Standortplanung im Mathematikunterricht*

von

Dr. Matthias Ehrgott(1)

Angela Euteneuer(2)

Prof. Dr. Horst W. Hamacher(3)

* Eine modifozierte Form dieses Berichts, ergänzt durch Berichte über Unterrichtserfahrungen, ist erschienen als Information 23/2000 des pädagogischen Zentrums Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

(1) Department of Engineering Science, University of Auckland, Neuseeland

(2) Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

(3) Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern

Inhalt : Standortplanung im Mathematikunterricht

1. Didaktisch-methodische Grundüberlegungen

Die Idee, dass Fragestellungen der Standortplanung den Mathematikunterricht in der Schule bereichern, dort behandelt und gelöst werden können, führte im Oktober 1997 zu einer Veranstaltung, die vom SIL an der Universität Kaiserslautern durchgeführt wurde. Die von Prof. Hamacher und seinen Mitarbeitern auf dieser Veranstaltung vorgestellten Beispiele, die einen Einblick in das Arbeitsgebiet seiner Arbeitsgruppe "Optimierung" an der Universität Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik geben, werden in den folgenden Kapiteln vorgestellt.

Standortplanung beschäftigt sich mit den Möglichkeiten, mit Hilfe mathematischer Modelle günstige Standorte im Sinne der Fragestellung von Wirtschaft und Verwaltung zu ermitteln. So ist z. B. ein günstiger Standort für das Zentrallager einer Firma dann gefunden, wenn die Summe der Transport- und Lagerkosten minimiert und wenn das Lager optimal ausgelastet wird. Sucht andererseits die Verwaltung den Standort für eine neue Feuerwache oder ein Krankenhaus, so ist ein zu berücksichtigendes Kriterium für den optimalen Ort, dass der längste Anfahrtsweg einen gewissen Wert nicht überschreitet.

Die in dieser Veröffentlichung vorgestellten Standortprobleme gehören zu der Gruppe der sogenannten planaren Problemen, weil die gegebenen Standorte durch zwei Koordinaten festgelegt werden, d. h. das Problem in der Ebene behandelt wird. Außerdem wird die Suche auf diejenigen nach einem optimalen neuen Standort beschränkt.

Einfache Standortprobleme können effektiv mit Dreieckskonstruktionen, Entfernungsberechnungen in Koordinatensystemen und den Methoden der Differentialrechnung gelöst werden. Auf diese Weise basiert der obige Themenbereich primär auf Inhalten aus dem Mathematikunterricht der Mittel- und Oberstufe und kann aus diesem Grund gut im Zusammenhang mit dem entsprechenden Schulstoff im Mathematikunterricht behandelt werden.

Diese Einschätzung bezüglich der Einsetzbarkeit solch anwendungsbezogener Fragestellungen im Schulunterricht wurde ebenfalls mehrheitlich von den an der Fortbildung teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer geteilt, nachdem sich diese zunächst von einem solchen unkonventionellen Ansatz überrascht gezeigt hatten.

Eine Einbeziehung der Standortplanung in die Schulmathematik ist jedoch nicht nur aus fachlich Überlegungen problemlos möglich, sie bietet darüber hinaus auch eine Vielzahl didaktisch-methodischer Vorteile. So spricht für diesen Ansatz neben der stärker motivierenden, da praxisbezogenen Herangehensweise und der an vielen Stellen möglichen Wiederholung und Vertiefung von bereits gelehrtem Stoff, insbesondere die Chance, den Erwerb der vielfach geforderten Sozial- und Handlungskompetenzen durch eine entsprechende methodische Unterrichtsgestaltung zu ermöglichen.

Darüber hinaus stellt die Standortplanung auch eine der ansonsten seltenen Möglichkeit dar, den Anspruch des Mathematiklehrplans hinsichtlich der Trias Anwendungsrelevanz, Interdisziplinarität und mathematische Modellierung einzulösen.

So fordert beispielsweise der Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe explizit: "Eine weitere Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, Schülerinnen und Schülern den Prozess des Mathematisierens nahe zu bringen. Wo sich mathematische Mittel anbieten, ein Sachproblem zu strukturieren, wesentliche Aspekte eines komplexen Sachverhalts in einem Modell darzustellen und eine Lösung zu suchen, können Wechselbeziehungen zwischen Theorie und Praxis erfahren werden. (...) Schülerinnen und Schüler (...) sollen Beziehungen zwischen einem außermathematischen Sachverhalt und der Mathematik herstellen, das Problem mit mathematischen Mitteln bearbeiten, gefundene Lösungen interpretieren und kritisch beurteilen. Dabei sollen auch Grenzen der fachspezifischen Verfahren und Grenzen der Mathematisierung erkannt werden."[1]

Aus den oben genannten Überlegungen heraus bildete sich eine Arbeitsgruppe, die zu bestimmten Standortproblemen die hier vorgestellten Unterrichtsreihen entwickelte und sie in verschiedenen Klassenstufen erprobte. Die hierbei erzielten Ergebnisse sind in dieser Schrift dokumentiert und wurden absichtlich nur mit einem geringen Stundenansatz geplant, damit sie leichter in dem vom Lehrplan gegebenen pädagogischen Freiraum eingesetzt werden können.

Für den Unterricht wurden Beispiele ausgewählt, die - ausgehend von der Erfahrungswelt der Jugendlichen - aufzeigen, wie mit Hilfe der Mathematik Probleme in Wirtschaft, Gesellschaft und Wissenschaft\Technik gelöst werden können. Es sollte sich dabei um typische Modellierungsaufgaben aus der Standortplanung handeln, die mit mathematischen Methoden gelöst werden können, die entweder dem Kenntnisstand der Schüler entsprechen oder aber als Erweiterung bekannter Sachverhalte leicht eingeführt werden können.

Von den Aufträgen, die die Arbeitsgruppe "Optimierung" an der Universität Kaiserslautern für die Wirtschaft bearbeitet hatte, wurden deshalb die im Folgenden beschriebenen drei typischen Aufgabenstellungen ausgewählt und im Mathematikunterricht an Gymnasien erprobt.

1. Das <u>Zentrallagerproblem</u> (siehe 2.1) steht für einen Aufgabentyp, bei dem die Summe der Entfernungen von gegebenen Standorten - wie z. B. Auslieferungslagern - zu dem zu errichtenden Ort – z. B. dem Zentrallager - minimiert werden muss. Er begegnet uns in verschiedenen Variationen:

   ß Wo muss die zentrale Gepäckausgabe bei einem Flughafen gebaut werden, damit die Passagiere von den verschiedenen Flugsteigen aus möglichst wenig laufen müssen?

   ß Wo sollte der Spielplatz in einem Wohngebiet angelegt werden, damit dieser für die Kinder aus den umliegenden Wohnblocks durch möglichst kurze Wege attraktiv ist?

---

[1] Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), 1998, Seite 7. Sowie "Problemlösendes Verhalten" und "Mathematisierung von Sachproblemen" im Lehrplan Mathematik (Klasse 7-9/10), Hauptschule, Realschule, Gymnasium 1984, Seite 11-13

Dieses Problem lässt sich auf verschiedene Arten lösen, wodurch die Bearbeitung dieses Themas auch in verschiedenen Klassenstufen möglich wird:

ß Bei drei gegebenen Standorten durch die Konstruktion eines ausgezeichneten Punktes (Fermat-Punkt) mittels besonderer Linien im Dreieck (Simson-Linien).

ß Durch die Minimierung der Entfernungssumme mit Methoden der Differentialrechnung.

Will man ein solches Standortproblem (STOP) in der Mittelstufe behandeln, so bietet sich dazu das 8. oder 9. Schuljahr an. Die genaue Wahl des Schuljahrs wird davon abhängen, inwieweit man einen der Beweise zur Existenz und den Eigenschaften des Fermat-Punktes erarbeiten möchte (vergl. 6.1). Benötigt werden in diesem Fall neben den Kongruenzsätzen entweder noch der Satz vom Sehnenviereck mit seiner Umkehrung (im 1. Beweis) oder die Eigenschaften der Drehung als Kongruenzabbildung (im 2. Beweis). Ein solchen mathematisch exakten Nachweis des Fermat-Punktes kann jedoch aus gewichtigen pädagogischen oder zeitlichen Gründen auch ausgespart werden, ohne dass hierdurch zu starke Einbußen hinsichtlich der Qualität der Unterrichtsreihe zu befürchten wären. Für eine zeichnerische Lösung müssen mit den entsprechenden Punkten - im Koordinatensystem oder direkt auf einer Landkarte - Konstruktionen durchgeführt werden, wobei die gängigen Grundkonstruktionen eingeübt bzw. wiederholt werden können. Das Ergebnis kann für drei Standorte auch an einem Modell experimentell ermittelt werden.

In einem Oberstufenkurs kann man dieses STOP mittels Differentialrechnung lösen. Die Aufgabenstellung bietet die Möglichkeit, Funktionen mit zwei Variablen einzuführen. Hieran lässt sich zeigen, dass eine Lösung, wie die Schüler es bei Funktionen mit einer Variablen gewohnt sind, nur bei "geschickt gewählter" Entfernung möglich ist: Nur bei der Verwendung des Quadrates der Entfernung erhält man eine Zielfunktion, die sich so in zwei Summanden aufspalten lässt, dass jeder nur von einer Variablen abhängt. In diesem Fall kann man das Extremum auf dem üblichen Wege bestimmen.

Das mathematische Modell kann darüber hinaus auch erweitert werden, um so eine größere Realitätsnähe zu erzielen: Werden die Auslieferungslager verschieden häufig angefahren, so versieht man die Entfernungen vom Zentrallager zu diesen mit entsprechenden Faktoren (gewichtete Entfernung). Für den allgemeinen Fall bei n gegebenen Orten mit unterschiedlichen Gewichten und quadratischer Entfernung lässt sich auf diese Weise eine Formel für die Koordinaten des besten Standortes herleiten (vergl. 5.1 und 5.2).

2. Weil bei der Modellbildung die Berechnung der Entfernung zweier Punkte oft eine entscheidende Rolle spielt, wurden in der Lehrerfortbildung auch verschiedene Metriken vorgestellt. Neben der in der Schule verwendeten euklidischen Entfernung ist es manchmal auch sinnvoll, das Quadrat dieses Abstandes oder anders definierte Entfernungen zu betrachten. Am Beispiel der Produktion von Halbleiterplatinen (2.2), die von Robotern bestückt werden, wurde gezeigt, dass die zurückgelegten Wege je nach Bewegungsart des Roboters unterschiedlich berechnet werden müssen. Wenn sich das motorgetriebene Werkzeug nur parallel zu den Koordinatenachsen bewegen kann und wenn diese Bewegungen längs der Achsen nacheinander ausgeführt werden,

ist die Entfernung eines Punktes $P(x_1,x_2)$ vom Ursprung durch die sogenannte l_1-Norm gekennzeichnet: $l_1(OP) = |x_1| + |x_2|$.

Eine anschauliche Bedeutung gewinnt diese Art der Entfernungsmessung, wenn man Weglängen entlang der Straßen in einer der schachbrettartig angelegten Innenstadt wie beispielsweise Mannheim berechnet.

Da Schüler (und Lehrer) mit einer solchen Abstandsberechnung in der Geometrie im allgemeinen nicht vertraut sind, sind sie über die Lösungsmengen zu den Fragestellungen, welche Punkte der Ebene eine konstante Entfernung zu einem oder zwei gegebenen festen Punkten haben, verblüfft. Die im Unterricht mit den üblichen - in der euklidischen Geometrie benutzten - Definitionen ermittelten Lösungsmengen sind "geknickte Mittelsenkrechten" und "eckige Kreise".

Auch dieses Unterrichtsbeispiel lässt sich noch weiter ausbauen: Gibt man die Bedingungen für die Koordinaten aller Punkte an, die von einem festen Punkt eine bestimmte Entfernung nicht überschreiten, führt man sodann bei den erhaltenen Ungleichungen alle Fallunterscheidungen vollständig durch und betrachtet anschließend die Funktionsgraphen zu den entsprechenden Lösungsmengen, so kann man diese Aufgaben auch gut im 9. Schuljahr im Themenbereich lineare Gleichungen und Ungleichungen behandeln.

3. Für die Überlegungen zur Planung eines Feuerwehrhauses (siehe 2.3) soll die maximale Entfernung des gesuchten Standortes zu den gegebenen Orten möglichst gering gewählt werden. Das Problem lässt sich mit Hilfe des Umkreises zu dem aus den drei gegeben Orten gebildeten Dreieck lösen. Auch für mehr als drei Orte kann man so verfahren, wenn man dabei alle Kombinationen mit drei Orten durchspielt und die günstigste Lösung auswählt.

   Da man bei diesem Vorgehen zwischen spitz- und stumpfwinkligen Dreiecken unterscheiden muss und bei dem rechtwinkligen Dreieck der Satz des Thales zur Anwendung kommt, bietet es sich an, diese Unterrichtsreihe im 8. Schuljahr durchzuführen, wobei sie sich insbesondere für die Einführung dieses Satzes geeignet erscheint. Außerdem findet sich hier neben dem Einüben von Konstruktionen und Konstruktionsbeschreibungen auch eine Möglichkeit, einen Algorithmus zu formulieren.

Alle vorgestellten Unterrichtsreihen sind vom Umfang her auf ca. 5 bis 8 Stunden begrenzt und sollten auch nicht mehr Zeit in Anspruch nehmen. Hierdurch wird die Erarbeitung des regulären Schulstoffs zum einen nicht zu stark beschnitten, andererseits liefert die Beschäftigung mit einem solch anwendungsbezogenen Problem wie der Standortplanung aber bereits neue Motivation für den üblichen Stoffkanon. Dies Begrenzung bedeutet für den planenden Lehrer jedoch auch, dass er sich bei der Durchführung der Reihe auf einige Schwerpunkte beschränken muss, an denen der Gegenstandsbereich sodann exemplarisch deutlich wird. Demgemäß erheben die hier aufgeführten Unterrichtsreihen auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern wollen vielmehr Anregungen und Hinweise geben, wie die in den Abschnitten 3 bis 5 dargestellten mathematischen Inhalte in verschiedenen Klassenstufen umgesetzt werden können.

Um den Prozess der Modellierung[2], bei dem ein Problem auf eine mathematische Fragestellung abgebildet und dort gelöst wird, zu vervollständigen, darf eine abschließende Betrachtung der gefundenen Lösung und ihre kritische Würdigung keinesfalls unterbleiben. Nicht immer genügt eine nach mathematischen Methoden ermittelte Lösung den Anforderungen, wie man an folgendem Beispiel erkennen kann: Ermittelt man analog zur Standortsuche des Zentrallagers den Ort für eine Mülldeponie, so erhält man möglicherweise eine solche mitten in der Stadt, da hier eventuell die Summe der Transportwege minimal wird!

