Lista de productos y álgebra lineal

Florentine Bunke*
Horst W. Hamacher*
Andreas Maurer†
Stefanie Müller*

MaMaEuSch‡ -Informe
Matemática técnica y económica para escuelas europeas

Traducido del alemán al español por María Paz Rivera Pérez

*Facultad de Matemáticas, Universidad de Kaiserslautern
†Allianz AG Stuttgart

‡Este proyecto ha sido llevado a cabo con ayuda parcial del estado de Rheinland-Pfalz y de VolkswagenStiftung y de la Comunidad Europea en el marco del programa Sócrates. El contenido de este proyecto no refleja necesariamente el punto de vista de la U.E, tampoco está sujeta a cualquier responsabilidad por parte de la U.E.

Índice General

1 Reflexiones previas **2**

1.1 ¿Por qué incorporar problemas de decisión y de planificación de empresas en las clases de matemáticas de la escuela? 2

1.2 Ejemplo aplicado en las matemáteticas económicas 4

1.3 Interdependencia de productos en el proceso de produccíon 6

2 Métodos de resolución **7**

2.1 Análisis empresarial del proceso de producción 7

2.1.1 Cálculo de la materia prima necesaria en un predeterminado pedido 8

2.1.2 Regeneración de las existencias almacenadas 11

2.2 El problema de la lista de productos 13

2.3 Resolución del ejemplo 19

Capítulo 1

Reflexiones previas

1.1 ¿Por qué incorporar problemas de decisión y de planificación de empresas en las clases de matemáticas de la escuela?

A mediados del año 1997 la publicación de los denominados TIMMS-Estudios (*Third International Mathematics and Science Study)* causó un importante impacto en el público alemán. El motivo de esto fue el rendimiento escolar conseguido en la rama de matemáticas y ciencias naturales del octavo curso, el cual estaba situado en un campo internacional, donde particularmente en el ámbito matemático el conjunto de los estados del norte-, oeste-, y del este de Europa que forman parte del TIMSS - sin mencionar a la mayoría de los paises asiáticos - habían conseguido claramente mejores rendimiento. En definitiva mostraban un peor rendimiento los escolares alemanes con respecto a los paises vecinos y con los más importantes socios de negocio de Alemania y mostraban también una diferencia de más de un año escolar y un gran déficit en el terreno de la comprensión conceptual de las matemáticas. Esta inferioridad en los estudiantes alemanes de no poder resolver problemas rutinarios y diversas formas de representar el problema a través del uso de lo ya aprendido y su transmisión en nuevos contextos, se confirmó de nuevo en la tercera parte de los ya mencionados TIMMS-Estudios publicada en 1999. También dentro de la nueva fase de investigación de la Sekundarstufe 2 se situaban los rendimientos de los estudiantes alemanes dentro del grupo de los paises comparables en una posición inferior, por lo cual la diferencia de grados entre los paises de mayor rendimiento aumentaba y por el contrario con respecto a los paises con rendimientos inferiores disminuía. En particular aquellos problemas que abandonaban el contexto escolar y se orientaban al terreno del mundo laboral producían en parte un importante déficit. De este modo entre los estudiantes de Leistungskurse de matemáticas sólo el 10% tienen capacidad de deducir el planteamiento del problema según sus distintas aplicaciones, de estructurarlos y mediante los procedimientos matemáticos ya conocidos resolverlos con éxito. Los resultados objetivos de los TIMSS-Estudios presentaron unas clases mucho más centradas en desarrollar ciertas habilidades y trataron el conocimiento científico de una manera mucho más superficial. Como instrumento para mejorar la situación actual - trás conocer la media de los resultados de los estudiantes alemanes que tenían evidentemente poco que ver con el aprendizaje escolar pero mucho que ver con los diversas formas de aprendizaje relacionadas - se refuerza el concepto de una clase de matemáticas orientada a la aplicación convirtiéndose así en el centro de interés. En el fondo de este enfoque subyace el reconocimiento científico de que el fomento del aprendizaje tanto sistemático como de aplicación es la condición esencial para la adquisición de un conocimiento inteligente, flexible y útil. En otras palabras: Al lado de una buena organizada adquisición de conocimiento se precisa desde el comienzo de un aprovechamiento del conocimiento adquirido en contextos cotidianos, interdisciplinarios y orientados a problemas, pero que el conocimiento principal no debe quedar muerto, olvidado e inutilizable.

