



Fraunhofer Institut
Techno- und
Wirtschaftsmathematik

R. Korn

Elementare Finanzmathematik

© Fraunhofer-Institut für Techno- und
Wirtschaftsmathematik ITWM 2002

ISSN 1434-9973

Bericht 39 (2002)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche, schriftliche Genehmigung des Herausgebers ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus in irgendeiner Form durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren zu reproduzieren oder in eine für Maschinen, insbesondere Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache zu übertragen. Dasselbe gilt für das Recht der öffentlichen Wiedergabe.

Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Die Veröffentlichungen in der Berichtreihe des Fraunhofer ITWM können bezogen werden über:

Fraunhofer-Institut für Techno- und
Wirtschaftsmathematik ITWM
Gottlieb-Daimler-Straße, Geb. 49

67663 Kaiserslautern

Telefon: +49 (0) 6 31/2 05-32 42
Telefax: +49 (0) 6 31/2 05-41 39
E-Mail: info@itwm.fraunhofer.de
Internet: www.itwm.fraunhofer.de

Vorwort

Das Tätigkeitsfeld des Fraunhofer Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM umfasst anwendungsnahe Grundlagenforschung, angewandte Forschung sowie Beratung und kundenspezifische Lösungen auf allen Gebieten, die für Techno- und Wirtschaftsmathematik bedeutsam sind.

In der Reihe »Berichte des Fraunhofer ITWM« soll die Arbeit des Instituts kontinuierlich einer interessierten Öffentlichkeit in Industrie, Wirtschaft und Wissenschaft vorgestellt werden. Durch die enge Verzahnung mit dem Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern sowie durch zahlreiche Kooperationen mit internationalen Institutionen und Hochschulen in den Bereichen Ausbildung und Forschung ist ein großes Potenzial für Forschungsberichte vorhanden. In die Berichtreihe sollen sowohl hervorragende Diplom- und Projektarbeiten und Dissertationen als auch Forschungsberichte der Institutsmitarbeiter und Institutsgäste zu aktuellen Fragen der Techno- und Wirtschaftsmathematik aufgenommen werden.

Darüberhinaus bietet die Reihe ein Forum für die Berichterstattung über die zahlreichen Kooperationsprojekte des Instituts mit Partnern aus Industrie und Wirtschaft.

Berichterstattung heißt hier Dokumentation darüber, wie aktuelle Ergebnisse aus mathematischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit in industrielle Anwendungen und Softwareprodukte transferiert werden, und wie umgekehrt Probleme der Praxis neue interessante mathematische Fragestellungen generieren.



Prof. Dr. Dieter Prätzel-Wolters
Institutsleiter

Kaiserslautern, im Juni 2001

Ralf Korn

Elementare Finanzmathematik

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
Exkurs 1: Aktien – Begriffe, Grundlagen und Geschichte	2
1. Wie modelliert man Aktienkurse ?	4
1.1 Endliche Ein-Perioden-Modelle	6
1.2 Endliche Mehr-Perioden-Modelle	13
1.3 Das Black-Scholes-Modell als Grenzwert endlicher Mehr-Perioden-Modelle	18
1.4 Neuere Preismodelle	23
2. Was sind Optionen und wie viel sind sie wert ?	25
2.1 Optionen: Begriffe und Grundlagen	25
Exkurs 2: Historie des Optionshandels	27
2.2 Grundlagen der Optionspreisbestimmung	28
2.3 Der Optionspreis im Binomialmodell	31
2.4 Die Black-Scholes-Formel für europäische Calls und Puts	38
2.5 Modellunabhängige Preisgrenzen für Optionen und die Put-Call-Parität	43
2.6 Exotische Optionen	50
2.7 Das Trinomialmodell als Beispiel unvollständiger Märkte	55
2.8 Weitere Aspekte der Optionsbewertung	56
3. Bestimmung optimaler Investmentstrategien: Portfolio-Optimierung	58
3.1 Der Erwartungswert-Varianz-Ansatz	59
3.2 Erwartungsnutzen-Maximierung	65
3.3 Weitere Aspekte der Portfolio-Optimierung	73
4. Finanzmathematik im Schulunterricht	74
Anhang A: Stochastische Prozesse, bedingte Erwartung und Martingale	75
Anhang B: Simulation von Zufallsgrößen	78
Anhang C: Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben	80
Übungen zur „Elementaren Finanzmathematik“	82
Themengebiet „Zinsen“	83
Themengebiet „Modellierung von Aktienkursen“	84
Themengebiet „Optionen“	86
Themengebiet „Optimales Investment“	87

Elementare Probleme der Finanzmathematik

0. Einleitung

In den vergangenen Jahren hat sich der Handel mit Aktien, Optionen und anderen Arten von Wertpapieren stark in den Vordergrund des öffentlichen Interesses gespielt. Dies hat seine Ursache in spektakulären Neu-Emissionen von Aktien bekannter Unternehmen wie z.B. Deutsche Telekom oder Infineon, der rasanten Entwicklung des deutschen Aktienindex DAX (in beide Richtungen ...), der verstärkten Berichterstattung über die Börsen in den Medien und nicht zuletzt in der Tatsache, dass aufgrund der Rentendiskussion Investment in Aktien, Aktien- und Rentenfonds verstärkt als eine Möglichkeit zur privaten Altersvorsorge angesehen wird. Ein weiterer Punkt scheint auch der zu sein, dass sich viele private Anleger kurzfristig hohe Gewinne durch riskantes Investment in Aktien oder Aktienoptionen erhoffen. Dabei ist auch noch zu bemerken, dass der Anteil des in Aktien und Aktienfonds investierten privaten Vermögens in Deutschland im Vergleich zu den USA oder Großbritannien deutlich geringer ist, es in dieser Beziehung also auch noch Nachholbedarf zu geben scheint.

Während also der Aktienhandel in Deutschland regelrecht aufblüht und auch an Schulen und Universitäten sogenannte *Börsenspiele*, bei denen man ohne Kapitaleinsatz auf spielerische Art Aktienhandel betreiben kann, extrem populär sind, ist es der großen Öffentlichkeit weitgehend verborgen geblieben, dass auch die mathematische Modellierung des Wertpapierhandels (heute allgemein als *Finanzmathematik* bezeichnet) in den vergangenen Jahrzehnten eine rasante Entwicklung vollzogen hat, zur Zeit eines der am stärksten bearbeiteten Gebiete mathematischer Forschung darstellt und deren Resultate tagtäglich von Banken angewendet werden. Es ist hierbei für die Mathematik einer der seltenen Fälle eingetreten, bei dem tatsächlich anspruchsvolle moderne Mathematik angewendet wird (für einen Überblick über die theoretischen Grundlagen und ihre Anwendungen wird auf Korn und Korn (1999) verwiesen).

Die Bedeutung dieser modernen Finanzmathematik wird auch durch die Tatsache unterstrichen, dass sowohl mit H. Markowitz 1990 als auch mit Robert Merton und Myron Scholes 1997 führende Vertreter der Finanzmathematik mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurden.

Die drei wesentlichen Probleme der Finanzmathematik, die in diesem Artikel vorgestellt werden, bestehen in

- der Modellierung von Finanzmärkten und insbesondere der Wertpapierpreise,
- der Bewertung von Optionen und anderen derivativen Wertpapieren,
- der Bestimmung optimaler Investmentstrategien.

Diese Themen werden in den folgenden drei Abschnitten behandelt werden, wobei in Exkursen auch auf historische Aspekte eingegangen wird.

Exkurs 1: Aktien – Begriffe, Grundlagen und Geschichte

Was ist eine Aktie ?

Eine *Aktiengesellschaft* ist (u.a.) dadurch gekennzeichnet, dass ihr Grundkapital in viele kleine Anteile aufgeteilt ist, *die Aktien*. Es gibt sowohl Aktien mit *konstantem Nennwert* (z.B. 5 € pro Stück) als auch sogenannte *Quotenaktien*, bei denen der Inhaber einen festen Anteil (z.B. 1/1000000) am Unternehmen besitzt.

In Deutschland herrschen Aktien mit festem Nennwert vor. Allerdings spielt dieser Nennwert für den tatsächlichen Wert der Aktie – ihren *Preis* oder *Kurs* – keine wesentliche Rolle. Der Aktienkurs ergibt sich vielmehr aus Angebot und Nachfrage nach der entsprechenden Aktie am Aktienmarkt an der Börse.

Dieser Mechanismus von Angebot und Nachfrage wiederum wird ganz wesentlich von zwei Dingen bestimmt:

- der Höhe der jeweiligen Dividendenausschüttung pro Aktie (quasi dem „Aktienzins“), die je nach Ertragslage des Unternehmens schwankt und auch ganz ausfallen kann
- dem (vermeintlichen) Potenzial der Aktie, weitere Kursgewinne zu erzielen, was auch ganz wesentlich von der Einschätzung der Ertragslage des Unternehmens durch den Markt abhängt

Der Name „Aktie“ kommt aus dem Holländischen (dem „Geburtsland“ der Aktie, siehe auch im geschichtlichen Überblick) und leitet sich aus dem lateinischen Wort „actio“ ab, was soviel wie „einklagbarer Anspruch“ bedeutet, und tatsächlich ist eine Aktie ja auch sowas wie ein Anspruch auf einen Teil der Aktiengesellschaft und auf den diesem Teil zustehenden Gewinn. Für weitere rechtliche und wirtschaftliche Details und Hintergründe wird auf die einschlägige Literatur aus dem Bereich der Betriebswirtschaft verwiesen.

Warum benötigt man Aktien ?

Aktien stellen für große Unternehmen und Unternehmungen eine alternative Quelle zur Fremdfinanzierung (also zur Kreditaufnahme) am Kapitalmarkt dar. Die Aktiengesellschaft erhält durch Verkauf ihrer Anteile, der Aktien, Kapital in Höhe des Aktienpreises, das im Gegensatz zum Kredit nicht zurück gezahlt werden muss.

Als Kompensation für dieses gezahlte Kapital erhalten die Aktionäre zum einen die jährlichen Dividendenzahlungen sowie ein Mitspracherecht bei wichtigen Unternehmensentscheidungen auf der einmal jährlich stattfindenden Hauptversammlung aller Aktionäre der Aktiengesellschaft. Allerdings ist dieses Mitspracherecht aufgrund der Größe der Aktiengesellschaften faktisch nur auf einzelne Großaktionäre (also Besitzer sehr großer Aktienpakete oder sogar Besitzer der absoluten Mehrheit der Aktien) beschränkt, da jeder Aktionär pro besessener Aktie eine Stimme enthält. So besitzt die Minorität der Aktionäre zwar Stimmrechte, doch reicht die Gesamtheit ihrer Stimmen in der Regel bei weitem nicht aus, um Beschlüsse durchzusetzen.

Die Ausgabe neuer Aktien oder die Gründung einer Aktiengesellschaft (z.B. durch Umwandlung einer Personengesellschaft, die sich vergrößern will) ist oft dann zweckmäßig, wenn sehr große Summen an Eigenkapital benötigt werden, um ein sehr großes Projekt wie z.B. den Bau

der ersten Eisenbahnlinien, die Gründung der ersten Überseehandelsgemeinschaften oder – als neueres Beispiel – den Bau des Tunnels unter dem Ärmelkanal vorzufinanzieren.

Warum investiert man in Aktien ?

Aktien stellen wegen der Unsicherheit der Höhe der jeweiligen jährlichen Dividende sowie ihrer Kursschwankungen eine sehr riskante Investitionsmöglichkeit dar. Man wird deshalb nur dann Aktien erwerben, wenn man sich beispielsweise anhand seiner persönlichen Einschätzung der zukünftigen Entwicklung des Unternehmens eine hohe Dividendenzahlung und kräftige Kursgewinne der Aktie verspricht, die in der Summe deutlich über dem Ertrag einer risikolosen Investition wie z.B. einer Festgeldanlage liegen. Tatsächlich sind langfristig die Erträge aus Aktieninvestments in der Regel höher als die risikoloser Geldanlagen.

Generell sollte man sich – egal wie gut die persönliche Einschätzung der ausgewählten Aktie(n) ist – immer darüber im Klaren sein, dass keine Aktie sichere Gewinne versprechen kann. Vor jedem Aktieninvestment ist deshalb immer zu prüfen, ob man das zugehörige Risiko auch eingehen kann.

Einige wichtige Daten aus der Geschichte der Aktie:

1602 : Gründung der ersten Aktiengesellschaft der Welt, der „Vereinigte Ostindische Kompanie“, in den Niederlanden zur Finanzierung einer Überseehandelsgemeinschaft

Ende des 17. Jahrhunderts : Zunahme des Aktienhandels vor allem in England und Frankreich

1756 : Handel der ersten deutschen Aktie, der „Preußische Kolonialgesellschaft“, in Berlin

1792 : Gründung (des Vorläufers) der New Yorker Börse, ab 1863 „New York Stock Exchange“

1844 : In England ist es rechtlich möglich, in allen Erwerbszweigen Aktiengesellschaften zu gründen

1848 : Gründung der ersten deutschen Aktienbank in Köln

1884 : Der erste amerikanische Aktienindex, der „Railroad Average“, der Aktien amerikanischer Eisenbahngesellschaften beinhaltet, wird notiert

1929 : Schwarzer Freitag („Börsencrash“) am 25.10.1929 an der New Yorker Börse

1959 : Ausgabe der ersten deutschen Volksaktie (PREUSSAG)

1961 : Ausgabe der zweiten deutschen Volksaktie (VW)

.....

1. Wie modelliert man Aktienkurse ?

Bevor überhaupt an die Bestimmung optimaler Investmentstrategien oder die Bewertung von Optionen gedacht werden kann, muss zunächst als wichtigste Zutat ein Modell für die Aktienkurse gefunden werden. Hier ist es, dem Prinzip *Von der Realität zum Modell* folgend, wichtig, empirische Beobachtungen und Eigenschaften realer Aktienkurse zu erkennen und ins Modell zu übertragen. Wir betrachten hierzu die folgenden beiden Diagramme, die die zeitliche Entwicklung der Kurse von Deutsche Telekom, SAP und der Allianz in der Zeit vom 31.10.1997 bis zum 01.11.1998 zeigen. Die wesentliche Eigenschaft der gezeigten Kurse liegt in ihrer scheinbar zufälligen Entwicklung. So sind zwar bis Anfang Juli 1998 jeweils steigende Tendenzen zu erkennen, doch dies muss nicht notwendig bedeuten, dass man auch über kurze Zeiträume Gewinne erzielt. Investiert man zum Beispiel mitten in der steigenden Phase am 20.04.1998 in die Telekom-Aktie, so muss man dafür 46,65 DM zahlen. Bis zum 27.04.1998 ist der Kurs dann auf 41,20 DM gesunken, was einen kräftigen Verlust darstellt (der allerdings im weiteren Verlauf mehr als kompensiert wird). Hätte man hingegen knapp eine Woche vorher am 14.04.1998 die Aktie zum Kurs von 40,65 DM gekauft, so würde der Kurs von 41,20 DM am 27.04.1998 trotz des oben beschriebenen Einbruchs einen Gewinn bedeuten. Wichtig ist, dass sich hier scheinbar zwei Effekte überlagern, ein **langfristig bestimmender Trend** und **kurzfristige Einflüsse**, die zu lokal stark variierenden Aktienkursen führen.