Die Reaktion der Schülerinnen und Schüler auf die bereits durchgeführten Unterrichtsreihen war durchweg positiv. Sie zeigten sich sehr motiviert und waren bereit, auch über mehrere Stunden hinweg neue Sachverhalte zu erarbeiten, die vom mathematischen Sachverhalt her nicht einfach waren. Häufig gelang es auch, gerade solche Schülerinnen und Schüler anzusprechen, die sich sonst im Unterricht nicht so stark beteiligten. Für sie war es interessant, zu erleben, welche Probleme mit Mathematik gelöst werden können und das Mathematik keinesfalls nur zum Selbstzweck betrieben wird.

Die Erhöhung der Motivation erklärt sich außer durch realitätsnahe Aufgabenstellung sicher auch dadurch, dass die eingesetzten Unterrichtsmethoden die Diskussion der Schüler untereinander über das zu modellierende Problem gefördert haben. Gerade durch die gewählte Methodik des selbständigen Arbeitens in Kleingruppen wird es möglich, die heute allseits geforderten Handlungs- Kommunikations- und Sozialkompetenzen effektiv zu fördern. So erfüllt etwa die Vorstellung der erarbeitete Lösungen durch die einzelnen Gruppen einen doppelten Zweck: Einmal wird die Diskussion in einem erweiterten Kreis als in der Arbeitsgruppe möglich, zum anderen schult diese die Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihrer Fähigkeit zur Informationsverarbeitung und -präsentation. Die Rückmeldungen aus der Klasse beeinflussen dann wiederum positiv die Motivation.

Da die Schülerinnen und Schüler die entscheidenden Ideen selbst einbringen sollen, muss der Unterrichtende sich zurückhalten und sollte nur dann weiterführende Impulse setzen, wenn wesentliche Aspekte zur Problemlösung fehlen oder mathematische Methoden benötigt werden, die neu sind. Auf diese Weise versucht der Lehrer nicht länger Lernprozesse zu erzeugen, er initiiert und ermöglicht sie vielmehr. Hierzu nimmt er sich bewußt zurück und begleitet den Unterricht nun stärker aus einer Position des Beraters heraus.

Darüber hinaus ist in diesem Zusammenhang sowohl hinsichtlich der Schülermotivation als auch bezüglich der angesprochenen Schlüsselqualifikationen auf den Einsatz des Computer als mathematisches Hilfsmittel zu verweisen. So bietet etwa der Einsatz entsprechender Software die Möglichkeiten zum Experimentieren, eine Methode zum Entwickeln von Lösungen, die von Schülern bevorzugt wird. Gleichzeitig erwerben die Schülerinnen und Schüler hierbei auch eine größere Routine im Umgang mit dem PC.

[2] vgl. hierzu "Problemlösen mit mathematischen Methoden - Modellbildung" Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der Studienstufe, 1998, Seite 18 ff

2. Was bedeutet Standortplanung?- Einige einführende Beispiele

2.1 Das Zentrallagerproblem

Beim Zentrallagerproblem (warehouseproblem) soll zu bereits vorhandenen Auslieferungslagern ein Zentrallager so gebaut werden, dass die Gesamtentfernung zwischen dem Zentrallager und den einzelnen Auslieferungslager möglichst klein ist.

Für die Problemlösung werden die Auslieferungslager $Ex_m(a_{m1},a_{m2})$ und das zu bauende Zentrallager $X(x_1, x_2)$ durch Punkte in der Ebene dargestellt. Als Gesamtentfernung wird die Summe der Einzelentfernungen zwischen dem Zentrallager und den einzelnen Auslieferungslagern gewählt. Als Entfernung bietet sich die Euklidische Entfernung

$d(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} = l_2(Ex_m, X)$ an, wobei l_2: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Wenn man in diesem Modell noch die Häufigkeiten der Fahrten zwischen dem Zentrallager und unterschiedlichen Auslieferungslagern berücksichtigen möchte, müssen die Entfernungen ihrer Häufigkeit entsprechend gewichtet werden.

Zahlenbeispiel für die Wahl eines Zentrallagers [3]:

In einem Industriebetrieb existieren drei Auslieferungslager, die auf einer Landkarte mit den Koordinaten E_1 (1/2), E_2 (7/3) und E_3 (4/5) festgelegt werden können. Die Betriebsführung möchte nun ein Zentrallager an einem neuen Standort bauen und zwar so, dass die Gesamtentfernung (also die Summe aller Entfernungen zwischen dem Auslieferungslager und dem Zentrallager) möglichst klein ist.

1. Modell: für einfache Entfernung mit Zentrallager $X(x_1, x_2)$

$$\sum_{m=1}^{3} l_2(Ex_m, X) = \sqrt{(1-x_1)^2 + (2-x_2)^2} + \sqrt{(7-x_1)^2 + (3-x_2)^2} + \sqrt{(4-x_1)^2 + (5-x_2)^2}$$

Wählt man z. B. X_1 (4/2), so erhält man durch Einsetzen die Gesamtentfernung zu den Auslieferungslagern zu $\sqrt{9+0} + \sqrt{9+1} + \sqrt{0+9} = 6 + \sqrt{10} \approx 9{,}2$.

Wählt man dagegen X_2 (4/5), so erhält man $\sqrt{9+9} + \sqrt{9+4} + \sqrt{0+0} = \sqrt{18} + \sqrt{13} \approx 7{,}8$.

Wenn in der Aufgabe keine weiteren Einschränkungen genannt werden, wird man also den Standort X_2 (4/5) dem ersteren vorziehen.

---

[3] aus: Horst W. Hamacher: Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme, Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden 1995

2. Modell für gewichtete Entfernung

Weiß man z. B. durch Datenerfassung, dass man von dem zu errichtenden Zentrallager fünfmal bzw. dreimal häufiger zu den Auslieferungslager E_1 bzw. E_2 fährt als zu E_3, so ist ein realistisches Modell für die Entfernungen dadurch gegeben, dass man die einfache Entfernung zwischen E_1 und X mit dem Faktor $w_1 = 5$ und die zwischen E_2 und X mit $w_2 = 3$ multipliziert. Also ergibt sich damit eine gewichtete Entfernung:

$$\sum_{m=1}^{3} w_m l_2(Ex_m, X) =$$

$$5 \cdot \sqrt{(1-x_1)^2 + (2-x_2)^2} + 3 \cdot \sqrt{(7-x_1)^2 + (3-x_2)^2} + \sqrt{(4-x_1)^2 + (5-x_2)^2}$$

Prüft man nun für die gewichtete Entfernung die beiden oben untersuchten Standorte, so erhält man für

X_1 (4/2) $\quad 5 \cdot \sqrt{9+0} + 3 \cdot \sqrt{9+1} + 1 \cdot \sqrt{0+9} = 18 + 3 \cdot \sqrt{10} \approx 27{,}5$

X_2 (4/5) $\quad 5 \cdot \sqrt{9+9} + 3 \cdot \sqrt{9+1} + 1 \cdot \sqrt{0+1} = 15 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{13} \approx 32{,}0$

In diesem Beispiel wäre also X_1 (4/2) günstiger als der zweite Ort für das Zentrallager.

Nach diesen einfachen Beispielen erhält man ein Verständnis dafür, dass die Frage, wie man den bestmöglichen Standort finden kann, noch genauer überlegt werden muss.

3. Modell

Auch für die Angabe der Entfernungen müsste man die Modelle noch verbessern. Die Euklidische Entfernung ist nur dann sinnvoll anzunehmen, wenn man sich zwischen dem Zentral- und dem Auslieferungslager direkt bewegen kann. Für Hubschrauber, Fahrzeuge in der Wüste und eventuell Boote in genügend tiefen Gewässern trifft das zu, nicht aber für unser Problem. Also sollte man für jeden möglichen Standort X (x_1/x_2) die Entfernung zu den entsprechenden Auslieferungslagern $d(Ex_m,X)$ aus einem (Straßen-) Netzwerk ablesen können (z. B. Entfernungstabellen wie in Straßenatlanten).

Bei einer Modellbildung muss also überprüft werden, welche mathematische Definition man bei der Entfernungsmodellierung sinnvollerweise zugrunde legt.

2.2 Produktion von Halbleiterplatinen:

Ein anderes Beispiel zur Frage der zu verwendenden Metrik ist die Produktion von Halbleiterplatten mit Hilfe von Robotern:

Beim Zusammenbau einer Halbleiterplatte werden M Teile, die zu N verschiedenen Sorten (Transistoren, Speicherelemente usw.) gehören - wobei sinnvollerweise $N \leq M$ ist - auf vorher festgelegten Einbauplätzen Ex_m (m = 1, ..., M) eingebaut. Man will nun Behälter aufstellen, in denen die verschiedenen Bauteilsorten gelagert sind. Bei der Wahl der Standorte $X_1, ..., X_N$ für diese Behälter ist zu beachten, dass

1. ein Sicherheitsabstand zwischen Behälter und Platine vorhanden ist

2. die Gesamtzeit für den Einbau minimal ist.

Für das Modell setzen wir voraus, dass die Einbaureihenfolge festgelegt ist. (Das ist eventuell ein eigenes Optimierungsproblem.) Für die weitere Überlegung ist es wichtig zu wissen, wie sich der Roboterarm bewegt, da hiervon die Berechnung der zurückgelegten Wege abhängt.

a) Zwei lineare Motoren, die ein gleichzeitiges Bewegen in beiden Koordinatenrichtungen erlauben:
Der nächste Arbeitsgang kann erst begonnen werden, wenn beide Motoren stehen. Deshalb gilt folgende "Entfernung" zwischen einem Einbauplatz Ex_m (a_{m1}, a_{m2}) und dem Standort X (x_1, x_2) für einen der Behälter:
$d(Ex_m, X) = \max\{|a_{m1} - x_1|, |a_{m2} - x_2|\}$
Man bezeichnet $d(Ex_m, X)$ auch mit $l_\infty(Ex_m, X)$

b) Hat der Roboterarm nur einen Motor, müssen die Bewegungen längs der Koordinatenachsen nacheinander ausgeführt werden und für die "Entfernung" zwischen Einbauplatz und Vorratsbehälter gilt:
$d(Ex_m, X) = |a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2| = l_1(Ex_m, X)$

<u>Zahlenbeispiele für die Produktion von Halbleiterplatten:</u>

Aus zwei Behältern (N = 2), die runde bzw. eckige Teile (M = 2) enthalten, sollen auf der Platine an vier festen Stellen Ex_1, ..., Ex_4 (M = 4) Teile eingebaut werden. Der Sicherheitsabstand ist durch ein Viereck um die Platine herum dargestellt:

X_1 ist ein möglicher Standort für den Behälter mit runden Teilen

X_2 ist ein möglicher Standort für den Behälter mit eckigen Teilen

Von jeder Sorte werden zwei Teile eingebaut.

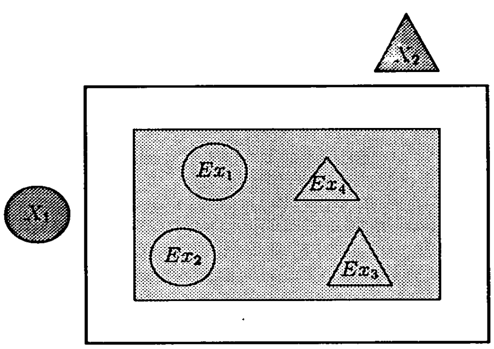


Abbildung 1a: Halbleiterplatine (inneres Viereck) mit festen Einbauplätzen für vier Teile, die zu zwei Sorten gehören.[4]

[4] Aus: Horst W. Hamacher: Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme, Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1995, Seite 5

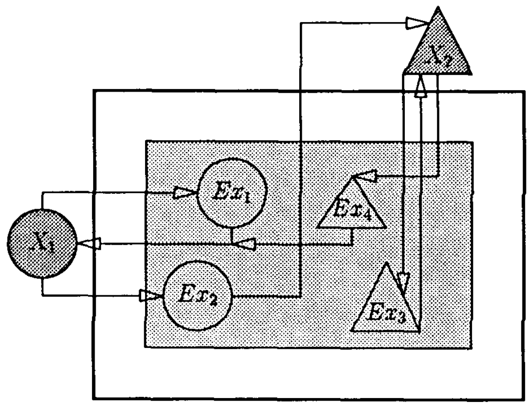


Abbildung 1b: Robotertour bei gegebener Einbaureihenfolge (1, 2, 3, 4)

Die Robotertour für die Einbaureihenfolge (1, 2, 3, 4) mit X_1 als Anfangs- und Endpunkt hat eine von X_1 abhängige Länge:

$f(X_1) = 2 \cdot d(Ex_1, X_1) + 1 \cdot d(Ex_2, X_1) + 0 \cdot d(Ex_3, X_1) + 1 \cdot d(Ex_4, X_1)$

$2 \cdot d(Ex_1, X_1)$ bedeutet: Ein rundes Teil aus dem bei X_1 platzierten Behälter wird in Ex_1 eingebaut und der Roboter läuft zurück zu X_1 .

$0 \cdot d(Ex_3, X_1)$ bedeutet: Es wird kein rundes Teil bei Ex_3 eingebaut.

Da der Roboterarm aber nach dem Einbau bei Ex_4 wieder zum Behälter bei X_1 zurückläuft, entsteht der Summand $1 \cdot d\,(Ex_4, X_1)$.

Genauso wird der Weg für den Teil der Robotertour berechnet, die den Behälter für die eckigen Teile ansteuert, der bei X_2 platziert wurde.

$f(X_2) = 0 \cdot d(Ex_1, X_2) + 1 \cdot d(Ex_2, X_2) + 2 \cdot d(Ex_3, X_2) + 1 \cdot d(Ex_4, X_2)$

Bestimmt man das Minimum der Funktionen $f(X_1)$ und $f(X_2)$, so ergeben diese die Orte, an denen die Behälter für die runden bzw. eckigen Teile aufgestellt werden sollten, damit die zurückgelegten Wege möglichst gering sind. Allerdings können die Behälter nicht überall stehen, da die Auswahl für die Behälterstandorte eingeschränkt ist. So gibt es Restriktionen für den Standort, der eventuell aus einem Teilbereich der gegebenen Ebene gewählt werden muss.

2.3 Planung eines Feuerwehrhauses

Bei der Planung eines Feuerwehrhauses geht man von der Frage aus, wo es gebaut werden muss, damit im Falle eines Brandes die Anfahrtzeit der Feuerwehr eine bestimmte Zeit nicht überschreitet. So möchte man z. B. zu drei Industriebetrieben Ex_1, Ex_2, Ex_3 eine gemeinsame Werksfeuerwehr am Ort so bauen, dass jeder Betrieb in höchstens 10 min erreicht wird. Es muss also für den Standort X des Feuerwehrhauses gelten:

$l_2(Ex_m, X) \leq s$ für $m = 1, 2, 3$. Dabei ist s die Wegstrecke, die in 10 min zurückgelegt werden kann.

