, sind diese durch

$$m_{\text{dyn}}^{(n)} \simeq 4\Lambda e^{-\frac{\pi n}{\tilde{\omega}}} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.87})$$

zu beschreiben.

Literaturverzeichnis

- [AAB⁺95] ATHANASSOPOULOS, C., L. B. AUERBACH, D. A. BAUER, R. D. BOLTON, B. BOYD, R. L. BURMAN, D. O. CALDWELL, I. COHEN, B. D. DIETERLE, J. B. DONAHUE, A. M. EISNER, A. FAZELY, F. J. FEDERSPIEL, G. T. GARVEY, M. GRAY, R. M. GUNASINGHA, V. HIGHLAND, R. IMLAY, K. JOHNSTON, W. C. LOUIS, A. LU, J. MARGULIES, K. MCILHANY, W. METCALF, R. A. REEDER, V. SANDBERG, M. SCHILLACI, D. SMITH, I. STANCU, W. STROSSMAN, M. K. SULLIVAN, G. J. VANDALEN, W. VERNON, Y-X. WANG, D. H. WHITE, D. WHITEHOUSE, D. WORKS, Y. XIAO und S. YELLIN: *Candidate Events in a Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations*. Phys. Rev. Lett., 75(14):2650–2653, 1995.
- [AAB⁺96] ATHANASSOPOULOS, C., L. B. AUERBACH, R. L. BURMAN, I. COHEN, D. O. CALDWELL, B. D. DIETERLE, J.B. DONAHUE, A. M. EISNER, A. FAZELY, F. J. FEDERSPIEL, G. T. GARVEY, M. GRAY, R. M. GUNASINGHA, R. IMLAY, K. JOHNSTON, H. J. KIM, W. C. LOUIS, R. MAJKIC, J. MARGULIES, K. MCILHANY, W. METCALF, G. B. MILLS, R. A. REEDER, V. SANDBERG, D. SMITH, I. STANCU, W. STROSSMAN, R. TAYLOE, G. J. VANDALEN, W. VERNON, N. WADIA, J. WALTZ, Y-X. WANG, D. H. WHITE, D. WORKS, Y. XIAO und S. YELLIN: *Evidence for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations from the LSND Experiment at the Los Alamos Meson Physics Facility*. Phys. Rev. Lett., 15(77):3082–3085, 1996.
- [AAB⁺98] ATHANASSOPOULOS, C., L. B. AUERBACH, R. L. BURMAN, D. O. CALDWELL, E. D. CHURCH, I. COHEN, J. B. DONAHUE, A. FAZELY, F. J. FEDERSPIEL, G. T. GARVEY, R. M. GUNASINGHA, R. IMLAY, K. JOHNSTON, H. J. KIM, W. C. LOUIS, R. MAJKIC, K. MCILHANY, G. B. MILLS, R. A. REEDER, V. SANDBERG, D. SMITH, I. STANCU, W. STROSSMAN, R. TAYLOE, G. J. VANDALEN, W. VERNON, N. WADIA, J. WALTZ, D. H. WHITE, D. WORKS, Y. XIAO und S. YELLIN: *Results on $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Neutrino Oscillations from the LSND Experiment*. Phys. Rev. Lett., 81(9):1774–1777, 1998.
- [AS72] ABRAMOWITZ, M. und I. A. STEGUN (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publ., 9.Dover printing Auflage, 1972.

