

MaMaEuSch

**Management Mathematics for
European Schools**

[http://www.mathematik.uni-
kl.de/~mamaeusch/](http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/)



Teoría de localización en las clases de matemáticas*

por

Dr. Matthias Ehrgott⁽¹⁾

Angela Euteneuer⁽²⁾

Prof. Dr. Horst W. Hamacher⁽³⁾

Traducido del alemán a español por Maria Paz Rivera Pérez

* Una forma modificada de este reportaje, completada mediante informes de clases experimentadas, es publicado como información 23/2000 del centro de pedagogía de Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

⁽¹⁾ Departamento de ciencias de ingenierías, Universidad de Auckland, Neuseeland

⁽²⁾ Centro de pedagogía de Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

⁽³⁾ Facultad de Matemáticas, universidad de Kaiserslautern

MaMaEuSch fue apoyado mediante U.E mediante una ayuda parcial en el marco del programa-Sócrates y con ayuda parcial del estado de Rheinland-Pfalz. El contenido de este proyecto no refleja necesariamente el punto de vista de la U.E, tampoco está sujeta cualquier responsabilidad por parte de la U.E.

Contenido : Teoría de localización en las clases de matemáticas

1. Reflexiones básicas de métodos didácticos.....S. 2
2. Qué significa Teoría de Localización? - Ejemplos de introducción...S. 7
 - 2.1 El problema de almacén central
 - 2.2 Producción de placas semiconductoras
 - 2.3 Planificación de una estación de bomberos
3. Resoluciones geométricas para determinados problemas de localización.....S. 11
 - 3.1 Resolución del problema de almacén central mediante la construcción del punto de Fermat
 - 3.2 Planificación de una casa de bomberos
 - 3.2.1 Problema para 2 localizaciones: Ex_1, Ex_2
 - 3.2.2. Problema para 3 localizaciones Ex_1, Ex_2, Ex_3
 - 3.2.3 Procedimientos para cualquier número de localizaciones
 - 3.3 Problema de localización restrictivo
4. Círculos angulares y medianas dobladas como herramientas del modelo..... S. 19
5. Resoluciones de modelos de localización mediante el estudio de funciones diferenciables..... S. 25
 - 5.1 Problema de almacén central con la distancia - ℓ_2^2
 - 5.2 Ejemplos, con funciones $f(x)$ sólo diferenciables a trozos.
6. Apéndice.....S. 32
 - 6.1 Demostraciones para el punto de Fermat
 - 6.1.1 Demostración A para el punto de Fermat
 - 6.1.2 Demostración B para el punto de Fermat

1. Reflexiones básicas de métodos didácticos

La idea de que llevando a cabo y resolviendo preguntas sobre la Teoría de Localización enriquezca las clases de matemáticas del colegio, condujo a una exposición en Octubre de 1997, que fue llevada a cabo por el SIL en la universidad de Kaiserslautern. El Prof. Hamacher y sus colaboradores presentaron ejemplos en esta exposición, que dan una visión del campo de trabajo de su grupo de "optimización" de la facultad de matemáticas de la universidad de Kaiserslautern, que serán presentados en los siguientes capítulos.

La Teoría de localización abarca las posibilidades, para que con la ayuda de modelos matemáticos se busquen localizaciones teniendo en cuenta que los intereses económicos y administrativos sean óptimos. Así por ejemplo se encuentra la mejor localización para el almacén central de una empresa, cuando la suma de los gastos de transporte y de almacenaje sean mínimos y cuando se utilice el almacén óptimo. Si por otro lado, la administración busca la localización de una nueva estación de bomberos o de un hospital, hay que tener en cuenta un importante criterio para la localización óptima y es que la distancia mayor no sobrepase un valor dado.

Los problemas de localización presentados en esta publicación pertenecen al grupo de los denominados problemas en el plano, porque las localizaciones dadas son fijadas mediante dos coordenadas. Además nos limitamos a la búsqueda de una única localización óptima.

Fáciles problemas de localización pueden ser resueltos de manera efectiva con construcciones triangulares, cálculos de distancias en sistemas de coordenadas y métodos de cálculos diferenciales. De este modo los resultados considerados en este artículo pueden ser tratados usando los métodos y contenidos de las clases de matemáticas de estudiantes con edades comprendidas entre los 14 y 18 años, Por lo tanto estos resultados constituyen una buena materia para las clases de matemáticas.

La incorporación en la escuela de estos métodos orientados a la enseñanza fue evaluado por un grupo de profesores, quienes quedaron sorprendidos con su efecto.

El incluir la teoría de localización como parte de la materia en los colegios, no es sólo razonable desde un punto de vista matemático, sino que también favorable por motivos didácticos y metódicos. Este artículo nos ayuda a adquirir una mayor motivación en el sentido de llevar a la práctica una buena enseñanza y en la capacidad de repetir y reforzar materia que ya ha sido tratada. En particular se debería estimular a los estudiantes a conseguir un conocimiento social y activo lo cual es posible con una buena organización en las clases de matemáticas.

Además la Teoría de localización es una de las posibilidades para aceptar el desafío de resolver las materias de matemáticas con relevantes aplicaciones, interdisciplinarias y modelos matemáticos.

De acuerdo con la materia de matemática dada en los institutos de Alemania: "La próxima tarea de esta materia es, acercar a los estudiantes toda clase de procesos usando las matemáticas. Siempre que las matemáticas puedan ser usadas para estructurar un problema práctico que represente aspectos básicos de las condiciones complejas de un modelo y den soluciones, y puedan ser experimentadas dentro de las diferentes relaciones entre teoría y práctica. (...) Los estudiantes deberían ser capaces de relacionar las matemáticas con todo lo que ocurre fuera de ella, trabajar con las matemáticas significa encontrar soluciones críticas, analizarlas y juzgarlas. Dentro de este proceso los límites de cualquier disciplina incluida las matemáticas deberían ser considerados."¹

De acuerdo con lo que hemos visto, se creó un grupo de trabajo, que se encargó de desarrollar unos determinados problemas de localización que fueron presentados en una serie de clases y probados en diferentes niveles escolares. Los resultados obtenidos son presentados en este documento y fueron planeados para darse en reducidas horas de trabajo, con el fin de poder ser implementados en el espacio libre del plan de estudios.

Para las clases han sido elegidos ejemplos - sacados de la vida cotidiana de los estudiantes -, que muestran como usar las matemáticas para resolver problemas en economía, sociedad y ciencia/tecnología. Se deben tratar problemas típicos de modelización basados en la teoría de localización, los cuales podrán ser resueltos por métodos matemáticos, que deben ser conocidos por los estudiantes o pueden ser fácilmente comprendidos mediante conocimientos anteriormente aprendidos en los colegios.

De las aplicaciones para economía, que el grupo de trabajo de "Optimización" en la universidad de Kaiserslautern ha desarrollado, describiremos a continuación tres típicos ejercicios que han sido aprobados en las clases de matemáticas de los institutos.

1. El Problema de almacén central (véase en 2.1) representa un tipo de problema, en el que la suma de las distancias entre unas localizaciones dadas – por ejemplo almacenes de distribución – y una nueva localización obtenida – por ejemplo el almacén central – tiene que ser minimizada. Este problema se presenta de diversas formas :
 - ¿Dónde debe ser construido en un aeropuerto el lugar de recogida de equipaje , de manera que los pasajeros que llegan de las diferentes puertas de desembarques tengan que recorrer el mínimo camino?
 - ¿Dónde debe ser construido un parque de juegos de una urbanización, de manera que los niños de las urbanizaciones de alrededor lleguen a este parque recorriendo la mínima distancia?

¹ Plan de estudios de matemáticas, Grund- und Leitungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), 1998, Seite 7. Sowie "Problemlösendes Verhalten" und "Mathematisierung von Sachproblemen" im Lehrplan Mathematik (Klasse 7-9/10), Hauptschule, Realshule, Gymnasium 1984, Seite 11-13

Este problema se puede resolver de varias maneras, con lo que se puede aplicar el problema a diferentes grupos de edades:

- Si tenemos tres determinadas localizaciones podemos usar la construcción de un punto específico (*el punto de Fermat*) utilizando particulares líneas en un triángulo (*líneas de Simson*).
- Minimizando la suma de las distancias utilizando métodos de cálculos diferenciales.

El problema de localización puede ser ya introducido a estudiantes de edades comprendidas entre 14 y 15 años. La correcta elección de la edad del grupo a considerar depende de, la existencia de pruebas y las propiedades del punto de Fermat, que deberían por lo tanto ser trabajadas (véase 6.1). Se necesita utilizar en este caso el teorema de congruencia y también el teorema del cuadrilátero circunscrito con su inverso (véase en prueba.1) o las propiedades de la rotación como figura congruente (véase en prueba 2). Existen como siempre razones ya sean pedagógicas o de tiempo, las cuales pueden recomendar la supresión de las matemáticamente exactas pruebas de Fermat. Esta supresión no influirá de forma importante en la calidad de las clases teóricas. Para solucionar el problema usando construcciones triangulares – en un sistema de coordenadas, o directamente en un mapa geográfico – las construcciones tienen que ser usadas de tal forma que permita a los profesores y alumnos practicar y repetir las bien conocidas instrucciones básicas. El resultado puede ser también determinado para tres localizaciones dadas usando un modelo físico de forma experimental.

En un curso para estudiantes de edades superiores este problema de localización puede también ser solucionado utilizando cálculos diferenciales. El problema ofrece la posibilidad de introducir funciones con dos variables. Aquí es posible demostrar que una solución, la cual es conocida por los estudiantes mediante funciones de dos variables puede ser sólo llevada a cabo si la distancia es elegida de forma precisa: sólo si se usa el cuadrado de las distancias se obtiene una función objetivo, la cual puede ser separada en dos partes, tales que cada uno de estos sumandos dependa sólo de una variable. En este caso el resultado óptimo puede ser obtenido por el camino clásico.

Este modelo matemático puede además ser extendido para obtener un mejor reflejo de la realidad. Si los almacenes de distribución son utilizados con diferentes frecuencias se usaran estas frecuencias como factores que van multiplicados por la distancia entre el almacén central y los almacenes de distribución (distancia con pesos). Para el caso general de n localizaciones dadas con pesos diferentes y la distancia al cuadrado se puede en este caso hallar la óptima localización usando una común expresión para las coordenadas (véase en 5.1 y 5.2).

2. En modelado del cálculo de la distancia entre dos puntos juega un papel muy importante, por lo tanto las diferentes métricas han sido enfatizadas en los diferentes niveles de educación. En los colegios se introduce la distancia euclídea pero es también muy importante considerar el cuadrado de esta distancia y de otras. Usando el ejemplo de producción de placas semiconductoras (véase en 2.2), se demuestra que las distancias tienen que ser calculadas de diferentes modos dependiendo del tipo de

movimiento del robot. Si el robot se puede mover sólo paralelamente a los ejes de coordenadas y el movimiento tiene que ser realizado secuencialmente, la distancia entre un punto $P(x_1, x_2)$ y el origen es dada por la llamada l_1 -Norm : $l_1(OP) = |x_1| + |x_2|$.

Esta clase de medida de distancias tiene un significado especial cuando se considera el cálculo de las distancias en una ciudad que tiene sus calles construidas como un tablero de ajedrez, como es el caso de Manheim (Alemania) o Manhattan (USA). Este es el motivo por el cual este tipo de distancias es llamada distancia Manhattan.

En general los estudiantes (y también los profesores) no están acostumbrados a tratar con este tipo de cálculo para la distancia en geometría. Consecuentemente a menudo es sorprendente preguntarse que puntos en un plano tienen una distancia constante a uno o dos puntos fijos dados. Se utilizarán las definiciones de “medianas dobladas” y “círculos angulares” que son muy usadas en la geometría euclídea.

Este ejemplo para enseñar en las clases de matemáticas puede ser ampliado. Dada la condición para las coordenadas de nuestros puntos de, que no sobrepasen una cierta distancia desde un punto fijado, se puede hacer un estudio analítico de los casos usando todas las desigualdades. Las gráficas resultantes que representan los conjuntos de soluciones pueden ser dibujados de tal modo que el problema sea tratado como un problema de ecuaciones e inecuaciones lineales para estudiantes de 15 años.

3. Observando el problema de planificación de una estación de bomberos (véase en 2.3), se debe tomar la mínima de las máximas distancias de la localización buscada a las localizaciones dadas. El problema se puede resolver con la ayuda del círculo circunscrito en el triángulo construido con las tres localizaciones dadas. Si se tuvieran más de tres localizaciones se usaría el mismo procedimiento para cada combinación de tres localizaciones y se tomaría al final la mejor de las soluciones.

Hay que distinguir entre triángulos agudos y obtusos, y para el caso particular de triángulos rectángulos aplicar el teorema de Tales. Este teorema es explicado dentro de la materia dada a alumnos de 14 años. Existe la posibilidad de formular algoritmos además de la construcción de triángulos y la descripción de estas construcciones.

La teoría contenida en este artículo puede ser explicada en clase en un tiempo que oscila entre 5 y 8 horas. Es recomendable no sobrepasar este tiempo para su explicación. Toda esta materia no se llevará a cabo en mas tiempo del normalmente empleado en los planes de estudio de matemáticas. Además, los problemas de orientación como la teoría de localización conducen a nuevas motivaciones dentro de este clásico plan de estudios. Debido a la limitación de tiempo el profesor deberá enfatizar algunas de las partes descritas en este artículo y utilizar ejemplos claros para una correcta comprensión. Las motivaciones y consejos descritos en las secciones 3 y 5 poseen contenidos matemáticos que pueden ser utilizados con alumnos de diferentes edades.

Para evaluar el proceso de modelización², en aquellos problemas que se resuelven como un problema matemático, la solución debe ser encontrada mediante significados matemáticos y evaluar esta solución en un entorno adecuado. Con lo cual no siempre es suficiente utilizar métodos matemáticos para determinar la solución, como demuestra el siguiente ejemplo: Si se quiere encontrar una localización de un depósito de basuras, se conseguiría probablemente una localización en el centro de la ciudad, ya que aquí al igual que en el problema de almacén central la suma de los caminos de transporte tiene que ser mínima.