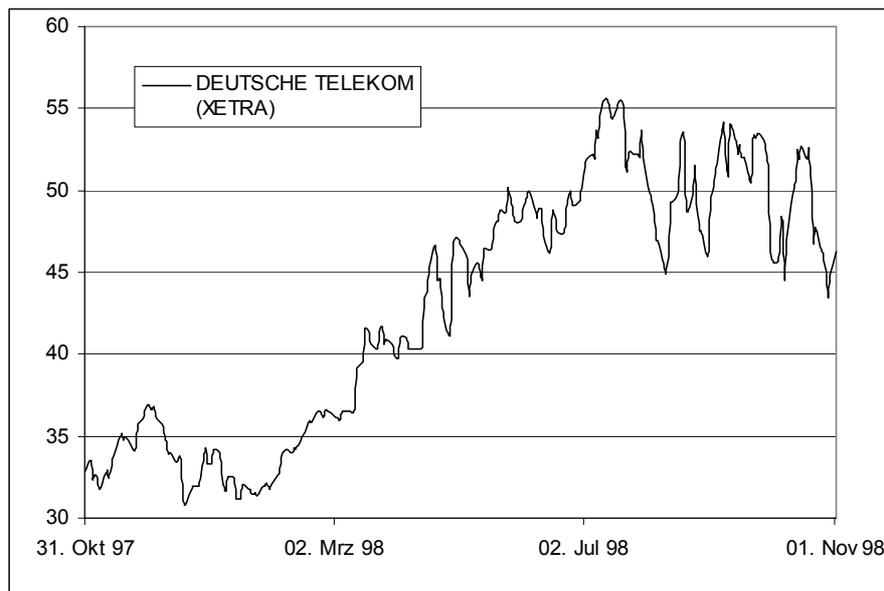


Bild 1: Aktienkursverlauf „Deutsche Telekom“

Diese Erkenntnis wird auch durch die Kursverläufe von Allianz und SAP bestätigt. Auch hier spiegeln sich die starken, kurzfristigen Schwankungen in einem „gezackten“ Kursverlauf wider. Es wäre nun naheliegend, nach zufälligen Funktionen (Realisierungen von „stochastischen Prozessen“) zu suchen, die genau die oben beschriebenen Eigenschaften haben. Die starken lokalen Schwankungen und der gezackte Kursverlauf lassen sich auch beim mathematischen Modell (entsprechender Dimension) für die Brownsche Molekularbewegung, dem sogenannten Wiener Prozess (oder auch: Brownsche Bewegung) beobachten (siehe Korn und

Korn (1999)). Tatsächlich spielt dieses Modell auch eine zentrale Rolle in der Finanzmathematik.

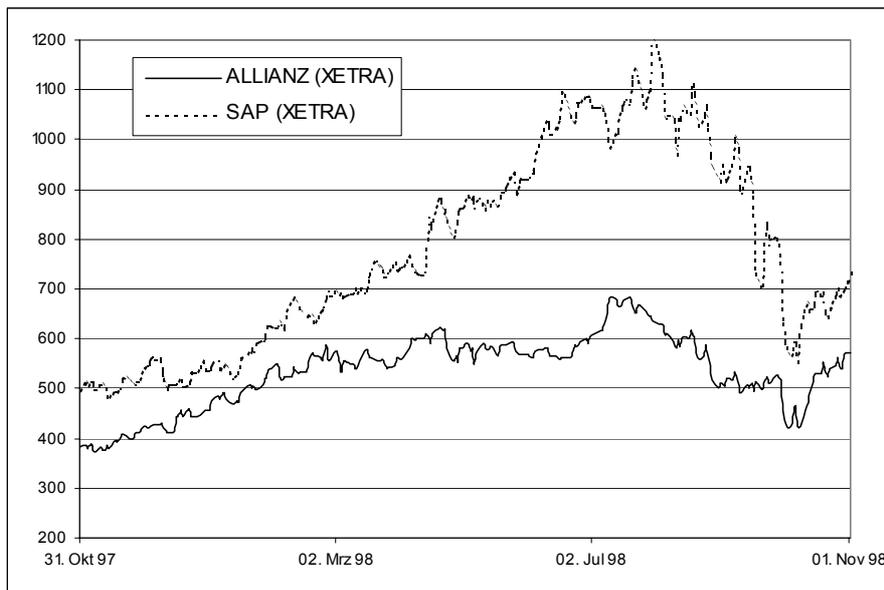


Bild 2: Aktienkursverläufe „Allianz“ und „SAP“

Eine Realisierung des auf diesem Modell basierenden Aktienkursmodells, auf das wir auch in Abschnitt 1.3 eingehen werden, sehen wir in Bild 3.

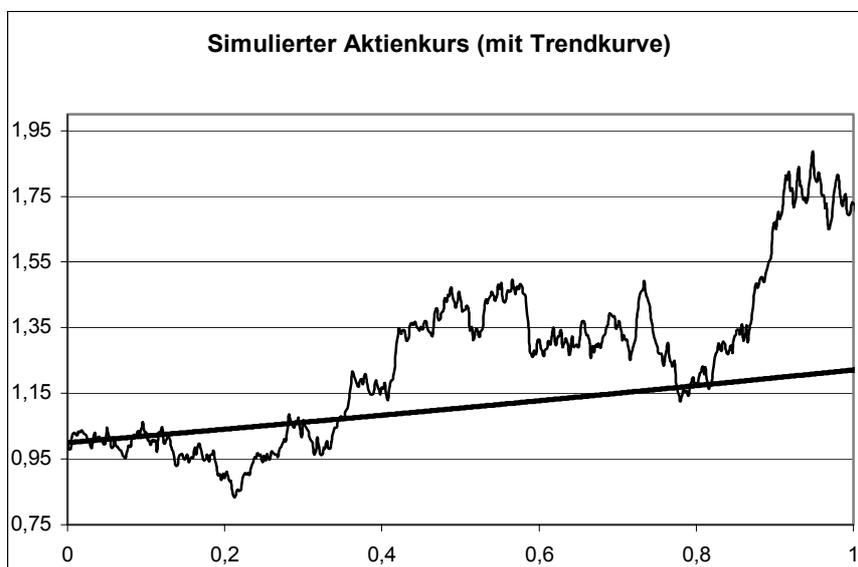


Bild 3: Aktienkursverläufe im „Brownschen Modell“

Allerdings wollen wir vor der näheren Beschreibung des Modells zunächst darauf hinweisen, was bei unkritischer Übernahme eines scheinbar passenden Modells passieren kann. Dies soll zunächst an einem ganz einfachen Modell, einem sogenannten Ein-Perioden-Binomialmodell, demonstriert werden.

1.1 Endliche Ein-Perioden-Modelle

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, dem Ein-Perioden-Binomialmodell. Bei diesem Modell gehen wir davon aus, dass ein Investor bei der Wahl seiner Investmentmöglichkeiten innerhalb eines Zeitraums zwischen dem Halten von Bargeld und der Anlage in eine Aktie wählen kann, deren Kurs sich gemäß dem folgenden Diagramm entwickelt:

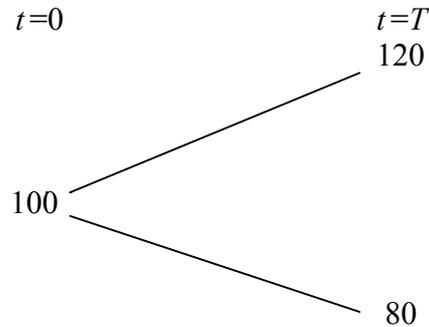


Bild 4: Aktienkurs im Ein-Perioden-Binomialmodell

D.h. der Aktienkurs kann von 100 heute entweder auf 120 am Investmenthorizont steigen oder aber auf 80 fallen. Wichtig ist hierbei, dass zum einen der künftige Kurs der Aktie unsicher ist und es sowohl eine Möglichkeit gibt, dass Aktieninvestment besser als das Halten von Bargeld ist, als auch ein Zustand existiert, in dem Aktieninvestment zu einem Verlust führt. Wäre das Aktieninvestment immer besser als das Halten von Bargeld, so würde man sein ganzes Vermögen in Aktien investieren. Interpretiert man das Halten von Bargeld als Festgeldanlage zum Zins Null, so wäre es dann sogar möglich, durch Geldaufnahme zum gleichen Zinssatz und anschließendes Investment dieses Geldes in die Aktie, einen risikolosen Gewinn ohne Einsatz von eigenem Kapital zu erzielen, denn das geliehene Geld könnte im Investmenthorizont durch Verkauf der zu Beginn der Periode erworbenen Aktien zurück gezahlt werden, wobei sogar noch ein positiver Rest verbliebe. Man spricht dann von einer „**Arbitrage-Möglichkeit**“. Eine solche Arbitrage-Möglichkeit würde aber von allen Marktteilnehmern ausgenutzt werden. Dies wiederum würde so lange zu einer Preisanpassung bei der Aktie zu Beginn der Periode führen, bis die Arbitrage-Möglichkeit verschwunden wäre. Man fordert daher immer im Modell, dass der betrachtete Markt frei von Arbitrage-Möglichkeiten sein soll („Absence of arbitrage“). Mit einer analogen Argumentation darf die Aktienkursentwicklung in obigem Beispiel auch nicht immer schlechter als das Halten von Bargeld sein. Wir werden diese Voraussetzung später noch präzisieren.

Wir betrachten nun ein etwas komplizierteres Ein-Perioden-Modell, in dem man in zwei Aktien (und in Bargeld) investieren kann, deren Kursentwicklungen durch das folgende Diagramm beschrieben sein sollen:

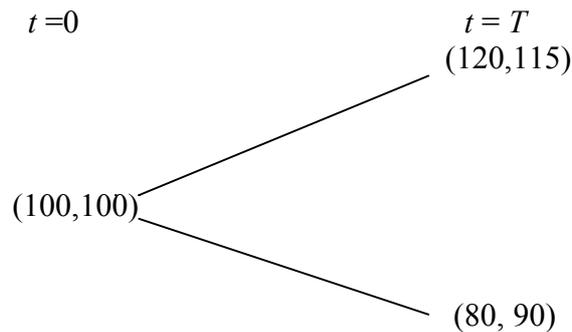


Bild 5: Aktienkurse im Ein-Perioden-Binomialmodell mit zwei Aktien

d.h. entweder steigen beide Aktienkurse oder sie fallen beide gleichzeitig. Vergleicht man dieses Diagramm zum vorherigen Beispiel, so scheint zunächst kein wesentlicher Unterschied vorzuliegen. Die Aktien steigen entweder beide oder fallen gemeinsam. Insbesondere schneidet also keine Aktie in jedem möglichen Zustand besser oder in jedem Zustand schlechter ab als das Halten von Bargeld. Auch dominiert keine Aktie die andere. Zwar steigt die erste Aktie stärker, falls sich die Aktienkurse nach oben bewegen, dafür fällt sie aber auch stärker bei einer negativen Kursentwicklung. Es scheint also auch hier keine der drei Alternativen eine Arbitrage-Möglichkeit zuzulassen. Dies ist aber nur vordergründig so. Will man zum Beispiel bei obigem Modell ein Endvermögen von genau 100 DM erzielen, so lässt sich dies mit folgender Strategie ohne (!) Einsatz von eigenem Kapital ermöglichen:

Kaufe heute 40 Stück der zweiten Aktie, verkaufe 25 Stück der ersten Aktie leer (d.h. der Verkäufer erhält bereits heute die Kaufprämie, muss aber erst am Investmenthorizont die vereinbarte Anzahl von Aktien liefern) und nehme einen Kredit von 1500 DM auf.

Der Wert der gehaltenen Positionen in $t = 0$ (also heute) beträgt dann tatsächlich 0 DM, d.h. es ist kein Eigenkapital nötig, um die vorgegebene Strategie zu verfolgen. Im Endzeitpunkt erhält man dann als Endwert der gehaltenen Positionen jeweils:

- Im Fall gestiegener Aktienkurse: $-1500 - 25 \cdot 120 + 40 \cdot 115 = 100$
- Im Fall fallender Aktienkurse: $-1500 - 25 \cdot 80 + 40 \cdot 90 = 100$

Man erhält also **immer** ein Endvermögen von 100 DM, wobei man im ersten Fall davon profitiert, dass man mehr Anteile der zweiten Aktie besitzt als man von der ersten leerverkauft hat. Deshalb wächst das in die zweite Aktie investierte Vermögen dann stärker als die durch den Anstieg der ersten Aktie verursachten Schulden. Im zweiten Fall macht der stärkere Verlust der ersten Aktie die getätigten Leerverkäufe so profitabel, dass die Verluste aus dem Kursverfall der zweiten Aktie mehr als kompensiert werden. Allgemein kann man bei obiger Konstellation ein beliebiges (!) Endvermögen X ohne eigenen Kapitaleinsatz erzielen, indem man die in $t = 0$ zu haltende Strategie $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ als eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \varphi_0 + 100 \varphi_1 + 100 \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_0 + 120 \varphi_1 + 115 \varphi_2 &= X \\ \varphi_0 + 80 \varphi_1 + 90 \varphi_2 &= X \end{aligned}$$

bestimmt. Hierbei beschreibt die erste Gleichung gerade die Bedingung, dass der Gesamtwert der zu Beginn gehaltenen Positionen gleich Null ist. Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich aus der Forderung, dass das Endvermögen unabhängig vom möglichen Zustand gleich X sein soll. Wie man leicht nachprüft ist die Systemmatrix des Gleichungssystems regulär. Deshalb lässt sich zu einem beliebigen Anfangsvermögen x (also der rechten Seite der ersten Gleichung) eine gewünschte Endauszahlung X (die sogar je nach Zustand verschieden gewählt werden kann) mittels Halten einer geeigneten Strategie, nämlich der eindeutigen Lösung $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ des Gleichungssystems, erzeugen.

Es bleiben nun zwei Fragen:

- Wie müssen sich die Preise im obigen Modell entwickeln, damit keine Arbitrage-Möglichkeit vorhanden ist ?
- Was ist der anschauliche Grund für das Vorhandensein von Arbitrage-Möglichkeiten in obigem Beispiel ?

Zur Beantwortung der ersten Frage ist es natürlich notwendig, dass die Systemmatrix des obigen Gleichungssystems, das die Wertentwicklung einer Handelsstrategie mittels der Preiszuwächse beschreibt, **nicht** regulär ist. Mehr noch: Hält man die Null in der ersten Komponente der rechten Seite fest, so darf höchstens dann eine Lösung $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ des Gleichungssystems existieren, wenn die beiden übrigen Komponenten der rechten Seite verschiedenes Vorzeichen haben. Löst man nun die erste Gleichung nach φ_0 auf und setzt den entstandenen Ausdruck in die beiden anderen Gleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 20\varphi_1 + 15\varphi_2 &= X_1 \\ -20\varphi_1 - 10\varphi_2 &= X_2 \end{aligned}$$

wenn man bereits mit verschiedenen rechten Seiten X_1 und X_2 arbeitet. Die obige Forderung, dass nur höchstens dann eine Lösung $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ existiert, wenn X_1 und X_2 verschiedenes Vorzeichen besitzen, kann offenbar nur erfüllt werden, wenn die zweite Zeile der Matrix des neuen 2×2 – Systems ein negatives Vielfaches der ersten ist, also die Vektoren der beiden Zuwächse auf einer durch den Ursprung laufenden Geraden und gleichzeitig in verschiedenen Quadranten liegen, d.h. also im Beispiel, wenn die zweite Aktie im Falle des Kursverlustes auf 85 (und nicht auf 90) abrutschen würde. Drückt man diesen Sachverhalt etwas allgemeiner aus, so erhält man:

„Kein Arbitrage“: Geometrische Interpretation

Im obigen Ein-Perioden ist keine Arbitrage-Möglichkeit vorhanden, wenn die Gerade, die durch die beiden Vektoren der Zuwächse geht, durch den Ursprung (0,0) läuft und dieser die beiden Zuwächse trennt, er also im relativen Innern des Geradenabschnitts liegt, der durch die konvexe Hülle der beiden Zuwächse erzeugt wird.

Dies ist kein Zufall sondern Spezialfall einer tieferen Beziehung zwischen den geometrischen Eigenschaften der Zuwächse der Aktienkurse und dem Nicht-Vorhandensein von Arbitragemöglichkeiten, der unten verallgemeinert wird. Er wird im Beispiel auch im Bild 6 illustriert,

in dem die nicht durch den Ursprung laufende Verbindungsgerade zwischen den beiden Aktienkurszuwächsen eine Arbitragemöglichkeit signalisiert, während die durch den Ursprung laufende Gerade anzeigt, dass das zugehörige Modell arbitragefrei ist.