- [Atk91] ATKINSON, D.: *The Application of Bifurcation Theory to Dynamical Symmetry Breaking*. In: BANDO, M., T. MUTA und K. YAMAWAKI (Herausgeber): *New Trends in Strong Coupling Gauge Theories: Nagoya, 24 - 27 Aug., 1988 / 1988 International Workshop on New Trends in Strong Coupling Gauge Theories*, Seite 90. World Scientific, 1991.
- [Bat53] BATEMAN, H.: *Higher Transcendental Functions*, Band 1. MacGraw-Hill Book Co., 1953. Based, in part, on notes left by Harry Bateman and compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology.
- [BCS57] BARDEEN, J., L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER: *Microscopic Theory of Superconductivity*. Phys. Rev., 106:162–164, 1957.
- [Bug58a] BUGOLIUBOV, N. N.: *A New Method in the Theory of Superconductivity I*. Soviet. Phys. JETP, 7:41–50, 1958.
- [Bug58b] BUGOLIUBOV, N. N.: *A New Method in the Theory of Superconductivity III*. Soviet. Phys. JETP, 7:51, 1958.
- [CG89] COHEN, A. und H. GEORGI: *Walking Beyond the Rainbow*. Nucl. Phys., B314:7–24, 1989.
- [CP92] CURTIS, D. C. und M. R. PENNINGTON: *Generating Fermion Mass in Four-Dimensional Quenched QED*. Phys. Rev. D, 46(6):2663, 1992. Errata: Phys. Rev. D 47(4)(1993).
- [CP93] CURTIS, D. C. und M. R. PENNINGTON: *Nonperturbative Study of the Fermion Propagator in Quenched QED in Covariant Gauges Using a Renormalizable Truncation of the Schwinger-Dyson Equation*. Phys. Rev. D, 48(10):4933, 1993.
- [DP78] DRAGOVIĆ, B. G. und D. P. MAVLO A. T. PHILIPPOV: *Investigation of Solutions of the Dyson-Schwinger Equation for Electron Propagator in Quantum Electrodynamics*. Fizika, 10:51–74, 1978. YU ISS 001 5-3206.
- [EL99] ERLER, J. und P. LANGACKER: *Constraints on Extended Neutral Gauge Structures*. Phys. Lett. B, 456:68–76, 1999.
- [FHI⁺98] FUKUDA, Y., T. HAYAKAWA, E. ICHIHARA, K. INOUE, K. ISHIHARA, H. ISHINO, Y. ITOW, T. KAJITA, J. KAMEDA, S. KASUGA, K. KOBAYASHI, Y. KOBAYASHI, Y. KOSHIO, M. MIURA, M. NAKAHATA, S. NAKAYAMA, A. OKADA, K. OKUMURA, N. SAKURAI, M. SHIOZAWA, Y. SUZUKI, Y. TAKEUCHI, Y. TOTSUKA, S. YAMADA, M. EARL, A. HABIG, E. KEARNS, M. D. MESSIER, K. SCHOLBERG, J. L. STONE, L. R. SULAK, C. W. WALTER, M. GOLDBABER, T. BARSZCZAK,