La reacción de los estudiantes que asistieron a las clases de esta materia fue bastante positiva. Su motivación, preparación y voluntad para trabajar durante largos periodos en estos nuevos conceptos, que no son fáciles desde un punto de vista matemático, fueron altas. A menudo es posible motivar a estudiantes que no son muy amantes de las matemáticas, para estos estudiantes es interesante ver que clase de problemas pueden ser resueltos por las matemáticas.

La aplicación de los problemas matemáticos a la realidad es la causante de esta motivación. Esta forma de explicar las matemáticas también enseña a los estudiantes como enfocar el problema modelado. Los estudiantes fueron animados a trabajar en grupos pequeños, de manera que pudieran ellos mismos enfrentarse al problema utilizando su iniciativa, habilidad, comunicación y competencia. Existe un doble propósito para motivar a estos pequeños grupos a presentar sus soluciones a grupos de antiguos alumnos. Por un lado existe una discusión en un grupo de personas más numeroso, y por otro lado los alumnos aprenden a trabajar y presentar toda la información que tienen. Los resultados obtenidos de este grupo mayor de personas fue una positiva motivación para siguientes trabajos.

Como los estudiantes deberían tomar sus propias decisiones, el profesor se debería limitar sólo a dar ideas adicionales en el caso que falten datos importantes para resolver el problema, o en el caso de necesitar métodos matemáticos que no habían sido vistos por los estudiantes. De este modo los profesores dejan de ser los promotores de enseñar procesos, pero eso si ayudan a incentivar y llevar a cabo tales procesos, y así son conscientes del papel de consejeros que están jugando.

Además de la motivación del estudiante y su cualificación, es importante señalar el papel que juegan los ordenadores como herramienta matemática. El uso del software es un método preferido por el estudiante, y le da la posibilidad de utilizarlo para dar soluciones a los problemas. Así los estudiantes tomarán el uso de un PC como una herramienta cotidiana.

² Véase en "Problemlösen mit mathematischen Methoden- Modellbildung" Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der Studienstufe, 1998, Seite 18 ff

2.¿Qué significa Teoría de Localización?- Ejemplos

2.1 El problema del almacén central

En el problema de almacén central (problema de grandes almacenes) el almacén central debe ser construido de tal manera, que la distancia total entre este almacén central y cada uno de los almacenes de distribución sea lo mas corta posible.

La solución del problema se puede representar mediante puntos en el plano, los almacenes de distribución por $Ex_m(a_{m1}, a_{m2})$ y el almacén central construido por $X(x_1, x_2)$. Se tomará como distancia total la suma de las distancias individuales entre el almacén central y cada uno de los almacenes de distribución. Se toma la distancia euclídea.

$d(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} = \ell_2(Ex_m, X)$ donde $\ell_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida.

Si se quiere considerar en este modelo la frecuencia de los recorridos entre el almacén central y los distintos almacenes de distribución, las distancias deben ser consideradas con respecto a la importancia de sus frecuencias.

Ejemplo numérico para la elección de un almacén central³:

En una empresa industrial existen tres almacenes de distribución, los cuales pueden ser determinados en un mapa con coordenadas $E_1 (1/2)$, $E_2 (7/3)$ y $E_3 (4/5)$. La dirección de la empresa quisiera ahora construir un almacén central en una nueva localización, de forma que la distancia total (es decir la suma de todas las distancias entre el almacén central y el de distribución) sea lo mas corta posible.

1. Modelo: para la distancia simple con el almacén central $X(x_1, x_2)$

$$\sum_{m=1}^3 \ell_2(Ex_m, X) = \sqrt{(1 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2} + \sqrt{(7 - x_1)^2 + (3 - x_2)^2} + \sqrt{(4 - x_1)^2 + (5 - x_2)^2}$$

Tomamos por ejemplo $X_1 (4/2)$, se obtiene así aplicando la distancia total a los almacenes de distribución $\sqrt{9+0} + \sqrt{9+1} + \sqrt{0+9} = 6 + \sqrt{10} \approx 9,2$.

Se toma para comparar $X_2 (4/5)$, se obtiene así $\sqrt{9+9} + \sqrt{9+4} + \sqrt{0+0} = \sqrt{18} + \sqrt{13} \approx 7,8$.

Si en el problema no se conoce ninguna limitación se preferirá tomar primero la localización $X_2 (4/5)$.

³ Por: Horst W. Hamacher: Métodos de resolución matemática para problemas de localización en el plano, Editorial-Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1995

2. Modelo para la distancia con pesos

Se sabe por ejemplo, mediante los datos registrados, que los almacenes de distribución E_1 y E_2 visitan cinco y tres veces mas respectivamente al almacén central que E_3 , así pues hay un modelo real dado mediante la siguiente distancia, multiplicando la distancia simple entre E_1 y X por el factor $w_1 = 5$ y la distancia entre E_2 y X por el factor $w_2 = 3$. Así pues resulta con esto una distancia con pesos:

$$\sum_{m=1}^3 w_m \ell_2(E_{x_m}, X) =$$

$$5 \cdot \sqrt{(1-x_1)^2 + (2-x_2)^2} + 3 \cdot \sqrt{(7-x_1)^2 + (3-x_2)^2} + \sqrt{(4-x_1)^2 + (5-x_2)^2}$$

Ahora se calcula a la distancia con pesos para cada una de las localizaciones examinadas arriba, y se obtiene

$$X_1 (4/2) \quad 5 \cdot \sqrt{9+0} + 3 \cdot \sqrt{9+1} + 1 \cdot \sqrt{0+9} = 18 + 3 \cdot \sqrt{10} \approx 27,5$$

$$X_2 (4/5) \quad 5 \cdot \sqrt{9+9} + 3 \cdot \sqrt{9+1} + 1 \cdot \sqrt{0+1} = 15 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{13} \approx 32,0$$

Así pues sería en este ejemplo más favorable $X_1 (4/2)$ que la segunda localización para el almacén central.

Tras estos sencillos ejemplos obtenemos una comprensión a la pregunta de como poder encontrar la mejor posible localización, pero aún debe ser considerada con mas exactitud.

3. Modelo

Se debería mejorar el modelo en lo que a la distancia se refiere. La distancia euclídea tiene sentido sólo si suponemos que se puede ir directamente del almacén central al almacén de distribución. Se aplica para helicópteros, vehículos en el desierto y posibles barcas en aguas bastante profundas, pero sin embargo no se aplica en nuestro problema. Por lo tanto se debería para cada posible localización $X (x_1/x_2)$ poder leer la distancia a su correspondiente almacén de distribución $d(E_{x_m}, X)$ en una red. (Por ejemplo en las tablas de distancias en los libros de carreteras).

En la construcción del modelo también debe ser revisado que medida de distancia matemática se toma de manera que el modelo tenga sentido.

2.2 Producción de placas semiconductoras

Otro ejemplo para la pregunta de que tipo de métrica debe ser utilizada es la producción de placas semiconductoras con la ayuda de robots:

En la construcción de una placa semiconductor se instalan M piezas, las cuales pertenecen a N diferentes clases (transistores, elementos de memoria etc.) - que tendrá sentido sí $N \leq M$ - en posiciones fijadas anteriormente E_{x_m} ($m = 1, \dots, M$). Se quiere ahora instalar los recipientes, en los cuales son almacenadas las diferentes piezas. En la elección de las localizaciones para estos recipientes se tiene que considerar, que

1. exista una distancia de seguridad entre el recipiente y la placa

2. el tiempo total para la instalación sea mínimo.

Para este modelo tomamos por adelantado, que se fije la secuencia de la instalación. (Esto es posible en algunos problemas de optimización.) Para las siguientes consideraciones es importante saber, como se mueve el robot, aquí tiene que ver el cálculo de los caminos recorridos.

a) Dos motores lineales, se permiten movimientos simultáneos en ambas direcciones: El siguiente paso del proceso comienza solo si están los dos motores. Por lo tanto se verifica la siguiente "distancia" entre el lugar de la instalación $Ex_m (a_{m1}, a_{m2})$ y la localización $X (x_1, x_2)$ para uno de los recipientes es:

$$d(Ex_m, X) = \max\{|a_{m1} - x_1|, |a_{m2} - x_2|\}$$

Se toma la $d(Ex_m, X)$ también con $\ell_\infty(Ex_m, X)$

b) El robot tiene solo un motor, los movimientos sucesivos deben ser ejecutados a lo largo de los ejes de coordenadas y para la "distancia" entre el lugar de la localización y el recipiente de provisiones se cumple que:

$$d(Ex_m, X) = |a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2| = \ell_1(Ex_m, X)$$

Ejemplo numérico para la producción de placas semiconductoras:

A partir de dos recipientes ($N=2$), contienen piezas redondas o bien piezas angulares ($M = 2$), las piezas deben ser instaladas en la placa en cuatro fijas posiciones Ex_1, \dots, Ex_4 ($M = 4$). La distancia de seguridad se representa mediante un cuadrado alrededor de la placa:

X_1 es una posible localización para el recipiente de piezas redondas

X_2 es una posible localización para el recipiente de piezas angulares

De cada clase se instalan dos piezas.

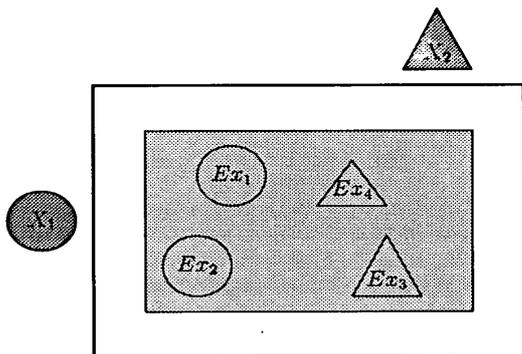


Ilustración 1a: Placa semiconductor (cuadrado interno) con cuatro fijas posiciones de las cuatro piezas, las cuales pertenecen a dos clases.⁴

⁴ Por: Horst W. Hamacher: Métodos de resolución matemática para problemas de localización en el plano, Editorial Braunschweig/Wiesbaden 1995, página 5

$\ell_2(\text{Ex}_m, X) \leq s$ para $m = 1, 2, 3$. Con esto s será el recorrido, el cual puede ser recorrido en 10 min.

Aún sería mejor, si la brigada de bomberos fuese lo más rápido posible al lugar del incendio, así pues se encuentra un r , para el cual se cumple: $\ell_2(\text{Ex}_m, X) \leq r$ con r lo más pequeño posible para $m = 1, 2, 3$. (Con ℓ_2 es mencionada aquí de nuevo la distancia euclídea)

Es conveniente, en la búsqueda de un procedimiento para la determinación de X , considerar el siguiente resultado: Sea la localización X de la estación de bomberos ya conocida, entonces se cumple $\ell_2(\text{Ex}_m, X) \leq r$ para todo m . Así pues se sitúan las empresas industriales $\text{Ex}_1, \text{Ex}_2, \text{Ex}_3$ dentro de un círculo centrado en X con radio r o en el margen de este círculo. Se busca así el centro de un círculo, el de menor posible radio que recubra a las localizaciones dadas.

3. Resoluciones geométricas para determinados problemas de localización

Afortunadamente se pueden resolver con construcciones fáciles algunos ejemplos ya tratados, los cuales son conocidos en las clases de geometría de estudiantes de 13 a 15 años.

3.1 Resolución del problema de almacén central mediante la construcción de puntos de Fermat

Recordamos que: Para tres localizaciones dadas Ex_m (almacenes de distribución ya aprobados), las cuales no están situadas en línea recta, así pues se debe determinar una nueva localización X para un almacén central, tal que la suma (con pesos) de las distancias sea mínima. Este procedimiento geométrico existe para el caso de pesos iguales con los siguientes pasos (véase en ilustración 2):

- 1^{er} Paso: Dibuja el triángulo A, B, C ($A = \text{Ex}_1, B = \text{Ex}_2, C = \text{Ex}_3$)
- 2^o Paso: Coloca en cada lado del triángulo un triángulo equilátero
- 3^{er} Paso: Une en cada caso el nuevo punto construido en el triángulo equilátero con el vértice del triángulo A, B, C , que no pertenece dicho triángulo equilátero. (*Líneas de Simson*⁵).
- 4^o Paso: Las líneas de Simson se cortan en un punto, el punto de la localización óptima, el punto de Fermat F .

⁵ Denominadas por Robert Simson, matemático inglés 1687 – 1768.

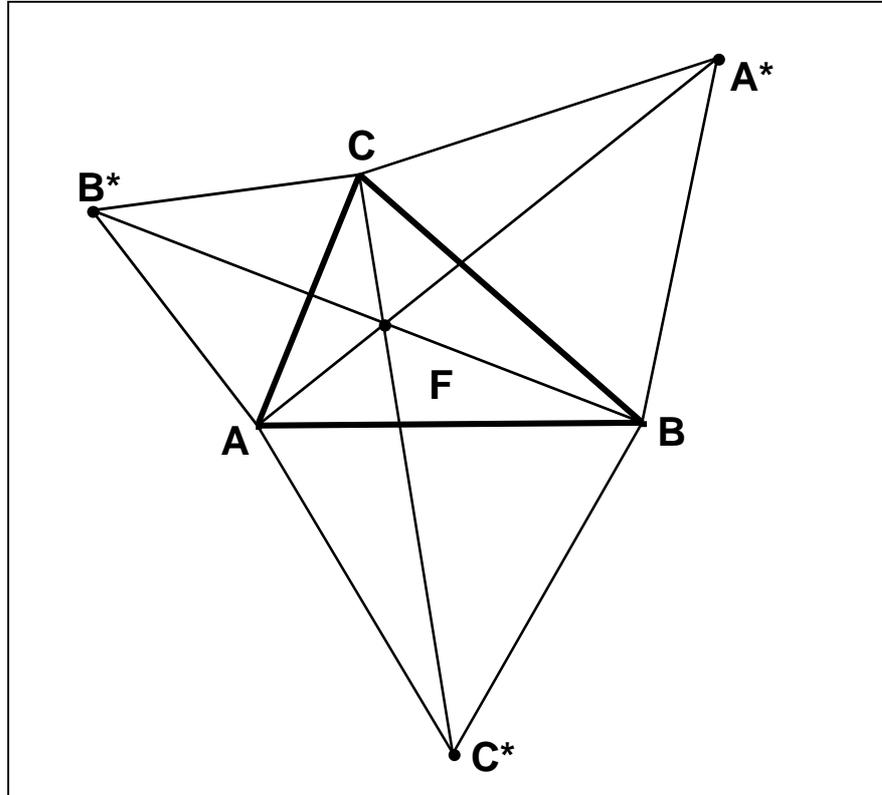


Ilustración 2: Construcción del punto de Fermat con la ayuda de las líneas de Simson
Mediante procedimientos geométricos también se puede resolver bien el problema del almacén central con la ayuda de pesos y con cuatro localizaciones dadas. En todos los otros casos son usados métodos iterativos.