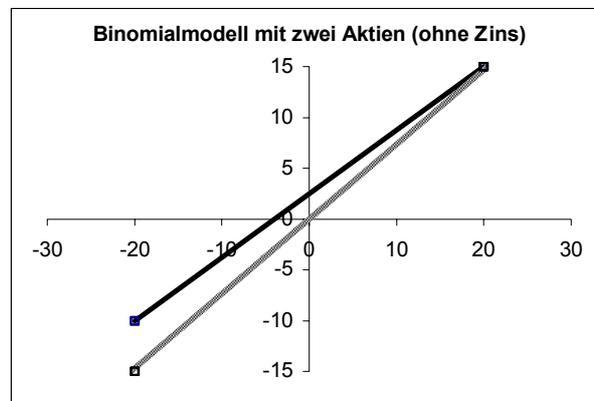


Bild 6: Aktienkurszuwächse und Arbitrageüberprüfung

Man kann die obige geometrische Interpretation auch auf algebraische Art und Weise auffassen. Sie besagt nämlich folgendes: Ist es möglich, ein Paar (α_1, α_2) zu finden, so dass das Skalarprodukt dieses Pairs mit den Kurszuwächse der Aktien unabhängig vom jeweiligen Zustand (Kursanstieg oder -verfall) nicht-negativ ist, so muss das Skalarprodukt in allen Zuständen immer gleich Null sein, allgemeiner:

„Kein Arbitrage“: Algebraische Interpretation

Im obigen Ein-Perioden ist keine Arbitrage-Möglichkeit vorhanden, wenn für die beiden Vektoren $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ der Zuwächse der Aktien (wobei die jeweils erste Komponente dieser Vektoren die Zuwächse der ersten Aktie und die zweite Komponente die Zuwächse der zweiten Aktie enthält) und alle Paare $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ gilt:

$$\alpha' Y^{(i)} \geq 0 \text{ für } i = 1, 2 \Rightarrow \alpha' Y^{(i)} = 0 \text{ für } i = 1, 2.$$

Bevor wir auf eine Verallgemeinerung dieser beiden Interpretationen eingehen, wollen wir noch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Konsequenz aus dem Nicht-Vorhandensein von Arbitragemöglichkeiten in obigem Beispiel ziehen. Dies ist auf den ersten Blick überraschend, da ja bisher die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der beiden Zustände eigentlich keine Rolle spielten außer der, dass beide Zustände möglich sein sollen.

„Kein Arbitrage“: Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

Im obigen Ein-Perioden ist keine Arbitrage-Möglichkeit vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ für das Eintreffen der beiden möglichen Zuwächse so gewählt werden können, dass mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß Q gilt:

$$E_Q(Y) := qY^{(1)} + (1 - q)Y^{(2)} = 0$$

Zwar werden wir auch diese Beziehung unten noch genauer beweisen, aber man kann sofort sehen, dass die obige Forderung an den Erwartungswert die Voraussetzung der geometrischen Interpretation impliziert. Sie besagt nämlich genau, dass es eine Konvexkombination der beiden möglichen Vektoren der Zuwächse gibt, die gleich dem Nullvektor ist.

Des weiteren lässt sie sich so interpretieren, dass eine Einschätzung der zukünftigen Kursentwicklung möglich ist, nach der der mittlere Zuwachs in den Aktien gleich dem des Bargelds (also gleich Null) ist. So gesehen haben also alle Investmentmöglichkeiten – Bargeld und Aktien – den gleichen mittleren Wertzuwachs. Legt man diese Einschätzung seiner Marktmodellierung zugrunde (d.h. wählt man das Wahrscheinlichkeitsmaß Q im Modell), so spricht man von einem **risiko-neutralen Markt**, und Q heißt dann ein **risiko-neutrales Maß**. Dieses Maß wird im weiteren Verlauf (insbesondere bei der Optionsbewertung) noch eine große Rolle spielen.

Das oben beschriebene Ein-Perioden-Modell ist für viele Eigenschaften des allgemeinen Ein-Perioden-Modells typisch. Dies wird sich auch zeigen, wenn wir die obigen verschiedenen Interpretationen im allgemeinen Fall auf ihre Beziehungen untereinander untersuchen werden. Um diesen allgemeinen Fall untersuchen zu können, benötigen wir zunächst die Beschreibung des allgemeinen Ein-Perioden-Marktes.

Voraussetzungen Allgemeiner Ein-Perioden-Markt

(Ω, f, P) Sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit, $P(\omega) > 0$ für alle. Es gibt also nur endlich viele mögliche Zustände des Marktes am Ende der Periode, die aber alle eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen. Die Aktienpreise seien durch eine $(k+1)$ -dimensionale Zufallsvariable S beschrieben, und es gelte:

- $S(0)$ sei zur Zeit $t = 0$ bekannt
- $S_j(T, \omega) > 0$ für alle, $j = 1, \dots, k$ („positive Preise“)
- $S_0(T, \omega) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$ („Bargeld“)

Insbesondere haben wir also unter den obigen Annahmen keine hellseherischen Fähigkeiten, da wir die Aktienkurse zur Zeit T als Zufallsvariable modellieren. Allerdings nehmen wir an, dass die Menge aller möglichen verschiedenen Werte der Kurse endlich und bekannt ist.

Der Investor hat nun die Möglichkeit, in $t = 0$ sein Anfangsvermögen auf die verschiedenen Aktien aufzuteilen bzw. Teile davon als Bargeld zu halten. Hierbei werden negative Anzahlen als Kredit oder Leerverkauf interpretiert. Unter einer **Handelsstrategie** verstehen wir nun einen $(k+1)$ -dimensionalen Vektor $\psi(0)$, dessen einzelne Komponenten die jeweils gehaltenen Stückzahlen der einzelnen Aktien (bzw. des Bargelds) angeben. Das zugehörige Anfangs- und das zugehörige Endvermögen werden mit $V^\psi(0)$ bzw. $V^\psi(T)$ bezeichnet und sind durch

$$V^\psi(0) = \sum_{i=0}^k \psi_i(0) S_i(0), \quad V^\psi(T, \omega) = \psi_0(0) + \sum_{i=1}^k \psi_i(0) S_i(T, \omega)$$

gegeben. Man beachte wieder, dass das (zukünftige) Endvermögen eine Zufallsvariable ist.

Die erste wichtige Definition, die wir benötigen, ist eine formale Definition der Arbitragemöglichkeit:

Definition 1.1

Eine Handelsstrategie $\psi(0)$ heißt eine **Arbitragemöglichkeit**, falls für das zugehörige Anfangs- bzw. Endvermögen gelten:

$V^\psi(0) = 0$ **und** $V^\psi(T, \omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei sogar $V^\psi(T, \omega) > 0$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$ gelten muss.

Eine Arbitragemöglichkeit ist also eine Strategie, die man ohne Eigenkapital verfolgen kann, die nie zu Schulden, aber im günstigsten Fall zu einem positiven Endvermögen führt. Man hat somit ohne Risiko „Geld aus nichts“ gemacht. Wäre eine solche Möglichkeit am Markt (über längere Zeit) vorhanden, so würden dies alle Marktteilnehmer merken, und die Preise würden dann durch den Mechanismus von Angebot und Nachfrage so angepasst werden, bis die Arbitragemöglichkeit verschwunden wäre. Man betrachtet daher in der Theorie nur arbitragefreie Märkte.

Der folgende Satz gibt eine umfassende Charakterisierung arbitragefreier Märkte, die alle obigen Charakterisierungen der Arbitragefreiheit beinhaltet. Um ihn formulieren zu können benötigen wir noch eine

Bezeichnung

Die konvexe Hülle $\text{conv}\{Y(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ der Kurszuwächse $Y(\omega)$ mit

$$Y(\omega) := (S_1(T, \omega) - S_1(0), \dots, S_k(T, \omega) - S_k(0))'$$

ist definiert durch

$$\text{conv}\{Y(\omega) \mid \omega \in \Omega\} := \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega Y(\omega), \text{ wobei } \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega = 1, \lambda_\omega \geq 0 \right\}.$$

Das relative Innere dieser konvexen Hülle, $\text{ri}(\text{conv}\{Y(\omega) \mid \omega \in \Omega\})$, ist durch all die Punkte aus der konvexen Hülle gegeben, bei denen sämtliche Koeffizienten λ_ω in der Summendarstellung positiv sind.

Satz 1.2 „Arbitragefreie Ein-Perioden-Modelle“

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Das allgemeine Ein-Perioden-Modell ist arbitragefrei.
- ii) Der Nullvektor wird von der konvexen Hülle der möglichen Aktienzuwächse überdeckt. Genauer, es gilt: $0 \in \text{ri}(\text{conv}\{Y(\omega) \mid \omega \in \Omega\})$
- iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}^k$ gilt: $\alpha' Y(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \alpha' Y(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
- iv) Es existiert ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q (d.h. hier es gilt $Q(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$) mit $E_Q(Y) = 0$.

Da dieser Satz von fundamentaler Bedeutung ist, wollen wir hier sogar seinen Beweis führen.

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nach folgendem Schema:

$$\text{ii) } \Leftrightarrow \text{iv) } \Rightarrow \text{i) } \Rightarrow \text{iii) } \Rightarrow \text{iv) }$$

a) Da Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß sein soll, folgt aus iv) sofort ii), denn der Erwartungswert ist eine Konvexkombination der Zuwächse, bei der alle Koeffizienten (nämlich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $Q(\{\omega\})$) strikt positiv sind. Gilt umgekehrt ii), so wählt man einfach die Koeffizienten λ_ω , mit deren Hilfe sich der Nullvektor als Konvexkombination der Zuwächse darstellen lässt und setzt

$$Q(\{\omega\}) := \lambda_\omega .$$

Mit diesem Wahrscheinlichkeitsmaß (die nötigen Eigenschaften, die ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum definieren, folgen aus den Eigenschaften der λ_ω) folgt dann iv).

b) Es sei nun iv) vorausgesetzt. Dann folgt insbesondere

$$(+)\quad E_Q(S_j(T)) = S_j(0) \quad \forall j = 0, 1, \dots, k .$$

Es sei nun $V^\psi(0) = 0$ und $V^\psi(T, \omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und eine Handelsstrategie $\psi(0)$ erfüllt. Dann folgt mit Gleichung (+) die Gleichung

$$E_Q(V^\psi(T)) = \sum_{j=0}^k \psi_j(0) E_Q(S_j(T)) = \sum_{j=0}^k \psi_j(0) S_j(0) = V^\psi(0) = 0 ,$$

was dann aber mit der Annahme der Nicht-Negativität des Endvermögens auf

$$V^\psi(T, \omega) = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

führt. Somit existiert keine Arbitragemöglichkeit, d.h. i) gilt.

c) Wir zeigen zunächst, dass die Gültigkeit von i) die folgende Hilfsaussage impliziert:

(*) Gilt für eine Handelsstrategie $\psi(0)$ die Beziehung $V^\psi(T, \omega) - V^\psi(0) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so muss bereits $V^\psi(T, \omega) - V^\psi(0) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gelten .

Dies ist leicht einzusehen. Wäre nämlich für ein $\omega \in \Omega$ die echte Ungleichung „>“ gültig, so rechnet man leicht nach, dass die Handelsstrategie $\psi^*(0)$, gegeben durch

$$\psi^*_i(0) = \psi_i(0), \quad i = 1, \dots, k, \quad \psi^*_0(0) = -\sum_{i=1}^k \psi_i(0) S_i(0),$$

eine Arbitragemöglichkeit darstellt. Hieraus folgern wir nun Aussage iii): Wir nehmen dazu an, dass ein Vektor $\alpha \in \mathbf{R}^k$ existiert mit

$$(&) \quad \alpha' Y(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{und} \quad \alpha' Y(\bar{\omega}) > 0 \quad \text{für ein } \bar{\omega} \in \Omega .$$

Aus dem Vektor α mit Eigenschaft (&) lässt sich nun ein Widerspruch zur Aussage (*) herleiten. Wählt man nämlich

$$\psi_i(0) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \psi_0(0) = 0 ,$$

so folgen

$$V^\psi(T, \omega) - V^\psi(0) \geq 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega \quad \text{und} \quad V^\psi(T, \bar{\omega}) - V^\psi(0) > 0$$

wegen Eigenschaft (&), was dann den gewünschten Widerspruch zu (*) darstellt. Folglich kann also kein Vektor $\alpha \in \mathbf{R}^k$ mit Eigenschaft (&) existieren, womit iii) gezeigt wäre.

d) Es bleibt noch die letzte Implikation zu zeigen. Wir benötigen hierzu wieder ein Hilfsresultat, dass wir allerdings diesmal nicht beweisen wollen. Es folgt direkt aus dem Lemma von Farkas, das in jedem beliebigen Buch der linearen Optimierung nachzuschlagen ist. Das benötigte Hilfsresultat lautet:

Sei $M \in \mathbf{R}^{k,N}$. Dann gilt entweder Aussage a) oder Aussage b), wobei

a) $Mx = 0$ besitzt eine Lösung $x^* \in \mathbf{R}^N$, die nur strikt positive Komponenten hat.

b) Es existiert ein $\alpha \in \mathbf{R}^k$ mit $\alpha' M \geq 0$ und $\alpha' M \neq 0$.

Aus der Annahme der Gültigkeit von iii) folgt direkt, dass für die aus allen möglichen Kurszuwächsen gebildete Matrix $M = (Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_N))$ die Aussage a) im obigen Hilfsresultat gilt, wobei die Elemente $\omega \in \Omega$ in beliebiger Weise durchnummeriert worden sind. Mit dem Vektor x^* aus a) definieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$Q(\omega_i) := \frac{x_i^*}{\sum_{j=1}^N x_j^*} > 0.$$

Offenbar ist Q zu P äquivalent, und es gilt

$$E_Q(Y) = \sum_{i=1}^N Y(\omega_i) \frac{x_i^*}{\sum_{j=1}^N x_j^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N x_j^*} Mx^* = 0.$$

Somit ist auch die letzte gewünschte Implikation gezeigt und der Beweis vollständig. □

1.2 Endliche Mehr-Perioden-Modelle

Die offensichtliche Verallgemeinerung der Ein-Perioden-Modelle besteht in den Mehr-Perioden-Modellen, wobei wir annehmen, dass Handel zu den Zeitpunkten $\{0, 1, \dots, T\}$ möglich sei. Wir betrachten wieder einen Markt, an dem d Aktien gehandelt werden und die Möglichkeit einer risikolosen Geldanlage besteht. Allerdings benötigen wir noch einige allgemeinere Definitionen und Konzepte, da wir ja jetzt ein Zufallsexperiment im Zeitablauf, die zeitliche Entwicklung der Aktienkurse, beobachten.

Voraussetzungen Allgemeiner T -Perioden-Markt

(Ω, \mathcal{F}, P) sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| = N$, $P(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Es gibt also wieder nur endlich viele mögliche Zustände des Marktes am Ende der Periode, die alle eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen. Die zeitliche Entwicklung der Wertpapierpreise sei durch einen $(k+1)$ -dimensionalen stochastischen Prozess $S = \{S(t), t \in \{0, 1, \dots, T\}\}$ beschrieben, und es gelte:

- $S(0)$ sei zur Zeit $t = 0$ bekannt
- $S_j(t, \omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, $j = 1, \dots, k$ („positive Preise“)
- $S_0(t, \omega) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ („Bargeld“)

Die Investoren müssen ihre Entscheidungen über ihre Kapitalanlage auf der Basis der Beobachtung der gegenwärtigen und vergangenen Wertpapierpreise treffen. Es stehen keine weiteren Informationen (wie z.B. Insiderinformationen) zur Verfügung. Wir modellieren dies dadurch, dass die Handelsstrategien alle adaptiert an die von den Preisen erzeugte Filterung

$$f_t := \sigma\{S(0), \dots, S(t)\}, \quad t = 0, 1, \dots, T \quad \text{mit} \quad f_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad f_T = \mathcal{F}$$

sein sollen (siehe unten).