En este sentido se persigue una sola aplicación para obtener un doble objetivo en las clases de matemáticas de la escuela. Por un lado se aspira a un profundo entendimiento de la situación, que sin un tratamiento matemático sólo sería entendido a medias. Por otra parte mostrando estas herramientas de las matemáticas como resolución a un problema real de distintas situaciones se obtienen nuevos conocimientos esenciales para el significado de las matemáticas con el fin de solucionar problemas de nuestra vida cotidiana. La remisión frecuente "a los enunciados de los problemas " sin embargo no persigue una meta, ya que en la mayoría de los casos aqui se refieren a problemas de decisión en situaciones desconocidas, falsas aplicaciones y planteamientos relacionados en cuanto al contenido, que como tales son desenmascarados con los estudiantes .

Frente a esto debe ser emprendido el intento de desarrollar la materia escolar de matemáticas a partir de planteamientos concretos de problemas a primera vista absolutamente complicados y con diversas formas de plantearlo. La complejidad de las aplicaciones se reducen a un mínimo de la matemática aplicada a la economía, tal es el caso del grupo de trabajo de optimización de la universidad de Kaiserslautern y del corespondiente departamento del instituto de la matemática técnica y económica (ITWM) que ya presentaron la solución para clientes de la economía y administración. En el capítulo 1.2 se describe tal aplicación.

Como centro de este trabajo están los problemas de planificación de una empresa y problemas de decisión, que se encuentran en casi todas las empresas de economía. Con esto se espera un mayor interés y aliado a esto un aumento en el rendimiento de los estudiantes.

Además este planteamiento es una de las posibilidades para aceptar el desafío de resolver las materias de matemáticas con *revelantes aplicaciones, interdisciplina* y *modelización matemática.* De acuerdo con la materia dada en los institutos de Rheinland-Pfalz (Alemania): "La próxima tarea de esta materia es, acercar a los estudiantes toda clase de procesos usando las matemáticas. Siempre que las matemáticas puedan ser usadas para estructurar un problema práctico que represente aspectos básicos de las complejas condiciones de un modelo, den soluciones y puedan ser experimentadas dentro de las diferentes relaciones entre teoría y práctica. (...) Los estudiantes deben ser capaces de relacionar las matemáticas con todo lo que ocurre fuera de ella. Trabajar con las matemáticas significa encontrar soluciones críticas, analizarlas y juzgarlas. Dentro de este proceso los límites de cualquier disciplina incluida las matemáticas deben ser considerados."

1.2 Ejemplo aplicado en las matemáteticas económicas

Los métodos de producción en la realidad de una empresa raramente se construyen de forma lineal. Es más común modelos de producción, en los cuales el montaje no se desarrolla de manera escalonada en diferentes niveles de producción, sino que están incluidos tanto los productos finales como los productos intermediarios que hacen parte del proceso de producción.

Por esta razón podemos encontrar una interdependencia mutua en los procesos de producción, en los cuales por ejemplo un producto intermediario es parte tanto de la producción de un producto final como de otros productos intermediarios. Se habla en este caso de la denominada **producción bóveda**.

El instituto para la Tecno- y económica matemática (ITWM) resolvió en Kaiserslautern el siguiente problema para una gran empresa alemana de Software.

Figura 1.1 muestra un proceso de producción cíclico, el cual se aplica por ejemplo en una empresa de refinería o de química.