Nota:

El procedimiento anterior se trata de un caso especial de la denominada configuración de *Torricelli*⁶. En cada lado de un triángulo inicial cualquiera $\triangle ABC$, se construyen los triángulos $\triangle ABC^*$, $\triangle BCA^*$, $\triangle ACB^*$, que son semejantes entre ellos. (Véase en ilustración 3).

Para esta figura se cumplen los siguientes hechos:

Las "diagonales" $\overline{AA^*}$, $\overline{BB^*}$, y $\overline{CC^*}$ de esta figura se cortan en un punto, el punto de Torricelli T. En este punto de corte se encuentran los ángulos α' , β' , γ' de la nueva composición de triángulos, y las longitudes de las "diagonales" $\overline{AA^*}$, $\overline{BB^*}$, $\overline{CC^*}$ de esta figura se comportan como las alturas de estos triángulos.

⁶ Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

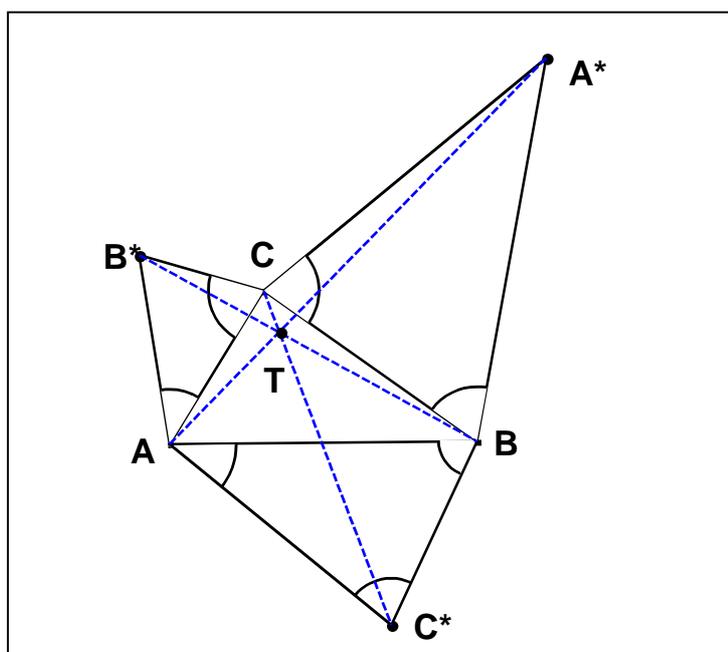
En el caso particular anterior con triángulos equiláteros en la composición ($\alpha' = \beta' = \gamma' = 60^\circ$) son los "recorridos de las diagonales" AA^* , BB^* , CC^* de igual longitud y se cruzan en un ángulo de 60° .

Para este caso particular se cumple:

Cuando el triángulo no contiene ningún ángulo de mas de 120° , las líneas de unión entre los vértices del triángulo inicial con los vértices de los triángulos sobrepuestos se cortan dentro del triángulo inicial. La suma de las distancias de los vértices A;B;C a un punto P, será exactamente la mínima, si P está situado en el "punto de intersección de las diagonales", T. La suma de las distancias corresponde así al "recorrido de las diagonales". Este problema de extremos fue realizado por P. de Fermat⁷, y por esta razón T se llama también el punto de Fermat, F. En la literatura inglesa se le atribuye alrededor de 1750 a la enseñanza del profesor Simson en la universidad de Glasgow⁸.

En el caso, que un ángulo sea 120° , el punto de Fermat coincide con el punto vértice de este ángulo. En los ángulos mayores se sitúa el punto de intersección de las líneas de Simson fuera del triángulo y no es el punto mínimo de la suma de las distancias. También se puede demostrar con una dinámica de Software de geometría dinámica, cuando se mueve un vértice de su correspondiente triángulo.

Ilustración 3:
Toricelli-Configuración
 con $\alpha' = 40^\circ$,
 $\beta' = 65^\circ$
 $\gamma' = 75^\circ$



⁷ Pierre de Fermat (1601-1665) representó este problema en sus "tratados sobre máximos y mínimos", 1643/44.

⁸ Véase en la página principal de "Archivo de la historia de las matemáticas" de la universidad de St. Andrews, Escocia. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians> (bajo Torricelli, Simson, Fermat)

3.2 Planificación de una estación de bomberos

El problema de localización dice: Para las empresas existentes se debe construir una estación de bomberos, de manera que la máxima distancia entre las empresas y esta estación de bomberos sea lo mas corta posible.

Se utiliza un modelo en el plano con la distancia euclídea.

Se ha encontrado con X un lugar para la brigada de bomberos, de modo que la distancia a cada empresa es $Ex_i < s$ y cada una puede llegar a ser alcanzada en menos del tiempo dado (ej. 10 min.), así el círculo⁹ centrado en X contiene a todas las localizaciones dadas.

3.2.1 Problema para 2 localizaciones: Ex_1, Ex_2 :

El lugar buscado X , es el punto medio del segmento $\overline{Ex_1 Ex_2}$.

3.2.2. Problema para 3 localizaciones: Ex_1, Ex_2, Ex_3 :

- Ex_1, Ex_2, Ex_3 forman un triángulo agudo. Luego el círculo circunscrito del triángulo $\Delta Ex_1 Ex_2 Ex_3$ es el menor círculo, que contiene a las localizaciones dadas y el circuncentro será el lugar buscado para la estación de bomberos.
- Sea $\Delta Ex_1 Ex_2 Ex_3$ un triángulo obtuso, entonces hay una solución mejor que el circuncentro: el punto medio del mayor lado del triángulo es el lugar óptimo para la estación de bomberos.

3.2.3 Procedimiento para mas de 3 localizaciones:

Se busca también el menor círculo (por lo tanto el de menor radio), el cual recubra a todas las localizaciones dadas Ex_m . Este contiene al menos 2 localizaciones en su borde.

Procedimiento para la resolución:

- Dibuja todos los círculos circunscritos con tres localizaciones (Ex_i, Ex_j, Ex_k) con $i \neq j, i \neq k, j \neq k$ para todo $i, j, k = 1, \dots, M$
- Dibuja todos los círculos centrados en los puntos medios de $\overline{Ex_i Ex_j}$, los cuales pasan por Ex_i y Ex_j .
- Suprimir todos los círculos que no cubran todas las localizaciones.
- De los círculos que quedan escogemos los de menor radio.

Ejemplo numérico con 4 localizaciones:

$Ex_1 (0|3), Ex_2 (5|8), Ex_3 (9|0), Ex_4 (9|3)$

⁹ Esto quiere decir que también se incluye el borde del círculo.

Subproblema:

1. ¡Dibuja los puntos en un sistema de coordenadas!
2. ¿Cuántas parejas y tripletas hay?
3. ¡Dibuja todos los círculos circunscritos con tres de las localizaciones dadas!
4. ¿Hay círculos factibles, los cuales sólo se determinan mediante 2 localizaciones?
5. ¿Qué círculo es el mejor?
6. ¿Qué pasa, cuando se considera $E_{x_4} (10/3)$ o bien $E_{x_4} (11/8)$?

La solución (ilustración 4) sería hallada para las tripletas:

$\Delta E_1 E_2 E_3$: Círculo circunscrito k_1 tiene radio $r_1 \approx 4,6$ L.E.

$\Delta E_1 E_2 E_4$: Círculo circunscrito k_2 tiene radio $r_2 \approx 5$ L.E.

$\Delta E_1 E_3 E_4$: Círculo circunscrito k_3 tiene radio $r_3 \approx 4,7$ L.E.

$\Delta E_2 E_3 E_4$: Círculo circunscrito k_4 tiene radio $r_4 \approx 7$ L.E.

(se trata de un triángulo obtuso)

$$k_i = \{P \mid \overline{PM_i} \leq r_i\}$$

k_1 contiene los 4 puntos

k_2 no contiene a E_3

k_3 no contiene a E_2

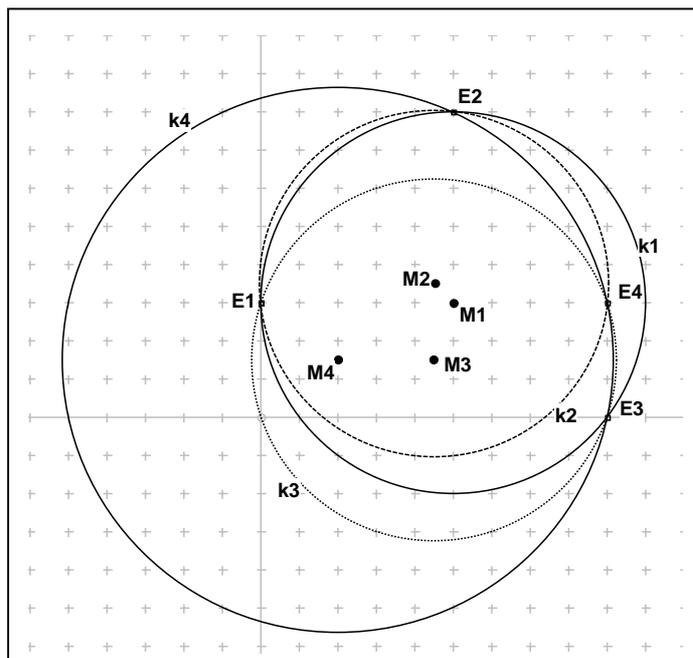
k_4 contiene los 4 puntos, pero $r_4 > r_1$

Se cambia E_4 por $E_4 (10/3)$, así es k_1 aún el círculo óptimo, aquí se sitúan todas las existentes localizaciones en su borde. Para $E_4(11/8)$ es el triángulo $\Delta E_1 E_2 E_4$ obtuso y k_3 será el círculo óptimo, porque también se cumple cambiando la posición de E_4 que $r_3 < r_2$.

Con esto queda contestada la pregunta, de si un círculo óptimo siempre se puede determinar claramente.

Ilustración 4:

Búsqueda de las localizaciones óptimas de una estación de bomberos para cuatro empresas dadas. (ejemplo numérico)

**3.3 Problema de localización restrictivo**

En muchos ejemplos representativos hay restricciones adicionales para la elección de la localización .

Ejemplos con restricciones:

1. Problema de placas:

Alrededor de la placa se debe cumplir una distancia de seguridad, donde no se puede colocar ningún recipiente. (Se exige también algo parecido en la producción en cadena.)

2. Estación de bomberos:

En un área de protección de la naturaleza no se puede colocar una casa de bomberos.

En los modelos matemáticos se expresan las restricciones de manera, que el interior de un polígono R sea excluido. Sin embargo las instalaciones se pueden situar en su borde ∂R .

Planteamiento de la resolución:

1. Resuelve el problema sin restricciones (por lo tanto se consideran todas las localizaciones óptimas sin tener en cuenta la región R .)
2. Si en el caso (1) se haya una localización, que sea factible se termina el método.
3. Sino: se aumenta el valor de la función objetivo, hasta llegar a una localización X^* con este valor de la función objetivo, la cual sea factible.

En el problema de la estación de bomberos se encuentra la localización óptima, cuando se aumentan los círculos centrados en las empresas, hasta llegar a una región de corte, que contiene las regiones prohibidas y toca al borde.

Ejemplo: Determinación de las localizaciones óptimas en un modelo con restricciones (brigada de bomberos, ilustración 5).