Der Investor hat nun die Möglichkeit, in $t = 0, 1, \dots, T-1$ sein Vermögen auf die verschiedenen Aktien aufzuteilen bzw. Teile davon als Bargeld zu halten.

Eine **Handelsstrategie** wird als ein $(k+1)$ -dimensionaler stochastischer, an die Filterung f_t adaptierter Prozess $\psi(t)$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, definiert (d.h. $\psi(t)$ muss f_t -messbar sein). Wieder stellen dessen einzelne Komponenten die jeweiligen gehaltenen Stückzahlen der einzelnen Aktien (bzw. des Bargelds) dar, wobei die Entscheidung über die zu haltenden Stückzahlen $\psi(t)$ immer im Zeitpunkt t **nach** der Beobachtung der Wertpapierpreise $S(t)$ getroffen werden muss. Diese Stückzahlen bleiben dann bis zur nächsten Umschichtung im Zeitpunkt $t+1$ konstant.

Der zugehörige **Vermögensprozess** wird mit $V^\psi(t)$ bezeichnet und durch

$$V^\psi(t) = \sum_{i=0}^k \psi_i(t) S_i(t), \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$V^\psi(T) = \sum_{i=0}^k \psi_i(T-1) S_i(T)$$

definiert. Wir fordern nun, dass sich der Investor **selbst-finanzierend** verhalten muss, d.h. sein Vermögen vor einer Umschichtung ist gleich dem nach der Umschichtung, also

$$\sum_{i=0}^k \psi_i(t-1) S_i(t) = \sum_{i=0}^k \psi_i(t) S_i(t), \quad t = 2, \dots, T-1.$$

Bemerkung:

Zwar ist die Verwendung der Begriffe „Filterung“, „messbar“ und „ σ -Algebra“ für die Kürze der Formulierung der Voraussetzungen, die wir an die Handelsstrategien stellen sehr von Vorteil, doch werden hierdurch auch wieder technische Begriffe eingeführt, die man mittels einer längeren Erklärung oder aber einer vereinfachten anschaulichen Beschreibung umgehen könnte. So bedeutet in unserem einfachen Rahmen die Forderung, dass die Handelsstrategie $\psi(t)$ an die Filterung f_t adaptierter stochastischer Prozess $\psi(t)$ ist, lediglich, dass die Werte der Zufallsvariablen $\psi(t)$ eine Funktion der bis zum Zeitpunkt t beobachteten Wertpapierpreise $S(0), \dots, S(t)$ sein soll. Dies impliziert auch, dass die Anzahl der möglichen Werte von $\psi(t)$ mit der Zeit t wächst oder konstant bleibt. Die Filterung, also die aufsteigende Folge der mit wachsender Zeit immer größer werdenden σ -Algebren f_t , stellt hierbei nichts anderes als den durch Beobachtung der Aktienpreise gewonnenen Informationsfluss dar, der dem Investor als Basis seiner Entscheidungen dient. Man könnte also im Schulunterricht auch mit einer solch verbalen Umschreibung auskommen, um die Einführung zusätzlicher technischer Hilfsmittel zu vermeiden.

Uns interessiert auch hier wieder die Frage, welche Klasse von Modellen überhaupt arbitragefrei ist, also welche Klasse ein zulässiges Aktienmodell darstellt. Hierbei wird auch wieder das risiko-neutrale Maß eine wichtige Rolle spielen. Allerdings benötigen wir zu seiner Definition eine weitere Klasse von stochastischen Prozessen, die der Martingale.

Definition 1.3

Ein an eine Filterung f_t adaptierter stochastischer Prozess $M(t)$ heißt **Martingal**, falls für $s \geq t$

$$M(t) = E(M(s) | f_t)$$

gilt. Insbesondere folgt daraus auch $E(M(t)) = E(M(0))$ für alle $t = 1, \dots, T$.

Die definierende Eigenschaft eines Martingals besagt, dass der Erwartungswert des Prozesses gegeben die beobachtete Information bis zur Gegenwart gerade gleich dem gegenwärtigen Wert ist (zur Definition der bedingten Erwartung siehe Anhang A). Egal an welchem Punkt der Zukunft man sich also befindet, man wird von dort aus immer im Mittel genau so viel Gewinn wie Verlust in der weiteren Zukunft machen. Insofern ist also ein Martingal eine Verallgemeinerung eines stochastischen Prozesses mit konstantem Erwartungswert. Typische Beispiele für Martingale sind die Vermögensverläufe eines Spielers, der an **fairen** Glücksspielen teilnimmt. Das einfachste solche Spiel ist der faire Münzwurf, bei dem ein Spieler immer eine DM zahlt, wenn *Kopf* oben liegt und eine DM erhält, wenn *Zahl* erscheint. Weitere Eigenschaften von Martingalen finden sich im Anhang A.

Mit Hilfe des Martingalbegriffs lässt sich nun auch im Mehrperioden-Fall ein risiko-neutrales Maß definieren:

Definition 1.4 „Äquivalentes Martingalmaß“

Ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt ein **äquivalentes Martingalmaß** oder auch **risiko-neutrales Maß**, falls die (abgezinsten) Aktienkurse $S_i(t)$ ($=S_i(t)/S_0(t)$) Martingale bezüglich dem Maß Q sind, d.h. es gilt:

$$S_i(t) = E_Q(S_i(s) | f_t) \text{ für } s \geq t \in \{0, 1, \dots, T\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Wir haben nun die nötigen Definitionen beisammen, und die im Ein-Perioden-Modell geleistete Arbeit zahlt sich jetzt aus. Wir müssen quasi nur arbitragefreie Ein-Perioden-Modelle geeignet „zusammen kleben“. Hierzu müssen wir noch zu den einzelnen Zeitpunkten $t = 1, \dots, T-1$ die jeweils möglichen Ereignisse definieren. Wir betrachten hierzu die Folge der minimalen Zerlegungen P_t von f_t gegeben durch

$$P_t = \left\{ A_1, \dots, A_{n_t} \mid A_i \in f_t, f = \bigcup_{i=1}^{n_t} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \exists \text{ kein } \emptyset \neq A \in f_t \text{ mit } A \subset A_i \right\}$$

(also die Menge aller der Mengen, die zu f_t gehören und in f_t nicht weiter zerlegbar sind) und erhalten den folgenden Satz über die Charakterisierung arbitragefreier endlicher Mehr-Perioden-Modelle.

Satz 1.5 „Arbitragefreie endliche Mehr-Perioden-Modelle“

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Das oben beschriebene Aktienmarktmodell ist arbitragefrei.
- ii) Für alle $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, $A \in P_t$ gilt: $0 \in \text{ri}(\text{conv}\{Y_{t+1}(\omega) \mid \omega \in A\})$
- iii) Für alle $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, $A \in P_t$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\alpha' Y_{t+1}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in A \Rightarrow \alpha' Y_{t+1}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in A$$
- iv) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q .

Beweis(skizze):

Wir verwenden das Beweisschema $i) \Rightarrow iii) \Leftrightarrow ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$. Hierbei gilt dann:

a) Die Beziehung „ $i) \Rightarrow iii)$ “ folgt wie im Beweisteil c) von Satz 1.2, wenn man jetzt nur die $\omega \in A$ betrachtet und sich somit auf den Teilraum A von Ω einschränkt. Der Widerspruch im Beweis durch das Konstruieren einer Arbitragestrategie muss hier nur soweit modifiziert werden, dass der in $t+1$ erzielte Arbitragegewinn sich mittels sicherem Investment bis in den Zeithorizont T weitertransportieren lässt (und sich ein „Anfangsvermögen“ von 0 in t natürlich immer durch die Nullstrategie bis t (also kein Investment vor t) erzeugen lässt).

b) Um die Äquivalenz „ $iii) \Leftrightarrow ii)$ “ zu zeigen benötigen wir den folgenden allgemeinen *Trennungssatz* (siehe Rockafellar „Convex Analysis“, S.96):

Für zwei nicht-leere konvexe Mengen C_1, C_2 gilt:

$\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) = \emptyset \Leftrightarrow$ *Es existiert eine Hyperebene, die C_1, C_2 trennt (d.h. es existiert ein Vektor α mit $\alpha'x < 0 < \alpha'y$ für alle $x \in C_1, y \in C_2$)*

Hieraus folgt die Behauptung sofort für die Wahlen $C_1 = \{0\}$ und $C_2 = \text{conv}\{Y_{t+1}(\omega) \mid \omega \in A\}$.

c) Um „ $ii) \Rightarrow iv)$ “ zu zeigen muss im wesentlichen der entsprechende Beweisteil aus Satz 1.2 geeignet verwendet werden. Hierzu sei zunächst zu festem $\omega \in \Omega$ eine Folge

d) Sei zum Beweis von „ $iv) \Rightarrow i)$ “ Q ein äquivalentes Martingalmaß und $\psi(\cdot)$ eine Handelsstrategie mit $V^\psi(0) = 0, V^\psi(T) \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_Q(V^\psi(T)) &= E_Q(E_Q(V^\psi(T) \mid \mathcal{F}_{T-1})) = E_Q(\psi(T-1)' S(T-1)) = E_Q(V^\psi(T-1)) = \\ &= E_Q(E_Q(V^\psi(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-2})) = E_Q(E_Q(\psi(T-1)' S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-2})) = E_Q(E_Q(\psi(T-2)' S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-2})) = \\ &= E_Q(\psi(T-2)' E_Q(S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-2})) = E_Q(\psi(T-2)' S(T-2)) = E_Q(V^\psi(T-2)) = \dots = E_Q(V^\psi(0)) = 0, \end{aligned}$$

woraus wegen der Nichtnegativität des Endvermögens sofort $V^\psi(T) = 0$ folgt. Man beachte, dass in der obigen Gleichungskette sowohl die Martingaleigenschaft der Wertpapierpreise unter Q als auch – beim Schritt von $T-1$ zu $T-2$ exemplarisch – die Eigenschaft einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie verwendet wurde.

Bemerkungen

1. Endliche Märkte mit risikoloser Geldanlage

Bisher haben wir immer Marktmodelle betrachtet, bei denen das Halten von Bargeld die Alternative zum riskanten Aktieninvestment darstellte. Dies ist in der Praxis natürlich nicht so, da es dort bessere Alternativen gibt, die eine risikolose Geldanlage zu einer festen Verzinsung ermöglichen wie z.B. Festgeld oder Sparbuch. Falls wir ein Modell mit einer solchen Möglichkeit betrachten wollen, modellieren wir dies, indem wir den Preis des „0.“Wertpapiers, S_0 , als eine entsprechende deterministische Funktion der Zeit $S_0(t)$ wählen. Die oben gegebenen Charakterisierungen der Arbitragefreiheit bleiben dann mit einer kleinen Änderung richtig: In der Definition des äquivalenten Martingalmaßes ist nun zu fordern, dass die mit $S_0(t)$ abgezinsten Aktienpreisprozesse

$$\hat{S}_i(t) := \frac{S_i(t)}{S_0(t)}, \quad i = 1, \dots, k$$

Martingale bezüglich dem äquivalenten Martingalmaß Q sein sollen.

2. Ganzzahligkeit der Zeit

Bisher haben wir immer ganzzahlige Zeitpunkte betrachtet. Es ist natürlich kein Problem, zu einer anderen Zeitskala zu wechseln z.B. von den bisher ganzzahligen Tagen zu Wochen. Dann erhält man die Tage als entsprechende Bruchteile der Wochen. Es hat sich deshalb in der Literatur eingebürgert, neben der Wahl einer ganzzahligen Zeitskala auch eine solche Zeiteinteilung zu betrachten, bei der ein fester Zeithorizont T und n feste Handelszeitpunkte $j \cdot T/n$ mit $j = 0, \dots, n-1$ gewählt werden. Ein solches Vorgehen bietet insbesondere beim Übergang zu den zeit-stetigen Modellen Vorteile.

3. Binomialmodell (Cox-Ross-Rubinstein-Modell)

Das Paradebeispiel eines arbitragefreien Mehr-Perioden-Modells ist das n -Perioden-Binomialmodell, das in der Literatur auch unter der Bezeichnung Cox-Ross-Rubinstein-Modell bekannt ist. Es finden hier jeweils Preisänderungen zu den Zeiten $j \cdot T/n$ mit $j = 1, \dots, n$ statt. Zu diesen Zeiten kann ein Investor auch sein Vermögen umschichten. Die Entwicklung des Aktienkurses im Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist durch das folgende Diagramm gegeben, wobei wir uns hier der einfacheren Darstellbarkeit halber auf den Fall $n = 2$ beschränken:

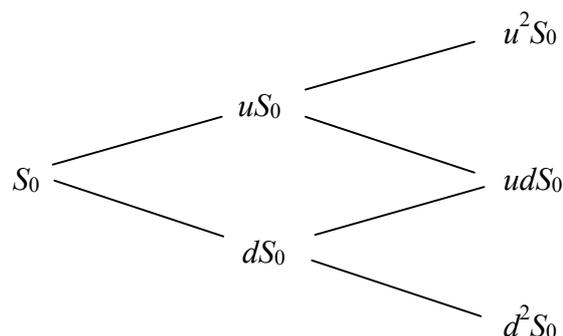


Bild 7: Aktienkurs im Zwei-Perioden-Binomialmodell

Der Aktienkurs verhält sich also wie ein Baum, der aus einzelnen Ein-Perioden-Binomialmodellen zusammengesetzt ist (man spricht deshalb auch von *Baummodellen*). Die Vermehrungsfaktoren u und d sind genau wie die Wahrscheinlichkeiten p für einen Kursanstieg in je-

dem Knoten gleich, so dass der Preis der Aktie zur jeweiligen Zeit $j \cdot T/n$ eindeutig durch die Anzahl der vorher statt gefundenen Aufwärtsbewegungen des Aktienkurses bestimmt ist. Der Name *Binomialmodell* ist darin begründet, dass die Anzahl X_n der Aufwärtsbewegungen im n -Perioden-Binomialmodell einer Binomialverteilung mit Parametern n und p genügt, da X_n Summe von n unabhängigen Null-Eins-Variablen X_i ist, die jeweils dann den Wert Eins annehmen, wenn zur Zeit $i \cdot T/n$ ein Kursanstieg statt findet. Typischerweise betrachtet man als Alternative zur Aktie im Binomialmodell eine risikolose Anlagemöglichkeit mit Zinssatz $r \geq 0$ pro Periode, bei der die Zinszahlungen zu jedem Handelszeitpunkt $j \cdot T/n$ dem jeweils investierten Kapital zugeschlagen werden. Es ergibt sich dann für die Entwicklung $S_0(t)$ einer Geldeinheit, die zur Zeit $t = 0$ risikolos angelegt wird,

$$S_0(t) = (1 + r)^t, \quad t = 0, T/n, 2 \cdot T/n, \dots, T.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass das so entstandene Marktmodell genau dann arbitragefrei ist, wenn die Beziehung

$$d < (1 + r)^{T/n} < u$$

gilt.

1.3 Das Black-Scholes-Modell als Grenzwert endlicher Mehr-Perioden-Modelle

Das in der Theorie der Finanzmathematik populärste Wertpapierpreismodell ist das sogenannte Black-Scholes-Modell. Es basiert auf der Annahme, dass – im einfachsten Fall – für die risikolose Geldanlage („Bond“) eine Wertentwicklung der Form

$$B(t) = e^{rt}$$

und für den Aktienpreis $S(t)$ (der Einfachheit halber betrachten wir hier einen Markt mit einem Bond und lediglich einer Aktie, für den allgemeinen Fall verweisen wir auf Korn und Korn (1999)) die Form

$$S(t) = se^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

angenommen werden, wobei r , b , σ reelle Zahlen sind, deren Bedeutung wir gleich herleiten werden. $W(t)$ sei eine Zufallsvariable, die normal verteilt ist mit Erwartungswert Null und Varianz t , also

$$W(t) \sim N(0, t).$$

Zusätzlich soll $W(t)$ als Funktion von t (also als stochastischer Prozess) eine stetige Funktion sein und den Forderungen

- i) $W(0) = 0$
- ii) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ für $t > s$ „normal verteilte Zuwächse“
- iii) $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $W(r) - W(u)$ für $t > s \geq r > u$ „unabhängige Zuwächse“

genügen. Man bezeichnet einen solchen stochastischen Prozess als **Brownsche Bewegung** oder auch **Wiener Prozess**. Wir wollen hier nicht weiter auf seine Eigenschaften eingehen, sondern lediglich einen simulierten Pfad (also ein Ergebnis des zugehörigen Zufallsexperiments) der Brownschen Bewegung in Bild 4 präsentieren. Ein zugehöriger simulierter Pfad von $S(t)$ wurde bereits in Bild 3 gezeigt.

