

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

SCHRIFTEN ZUR

FUNKTIONALANALYSIS UND GEOMATHEMATIK

M. J. Fengler, W. Freeden, M. Gutting

**Darstellung des Gravitationsfelds
und seiner Funktionale mit
Multiskalentechniken**

Bericht 6 – Januar 2004

FACHBEREICH MATHEMATIK

Darstellung des Gravitationsfelds und seiner Funktionale mit Multiskalentechniken

von

M. J. FENGLER, W. FREEDEN, M. GUTTING

Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
67653 Kaiserslautern
Postfach 3049
Deutschland

Email:

fengler@rhrk.uni-kl.de
freeden@mathematik.uni-kl.de
gutting@rhrk.uni-kl.de

15. Januar 2004

Zusammenfassung

Die Grundgleichungen der Physikalischen Geodäsie (in der klassischen Formulierung) werden einer Multiskalenformulierung mittels (sphärisch harmonischer) Wavelets unterzogen. Die Energieverteilung des Störpotentials wird in Auflösung nach Skala und Ort durch Verwendung von Waveletvarianzen beschrieben. Schließlich werden zur Modellierung der zeitlichen Variationen des Schwerefeldes zeit- und ortsgebundene Energiespektren zur Detektion lokaler sowie periodischer/saisonaler Strukturen eingeführt.

Schlagwörter: Grundgleichungen der Physikalischen Geodäsie, Störpotential, Wavelets, Waveletvarianzen, Multiskalenmodellierung

1 Einleitung

Wavelets bilden vielseitige Hilfsmittel zur Darstellung von Funktionen und zur Aufbereitung von Datenmengen. Ein wesentlicher Aspekt ist die Fähigkeit, Details verschiedener Größe in Signalen und Bildern zu erkennen und zu analysieren. So lassen sich Verfahren zur Datenkompression, zum Denoising, zur Mustererkennung etc. ableiten sowie neue effiziente Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, Integralgleichungen sowie inversen Problemen durch Multiskalenanalyse gewinnen.

Die rasante Entwicklung in der konstruktiven Approximation und der Computertechnologie sowie der enormen Fortschritt bei digitalen Beobachtungs- und Messtechniken in den letzten Jahren eröffnen die Frage, inwiefern die bisher entwickelten Wavelettechniken für die Grundgleichungen der Physikalischen Geodäsie der Bestimmung der Erdfigur und des äußeren Schwerfeldes eingesetzt werden können. Eine adäquate Antwort ist dringend erforderlich, da durch Satellitenmissionen wie z.B. CHAMP, GRACE, GOCE ein gewaltiges Aufkommen von Datenmengen hoher Präzision und großer, lokal unterschiedlicher Dichte global verfügbar werden, welche die Modellierung von Phänomenen im makroskaligen Bereich bis hin zu den Feinstrukturen des Signals „Erdschwerfeld“ ermöglichen.

Der vorliegende Artikel basiert wesentlich auf den Ergebnissen der Arbeitsgruppe Geomathematik der Technischen Universität Kaiserslautern während der letzten Jahre (siehe z.B. [7], [9], [14]). Den Untersuchungen ist die Vorstellung von Wavelets als „konstituierende Multiskalenbausteine des Gravitationspotentials der Erde“ gemeinsam, welche in schneller und effizienter Weise zu einer Dekorrelation gegebener Datenmengen befähigen. Diese inhaltliche Charakterisierung enthält demnach drei wesentliche Merkmale:

- (i) Wavelets sind Bausteine zur Multiresolution von Funktionen,
- (ii) Wavelets besitzen die Fähigkeit der Dekorrelation,
- (iii) Wavelets erlauben schnelle Algorithmen.

Im Detail ausgeführt für die Grundproblematik der Physikalischen Geodäsie bedeutet dies: Entfernt man die außerhalb des Geoids befindlichen topographischen Massen durch Schwerereduktion (vgl. z.B. [15], [16]), so lässt sich auf einer sphärischen Referenzfläche Ω_R (vom Radius R) bekanntlich das Störpotential T nach (einem $\mathcal{L}^2(\Omega_R)$ -orthonormalen System von) Kugelfunktionen $\{Y_{n,k}^R\}$ mit $Y_{n,k}^R(x) = \frac{1}{R} Y_{n,k}\left(\frac{x}{R}\right)$, $x \in \Omega_R$, entwickeln, wobei $Y_{n,k}$ die Kugelfunktionen auf der Einheitskugel bezeichnen. Lässt man – wie üblich – den Mittelpunkt des Referenzellipsoids und den Erdschwerpunkt zusammenfallen, so gilt für das Störpotential T , d.h. die Differenz zwischen Schwerpotential W und ellipsoidischem Normalpotential U die Darstellung:

$$T(x) = GM \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \sum_{k=-n}^n T^{\wedge}(n, k) \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n+1} Y_{n,k}^R(x) \quad (1)$$

wobei $T^\wedge(n, k)$ die dimensionslosen Orthogonalkoeffizienten von T bezüglich $Y_{n,k}^R$ darstellen:

$$GM T^\wedge(n, k) = \int_{\Omega_R} T(y) Y_{n,k}^R(y) d\omega(y) \quad (2)$$

($d\omega$: Flächenelement). Genauer gesagt gelten unter der kanonischen Annahme, dass T eine auf den Außenraum Ω_R^{ext} samt Rand Ω_R , d.h. eine auf $\overline{\Omega_R^{ext}} = \Omega_R^{ext} \cup \Omega_R$ stetige, in Ω_R^{ext} harmonische und im Unendlichen reguläre Funktion (d.h. $|T(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-1})$ für $|x| \rightarrow \infty$) ist, die folgenden Grenzbeziehungen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_R} \left(T(y) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^N \sum_{k=-n}^n T^\wedge(n, k) Y_{n,k}^R(y) \right)^2 d\omega(y) \right)^{1/2} = 0 \quad (3)$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \sum_{k=-n}^n T^\wedge(n, k) Y_{n,k}^R(y) \right| = 0, \quad (4)$$

wobei K eine Teilmenge des Außenraumes Ω_R^{ext} der Sphäre Ω_R mit positivem Randabstand zu Ω_R (d.h. $\text{dist}(\overline{K}, \Omega_R) > 0$) ist. Die Fourierentwicklung des Störpotentials nach Kugelfunktionen ist äußerst erfolgreich, bestimmte Frequenzen (d.h. Wellenlängen abhängig von dem Grad n und der Ordnung k) des Störpotentials anzusprechen. Sie berücksichtigt aber entsprechend ihrer Konzeption nicht die räumliche Evolution von Frequenzen. Folglich enthalten die Fourierkoeffizienten Information über die Frequenzen gemittelt über alle Positionen, sie zeigen aber nicht, wie das Frequenzverhalten sich räumlich verändert. Daher ist eine Kugelfunktionsentwicklung kaum in der Lage, sich auf einer kleinen räumlichen Skala ändernde Daten zu modellieren.

Einen Ausweg in Richtung räumlicher Evolution bietet zunächst die formale Vertauschung von Reihe und Integral. Dies führt zu einer integralen Faltungsdarstellung des Störpotentials mit Hilfe des Dirac-Kerns

$$\delta(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^N \sum_{k=-n}^n \underbrace{\delta^\wedge(n)}_{=1} \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} Y_{n,k}^R(x) Y_{n,k}^R(y), \quad (5)$$

$(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$, in der Form

$$T = \delta * T = \int_{\Omega_R} \delta(\cdot, y) T(y) d\omega(y), \quad (6)$$

wobei die Gleichheit auf Ω_R im Sinne einer hier nicht näher spezifizierten Sobolev-schen Topologie zu verstehen ist. (Näheres findet sich in [7], [14].) Das Additionstheorem der Theorie der Kugelfunktionen liefert für $(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$

$$\delta(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^N \sum_{k=-n}^n \delta^\wedge(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y}{|x||y|} \right), \quad (7)$$

wobei P_n das Legendre-Polynom vom Grade n bezeichnet. Der Dirac-Kern weist als Reihe über alle Mitglieder des abgeschlossenen und vollständigen Systems der Kugelfunktionen keine Frequenzlokalisation auf. Somit ist auch die Faltungsapproximation mit dem Dirac-Kern nicht geeignet zu einer räumlich variablen Frequenzanalyse. Zusammenfassend kann man sagen, dass Kugelfunktionen und Dirac-Kerne zwei „extreme Vertreter“ von Approximationsstrukturen des Störpotentials bilden. Der polynomiale Charakter der Kugelfunktionen befähigt zur idealen Frequenzlokalisation unter Ausschluss der Ortslokalisation, der Dirac-Kern liefert ideale Ortslokalisation unter Ausschluss der Frequenzlokalisation (beachte, dass alle $\delta^\wedge(n) = 1$, $n = 0, 2, 3, \dots$).