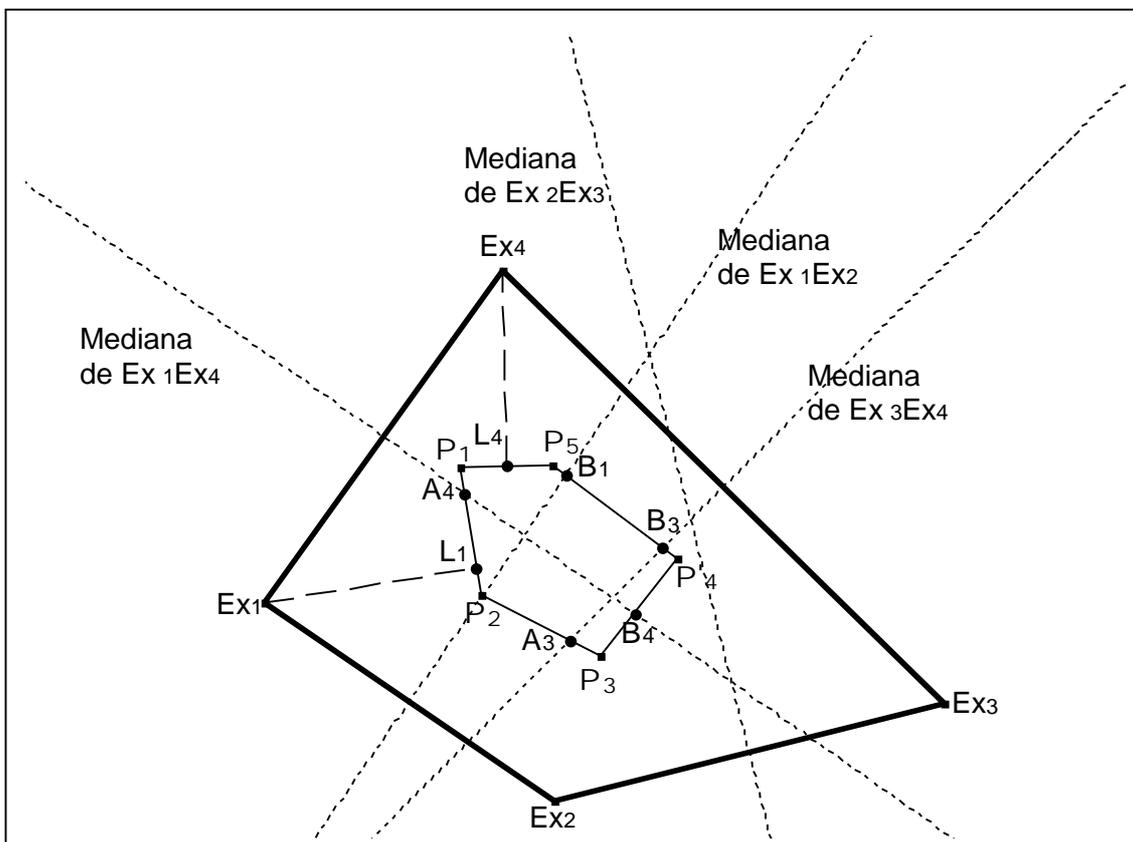


Ilustración 5: Determinación de la localización óptima en un modelo con restricciones.

En el ejemplo se busca la localización de una estación de bomberos para las empresas Ex_1, \dots, Ex_4 , donde el área dentro del pentágono P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 es un área prohibida. Como solución se busca el centro de aquel círculo, que recubra a las localizaciones de las empresas industriales dadas (aquí 4). Como posibles centros son los puntos de corte de las medianas de $\overline{Ex_i Ex_j}$ con el borde de la región no factible (aquí se llaman A_i y B_i), también las proyecciones de las empresas (vértices) Ex_k en el borde de la región prohibida (aquí sólo L_1 y L_4 , los otros no están situados en los lados de los pentágonos).

Para todos aquellos círculos, que tienen un radio mayor que el mínimo radio se cumple, que su intersección es un "trozo redondo", cuyas "esquinas" y cuyos bordes se construyen respectivamente mediante los puntos de corte de dos círculos y mediante dos arcos de curva. (véase en ilustración 6).

Con esto pueden surgir los siguientes casos:

- Una "esquina" del "trozo redondo" toca primero el borde de la región prohibida
- El borde del polígono, que describe la restricción, sea tangente al arco de curva.

Así se obtienen como reglas para la determinación de la localización:

- Considerar todos los puntos de corte entre las medianas de $\overline{Ex_i Ex_j}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, M$ y el borde ∂R de la restricción.
- Considerar todos aquellos puntos del borde ∂R , en aquel exacto trozo del polígono de restricción que sea tangente a un círculo centrado en Ex_m para $m = 1, \dots, M$ (Esto significa, que son considerados todas las proyecciones de Ex_m $m = 1, \dots, M$ en el borde ∂R)

El mejor candidato para a) y b) es la óptima localización para este problema.

Ejemplo numérico

$Ex_1(5|5)$, $Ex_2(15|7)$, $Ex_3(7|15)$ son las localizaciones dadas. La restricción será descrita mediante una forma poligonal con los vértices $P_1(6|5)$, $P_2(8|14)$, $P_3(10|14)$, $P_4(14|7)$ (véase en ilustración 6).

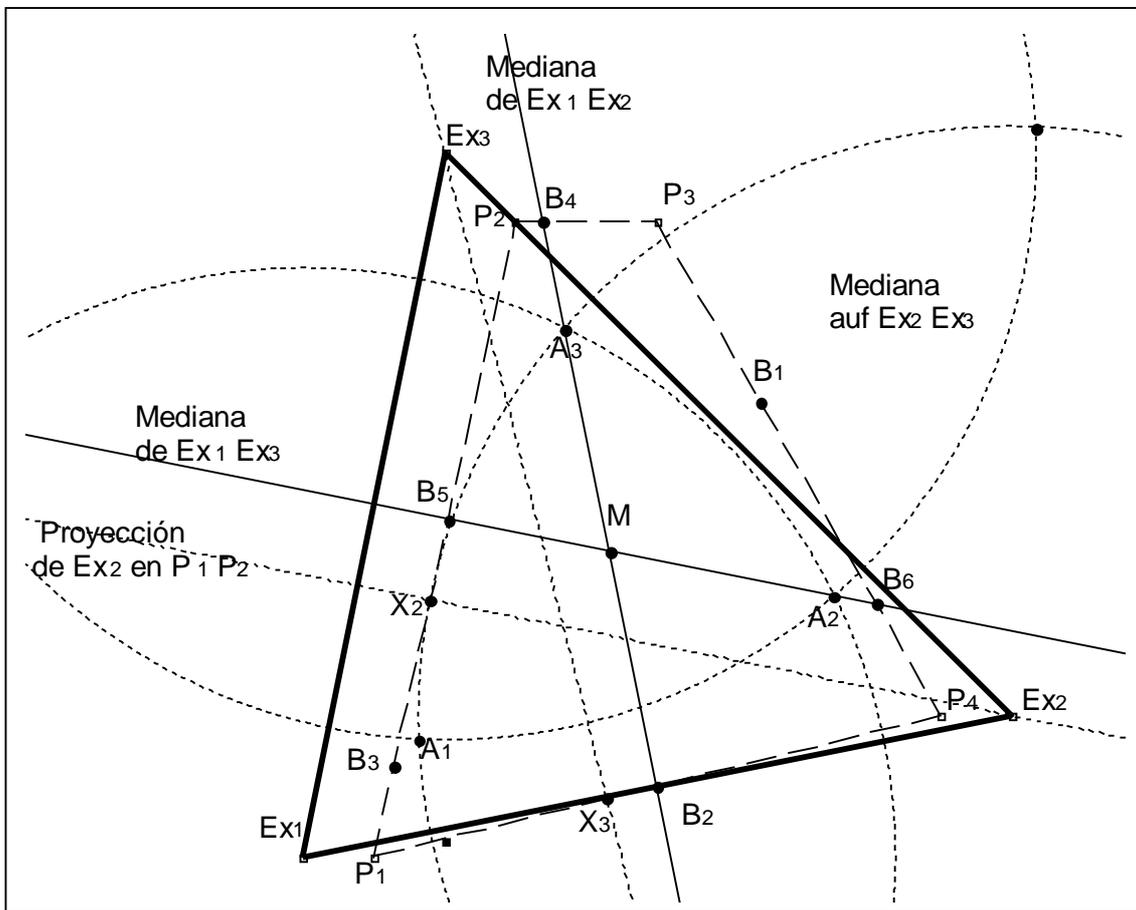


Ilustración 6 : En el algoritmo, en el que se determina la óptima localización con restricción: X_i son las proyecciones de Ex_i en el borde, B_i son los puntos de corte de las medianas de los lados de los triángulos con el borde de las regiones prohibidas.

Determinación de la localización según el planteamiento del problema:

- Sin restricción: Se determina el centro del círculo circunscrito $\Delta Ex_1 Ex_2 Ex_3$.
- El centro está en la región no factible R . Se busca una localización factible.

- 3a) Considera los puntos de corte entre las medianas de los lados de los triángulos y el borde ∂R . De todos los B_i sería B_5 el mejor candidato como punto de corte entre $\overline{P_1P_2}$ y de la mediana de $\overline{Ex_1Ex_2}$.
- 3b) Se dibujan las proyecciones de Ex_1, Ex_2, Ex_3 en ∂R : X_1, X_2, X_3

Para X_2 se obtiene el círculo de menor radio, porque la "pieza redonda" (A_1, A_2, A_3) toca a la forma poligonal en el punto X_2 . (El círculo alrededor de B_5 tiene un radio algo mayor)

Solución: $X_2 (6,8 | 8,7)$, $r \approx 9,8$

4. Círculos angulares y medianas dobladas como herramientas del modelo

Cuando nos movemos en un sistema de coordenadas a lo largo de los ejes (Por ejemplo un robot) o una persona que se mueve en un sistema de calles rectangular, entonces no conviene la distancia euclídea para modelar el problema.

Una métrica mejor para este modelo es la denominada norma- ℓ_1 , que se define como: $\ell_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x_1 | x_2) \rightarrow |x_1| + |x_2|$. Esto es para la distancia del punto $X (x_1 | x_2)$ al origen. Descrito detalladamente significa que:

- I. Cuadrante $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \rightarrow \ell_1 (x_1, x_2) = x_1 + x_2$
 II. Cuadrante $x_1 < 0 \wedge x_2 \geq 0 \rightarrow \ell_1 (x_1, x_2) = -x_1 + x_2$
 III. Cuadrante $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \rightarrow \ell_1 (x_1, x_2) = -x_1 - x_2$
 IV. Cuadrante $x_1 > 0 \wedge x_2 < 0 \rightarrow \ell_1 (x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Las figuras círculo (con un centro determinado y con un radio fijado) y mediana (para un segmento dado) que se utilizan frecuentemente en la geometría euclídea, parecen algo inusual en esta métrica, pero se les aplican las mismas definiciones.

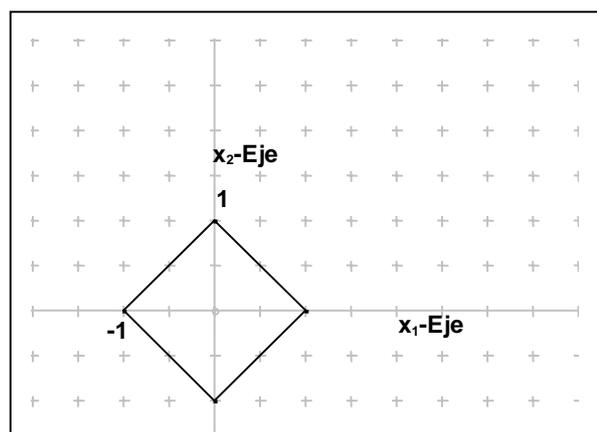
Así se produce para el **círculo unidad** $K(0,1) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \ell_1(x_1, x_2) = 1\}$ la siguiente imagen en el sistema de coordenadas (Ilustración 7):

Ilustración 7:

Círculo unidad en la métrica ℓ_1 -norma

En los distintos casos se obtiene:

- Para el I. Cuadrante: $x_1 + x_2 = 1$
 Para el II. Cuadrante: $-x_1 + x_2 = 1$
 Para el III. Cuadrante: $-x_1 - x_2 = 1$
 Para el IV. Cuadrante: $x_1 - x_2 = 1$



Ejemplo:

En Manhattan hay dos oficinas de correos, Ex_1 y Ex_2 . Correos quiere determinar, para cada casa que oficina de correos es la más cercana, es decir dividir Manhattan en dos distritos, donde a cada uno se le asigna una oficina de correos.

Para la línea de separación entre los dos distritos se debe determinar el conjunto de puntos, que distan igual a $Ex_1(a_{11}, a_{12})$ y a $Ex_2(a_{21}, a_{22})$ referente a la norma- ℓ_1 (determinación de las medianas).

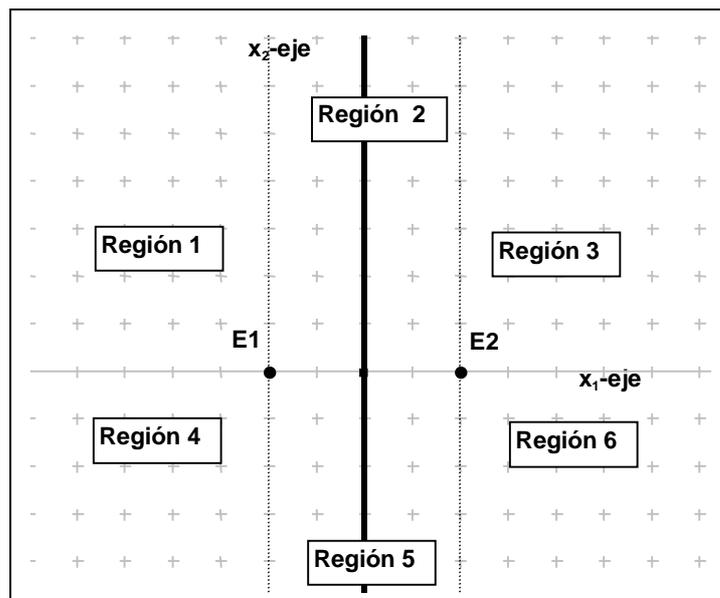
$$IB_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \ell_1(X - Ex_1) = \ell_1(X - Ex_2)\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_{11}| + |x_2 - a_{12}| = |x_1 - a_{21}| + |x_2 - a_{22}|\}$$

Como los caminos en dicha métrica se recorren paralelos a los ejes de coordenadas, se diferencian considerablemente las medianas unas de otras dependiendo si las localizaciones de las oficinas de correos, que son representadas por un punto en un plano de la ciudad, se diferencian sólo en una o en ambas coordenadas.

Ejemplo numérico a: $Ex_1(0 \mid 0)$, $Ex_2(4 \mid 0)$, es decir con una coordenada igual

Ilustración 8:
Determinación de las medianas para el ejemplo numérico a



Por la condición $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = |x_1 - 4| + |x_2 - 0|$ para los puntos $X(x_1|x_2)$, los cuales constituyen la mediana, se deben realizar los diferentes casos, que conducen a 6 regiones en \mathbb{R}^2 :

Región 2: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 \geq 0$

Condición de la mediana: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 0)$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0 \text{ cualquiera}$$

$$IL_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0\}$$

El grafo es una paralela al eje- x_2 con distancia 2 en el 1^{er} cuadrante.