En la figura se observa, que los productos con los números 4, 5, 7, 8, 9, 12,

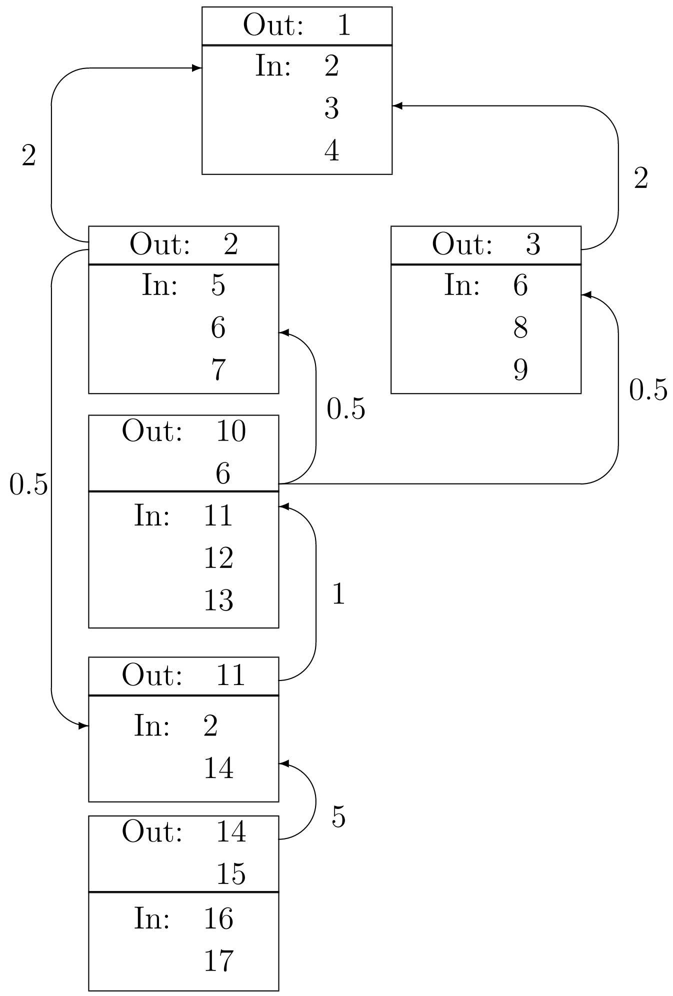

Figura 1.1: Proceso de producción cíclico

13, 16, 17 aparecen ciertamente en la posición ("In"), pero no son generados por ellos mismos. Estos productos serían así mejor calificados como **materias primas** . Los productos restantes son producidos en diferentes etapas de la producción ("Out") y nuevamente aprovechados. En el ejemplo del producto 2, que se necesita en los procesos de producción, que están tanto en su rango más alto (proceso de producción del producto 1) como en su rango más bajo (proceso de producción del producto 11), es fácil de apreciar, que se forma un proceso de producción entrelazado de manera cíclica. Los números de las flechas entre los diferentes procesos de producción indican , cuantas unidades de un producto entran de un proceso de producción a otro.

Ahora, el problema trata de poder calcular de manera rápida los diferentes parámetros del proceso de producción. Los diferentes procesos de producción y el almacenamiento de materias primas, productos intermediarios y finales producen costes. Las materias primas deben ser vendidas. La venta de productos finales y también de posibles productos intermediarios traen ingresos. Bajo estas consideraciones y otros posibles factores se intenta por ejemplo, alcanzar el máximo beneficio. Sería también imaginable, minimizar en la producción dada anteriormente el tiempo de producción o los daños ecológicos. La resolución de los problemas resueltos por el ITWM sería seguramente demasiado complicada en la práctica. Por lo tanto ante todo deben ser tratados problemas simplificados, para poder finalmente considerar este problema concreto en cada punto.

1.3 Interdependencia de productos en el proceso de producćıon

Para facilitar la representación del problema debe ser considerada en el capítulo 2.1 la temática de interdependencia de productos, la cual se divide fundamentalmente en dos diferentes questiones:

- Partiendo de un pedido exterior debe ser determinada para la producción de este pedido los productos necesarios como materias primas.
- Para la representación inversa del problema se formula la pregunta hacía el necesario volumen de producción para consumir las existencias ya almacenadas.

Capítulo 2

Resolución a las preguntas de las ciencias empresariales con la ayuda del álgebra lineal

Los problemas descritos en la sección 1.3 en el campo de la interdependencia empresarial se pueden resolver con la ayuda de contenidos elementales del álgebra lineal.

2.1 Análisis empresarial del proceso de producción

Como centro de las siguientes declaraciones se situa la suposición de, que la producción de cada mercancia se efectua en un proceso de etapas lineales. Así se produce en el departamento A mediante la colaboración conjunta de materias primas productos intermediarios para la empresa examinada, los cuales son a continuación tomados en el departamento B como productos finales. Esto es una estructura de montaje limitada en tan sólo dos etapas de producción, lo que aclara la figura 2.1.

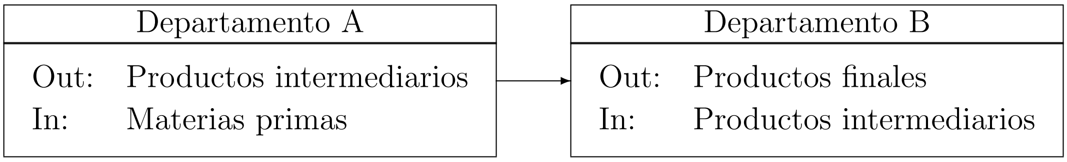

Figura 2.1: Proceso de producción lineal y de varias etapas

2.1.1 Cálculo de la materia prima necesaria en un predeterminado pedido

Ahora se busca también la conexión cuantitativa entre determinados pedidos externos y las necesidades de materia prima que resultan de esto.