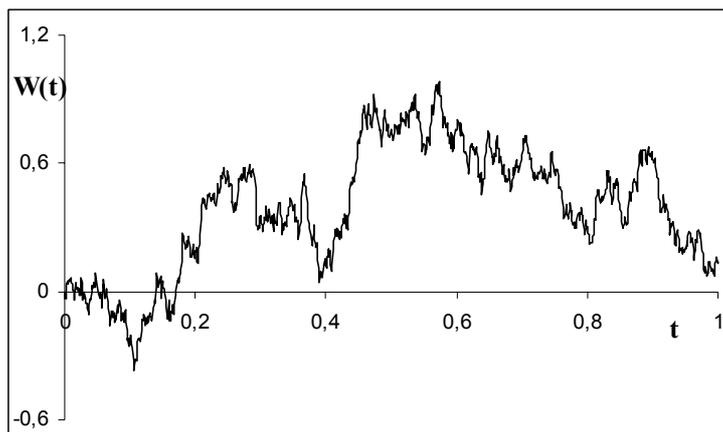


Bild 8: Simulierter Pfad einer Brownschen Bewegung $W(t)$

Im Rahmen dieses Abschnitts soll das Black-Scholes-Modell auf einfache Weise als Grenzwert einer Folge von Mehrperioden-Binomialmodellen motiviert werden. Eine exakte Herleitung der Konvergenz würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Wir beginnen mit der Motivation des Bondpreises. Wenn man eine Geldeinheit zum Zinssatz r für einen Zeitraum der Länge t anlegt und die Zinsen am Ende des Zeitraums gezahlt werden, so hat sich die eine Geldeinheit zur Zeit t auf $1+rt$ erhöht. Würde man hingegen bereits nach der Hälfte des Zeitraums, also zur Zeit $t/2$, Zinsen erhalten, so hätte sich unser Vermögen zur Zeit $t/2$ auf $1+rt/2$ erhöht. Legt man auch die erhaltenen Zinsen ab $t/2$ zum Zinssatz r an, so erhält man im Zeitpunkt t ein Gesamtvermögen von

$$1 + r \frac{t}{2} + \left(1 + r \frac{t}{2}\right) r \frac{t}{2} = \left(1 + \frac{rt}{2}\right)^2.$$

Erhält man nun allgemein immer zu den n äquidistanten Zeitpunkten jt/n , $j=1, \dots, n$, Zinszahlungen gemäß Zinssatz r auf das im Zeitraum $[(j-1)t/n, jt/n]$ angelegte Kapital, so besitzt man im Zeitpunkt t ein Gesamtvermögen von

$$\left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n.$$

Lässt man nun die Zeitdifferenz zwischen den Zinszahlungen gegen Null gehen (bzw. die Anzahl der Zinszahlungen gegen unendlich), so konvergiert dieser Ausdruck gegen den Bondpreis im Black-Scholes-Modell, genauer: Es gilt

$$\left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{rt}.$$

Wir betrachten somit im Black-Scholes-Modell eine risikolose Geldanlage, bei der sich das angelegte Vermögen kontinuierlich in der Zeit mit Zinssatz r verzinst. Da im Bankengeschäft Anlagemöglichkeiten zum Tageszins möglich sind, ist diese Idealisierung („kontinuierliche Verzinsung“) gar nicht so realitätsfremd, wie man auf den ersten Blick vermutet. Da der Zinssatz r im allgemeinen recht klein ist, sind sogar die Abweichungen zwischen kontinuierlicher und jährlicher Verzinsung nicht sonderlich groß. Des weiteren existiert natürlich zu jedem Zinssatz r im kontinuierlichen Modell ein Zinssatz r^* im Modell mit jährlicher Verzinsung, so

dass die Vermögensentwicklung unter beiden Verzinsungsarten immer zum vollen Jahr übereinstimmen. Im folgenden Bild wird der Unterschied zwischen jährlicher, halb- und vierteljährlicher sowie kontinuierlicher Verzinsung verdeutlicht. Die einzelnen Kurven zeigen (von unten nach oben) die jeweils zugehörige Wertentwicklung einer Geldeinheit innerhalb eines Jahres. Hierbei musste ein unrealistisch hoher Zinssatz von $r = 1$ (also 100% !!!) gewählt werden, damit die einzelnen Unterschiede auch tatsächlich optisch erkennbar waren. Für realistische Zinssätze sind die Unterschiede weitaus weniger deutlich.

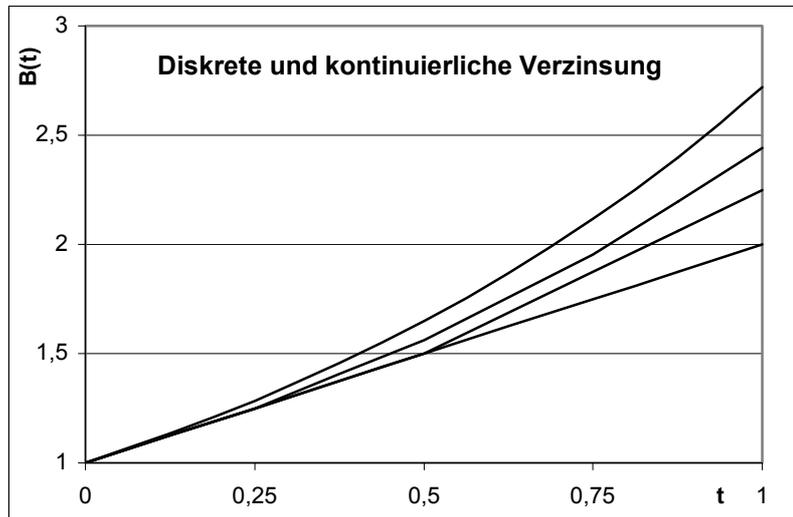


Bild 9: Entwicklung eines Vermögens bei diskreter und kontinuierlicher Verzinsung

Existiert nun für den Aktienpreis eine ähnlich einfache Grenzbeziehung ?

Die Antwort lautet ja und basiert in der von uns präsentierten einfachen Variante auf dem *Satz von de Moivre-Laplace*. Dieser Satz besagt, dass für große Werte von n die Binomialverteilung $B(n, p)$ mit Parametern n, p (also die Verteilung der Anzahl der Erfolge bei n unabhängig von einander durchgeführten 0-1-Experimenten, bei denen die Erfolgswahrscheinlichkeit jeweils p beträgt) mit Hilfe der Standardnormalverteilung (genauer: einer Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert np und gleicher Varianz $np(1-p)$) approximiert werden kann. Genauer:

Satz 1.6: *Satz von de Moivre-Laplace*

Besitzt X eine $B(n, p)$ -Verteilung, so ist

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \left(= \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \right)$$

für große n approximativ standardnormal verteilt, d.h. es gilt für große n

$$P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \approx N(x),$$

wobei $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{1}{2}y^2) dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Diese Konvergenzbeziehung lässt sich zum Beispiel anhand des Galtonschen Bretts auch visuell vorführen. In Bild 10 verdeutlichen wir sie durch Vergleich der (als Histogramm dargestellten) Wahrscheinlichkeitsfunktion einer $B(20, 0.5)$ -Verteilung mit der $N(10, 5)$ -Verteilung, der Normalverteilung mit Erwartungswert 10 und Varianz 5. Die Abweichungen sind also bereits für recht kleines N sehr gering.

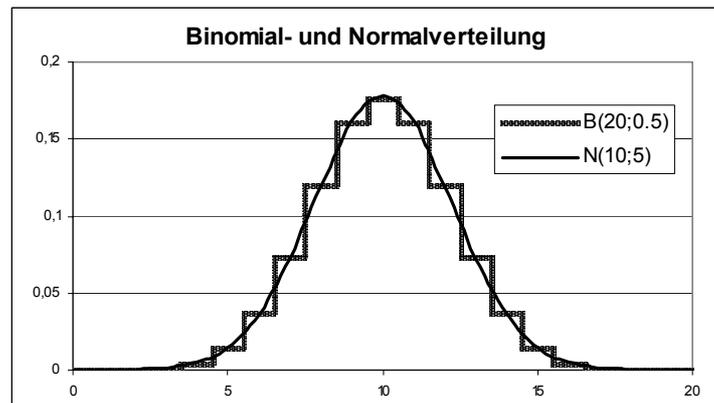


Bild 10: Vergleich zwischen der Dichte der Normalverteilung und der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

Mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace lässt sich nun der Aktienpreis im Black-Scholes-Modell als Grenzwert einer Folge von Binomialmodellen mit wachsender Periodenzahl motivieren. Wir betrachten hierzu die Entwicklung eines Aktienkurses $S_n^{(n)}$ im Binomialmodell mit Zeithorizont t . X_n sei die Anzahl der Kursanstiege unter den n Preisänderungen, p die jeweilige „Erfolgswahrscheinlichkeit“. Die Veränderungsfaktoren des Aktienkurses seien wieder u und d . Man hat dann:

$$X_n \sim B(n, p),$$

$$S_n^{(n)} = s \cdot u^{X_n} \cdot d^{n-X_n} = s \cdot \exp\left(X_n \cdot \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \cdot \ln(d)\right).$$

Damit nun der Aktienkurs im Binomialmodell gegen den Aktienkurs $S(t)$ im Black-Scholes-Modell für wachsende Periodenanzahl n konvergieren kann, müssen zumindest zwei Dinge erfüllt sein:

- Die Zeitspanne zwischen zwei Handelsperioden im Binomialmodell, $\Delta t = t/n$, muss gegen Null gehen, damit ein zeit-stetiges Modell mit dauernden Handlungsmöglichkeiten als Grenzfall auftreten kann
- Gleichzeitig müssen die „Vermehrungsfaktoren“ u und d gegen Eins konvergieren, damit der entstehende Grenzprozess ein stetiger Prozess (als Funktion der Zeit) sein kann

Man kann sich nun mindestens zwei Arten der Approximation denken. Zum einen wäre da die Approximation eines gegebenen Aktienpreises vom Black-Scholes-Typ durch eine Folge geeigneter Mehr-Perioden-Binomialmodelle. Zum anderen bietet sich die Motivation des Black-Scholes-Typs als ein Grenzmodell einer Folge sich immer weiter verfeinernder Binomialmo-

delle an. Wir werden den zweiten Zugang wählen, da er für unsere bisherige Vorgehensweise der natürliche ist.

Wir setzen hierzu u und d wie folgt an:

$$u = u(\Delta t) = \exp\left(\tilde{b}\Delta t + \sigma \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{\Delta t}\right), \quad d = d(\Delta t) = \exp\left(\tilde{b}\Delta t - \sigma \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{\Delta t}\right),$$

wobei \tilde{b}, σ gegebene reelle Zahlen (mit $\sigma > 0$) sind (in diesem Fall ergeben sich dann u und d aus obigen Gleichungen). Wir nehmen weiter an, dass Δt bereits so klein ist, dass $u > 1 > d$ gilt. \tilde{b}, σ haben dann die Darstellung

$$\tilde{b} = \frac{\ln(d) + p(\ln(u) - \ln(d))}{\sqrt{\Delta t}}, \quad \sigma = \frac{\ln(u) - \ln(d)}{\sqrt{\Delta t}}\sqrt{p(1-p)}$$

Wir haben nun Folgen von Werten von u und d vorliegen, die jeweils für wachsendes n gegen Eins konvergieren (und zwar monoton von oben bzw. von unten). Dann folgt mit obiger Darstellung von u und d

$$S_n^{(n)} = s \cdot \exp\left(X_n \cdot \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \cdot \ln(d)\right) = s \cdot \exp\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\sigma\sqrt{T} + \tilde{b}T\right)$$

und dem Satz von de Moivre-Laplace, dass die Verteilung des Exponenten auf der rechten Seite in obiger Gleichung asymptotisch (d.h. für $n \rightarrow \infty$) gleich der des Exponenten von

$$S(t) = se^{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

ist, wenn man $b = \tilde{b} + \frac{1}{2}\sigma^2$ setzt. Wir erhalten also insgesamt die Konvergenz des Binomialmodells zur Zeit t gegen den Aktienkurs im Black-Scholes-Modell zum gleichen Zeitpunkt. Die gemeinsame Konvergenz in allen Zeitpunkten t des durch lineare Interpolation aus den Binomialmodellen zeit-stetig gemachten Aktienkurses gegen das Black-Scholes-Modell kann nur mit tief liegenden mathematischen Resultaten gezeigt werden (siehe z.B. Korn und Korn (1999)).

Es liegt nun natürlich auf der Hand, zu fragen, warum eigentlich der Parameter b eingeführt wurde und welche Interpretation die Parameter b, σ des Aktienkursmodells im Black-Scholes-Modell besitzen. Tatsächlich ist deren Bedeutung sogar recht anschaulich. Es gilt nämlich:

$$E(S(t)) = s \cdot e^{bt}.$$

D.h. b ist quasi die „mittlere Zinsrate“ der Aktie (wenn man sich an die Bezeichnung aus der risikolosen Geldanlage anlehnt) und wird deshalb auch als **mittlere Ertragsrate** bezeichnet. Schaut man sich den Exponenten des Preisprozesses an, so sieht man auch sofort, dass σ als Rate der Varianz (und somit als Maß für die mittlere Schwankung des Aktienpreises) angesehen werden kann, denn es gilt:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s}\right) \sim N\left(\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Man sagt deshalb auch, dass der Aktienkurs log-normal mit Parametern b und σ verteilt ist. σ wird als **Volatilität** der Aktie bezeichnet.

Eine alternative Motivation der Aktienkursmodellierung im Black-Scholes-Modell ohne Rückgriff auf die Konvergenz zeit-diskreter Modelle wird in Kapitel II in Korn und Korn (1999) gegeben. Allerdings erfordert dieser Zugang Vorkenntnisse auf dem Gebiet der zeit-stetigen stochastischen Prozesse.

Wir wollen noch kurz die obige Behauptung über den Erwartungswert des Aktienkurses im Black-Scholes-Modell beweisen: Wegen $W(t) \sim N(0, t)$ gilt

$$E(S(t)) = s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = se^{bt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}} dx = se^{bt}.$$

Hierbei folgt das letzte Gleichheitszeichen aus der Tatsache, dass der Integrand im Integral auf der linken Seite der Gleichung die Dichte der $N(\sigma t, t)$ -Verteilung ist, das Integral somit den Wert 1 besitzt.

Natürlich existieren auch mehrdimensionale Varianten des Black-Scholes-Modells zur Modellierung von Wertpapiermärkten mit mehreren Aktien. Hier werden dann die zufälligen Schwankungen der Aktienkurse durch eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung modelliert, d.h. durch einen Vektor $(W_1(t), \dots, W_n(t))$, dessen einzelne Komponenten voneinander unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind. Die einzelnen Aktienkurse haben dann die Gestalt

$$S_i(t) = s_i e^{\left(b_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2\right)t + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} W_j(t)}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, n$$

mit geeigneten Marktkoeffizienten b und σ . Mehr zu allgemeinen Marktmodellen vom Black-Scholes-Typ (mit z.B. zufälligen oder zeitabhängigen Marktkoeffizienten) findet man z.B. in Korn und Korn (1999).