Región 5: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 < 0$

Condición: $(x_1 - 0) - (x_2 - 0) = - (x_1 - 4) - (x_2 - 0) \wedge x_2 < 0$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -x_1 + 4 - x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 \geq 0$$

$\mathbb{L}_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2 \wedge x_2 < 0\}$

El grafo es una paralela al eje- x_2 con distancia 2 en 4º cuadrante.

Región 1: $0 < x_1 \wedge x_2 \geq 0$

Condición: $-(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 + 0), x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = -x_1 + 4 + x_2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 \wedge x_2 \geq 0$$

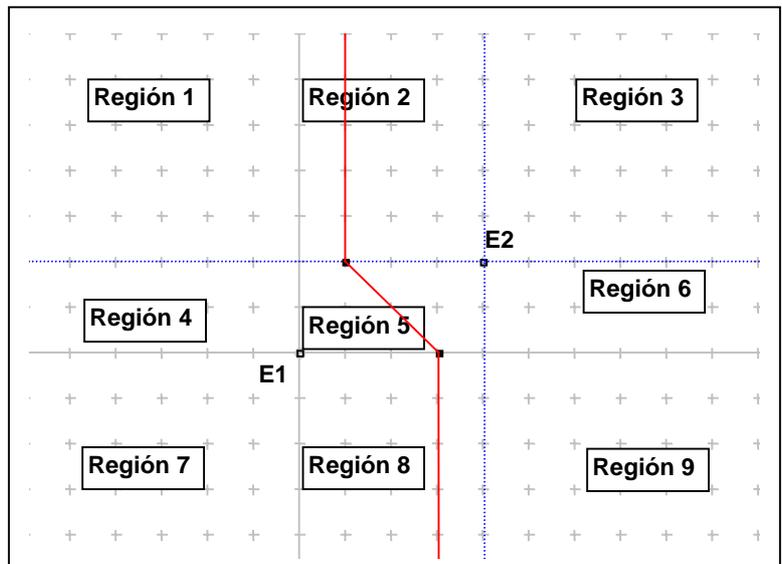
$\mathbb{L}_1 = \{ \}$

Para las regiones 3, 4, 6– como en el recinto 1 – no existe ningún par de números como solución, tampoco ningún punto en el plano, que cumpla las condiciones. Se forma una mediana como en el caso de la distancia euclídea.

Ejemplo numérico b: $Ex_1 (0 \mid 0), Ex_2 (4 \mid 2)$ ambas coordenadas son diferentes

Por el planteamiento $\ell_1(X, Ex_1) = \ell_1(X, Ex_2)$ i.e. $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = |x_1 - 4| + |x_2 - 2|$ se deben ahora diferenciar 9 regiones :

Ilustración 9: Mediana que separa el área de captación de las dos oficinas de correos Ex_1 y Ex_2 para el ejemplo numérico b



Región 1: $x_1 < 0 \wedge x_2 > 2$

Aquí no hay ninguna solución, es decir la mediana no pasa por esta región.

Región 2: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 > 2$

Condición: $(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 2)$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 > 2 \text{ cualquiera}$$

$\mathbb{L}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 \wedge x_2 > 2\}$.

El grafo es una paralela al eje- x_2 con distancia 1 para puntos con ordenada mayor que 2 en el 1º cuadrante

Región 3: $x_1 > 4 \wedge x_2 > 2 \Rightarrow$ No tiene solución

Región 4: $x_1 < 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow$ No tiene solución

Región 5: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2$

$$\text{Condición: } (x_1 - 0) + (x_2 - 0) = - (x_1 - 4) - (x_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -x_1 + 4 - x_2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 3$$

$$\mathbb{L}_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1 + 3 \wedge 0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

El grafo es una línea recta con pendiente - 1 a través de (0|3) en el 1^{er} cuadrante

Región 6: $x_1 > 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow$ no tiene solución

Región 7: $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \Rightarrow$ no tiene solución

Región 8: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge x_2 < 0$

$$\text{Condición: } (x_1 - 0) - (x_2 - 0) = - (x_1 - 4) - (x_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -x_1 - x_2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 < 0$$

$$\mathbb{L}_8 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3 \wedge x_2 < 0\}.$$

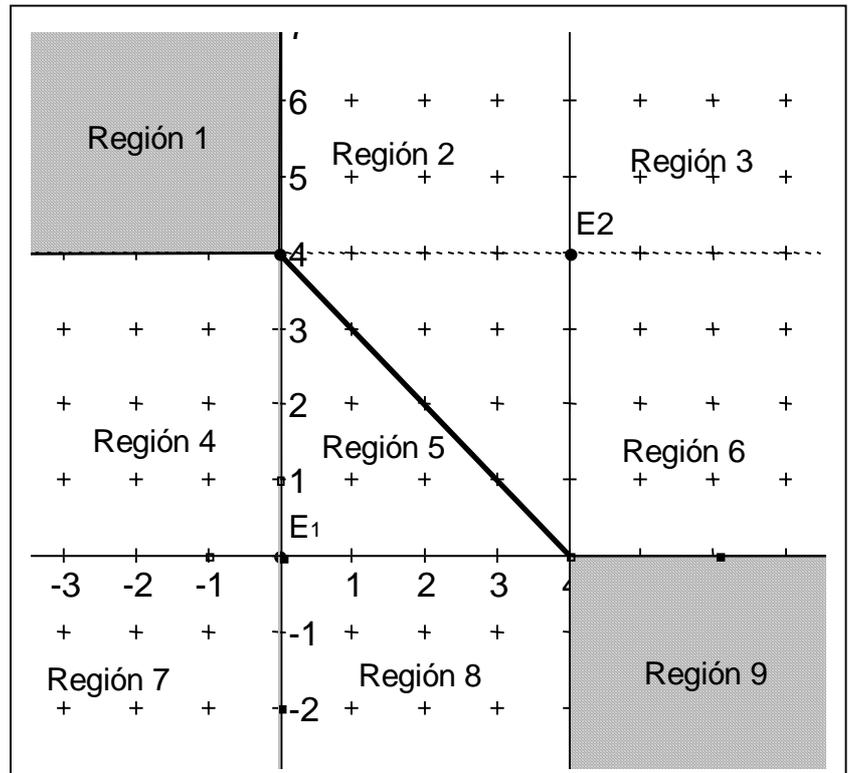
El grafo es una paralela al eje- x_2 con distancia 3.

Región 9: $x_1 > 4 \wedge x_2 < 0 \Rightarrow$ no tiene solución

Ejemplo numérico c: $Ex_1 (0/0)$, $Ex_2 (4/4)$, ambas coordenadas son diferentes.

Ilustración 10:

Mediana para el ejemplo numérico c.
En las regiones 1 y 9 todos los puntos están contenidos en el conjunto de soluciones.



Hay soluciones en la región 1, región 5, región 9

Región 1: $x_1 < 0 \wedge x_2 > 4$

$$\text{Condición: } -(x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) + (x_2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = -x_1 + 4 + (x_2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge x_2 > 4$$

$$IL_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0 \wedge x_2 > 4\}$$

Todo la región pertenece al conjunto de soluciones.

Región 5: $0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 4$

$$\text{Condición: } (x_1 - 0) + (x_2 - 0) = -(x_1 - 4) - (x_2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -x_1 + 4 - x_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 4$$

$$IL_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1 + 4, 0 \leq x_1 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 4\}$$

La gráfica es una línea recta en la región 5 con pendiente - 1 y que corte al eje- x_2 en el punto (0,4).

Región 9: $x_1 > 4 \wedge x_2 < 0$

$$\text{Condición: } (x_1 - 0) - (x_2 - 0) = (x_1 - 4) - (x_2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = x_1 - 4 - x_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\mathbb{L}_9 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 4 \wedge x_2 < 0\}$$

Todo la región pertenece al conjunto de soluciones.

En las regiones restantes no existe ningún par de números que cumpla las condiciones asociadas.

Generalización de los resultados:

Caso 1: $a_{12} = a_{22} \wedge a_{11} \neq a_{21}$

La mediana es una línea recta vertical

Caso 2: $a_{11} = a_{21} \wedge a_{12} \neq a_{22}$

La mediana es una línea recta horizontal

Caso 3: $a_{11} \neq a_{21} \wedge a_{12} \neq a_{22}$

Caso 3a) $|a_{11} - a_{21}| > |a_{12} - a_{22}|$

La mediana se compone de dos semirrectas verticales, unidas por un segmento de línea recta diagonal.

Caso 3b) $|a_{11} - a_{21}| < |a_{12} - a_{22}|$

La mediana se compone de dos semirrectas horizontales, unidas por un segmento de línea recta diagonal.

Caso 3c) $|a_{11} - a_{21}| = |a_{12} - a_{22}|$

La mediana se compone de dos cuadrantes unidos por un segmento de línea recta diagonal.

Caso 4: (obvio) $a_{11} = a_{21} \wedge a_{12} = a_{22}$

La mediana es todo el plano.

5. Resolución de modelos de localización mediante discusiones curvas de funciones diferenciables

5.1 Problema de almacén central con la distancia- ℓ_2^2

Ejemplo numérico $Ex_1 (1 | 1)$ $Ex_2 (1 | 4)$ $Ex_3 (2 | 1)$ $Ex_4 (4 | 1)$ $Ex_5 (4 | 4)$

Suponiendo que el número de viajes por semana a los almacenes de distribución Ex_i sea w_i , por lo tanto se consideran en el cálculo los siguientes pesos: $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, $w_4 = 2$, $w_5 = 4$. Si no existe ninguna otra información suponemos como distancia, la distancia euclídea (ℓ_2 – métrica, véase en 2.1). La resolución del problema consiste en, minimizar la suma de las distancias con pesos:

$$d(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} = \ell_2(Ex_m, X)$$

$$S(X) = \sum_{m=1}^M w_m \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}$$

Por último consideramos la suma de las distancias al cuadrado y la minimizamos¹⁰. Por lo tanto examinamos:

$$f(X) = \sum_{m=1}^M w_m ((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2)$$

Para este ejemplo numérico se obtiene:

$$\begin{aligned} f(X) &= 2 \cdot ((1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2) + 1 \cdot ((1 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2) \\ &\quad + 1 \cdot ((2 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2) + 2 \cdot ((4 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2) \\ &\quad + 4 \cdot ((4 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2) \end{aligned}$$

$$f(X) = 3 \cdot (1 - x_1)^2 + 1 \cdot (2 - x_1)^2 + 6 \cdot (4 - x_1)^2 + 5 \cdot (1 - x_2)^2 + 5 \cdot (4 - x_2)^2$$

$$f(X) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Esta suma puede ser dividida en la suma de dos funciones, las cuales dependen ahora de una sola variable, x_1 y x_2 respectivamente.

Para minimizar $f(X)$, deben ser minimizados $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$. Es suficiente, que se cumpla: $f'_i(x_i) = 0 \wedge f''_i(x_i) > 0$

Para este ejemplo numérico se obtiene así:

$$f_1(x_1) = 10 x_1^2 - 58 x_1 + 103 \Rightarrow f'_1(x_1) = 20 x_1 - 58 \wedge f''_1(x_1) = 20 > 0$$

$$f_2(x_2) = 10 x_2^2 - 50 x_2 + 85 \Rightarrow f'_2(x_2) = 20 x_2 - 50 \wedge f''_2(x_2) = 20 > 0$$

$$f'_1(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,9 \quad ; \quad f'_2(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2,5$$

¹⁰ La correspondiente función cuadrática no tiene las mismas soluciones, porque formando el cuadrado de la distancia los puntos más lejanos reciben un mayor peso. Por otra parte $[S(X)]^2$ es diferenciable en \mathbb{R} , mientras que la derivada de $S(X)$ en x_1 y x_2 no está definida.

Con esto se determina: El almacén central situado en X^* (2,9 | 2,5), por lo tanto la distancia a la 1ª localización Ex_1 (1 | 1) es $d(Ex_1, X) = \sqrt{1,9^2 + 1,5^2} \approx 2,42$ unidades de longitud.

Se resuelve el problema con parámetros, obteniéndose así una fórmula explícita, con la cual puede ser calculada la localización óptima. Sin embargo antes se debería calcular otro ejemplo concreto, por lo tanto veremos el siguiente problema práctico:

Se dan:

$$Ex_1 (1,5 | 18), \quad Ex_2 (18,6 | 21), \quad Ex_3 (22,5 | 15), \quad Ex_4 (19,2 | 3), \quad Ex_5 (0 | 0)$$

$$w_1 = 4, \quad w_2 = 8, \quad w_3 = 6, \quad w_4 = 4, \quad w_5 = 5$$

Calculen las localizaciones óptimas con la distancia - ℓ_2^2

$$\begin{aligned} \text{Resolución: } f(x) &= 4 \cdot (1,5 - x_1)^2 + 8 \cdot (18,6 - x_1)^2 + 6 \cdot (22,5 - x_1)^2 + 4 \cdot (19,2 - x_1)^2 \\ &\quad + 5 \cdot (0 - x_1)^2 + 4 \cdot (18 - x_2)^2 + 8 \cdot (21 - x_2)^2 + 6 \cdot (15 - x_2)^2 \\ &\quad + 4 \cdot (3 - x_2)^2 + 5 \cdot (0 - x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con } f_1'(x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad &8 \cdot (1,5 - x_1) \cdot (-1) + 16 \cdot (18,6 - x_1) \cdot (-1) + 12 \cdot (22,5 - x_1) \cdot (-1) \\ &+ 8 \cdot (19,2 - x_1) \cdot (-1) + 10 \cdot (0 - x_1) \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } f_2'(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad &8 \cdot (18 - x_2) \cdot (-1) + 16 \cdot (21 - x_2) \cdot (-1) + 12 \cdot (15 - x_2) \cdot (-1) \\ &+ 8 \cdot (3 - x_2) \cdot (-1) + 10 \cdot (0 - x_2) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Con esto obtenemos la solución X^* (13,58 | 12,67).