Como ilustración puede servir el siguiente problema simplificado de la estructura de producción (ficticia) de la empresa ABC-Massivmöbel:

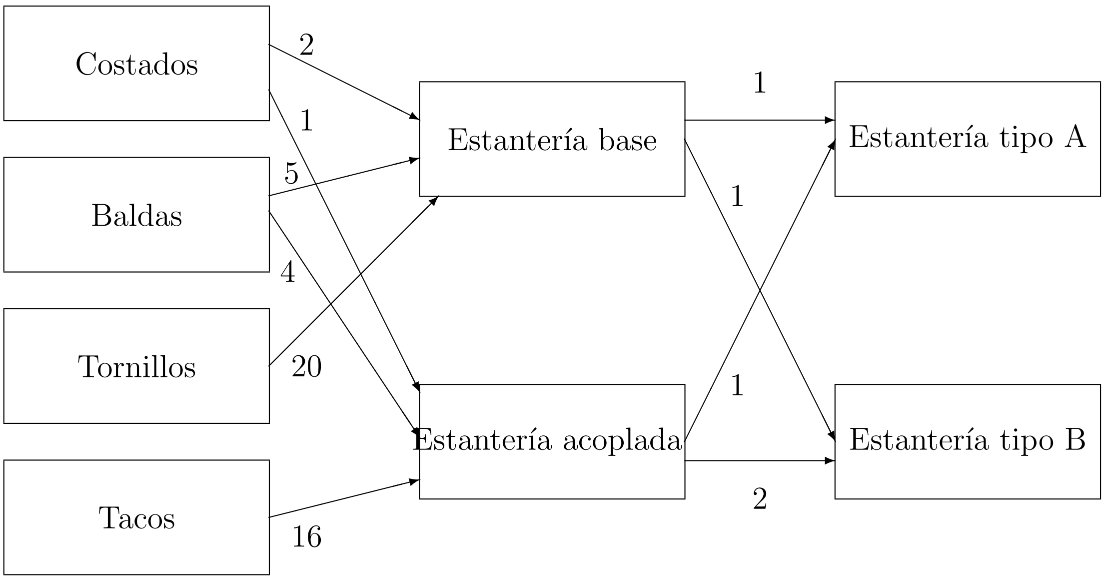

Figura 2.2: Flujo de material de la empresa de muebles

Con la gráfica del flujo de material 2.2 se puede determinar el material necesario para la producción de diez estanterías de tipo A y cinco estanterías de tipo B mediante determinadas operaciones. Se necesitan para las cinco estanterías de tipo B, $5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 20$ costados, $5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 = 65$ baldas, $5 \cdot 20 = 100$ tornillos y $5 \cdot 2 \cdot 16 = 160$ tacos.

Si se incrementa el número de posibles tipos de estanterías, entonces el coste de cálculo aumentaría muy rápidamente. Para determinar la cantidad de estos se necesita un cálculo por etapas para hacerlo mas claro, es decir un procedimiento matemático en el cual de acuerdo a las necesidades de los clientes distribuya la necesaria materia prima, aqui estaría incluido un considerable trabajo de ahorro.

Lo que falta, es una **modelización matemática** del problema. En primer lugar es muy importante, apuntar el pedido recibido en forma de lista, la denominada **Lista de Productos**.[1] Junto al vector del pedido $\vec{x}$ se pueden de manera análoga representar los productos finales y los intermediarios mediante los vectores $\vec{y}$ y $\vec{z}$.

Para facilitar el problema original del cálculo de los productos necesarios pueden derivarse los siguientes subproblemas:

- ¿Cuántos productos intermediarios de cada clase (estanterías base, estanterías acopladas) se necesitan, para satisfacer un pedido de productos finales (estanterías tipo A y B) ?
- ¿Qué cantidad de materia prima de cada clase (costados, baldas, tornillos y tacos) son necesarios para la producción de una determinada cantidad de productos intermediarios?

Para aclarar la primera pregunta se considera el vector ficticio del pedido $\vec{x} = \binom{10}{7}$. Para este vector el requerimiento necesario de productos intermediarios se obtiene del diagrama del flujo de material de la figura 2.2:

Número de estanterías base:	$y_1 = 10 \cdot \underline{1} + 7 \cdot \underline{1} = 17$
Número de estanterías acopladas:	$y_2 = 10 \cdot \underline{1} + 7 \cdot \underline{2} = 24$

Los valores subrayados se pueden agrupar en una matriz.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De esta forma se origina, la denominada **Matriz de Producción** P_1 que muestra los resultados obtenidos en la última etapa de la producción.

Retrocediendo a la ecuación de arriba, utilizando el producto escalar y esta nueva forma de notación se puede reescribir de forma compacta como:

$$\vec{y} = P_1 \cdot \vec{x} \tag{2.1}$$

[1] Con esto se obtiene de una manera sencilla, la posibilidad de introducir el concepto de vector como ordenados números-n-uplas.