Variablen ortsabhängiges Modellieren von Frequenzverhalten führt nun zu einem Kompromiss in der Wahl der Approximationsstrukturen, der letztlich die Multiskalenphilosophie begründet. Ausgangspunkt (vgl. [7], [8]) ist die Benutzung sogenannter Skalierungsfunktionen, d.h. skalenabhängiger Kerne $\Phi_j(\cdot, \cdot)$ der Gestalt

$$\Phi_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y}{|x||y|} \right), \quad (x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}} \quad (8)$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (i) $\varphi_j(0) = 1$ für alle j
- (ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(n) = \delta^\wedge(n) = 1$ für $n = 0, 2, 3, \dots$
- (iii) $\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \varphi_j(n) < \infty$ für jedes j .

Mit anderen Worten, $(x, y) \mapsto \Phi_j(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$, ist bei festem x als Funktion von y ein stetiger Kern in $\overline{\Omega_R^{ext}}$, der im Außenraum Ω_R^{ext} harmonisch ist, und darüberhinaus

$$\Phi_j(x, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \delta(x, y) \quad (9)$$

(in einer hier nicht weiter diskutierten Metrik) erfüllt. Wegen der Symmetrie des Kerns gelten die obigen Eigenschaften umgekehrt auch für festes y bei variablem x . Die Multiskalenapproximation des Störpotentials T gelingt dann in der Form

$$\begin{aligned} T &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\Phi_j^{(2)} * T) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\Phi_j * (\Phi_j * T)) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \Phi_j(z, \cdot) \int_{\Omega_R} \Phi_j(z, y) T(y) d\omega(y) d\omega(z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \Phi_j^{(2)}(\cdot, y) T(y) d\omega(y). \end{aligned} \quad (10)$$

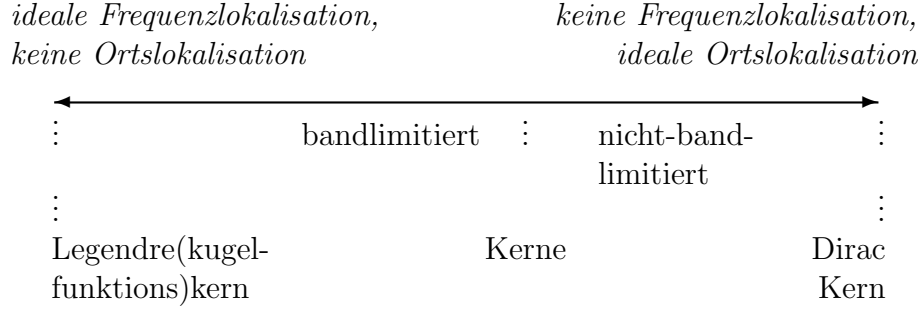
Genauer gesagt (vgl. [7]) ergeben sich:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_R} \left(T(x) - (\Phi_j^{(2)} * T)(x) \right)^2 d\omega(x) \right)^{1/2} = 0 \quad (11)$$

und

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - \left(\Phi_j^{(2)} * T \right) (x) \right| = 0 \quad (12)$$

für alle Teilmengen K des Außenraumes Ω_R^{ext} mit $\text{dist}(\overline{K}, \Omega_R) > 0$. Durch die Verwendung von Skalierungsfunktionen gelingt es, in Form einer Multiskalenmethode sowohl Orts- als auch Frequenzlokalisierung in den Grenzen der (Heisenberg'schen) Unschärferelation zu steuern (siehe Schema unten).



Die Multiskalenmethode trägt damit dem Umstand Rechnung, dass das Störpotential Korrelationen sowohl im Ort als auch in der Frequenz besitzt, die es spezifisch zu modellieren gilt. In der Tat sind Daten in örtlicher Nachbarschaft stärker korreliert als weiter entfernte, Frequenzen treten in ortslokal abhängiger Bandform auf. Um die Signale dieses Typus zu analysieren und zu rekonstruieren, benötigt man skalenabhängige Teststrukturen, d.h. Skalierungsfunktionen, die ausgewogen im Orts- und Frequenzraum lokalisieren. Die Multiskalenmethode bietet somit alle „Zwischenrealisationen“ der Fourierentwicklung mittels Kugelfunktionen, die eine optimale Zerlegung des Signals im Frequenzraum erlaubt, und der Faltung mit dem Dirac-Kern, welche optimal im Ortsraum lokalisiert. Das Ausmaß der Frequenz- bzw. Ortslokalisierung bei der Multiskalenmethode ist abhängig von der Wahl der Skalierungsfunktion. Als repräsentative Beispiele seien genannt:

(a) Bandlimitierte Skalierungsfunktionen

(1) **Shannon Skalierungsfunktion**

$$\varphi_j^{SH}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in [0, 2^j) \setminus \{1\} \\ 0 & \text{für } n \in [2^j, \infty), \end{cases}$$

(2) **CP Skalierungsfunktion (CP = Cubic Polynomial)**

$$\varphi_j^{CP}(n) = \begin{cases} (1 - 2^{-j}n)^2(1 + 2^{-j+1}n) & \text{für } n \in [0, 2^j) \setminus \{1\} \\ 0 & \text{für } n \in [2^j, \infty) \end{cases}$$

(b) Nicht-bandlimitierte Skalierungsfunktionen

(1) **Rationale Skalierungsfunktion**

$$\varphi_j^{RA}(n) = (1 + 2^{-j}n)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad \text{mit } \alpha > 1.$$

(2) **Exponentielle Skalierungsfunktionen** (z.B. Abel-Poisson Skalierungsfunktion)

$$\varphi_j^{AP}(n) = e^{-2^{-j}\alpha n}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad \text{mit } \alpha > 0.$$

Weitere Beispiele finden sich in den Abhandlungen [7], [9], [14].

Für jede Position $x \in \overline{\Omega_R^{ext}}$ gibt die Faltung $(\Phi_j^{(2)} * T)(x)$ bei unterschiedlichem Skalierungsparameter j verschiedene geglättete Ansichten des Störpotentials an dieser Stelle wieder, d.h. die Funktion $\Phi_j^{(2)} * T$ lässt sich in $\overline{\Omega_R^{ext}}$ als Glättung bis zum Grad j des Skalierungsparameters (Tiefpassfilter) deuten. Die assoziierte Waveletapproximation $\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T)$ wird als Differenz zwischen zwei Glättungen $\Phi_{j+1}^{(2)} * T$ und $\Phi_j^{(2)} * T$ verstanden, d.h. $(x, y) \mapsto \Psi_j(x, y)$ und $(x, y) \mapsto \tilde{\Psi}_j(x, y)$ sind gegeben durch

$$\Psi_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \psi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right), \quad (13)$$

$$\tilde{\Psi}_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right) \quad (14)$$

mit den Symbolen $\psi_j(n)$ und $\tilde{\psi}_j(n)$, die sich aus der sogenannten Verfeinerungsgleichung

$$\psi_j(n)\tilde{\psi}_j(n) = \varphi_{j+1}^2(n) - \varphi_j^2(n), \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad (15)$$

durch Wurzelziehen (dann ist $\Psi_j = \tilde{\Psi}_j$ — „P-Scale Wavelets“) oder Anwendung der 3. Binomischen Formel (dann ist $\Psi_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j$ und $\tilde{\Psi}_j = \Phi_{j+1} + \Phi_j$ — „M-Scale Wavelets“) ergeben. In bestimmten Spezialfällen wie z.B. bei exponentiellen P-Scale Wavelets, die aus Schichtpotentialen konstruiert werden (vgl. [13]), sowie bei M-Scale Wavelets (wie z.B. Abel-Poisson Wavelets aus der oben genannten Abel-Poisson Skalierungsfunktion) kann man eine summationsfreie Darstellung der Wavelets erreichen. Das Wavelet Ψ_j nennt man primäres Wavelet und es wird zur Berechnung der Wavelettransformation benutzt, $\tilde{\Psi}_j$ heißt duales Wavelet, das zur Rekonstruktion benötigt wird. Die Faltung $\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T)$ gibt somit für jede Position die Detailinformation an, um von der Glättung $\Phi_j * (\Phi_j * T)$ zur Skala j zur Glättung $\Phi_{j+1} * (\Phi_{j+1} * T)$ zur Skala $j+1$ zu gelangen. Eine leichte Rechnung (siehe [7]) zeigt, dass für jedes $J, J_0 \geq 1$ mit $J_0 < J$

$$\Phi_J^{(2)} * T = \Phi_{J_0}^{(2)} * T + \sum_{j=J_0}^{J-1} \tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T) \quad (16)$$

gilt. Man beachte, dass die lineare Faltung $\Phi_{J_0}^{(2)} * T$ mit $\Phi_{J_0} * (\Phi_{J_0} * T)$ zusammenfällt. Genauer gesagt bedeutet (16) in Verbindung mit (11) und (12), dass

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_R} \left(T(x) - \left(\Phi_{J_0}^{(2)} * T \right) (x) - \sum_{j=J_0}^{J-1} \left(\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T) \right) (x) \right)^2 d\omega(x) \right)^{1/2} = 0 \quad (17)$$

und

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - \left(\Phi_{J_0}^{(2)} * T \right) (x) - \sum_{j=J_0}^{J-1} \left(\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T) \right) (x) \right| = 0 \quad (18)$$

für jedes $K \subset \Omega_R^{ext}$ mit $\text{dist}(\overline{K}, \Omega_R) > 0$ gilt. Die in (17) und (18) auftretenden Faltungsintegrale stellen bilineare Faltungen dar.