- D. CASPER, W. GAJEWSKI, P. G. HALVERSON, J. HSU, W. R. KROPP, L. R. PRICE, F. REINES, M. SMY, H. W. SOBEL, M. R. VAGINS, K. S. GANEZER, W. E. KEIG, R. W. ELLSWORTH, S. TASAKA, J. W. FLANAGAN, A. KIBAYASHI, J. G. LEARNED, S. MATSUNO, V. J. STENGER, D. TAKEMORI, T. ISHII, J. KANZAKI, T. KOBAYASHI, S. MINE, K. NAKAMURA, K. NISHIKAWA, Y. OYAMA, A. SAKAI, M. SAKUDA, O. SASAKI, S. ECHIGO, M. KOHAMA, A. T. SUZUKI, T. J. HAINES, E. BLAUFUSS, B. K. KIM, R. SANFORD, R. SVOBODA, M. L. CHEN, Z. CONNER, J. A. GOODMAN, G. W. SULLIVAN, J. HILL, C. K. JUNG, K. MARTENS, C. MAUGER, C. MCGREW, E. SHARKEY, B. VIREN, C. YANAGISAWA, W. DOKI, K. MIYANO, H. OKAZAWA, C. SAJI, M. TAKAHATA, Y. NAGASHIMA, M. TAKITA, T. YAMAGUCHI, M. YOSHIDA, S. B. KIM, M. ETOH, K. FUJITA, A. HASEGAWA, T. HASEGAWA, S. HATAKEYAMA, T. IWAMOTO, M. KOGA, T. MARUYAMA, H. OGAWA, J. SHIRAI, A. SUZUKI, F. TSUSHIMA, M. KOSHIBA, M. NEMOTO, K. NISHIJIMA, T. FUTAGAMI, Y. HAYATO, Y. KANAYA, K. KANEYUKI, Y. WATANABE, D. KIELCZEWSKA, R. A. DOYLE, J. S. GEORGE, A. L. STACHYRA, L. L. WAI, R. J. WILKES und K. K. YOUNG: *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*. Phys. Rev. Lett., 8(81):1562–1567, 1998.
- [FJ82] FARHI, E. und R. JACKIW (Herausgeber): *Dynamical Gauge Symmetry Breaking*. World Scientific, 1982. A Collection of Reprints.
- [FK76] FUKUDA, R. und T. KUGO: *Schwinger-Dyson Equation for Massless Vector Theory and the Absence of a Fermion Pole*. Nucl. Phys., B117:250–264, 1976.
- [GJ82] GROSS, D. J. und R. JACKIW: *Effect of Anomalies on Quasi-Renormalizable Theories*. Phys. Rev. D, 6(2):477, 1982.
- [Gla80] GLASHOW, S. L.: *Towards a Unified Theory: Threads in a Tapestry*. Rev. Mod. Phys., 3(52):539–543, 1980. Nobelpreisrede 1979.
- [Gol61] GOLDSTONE, J.: *Field Theories with 'Superconductor' Solutions*. Nuovo Cim., 19:154, 1961.
- [Gre94] GREULACH, M.: *Untersuchung der Massendifferenz massiver Neutrinos*. Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern, 1994. WWW: http://kluedo.uni-kl.de/Physik/Metadaten/diplom_2.html.
- [GSW62] GOLDSTONE, J., A. SALAM und S. WEINBERG: *Broken Symmetries*. Phys. Rev., 127:965, 1962.
- [Hai99] HAIDT, D.: *Events with Isolated Charged Leptons and Missing Momentum Observed at the e^+p Collider HERA*. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 77, 1999.

- [Hil95] HILL, J. E.: *An Alternative Analysis of the LSND Neutrino Oscillation Search Data on $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$* . Phys. Rev. Lett., 75(14):2654–2657, 1995.
- [Hoš87] HOŠEK, J.: *Model for the Dynamical Generation of Lepton, Quark, and Intermediate-Boson Masses*. Phys. Rev. D, 36(7):2093–2101, 1987.
- [Loc96] LOCHER, M. P. (Herausgeber): *Proceedings of the Summer School on Physics with Neutrinos*, Nummer 96-03 in *PSI-Proceedings*. Paul Scherrer Institut, 1996. Zuoz (Enagdin) Schweiz, 4.-10. August 1996.
- [LR97] LEIKE, A. und S. RIEMANN: *Z' Search in e^+e^- annihilation*. Z. Phys. C, 75:341–348, 1997.
- [Maj37] MAJORANA, E.: *Theory of the Symmetrie of Electrons and Positrons*. Nuovo Cimento, 14:171–184, 1937.
- [Mar93] MARIS, P.: *Nonperturbative Analysis of the Fermion Propagator: Complex Singularities and Dynamical Mass Generation*. Doktorarbeit, Rijksuniversiteit Groningen, 1993.
- [Mir93] MIRANSKY, V. A.: *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theory*. World Scientific, 1993.
- [MN74] MASKAWA, T. und H. NAKAJIMA: *Spontaneous Breaking of Chiral Symmetry in a Vector-Gluon Model*. Prog. Theor. Phys., 52(4):1326–1354, 1974.
- [MN75] MASKAWA, T. und H. NAKAJIMA: *Spontaneous Breaking of Chiral Symmetry in a Vector-Gluon Model. II*. Prog. Theor. Phys., 54(3):860–877, 1975.
- [MPL⁺97] MONTAGNA, G., F. PICCININI, J. LAYSSAC, F. M. RENARD und C. VERZEGNASI: *Observability at LEP2 Hadronic Channels of a Z' with Small Lepton Couplings*. Z. Phys. C, 75:641–649, 1997.
- [MS86] MIKHEEV, S. P. und A. YU. SMIRNOV: *Resonant Amplification of ν -Oscillations in Matter and Solar-Neutrino Spectroscopy*. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis., 9C:17–26, 1986.
- [Nac86] NACHTMANN, O.: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. Vieweg, 1986.
- [Nam60] NAMBU, Y.: *Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity*. Phys. Rev., 117(3):648–663, 1960.
- [Neu99] *Neutrino 98*, Band 77 der Reihe *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*. Elsevier, May 1999.