Analogamente con los números del ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$$

De manera análoga se puede también resolver la segunda pregunta de la cantidad de materia prima necesaria en determinados productos intermediarios. Del diagrama del flujo de material se determina en primer lugar la correspondiente matriz de producción P_2:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Para la cantidad de materia prima necesaria para esta primera fase de la producción se cumple que:

$$\vec{z} = P_2 \cdot \vec{y} \tag{2.2}$$

Con esto se cumple para el ejemplo que:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 181 \\ 340 \\ 384 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se necesitan para cumplir el pedido 58 costados, 181 baldas, 340 tornillos y 384 tacos.

de las ecuaciones 2.1 y 2.2 se obtiene:

$$\vec{z} = P_2 \cdot P_1 \cdot \vec{x} \tag{2.3}$$

Se calcula la matriz de producción P para la producción total:

$$P = P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \\ 20 & 20 \\ 16 & 31 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Regeneración de las existencias almacenadas

Analogamente se cumplen las consideraciones anteriores para la pregunta inversa, de si debe ser determinado el máximo posible volumen de producción para las existencias ya almacenadas. También aqui es importante el trabajo de cálculo, donde el problema se dificulta porque las existencias de materias primas no siempre se pueden asignar univocamente a los productos finales. Por lo tanto en general tendríamos que probar con algunas de las variantes principales posibles, hasta encontrar finalmente la asignación óptima teniendo en cuenta que las existencias almacenadas restantes tienen que ser mínimas.

Con lo visto hasta ahora se puede ampliar el problema del cálculo de los productos demandados en una estructura de producción lineal, mediante la cual se obtiene una representación del problema con un mayor "contenido de la realidad".

Representación del problema:
Las estanterías producidas por la empresa ABC-Massivmöbel ya no se vuelven a encargar, ya que la dirección de la empresa ha decidido, idear un nuevo diseño para las estanterías, las antiguas no se producirán más y los productos ya existentes se liquidarán - excepto los tornillos y tacos a utilizar en un futuro - . En un inventario del almacén se determinó que aún quedaban 39 costados y 120 baldas. La dirección de la empresa quiere quedarse a ser posible con ninguna pieza restante, y por esto busca un modelo de representación conjunta de estanterías, el cual posibilite al resto de existencias ser ofrecidas como ofertas especiales, donde todos los costados y baldas son agotados. El modificado diagrama del flujo de material de la dirección de la empresa se ve en la figura 2.3.

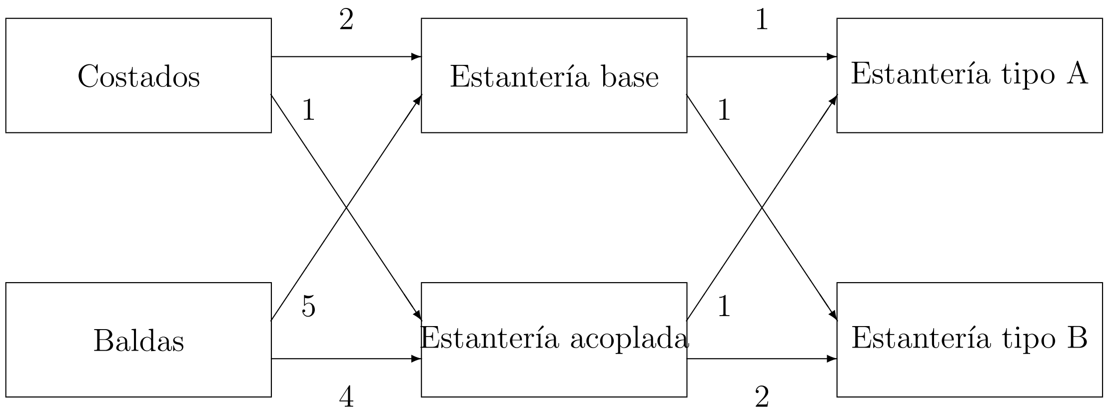

Figura 2.3: Flujo del material modificado de la empresa de muebles

Retrocediendo al capítulo 2.1.1 con los resultados ya obtenidos se describe el flujo del material mediante una nueva matriz de producción P.

$$P = P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

La diferencia con el problema ya elaborado del cálculo de los productos necesarios es que formularíamos la pregunta inversa. En lugar de dar el vector del pedido $\vec{x}$ para determinar el vector de materias primas $\vec{z}$, ahora este último vector es conocido y $\vec{x}$ es buscado. La matriz-vector-producto es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 120 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Para el cálculo de la inversa de $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$ se resuelven dos LGS:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como el sistema se diferencia sólo en el lado derecho, pueden ser simplificados los cálculos con un único modelo con dos lados derechos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trás la transformación la matriz inversa es el lado derecho. Con esto se puede transcribir la ecuación 2.4 como:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Con las existencias almacenadas se pueden producir nueve estanterías de tipo A y tres estanterías de tipo B - mediante la completa evacuación del almacén -. [2]

2.2 El problema de la lista de productos

Como ya hemos descrito al principio, hay que enfatizar otra estructura de producción que la de la sección 2.1, la cual se corresponde más a la realidad empresarial. Si antes el flujo de material estaba separado en varias etapas de producción, ahora se necesita para el montaje de un producto final, tanto ciertos productos de salida como productos intermediarios, los cuales entre otros contienen productos de salida.