Für numerische Auswertungen sind schließlich folgende Diskretisierungen vorzunehmen:

- (1) Die unendliche Reihe $\sum_{j=J_0}^{\infty} \dots$ ist durch eine endliche Summe der Form $\sum_{j=J_0}^{J_{max}-1} \dots$ bei geeignet gewähltem J_{max} zu ersetzen (siehe (16)).
- (2) Ein Faltungsintegral der Form

$$(\Psi_j * T)(x) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(x, y) T(y) d\omega(y), \quad x \in \overline{\Omega_R^{ext}}, \quad (19)$$

ist durch eine entsprechende Näherungsformel des Typs

$$\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \Psi_j(x, y_i^j) T(y_i^j), \quad x \in \overline{\Omega_R^{ext}}, \quad (20)$$

mit Gewichten $w_i^j \in \mathbb{R}$ und Knoten $y_i^j \in \Omega_R$ zu approximieren. Näherungsformeln dieser Art finden sich beispielsweise in [7], [9], [14] und den Referenzen dieser Bücher.

2 Darstellung des Gravitationspotentials mit Hilfe von sphärisch harmonischen Wavelets

Das Gravitationspotential V der Erde erhält man bekanntlich aus dem Schwerepotential W unter Auslassung des durch die Zentrifugalkraft bedingten Anteils Φ , in Formeln bedeutet dies: $V = W - \Phi$. In einem Punkt $x \in \Omega_R$ kann es (in oben beschriebener Diskretisation) als Summe einer Basisapproximation mit Hilfe einer Skalierungsfunktion und der Details, die sich durch Faltung mit dem zugehörigen dualen Wavelet ergeben, dargestellt werden:

$$V(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} v_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j v_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j). \quad (21)$$

Dabei sind

- $w_i^{j_0}, w_i^j$ – Integrationsgewichte für die zugrundeliegende sphärische Integration auf Ω_R ;
- $v_i^{\Phi_{j_0}}$ – Skalierungsfunktionskoeffizienten von V zur Skala j_0 ;
- $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$ – Waveletkoeffizienten von V zur Skala j ;
- $y_i^{j_0}, y_i^j$ – Punkte, die zu den Koeffizienten und Integrationsgewichten der jeweiligen Skala gehören;
- N_{j_0}, N_j – Anzahl der Punkte bzw. Koeffizienten bei der Skala j_0 bzw. j ;

- GM – Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde;
- R – Radius der Referenzsphäre Ω_R , auf der die Knoten $y_i^{j_0}, y_i^j$ liegen;
- Φ_{j_0} – Skalierungsfunktion zur Skala j_0 ;
- $\tilde{\Psi}_j$ – das zugehörige duale (rekonstruierende) Wavelet.

Die Koeffizienten $v_i^{\Phi_{j_0}}$ und $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$ ergeben sich aus den folgenden Faltungen:

$$\frac{GM}{R} v_i^{\Phi_{j_0}} = (\Phi_{j_0} * V)(y_i^{j_0}) = \int_{\Omega_R} \Phi_{j_0}(y_i^{j_0}, y) V(y) d\omega(y), \quad (22)$$

$$\frac{GM}{R} v_i^{\tilde{\Psi}_j} = WT_j(V; y_i^j) = (\Psi_j * V)(y_i^j) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(y_i^j, y) V(y) d\omega(y). \quad (23)$$

$WT_j(V; \cdot)$ bezeichnet die Wavelettransformierte von V zur Skala j . Näheres zu solchen Waveletkoeffizienten findet sich in [3] sowie [4].

Sowohl die Integrationsgewichte und -knoten wie auch die Koeffizienten hängen von der Wahl des sphärischen Integrationsverfahrens ab. Allgemeiner ist die folgende Integraldarstellung:

$$V(x) = \int_{\Omega_R} (\Phi_{j_0} * V)(y) \Phi_{j_0}(x, y) d\omega(y) + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \int_{\Omega_R} WT_j(V; y) \tilde{\Psi}_j(x, y) d\omega(y). \quad (24)$$

Bekannte Verfahren zur numerischen Integration über die Sphäre sind unter anderen Gleichverteilung oder Verfahren, die auf polynomialer Exaktheit oder Splinesexaktheit basieren (vgl. [2], [7], [9]). Eine Rekonstruktion und Dekomposition von (24) in Form eines Pyramidenschemas finden sich unter Verwendung dieser Integrations-techniken in der Arbeit [10].

Das Störpotential T berechnet sich bekanntlich (vgl. [15], [16] oder [19]) durch Subtraktion des ellipsoidischen Normalpotentials $U = V_{ell} + \Phi$ vom Schwerepotential W :

$$T(x) = W(x) - U(x) = V(x) - V_{ell}(x). \quad (25)$$

Dieses Störpotential kann dann mittels der eingangs präsentierten Konzeption harmonischer Wavelets in der folgenden Multiskalendarstellung entwickelt werden:

$$T(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \quad (26)$$

Hierin bedeuten:

- $w_i^{j_0}, w_i^j$ – Integrationsgewichte für die zugrundeliegende sphärische Integration auf Ω_R ;
- $t_i^{\Phi_{j_0}}$ – Skalierungsfunktionskoeffizienten von T zur Skala j_0 ;
- $t_i^{\tilde{\Psi}_j}$ – Waveletkoeffizienten von T zur Skala j ;
- $y_i^{j_0}, y_i^j$ – Punkte, die zu den Koeffizienten und Integrationsgewichten der jeweiligen Skala gehören;

- N_{j_0}, N_j – Anzahl der Punkte bzw. Koeffizienten bei der Skala j_0 bzw. j ;
- GM – Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde;
- Φ_{j_0} – Skalierungsfunktion zur Skala j_0 ;
- $\tilde{\Psi}_j$ – das zugehörige duale (rekonstruierende) Wavelet.

Die Skalierungsfunktionskoeffizienten/Waveletkoeffizienten $t_i^{\Phi_{j_0}}$ bzw. $t_i^{\tilde{\Psi}_j}$ hängen wie folgt mit den Koeffizienten $v_i^{\Phi_{j_0}}$ und $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$ zusammen:

$$\begin{aligned}
\frac{GM}{R} t_i^{\Phi_{j_0}} &= (\Phi_{j_0} * T)(y_i^{j_0}) \\
&= (\Phi_{j_0} * (V - V_{ell}))(y_i^{j_0}) \\
&= (\Phi_{j_0} * V)(y_i^{j_0}) - (\Phi_{j_0} * V_{ell})(y_i^{j_0}) \\
&= \frac{GM}{R} v_i^{\Phi_{j_0}} - (\Phi_{j_0} * V_{ell})(y_i^{j_0})
\end{aligned} \tag{27}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{GM}{R} t_i^{\tilde{\Psi}_j} &= (\Psi_j * T)(y_i^j) \\
&= (\Psi_j * (V - V_{ell}))(y_i^j) \\
&= (\Psi_j * V)(y_i^j) - (\Psi_j * V_{ell})(y_i^j) \\
&= \frac{GM}{R} v_i^{\tilde{\Psi}_j} - (\Psi_j * V_{ell})(y_i^j).
\end{aligned} \tag{28}$$