1.4 Neuere Preismodelle

Obwohl das Black-Scholes-Modell die Realität der Aktienkursbewegungen recht gut wiedergibt und auch in der Praxis akzeptiert ist, hat es auch Schwächen, die zur Entwicklung noch komplexerer und realistischerer Modelle für Aktienpreise geführt haben. Zwar sollen diese Modelle hier nicht vorgestellt werden, aber es sollen zumindest ein paar Gründe für die Notwendigkeit des Black-Scholes-Modells angegeben werden.

i) *Unabhängigkeit der relativen Preiszuwächse*

Anhand empirischer Daten ist es leicht zu überprüfen, dass die Renditen von Aktienpreisen (also die relativen Zuwächse) zwar oft fast unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

ii) *Konstante Volatilität*

Die Annahme konstanter Volatilität müsste sich in der Praxis darin äußern, dass die Renditen der Aktienpreise über die Zeit alle gleich verteilt wären. Statt dessen beobachtet man aber sehr oft ein sogenanntes „Volatility Clustering“, d.h. hohe Ausschläge nach oben folgen auf hohe Ausschläge nach unten (und umgekehrt), während es gleichzeitig auch Phasen gibt, in denen nur kleine Werte der Renditen beobachtet werden. Dies wird auch in Bild 11 deutlich, wo die Tagesrenditen $(S(t+1)-S(t))/S(t)$ des Kurses der Deutschen Bank-Aktie abgetragen sind. Man hat deshalb Preismodelle mit stochastischer Volatilität entwickelt. Genauer: die Konstante σ wird durch einen eigenen stochastischen Prozess ersetzt, der sich ähnlich wie eine weitere Brownsche Bewegung verhält.

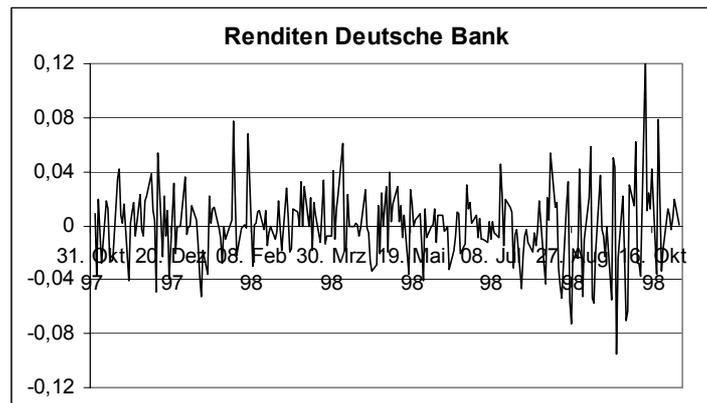


Bild 11: Tagesrenditen der Deutschen Bank-Aktie vom 31.10.97-31.10.98

iii) Lognormal-verteilte Renditen

Erstellt man ein Histogramm der logarithmischen Renditen $\ln(S(t+1)/S(t))$ der Aktienpreise, so stellt man fest, dass man typischerweise mehr sehr kleine und mehr sehr große Werte beobachtet als beim Vorhandensein einer Normalverteilung. Aus diesem Grund wurde in den zurück liegenden Jahren verstärkt nach Verteilungen gesucht, die in der Lage sind, dieses am Markt beobachtete Verhalten besser zu erklären als die Normalverteilung. Als geeignete Kandidaten haben sich hyperbolische Verteilungen und t -Verteilungen erwiesen. Eine Darstellung der Hintergründe der zugehörigen Preisprozesse sprengt den technischen Rahmen dieses Manuskripts.

Es bleibt aber festzuhalten, dass das Black-Scholes-Modell trotz einiger Unzulänglichkeiten nach wie vor die überragende Rolle sowohl in der Theorie als auch der Praxis der Finanzmathematik spielt und deshalb immer als Benchmark für neu entwickelte Modelle gilt.

2. Was sind Optionen und wie viel sind sie wert ?

2.1 Optionen: Begriffe und Grundlagen

Der Begriff der Option ist zunächst nicht nur aus dem Bereich der Finanzwelt bekannt. Er wird auch im tagtäglichen Sprachgebrauch verwendet und bedeutet dort soviel wie, eine Möglichkeit haben („ich habe auch noch die Option, dieses Angebot anzunehmen...“). Das wesentliche Merkmal einer solchen Option ist, dass man sie zwar nutzen kann, wenn man will, sie aber nicht unbedingt wahrnehmen muss. Insofern stellt eine Option immer etwas Positives dar. Dieselben Merkmale besitzt auch eine Option im Sinne der Finanzwelt.

Im allgemeinen versteht man unter einer *Option*, einen Vertrag, der seinem Käufer eine nicht-negative Zahlung unsicherer Höhe zu einem festen zukünftigen Zeitpunkt zusichert. Man wird also schlimmstenfalls nichts (das heißt eine Zahlung der Höhe Null), im guten Fall aber eine echt positive Zahlung erhalten. Die bekanntesten Formen von Optionen sind die europäischen Kauf- und Verkaufsoptionen (engl. *Calls* und *Puts*) auf Aktien. Sie sichern ihrem Besitzer das Recht (nicht aber die Pflicht !) zu, eine Aktie einer bestimmten Firma zum festgelegten Endzeitpunkt T zum festgelegten Preis K (dem *Ausübungspreis* oder *Strike*) vom Zeichner der Option zu erwerben (im Falle des Calls) oder aber an den Zeichner der Option zu verkaufen (im Fall des Puts).

Ist nun der Preis $P_1(T)$ der Aktie im Zeithorizont größer als K , so wird der Besitzer des Calls sein Recht wahrnehmen und die Aktie billig zum Preis K erwerben. Er könnte sie dann direkt zum Preis $P_1(T)$ am Markt veräußern und hätte somit durch Ausüben der Option einen Gewinn der Höhe $P_1(T) - K$ gemacht. Ist hingegen der Preis $P_1(T)$ der Aktie im Zeithorizont kleiner als K , so wird der Besitzer des Calls sein Recht verfallen lassen. Wollte er nämlich immer noch die Aktie erwerben, so wäre es für ihn günstiger dies am Markt zu tun. Der Besitz des Calls führt in diesem Fall zu keiner positiven Zahlung. Man identifiziert daher einen europäischen Call mit der Endzahlung

$$B_{call} = (P_1(T) - K)^+,$$

wobei x^+ der Positivteil der reellen Zahl x ist. Graphisch wird die Endauszahlung des europäischen Calls durch das folgende „Payoff-Diagramm“ dargestellt:

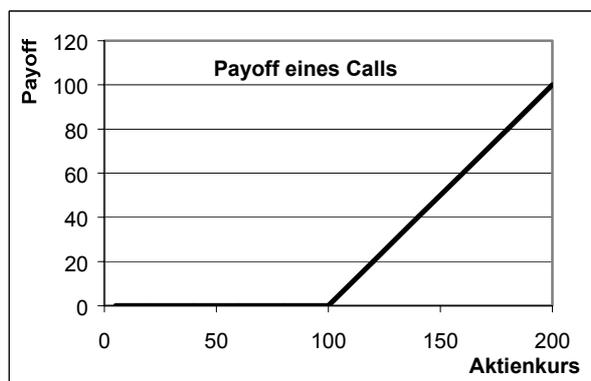


Bild 11: Endauszahlung eines Calls mit Ausübungspreis $K=100$

Wichtig ist also:

- Eine Option liefert eine nicht-negative zukünftige Zahlung
- Eine Option liefert eine Zahlung unsicherer Höhe

Aus der ersten Eigenschaft ergibt sich nun sofort, dass man für den Erwerb einer Option heute eine Zahlung („Prämie“) zu leisten hat. Die zweite Eigenschaft liefert auch direkt das Problem nach, es ist nämlich nicht klar, wie hoch diese Prämie sein soll. Das allgemein akzeptierte Grundprinzip zur Bestimmung des Optionspreises ist der Gegenstand des nächsten Abschnitts, der auf den eingeschobenen Exkurs zur Geschichte des Optionshandels folgt.

Wer handelt mit Optionen und warum ?

Da Optionen keine originären Wertpapiere sind, sondern sich immer auf ein zugrunde liegendes Gut (z.B. Aktien, Handelsgüter, Wetter (!), ...) beziehen, ist es natürlich eine berechtigte Frage nach dem Nutzen von Optionen überhaupt zu fragen.

Der erste wichtige Aspekt ist der der *Absicherung gegen unerwünschte Preisschwankungen* des zugrunde liegenden Guts. Besitzt man z.B. eine Aktie mit heutigem Wert von 200 €, so kann man durch den Kauf einer Put-Option mit Ausübungspreis 150 € für die Laufzeit der Option eine untere Grenze des Werts des „Pakets“ aus Put-Option und Aktie von 150 € festschreiben. Fällt nämlich der Aktienkurs unter den Wert von 150 €, so kann man sein Optionsrecht nutzen und dem Verkäufer der Put-Option die Aktie zum Stückpreis von 150 € verkaufen. Fällt der Aktienpreis nie unter diese Grenze, so muss man auch sein Optionsrecht nicht ausüben. Analog kann man durch den Kauf einer Call-Option auf eine Aktie den zukünftigen Kaufpreis dieser Aktie begrenzen.

Ein anderer Aspekt besteht in der Preisentwicklung der Option. Wir werden uns zwar erst später um die exakte Bestimmung eines Preises einer Option kümmern, aber es wird auch so einleuchten, dass sich eine Option im Preis anders entwickelt als z.B. die zugrunde liegende Aktie. Wenn man als Beispiel eine Call-Option auf eine Aktie betrachtet, kann man sich leicht überlegen (oder aber empirisch am Markt beobachten):

- Steigt der Aktienkurs, so steigt auch der Call-Preis auf diese Aktie.
- Steigt der Aktienkurs um 1 €, so steigt der Call-Preis in der Regel um weniger als 1 €, aber der prozentuale Anstieg des Call-Preises ist größer, als der der Aktie.

Analog gelten diese Überlegungen auch für Kursverluste. Wegen des höheren prozentualen Gewinns/Verlusts der Call-Option spricht auch von einem Hebeleffekt (englisch: Leverage effect), den sich Spekulanten gerne zu Nutzen machen. Allerdings sollte man unbedingt auf folgende zwei Risiken des Optionshandels hinweisen:

- Optionen sind auslaufende Wertpapiere, d.h. sie existieren nur zeitlich begrenzt
- Man kann bei einem Optionsinvestment einen TOTALVERLUST erleiden

Zusammengefasst ergeben sich also zwei wesentliche Beweggründe für den Optionshandel: Absicherung und Spekulation.

Exkurs 2: Historie des Optionshandels

- 1634 : Vorläufer von Optionen werden während der großen Tulpenmanie in Holland gehandelt. Man schließt Verträge auf (eingegrabene) Tulpenzwiebeln, in denen man einen Kaufpreis vereinbart, der nur zur Kaufzeit fällig wird, wenn dann die mittlerweile ausgegrabene Zwiebel ein bestimmtes Mindestgewicht nicht unterschreitet. 1637 brach der holländische Tulpenmarkt zusammen, was auch auf diese spekulativen Termingeschäfte mit Optionscharakter zurückzuführen war.
- 1728 : Erste Aktienoptionen der Königlich Westindischen und Guineaschen Kompanie, die zum Kauf von Anteile der französischen Insel Ste. Croix berechtigen.
- 1848 : Gründung des Chicago Board of Trade, aus dem sich später die größte Terminbörse der Welt entwickelt.
- 1973 : Das Chicago Board of Trade eröffnet die Chicago Board Options Exchange, die größte Terminbörse der Welt. Der Handel beginnt mit Call Optionen, vier Jahre später kommen auch Put-Optionen hinzu.
- 1973 : Fischer Black und Myron Scholes veröffentlichen ihre Arbeit, die die später mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnete Black-Scholes-Formel zur Bewertung europäischer Call-Optionen enthält. Robert Merton veröffentlicht im selben Jahr eine Verallgemeinerung hiervon. Auch er wird später – gemeinsam mit Myron Scholes – mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.
- 1975 : Die American Stock Exchange (AMEX) beginnt mit Optionshandel.
- 1988 : In der Schweiz wird die Swiss Options Exchange (Soffex) gegründet.
- 1990 : Eröffnung der Deutschen Termin Börse (DTB)
- 1995 : Extrem riskante Optionsgeschäfte des Händlers Nick Leeson führen zum Bankrott der Barings Bank in England.

2.2 Grundlagen der Optionspreisbestimmung

Wir wollen zunächst eine auf den ersten Blick sinnvoll erscheinende Vorgehensweise zur Bestimmung des Optionspreises am Ein-Perioden-Binomialmodell demonstrieren und dabei auch gleich aufzeigen, dass dieses „natürliche“ Vorgehen im allgemeinen zu einem falschen Preis führt.

Wir betrachten hierzu einen Markt, in dem es möglich ist, Geld zum festen Zinssatz von 5 % für eine Periode anzulegen und in dem in eine Aktie investiert werden kann, deren Preisverlauf durch das folgende Diagramm gegeben ist:

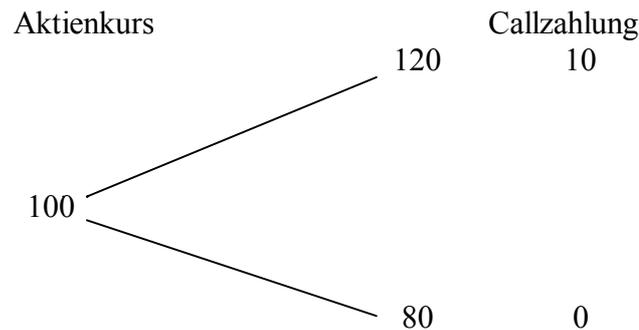


Bild 12: Aktienkurs und Endauszahlung eines Calls mit Strike $K = 110$

Hierbei glauben wir, dass der Aktienkurs mit 80 % iger Wahrscheinlichkeit steigen und mit 20% iger Wahrscheinlichkeit fallen wird. Unser Problem ist nun die Bestimmung des Preises eines Calls mit Ausübungspreis $K = 110$ auf die Aktie. Unter obigen Annahmen erhalten wir dann also aus dem Besitz des Calls am Ende mit Wahrscheinlichkeit 0,8 eine Zahlung der Höhe 10 und ansonsten nichts. Da wir die Zahlung allerdings erst am Ende der Periode erhalten, erscheint es zusätzlich sinnvoll, sie mit dem Zinssatz der risikolosen Geldanlage, also 5%, abzuzinsen. Wir hätten also:

$$\text{„natürlicher Preis(-vorschlag)“} = E\left(\frac{(P_1(T) - 110)^+}{1 + 0,05}\right) = 0,8 \cdot 9,53 = 7,62$$

Ist dies nun der richtige Preis der Option ?

Ein kritischer Punkt ist sicher, dass dieser Optionspreis von unserer Einschätzung der Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung der Aktie abhängig ist. Da typischerweise zwei verschiedene Investoren verschiedene Einschätzungen dieser Wahrscheinlichkeit haben, würden sie sich dann also auch nur schwer auf einen Preis einigen können. Wir werden nun allerdings zeigen, dass sich dieses Problem überhaupt nicht stellt, da die richtige Vorgehensweise, den Optionspreis zu bestimmen, eine andere ist. Sie beruht nämlich auf dem sogenannten

Duplikationsprinzip:

Liefern in einem arbitragefreien Markt zwei verschiedene Güter exakt die gleichen Zahlungsströme, so müssen ihre Preise zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen.

Beweis des Duplikationsprinzips:

Das Duplikationsprinzip ist eine direkte Folgerung aus der Annahme der Arbitragefreiheit. Wäre z.B. Gut 1 teurer als Gut 2, so könnte man Gut 1 leer verkaufen, aus dem Erlös Gut 2 erwerben und das restliche Geld risikolos anlegen (oder, falls dies nicht möglich ist, das restliche Geld als Bargeld aufbewahren). Alle aus dem Leerverkauf von Gut 1 zu leistenden Zahlungen können nun durch den Besitz von Gut 2 getätigt werden, da beide Güter den gleichen Zahlungsstrom besitzen, sich also neutralisieren. Es bleibt dann als risikoloser Gewinn die ursprüngliche Differenz der Preise von Gut 1 und Gut 2. Man hat also die Existenz einer Arbitragestrategie nachgewiesen. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme der Arbitragefreiheit des Marktes. Folglich müssen die Preise der beiden Güter immer übereinstimmen.