El modelo matemático ya presentado para la descripción de un proceso de producción de varias etapas proporciona en este caso falsos resultados. Por consiguiente, el objetivo de este capítulo debe ser facilitar para empresas con tales estructuras listas de productos concretas, las cuales son necesarias para poder llevar a cabo un determinado pedido (**problema de la lista de productos**).

Como complementación y para un nuevo acercamiento a la realidad de la empresa no sólo deben ser encargados productos finales sino que también determinados productos de repuesto. Esta observación se tiene en cuenta en la industria de automóviles, donde en un concesionario se requieren tanto vehículos de diferentes tipos como grandes cantidades de diversas piezas de repuesto. En estas buscadas listas de productos aparecen tanto los ordenados productos finales y piezas de repuesto como también todas las piezas de repuesto necesarias para el montaje, de esta forma se puede leer el completo material requerido que se necesita para la realización de un pedido.

Ejemplo:
Se fabrica la cuna-Baby "Sofia" (véase en figura 2.4). El correspondiente diagrama del flujo de material indica que no es lineal, sino un proceso de producción de varias etapas sin interdependencia mutua (véase en figura 2.5).

La estructura final representa claramente en la figura 2.5, que la producción -representada por el vector $\vec{z}$ - ahora tanto la demanda interna $\vec{a}$ como la demanda

[2] Se trata ya esta representación del problema en el Mittelstufe , en primer lugar se situa la resolución de ecuaciones lineales. Como métodos se usan los ya vistos en Sekundarstufe 1 por substitución-, por igualación- y por eliminación.

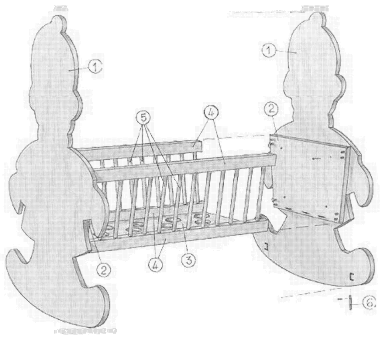

Figura 2.4: cuna-Baby "Sofia" (1 =Respaldos, 2 =Placas frontales, 3 =Placa base, 4 =Barandillas, 5 =Barrotes, 6 =Frenos)

externa $\vec{x}$, debe cubrir los pedidos de los clientes. Con esto se tiene:

$$\vec{z} = \vec{a} + \vec{x} \tag{2.5}$$

Con respecto al reparto de los vectores $\vec{z}$, $\vec{a}$ y $\vec{x}$ es evidente, que se tenga en cuenta el proceso de producción y hacer aparecer un elemento de la construcción en el vector siempre y cuando todas las piezas y grupos de piezas que contiene ya han sido mencionadas.