Da man V_{ell} als Summe weniger bestimmter Kugelfunktionen (mit Grad $\leq m$, zumeist $m = 8$) mit Kugelfunktionskoeffizienten $V_{ell}^\wedge(n, k)$ ansetzen kann (vgl. [15], [16], [19])

$$V_{ell}(x) = GM \left(V_{ell}^\wedge(0, 0) \frac{R}{|x|} Y_{0,0}^R(x) + \sum_{n=2}^m V_{ell}^\wedge(n, 0) \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n+1} Y_{n,0}^R(x) \right), \tag{29}$$

lassen sich die oben noch enthaltenen Faltungen wie folgt vereinfachen (man beachte, dass $|y_i^{j_0}| = |y_i^j| = R$):

$$\begin{aligned}
t_i^{\Phi_{j_0}} &= v_i^{\Phi_{j_0}} - \left(\Phi_{j_0} * \frac{R}{GM} V_{ell} \right) (y_i^{j_0}) \\
&= v_i^{\Phi_{j_0}} - \left(\varphi_{j_0}(0) V_{ell}^\wedge(0, 0) R Y_{0,0}^R(y_i^{j_0}) + \sum_{n=2}^m \varphi_{j_0}(n) V_{ell}^\wedge(n, 0) R Y_{n,0}^R(y_i^{j_0}) \right) \\
&= v_i^{\Phi_{j_0}} - V_{ell}^\wedge(0, 0) Y_{0,0} \left(\frac{y_i^{j_0}}{R} \right) - \sum_{n=2}^m \phi_{j_0}(n) V_{ell}^\wedge(n, 0) Y_{n,0} \left(\frac{y_i^{j_0}}{R} \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned}
t_i^{\tilde{\Psi}_j} &= v_i^{\Psi_j} - \left(\tilde{\Psi}_j * \frac{R}{GM} V_{ell} \right) (y_i^j) \\
&= v_i^{\tilde{\Psi}_j} - \left(\psi_j(0) V_{ell}^{\wedge}(0, 0) R Y_{0,0}^R (y_i^j) + \sum_{n=2}^m \psi_j(n) V_{ell}^{\wedge}(n, 0) R Y_{n,0}^R (y_i^j) \right) \\
&= v_i^{\tilde{\Psi}_j} - \sum_{n=2}^m \psi_j(n) V_{ell}^{\wedge}(n, 0) Y_{n,0} \left(\frac{y_i^j}{R} \right), \tag{31}
\end{aligned}$$

weil zulässige Symbole einer Skalierungsfunktion die Bedingung $\varphi_j(0) = 1$ für alle j erfüllen müssen und somit $\psi_j(0) = 0$ für alle j ist.

Berechnet man exemplarisch mit CP-Skalierungsfunktionen und CP-Wavelets die Koeffizienten zur Skala 7 und des zugehörigen Detailraums für das Störpotential T aus EGM96, so erhält man Abb. 1 und Abb. 2.

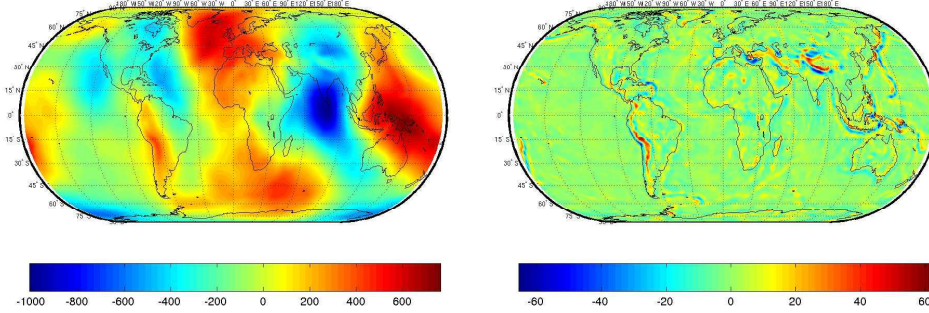


Abb. 1: Störpotential T auf Ω_R zur Skala 7 in $[m^2/s^2]$.

Abb. 2: Detailbereich des Störpotentials T zur Skala 7 in $[m^2/s^2]$.

3 Funktionale des gravitativen Störpotentials in Multiskalendarstellung

Mit Hilfe der Bruns'schen Formel $N = T/\gamma$ (vgl. z.B. [15], [16], [19]) läßt sich aus der Multiskalendarstellung des Störpotentials eine Multiskalenerlegung der Geoidundulationen bestimmen. Mit γ bezeichnet man bekanntlich in der Bruns Formel die Normalschwere (und diese wird üblicherweise mit $\gamma = \frac{GM}{R^2}$ sphärisch approximiert). Also ergibt sich nach klassischem Zugang folgende Formel für die Multiskalendarstellung der Geoidundulationen:

$$\begin{aligned}
N(x) &= \frac{R^2}{GM} T(x) \\
&= R \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + R \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \tag{32}
\end{aligned}$$

In Abb. 3 bis 4 sind Geoidundulationen, die aus dem Störpotential T berechnet wurden, gefiltert mit einer CP-Skalierungsfunktion und CP-Wavelets der Skala 7, exemplarisch dargestellt. Eine volle Multiresolution, aufgelöst nach den Skalen 2 bis 8 und mit den zugehörigen Detailbereichen abgebildet, befindet sich im Anhang Anhang A.

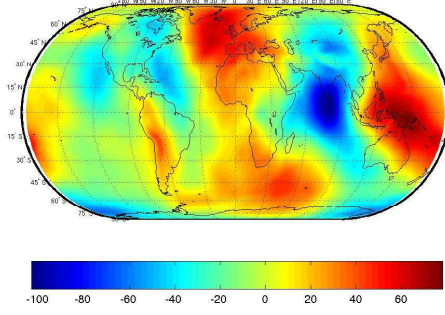


Abb. 3: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 7 in [m].

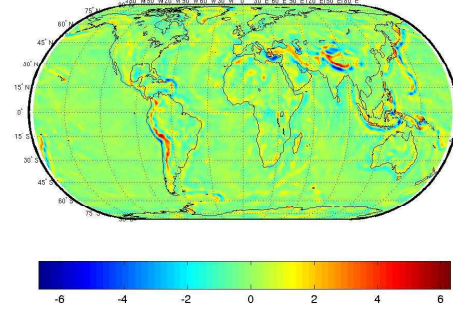


Abb. 4: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 7 in [m].

Die Definition der Schwerestörung (gravity disturbance) als negative erste Radialableitung des Störpotentials $\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}$, d.h. $\delta g(x) = \langle -\frac{x}{|x|}, \nabla_x T(x) \rangle$, führt zu der folgenden Darstellung:

$$\begin{aligned} \delta g(x) &= -\frac{GM}{R} \left(\sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \frac{\partial}{\partial r_x} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \frac{\partial}{\partial r_x} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \right) \\ &= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{\delta g}(x, y_i^j) \end{aligned} \quad (33)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) &= -|x| \frac{\partial}{\partial r_x} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \\ &= |x| \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{n+1}{|x|} \right) \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j^{\delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) &= -|x| \frac{\partial}{\partial r_x} \tilde{\Psi}_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \\
&= |x| \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{n+1}{|x|} \right) \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right), \tag{35}
\end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_j^{\delta g}(n) = (n+1)\varphi_j(n), \tag{36}$$

$$\tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) = (n+1)\tilde{\psi}_j(n) \tag{37}$$

und somit

$$\tilde{\psi}_j^{\delta g}(n)\psi_j(n) = \varphi_{j+1}^{\delta g}(n)\varphi_{j+1}(n) - \varphi_j^{\delta g}(n)\varphi_j(n), \tag{38}$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left(\varphi_{j_0}^{\delta g}(n)\varphi_{j_0}(n) + \sum_{j=j_0}^J \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n)\psi_j(n) \right) = n+1. \tag{39}$$

Betrachten wir die sphärische Approximation der Schwerestörung nur für Punkte x auf der Referenzsphäre mit Radius R bzw. auf dem Geoid selbst (siehe Abb. 7 und 8), dann ist $|x| = R$ und der Vorfaktor wird zu GM/R^2 .

Die Schwereanomalien sind gegeben durch

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r_x}(x) - \frac{2}{|x|}T = \delta g(x) - \frac{2}{|x|}T, \tag{40}$$

was in analoger Weise zu folgender Multiskalendarstellung führt:

$$\begin{aligned}
\Delta g(x) &= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{\delta g}(x, y_i^j) \\
&\quad - \frac{2}{|x|} \left(\frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \right) \\
&= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\Delta g}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{\Delta g}(x, y_i^j), \tag{41}
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\Phi_{j_0}^{\Delta g}(x, y_i^{j_0}) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j^{\Delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right), \tag{42}$$

$$\tilde{\Psi}_j^{\Delta g}(x, y_i^j) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{\Delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \tag{43}$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi_j^{\Delta g}(n) &= \varphi_j^{\delta g}(n) - 2\varphi_j(n) \\ &= (n+1)\varphi_j(n) - 2\varphi_j(n) = (n-1)\varphi_j(n),\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_j^{\Delta g}(n) &= \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) - 2\tilde{\psi}_j(n) \\ &= (n+1)\tilde{\psi}_j(n) - 2\tilde{\psi}_j(n) = (n-1)\tilde{\psi}_j(n)\end{aligned}\quad (45)$$

gesetzt haben. Die Summation über n bei der Definition der Skalierungsfunktion $\Phi_{j_0}^{\Delta g}$ und den zugehörigen dualen Wavelets $\tilde{\Psi}_j^{\Delta g}$ enthält bekanntlich keine Anteile mit Kugelfunktionsgrad 1.