Noch besser wäre es, wenn die Feuerwehr so schnell wie möglich am Brandort ist, also ein r gefunden wird, für das gilt: $l_2(Ex_m, X) \leq r$ mit r möglichst klein für $m = 1, 2, 3$. (Mit l_2 ist hier wieder der Euklidische Abstand gemeint)

Es ist günstig, bei der Suche nach einem Verfahren für die Ermittlung von X die Aufgabe vom Ergebnis her zu betrachten: Ist der Standort X des Feuerwehrhauses bereits bekannt, gilt $l_2(Ex_m, X) \leq r$ für alle m. Also liegen dann die Industriebetriebe Ex_1, Ex_2, Ex_3 innerhalb eines Kreises um X mit dem Radius r oder auf seinem Rand. Gesucht ist also der Mittelpunkt eines Kreises, der mit möglichst kleinem Radius die gegebenen Standort überdeckt.

3. Geometrische Lösungen zu ausgesuchten Standortproblemen

Erfreulicherweise lassen sich einige der angesprochenen Beispiele bereits mit einfachen Konstruktionen lösen, die von dem Geometrieunterricht in den Klassen 7 - 9 her bekannt sind.

3.1 Lösung des Zentrallagerproblems durch Konstruktion des Fermat-Punktes

Wir erinnern uns: Zu drei gegebenen Standorten Ex_m (bestehende Auslieferungslager), die nicht auf einer Geraden liegen, soll ein neuer Standort X für ein Zentrallager so bestimmt werden, dass die (gewichtete) Summe der Entfernungen minimal wird. Das geometrische Verfahren besteht für den Fall gleicher Gewichte aus folgenden Schritten (vergl. Abbildung 2):

1. Schritt: Zeichne das Dreieck A,B,C ($A=Ex_1$, $B=Ex_2$, $C= Ex_3$)

2. Schritt: Errichte auf jeder Seite des Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck

3. Schritt: Verbinde jeweils den neu entstandenen Punkt im gleichseitigen Dreieck mit dem Eckpunkt des Dreiecks A,B,C , welcher nicht zu diesem gleichseitigen Dreieck gehört. (Simson-Linien [5]).

[5] Benannt nach Robert Simson, englischer Mathematiker 1687 – 1768.

4. Schritt: Die Simson-Linien schneiden sich in einem Punkt, dem optimalen Standpunkt, dem Fermat-Punkt F.

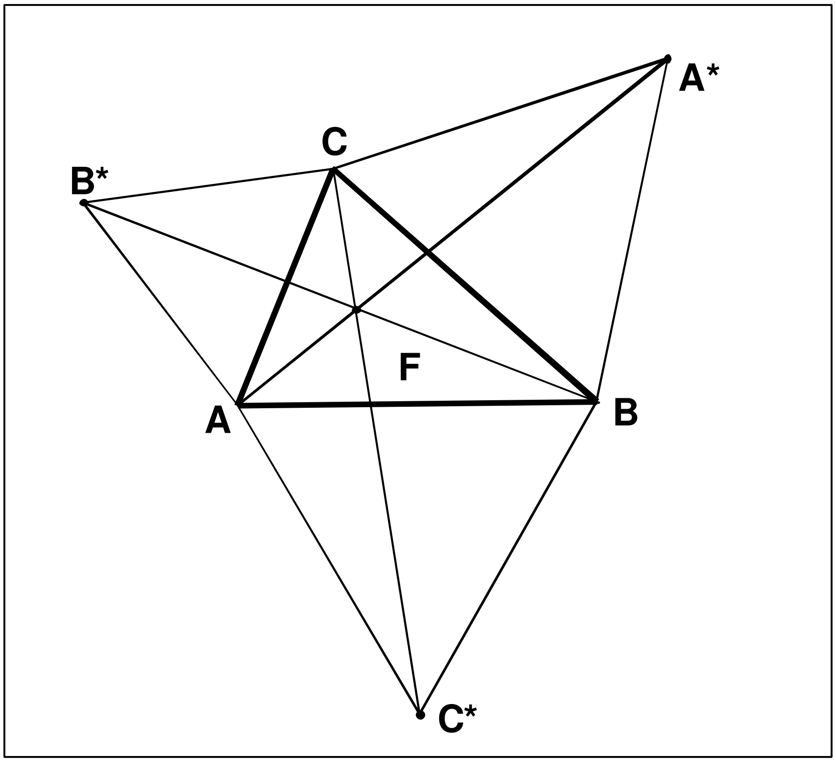


Abbildung 2: Konstruktion des Fermat-Punktes mit Hilfe der Simson-Linien

Durch geometrische Verfahren läßt sich das Zentrallagerproblem auch bei gewichteten Entfernungen und bei vier gegebenen Standorten noch gut lösen. In allen anderen Fällen kommen Iterationsverfahren zur Anwendung.

Anmerkung:

Es handelt sich bei dem obigen Verfahren um einen Spezialfall einer sog. Torricelli[6]-Konfiguration, bei der auf jede Dreiecksseite eines beliebigen Grunddreiecks ΔABC untereinander gleichsinnig ähnliche Aufsatzdreiecke ΔABC*, ΔBCA*, Δ ACB* konstruiert werden (vgl. Abbildung 3).

Für diese Figuren gelten folgende Sachverhalte:

Die „Diagonalen“ $\overline{AA*}$, $\overline{BB*}$, und $\overline{CC*}$ dieser Figur schneiden sich in einem Punkt, dem Torricelli-Punkt T. An diesem Schnittpunkt finden sich die Winkel α', β', γ' der Aufsatzdreiecke wieder und die Längen der "Diagonalen" $\overline{AA*}$, $\overline{BB*}$, $\overline{CC*}$ dieser Figur verhalten sich wie die Höhen der Aufsatzdreiecke.

Im obigen Sonderfall mit gleichseitigen Aufsatzdreiecken ($\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°$) sind die "Diagonalstrecken" $\overline{AA*}$, $\overline{BB*}$, $\overline{CC*}$ gleich lang und schließen Winkel von 60° ein.

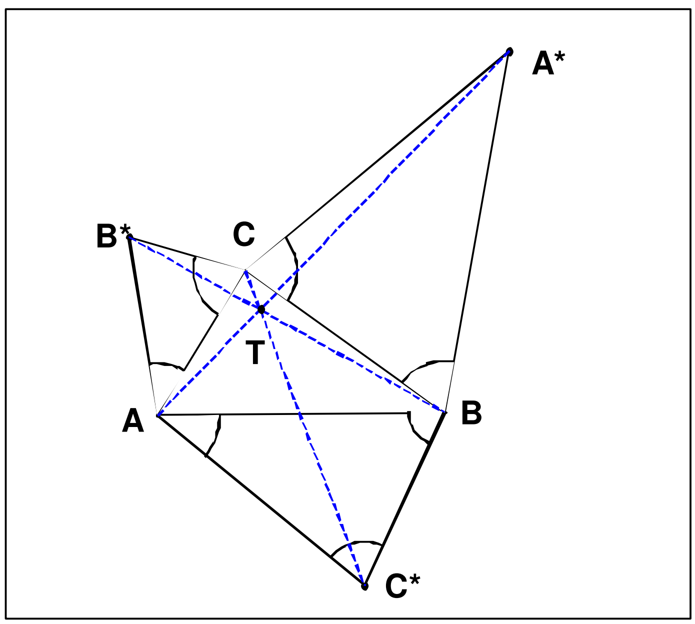
6 Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

Für diesen Spezialfall gilt:

Wenn das Dreieck keinen Winkel über 120° enthält, schneiden sich die Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke innerhalb des Dreiecks. Die Summe der Abstände eines Punktes P von den Ecken A, B, C wird genau dann zum Minimum, wenn P im "Diagonalenschnittpunkt" T liegt. Die Entfernungssumme entspricht sodann der „Diagonalstrecken“. Da diese Extremalaufgabe von P. De Fermat[7] gestellt wurde, wird T auch Fermat-Punkt F genannt (vgl. Abbildung 2). In der englischsprachigen Literatur wird sie dem um 1750 an der Universität Glasgow lehrenden Robert Simson zugeschrieben[8].

Für den Fall, dass ein Winkel 120° beträgt, fällt der Fermat-Punkt mit dem Scheitelpunkt dieses Winkels zusammen. Bei Winkeln, die größer sind, liegt der Schnittpunkt der Simson-Linien außerhalb des Dreiecks und ist nicht der Punkt für die minimale Entferungssumme. Das läßt sich auch gut mit einer dynamischen Geometriesoftware zeigen, wenn man einen Eckpunkt des Dreiecks entsprechend bewegt.

Abbildung 3:
Torricelli-Konfiguration
mit a' = 40° ,
b' = 65°
g' = 75°



---

7 Pierre de Fermat (1601 - 1665) hat diese Aufgabe in seinen "Abhandlungen über Maxima und Minima" 1643/44 gestellt.

8 vgl. Homepage „History of mathematics archive“ der Universität St. Andrews, Schottland. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians (unter Torricelli, Simson, Fermat)

3.2 Planung eines Feuerwehrhauses

Das Standortproblem (STOP) lautet: Zu existierenden Betrieben soll ein Feuerwehrhaus so gebaut werden, dass die maximale Entfernung zwischen den Betrieben und dem Feuerwehrhaus möglichst klein ist.

Es wird ein planares Modell mit euklidischer Entfernung benutzt.

Hat man mit X einen Ort für die Feuerwehr gefunden, derart dass die Entfernung zu allen Betrieben $Ex_i < s$ ist und jeder in weniger als der gegebenen Zeit (z.B. 10 min) angefahren werden kann, dann enthält der Kreis[9] um X alle gegebenen Standorte.

3.2.1 Problem für 2 Standorte: Ex_1, Ex_2:

Der gesuchte Ort X ist die Mitte der Strecke $\overline{Ex_1\, Ex_2}$.

3.2.2. Problem für 3 Standorte Ex_1, Ex_2, Ex_3:

a) Ex_1, Ex_2, Ex_3 bilden ein spitzwinkliges Dreieck. Dann ist der Umkreis des $\Delta\, Ex_1\, Ex_2\, Ex_3$ der kleinste Kreis, der die gegebenen Standorte enthält und der Umkreismittelpunkt ist der gesuchte Ort für das Feuerwehrhaus.

b) Ist $\Delta\ Ex_1\ Ex_2\ Ex_3$ stumpfwinklig, dann gibt es eine bessere Lösung als den Umkreismittelpunkt: der Mittelpunkt der längsten Dreiecksseite ist der optimale Ort für das Feuerwehrhaus.

3.2.3 Verfahren für mehr als drei Standorte:

Gesucht ist also der kleinste Kreis (d.h. der Kreis mit dem kleinsten Radius), der alle gegebenen Standorte Ex_m überdeckt. Er enthält mindestens 2 Standorte auf seinem Rand.

Verfahren zur Lösung:

1. Zeichne alle Umkreise von Tripeln der Standorte (Ex_i, Ex_j, Ex_k) mit $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$ für alle $i, j, k = 1, ..., M$
2. Zeichne alle Kreise um den Mittelpunkt der Strecken $\overline{Ex_i Ex_j}$, die durch Ex_i bzw. Ex_j gehen.
3. Streiche alle Kreise, die nicht alle Standorte überdecken.
4. Von den verbliebenen Kreisen wähle den mit dem kleinsten Radius aus.

Numerisches Beispiel mit 4 Standorten:

Ex_1 (0|3), Ex_2 (5|8), Ex_3 (9|0), Ex_4 (9|3)

Teilaufgaben

1. Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem!

---

[9] Gemeint ist damit das Gebiet des Kreisinneren vereinigt mit dem Rand

2. Wie viele Paare und wie viele Tripel gibt es?
3. Zeichne alle Umkreise durch drei der gegebenen Standorte!
4. Gibt es zulässige Kreise, die nur durch 2 Standorte bestimmt werden?
5. Welcher Kreis ist der beste?
6. Was passiert, wenn Ex_4 (10/3) bzw. Ex_4 (11/8) betrachtet wird?

Die Lösung (Abbildung 4) wurde für Tripel ermittelt:

$\Delta\ E_1\ E_2\ E_3$: Umkreis k_1 hat den Radius $r_1 \approx 4{,}6$ L.E.

$\Delta\ E_1\ E_2\ E_4$: Umkreis k_2 hat den Radius $r_2 \approx 5$ L.E.

$\Delta\ E_1\ E_3\ E_4$: Umkreis k_3 hat den Radius $r_3 \approx 4{,}7$ L.E.

$\Delta\ E_2\ E_3\ E_4$: Umkreis k_4 hat den Radius $r_4 \approx 7$ L.E.

(es handelt sich um ein stumpfwinkliges Dreieck)

$k_i = \{P|\ \left|\overline{PM_i}\right| \le r_i\ \}$

k_1 enthält alle 4 Punkte

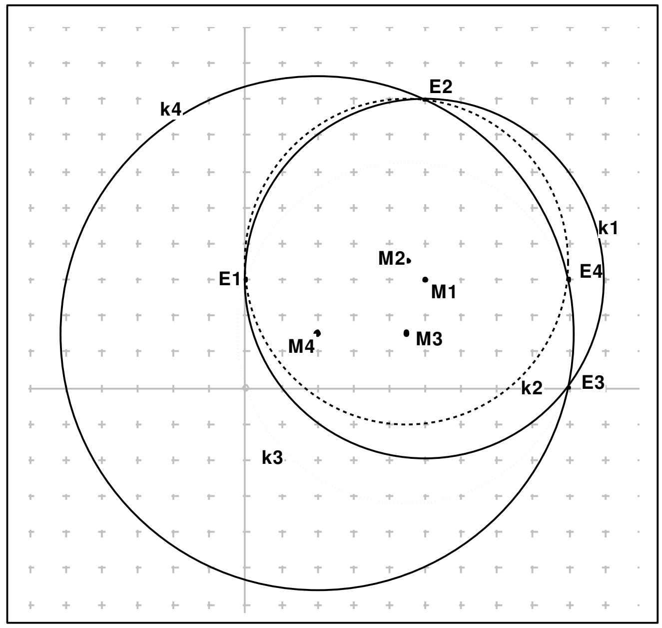
k_2 enthält nicht E_3

k_3 enthält nicht E_2

k_4 enthält alle 4 Punkte, aber $r_4 > r_1$

Verändert man E_4 zu E_4 (10/3), so ist k_1 immer noch der optimaler Kreis, da alle existierenden Standorte auf seinem Rand liegen. Für E_4(11/8) ist $\Delta\ E_1\ E_2\ E_4$ stumpfwinklig und k_3 wird optimaler Kreis, weil auch bei geänderter Lage von E_4 $r_3 < r_2$ gilt.
Dabei bleibt die Frage unbeantwortet, ob ein optimaler Kreis stets eindeutig bestimmt werden kann.