Un ejemplo para este **orden de la secuencia tecnológica** dentro de los

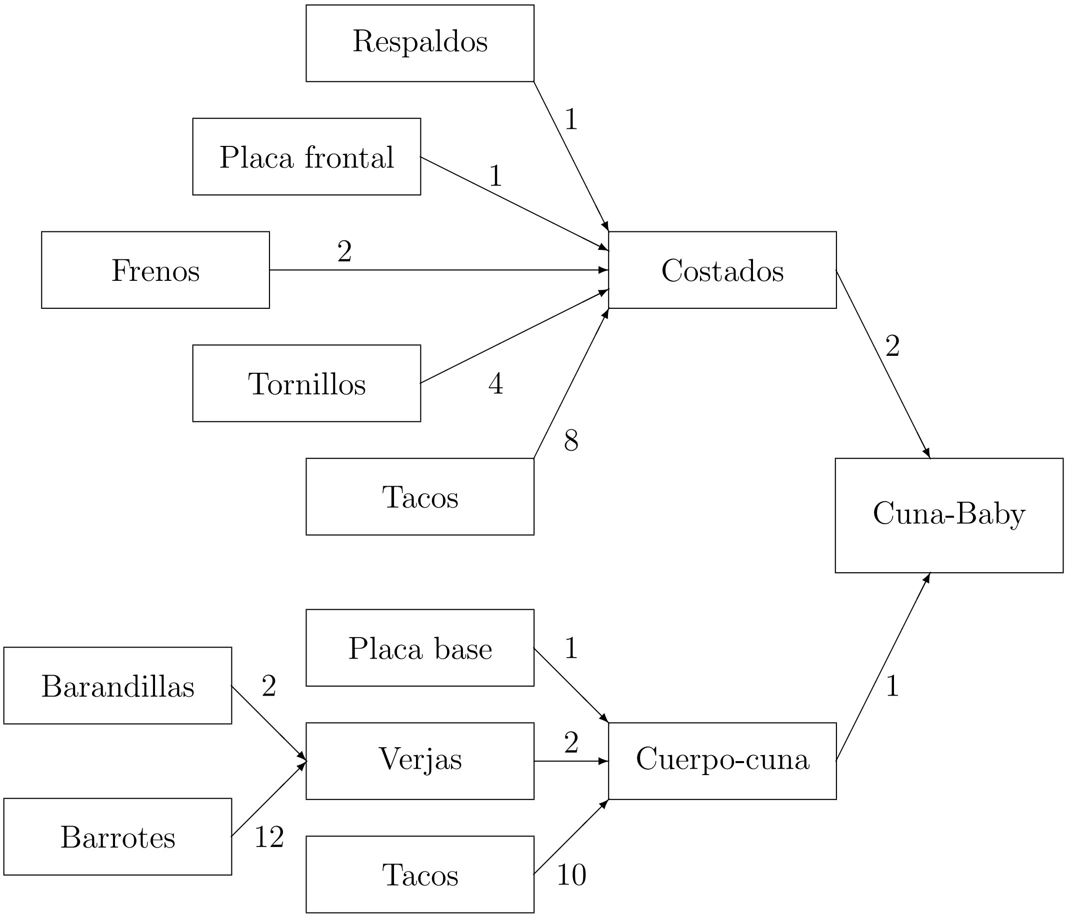

Figura 2.5: Flujo del material de la cuna-Baby "Sofia"

vectores sería: $\begin{pmatrix} \text{Número de tornillos} \\ \text{Número de tacos} \\ \text{Número de respaldos} \\ \text{Número de placas frontales} \\ \text{Número de frenos} \\ \text{Número de barandillas} \\ \text{Número de barrotes} \\ \text{Número de placas base} \\ \text{Número de verjas} \\ \text{Número de cuerpos-cuna} \\ \text{Número de costados} \\ \text{Número de cunas-Baby} \end{pmatrix}$

El orden de la secuencia tecnológica originada de los vectores es por orden sin embargo no es única. En el ejemplo anterior el orden de los ocho primeros elementos es arbitrario, ya que los productos mencionados como materias prima forman parte de la producción.

Además existe evidentemente una conexión lineal entre la demanda interna del material $\vec{a}$ y la producción dada $\vec{z}$, i.e.:

$$\vec{a} = P \cdot \vec{z} \tag{2.6}$$

Los elementos de la matriz P 12×12 son en un principio no conocidos, pero se cumple debido a la propiedad de linealidad de las matrices que:

$$\begin{aligned} \vec{a} = P \cdot \vec{z} &= P \cdot (z_1\vec{e_1} + z_2\vec{e_2} + ... + z_{12}\vec{e_{12}}) \\ &= x_1 P \cdot \vec{e_1} + x_2 P \cdot \vec{e_2} + ... + x_{12} P \cdot \vec{e_{12}} \end{aligned}$$

donde $\vec{e_i}$ son los vectores base.

¿Qué sentido tienen ahora los $P\vec{e_i}$?

$\vec{e_i}$ es el vector de producción para "exactamente una pieza de clase i". Así por ejemplo $\vec{e_{10}}$ es la producción de un cuerpo-cuna.
$P\vec{e_i}$ indica la demanda interna de material, que se necesita para producir una pieza de clase i. Pero esto ya se conoce mediante la gráfica del flujo de material. El resultado de la multiplicación $P\vec{e_i}$ es exactamente la i-ma columna de la matriz P. Se obtiene con esto la matriz P, donde los $P\vec{e_1}$,...,$P\vec{e_{12}}$ se interpretan como las columnas de P y esto determina de nuevo el diagrama del flujo de material.
la matriz P se denota también como **Matriz de Conjunto** . Para el caso anterior se tiene:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se toma por ejemplo la columna novena para observarla de cerca, se reconoce así el material necesario para la construcción de una verja, i.e. dos barandillas y doce barrotes.

Propiedades de la matriz P:
Todos los elementos de la diagonal principal son cero, ya que la producción de una pieza no se necesita de esta misma.
Todos los elementos, que están situados debajo de la diagonal principal, son cero, el motivo es que en la secuencia tecnológica sólo pueden ser utilizadas aquellas piezas que tienen un índice menor y además la producción cúpula no existe.