Bestimmt man die zweite Ableitung des Störpotentials, erhält man den Schweretenor (gravity-gradient tensor). Wir betrachten nun die Multiskalenrepräsentation der radialen Richtung dieses Tensors, d.h. der zweiten Radialableitung $g_r = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$, auch vertikaler Schweregradient genannt:

$$\begin{aligned}g_r(x) &= \frac{GM}{R} \left(\sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \right) \\ &= \frac{GM}{R|x|^2} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{g_r}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R|x|^2} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{g_r}(x, y_i^j)\end{aligned}\quad (46)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\Phi_{j_0}^{g_r}(x, y_i^{j_0}) &= |x|^2 \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \\ &= |x|^2 \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{|x|^2} \right) \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j^{g_r}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right)\end{aligned}\quad (47)$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{j_0}^{g_r}(x, y_i^{j_0}) &= |x|^2 \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \tilde{\Psi}_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \\ &= |x|^2 \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{|x|^2} \right) \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{g_r}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right),\end{aligned}\quad (48)$$

wobei

$$\varphi_j^{g_r}(n) = (n+1)(n+2)\varphi_j(n), \quad (49)$$

$$\tilde{\psi}_j^{g_r}(n) = (n+1)(n+2)\tilde{\psi}_j(n) \quad (50)$$

und somit

$$\tilde{\psi}_j^{gr}(n)\psi_j(n) = \varphi_{j+1}^{gr}(n)\varphi_{j+1}(n) - \varphi_j^{gr}(n)\varphi_j(n), \quad (51)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left(\varphi_{j_0}^{gr}(n)\varphi_{j_0}(n) + \sum_{j=j_0}^J \tilde{\psi}_j^{gr}(n)\psi_j(n) \right) = (n+1)(n+2) \quad (52)$$

gesetzt wurden. Kennt man also die Waveletkoeffizienten des Störpotentials, lassen sich nicht nur das Potential, sondern auch alle weiteren genannten Größen rekonstruieren. Dies wird nun am Beispiel von CP-Rekonstruktionen in Abb. 5 bis 8 bei Skala 7 und die zugehörigen Detailbereiche für Schwereanomalien und Schwerestörungen demonstriert.

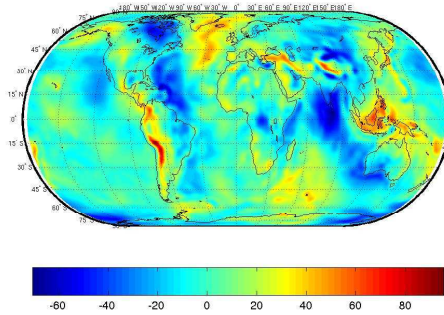


Abb. 5: Schwereanomalien auf Ω_R zur Skala 7 in [mgal].

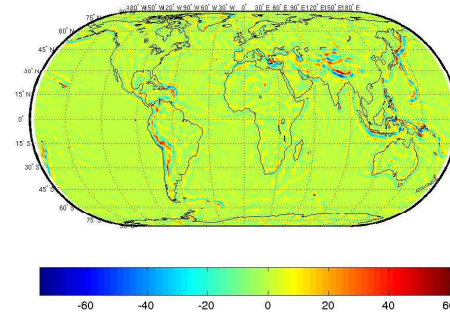


Abb. 6: Detailbereich der Schwereanomalien zur Skala 7 in [mgal].

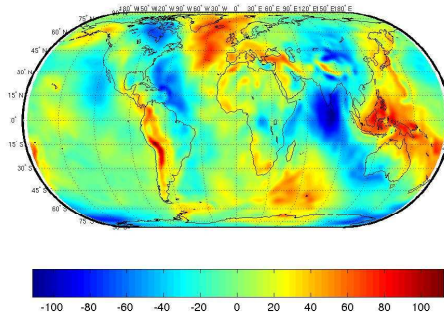


Abb. 7: Schwerestörungen auf Ω_R zur Skala 7 in [mgal].

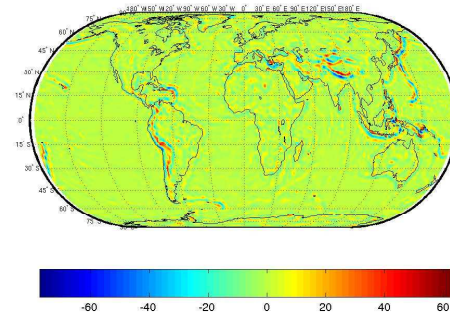


Abb. 8: Detailbereich der Schwerestörungen zur Skala 7 in [mgal].

4 Die Energieverteilung des Gravitationsfeldes der Erde

Die Verteilung der lokal variablen Signalenergie des Störpotentials kann mit Hilfe von Waveletvarianzen beschrieben werden. Dabei wird nicht nur die Verteilung im Frequenzbereich, d.h. über die verschiedenen Skalen, sondern – wie in unserer Einleitung gewünscht – auch im Ortsbereich offenbart. Allgemein sind die Skalen- und Ortsvarianzen von T zur Skala j an der Stelle x definiert (vgl. [11], [12]) als

$$\text{Var}_{j;x}(T) = \int_{\Omega_R} \int_{\Omega_R} T(y)T(z)\Psi_j(y,x)\Psi_j(z,x)d\omega(y)d\omega(z). \quad (53)$$

Die nicht ortsabhängige Skalenvarianz zur Skala j ist dann

$$\sigma_j^2(T) = \text{Var}_j(T) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(T)d\omega(x). \quad (54)$$

Sie lassen sich aus den Waveletkoeffizienten des Störpotentials T (siehe Darstellung 26) ermitteln. Die Größe

$$\begin{aligned} \sigma_{j;x}^2 &= \left((WT_j \left(\frac{R}{GM} T; \cdot \right) * SH(\cdot, \cdot))(x) \right)^2 \\ &= \left(\int_{\Omega_R} WT_j \left(\frac{R}{GM} T; y \right) SH(y, x) d\omega(y) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}^j} SH(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (55)$$

ist die einheitenlose Waveletvarianz bei Skala j an der Stelle x , berechnet aus den Waveletkoeffizienten des Störpotentials. Dabei bezeichnet SH einen passend zum benutzten Wavelet (Typ und Skala) gewählten Shannon-Kern (cf. [9], [7]). Somit erhält man für das Störpotential selbst (in $[m^2/s^2]$):

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(T) &= \frac{GM}{R} \sigma_{j;x}^2 \\ &= \frac{GM}{R} \left(\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}^j} SH(y_i^j, x) \right)^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Eine Illustration der Waveletvarianzen des Störpotentials T ist in Abb. 9 und Abb. 10 gegeben. Beide Bilder zeigen sehr illustrativ, dass unsere Waveletmethoden die hochfrequenten, *energetisch lokal konzentrierten* Phänome des Störfeldes mit wenigen Parametern beschreiben können. Es wurden hier CP-Wavelets bei Skala 6 und 7 benutzt.

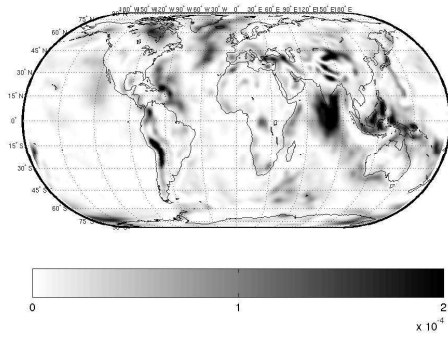


Abb. 9: Waveletvarianzen des Störpotentials auf Ω_R zur Skala 6 in $[m^2/s^2]$.