- [NJL61] NAMBU, Y. und G. JONA-LASINIO: *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity I*. Phys. Rev., 122(1):345–358, 1961.
- [OS99] OHLSSON, T. und H. SNELLMAN: *Neutrino Oscillations and Mixing with Three Flavours*. Phys. Rev. D, 60:093007, 1999.
- [Pag79] PAGELS, H.: *Dynamical Chiral Symmetry Breaking in Quantum Chromodynamics*. Phys. Rev. D, 19(10):3080–3090, 1979.
- [Pag80] PAGELS, H.: *Models of Dynamical Broken Gauge Theories*. Phys. Rev. D, 21(8):2336–2347, 1980.
- [PDG98] PDG(PARTICLE DATA GROUP): C. CASO ET AL.: *The Review of Particle Physics*. The European Physical Journal, C3:1, 1998. WWW: <http://www-pdg.lbl.gov/>.
- [Ryd96] RYDER, L. H.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd Auflage, 1996.
- [Sal80] SALAM, A.: *Gauge Unification of Fundamental Forces*. Rev. Mod. Phys., 3(52):525–538, 1980. Nobelpreisrede 1979.
- [Sch62a] SCHWINGER, J.: *Gauge Invarianz and Mass*. Phys. Rev., 125:397–398, 1962.
- [Sch62b] SCHWINGER, J.: *Gauge Invarianz and Mass. II*. Phys. Rev., 128:2425–2429, 1962.
- [Wei80] WEINBERG, S.: *Conceptual Foundations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*. Rev. Mod. Phys., 3(52):514–524, 1980. Nobelpreisrede 1979.
- [Wei95] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band I Foundations. Cambridge University Press, 1995.
- [Wei96] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band II Modern Applications. Cambridge University Press, 1996.
- [Wic54] WICK, G. C.: *Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions*. Phys. Rev., 96:1124, 1954.
- [Wol78] WOLFENSTEIN, L.: *Neutrino Oscillations in Matter*. Phys. Rev. D, 9(17):2369–2374, 1978.

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name: Martin Greulach
Anschrift: Hohenöller Str. 3
D-67742 Heizenhausen
E-Mail: greulach@physik.uni-kl.de
Geburtsdatum: 7. März 1969
Geburtsort: 66869 Kusel
Eltern: Klaus Greulach
Gerlinde Greulach, geb. Wolf
Familienstand: Ledig
Staatsangehörigkeit: Deutsch

Schulbildung

August 1975 - Juli 1979 Grundschule, 67744 Lohnweiler
August 1979 - Juni 1988 Gymnasium, 67742 Lauterecken
23. Juni 1988 Abitur

Studium

Oktober 1988 - März 1995 Physik, Universität Kaiserslautern, 67663 Kaiserslautern
Schwerpunkt: Theoretische Physik
13. März 1991 Vordiplom
23. März 1995 Diplom
Thema der Diplomarbeit: Untersuchung der Massendifferenz massiver Neutrinos
Betreuer: Prof. Dr. A. Vančura