Abbildung 4:
Suche des optimalen Standortes für ein Feuerwehrhaus bei vier gegebenen Betrieben (numerisches Beispiel)



3.4 Restriktive Standortprobleme

Bei vielen Aufgabenstellungen gibt es zusätzliche Einschränkungen für die Standortwahl.

Beispiele für Restriktionen:

1. Platinenproblem:

Um die Platine herum muss ein gewisser Sicherheitsabstand eingehalten werden, wo keine Behälter aufgestellt werden können. (Ähnliches wird auch bei der Fließband-produktion gefordert.)

2. Feuerwehrhaus:

Ein Naturschutzgebiet steht für die Plazierung des Feuerwehrhauses nicht zur Verfügung.

Im mathematischen Modell werden die Restriktionen so ausgedrückt, dass das Innere eines Polygons R ausgeschlossen wird. Auf seinem Rand ∂R können dagegen Anlagen plaziert werden.

Lösungsansatz:

1. Löse das unrestriktive Problem (d.h. bestimme alle optimalen Standorte ohne Rücksicht auf das Gebiet R.)
2. Falls in (1) ein Standort ermittelt wird, der zulässig ist, ist das Verfahren beendet.
3. Sonst: vergrößere den Zielfunktionswert solange, bis ein Standort X* mit diesem Zielfunktionswert gefunden wird, der zulässig ist.

Beim Feuerwehrproblem erhält man den optimalen Standort, indem man die Kreise um die Betriebe vergrößert, bis ein Schnittgebiet entsteht, das innerhalb des verbotenen Gebietes liegt und den Rand berührt.

Beispiel: Ermittlung des optimalen Standortes bei einem Modell mit Restriktionen (Feuerwehr, Abbildung 5).

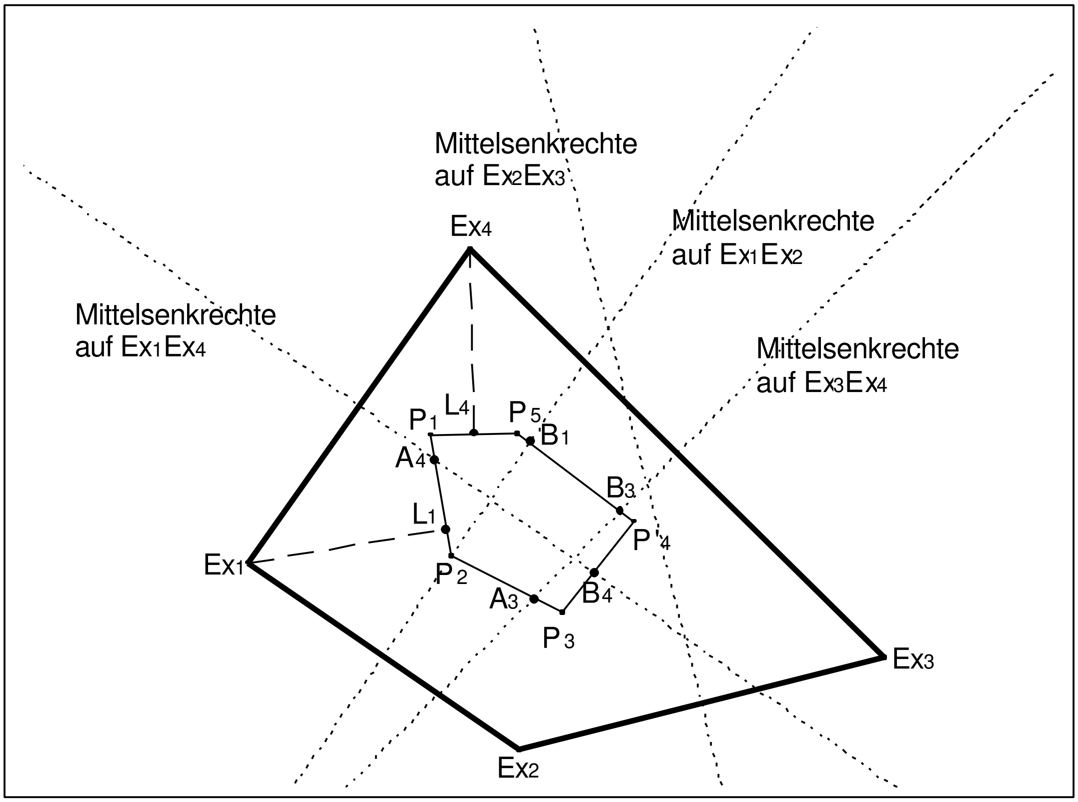


Abbildung 5: Ermittlung des optimalen Standortes bei einem Modell mit Restriktionen.

Beispielsweise ist der Standort für ein Feuerwehrhaus zu den Betrieben $Ex_1,..,Ex_4$ gesucht, wobei das Gebiet innerhalb des Fünfecks P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 ein unzulässiges Gebiet ist. Als Lösung wird der Mittelpunkt desjenigen Kreises gesucht, der die gegebenen Standorte der Industriebetriebe (hier 4) überdeckt. Als Kreismittelpunkt kommen die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von $\overline{Ex_iEx_j}$ mit dem Rand des unzulässigen Gebietes in Frage (hier heißen sie A_i und B_j), sowie die Projektionen der Betriebe (Eckpunkte) Ex_k auf den Rand des unzulässigen Gebietes (hier nur L_1 und L_4 , die anderen liegen nicht auf den Seiten des Fünfecks).

Für alle Kreise, die einen größeren als den minimalen Radius aufweisen gilt, dass ihr Durchschnitt ein "Rundstück" ist, dessen "Ecken" durch Schnittpunkte zweier Kreise und dessen Ränder von zwei Kreisbögen gebildet werden (vgl. Abbildung 6).

Dabei können folgende Fälle auftreten:

a) Eine "Ecke" des "Rundstücks" berührt zuerst die Grenzlinie zum verbotenen Gebiet.
b) Der Rand des Polygons, das die Restriktion beschreibt, wird Tangente an den Kreisbogen.

Daraus ergibt sich als Vorschrift zur Ermittlung des Standortes:

a) Betrachte alle Schnittpunkte zwischen den Mittelsenkrechten zu $\overline{Ex_iEx_j}$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., M$ und dem Rand ∂R der Restriktionen.

b) Betrachte alle diejenigen Punkte auf dem Rand ∂R, in denen das Geradenstück des Restriktionspolygons Tangente für einen Kreis um Ex_m wird für $m = 1, ..., M$. (Das bedeutet, dass alle existierenden Projektionen der Ex_m $m = 1, ..., M$ auf den Rand ∂R betrachtet werden)

Der beste Kandidat aus a) und b) ist optimaler Standort für das Problem.

Zahlenbeispiel

$Ex_1(5|5)$, $Ex_2(15|7)$, $Ex_3(7|15)$ sind gegebene Standorte. Die Restriktion wird beschrieben durch einen Polygonzug mit den Ecken $P_1(6|5)$, $P_2(8|14)$, $P_3(10|14)$, $P_4(14|7)$ (vgl. Abbildung 6).

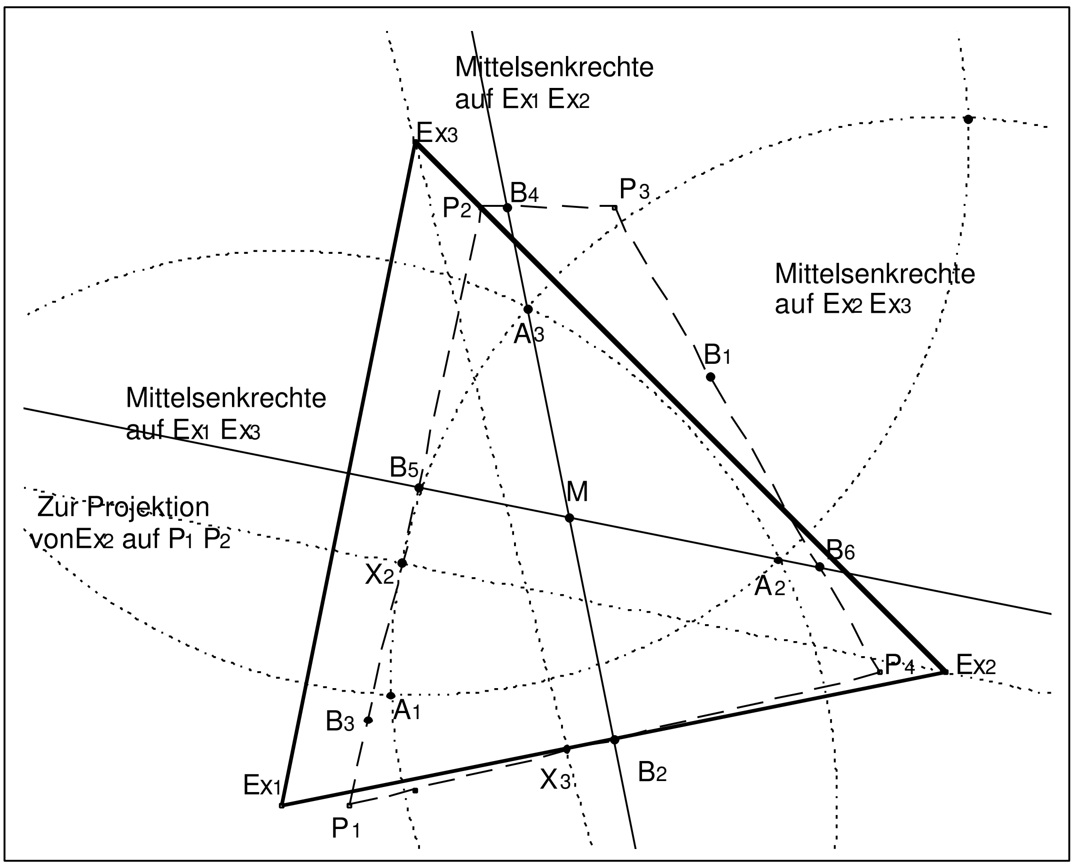


Abbildung 6 : Zum Algorithmus, wie man den optimalen Standort bei Restriktionen ermittelt: X_i sind die Projektionen von Ex_i auf den Rand, B_i sind die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten mit dem Rand des verbotenen Gebiets.

Ermittlung des Standortes gemäß Lösungsansatz:

1. Ohne Restriktion: Der Mittelpunkt M des Dreiecksumkreises von $\Delta\, Ex_1\, Ex_2\, Ex_3$ wird bestimmt.
2. Er liegt im unzulässigen Gebiet R. Suche einen zulässigen Standort.

3a) Betrachte die Schnittpunkte zwischen den Mittelsenkrechten der Dreieckseiten und dem Rand ∂R. Von allen B_i wäre B_5 der beste Kandidat als Schnittpunkt zwischen $\overline{P_1P_2}$ und der Mittelsenkrechten auf $\overline{Ex_1Ex_2}$.

3b) Zeichne die Projektionen für Ex_1, Ex_2, Ex_3 auf ∂R ein: X_1, X_2, X_3

Für X_2 ergibt sich der Kreis mit dem kleinsten Radius, da das "Rundstück" A_1, A_2, A_3 bei X_2 den Polygonzug berührt. (Der Kreis um B_5 hat einen etwas größeren Radius !)

Lösung: $X_2\,(6{,}8 \mid 8{,}7)$, $r \approx 9{,}8$

4. Eckige Kreise und geknickte Mittelsenkrechten als Modellwerkzeuge

Wenn man sich in einem Koordinatensystem längs der Achsen bewegt (Beispiel Roboterarm) oder in einem rechtwinklig angelegten Straßennetz Wege zurücklegt, dann eignet sich die Euklidische Entfernung nicht zur Modellierung des Problems.

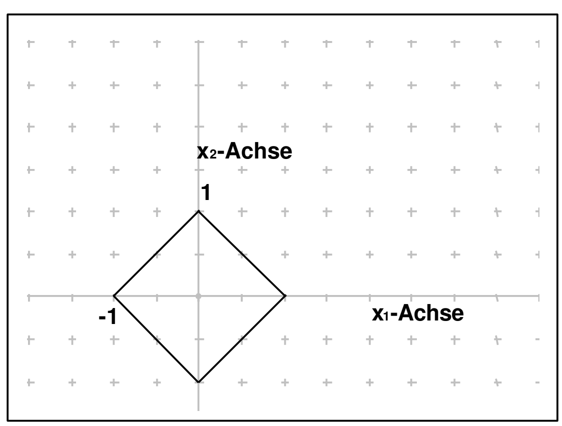
Eine bessere Metrik für dieses Modell ist die sog. l_1-Norm, die wie folgt definiert ist:
$l_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x_1 \mid x_2) \to |x_1| + |x_2|$. Dies steht für die Entfernung des Punktes X $(x_1 ?x_2)$ vom Ursprung. Ausführlich beschrieben bedeutet das:

I. Quadrant $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \to l_1\,(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
II. Quadrant $x_1 < 0 \wedge x_2 \geq 0 \to l_1\,(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$
III. Quadrant $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \to l_1\,(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$
IV. Quadrant $x_1 > 0 \wedge x_2 < 0 \to l_1\,(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Die in der euklidischen Geometrie häufig benutzten geometrischen Orte Kreis (um einen gegebenen Mittelpunkt mit festgelegtem Radius) und Mittelsenkrechte (zu einer gegebenen Strecke) sehen mit dieser Metrik etwas ungewohnt aus, aber es liegt ihnen die gleiche Definition zugrunde.

So entsteht für den **Einheitskreis** $K(0,1) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x_1, x_2) = 1\}$ folgendes Bild im Koordinatensystem (Abbildung 7):

Abbildung 7:
Einheitskreis in der zur l_1-Norm gehörenden Metrik



Durch Fallunterscheidung erhält man:
für den I. Quadranten: $x_1 + x_2 = 1$
für den II. Quadranten: $-x_1 + x_2 = 1$
für den III. Quadranten: $-x_1 - x_2 = 1$
für den IV. Quadranten: $x_1 - x_2 = 1$

Beispiel:
In Manhattan gibt es zwei Postämter Ex_1 und Ex_2. Die Post möchte feststellen, für welchen Haushalt welches Postamt am nächsten ist, d. h. Manhattan in zwei Bezirke aufteilen, die den Postämtern zugeordnet werden.

Für die Trennungslinie zwischen den Bezirken muss die Menge aller Punkte bestimmt werden, die bezüglich der l_1-Norm die gleiche Entfernung von $Ex_1(a_{11},a_{12})$ und von $Ex_2(a_{21},a_{22})$ haben (Bestimmung der Mittelsenkrechten).

$$\mathbb{B}_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 | \; l_1(X - Ex_1) = l_1(X - Ex_2)\}$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_{11}| + |x_2 - a_{12}| = |x_1 - a_{21}| + |x_2 - a_{22}|\}$$

Weil die Wege in einer solchen Metrik davon abhängen, ob sie zu den Koordinatenachsen parallel verlaufen, unterscheiden sich die Graphen der Mittelsenkrechten beträchtlich voneinander je nachdem, ob die Lage der Postämter auf dem Stadtplan durch Punkt dargestellt wird, die in nur einer oder in beiden Koordinaten verschieden sind.