Anwendung des Duplikationsprinzips auf das Optionsbewertungsproblem

Wir wenden dieses Prinzip nun auf unser Optionsbewertungsproblem im Ein-Perioden-Binomialmodell an. Können wir hier eine Investmentstrategie in die dem Call zugrunde liegende Aktie und in die risikolose Geldanlage finden, so dass diese exakt zur gleichen Endzahlung wie der Besitz des Calls führt, so muss nach dem Duplikationsprinzip der Preis des Calls mit dem Anfangsvermögen, das zum Verfolgen dieser Investmentstrategie benötigt wurde, übereinstimmen. Es seien hierzu φ bzw. ψ der zu Beginn der Periode in die risikolose Geldanlage investierte Betrag bzw. die Anzahl der zu Beginn der Periode erworbenen Aktien. Da der Besitz des Calls im Fall des Kursanstiegs der Aktie zu einer Endzahlung von 10 und bei fallendem Aktienpreis zu einer Zahlung von Null führt, ist die „Duplikationsstrategie“ (φ, ψ) durch das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig bestimmt:

$$\varphi \cdot (1 + 0,05) + 120 \cdot \psi = 10$$

$$\varphi \cdot (1 + 0,05) + 80 \cdot \psi = 0$$

Da dieses Gleichungssystems die eindeutige Lösung $(\varphi, \psi) = (-20/1,05; 1/4)$ besitzt, erhalten wir den – nach dem Duplikationsprinzip (man beachte auch, dass das obige Ein-Perioden-Binomialmodell ein arbitragefreies Marktmodell ist!) – eindeutigen Preis der Call-Option:

$$\text{Optionspreis} = \varphi + 100 \cdot \psi = 5,95$$

Da in obigen Rechnungen sowohl die konkreten Zahlenvorgaben für die Aktie, den Call und die risikolose Anlage als auch die Annahme des Ein-Perioden-Binomialmodells nur für die Berechnung des konkreten Zahlenwerts des Optionspreises nötig waren, die Argumentation mit Hilfe des Duplikationsprinzips aber allgemein gültig ist, ergibt sich auch ein allgemeines Optionsbewertungsergebnis, das wir in Satz 2.2 unten darstellen. Um dieses Resultat allerdings überhaupt formulieren zu können, benötigen wir zunächst eine allgemeine Definition einer Option (vom europäischen Typ):

Definition 2.1:

Im allgemeinen diskreten Marktmodell aus Abschnitt 1.2 heißt jede nicht-negative, f_T -messbare Zufallsvariable X eine *Option* (vom europäischen Typ).

Bemerkung und Beispiele:

Jede nicht-negative Zahlung, deren Höhe nur vom Aktienkursverlauf bis zum Zeitpunkt T abhängt, ist also eine Option vom europäischen Typ. Europäische Calls und Puts mit Ausübungspreis K und Laufzeit T lassen sich also mit den Endzahlungen

$$X_{call} = (S_1(T) - K)^+ \quad \text{bzw.} \quad X_{put} = (K - S_1(T))^+$$

identifizieren, wobei der Einfachheit halber jeweils von einer Option auf die „erste“ Aktie ausgegangen wurde. Weitere Beispiele teils deutlich komplexerer Optionen werden wir im Abschnitt über *exotische Optionen* kennen lernen. Bei einer Option vom *amerikanischen* Typ darf der Besitzer der Option den Zeitpunkt $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ des Ausübens seines Optionsrechts selbst wählen. Das Bewerten amerikanischer Optionen wird deshalb deutlich komplizierter als das Bewerten europäischer Optionen. Wir werden hierauf noch an einigen folgenden Stellen getrennt eingehen.

Satz 2.2 „Optionspreis und Duplikation“

Kann der zu einer Option gehörende Zahlungsstrom in einem arbitragefreien Markt durch das Verfolgen einer selbst-finanzierenden Handelsstrategie $(\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t))$ dupliziert werden, so ergibt sich der eindeutige Optionspreis p_B als

$$p_B = \sum_{i=0}^n \varphi_i(0) p_i,$$

wobei B die Endzahlung der Option ist.

Beweis:

Die gemachten Aussagen folgen sofort aus dem Duplikationsprinzip.

Ein Markt, in dem man alle Sorten von Optionen duplizieren kann, heißt ein *vollständiger Markt*. Der obige Satz hat somit das

Korollar 2.3

In einem vollständigen Markt ist der Optionspreis eindeutig festgelegt.

Es ergeben sich nun wieder einige interessante Fragestellungen:

- Wie bestimmt man in einem realistischen Markt (wie z.B. dem Black-Scholes-Modell aus dem 1. Abschnitt) den Preis einer Option ?
- Wie erhält man den/einen Optionspreis in einem unvollständigen Markt ?
- In welcher Beziehung stehen der „natürliche Preisvorschlag“ und der (nach dem Duplikationspreis bestimmte) Optionspreis ?

2.3 Der Optionspreis im Binomialmodell

Das Ein-Perioden-Binomialmodell

Als erste der obigen Fragen wollen wir die Beziehung zwischen dem „natürlichen Preisvorschlag“, also der abgezinnten erwarteten Endzahlung, und dem tatsächlichen Optionspreis im obigen Binomialbeispiel ansehen. Wir betrachten hierzu zunächst ein Ein-Perioden-Modell, in dem der Investor die Möglichkeiten besitzt, sein Geld in ein Festgeldkonto mit Zinssatz r oder in eine Aktie mit heutigem Preis S_0 zu investieren, deren Kurs durch ein Ein-Perioden-Binomialmodell mit Vermehrungsfaktoren u und d gegeben ist, sich graphisch durch

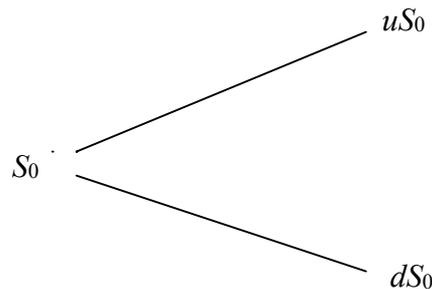


Bild 13: Aktienkurs im Ein-Perioden-Binomialmodell

veranschaulichen lässt, wobei wir annehmen, dass der Aktienkurs mit Wahrscheinlichkeit p steigt und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ fällt. Wir fordern die übliche Bedingung

$$(*) \quad d < (1+r)^T < u,$$

um in diesem Modell Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Unser Ziel ist es nun, eine Option mit Endzahlung $B(S_T)$ (d.h. die Endzahlung ist nur vom Aktienkurs am Fälligkeitstag der Option abhängig) zu bewerten. Wir verwenden den im letzten Abschnitt vorgestellten Duplikationsansatz, d.h. wir suchen wieder ein Paar (φ, ψ) mit

$$\begin{aligned} \varphi \cdot (1+r)^T + \psi u S_0 &= B(u S_0) \\ \varphi \cdot (1+r)^T + \psi d S_0 &= B(d S_0). \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\varphi = \frac{uB(dS_0) - dB(uS_0)}{(1+r)^T(u-d)}, \quad \psi = \frac{B(uS_0) - B(dS_0)}{(1+r)^T(u-d)}.$$

Unter Verwendung dieser Lösung erhält man:

Proposition 2.4 „Optionspreis und risiko-neutrales Maß“

Unter der Annahme (*) gilt im Ein-Perioden-Binomialmodell für den eindeutigen Preis p_B der durch die Endzahlung $B(S_T)$ gegebenen Option

$$p_B = E_Q\left((1+r)^{-T} B(S_T)\right) := \frac{1}{(1+r)^T} (qB(uS_0) + (1-q)B(dS_0)),$$

wobei die „Wahrscheinlichkeit“ q durch

$$q = \frac{(1+r)^T - d}{u - d}$$

gegeben ist.

Beweis:

Nach dem Satz über „Optionspreis und Duplikation“ und wegen der expliziten Form der Strategie (φ, ψ) gilt:

$$p_B = \varphi + \psi \cdot S_0 = \frac{uB(dS_0) - dB(uS_0)}{(1+r)^T(u-d)} + \frac{B(uS_0) - B(dS_0)}{(u-d)}.$$

Mit Hilfe der Definition von q erhält man nun aus dieser Gleichung

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{(1+r)^T} \frac{uB(dS_0) - dB(uS_0) + (1+r)^T B(uS_0) - (1+r)^T B(dS_0)}{(u-d)} \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \left(\frac{(u - (1+r)^T)B(dS_0)}{u-d} + \frac{((1+r)^T - d)B(uS_0)}{u-d} \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} (qB(uS_0) + (1-q)B(dS_0)) = E_Q\left((1+r)^{-T} B(S_T)\right) \end{aligned}$$

Wegen der Annahme (*) gilt $0 < q < 1$, d.h. dass somit durch q tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert wird. Es bleibt noch zu zeigen, dass Q das risiko-neutrale Maß ist. Beachte hierzu:

$$\begin{aligned} E_Q\left(\frac{1}{(1+r)^T} S_T\right) &= \frac{1}{(1+r)^T} (quS_0 + (1-q)dS_0) \\ &= \frac{S_0}{(1+r)^T} \left(\frac{((1+r)^T - d)u}{u-d} + \frac{(u - (1+r)^T)d}{u-d} \right) = S_0 \end{aligned}$$

□

Wir haben somit im einfachsten Modell, dem Ein-Perioden-Binomialmodell bereits eine Antwort auf die dritte Frage aus Abschnitt 2.2 gefunden:

Der eindeutige Optionspreis entspricht dem „natürlichen Preis“, wenn man als Wahrscheinlichkeitsmaß das risiko-neutrale Maß Q verwendet.

Dies ist ein überaus erstaunliches Ergebnis, und es kann sogar gezeigt werden, dass es in jedem vollständigen, arbitragefreien Markt gültig ist ! Die erstaunlichste Konsequenz ist aber:

Der Optionspreis ist von der persönlichen Einschätzung der Wahrscheinlichkeit p für einen Kursanstieg unabhängig !

Das mag auf den ersten Blick unglaublich erscheinen, denn warum soll der Preis einer Option unabhängig von der Wahrscheinlichkeit sein, dass man am Ende aus ihrem Besitz heraus eine positive Zahlung erhält oder nicht ? Die Begründung für diese Unabhängigkeit liegt darin, dass eine Option nur ein *derivatives Wertpapier* ist, das kein unabhängiges Eigenleben führt, sondern vom Verhalten des zugrunde liegenden Aktienkurses abhängt (deshalb auch *derivativ* = abgeleitet). Ist der Aktienpreis zu Beginn der Periode festgelegt und besteht Klarheit über seine möglichen zukünftigen Werte (also sind die Vermehrungsfaktoren u und d bekannt), so ist auch der Optionspreis festgelegt. Die obige Feststellung, dass der Optionspreis unabhängig von p ist, gilt nämlich auch schon für den Aktienpreis ! Denn warum soll der Aktienpreis S_0 mit seiner abgezinsten erwarteten Endzahlung übereinstimmen, nur weil wir die persönliche Einschätzung p der Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg haben ? Es ist also hier das gleiche Problem wie bei der Option. Allerdings sieht das Ganze hier vielleicht nicht mehr so paradox aus. Wenn unsere persönliche Einschätzung des Werts der Aktie höher als der Marktpreis ist S_0 , so werden wir ihren Kauf als ein gutes Geschäft beurteilen, sonst nicht. Mehr noch, das obige Vorgehen bei der Bewertung der Option ist das einzige, das mit den tatsächlich am Markt vorhandenen Aktienpreisen konsistent ist. Es gilt nämlich auch für den Aktienpreis

$$S_0 = E_Q \left(\frac{1}{(1+r)^T} S_T \right),$$

wobei zusätzlich Ungleichheit bei Verwendung aller anderen Wahrscheinlichkeitsmaße gilt. Folglich ist das Wahrscheinlichkeitsmaß Q dasjenige, das der Markt bereits zur Bewertung der Aktien verwendet hat.

Das n -Perioden-Binomialmodell

Als nächsten Schritt betrachten wir ein n -Perioden-Binomialmodell wie in Abschnitt 1.3 bereits beschrieben (also ein Cox-Ross-Rubinstein-Modell) mit Parametern u und d und der üblichen Forderung

$$(**) \quad d < (1+r)^{T/n} < u.$$

Wir demonstrieren die Berechnung des Optionspreises im n -Perioden-Binomialmodell zunächst am 2-Perioden-Fall. Hierzu sei wieder eine Option zu bewerten, die durch eine Endzahlung der Form $B(S_T)$ gegeben ist. Wenn wir uns nun eine Periode vor der Fälligkeit der Option befänden (also entweder im Zustand uS_0 oder dS_0), so könnten wir mit Hilfe unserer Resultate aus dem Ein-Perioden-Fall (insbesondere mit Proposition 2.4) den jeweiligen Optionspreis berechnen, der natürlich aus heutiger Sicht noch zufällig ist, da wir nicht wissen, in welchem der beiden Zustände wir uns zur Zeit $T/2$ befinden werden. Umgekehrt haben wir aber jetzt das Optionsbewertungsproblem auf das Problem zurückgeführt, im Zeitpunkt $t = 0$ eine Option in einem Ein-Perioden-Binomialmodell zu bewerten, da wir ja bereits ihren Wert in jedem der möglichen Zustände in $T/2$ wissen. Dieses Problem lässt sich nun wieder mit unseren Ergebnissen aus dem Ein-Perioden-Fall lösen. Wir können uns so rückwärts auch durch größere Modelle arbeiten, in dem wir jeweils eine Periode rückwärts gehen und den n -Perioden-Baum in lauter kleine 1-Perioden-Bäume zerlegen (*Prinzip der Rückwärtsinduktion*).

Für den Fall einer europäischen Call-Option mit Basispreis K erhalten wir so eine explizite Formel, die wir mittels Induktion beweisen werden:

Satz 2.5 „Call-Preis im allgemeinen Binomialmodell“

Unter den Annahmen (**) und $u^n S_0 > K$ ist der Preis $p_{call,n}$ eines europäischen Calls mit Basispreis $K \geq 0$ im n -Perioden-Binomialmodell durch die folgende Formel gegeben:

$$(CP) \quad p_{call,n} = S_0 N(a; n, \hat{q}_n) - K(1+r)^{-n} N(a; n, q_n),$$

wobei

$$q_n = \frac{(1+r)^{T/n} - d}{u - d}, \quad \hat{q}_n = \frac{q_n u}{(1+r)^{T/n}}, \quad N(a; n, z) = \sum_{i=a}^n \binom{n}{i} z^i (1-z)^{n-i}$$

und a die eindeutige ganze Zahl in $\{0, 1, \dots, n\}$ ist, für die gilt

$$u^a d^{n-a} S_0 > K \geq u^{a-1} d^{n-a+1} S_0.$$

Beweis:

Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl n der Perioden des Binomialmodells durch.

$n=1$:

Hier folgt die Aussage direkt aus Proposition 2.4, wenn man $B(S_T) = (S_T - K)^+$ wählt.