La matriz en este ejemplo contiene muchos elementos nulos, por lo que el proceso de producción es muy fácil. En general la matriz contendrá más elementos distintos de cero, pero nunca estará repleto de estos.

Para el cálculo del volumen de producción $\vec{z}$ de un pedido recibido $\vec{x}$ se tiene en primer lugar por las ecuaciones 2.5 y 2.6, que se cumple:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= P\vec{z} + \vec{x} \quad \text{d.h.} \\ E\vec{z} &= P\vec{z} + \vec{x} \quad \text{, donde } E \text{ es la matriz unidad.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (E - P)\vec{z} = \vec{x} \tag{2.7}$$

El esfuerzo del cálculo para la resolución de este sistema de ecuaciones lineales ciertamente muy fácil debido a la ya vista anteriormente forma triangular de la matriz $(E - P)$, sin embargo sería el procedimiento encontrado para la empresa en la práctica muy complicado, ya que debería ser resuelto para cada pedido el sistema de ecuaciones 2.7.
De esta manera se llega a la siguiente transformación:

$$\vec{z} = (E - P)^{-1}\vec{x} \tag{2.8}$$

Mediante la determinación de $(E - P)^{-1}$ podrían ser facilmante simulados los efectos de los distintos pedidos en el proceso de producción.

¿Cómo se determina ahora $(E - P)^{-1}$*?*

Ya fue tratada la inversa de una matriz en las clases de matemáticas de la escuela, se diseña así este proceso prescindiendo del enorme trabajo de cálculo casi sin problema. De lo contrario se usaría la correspondencia entre matrices y números con respecto a sus operaciones de cálculo:

Para un número real a, con $\mid a \mid< 1$ se cumple:

$$\begin{array}{rcll} (1-a)^{-1} & = & 1+a+a^2+a^3+...+a^n+... & \text{(sucesión geométrica)} \\ \text{oder} \qquad 1 & = & (1-a)\cdot(1+a+a^2+a^3+...+a^n+...) & \end{array}$$

¿Se cumple también analogamente que $E = (E-P)\cdot(E+P+P^2+...+P^n+...)$*?*

Se averigua facilmente, que P es nilpotente, i.e. existe un $n_0 \in I\!N$, tal que $P^k = 0 \quad \forall k \geq n_0$. Se tiene que:

$$\begin{array}{l} (E-P)\cdot(E+P+...+P^{n_0-1}) = \\ E+P+P^2+...+P^{n_0-1}-(P+P^2+...+P^{n_0}) = \\ E-P^{n_0} = E \end{array}$$

Con esto la matriz $(E-P)$ es invertible y su inversa cumple que: $(E-P)^{-1} = E+P+P^2+...+P^{n_0-1}$ Así se puede la ecuación 2.8 reescribir como:

$$\vec{z} = (E+P+...+P^{n_0-1})\cdot\vec{x} \tag{2.9}$$

Ejemplo:
Supongamos que hubiera sido encargado en un determinado pedido cuatro cunas, tres barandillas y once barrotes. En este caso tendría el vector del pedido $\vec{x}$ la siguiente forma:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con la ayuda de la ecuación 2.9 se determina $\vec{z}$ como[3] :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 104 \\ 8 \\ 8 \\ 16 \\ 19 \\ 107 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.3 Resolución del ejemplo

Se debe intentar resolver el ejemplo de la sección 1.2 con los elaborados modelos matemáticos y técnicas de las secciones 2.1 y 2.2.

De la figura 1.1 se obtiene la matriz de conjunto P, donde los productos 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16 no se producen por ellos mismos, y el 17 no se considera. Además es cierto que se producen los productos 10 y 15, pero en el proceso de producción no se vuelven a utilizar [4]. Por lo tanto pueden quedar sin ser tenidos en cuenta en la matriz de conjunto.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

[3]En este ejemplo se tiene $n_0 = 3$.

[4]En la realidad se pueden colocar los productos 10 y 15 como productos de residuos, los cuales se originan en los procesos de producción de los productos 6 y 14.

$$E - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.\bar{3} & 1.\bar{3} & 0.\bar{3} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 1.\bar{3} & 0.\bar{3} & 0 \\ 2.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 1.\bar{3} & 1.\bar{3} & 0 \\ 13.\bar{3} & 3.\bar{3} & 3.\bar{3} & 6.\bar{6} & 6.\bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo para cubrir la demanda de una unidad de cantidad (UC) del producto 1, se necesitan para la producción:

$3.\bar{3}$	UC del producto 2
2	UC del producto 3
$2.\bar{6}$	UC del producto 10
$2.\bar{6}$	UC del producto 11
$13.\bar{3}$	UC del producto 14