<u>**Zahlenbeispiel a:**</u> $Ex_1(0|0)$, $Ex_2(4|0)$, d.h. eine Koordinate ist gleich

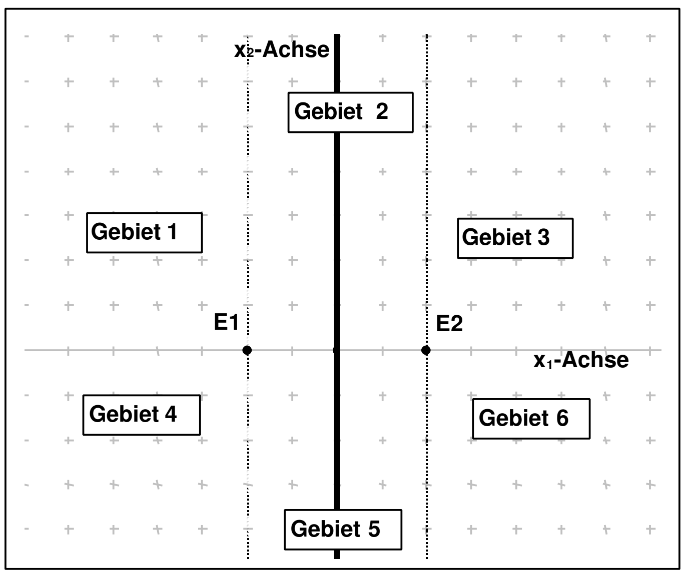


Abbildung 8:
Ermitteln der Mittelsenkrechten für Zahlenbeispiel a

Bei der Bedingung $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = |x_1 - 4| + |x_2 - 0|$ für die Punkte $X(x_1|x_2)$, die die Mittelsenkrechte bilden, müssen Fallunterscheidungen durchgeführt werden, die zu 6 Gebieten im $\mathbb{R}^2$ führen:

<u>Gebiet 2</u>: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 \geq 0$

Bedingung für Mittelsenkrechte: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0 \text{ beliebig}$$

$\mathbb{L}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0\}$

Der Graph ist eine Parallele zur x_2-Achse mit Abstand 2 im 1. Quadranten.

Gebiet 5: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 < 0$

Bedingung: $(x_1 - 0) - (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) - (x_2 - 0) \wedge x_2 < 0$

$\Leftrightarrow\ x_1 - x_2 = -x_1 + 4 - x_2$

$\Leftrightarrow\ x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0$

$\mathbb{L}_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2 \wedge x_2 < 0\}$

Der Graph ist eine Parallele zur x_2-Achse mit Abstand 2 im 4. Quadranten.

Gebiet 1: $0 < x_1 \wedge x_2 \geq 0$

Bedingung: $-(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 + 0),\ x_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow\ -x_1 + x_2 = -x_1 + 4 + x_2$

$\Leftrightarrow\ 0 = 4 \wedge x_2 \geq 0$

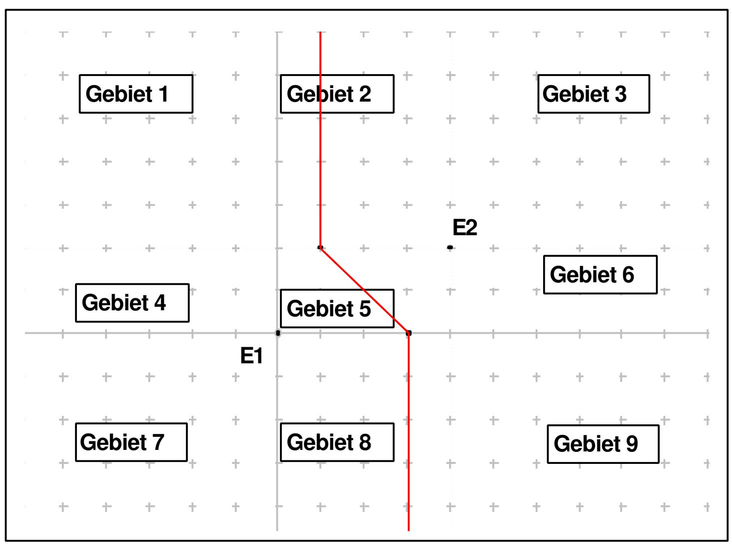
$\mathbb{L}_1 = \{\ \}$

Für die Gebiete 3, 4, 6 gibt es - wie bei Gebiet 1 - keine Zahlenpaare für die Lösung, also auch keine Punkte der Ebene, welche die Bedingungen erfüllen. Es entsteht eine Mittelsenkrechte wie im Fall des euklidischen Abstands.

Zahlenbeispiel b: $Ex_1\ (0|0)$, $Ex_2\ (4|2)$ beide Koordinaten sind verschieden

Für den Ansatz $l_1(X, Ex_1) = l_1(X, Ex_2)$ bzw. $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = |x_1 - 4| + |x_2 - 2|$ müssen jetzt 9 Gebiete unterschieden werden:

Abbildung 9: Mittelsenkrechte, die den Einzugsbereich zweier Postämter Ex_1 und Ex_2 trennt, für Zahlenbeispiel b



Gebiet 1: $x_1 < 0 \wedge x_2 > 2$

Dort gibt es keine Lösung, d. h. die Mittelsenkrechte verläuft nicht durch dieses Gebiet.

Gebiet 2: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 > 2$

Bedingung: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 2)$

$\Leftrightarrow\ x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 2$

$\Leftrightarrow\ 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow\ x_1 = 1 \wedge x_2 > 2$ beliebig

$\mathbb{L}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 \wedge x_2 > 2\}$.

Der Graph ist eine Parallele zur x_2-Achse mit Abstand 1 für Punkte mit Ordinaten größer als 2.

<u>Gebiet 3</u>: $x_1 > 4 \wedge x_2 > 2$ $\Rightarrow$ keine Lösung

<u>Gebiet 4</u>: $x_1 < 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2$ $\Rightarrow$ keine Lösung

<u>Gebiet 5</u>: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2$

Bedingung: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) - (x_2 - 2)$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -x_1 + 4 - x_2 + 2$

$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 6$

$\Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 3$

$\mathbb{L}_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1 + 3 \wedge 0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2\}$

Der Graph ist eine Gerade mit Steigung - 1 durch (0|3)

<u>Gebiet 6</u>: $x_1 > 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2$ $\Rightarrow$ keine Lösung

<u>Gebiet 7</u>: $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0$ $\Rightarrow$ keine Lösung

<u>Gebiet 8</u>: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 < 0$

Bedingung: $(x_1 - 0) - (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) - (x_2 - 2)$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -x_1 - x_2 + 6$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 6$

$\Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 < 0$

$\mathbb{L}_8 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3 \wedge x_2 < 0\}$.

Der Graph ist eine Parallele zur x_2-Achse im Abstand 3.

<u>Gebiet 9</u>: $x_1 > 4 \wedge x_2 < 0$ $\Rightarrow$ keine Lösung

<u>Zahlenbeispiel c:</u> Ex_1 (0/0), Ex_2 (4/4), beide Koordinaten sind verschieden.

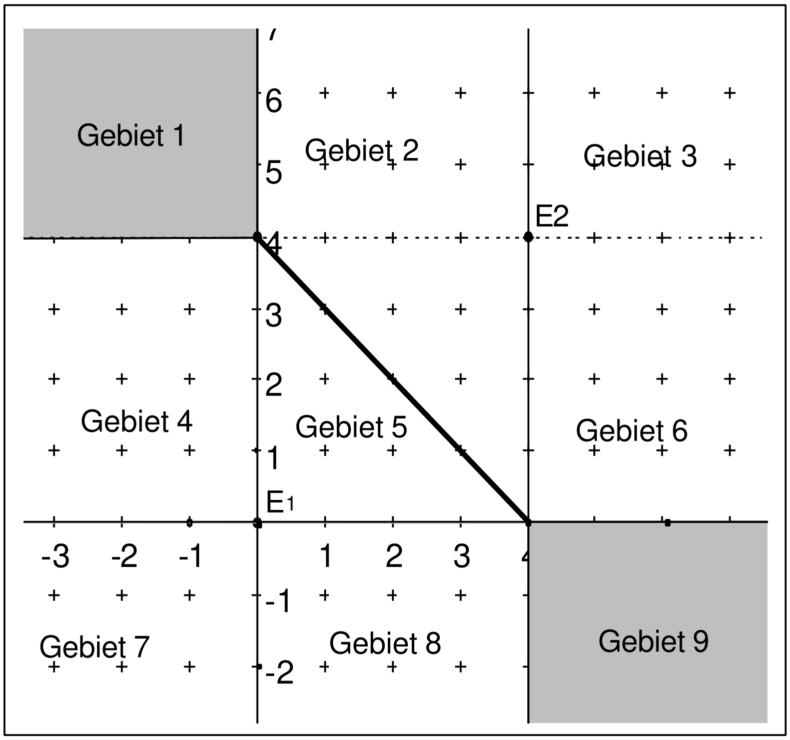


Abbildung 10:

Mittelsenkrechte für Zahlenbeispiel c.
In den Gebieten 1 und 9 sind alle Punkte in der Lösungsmenge enthalten.

Es gibt Lösungen in Gebiet 1, Gebiet 5, Gebiet 9

<u>Gebiet 1</u>: $x_1 < 0 \wedge x_2 > 4$

Bedingung: $-(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 4)$

$\Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 = -x_1 + 4 + (x_2 - 4)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0 \wedge x_2 > 4$

$\mathbb{L}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0 \wedge x_2 > 4\}$

Das ganze Gebiet gehört zur Lösungsmenge.

<u>Gebiet 5</u>: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 4$

Bedingung: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) - (x_2 - 4)$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -x_1 + 4 - x_2 + 4$

$\Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 = 8$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1 + 4$

$\mathbb{L}_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1 + 4, 0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 4\}$

Der Graph ist eine Gerade im Gebiet 5 mit Steigung - 1 und dem x_2 - Achsenabschnitt 4.

<u>Gebiet 9</u>: $x_1 > 4 \wedge x_2 < 0$

Bedingung: $(x_1 - 0) - (x_2 - 0) = (x_1 - 4) - (x_2 - 4)$

$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = x_1 - 4 - x_2 + 4$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$

$\mathbb{L}_9 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 4 \wedge x_2 < 0\}$

Das ganze Gebiet gehört zur Lösungsmenge.

Für die übrigen Gebiete gibt es keine Zahlenpaare, die die zugehörigen Bedingungen erfüllen.

Verallgemeinerung der Ergebnisse:

Fall 1: $a_{12} = a_{22} \wedge a_{11} \neq a_{21}$ — Die Mittelsenkrechte besteht aus einer vertikalen Geraden.

Fall 2: $a_{11} = a_{21} \wedge a_{12} \neq a_{22}$ — Die Mittelsenkrechte besteht aus einer horizontalen Geraden.

Fall 3: $a_{11} \neq a_{21} \wedge a_{12} \neq a_{22}$

Fall 3a) $|a_{11} - a_{21}| > |a_{12} - a_{22}|$

Die Mittelsenkrechte setzt sich aus zwei vertikalen Halbgeraden zusammen, die durch diagonale Geradensegmente verbunden sind.

Fall 3b) $|a_{11} - a_{21}| < |a_{12} - a_{22}|$

Die Mittelsenkrechte setzt sich aus zwei horizontalen Halbgeraden zusammen, die durch diagonale Geradensegmente verbunden sind.

Fall 3c) $|a_{11} - a_{21}| = |a_{12} - a_{22}|$

Die Mittelsenkrechte besteht aus zwei Quadranten und einem diagonalen Geradensegment.

Fall 4: (entartet) $a_{11} = a_{21} \wedge a_{12} = a_{22}$

Die Mittelsenkrechte ist die gesamte Ebene.

5. Lösung von Standortproblemen durch Kurvendiskussion differenzierbarer Funktionen

5.1 Zentrallagerproblem mit l_2^2 - Entfernung

Zahlenbeispiel Ex_1 (1 | 1) Ex_2 (1 | 4) Ex_3 (2 | 1) Ex_4 (4 | 1) Ex_5 (4 | 4)

Die Anzahl der Fahrten pro Woche zu den Auslieferungslagern Ex_i sollen w_i betragen, deshalb werden in der Berechnung folgende Gewichte berücksichtigt: $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, $w_4 = 2$, $w_5 = 4$. Ohne weitere Information nehmen wir für die Entfernung die Euklidische Entfernung an (l_2 – Metrik, vergl. Ausführungen in 2.1). Die Lösung der Aufgabe besteht also darin, die Summe der gewichteten Entfernungen zu minimieren:

$$d(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} = l_2(Ex_m, X)$$

$$S(X) = \sum_{m=1}^{M} w_m \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}$$

Zunächst betrachten wir die Summe der quadratischen Entfernungen und minimieren diese.[10] Wir untersuchen deshalb:

$$f(X) = \sum_{m=1}^{M} w_m \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

Für das Zahlenbeispiel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(X) = {} & 2 \cdot \left((1-x_1)^2 + (1-x_2)^2\right) + 1 \cdot \left((1-x_1)^2 + (4-x_2)^2\right) \\ & + 1 \cdot \left((2-x_1)^2 + (1-x_2)^2\right) + 2 \cdot \left((4-x_1)^2 + (1-x_2)^2\right) \\ & + 4 \cdot \left((4-x_1)^2 + (4-x_2)^2\right) \end{aligned}$$

$$f(X) = 3 \cdot (1-x_1)^2 + 1 \cdot (2-x_1)^2 + 6 \cdot (4-x_1)^2 + 5 \cdot (1-x_2)^2 + 5 \cdot (4-x_2)^2$$

$$f(X) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Die Summe kann in die Summe zweier Funktionen zerlegt werden, die jeweils nur von <u>einer</u> Variablen x_1 bzw. x_2 abhängen.

Um f (X) zu minimieren, müssen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ minimiert werden. Es genügt, dass gilt: $f'_i(x_i) = 0 \wedge f_i''(x_i) > 0$

Für das Zahlenbeispiel ergibt sich also:

$f_1(x_1) = 10\, x_1^2 - 58\, x_1 + 103 \Rightarrow f_1'(x_1) = 20\, x_1 - 58 \quad \wedge \quad f_1''(x_1) = 20 > 0$

$f_2(x_2) = 10\, x_2^2 - 50\, x_2 + 85 \Rightarrow f_2'(x_2) = 20\, x_2 - 50 \quad \wedge \quad f_2''(x_2) = 20 > 0$

$f_1'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2{,}9 \quad ; \quad f_2'(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2{,}5$

---

[10] Die zugehörige quadratische Funktion liefert nicht die gleichen Lösungen, weil wegen des Quadrierens des Abstandes weiter entfernte Punkte stärker gewichtet werden. Andererseits ist $[S(X)]^2$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, wohingegen bei S (X) die Ableitung in x_1 und x_2 nicht definiert ist.