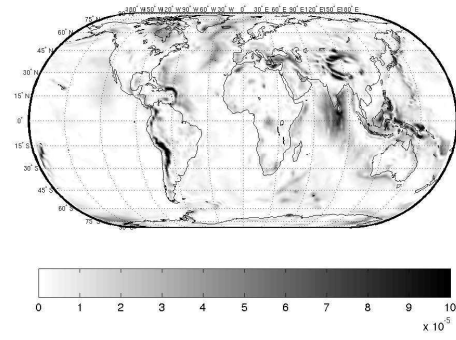


Abb. 10: Waveletvarianzen des Störpotentials auf Ω_R zur Skala 7 in $[m^2/s^2]$.

Für die Geoidhöhen N (Einheit $[m]$) gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(N) &= R\sigma_{j;x}^2 \\ &= R \left(\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} SH(y_i^j, x) \right)^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Für die Schwerestörungen δg (Einheit $[m/s^2]$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(\delta g) &= ((WT_j(T; \cdot) * SH^{\delta g}(\cdot, \cdot))(x))^2 \\ &= \left(\frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} SH^{\delta g}(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

mit

$$\begin{aligned} SH^{\delta g}(y_i^j, x) &= -\frac{\partial}{\partial r_x} SH(y_i^j, x) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{n+1}{|x|} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^j}{|x||y_i^j|} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Für die Schwereanomalien Δg (Einheit $[m/s^2]$) erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(\Delta g) &= ((WT_j(T; \cdot) * SH^{\Delta g}(\cdot, \cdot))(x))^2 \\ &= \left(\frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} SH^{\Delta g}(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (60)$$

mit

$$\begin{aligned}
SH^{\Delta g}(y_i^j, x) &= SH^{\delta g}(y_i^j, x) - \frac{2}{|x|} SH(y_i^j, x) \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{n-1}{|x|} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^j}{|x||y_i^j|} \right). \quad (61)
\end{aligned}$$

Für die vertikalen Schweregradienten g_r (Einheit $[1/s^2]$) folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{j;x}(g_r) &= ((WT_j(T; \cdot) * SH^{g_r}(\cdot, \cdot))(x))^2 \\
&= \left(\frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} SH^{g_r}(y_i^j, x) \right)^2 \quad (62)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
SH^{g_r}(y_i^j, x) &= \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} SH(y_i^j, x) \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{(n+1)(n+2)}{|x|^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^j}{|x||y_i^j|} \right). \quad (63)
\end{aligned}$$

Die jeweilige Skalenvarianz berechnet sich durch Integration, wie in Formel (54) beschrieben. Sie läßt sich für die folgenden Fälle vereinfachen:

$$\text{Var}_j(T) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(T) d\omega(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \left(t_i^{\tilde{\Psi}_j} \right)^2 \quad (64)$$

$$\text{Var}_j(N) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(N) d\omega(x) = R \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \left(t_i^{\tilde{\Psi}_j} \right)^2. \quad (65)$$

5 Zeitliche Variationen des Erdschwerefelds

Zur Auflösung eines präzisen globalen Erdschwerefelds werden zusätzlich zeitliche Veränderungen berücksichtigt, die ihre Ursache beispielsweise im Massentransport durch Ozean- und Erdzeiten haben. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der zeitlichen Variation des Erdschwerefeldes, die durch Deformation der festen Erde unter Einfluß von Auflasteffekten hervorgerufen wird (vgl. auch [18]). Dazu zählt u. a. der Jahreszeiten abhängige Schnee-, Eis- sowie Wassertransport, wobei ein besonderes Augenmerk darauf liegt, daß die Auflasteffekte regionalen Charakter haben, z.B. jahreszeitliche Schwankungen der Schnee- und Eisbedeckung in polaren Regionen. Somit lassen sich diese, optimal, geophysikalisch sinnvoll in eine Waveletdarstellung des Erdgravitationspotentials einbetten.

Die zeitliche Variationen der Skalierungsfunktionskoeffizienten $v_i^{\Phi_{j_0}}$ und der zugehörigen Waveletkoeffizienten $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$ unterliegen einem breiten und intensitätsabhängigen Spektrum: Kurzzeitige kleine Effekte werden beispielsweise durch Luftdruckschwankungen der Atmosphäre hervorgerufen. Auf geringfügig größeren Zeitskalen verändern hydrologisch induzierte Auflasteffekte das Gravitationspotential, wie zum Beispiel die Bodenfeuchte. Schließlich spielen auf wesentlich größeren Zeitskalen noch Effekte wie die nacheiszeitliche Hebung eine Rolle, und außerdem sind Veränderungen durch die Kern-Mantel Kopplung, durch Strömungen im Erdinnern, und auch säkulare (lineare) Variationen meßbar (siehe [18]).

Die Modellierung zeitabhängiger Messungen, wie sie zum Beispiel von CHAMP oder GRACE monatsweise geliefert werden, erfordern eine Modifikation, so dass $\tilde{V}(t, x)$ die Variationen um das mittlere Gravitationspotential $V(x)$ aus Gleichung (21) beschreibt:

$$\tilde{V}(t, x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} \tilde{v}_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \quad (66)$$

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns nur auf die Modellierung von Prozessen der Oberfläche (Atmosphäre, Kryosphäre, Ozeane, Wasserhaushalt der Kontinente) mit saisonalen und jährlichen Variationen. Die zeitlichen Veränderungen der Oberflächendichte S (Masse/Fläche) kann mit Hilfe von sphärischen Wavelets wie folgt beschrieben werden:

$$S(t, x) = R\rho_w \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} s_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}^L(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j^L(x, y_i^j) \quad (67)$$

Hierbei bezeichnet ρ_w die Dichte von Wasser, um die Koeffizienten $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$ und $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$ einheitenfrei zu halten. Tatsächlich sind die Koeffizienten $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$ und $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$ identisch mit $\tilde{v}_i^{\Phi_{j_0}}(t)$ und $\tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$, weil die Skalierungsfunktion und das Wavelet zur Rekonstruktion die Auflastabhängigkeit modelliert. Genauer gesagt, führen wir die sogenannten Love-Skalierungsfunktionen und Love-Wavelets ein:

$$\Phi_{j_0}^L(x, y_i^{j_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j^L(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|} \right) \quad (68)$$

$$\tilde{\Psi}_j^L(x, y_i^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j^L(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot y_i^j}{|x||y_i^j|} \right) \quad (69)$$

mit

$$\varphi_j^L(n) = \varphi_j(n) \frac{3\rho_w}{\rho_{ave}} \frac{1+k'_n}{2n+1}, \quad (70)$$

wobei ρ_{ave} die durchschnittliche Erddichte ist (ca. 5517 kg/m³), und k'_n die bekannten Love-Zahlen sind.

Die Love-Wavelets ergeben sich analog, nur dass zur Berechnung der Waveletsymbole die folgende Verfeinerungsgleichung benutzt wird:

$$\psi_j^L(n)\tilde{\psi}_j^L(n) = (\varphi_{j+1}^L)^2(n) - (\varphi_j^L)^2(n) \quad (71)$$

Dividiert man $S(t, x)$ durch die Dichte ρ_w , so kann man den Term $S(t, x)/\rho_w$ als Höhenänderungen einer Wassersäule ($1\text{mbar}/\gamma \approx 1\text{cm}$, mit der mittleren Erdbeschleunigung γ) interpretieren.

Bestimmt man umgekehrt aus beispielsweise Luftdruckmessungen oder hydrologischen Daten eine Waveletentwicklung analog zu Gleichung (66), so erhält man Koeffizienten $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$ und $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$ für die Änderung der Oberflächendichte. Aus diesen lassen sich aber auch direkt die Beiträge zur zeitlichen Variationen des Erdgravitationspotentials \tilde{V} ableiten, in dem man zur Rekonstruktion inverse Love-Skalierungsfunktionen und Wavelets verwendet:

$$\tilde{V}(t, x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} s_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}^{L^{-1}}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j^{L^{-1}}(x, y_i^j) \quad (72)$$

Dabei ergeben sich die inversen Love-Skalierungsfunktionen $\Phi_{j_0}^{L^{-1}}$ mit dem Symbol

$$\varphi_j^{L^{-1}}(n) = \varphi_j(n) \frac{\rho_{ave}}{3\rho_w} \frac{2n+1}{1+k'_n}, \quad (73)$$

und analog zur Gleichung (71) die Symbole der inversen Love-Wavelets $\tilde{\Psi}_j^{L^{-1}}$. Es sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass die Verwendung der Love-Zahlen wie in den Love-Skalierungsfunktionen und Wavelets mehr exemplarischen Charakter hat: Um zeitabhängige Phänome des Erdschwerefeld hochpräzise zu erfassen, ist es außerdem notwendig radiale Dichteveriationen in den Ozeanen (über die Tiefe), sowie der Atmosphäre (über die Höhe) genauer zu beschreiben. Jedoch demonstriert die oben beschriebene Entwicklung in Wavelets eine ganz besondere Eigenschaft: Wavelets erlauben die Auftrennung regionaler zeitabhängiger Effekte. So lassen sich beispielsweise an Hand weniger (räumlich zugeordneter) Koeffizienten Zeitreihen der jahreszeitlichen Änderungen der Eisbedeckung der polaren Regionen analysieren.