Grundwehrdienst**Juli 1995 - 30. April 1996**

66482 Zweibrücken

Promotionsstudium**Seit Mai 1996**

Aufnahme Promotionsstudium Physik,

Universität Kaiserslautern, 67663 Kaiserslautern

Heinzenhausen, 21. Dezember 1999

Danksagung

An diese Stelle möchte ich mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, herzlich bedanken. Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Vančura für die interessante physikalische Fragestellung der Promotion und für das Verständnis, daß nicht immer meine volle Aufmerksamkeit der Physik gegolten hat. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. V. F. Müller der, wie bei meiner Diplomarbeit, wieder als Berichterstatter tätig ist.

Vergessen will ich nicht meine Eltern und Geschwister, Uwe und Sabine, die mich während der ganzen Dauer der Promotion moralisch unterstützt haben.

Die ganze Promotion wurde nur durch Nebentätigkeiten möglich. Für Ihr Verständnis, daß ich einen Teil der Zeit mich mit Physik beschäftigt habe, möchte ich Herrn Dr. K. P. Rohr und Frau G. Schmitt danken. Besonders gern erinnere ich mich an die Mitarbeit im MathNet Projekt. Alle Mitarbeiter, insbesondere Wolfram, Wolfgang, Vincent, Michael, Michael, Jürgen, Claudia, Judith, Lothar, Roland und Wend seien an dieser Stelle begrüßt*. Insbesondere hat es mich gefreut, daß ich in der Anfangsphase von Frau G. Schmitt an dem Aufbau des Dokumentenservers der Universität (KLUEDO[†]) beteiligt wurde. Die Kaffeepausen in der Mathematik-Physik Bibliothek bleiben mir unvergessen, wo Esther immer noch ein paar aufmunternde Worte fand. Auch die studentischen Mitarbeiter in Kaiserslautern, Frank, Silke, Annette, Wolfgang, Arnim, Jose, Thorsten und Holger werde ich in guter Erinnerung behalten.

Besonders bedanken will ich mich bei meinen Studienkollegen, die durch Ihren Zuspruch mir immer neue Kraft für das Fortführen der Arbeit gegeben haben[‡]. Besonders die Clique der „Dinosaurier“ (Bernhard, Susanne, Catrin, Schorsch, Tobias, Gernot, Det, Klaus, Schwarze, . . .) hat einen extra Dank dafür verdient, daß man mich daran erinnert hat, die ganze Sache nicht zu wichtig zu nehmen. Ich hoffe, daß wir uns auch in Zukunft noch regelmäßig treffen werden. Einen extra Dank schicke ich auch an Volker in die USA, der mir bei der Übersetzung meiner Zusammenfassung ins Englische geholfen hat. Gerade in der Endphase der Arbeit hat es mir sehr geholfen meinem „alten“ Schulkameraden Thomas „vorzujammern“. Dafür das er mich nicht verjagt hat, sei im hier ausdrücklich gedankt.

Den Kollegen in der Theorie muß ich auch danken. Insbesondere Betty und Herrn Prof. Dr. H. J. W. Müller-Kirsten muß ich dafür danken, daß Sie meinen Tag mit immer neuen Rechnerproblemen interessant gestaltet haben. Die Gespräche mit unseren Gastwissenschaftlern haben sicherlich meinen Horizont erweitert. Für die Möglichkeit in einer solchen angenehmen Atmosphäre zu arbeiten möchte ich allen danken.

Der letzte Dank gilt allen meinen Freunden und Bekannten, die mir Ihr Verständniss entgegengebracht haben. Insbesondere möchte ich mich bei meinem Lieblings-Lokführer Wolfgang bedanken, der mich oft bei Wind und Wetter mit dem VT zur Uni bzw. Heim gebracht hat.

*Die Arbeit wird natürlich elektronisch mit Metadaten nach Dublin-Core veröffentlicht.

[†]<http://kluedo.ub.uni-kl.de>

[‡]Der Satz ist wohl etwas zu pathetisch geraten.