Damit wurde ermittelt: Das Zentrallager liegt bei X* $(2{,}9 \mid 2{,}5)$, d.h. die Entfernung zum 1. Standort Ex_1 $(1 \mid 1)$ beträgt d $(Ex_1, X) = \sqrt{1{,}9^2 + 1{,}5^2} \approx 2{,}42$ L.E.

Löst man das Problem mit Parametern, so ergibt sich eine explizite Formel, mit der der optimale Standort ausgerechnet werden kann. Vorher sollte man allerdings nochmals ein konkretes Beispiel durchrechnen, deshalb hier noch eine weitere Übungsaufgabe:

Gegeben sind:

$Ex_1\ (1{,}5 \mid 18)$, $Ex_2\ (18{,}6 \mid 21)$, $Ex_3\ (22{,}5 \mid 15)$, $Ex_4\ (19{,}2 \mid 3)$, $Ex_5\ (0 \mid 0)$

$w_1 = 4$, $w_2 = 8$, $w_3 = 6$, $w_4 = 4$, $w_5 = 5$

Berechnen Sie den optimalen Standort mit l_2^2 – Entfernung!

Lösung: $f(x) = 4 \cdot (1{,}5 - x_1)^2 + 8\ (18{,}6 - x_1)^2 + 6 \cdot (22{,}5 - x_1)^2 + 4 \cdot (19{,}2 - x_1)^2$
$+ 5 \cdot (0 - x_1)^2 + 4 \cdot (18 - x_2)^2 + 8 \cdot (21 - x_2)^2 + 6 \cdot (15 - x_2)^2$
$+ 4 \cdot (3 - x_2)^2 + 5 \cdot (0 - x_2)^2$

mit $f_1'(x_1) = 0 \iff 8 \cdot (1{,}5 - x_1) \cdot (-1) + 16 \cdot (18{,}6 - x_1) \cdot (-1) + 12 \cdot (22{,}5 - x_1) \cdot (-1)$
$+ 8 \cdot (19{,}2 - x_1) \cdot (-1) + 10 \cdot (0 - x_1) \cdot (-1) = 0$

und $f_2'(x_2) = 0 \iff 8 \cdot (18 - x_2) \cdot (-1) + 16 \cdot (21 - x_2) \cdot (-1) + 12 \cdot (15 - x_2) \cdot (-1)$
$+ 8 \cdot (3 - x_2) \cdot (-1) + 10 \cdot (0 - x_2) \cdot (-1)$

Daraus folgt die Lösung X* $(13{,}58 \mid 12{,}67)$.

Man erkennt hieran auch, wie sich die **allgemeine Lösung** ergibt:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{M} w_m (a_{m1} - x_1)^2 + \sum_{m=1}^{M} (a_{m2} - x_2)^2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f_1'(x_1) = \sum_{m=1}^{M} w_m \cdot 2 \cdot (a_{m1} - x_1) \cdot (-1) = 2 \cdot \sum_{m=1}^{M} w_m x_1 - 2 \cdot \sum_{m=1}^{M} w_m a_{m1}$$

$$f_1''(x_1) = 2 \cdot \sum_{m=1}^{M} w_m > 0,$$ weil alle Gewichte positiv sind.

$\Rightarrow$ $f_1(x_1)$ hat ein Minimum für positive Gewichte, dessen x_1-Wert sich aus

$$f'_1(x_1) = 0 \quad \text{errechnet:} \quad x_1 = \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m a_{m1}}{\sum_{m=1}^{M} w_m}.$$

Analog leitet sich aus $f_2'(x_2) = 0$ der Wert für x_2 her: $x_2 = \dfrac{\sum_{m=1}^{M} w_m a_{m2}}{\sum_{m=1}^{M} w_m}$

Setzen wir in diese Formel die Werte der Übungsaufgabe ein, so erkennen wir:

$$x_1 = \frac{w_1 \cdot a_{11} + w_2 \cdot a_{21} + w_3 \cdot a_{31} + w_4 \cdot a_{41} + w_5 \cdot a_{51}}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$= \frac{4 \cdot 1{,}5 + 8 \cdot 18{,}6 + 6 \cdot 22{,}5 + 4 \cdot 19{,}2 + 5 \cdot 0}{4 + 8 + 6 + 4 + 5} = \frac{366{,}6}{27} = 13{,}5\overline{7}$$

$$x_2 = \frac{w_1 \cdot a_{12} + w_2 \cdot a_{22} + w_3 \cdot a_{32} + w_4 \cdot a_{42} + w_5 \cdot a_{52}}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$= \frac{4 \cdot 18 + 8 \cdot 21 + 6 \cdot 15 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0}{4 + 8 + 6 + 4 + 5} = \frac{342}{27} = 12{,}\overline{6}$$

Bisher wurde das Quadrat der euklidischen Entfernung betrachtet. Was passiert, wenn die "normale" euklidische Entfernung benutzt wird?

Gesucht ist das Minimum von

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m \cdot \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} \; .$$

Dabei treten folgende "Erschwernisse" auf:

1. f(x) lässt sich nicht als Summe zweier Funktionen schreiben, bei der jede nur von einer Variablen abhängt.
2. Man muss partielle Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 bilden:

   $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{M} w_m \frac{(a_{mi} - x_i) \cdot (-1)}{\sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}}, \quad i = 1{,}2$$
3. Die partiellen Ableitungen existieren in den gegebenen Standorten Ex_m, m = 1,.., M nicht.
4. Man kann mit Hilfe eines Tests feststellen, ob einer der existierenden Standorte optimal ist. Wenn dies nicht der Fall ist, muss ein Iterationsverfahren benutzt werden.

5.2 Beispiele, bei denen f (x) nur stückweise differenzierbar ist: Zentrallagerproblem mit l_1-Entfernung

In vielen Fällen ist die l_2- oder l_2^2-Metrik kein geeignetes Werkzeug für die Entfernungsmodellierung.

So ist z. B. für die Entfernung im Straßennetz von Manhattan oder Mannheim, bei der Bewegung des Roboterarms und bei Entfernungen zwischen zwei Plätzen in einem Hochregallager die Rechteckentfernung geeigneter (vgl. Abschnitt 4).

Da ein Kreis in dieser Metrik "eckig" ist und von Geraden gebildet wird, gilt dasselbe für die Punkte gleicher Entfernung von einem festen Punkt: Sie liegen auf einem "eckigen Kreis" um den festen Punkt (a_{m1}, a_{m2}) und erfüllen die Bedingung

$$|a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2| = r$$

Für das Zahlenbeispiel $a_{m1} = 4$, $a_{m2} = 2$ und $r = 3$ besteht der Kreis

$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) \mid |4 - x_1| + |2 - x_2| = 3\}$ aus den Geradenstücken

$$x_2 = - x_1 + 3 \text{ für } x_1 \leq 4 \wedge x_2 \leq 2 \quad \text{und} \quad x_2 = x_1 - 5 \text{ für } x_1 > 4 \wedge x_2 \leq 2$$

$$x_2 = - x_1 + 9 \text{ für } x_1 > 4 \wedge x_2 > 2 \quad \text{und} \quad x_2 = x_1 + 1 \text{ für } x_1 \leq 4 \wedge x_2 > 2$$

D. h. die Summe der Entfernungen in Richtung der Koordinatenachsen zu jedem Punkt auf dem "Kreis" beträgt 3 L.E.

Benutzen wir die l_1 - Norm nun für unser Standortproblem (Zentrallagerproblem aus Kapitel 4), dann ergibt sich für die Funktion, deren Minimum gesucht wird:

$$f(X) = \sum_{m=1}^{M} w_m (|a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2|)$$

$$= \sum_{m=1}^{M} w_m |a_{m1} - x_1| + \sum_{m=1}^{M} w_m |a_{m2} - x_2| = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Die Funktion von zwei Variablen lässt sich wieder als Summe zweier Funktionen mit jeweils einer Variablen schreiben, die wir getrennt untersuchen.

Als **Zahlenbeispiel** für die Standorte und Gewichte werden wieder die Werte aus 5.1 gewählt:

Ex_1 (1 | 1), Ex_2 (1 | 4), Ex_3 (2 | 1), Ex_4 (4 | 1), Ex_5 (4 | 4) mit den Gewichten $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, $w_4 = 2$ und $w_5 = 4$

Dann ergibt sich:

$$f_1(x_1) = 2 \cdot | 1 - x_1 | + 1 \cdot | 1 - x_1 | + 1 \cdot | 2 - x_1 | + 2 \cdot | 4 - x_1 | + 4 \cdot | 4 - x_1 |$$

$$= 3 \cdot | 1 - x_1 | + | 2 - x_1 | + 6 \cdot | 4 - x_1 |$$

Durch den Betrag muss man nun eine Fallunterscheidung durchführen und es ergeben sich abschnittsweise definierte Funktionen, die mit "Knick" ineinander übergehen, also stetig aber nicht überall differenzierbar sind.

Fallunterscheidung für $f_1(x_1)$:

1. Fall $x_1 \leq 1$: $f_1(x_1) = 3 \cdot (1 - x_1) + (2 - x_1) + 6 \cdot (4 - x_1) = 29 - 10\, x_1$

2. Fall $1 \leq x_1 \leq 2$: $f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (2 - x_1) + 6 \cdot (4 - x_1) = 23 - 4\, x_1$

3. Fall $2 \leq x_1 \leq 4$: $f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 6 \cdot (4 - x_1) = 19 - 2\, x_1$

4. Fall $x_1 \geq 4$: $f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 6 \cdot (x_1 - 4) = -29 + 10\, x_1$

Zeichnet man nun $f_1(x_1)$, so kann man folgendes beobachten (vgl. Abbildung 11):

1. $f_1(x_1)$ ist stückweise linear. Der Graph ist auf den verschiedenen Intervallen eine Gerade.
2. f_1 hat "Knickpunkte", in denen die Funktion stetig aber nicht differenzierbar ist.
3. Das Minimum liegt in dem Knickpunkt, bei dem ein Vorzeichenwechsel in der Steigung stattfindet.
4. Die x_1 - Koordinate des optimalen Standortes ist $x_1 = 4$.

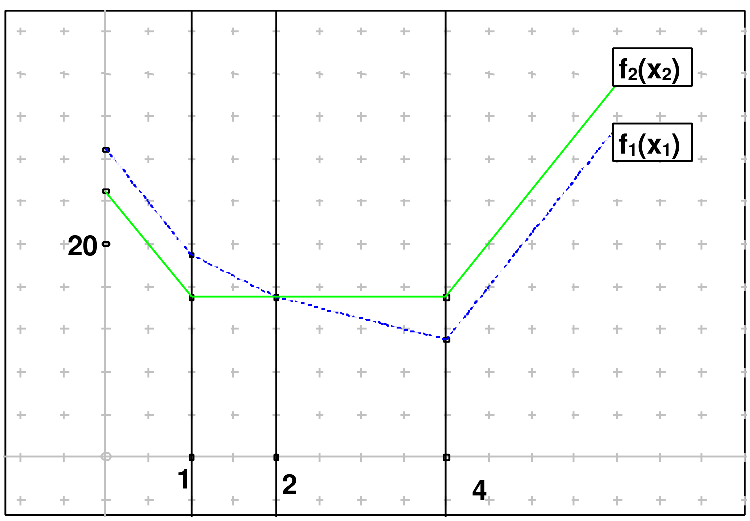


Abbildung 11: Stückweise differenzierbare Funktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$

Fallunterscheidung für $f_2(x_2) = 2 \cdot |1 - x_2| + 1 \cdot |4 - x_2| + 1 \cdot |1 - x_2| + 2 \cdot |1 - x_2| + 4 \cdot |4 - x_2|$

$$= 5 \cdot |1 - x_2| + 5 \cdot |4 - x_2|$$

1. Fall $x_2 \leq 1$ $\quad f_2(x_2) = 5 \cdot (1 - x_2) + 5 \cdot (4 - x_2) = 25 - 10\, x_2$

2. Fall $1 \leq x_2 \leq 4$ $\quad f_2(x_2) = -5 \cdot (1 - x_2) + 5 \cdot (4 - x_2) = 15$

3. Fall $4 < x_2$ $\quad f_2(x_2) = -5\cdot(1-x_2) - 5\cdot(4-x_2) = -25 + 10\,x_2$

Aus der Zeichnung für $f_2(x_2)$ kann man ablesen (Abbildung 11):

1. $f_2(x_2)$ ist linear, denn der Graph ist auf den verschiedenen Intervallen eine Gerade.
2. f_2 hat "Knickpunkte", in denen die Funktion stetig aber nicht differenzierbar ist.
3. Mindestens ein Minimum liegt an einem solchen Knickpunkt.
4. Die x_2 -Koordinate des optimalen Standortes liegt in dem Intervall [1; 4], d. h. alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ mit A (4 | 1) , B (4 | 4) sind Minima für $f_2(x_2)$.

Die Minima sind die einzigen Punkte, an denen eine waagerechte Gerade "unterhalb der Funktion" gezeichnet werden kann, die die Funktion schneidet. (Entsprechend der achsenparallelen Tangente im Minimum einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion.) Das Kriterium für ein Minimum ist hier der Wechsel der Steigung der Funktion vom negativen zum positiven Wert.

Die **allgemeine Fragestellung** lautet: Wie findet man das Minimum der Funktion $g(x)=\sum_{m=1}^{M} w_m |a_m - x|$, d.h. wie findet man den "Knickpunkt", an dem der Vorzeichenwechsel in der Steigung der stückweise linearen Funktion auftritt?

Wir nehmen an, dass in g(x) gleiche Terme schon zusammengefasst sind und deshalb gilt: $a_1 < a_2 <.. < a_n$ ($n \le M$). Nun betrachten wir die Funktion auf dem Intervall $[a_q; a_{q+1}]$. Für $m > q+1$ gilt $|a_m - x| = (a_m - x)$, für $m \le q$ gilt $|a_m - x| = x - a_m$, also lässt sich g(x) als Summe dieser beiden Terme schreiben:

$$g(x)=\sum_{m=1}^{q} w_m (x-a_m) + \sum_{m=q+1}^{M} w_m (a_m - x) = \Big(\sum_{m=1}^{q} w_m - \sum_{m=q+1}^{M} w_m\Big)\, x + \Big(\sum_{m=q+1}^{M} w_m a_m - \sum_{m=1}^{q} w_m a_m\Big)$$

$=c_q\, x + b_q$; g (x) ist somit eine lineare Funktion.

Es gilt jetzt, das a_q zu bestimmen, an dem die Steigung von g(x) das Vorzeichen wechselt.