Auflösen zeit- und ortsgebundener Energiespektren

Selbstverständlich kann man analog zu Gleichung (53) die ortsgebunden Waveletvarianzen zeitabhängig gestalten:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j; x}(\tilde{V})[t] &= \int_{\Omega_R} \int_{\Omega_R} \tilde{V}(t, y) \tilde{V}(t, z) \Psi_j(y, x) \Psi_j(z, x) d\omega(y) d\omega(z) \\ &= \frac{GM}{R} \left(\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) SH(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (74)$$

Dabei lässt sich die Größe $\text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[t]$ physikalisch als zeitabhängiger Energiegehalt in einem von dem Ort x und der Skala j (Frequenzband) abhängigen Lokalgebiet interpretieren. So kann man beispielsweise durch Untersuchen einer Zeitreihe von *lokalen* Waveletvarianzen das spektrale, örtliche und zeitliche Verhalten der polaren Eisbedeckung analysieren. Wendet man in diesem Fall eine Fourier Transformation bezüglich der Zeit an, so lassen sich ihre regionalen und periodischen/saisonalen Strukturen dedektieren. Dazu berechnet man die Größe

$$\text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[f] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_R} \int_{\Omega_R} \tilde{V}(t, y) \tilde{V}(t, z) \Psi_j(y, x) \Psi_j(z, x) d\omega(y) d\omega(z) e^{-ift} dt, \quad (75)$$

und stellt dann ihren Betrag gegenüber der Frequenz f dar. Diese Darstellung zeigt genau bei der halb-/jahreszeitlichen Frequenz ein lokales Maximum.

Zur Detektion von kurzzeitigen aperiodischen Effekten sollte man allerdings besser eine 1-d Wavelet als eine Fourier Transformation verwenden. Dazu kann man die klassischen Methoden von Mallat und anderen [17] einsetzen. Jedoch sollte darauf hingewiesen werden, dass man eine zeitabhängige Modellierung aus einem einzigen “funktionalen” Guß bekommt, wenn man auch eindimensionale Wavelets basierend auf Legendre Polynomen verwendet, siehe [7]. Denn sie betten sich der gesamten algorithmischen Struktur auf natürliche Weise ein.

6 Zusammenfassung

In der Analysis von Geopotentialfunktionen wie z.B. des Störpotentials können wir drei fundamental verschiedene Zugänge unterscheiden:

- (1) Klassische Fouriermethoden mittels Kugelfunktionen (Polynome),
- (2) Waveletmethoden mittels skalenabhängiger Kernfunktionen (Skalierungsfunktionen),
- (3) Finite-Punkte-Methoden mittels Dirac’scher Kernfunktionen (Partikelmethoden, vgl. z.B. [1]).

Die Bedeutung der Wavelets liegt in der Konstruktion von Kernen mit sowohl variabler Frequenz- als auch Ortslokalisierung. Der Waveletzugang besitzt daher die Fähigkeit der flexiblen Modellierung des Signals „Störpotential“ entsprechend der Frequenz- und Ortsspezifika. Die Multiresolutionsmethode erlaubt somit eine adäquate Darstellung von mittel- und kurzwelligen Anteilen des Signals auf lokaler Basis. Lokale (z.B. zeitliche) Änderungen des Signals machen sich aufgrund des ortslokalisierenden Charakters nur lokal bemerkbar. Die Speicherung lokaler Phänomene erfolgt lokal über die Wavelettransformierten. Diese können rekursiv mittels Algorithmen in Baumstruktur erschlossen werden (vgl. [7], [9], [14]). Insgesamt ergibt sich also ein weites Feld neuartiger Anwendungen in der Beschreibung des Gravitationsfeldes, insbesondere bei der lokalen Verbesserung globaler Modelle unter Realisation einer räumlich veränderlichen Frequenzanalyse.

Literatur

- [1] CUI, J.: *Finite Pointset Methods on the Sphere and Their Application in Physical Geodesy*. PhD. Thesis, University of Kaiserslautern, Geomathematics Group, 1995.
- [2] DRISCOLL, J.R., HEALY, D.M.: *Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere*. Adv. Appl. Math., 15:202-250, 1994.
- [3] FENGLER, M.J., FREEDEN, W., GUTTING, M.: *Multiscale Modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, UCPH2002_0.5, EGM96* in: *Multiscale Modeling of CHAMP-Data*, FREEDEN, W., MICHEL, V. (EDS). Schriften zur Funktionalanalysis und Geomathematik, TU Kaiserslautern, Bericht 4, Teil C, 2003.
- [4] FENGLER, M.J., FREEDEN, W., GUTTING, M.: *Multiscale Modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002_0.5, EGM96: Wavelet Coefficients, Variances and Reconstruction*. siehe Internet (<http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwgeo/waveletmodels.html>), 2003.
- [5] FENGLER, M.J., FREEDEN, W., KUSCHE, J.: *Multiscale Geopotential Solutions from CHAMP Orbits and Accelerometry* in: *Multiscale Modeling of CHAMP-Data*, FREEDEN, W., MICHEL, V. (EDS). Schriften zur Funktionalanalysis und Geomathematik, TU Kaiserslautern, Bericht 4, Teil B, 2003.
- [6] FENGLER, M.J., FREEDEN, W., MICHEL, V.: *The Kaiserslautern Multiscale Geopotential Model SWITCH-03 from Orbit Perturbations of the Satellite CHAMP and Its Comparison to the Models EGM96, UCPH2002_02_0.5, EIGEN-1s, and EIGEN-2* in: *Multiscale Modeling of CHAMP-Data*, FREEDEN, W., MICHEL, V. (EDS). Schriften zur Funktionalanalysis und Geomathematik, TU Kaiserslautern, Bericht 4, Teil A, 2003.
- [7] FREEDEN, W.: *Multiscale Modelling of Spaceborn Geodata*. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig. 1999.
- [8] FREEDEN, W.: *Multiscale Modelling of GOCE Data Products*. ESA Report, WPP-188, 111-126, 2001.
- [9] FREEDEN, W., GERVENS, T., SCHREINER, M.: *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)*. Oxford Science Publications, Clarendon, 1998.
- [10] FREEDEN, W., GROTEN, E., MICHEL, V., ARFA-KABOODVAND, K.: *Geopotential Reconstruction, Decomposition, Fast Computation, and Noise Cancellation by Harmonic Wavelets*. Studia Geophysica et Geodaetica 47(1):37-72, 2003.

- [11] FREEDEN, W., MAIER T.: *On Multiscale Denoising of Spherical Functions: Basic Theory and Numerical Aspects*. Electron. Trans. Numer. Anal. (ETNA), 14:40-62, 2002.
- [12] FREEDEN, W., MAIER T.: *Spectral and Multiscale Signal-to-Noise Thresholding of Spherical Vector Fields*. Computational Geosciences 7(3):215-250, 2003.
- [13] FREEDEN, W., MAYER C.: *Wavelets Generated by Layer Potentials*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 14:195-237, 2003.
- [14] FREEDEN, W., MICHEL, V.: *Multiscale Potential Theory (with Application to Earth's Sciences)*. Birkhäuser, 2004. (in print)
- [15] GROTEN, E.: *Geodesy and the Earth's Gravity Field I, II*. Dümmler, 1979.
- [16] HEISKANEN, W. A., MORITZ, H.: *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, 1967.
- [17] MALLAT, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2nd Edition, Academic Press, San Diego, San Francisco, New York, 1998.
- [18] PETERS, T.: *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde*. Diplomarbeit, Inst. f. Astr. u. Phys. Geodäsie (IAPG), TU München, 2001.
- [19] TORGE, W.: *Geodäsie*. Sammlung Göschen, de Gruyter, 1975.

Anhang A

Wie in Kapitel 3 angekündigt wird hier eine Multiresolutionsdarstellung der Geoidundulationen mittels CP-Skalierungsfunktionen und CP-Wavelets der Skalen 2 bis 8 gezeigt. Sie wurde aus einer Multiskalendarstellung des Störpotentials des EGM96-Modells, d.h. den Koeffizienten $t_i^{\Phi_{j0}}$ und $t_i^{\Psi_j}$, berechnet. Die rechten Abbildungen zeigen stets die Details, die dann zur bisherigen Approximation (links) hinzugefügt werden, um die nächste Skala (dann eine Zeile weiter unten abgebildet) zu erhalten. (Multiresolutionsdarstellungen zu anderen Geopotentialmodellen und zu realen CHAMP-Daten finden sich in [3], [4], [5] und [6].)