También se puede dar una forma de obtener la **resolución general**:

$$f(x) = \sum_{m=1}^M w_m \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

$$= \sum_{m=1}^M w_m (a_{m1} - x_1)^2 + \sum_{m=1}^M w_m (a_{m2} - x_2)^2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f_1'(x_1) = \sum_{m=1}^M w_m \cdot 2 \cdot (a_{m1} - x_1) \cdot (-1) = 2 \cdot \sum_{m=1}^M w_m x_1 - 2 \cdot \sum_{m=1}^M w_m a_{m1}$$

$$f_1''(x_1) = 2 \cdot \sum_{m=1}^M w_m > 0, \quad \text{porque todos los pesos son positivos.}$$

\Rightarrow $f_1(x_1)$ tienen un mínimo para pesos positivos, cuyo valor- x_1 se calcula así:

$$f_1'(x_1) = 0 \quad : \quad x_1 = \frac{\sum_{m=1}^M w_m a_{m1}}{\sum_{m=1}^M w_m} .$$

De manera análoga se calcula $f_2'(x_2) = 0$ donde: $x_2 = \frac{\sum_{m=1}^M w_m a_{m2}}{\sum_{m=1}^M w_m}$

Utilizando la fórmula anterior, obtenemos:

$$x_1 = \frac{w_1 \cdot a_{11} + w_2 \cdot a_{21} + w_3 \cdot a_{31} + w_4 \cdot a_{41} + w_5 \cdot a_{51}}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$= \frac{4 \cdot 1,5 + 8 \cdot 18,6 + 6 \cdot 22,5 + 4 \cdot 19,2 + 5 \cdot 0}{4 + 8 + 6 + 4 + 5} = \frac{366,6}{27} = 13,57$$

$$x_2 = \frac{w_1 \cdot a_{12} + w_2 \cdot a_{22} + w_3 \cdot a_{32} + w_4 \cdot a_{42} + w_5 \cdot a_{52}}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$= \frac{4 \cdot 18 + 8 \cdot 21 + 6 \cdot 15 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0}{4 + 8 + 6 + 4 + 5} = \frac{342}{27} = 12,6$$

Hasta ahora se considera la distancia euclídea al cuadrado. ¿Qué pasa cuando se utiliza la distancia euclídea "normal" ?

Se busca el mínimo de

$$f(x) = \sum_{m=1}^M w_m \cdot \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} .$$

Con esto se presentan las siguientes "dificultades" :

1. $f(x)$ no se puede escribir como suma de dos funciones, en la que cada función sólo dependa de una variable.
2. Se deben calcular las derivadas parciales respecto x_1 , y respecto x_2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^M w_m \frac{(a_{mi} - x_i) \cdot (-1)}{\sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}}, \quad i = 1, 2$$

3. Las derivadas parciales no existen en las localizaciones dadas Ex_m , $m = 1, \dots, M$.
4. Se puede comprobar con la ayuda de un test, si una de las localizaciones existentes es óptima. Si esto no ocurre, se debe utilizar un procedimiento iterativo.

5.2 Ejemplos, con funciones $f(x)$ sólo diferenciables a trozos: Problema de almacén central con la distancia - ℓ_1

En muchos casos no es ℓ_2 - o ℓ_2^2 -métrica una buena herramienta para la modelización de la distancia.

Se tiene que la distancia rectangular es más adecuada por ejemplo en el sistema de calles de Manhattan o Mannheim, en los movimientos de un robot y en las distancias entre dos lugares de un depósito central (véase en ilustración 4).

Como un círculo en esta métrica es “angular” y se forma mediante líneas rectas, puede aplicarse la propiedad de puntos de igual distancia a un punto fijo: los puntos están situados en un “círculo angular” centrados en el punto fijo (a_{m1}, a_{m2}) y cumplen la condición

$$|a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2| = r$$

Para el ejemplo numérico $a_{m1} = 4$, $a_{m2} = 2$ y $r = 3$ existe el círculo

$IL = \{(x_1, x_2) \mid |4 - x_1| + |2 - x_2| = 3\}$ formado por las rectas

$$x_2 = -x_1 + 3 \text{ para } x_1 \leq 4 \wedge x_2 \leq 2 \text{ y } x_2 = x_1 - 5 \text{ para } x_1 > 4 \wedge x_2 \leq 2$$

$$x_2 = -x_1 + 9 \text{ para } x_1 > 4 \wedge x_2 > 2 \text{ y } x_2 = x_1 + 1 \text{ para } x_1 \leq 4 \wedge x_2 > 2$$

Por lo tanto la suma de las distancias en la dirección de los ejes de coordenadas a cada punto del “círculo” es 3 unidades de longitud.

Utilizamos ahora la norma- ℓ_1 para nuestro problema de localización (problema de almacén central en capítulo 4), luego se obtiene para la función cuyo mínimo se busca:

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{m=1}^M w_m (|a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2|) \\ &= \sum_{m=1}^M w_m |a_{m1} - x_1| + \sum_{m=1}^M w_m |a_{m2} - x_2| = f_1(x_1) + f_2(x_2) \end{aligned}$$

La función de dos variables se puede escribir de nuevo como suma de dos funciones de una variable cada una, las cuales estudiaremos por separado.

Como ejemplo numérico se tomarán los valores de 5.1:

$Ex_1(1 \mid 1)$, $Ex_2(1 \mid 4)$, $Ex_3(2 \mid 1)$, $Ex_4(4 \mid 1)$, $Ex_5(4 \mid 4)$ con los pesos $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, $w_4 = 2$ y $w_5 = 4$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 2 \cdot |1 - x_1| + 1 \cdot |1 - x_1| + 1 \cdot |2 - x_1| + 2 \cdot |4 - x_1| + 4 \cdot |4 - x_1| \\ &= 3 \cdot |1 - x_1| + |2 - x_1| + 6 \cdot |4 - x_1| \end{aligned}$$

Mediante el cálculo se debe realizar ahora una distinción de casos, y dan por resultado funciones definidas a trozos, que pasan por los "puntos críticos", por lo tanto son continuas pero no diferenciables en todas partes.

Los diferentes casos para $f_1(x_1)$ son:

$$1. \text{ Caso } x_1 \leq 1: \quad f_1(x_1) = 3 \cdot (1 - x_1) + (2 - x_1) + 6 \cdot (4 - x_1) = 29 - 10 x_1$$

$$2. \text{ Caso } 1 \leq x_1 \leq 2: \quad f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (2 - x_1) + 6 \cdot (4 - x_1) = 23 - 4 x_1$$

$$3. \text{ Caso } 2 \leq x_1 \leq 4: \quad f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 6 \cdot (4 - x_1) = 19 - 2 x_1$$

$$4. \text{ Caso } x_1 \geq 4: \quad f_1(x_1) = 3 \cdot (x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 6 \cdot (x_1 - 4) = -29 + 10 x_1$$

Se representa ahora $f_1(x_1)$, así se puede observar lo siguiente (véase en ilustración 11):

1. $f_1(x_1)$ es lineal a trozos. En los diferentes casos la gráfica es una línea recta.
2. f_1 tiene "puntos críticos", en los cuales la función es continua pero no diferenciable.
3. El mínimo se sitúa en el punto crítico, donde tiene lugar el cambio de signo de la pendiente.
4. La coordenada- x_1 de la localización óptima es $x_1 = 4$.

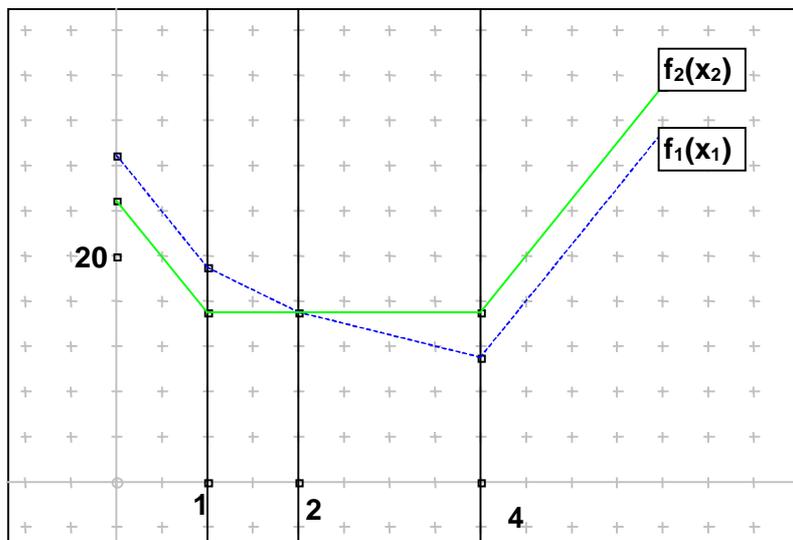


Ilustración 11: Funciones diferenciables a trozos, $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$

$$\begin{aligned} \text{Los diferentes casos para } f_2(x_2) &= 2 \cdot |1 - x_2| + 1 \cdot |4 - x_2| + 1 \cdot |1 - x_2| + 2 \cdot |1 - x_2| + 4 \cdot |4 - x_2| \\ &= 5 \cdot |1 - x_2| + 5 \cdot |4 - x_2| \end{aligned}$$

$$\text{Caso 1. } x_2 \leq 1 \quad f_2(x_2) = 5 \cdot (1 - x_2) + 5 \cdot (4 - x_2) = 25 - 10 x_2$$

$$\text{Caso 2. } 1 \leq x_2 \leq 4 \quad f_2(x_2) = -5 \cdot (1 - x_2) + 5 \cdot (4 - x_2) = 15$$

$$\text{Caso 3. } 4 < x_2 \quad f_2(x_2) = -5 \cdot (1 - x_2) - 5 \cdot (4 - x_2) = -25 + 10x_2$$

Por la representación de $f_2(x_2)$ se puede saber que (ilustración 11):

1. $f_2(x_2)$ es lineal, luego la gráfica es en los diferentes intervalos una línea recta.
2. f_2 tiene "puntos críticos", donde la función es continua pero no diferenciable.
3. De estos puntos críticos hay al menos un mínimo.
4. La coordenada- x_2 de la localización óptima está situada en el intervalo $[1; 4]$, por lo tanto todos los puntos del segmento \overline{AB} con $A(4 | 1)$, $B(4 | 4)$ son mínimos para $f_2(x_2)$.

Los mínimos son los únicos puntos, en los cuales puede ser trazada una línea horizontal "debajo de la función", la cual corte a la función en este punto. (Corresponde a la tangente en el mínimo paralela a los ejes de una función al menos dos veces diferenciable.) Este criterio para el mínimo significa el cambio de la pendiente de la función de negativo a positivo.

La **pregunta general** dice: Cómo se encuentra el mínimo de la función $g(x) = \sum_{m=1}^M w_m |a_m - x|$, i.e. cómo se encuentra el "punto crítico", en el cual tiene lugar el cambio de signo de la pendiente de una función lineal a trozos?

Suponemos, que en $g(x)$ están todos los términos simplificados, por lo tanto se cumple: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ($n \leq M$). Ahora consideramos la función en el intervalo $[a_q; a_{q+1}]$. Para $m > q+1$ se cumple $|a_m - x| = (a_m - x)$, para $m \leq q$ se cumple que $|a_m - x| = x - a_m$, así pues se puede escribir $g(x)$ como suma de los términos:

$$g(x) = \sum_{m=1}^q w_m (x - a_m) + \sum_{m=q+1}^M w_m (a_m - x) = \left(\sum_{m=1}^q w_m - \sum_{m=q+1}^M w_m \right) x + \left(\sum_{m=q+1}^M w_m a_m - \sum_{m=1}^q w_m a_m \right)$$

$= c_q x + b_q$; con esto $g(x)$ es con esto una función lineal.

Se aplica ahora para determinar en que punto a_q tiene la pendiente de $g(x)$ el cambio de signo.

La pendiente "a la izquierda de a_q " (i.e. para $x < a_q$) es $g^-(a_q) = \sum_{m=1}^{q-1} w_m - \sum_{m=q}^M w_m$,

la pendiente "a la derecha de a_q " i.e. para $x > a_q$) es $g^+(a_q) = \sum_{m=1}^q w_m - \sum_{m=q+1}^M w_m$.

Se busca así el a_q que cumpla: $g^-(a_q) \leq 0 \wedge g^+(a_q) \geq 0$.

Aplicamos los resultados del ejemplo anterior

$$f_1(x_1) = 3 \cdot |1 - x_1| + |2 - x_1| + 6 \cdot |4 - x_1| \quad \text{obtenemos así:}$$

$$\text{Pendiente por la izquierda de } a_1 : g^-(1) = \sum_{m=1}^0 w_m - \sum_{m=1}^3 w_m = -10,$$

$$\text{por la derecha de } a_1 : g^+(1) = \sum_{m=1}^1 w_m - \sum_{m=2}^3 w_m = 3 - 7 = -4.$$

Pendiente por la izquierda de a_2 : $g^-(2) = g^+(1) = -4$,

$$\text{por la derecha de } a_2: g^+(2) = \sum_{m=1}^2 w_m - \sum_{m=3}^3 w_m = 4 - 6 = -2.$$

Pendiente por la izquierda de a_3 : $g^-(4) = g^+(2) = -2$,

$$\text{por la derecha de } a_3: g^+(4) = \sum_{m=1}^3 w_m - \sum_{m=4}^3 w_m = 10,$$

así el cambio de signo de la pendiente tiene lugar en $a_3 = 4$ (ver ilustración 11).