Die Steigung "links von a_q" (also für $x< a_q$) heißt $g^-(a_q)=\sum_{m=1}^{q-1} w_m - \sum_{m=q}^{M} w_m$,

die Steigung "rechts von a_q" (also für $x> a_q$) heißt $g^+(a_q)=\sum_{m=1}^{q} w_m - \sum_{m=q+1}^{M} w_m$.

Gesucht ist das a_q für das gilt: $g^-(a_q) \le 0 \wedge g^+(a_q) \ge 0$.

Wenden wir diese Überlegungen auf das oben angegebene Beispiel

$f_1(x_1) = 3\cdot|\,1 - x_1\,| + |\,2 - x_1\,| + 6\cdot|\,4 - x_1\,|$ an, so erhalten wir:

Steigung links von a_1 : $g^-(1) = \sum_{m=1}^{0} w_m - \sum_{m=1}^{3} w_m = -10$,

rechts von a_1 : $g^+(1) = \sum_{m=1}^{1} w_m - \sum_{m=2}^{3} w_m = 3 - 7 = -4$.

Steigung links von a_2: $g^{-}(2) = g^{+}(1) = -4$,

rechts von a_2: $g^{+}(2) = \sum_{m=1}^{2} w_m - \sum_{m=3}^{3} w_m = 4 - 6 = -2$.

Steigung links von a_3: $g^{-}(4) = g^{+}(2) = -2$,

rechts von a_3: $g^{+}(4) = \sum_{m=1}^{3} w_m - \sum_{m=4}^{3} w_m = 10$,

also liegt der Vorzeichenwechsel in der Steigung bei $a_3 = 4$ (siehe Abbildung 11).

Durch die Änderung des oberen Summationsindex wird beim Übergang von a_q auf a_{q+1} jedes Mal zweimal das Gewicht w_q hinzugefügt, da es im additiven Term neu auftritt und in der zu subtrahierenden Summe wegfällt. (Vgl. Beispiel, wo $w_1+w_2+w_3 = 10$ und daher $g^{-}(1) = -10$, $-10 + 2 \cdot 3 = -4 = g^{-}(2)$ usw.)

Anders ausgedrückt wird das kleinste q gesucht, für das gilt: $g^{+}(q) \geq 0$, wo also der Vorzeichenwechsel auftritt.

$$\sum_{m=1}^{q} w_m \geq \sum_{m=q+1}^{M} w_m \qquad \Big| + \sum_{m=1}^{q} w_m$$

$$2 \cdot \sum_{m=1}^{q} w_m \geq \sum_{m=1}^{M} w_m \qquad | :2 \quad \Rightarrow \sum_{m=1}^{q} w_m \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{M} w_m \quad (*)$$

Wenn die Ungleichung (*) mit dem Größer-Zeichen erfüllt ist, dann ist a_q der eindeutige Minimierer. (Vgl. Lösung von $f_1(x_1)$: Der Medianwert ist 5 und $\sum_{m=1}^{3} w_m = 10$, also ist a_3 eindeutiger Minimierer der Funktion.)

Ist die Ungleichung (*) dagegen mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, so minimieren alle Werte zwischen a_q und a_{q+1} die Funktion. (Vgl. $f_2(x_2)$: der Medianwert ist 5 und $\sum_{m=1}^{1} w_m = 5$.)

Insgesamt können also vier Fälle auftreten:

1. Fall: Die Lösung für x_1 und x_2 ist eindeutig, dann ist die optimale Lösung des STOP durch einen Punkt $P(x_1, x_2)$ gegeben.

2. Fall: Die Lösung ist für x_1 eindeutig und für x_2 mehrdeutig, dann ergibt sich als Graph der Lösungsmenge eine Strecke, die parallel zur x_2-Achse verläuft.

3. Fall: Die Lösung ist für x_1 mehrdeutig und für x_2 eindeutig, dann ergibt sich als Graph der Lösungsmenge eine Strecke, die parallel zur x_1-Achse verläuft.

4. Fall: Die Lösung ist für x_1 und für x_2 mehrdeutig, dann ergibt sich als Graph der Lösungsmenge eine durch ein Rechteck begrenzte Teilmenge im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6. Anhang

6.1 Beweise zum Fermat-Punkt

Für den Fall, daß für die Unterrichtseinheit „Standortplanung“ ausreichend Zeit zur Verfügung steht oder deren Umsetzung in einer besonders leistungsfähige Klasse beabsichtigt wird, sollen an dieser Stelle zwei Möglichkeiten vorgestellt werden wie sich der Fermat-Punkt formal beweisen lässt.

6.1.1 1. Beweis zum Fermat-Punkt

In diesem Beweis werden folgende Eigenschaften des Fermat-Punktes nachgewiesen:

- der gesuchte Punkt lässt sich mit Hilfe der Aufsatzdreiecke finden, d.h. die "Diagonalen" schneiden sich in einem Punkt
- nur dieser Punkt besitzt die minimale Abstandssumme zu den Eckpunkten

Der Beweis benutzt den Satz vom Sehnenviereck und gilt nur für Dreiecke mit Winkeln<120°.

Voraussetzung:

1. ΔABC ist ein beliebiges Dreieck, mit Winkeln kleiner als 120°
2. Über den Dreiecksseiten sind die gleichseitigen Dreiecke konstruiert: ΔBCG, ΔACD, ΔABE
3. Es werden die Strecken $\overline{CE}$, $\overline{AG}$ und $\overline{BD}$ eingezeichnet (vergl. Abbildung 12a).

Behauptung:

1. $\overline{CE}$, $\overline{AG}$ und $\overline{BD}$ haben einen gemeinsamen Schnittpunkt Q.
2. $|\overline{AQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{CQ}| < |\overline{AR}| + |\overline{BR}| + |\overline{CR}|$ für R beliebig innerhalb des Dreiecks ABC mit $R \neq Q$. (Dann ist Q der Punkt mit minimaler Abstandssumme zu den Ecken des Dreiecks, also der Fermatpunkt)

Beweis der Behauptung 1:

Der Beweis ist recht aufwendig und konstruiert zuerst den Fermatpunkt auf eine andere Weise, nämlich als Schnittpunkt der Umkreise um die Aufsatzdreiecke (Teil I), um dann zu zeigen, dass dieser Punkt auf den "Diagonalenstrecken" (Teil II) liegt.

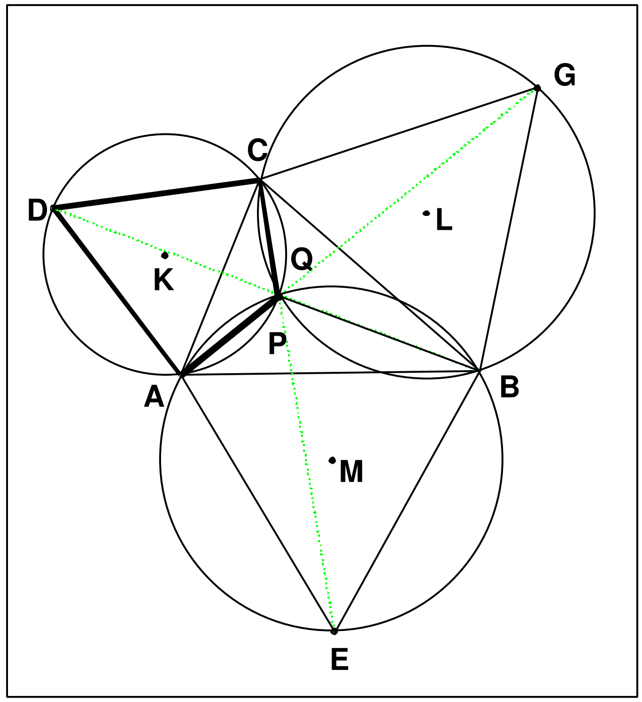
Wenn man diesen Beweis im Unterricht durchführen möchte, sollten Teile davon schon vorher behandelt worden sein.

Teil I: Zu den gleichseitigen Dreiecken konstruiert man die Umkreise mit den entsprechenden Mittelpunkten (Abbildung 12a):

Zu dem gleichseitigen Aufsatzdreieck Δ ACD gehört der Umkreismittelpunkt K, zu Δ BCG der Umkreismittelpunkt L und zu Δ ABE der Umkreismittelpunkt M.

Abbildung 12a:

Figur zum 1. Beweis der Behauptung 1



Die Umkreise von Δ ADC und Δ ABE schneiden sich im Punkt A und einem weiteren Punkt P.

Betrachten wir nun das Viereck DAPC. Es ist ein Sehnenviereck im Kreis mit Mittelpunkt K und dem ? ADC = 60°. Da im Sehnenviereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt, lässt sich hieraus auf ? CPA = 120° schließen.

Auch APBE ist ein Sehnenviereck und deshalb kann man ebenso von ? BEA = 60° (nach Voraussetzung) auf ? APB = 120° schließen.

Weil ? APB + ? CPA + ? BPC = 360° ermittelt man für ? BPC = 120°.

Da auch die Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck gilt (nur dasjenige Viereck besitzt einen Umkreis, bei dem die Summe gegenüberliegender Winkel 180° beträgt), folgt mit der Voraussetzung ? CGB = 60° und der Tatsache ? BPC = 120°, dass BQCG ein Sehnenviereck im Kreis um L ist. Von den beiden Schnittpunkten der Umkreise um Δ ADC und Δ CGB, nämlich C und Q, fällt der Punkt Q mit P zusammen. (D. h., auch der dritte Umkreis verläuft durch diesen Punkt.)

<u>Ergebnis Teil I</u>: Die Umkreise um die aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke schneiden sich in einem Punkt.

Nun fehlt noch der Nachweis, dass dieser Punkt auch der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AG}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ ist, dass also gilt: $P \in \overline{AG}$ und $P \in \overline{BD}$ sowie $P \in \overline{CE}$.

<u>Teil II:</u> Verbindet man P mit den Punkten A, B, C, D, E und G (vgl. Abbildung 12b), so sind folgende Winkelgrößen gleich:? DPA =? CPD = ? GPC = ? BPG = ? EPB = ? APE = 60° (Beweis siehe unten). Damit folgt, dass die Punkte A, P, G sowie D, P, B und C, P, E auf einer Geraden liegen.

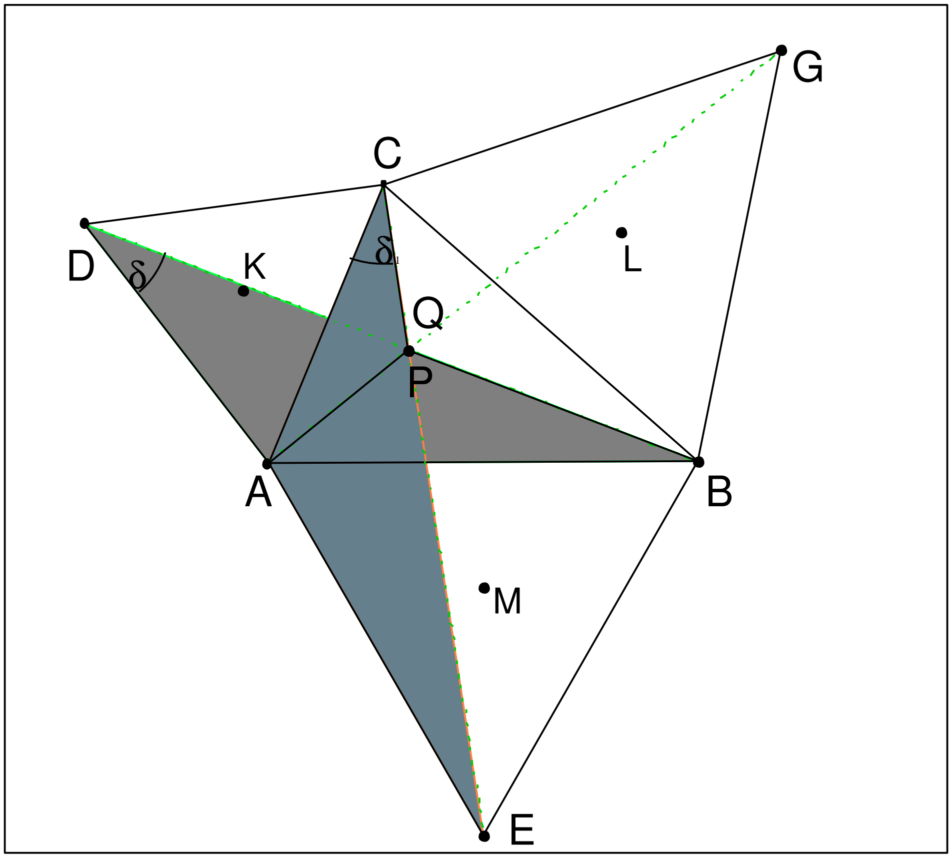


Abbildung 12b : Figur zum 1. Beweis, Teil II

<u>Beweis</u> für :? DPA =? CPD = ? GPC = ? BPG = ? EPB = ? APE = 60°

Nach Konstruktion der gleichseitigen Aufsatzdreiecke (Abbildung 12b) lässt sich die Deckungsgleichheit folgender Dreiecke mit Hilfe des Kongruenzsatzes sws beweisen:
Δ CAE $\cong$ Δ DAB

1. Übereinstimmende Seiten sind $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$, da Δ ACD nach Konstruktion gleichseitig ist.

2. Übereinstimmende Seiten sind $|\overline{AB}| = |\overline{AE}|$, da Δ ABE nach Konstruktion gleichseitig ist.

3. In ihren Maßen stimmen die Winkel ? EAC und ? BAD überein, denn es gilt:

? EAC =? BAC + ? EAB=? BAC + 60°=? BAC + ? CAD=? BAD.

Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt nun die Übereinstimmung von ? ADB und ? ACE = δ. Nun lässt sich ? CPD ausdrücken als
? CPD = 180°- (60°+ δ) - (60°- δ)= 60°.

Für die übrigen Winkel kann man den Beweis mit anderen Dreiecken wiederholen oder mit Hilfe der oben ermittelten Ergebnisse aus der Betrachtung des Sehnenvierecks (siehe Abbildung 12a) mit Hilfe von ? CPA = 120° folgern, dass ? DPA = 60°.

Als Scheitelwinkel sind auch ? EPB = ? BPG = 60°, womit aus ? APB = 120° folgt, dass ? APE = ? APB - ? EPB = 120° - 60° = 60°, sowie aus ? BPC = 120° folgt ? GPC = ? BPC - ? BPG = 120° - 60° = 60°.

Somit ist die Behauptung 1 bewiesen, dass $\overline{AG}$, $\overline{CE}$ und $\overline{BD}$ sich in einem Punkt P schneiden. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Umkreise der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke des Dreiecks ABC oder der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken $\overline{AG}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$. Ebenfalls gezeigt wurde, dass sich diese Verbindungsstrecken in Winkeln von 120° schneiden: ? APB= ? BPC= ? CPA =120°.