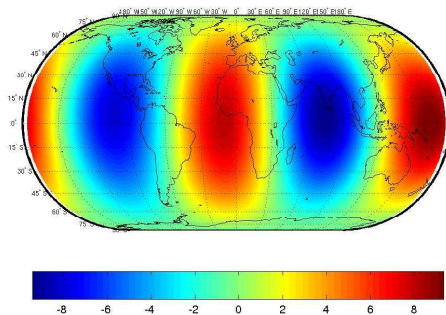


Abb. 11: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 2 in $[m]$.

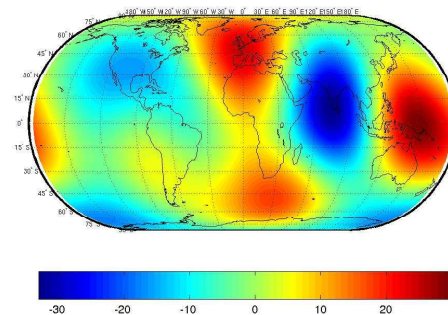


Abb. 12: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 2 in $[m]$.

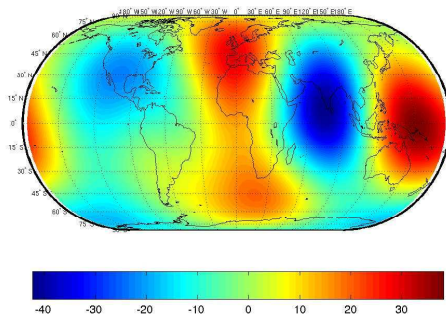


Abb. 13: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 3 in $[m]$.

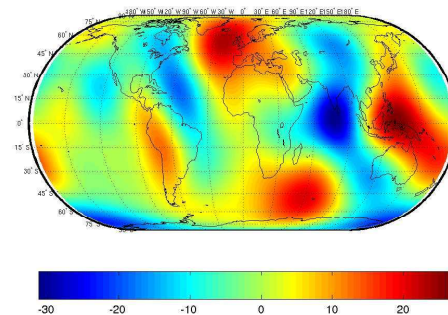


Abb. 14: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 3 in $[m]$.

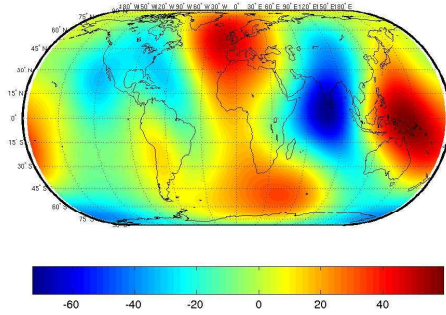


Abb. 15: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 4 in $[m]$.

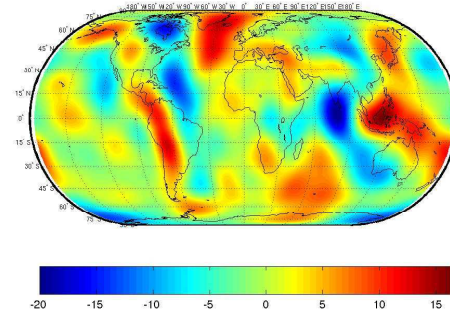


Abb. 16: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 4 in $[m]$.

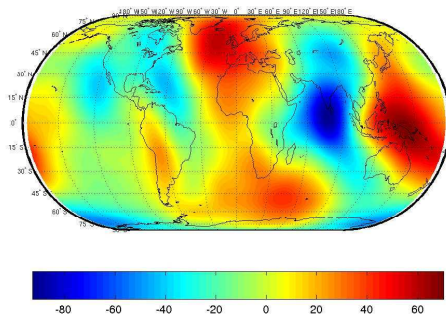


Abb. 17: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 5 in $[m]$.

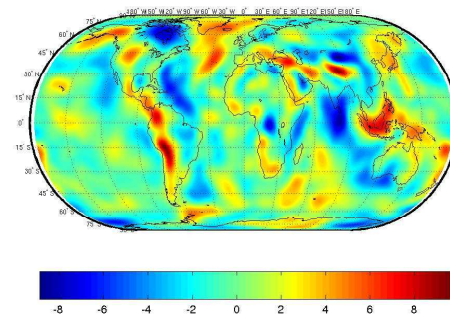


Abb. 18: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 5 in $[m]$.

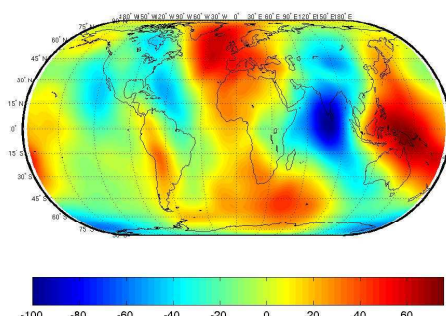


Abb. 19: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 6 in $[m]$.

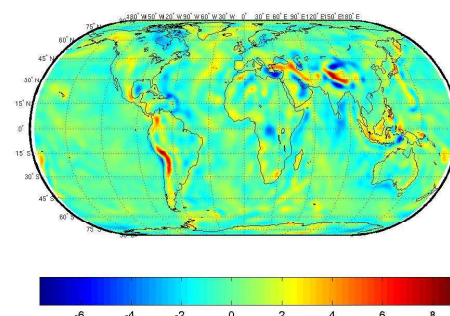


Abb. 20: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 6 in $[m]$.

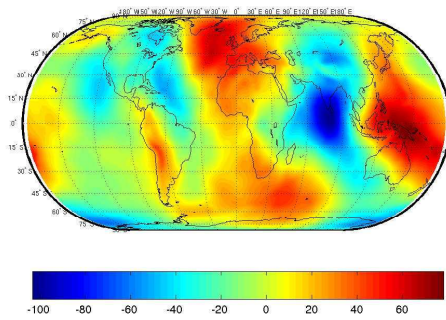


Abb. 21: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 7 in $[m]$.

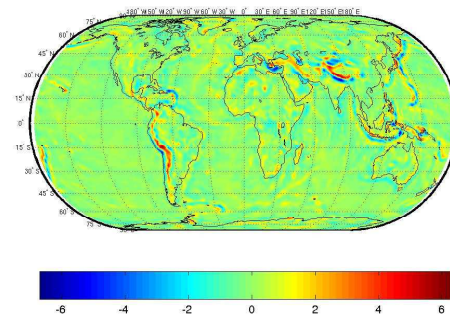


Abb. 22: Detailbereich der Geoidundulation zur Skala 7 in $[m]$.

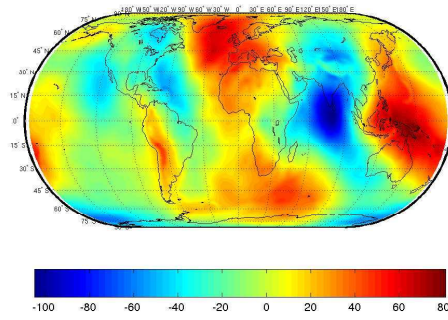


Abb. 23: Geoidundulationen auf Ω_R zur Skala 8 in $[m]$.

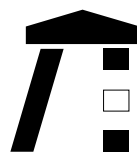
Folgende Berichte sind erschienen:

2003

- Nr. 1 S. Pereverzev, E. Schock.
*On the adaptive selection of the
parameter in regularization of
ill-posed problems*
- Nr. 2 W. Freeden, M. Schreiner.
*Multiresolution Analysis by
Spherical Up Functions*
- Nr. 3 F. Bauer, W. Freeden, M. Schreiner.
*A Tree Algorithm for Isotropic Finite
Elements on the Sphere*
- Nr. 4 W. Freeden, V. Michel (eds.)
Multiscale Modeling of CHAMP-Data
- Nr. 5 C. Mayer
*Wavelet Modelling of the Spherical
Inverse Source Problem with
Application to Geomagnetism*

2004

- Nr. 6 M.J. Fengler, W. Freeden, M.
Gutting
*Darstellung des Gravitationsfelds
und seiner Funktionale mit
Multiskalentechniken*



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Informationen:

Prof. Dr. W. Freeden

Prof. Dr. E. Schock

Fachbereich Mathematik

Technische Universität Kaiserslautern

Postfach 3049

D-67653 Kaiserslautern

E-Mail: freeden@mathematik.uni-kl.de

schock@mathematik.uni-kl.de