Cada vez que se cambia el índice del sumatorio al pasar de la pendiente por la izquierda de a_q a a_{q+1} se le añade dos veces el peso w_q , porque en la primera w_q aparece como término de resta y en la segunda aparece como término aditivo. (véase en el ejemplo, donde $w_1 + w_2 + w_3 = 10$ y de ahí $g^-(1) = -10$, $-10 + 2 \cdot 3 = -4 = g^-(2)$ etc.)

En otras palabras se busca el menor q , para el que se cumpla: $g^+(q) \geq 0$, donde tiene

$$\text{lugar el cambio de signo. } \sum_{m=1}^q w_m \geq \sum_{m=q+1}^M w_m \quad | + \sum_{m=1}^q w_m$$

$$2 \cdot \sum_{m=1}^q w_m \geq \sum_{m=1}^M w_m \quad | :2 \Rightarrow \sum_{m=1}^q w_m \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^M w_m \quad (*)$$

Cuando en la segunda desigualdad de (*) se cumple, luego es a_q el único mínimo. (Véase en la resolución de $f_1(x_1)$: El valor medio es 5 y $\sum_{m=1}^3 w_m = 10$, así pues es a_3 el único mínimo de la función.)

Cuando se cumple la desigualdad (*) no estricta, entonces los valores entre a_q y a_{q+1} minimizan la función. (véase en $f_2(x_2)$: el valor medio es 5 y $\sum_{m=1}^1 w_m = 5$.)

En total se pueden dar cuatro casos:

1. Caso: La solución para x_1 y x_2 es única, luego la solución del problema de localización queda determinada mediante un punto $P(x_1, x_2)$.
2. Caso: La solución para x_1 es única, pero no para x_2 , luego se obtiene como gráfica del conjunto de soluciones un segmento, el cual es paralelo al eje- x_2 .
3. Caso: La solución para x_2 es única, pero no para x_1 , luego se obtiene como gráfica del conjunto de soluciones un segmento, el cual es paralelo al eje- x_1 .
4. Caso: La solución no es única ni para x_1 ni para x_2 , luego se obtiene que la gráfica del conjunto de soluciones está acotado por un rectángulo que es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6. Apéndice

6.1 Demostraciones para el punto de Fermat

En el caso de tener suficiente tiempo para el tema de “Teoría de localización” o si nos encontramos en una clase de un alto rendimiento, expondremos a continuación dos posibilidades para la demostración formal del punto de Fermat.

6.1.1 1. Demostración para el punto de Fermat

En esta prueba serán demostradas las siguientes propiedades:

- El punto buscado se puede encontrar con la ayuda de la composición de triángulos, pues las “diagonales” se cortan en un punto.
- Sólo desde este punto se tiene la mínima suma de distancias a los vértices

La prueba utiliza el teorema del cuadrilátero inscrito y se cumple sólo para triángulos con ángulos $< 120^\circ$.

Condición previa:

1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, con ángulos menores de 120°
2. Sobre los lados del triángulo, se construyen los triángulos equiláteros: $\triangle BCG$, $\triangle ACD$, $\triangle ABE$
3. Se dibujan los segmentos \overline{CE} , \overline{AG} y \overline{BD} (véase en ilustración 12a).

Afirmación:

1. \overline{CE} , \overline{AG} y \overline{BD} tienen un punto de corte común Q.
2. $|\overline{AQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{CQ}| < |\overline{AR}| + |\overline{BR}| + |\overline{CR}|$ para un R cualquiera dentro del triángulo ABC con $R \neq Q$. (Luego Q es el punto desde el cual la suma de las distancias a los vértices del triángulo es mínima, así pues el punto de Fermat)

Demostración de la afirmación 1:

La demostración es bastante complicada y construye el punto de Fermat de otra manera, i.e. como punto de corte de los círculos circunscritos de los triángulos de la composición (parte I), para luego demostrar, que este punto está en " la diagonal" (parte II).

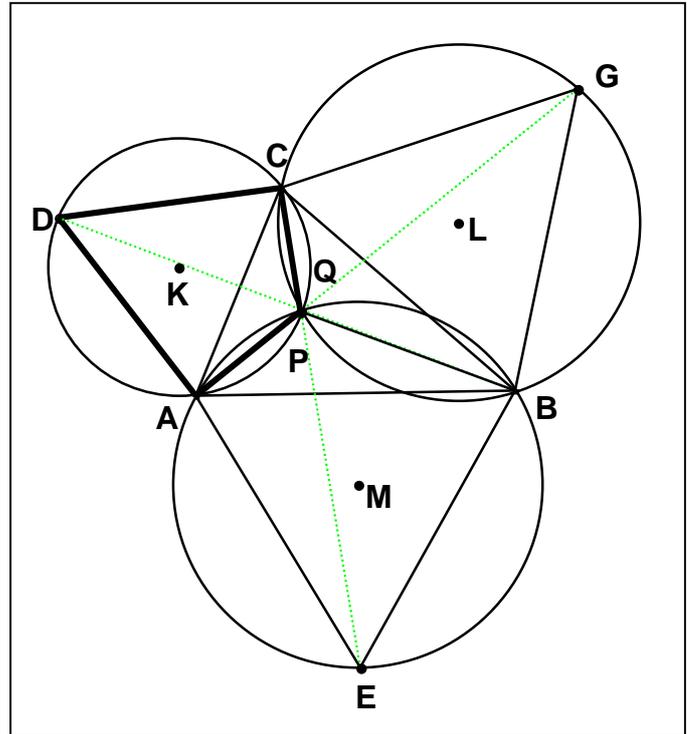
Si uno quiere llevar a cabo esta demostración en las clases, ambas partes deberían ser tratadas con antelación.

Parte I: A los triángulos equiláteros construidos se les asignan círculos circunscritos con sus centros adecuados (ilustración 12a):

Al triángulo equilátero de la composición $\triangle ACD$ le corresponde el circuncentro K , a $\triangle BCG$ el circuncentro L y a $\triangle ABE$ el circuncentro M .

Ilustración 12a:

Figura para la 1ª prueba de la afirmación 1.



Los círculos circunscritos de $\triangle ADC$ y $\triangle ABE$ se cortan en dos puntos A y P .

Consideremos ahora el cuadrilátero $DAPC$. Es un cuadrilátero inscrito en el círculo con centro K y el $\sphericalangle ADC = 60^\circ$. Como en este cuadrilátero inscrito la suma de los dos ángulos situados uno enfrente de otro es 180° , se concluye con esto que $\sphericalangle CPA = 120^\circ$.

También $APBE$ es un cuadrilátero inscrito y por eso también se puede decir $\sphericalangle BEA = 60^\circ$ (por suposición) y entonces $\sphericalangle APB = 120^\circ$.

Como $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPA + \sphericalangle BPC = 360^\circ$ se tiene para $\sphericalangle BPC = 120^\circ$.

Por el inverso del teorema del cuadrilátero inscrito se cumple (sólo aquel cuadrilátero cuya suma de los ángulos situados uno enfrente de otro es 180° , posee un círculo circunscrito), siguiendo con la suposición de $\sphericalangle CGB = 60^\circ$ y el hecho de $\sphericalangle BPC = 120^\circ$, que $BQCG$ es un cuadrilátero inscrito en el círculo con centro L . De los dos puntos de corte de los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle CGB$, i.e. C y Q , el punto Q coincide con P . (Por lo tanto el tercer círculo circunscrito pasa también por este punto.)

Resultado de la parte I: Los círculos circunscritos alrededor de los triángulos equiláteros dados se cortan en un punto.

Ahora aún falta por demostrar, que este punto también es punto de corte de los segmentos \overline{AG} , \overline{BD} , \overline{CE} , i.e se cumple que: $P \in \overline{AG}$, $P \in \overline{BD}$ y que $P \in \overline{CE}$.

Parte II: Se une P con los puntos A, B, C, D, E y G (véase en figura 12b), así son los siguientes ángulos iguales: $\sphericalangle DPA = \sphericalangle CPD = \sphericalangle GPC = \sphericalangle BPG = \sphericalangle EPB = \sphericalangle APE = 60^\circ$ (abajo se ve la demostración). Con esto tenemos, que los puntos A, P, G así como D, P, B y C, P, E están en una línea recta.

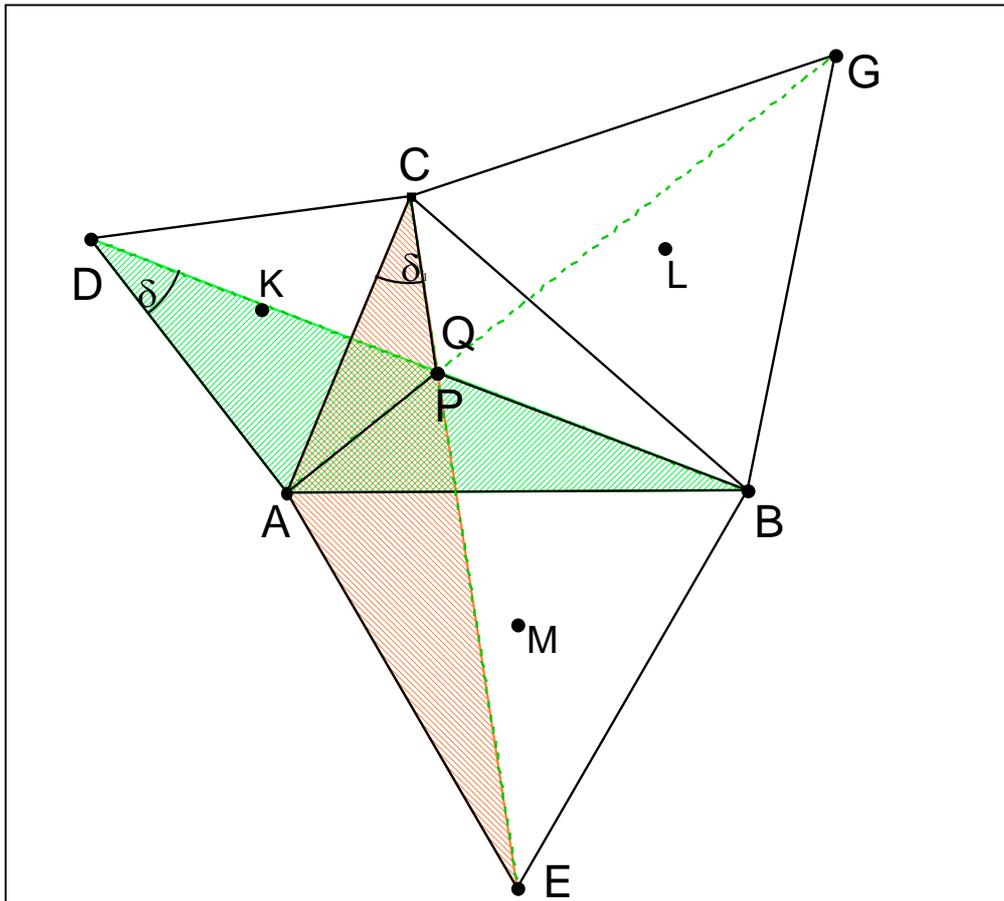


Ilustración12b : Figura para la partell de la 1ª prueba

Prueba para : $\sphericalangle DPA = \sphericalangle CPD = \sphericalangle GPC = \sphericalangle BPG = \sphericalangle EPB = \sphericalangle APE = 60^\circ$

Tras la construcción de la composición de triángulos equiláteros (ilustración 12b) se puede demostrar la congruencia de los siguientes triángulos con la ayuda del teorema de congruencia :

$\triangle CAE \cong \triangle DAB$

1. Los lados que coinciden son $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$, pues $\triangle ACD$ es equilátero por su construcción.

2. Los lados que coinciden son $|\overline{AB}| = |\overline{AE}|$, pues $\triangle ABE$ es equilátero por su construcción.

3. Los ángulos \sphericalangle EAC y \sphericalangle BAD coinciden en su medida, luego se cumple:

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAB = \sphericalangle BAC + 60^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD.$$

Por la congruencia de los triángulos coinciden \sphericalangle ADB y \sphericalangle ACE = δ . Ahora se puede expresar \sphericalangle CPD como

$$\sphericalangle CPD = 180^\circ - (60^\circ + \delta) - (60^\circ - \delta) = 60^\circ.$$

Para los restantes ángulos se puede repetir la demostración con otros triángulos o con la ayuda del resultado anterior considerando el cuadrilátero inscrito (véase en ilustración 12a) con la ayuda de \sphericalangle CPA = 120° se deduce, que \sphericalangle DPA = 60° .

Así pues los ángulos opuestos son también \sphericalangle EPB = \sphericalangle BPG = 60° , y \sphericalangle APB = 120° de donde resulta, que \sphericalangle APE = \sphericalangle APB - \sphericalangle EPB = $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, y además \sphericalangle BPC = 120° con lo que \sphericalangle GPC = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BPG = $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Con esto está la afirmación 1 demostrada, ya que \overline{AG} , \overline{CE} y \overline{BD} se cortan en un punto P. Este punto es el punto de corte de los círculos circunscritos de la composición del triángulo ABC o el punto de corte de los segmentos de unión \overline{AG} , \overline{BD} , \overline{CE} . Se demuestra de igual forma, que estos segmentos de unión se cortan en un ángulo de 120° : \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120° .

Prueba de la afirmación 2:

Por último demostramos el teorema de ayuda, que para triángulos equiláteros cumple que:

En un triángulo equilátero, la suma de las distancias de un punto cualquiera interior a los lados del triángulo es constante (ilustración 13).

Estos interesantes y sorprendentes hechos ya pueden ser demostrados en todo momento en las clases.