<u>Beweis der Behauptung 2</u>:

Wir beweisen zunächst den <u>Hilfssatz</u>, der für <u>gleichseitige</u> Dreiecke gilt:

Die Summe der Abstände irgendeines Punktes aus dem Inneren eines gleichseitigen Dreiecks von den Seiten des Dreiecks ist konstant (Abbildung 13).

Diesen interessanten und verblüffenden Sachverhalt kann man auch schon an anderer Stelle im Unterricht beweisen.

<u>Beweis des Hilfssatzes:</u>

Konstruktion:

a) Wähle einen Punkt P aus dem Inneren des gleichseitigen Dreiecks ABC und fälle auf alle Seiten das Lot. Die Lotfußpunkte heißen R, Q, S und mit ihnen gilt: $\overline{PR} \perp \overline{AB}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ und $\overline{PS} \perp \overline{AC}$.

b) Errichte außerdem die Mittelsenkrechte (= Höhe) auf $\overline{AB}$ mit Fußpunkt D; es gilt deshalb $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

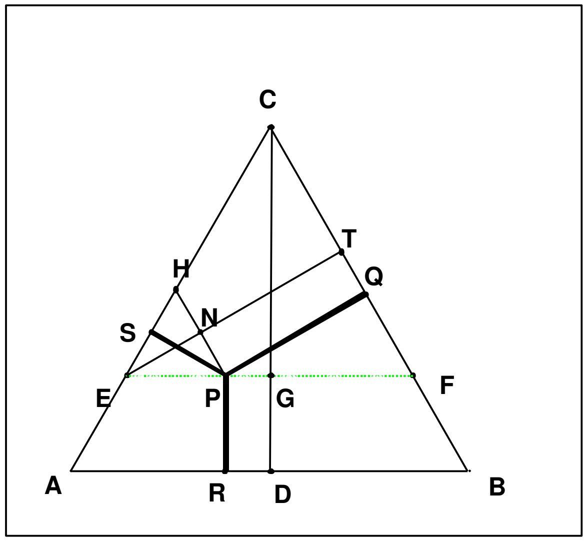
c) Zeichne die Parallele zu $\overline{AB}$ durch P, die $\overline{CD}$ in G, $\overline{AC}$ in E und $\overline{BC}$ in F schneidet ! Dann gilt nach Konstruktion $|\overline{PR}| = |\overline{GD}|$.

d) Der Fußpunkt der Senkrechten zu $\overline{BC}$ durch E sei T. Das entstandene Dreieck CEF ist gleichseitig (Strahlensatzfigur mit Δ ABC oder Begründung mit Stufenwinkeln da $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$) und hat als Höhe $\overline{CG}$ bzw. $\overline{ET}$. Da alle Höhen im gleichseitigen Dreieck gleich lang sind, gilt $|\overline{CG}| = |\overline{ET}|$.

e) Zeichne eine Parallele zu $\overline{CB}$ durch P, die $\overline{AC}$ in H und $\overline{ET}$ in N schneidet.
$|\overline{NT}| = |\overline{PQ}|$

f) Da das Dreieck EHP gleichseitig ist (Begründung wie d), sind auch in diesem die Höhen wieder gleich lang: $|\overline{SP}| = |\overline{EN}|$

Abbildung 13:
Figur zum Beweis des Hilfssatzes für gleichseitige Dreiecke:
Die Abstandssumme irgendeines Punktes innerhalb des Dreiecks von den Seiten ist konstant.



Also gilt: $|\overline{PS}| + |\overline{PQ}| = |\overline{EN}| + |\overline{NT}|$ (nach e, f)

$= |\overline{ET}| = |\overline{CG}|$ (nach d).

Da $|\overline{PR}| = |\overline{GD}|$ (nach c) folgt: Der Abstand des Punktes von den Seiten beträgt: $|\overline{PS}| + |\overline{PQ}| + |\overline{PR}| = |\overline{CG}| + |\overline{GD}| = |\overline{CD}|$. Er ist also für jedes gleichseitige Dreieck ABC eine Konstante, die Länge der Höhe im gleichseitigen Dreieck.

Für den <u>Beweis von Behauptung 2</u> müssen wir ein gleichseitiges Dreieck benutzen, um den Hilfssatz anzuwenden. Andererseits benötigen wir aber nicht die Abstände zu den Seiten, sondern die Summe der Entfernungen zu den Eckpunkten des gegebenen Dreiecks. Das lässt sich durch die folgende Konstruktion in einer Figur vereinen:
Weil im Beweis zur Behauptung 1 als Ergebnis ermittelt worden war, dass die Verbindungslinien des Fermat-Punktes mit den Ecken des Dreiecks Winkel von 120° einschließen, ist in der folgenden Konstruktion M Fermatpunkt für das Dreieck ABC (Abbildung 14):

a) Im Dreieck ABC (kein Winkel größer als 120°) sei M der Punkt innerhalb des Dreiecks, für den gilt: ? CMA = ? AMB = ? BMC = 120°

b) Zeichne jeweils in A, B, C die Senkrechten zu $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, die sich in P, Q, R schneiden.

c) Δ PQR ist gleichseitig, weil folgende Überlegungen gelten:

1.) Für ? CQB ergibt sich 60°, denn im Viereck CMBQ sind nach Konstruktion ? MCQ und ? MBQ rechte Winkel und ? CMB ist nach Ausgangsfigur 120°.

2.) ? ARC = 60°, da für die Winkel im Viereck CRAM nach Konstruktion auch ? MAR = 90° = ? RCM und nach Ausgangsfigur ist ? CMA = 120°.

3.) Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich für ? BPA ebenfalls 60°.

d) D sei ein anderer Punkt im Dreieck ABC, $|\overline{DA}|$, $|\overline{DB}|$ und $|\overline{DC}|$ seine Entfernungen zu den Eckpunkten.

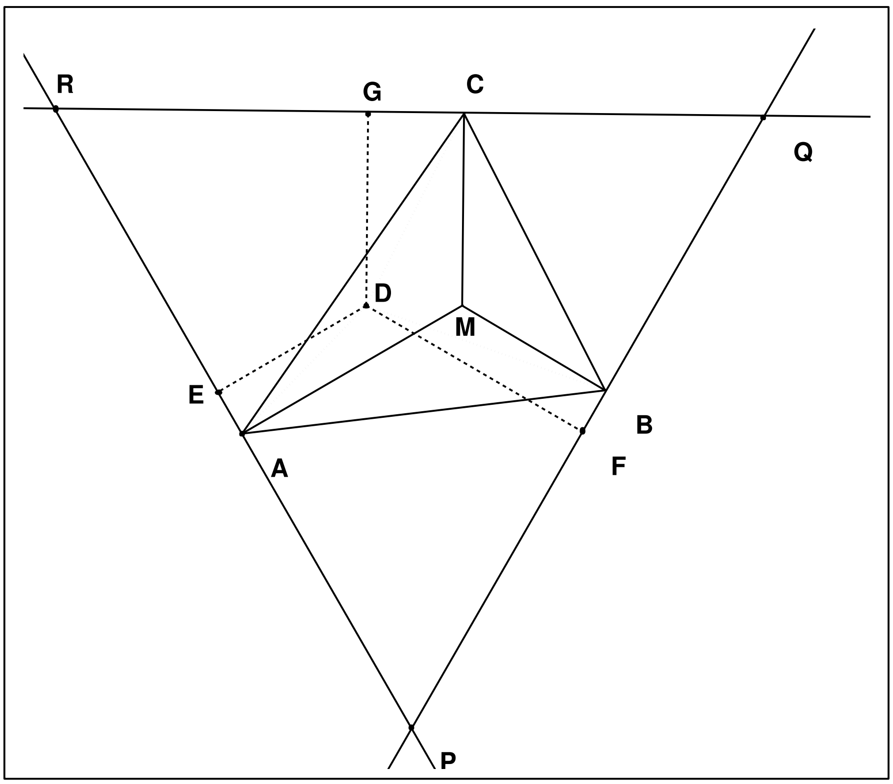


Abbildung 14: Figur zu 1. Beweis, Teil 2

Zu zeigen bleibt: Die Summe der Abstände von M zu den Eckpunkten ist kleiner als diejenige von D zu den Eckpunkten:

$$|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$$

Beweis: $|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| = |\overline{DE}| + |\overline{DF}| + |\overline{DG}|$ nach Hilfssatz, wobei $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, $\overline{DG}$ die Lote auf die Seiten des Dreiecks PQR sind.

Wenn man die Lote aber durch die Verbindungen zu den Punkten ABC ersetzt, liegt nicht mehr die kürzeste Verbindung vor, denn es gilt

$$|\overline{DE}| + |\overline{DF}| + |\overline{DG}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$$

also auch $|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$ qed.

Die Konstruktion für den Fermat-Punkt liefert nur dann einen Punkt innerhalb des Dreiecks, wenn kein Winkel 120° oder mehr beträgt. Im Fall von ρ ACB = 120° fällt der Fermat-Punkt mit dem Punkt C zusammen. Ist ein Winkel größer als 120°, liegt der Schnittpunkt der Konstruktionslinien außerhalb des Dreiecks und der Scheitelpunkt dieses Winkels besitzt minimale Abstandssumme von den Eckpunkten.

6.1.2 2. Beweis zum Fermat-Punkt

Gegeben ist ein Dreieck ABC, bei dem kein Winkel größer als 120° ist. Gesucht ist der Punkt P, für den die Abstandssumme zu den Eckpunkten minimal ist.[11] Im Folgenden wird nur der Fall betrachtet, dass alle Winkel des Dreiecks kleiner als 120° sind. Die Beweisdurchführung ist kürzer als im 1. Beweis; sie beruht auf der Grundidee, dass von allen Streckenzügen mit gleichen Endpunkten die gerade Linie die kürzeste Verbindung ist und benutzt durch Drehung entstandene kongruente Dreiecke.[12] Durch die Drehung werden die Abstände von P zu den Dreiecksecken zu einem Streckenzug zusammengefügt. Die Summe der Entfernungen von P zu den Eckpunkten des Dreiecks ist genau dann minimal, wenn der durch Kongruenzabbildungen hergestellte Streckenzug auf einer Geraden liegt.

Voraussetzung:

1. P sei ein beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks ABC.
2. D liegt außerhalb von Δ ABC und Δ ADC ist gleichseitig, es gilt also $|\overline{AC}| = |\overline{AD}| = |\overline{DC}|$ und ? CAD = ? DCA = ? ADC = 60°.

Behauptung:

Wenn P der Punkt mit der minimalen Abstandssumme ist, dann liegt P auf $\overline{BD}$ und es gilt: $|\overline{BD}| = |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$.

Beweis:

1. Wähle P im Inneren des Dreiecks und drehe Δ APC um A um 60° (Abbildung 15), wobei C auf D abgebildet wird. Der Bildpunkt zu P sei P' und $|\overline{CP}| = |\overline{DP'}|$.
2. Δ APP' ist gleichseitig, da ? PAP' = 60° und $|\overline{AP}| = |\overline{AP'}|$ wegen der durchgeführten Drehung $\Rightarrow |\overline{AP}| = |\overline{PP'}|$.

[11] Die Beweisidee stammt von dem Mathematikhistoriker Joseph Ehrenfried Hofmann aus dem Jahre 1929

[12] Dieser Beweis findet sich auch in einer alten Ausgabe des Lambacher-Schweizer: Geometrie 1, 1983 , Klett-Verlag, Stuttgart, ISBN 3-12-730500-1, Seite 104-105. Hier gibt es auch eine Anwendung dazu, in der drei Orte einen gemeinsamen Wasserturm bauen wollen.

3. Für die Summe der Länge der Strecken gilt:

$$
\begin{aligned}
|\overline{AP}|+|\overline{BP}|+|\overline{CP}| &= |\overline{AP'}|+|\overline{BP}|+|\overline{DP'}| \text{ (nach 1. und 2.)}\\
&= |\overline{PP'}|+|\overline{BP}|+|\overline{DP'}| \text{ (nach 2.)}\\
&= |\overline{BP}|+|\overline{PP'}|+|\overline{P'D}| \geq |\overline{BD}|
\end{aligned}
$$

(= trifft genau dann zu, wenn P und P' auf $\overline{BD}$ liegen.)

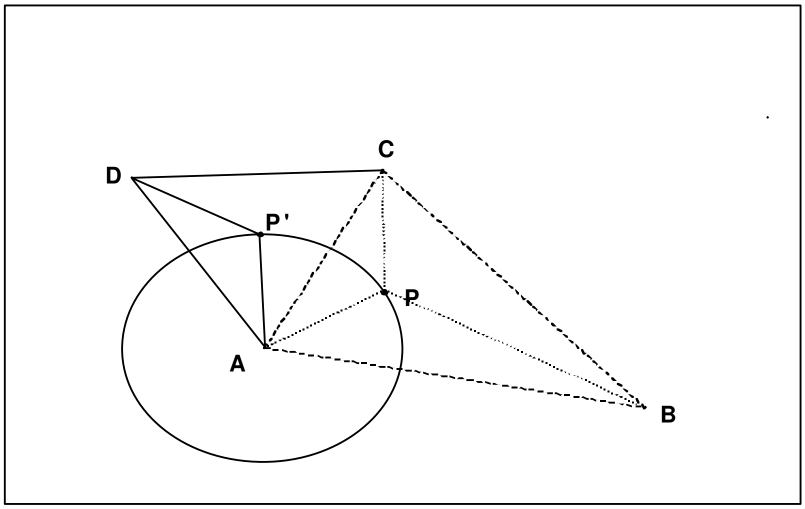


Abbildung 15: Konstruktion zu dem 2. Beweis des Fermat-Punktes

Die Summe $|\overline{PP'}|+|\overline{BP}|+|\overline{DP'}|$ ist minimal, wenn B,P,P' und D auf einer Geraden liegen und es folgt $|\overline{AP}|+|\overline{BP}|+|\overline{CP}|=|\overline{BD}|$**,** wobei nur dies die kürzeste Verbindung ist.
Umgekehrt gilt: Wenn P und P' auf $\overline{BD}$ liegen, dann müssen die Winkel, die zwischen den Stecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ entstehen, stets 120° sein, was hier nun noch bewiesen wird:

Voraussetzung: Zeichnung und Konstruktion von P' wie oben (vgl. Abbildung 15).
Die Punkte P, P', B, D liegen auf einer Geraden:

Behauptung: ? CPA = ? APB = ? BPC = 120°

Beweis: 1. Δ APP' ist gleichseitig (vgl. Punkt 2 im obigen Beweis) und ? P'PA = 60°.

Also gilt: ? APB = 180° - ? P'PA =180° - 60° = 120° .

2. ? CPA = ? DP'A (Punkt 1 Beweis oben)

Also gilt: ? CPA = ? DP'A =180° - ? AP'P= 180° - 60° = 120°

3. Es folgt: ? BPC = 360° - 120° - 120° = 120° qed.