Demostración del teorema de ayuda:

Construcción:

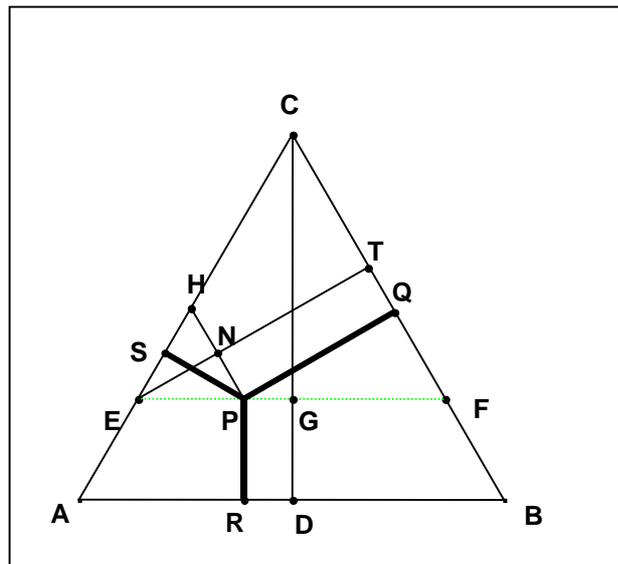
- Se toma un punto P del interior del triángulo equilátero ABC y se traza su perpendicular a todos los lados. A los puntos R, Q, S los llamaremos puntos de pie y con ellos se cumple que: $\overline{PR} \perp \overline{AB}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PS} \perp \overline{AC}$.
- Además trazamos la mediana (= altura) de \overline{AB} que tiene el punto pie en D; por lo tanto se cumple $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.
- Se dibuja la paralela a \overline{AB} que pasa por P, la cual corta a \overline{CD} en G, a \overline{AC} en E y a \overline{BC} en F. Luego se cumple por la construcción que $|\overline{PR}| = |\overline{GD}|$.

- d) El punto pie de la perpendicular de \overline{BC} que pasa por el punto E es T. El triángulo originado CEF es equilátero (semejanza de triángulo con $\triangle ABC$ o teorema de rectas paralelas para $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$) y tiene como altura \overline{CG} o bien \overline{ET} . Como todas las alturas en un triángulo equilátero tienen igual longitud, se cumple $|\overline{CG}| = |\overline{ET}|$.
- e) Se dibuja una paralela a \overline{CB} que pasa por P, la cual corta a \overline{AC} en H y a \overline{ET} en N. Luego se cumple que $|\overline{NT}| = |\overline{PQ}|$.
- f) Como el triángulo EHP es equilátero (razonamiento como en d), de nuevo son las alturas de igual longitud: $|\overline{SP}| = |\overline{EN}|$.

Ilustración 13:

Figura de la demostración del teorema de ayuda para triángulos equiláteros:

La suma de las distancias desde un punto interior al triángulo a los lados es constante.



Así pues se cumple: $|\overline{PS}| + |\overline{PQ}| = |\overline{EN}| + |\overline{NT}|$ (por e, f)

$$= |\overline{ET}| = |\overline{CG}| \text{ (por d).}$$

Luego $|\overline{PR}| = |\overline{GD}|$ (por c) sigue: La distancia del punto a los lados es:

$|\overline{PS}| + |\overline{PQ}| + |\overline{PR}| = |\overline{CG}| + |\overline{GD}| = |\overline{CD}|$. Así se obtiene en dicha suma para cada triángulo equilátero una constante, la longitud de la altura del triángulo equilátero.

Para la prueba de la afirmación 2 debemos utilizar un triángulo equilátero, para aplicar el teorema de ayuda. Por otro lado no necesitamos la distancia a los lados, sino la suma de las distancias a los vértices del triángulo dado. Esto lo podemos asociar mediante la siguiente construcción en una figura:

Como en la demostración de la afirmación 1 se obtuvo, que las líneas de unión del punto de Fermat con los vértices del triángulo forman entre ellas ángulos de 120° , en la siguiente construcción M será el punto de Fermat para el triángulo ABC (ilustración 14):

- a) En el triángulo ABC (no tiene ángulos mayores de 120°) se toma M un punto interior del triángulo, para el que se cumple: $\sphericalangle CMA = \sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = 120^\circ$

- b) Dibuja respectivamente en A, B, C las perpendiculares a \overline{AM} , \overline{BM} , \overline{CM} , las cuales se cortan en P, Q, R.
- c) $\triangle PQR$ es equilátero, porque se cumplen los siguientes postulados:
- 1.) El ángulo $\sphericalangle CQB$ mide 60° , porque en el cuadrilátero CMBQ son por construcción los ángulos $\sphericalangle MCQ$ y $\sphericalangle MBQ$ ángulos rectos y $\sphericalangle CMB$ mide 120° por la figura inicial.
 - 2.) $\sphericalangle ARC = 60^\circ$, se tiene también por construcción que en el cuadrilátero CRAM los ángulos $\sphericalangle MAR = 90^\circ = \sphericalangle RCM$ y por la figura inicial se tiene que $\sphericalangle CMA = 120^\circ$.
 - 3.) Como en un triángulo la suma de sus ángulos es 180° , se tiene que $\sphericalangle BPA = 60^\circ$.
- d) Sea D otro punto del triángulo ABC, $|\overline{DA}|$, $|\overline{DB}|$ y $|\overline{DC}|$ su distancia a los vértices.

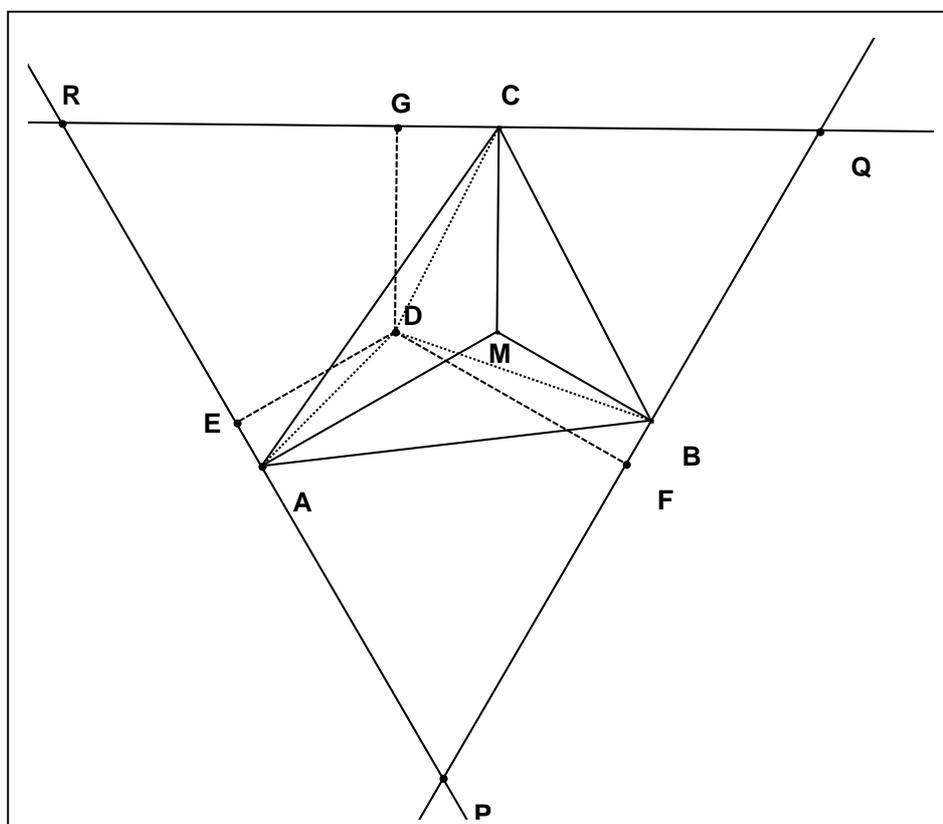


Ilustración 14: Figura para la parte 2 de la 1ª prueba

Queda por demostrar: La suma de las distancias desde M a los vértices es mas pequeña que la distancia desde D a los vértices:

$$|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$$

Demostración: $|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| = |\overline{DE}| + |\overline{DF}| + |\overline{DG}|$ por el teorema ayuda, donde \overline{DE} , \overline{DF} , \overline{DG} son las perpendiculares a los lados del triángulo PQR.

Cuando se sustituyen las líneas de unión a los puntos A,B,C desde D por su perpendicular al triángulo, se obtiene la mínima distancia, luego se cumple que:

$$|\overline{DE}| + |\overline{DF}| + |\overline{DG}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$$

así pues $|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}|$ cqd.

La construcción del punto de Fermat da un punto dentro del triángulo, sólo si no existe ningún ángulo de 120° o mayor. En el caso de $\Delta ACB = 120^\circ$ el punto de Fermat coincide con el punto C. Si hay un ángulo mayor de 120° , se sitúa el punto de intersección de las líneas construidas fuera del triángulo y el vértice de este ángulo posee la mínima suma de las distancias a los vértices.

6.1.2 2. Demostración para el punto del Fermat

Sea un triángulo ABC, en el que ningún ángulo es mayor de 120° . Se busca el punto P, para el cual la suma de las distancias a los vértices es mínima¹¹. En lo siguiente sólo consideraremos el caso, en el que todos los ángulos del triángulo sean menores de 120° . La demostración de la prueba es más corta que la de 1ª prueba; Se parte de la idea que la unión más corta de las cadenas de segmentos con puntos extremos iguales es la línea recta¹². Mediante un giro son unidas las distancias desde P a los vértices del triángulo en una cadena de segmentos. La suma de las distancias desde P a los vértices del triángulo es mínima, cuando la cadena de segmentos construido mediante el figura congruente es una línea recta.

Suposición:

1. P es un punto cualquiera del interior del triángulo ABC.
2. D está fuera de ΔABC y ΔADC es equilátero, se cumple así que $|\overline{AC}| = |\overline{AD}| = |\overline{DC}|$
y $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA = \sphericalangle ADC = 60^\circ$.

Afirmación:

Cuando P es el punto con la mínima suma de las distancias, entonces P está en \overline{BD} y se cumple: $|\overline{BD}| = |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$.

Demostración:

1. Se toma P en el interior del triángulo ΔAPC , y se gira 60° alrededor de A (ilustración 15), donde C se transforma en D. El punto imagen de P es P' y $|\overline{CP}| = |\overline{DP'}|$.

¹¹ La idea de la demostración viene del histórico matemático Joseph Ehrenfried Hofmann en el año 1929

¹² Esta prueba se encuentra también en un antiguo ejercicio del suizo Lambacher: Geometría 1, 1983, Editorial-Klett, Stuttgart, ISBN 3-12-730500-1, páginas 104-105. Aquí existe una aplicación, en la que se quiere construir un depósito central de agua común para tres lugares.

2. $\triangle APP'$ es equilátero, ya que $\sphericalangle PAP' = 60^\circ$ y $|\overline{AP}| = |\overline{AP'}|$ por el giro realizado
 $\Rightarrow |\overline{AP}| = |\overline{PP'}|$.

3. Para la suma de las longitudes de los segmentos se cumple:

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| &= |\overline{AP'}| + |\overline{BP}| + |\overline{DP'}| \quad (\text{por 1. y 2.}) \\ &= |\overline{PP'}| + |\overline{BP}| + |\overline{DP'}| \quad (\text{por 2.}) \\ &= |\overline{BP}| + |\overline{PP'}| + |\overline{P'D}| \geq |\overline{BD}| \end{aligned}$$

(coinciden exactamente, cuando P y P' están en \overline{BD} .)

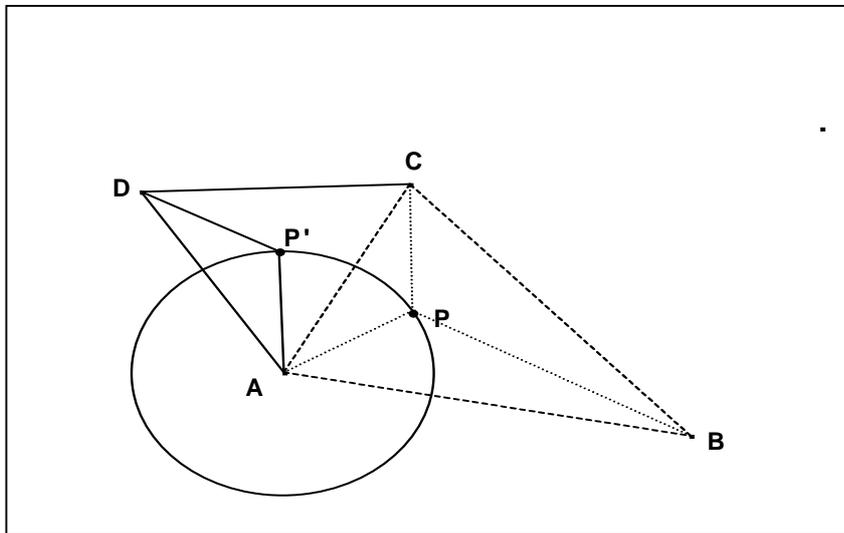


Ilustración 15: Construcción de la 2ª prueba del punto de Fermat

La suma $|\overline{PP'}| + |\overline{BP}| + |\overline{DP'}|$ es mínima, cuando B,P,P' y D están en una línea recta y se cumple $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| = |\overline{BD}|$, donde este es el camino mas corto.

Inversamente se cumple: Cuando P y P' están en \overline{BD} , entonces deben los ángulos, los que se forman entre \overline{PA} , \overline{PB} y \overline{PC} , ser siempre de 120° , que será ahora demostrado:

Suposición: Dibujo y construcción de P' como arriba (véase en ilustración 15).

Los puntos P, P', B, D están en una línea recta:

Afirmación: $\sphericalangle CPA = \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = 120^\circ$

Prueba: 1. $\triangle APP'$ es equilátero (véase en punto 2. de la demostración anterior) y $\sphericalangle P'PA = 60^\circ$.

Así se cumple: $\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle P'PA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

2. $\sphericalangle CPA = \sphericalangle DP'A$ (punto 1. de la demostración anterior)

Así se cumple: $\sphericalangle CPA = \sphericalangle DP'A = 180^\circ - \sphericalangle AP'P = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

3. Se cumple que: $\sphericalangle BPC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$ cqd.