$n-1 \Rightarrow n$:

Wir führen zunächst die Bezeichnungen $p_{call,n-1}(u)$, $p_{call,n-1}(d)$ als Abkürzung für die Preise des Calls ein, wenn der Aktienkurs zur Zeit T/n (also nach einer Periode) gestiegen bzw. gefallen ist. Zur Berechnung dieser Preise kann man aber wegen der Induktionsannahme bereits die Formel (CP) anwenden, da nur noch $n-1$ Perioden folgen, also vom jeweiligen Startpunkt zur Zeit T/n aus nur noch ein $n-1$ -Perioden-Binomialbaum folgt. Wenn wir also in der Formel (CP) die folgenden Ersetzungen

$$S_0 \rightarrow \hat{S}_0 = uS_0, \quad T \rightarrow \hat{T} = \frac{n-1}{n}T$$

durchführen und beachten, dass

$$q_{n-1} = \frac{(1+r)^{\frac{n-1}{n}T/n-1} - d}{u - d} = q_n, \quad \hat{q}_{n-1} = q_{n-1} (1+r)^{\frac{n-1}{n}T/n-1} = \hat{q}_n$$

gelten, erhalten wir per Induktion

$$p_{call,n-1}(u) = uS_0 N(a(n-1, u); n-1, \hat{q}_n) - K(1+r)^{-\frac{n-1}{n}T} N(a(n-1, u); n-1, q_n),$$

wobei $a(n-1, u)$ die eindeutige ganze Zahl a in $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ist, für die gilt

$$u^{a+1} d^{n-1-a} S_0 > K \geq u^a d^{n-a} S_0.$$

Man beachte hierzu, dass wir ja bereits wissen, dass in der ersten Periode eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses vorliegt. Auf analoge Art erhalten wir:

$$p_{call,n-1}(d) = uS_0N(a(n-1,d);n-1,\hat{q}_n) - K(1+r)^{\frac{n-1}{n}T}N(a(n-1,d);n-1,q_n),$$

wobei $a(n-1, d)$ die eindeutige ganze Zahl a in $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ist, für die gilt

$$u^a d^{n-a} S_0 > K \geq u^{a-1} d^{n-a+1} S_0.$$

Um jetzt den Preis des Calls zur Zeit $t=0$ zu erhalten, können wir Proposition 2.4 anwenden, indem wir – dank der bereits bekannten Preise des Calls in den beiden möglichen Zuständen zur Zeit T/n – den Call mit einer Option in einem Ein-Perioden-Binomialmodell mit Laufzeit T/n und Endzahlung

$$B(S(T/n)) = \begin{cases} p_{call,n-1}(u), & \text{if } S(T/n) = uS_0 \\ p_{call,n-1}(d), & \text{if } S(T/n) = dS_0 \end{cases}$$

identifiziert. Man erhält dann durch explizite Rechnung und geeignetes Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} p_{call,n} &= \frac{1}{(1+r)^{T/n}} (q_n p_{call,n-1}(u) + (1-q_n) p_{call,n-1}(d)) \\ &= S_0 [\hat{q}_n N(a(n-1,u), n-1, \hat{q}_n) + (1-\hat{q}_n) N(a(n-1,u), n-1, \hat{q}_n)] - \\ &\quad - K(1+r)^{-T} [q_n N(a(n-1,u), n-1, q_n) + q_n N(a(n-1,d), n-1, q_n)]. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist damit also bewiesen, wenn man für beliebiges $0 < q < 1$ zeigt:

$$N(a, n, q) = qN(a(n-1, u), n-1, q) + qN(a(n-1, d), n-1, q)$$

Hierfür beachte man die folgenden bekannten bzw. leicht zu sehenden Beziehungen:

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n-1}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq i < n,$$

$$a = a(n-1, d) = a(n-1, u) + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei a wie in der Behauptung definiert ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} qN(a(n-1, u), n-1, q) + qN(a(n-1, d), n-1, q) &= \\ &= q \sum_{i=a(n-1, u)}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^i (1-q)^{n-1-i} + (1-q) \sum_{i=a(n-1, d)}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^i (1-q)^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=a(n-1, u)}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^{i+1} (1-q)^{n-1-i} + \sum_{i=a(n-1, d)}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^i (1-q)^{n-i} \\ &= \sum_{i=a(n-1, u)+1}^n \binom{n-1}{i-1} q^i (1-q)^{n-i} + \sum_{i=a(n-1, d)}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^i (1-q)^{n-i} \\ &= \sum_{i=a}^n \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} = N(a, n, q), \end{aligned}$$

womit alle Behauptungen gezeigt sind.

Bemerkung:

Die oben gewählte Form der Darstellung für den Call-Preis lehnt sich stark an die Black-Scholes-Formel im zeit-stetigen Modell an. Dies ist bewusst so gehalten, da wir im nächsten Abschnitt die Black-Scholes-Formel mittels Grenzübergang aus der Binomial-Formel herleiten werden. Wieder sieht man – wie in Proposition 2.4 – , dass der Call-Preis im Binomialmodell genau dem „natürlichen“ Preis (also der auf heute abgezinsten Endzahlung) entspricht, wenn man das eindeutige risiko-neutrale Maß Q verwendet, das durch die in jedem Knoten des Baums gleiche Wahrscheinlichkeit q_n (wie in obigem Satz gegeben) für einen Kursanstieg im nächsten Zeitintervall eindeutig bestimmt ist. Man kann nämlich leicht zeigen (als Übung empfohlen !), dass die oben gezeigte Formel (CP) für den Call-Preis die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} p_{call,n} &= (1+r)^{-T} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q_n^i (1-q_n)^{n-i} (u^i d^{n-i} S_0 - K)^+ \\ &= E_Q \left((1+r)^{-T} (S_n^{(n)} - K)^+ \right) \end{aligned}$$

besitzt. Insbesondere ergibt sich hieraus auch die folgende Interpretation für $N(a; n, q_n)$

$$N(a; n, q_n) = Q(S(T) > K)$$

als die risiko-neutrale Wahrscheinlichkeit, durch den Besitz des Calls eine positive Endauszahlung zu erhalten.

Für den europäischen Put erhalten wir mit analogem Beweis das zu Satz 2.5 analoge Resultat:

Satz 2.6 „Put-Preis im allgemeinen Binomialmodell“

Unter den Annahmen (**) und $d^n S_0 < K$ ist der Preis $p_{put,n}$ eines europäischen Puts mit Basispreis $K > 0$ im n -Perioden-Binomialmodell durch die folgende Formel gegeben:

$$(PP) \quad p_{put,n} = K(1+r)^{-T} [1 - N(a; n, q_n)] - S_0 [1 - N(a; n, \hat{q}_n)],$$

wobei

$$q_n = \frac{(1+r)^{T/n} - d}{u - d}, \quad \hat{q}_n = \frac{q_n u}{(1+r)^{T/n}}, \quad N(a; n, z) = \sum_{i=a}^n \binom{n}{i} z^i (1-z)^{n-i}$$

und a die eindeutige ganze Zahl in $\{0, 1, \dots, n\}$ ist, für die gilt

$$u^a d^{n-a} S_0 > K \geq u^{a-1} d^{n-a+1} S_0.$$

Bemerkungen

i) *Algorithmus zur Berechnung des Preises allgemeiner Optionen im Binomialmodell*

Man kann nun ähnlich wie im Beweis des Satzes 2.5 zeigen, dass für jede Option gilt (der Induktionsanfang für den Fall $n = 1$ ist übrigens genau die Aussage von Proposition 2.4), dass sich im Binomialmodell der eindeutige Optionspreis als auf $t = 0$ abgezinster Erwartungswert

bezüglich des risiko-neutralen Maßes Q der aus der Option resultierenden Zahlungen ergibt. Dieses Resultat gilt für beliebige vollständige Wertpapiermarktmodelle.

In einem vollständigen Markt und insbesondere im n -Perioden-Binomialmodell erhält man hieraus einen einfachen Algorithmus zur Berechnung eines Optionspreises. Die Grundlage dieses Algorithmus ist das Prinzip der Rückwärtsinduktion. Hierfür müssen folgende Tatsachen beachtet werden:

- Der Optionspreis im Endzeitpunkt T stimmt mit der Endzahlung der Option im jeweiligen Zustand überein.
- Der Optionspreis in jedem „Knoten des Baums“ ergibt sich als mit q (bzw. $1-q$) gewichtetes und mit $(1+r)^{-T/n}$ abgezinste Mittel der Optionspreise in den beiden nachfolgenden Knoten.

Die Funktionsweise dieses Algorithmus wird in Bild 14 für ein 2-Perioden-Binomialmodell und einen Put mit Ausübungspreis $K=118$ demonstriert. Aus den gewählten Preisverläufen (jeweils Anstieg um 20 %, Verlust von 1%) und dem risikolosen Zinssatz von $r = 0,05$ ergibt sich $q = 4/13$ für die risiko-neutrale Wahrscheinlichkeit eines Kursgewinns der Aktie in jedem Knoten. Die Optionspreise in den einzelnen Knoten des Baums lassen sich nun mit dem oben beschriebenen Rückwärtsalgorithmus beschreiben und stehen im Bild oberhalb des Aktienpreises in den einzelnen Knoten des Baums. Insbesondere steht der heutige Preis der Option direkt über dem Startaktienkurs.

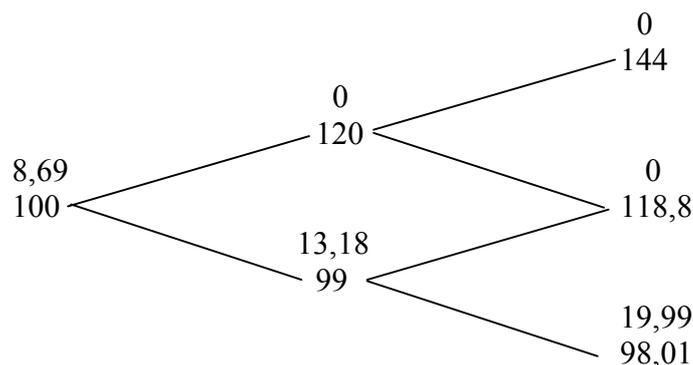


Bild 14: Preis eines europäischen Puts

Man beachte insbesondere, dass sich ein solcher Algorithmus ideal zum Programmieren eignet und auch für das Berechnen von Preisen von Optionen mit deutlich komplexeren Auszahlungen als ein einfacher Put geeignet ist.

ii) Bewertung amerikanischer Optionen im Binomialmodell

Bisher haben wir immer nur europäische Optionen im Binomialmodell betrachtet. Im Gegensatz zu einer europäischen Option kann bei einer amerikanischen Option jederzeit bis zum Ende der Laufzeit das Optionsrecht ausgeübt werden. Wir nehmen an, dass der Besitzer der Option sie nur dann ausüben wird, wenn er durch die mit der sofortigen Ausübung verbundenen Auszahlung (dem *inneren Wert der Option*) einen Betrag erhalten würde, der höher wäre als der Wert der Option, wenn man sie nicht ausüben würde. Man vergleicht also immer den inneren Wert mit dem Restwert der Option. Dies führt auch zu einer einfachen Berechnungsmethode des Preises einer amerikanischen Option im Binomialmodell, wenn wir

die oben beschriebene Rückwärtsinduktion um den Vergleich mit dem inneren Wert erweitern. Wir können hierzu die folgenden beiden Fakten verwenden:

- Der Optionspreis im Endzeitpunkt T stimmt mit der Endzahlung der Option im jeweiligen Zustand überein.
- Der Optionspreis in jedem „Knoten des Baums“ ergibt sich als das Maximum aus den mit q (bzw. $1-q$) gewichteten und mit $(1+r)^{-T/n}$ abgezinste Mittel der Optionspreise in den beiden nachfolgenden Knoten bzw. dem inneren Wert.

Die letzte Tatsache bedeutet genau, dass wir die Option direkt ausüben, wenn der innere Wert höher als der Wert der Option wäre, wenn man sie nicht ausüben würde. Der Algorithmus ist in Bild 15 mit denselben Werten wie in Bild 14 illustriert. Allerdings bewerten wir nun eine amerikanischen Put und müssen deshalb noch den inneren Wert der Option in jedem Knoten berücksichtigen.

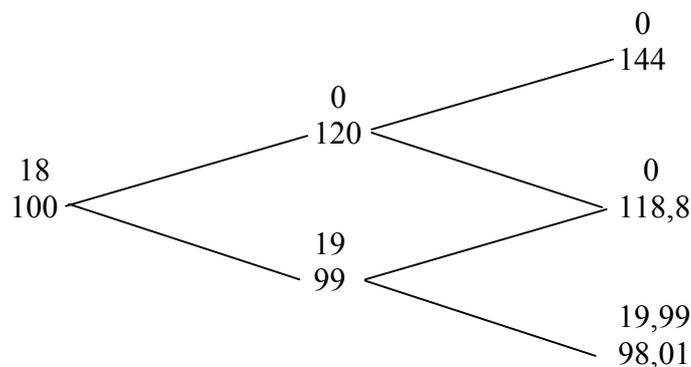


Bild 15 : Preis eines amerikanischen Puts

Vergleicht man die beiden Bilder 14 und 15, so stellt man fest, dass es für den amerikanischen Put immer optimal ist, ihn auszuüben, sobald der innere Wert positiv ist. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass der mögliche Gewinn aus dem Halten des Puts schwächer wächst als die risikolose Anlage. Dies ist keine Arbitragemöglichkeit, denn man muss den Put ja nicht halten, sondern kann ihn sofort ausüben. Gegenüber dem europäischen Put muss man im Fall des amerikanischen Puts nur den Wert ausüben, der sich ergeben würde, wenn man den Put in $t = 0$ nicht ausüben würde. Dieser Wert beträgt 12,53 und ist somit niedriger als der innere Wert des Puts von 18.

2.4 Die Black-Scholes-Formel für europäische Calls und Puts

Die Black-Scholes-Formel zur Bewertung europäischer Call- und Put-Optionen ist das herausragende Ergebnis der modernen Finanzmathematik. Ihre Bedeutung sowohl für die Theorie als auch die Praxis wurde nicht zuletzt durch die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften an Robert Merton und Myron Scholes für ihre Arbeiten zur Black-Scholes-Formel (siehe Black und Scholes (1973), Merton (1973)) im Jahr 1997 unterstrichen. Fischer Black erlebte diese große Auszeichnung nicht mehr, da er bereits 1995 verstarb.

Das der Black-Scholes-Formel zugrunde liegende Wertpapierpreismodell ist ein spezieller Fall des in Abschnitt 1.3 beschriebenen Modells, d.h. wir betrachten einen Markt, der aus

einer risikolosen Festgeldanlage zum Zinssatz r (und kontinuierlicher Verzinsung) und einer Aktie mit Ertragsrate b und Volatilität σ besteht. Wie in Abschnitt 1.3 sind die zugehörigen Wertpapierpreise dann durch

$$B(t) = e^{rt}, \quad S(t) = se^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

gegeben, wobei r, b, σ wieder reelle Zahlen sind.

Der mathematisch korrekte Zugang zur Herleitung der Black-Scholes-Formel im von uns bisher gewählten Rahmen wäre nun die Anwendung des Duplikationsprinzips (siehe z.B. Korn und Korn (1999); Black und Scholes (1973) haben einen anderen Zugang gewählt, der das Optionsbewertungsproblem auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randbedingungen, ein sogenanntes Cauchy-Problem, transformiert). Man erhält dann, dass sich der Optionspreis als der abgezinste Erwartungswert der Endzahlung der Option ergibt, wenn man in obigem Modell

$$b = r$$

annehmen würde. Diese Annahme hätte zur Folge, dass der diskontierte Aktienpreis $S(t)/B(t)$ Martingal wäre. Tatsächlich entspricht dies wiederum dem Übergang zur Bewertung mit dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß (siehe Kapitel III in Korn und Korn (1999)). Eine exakte Darstellung dieses Sachverhalts ist im Rahmen der uns zur Verfügung stehenden technischen Mittel in dieser Arbeit nicht möglich.

Statt dessen verwenden wir zur heuristischen Herleitung der Black-Scholes-Formel hier die Tatsache, dass sich das obige Black-Scholes-Modell durch eine Folge von Binomialmodellen approximieren lässt. Dies ergibt zwar noch lange nicht die Existenz einer Duplikationsstrategie, jedoch konvergiert zumindest die Folge der Optionspreise in den Binomialmodellen gegen den Black-Scholes-Preis. Unsere verwendete heuristische Methode basiert darauf, dass wir aus der zu den einzelnen Binomialmodellen gehörenden Folge risiko-neutraler Maße Q_n und dem Satz von de Moivre-Laplace ein Maß Q konstruieren. Dieses Maß ist tatsächlich das eindeutige risiko-neutrale Maß (also das eindeutige äquivalente Martingalmaß) im betrachteten zeit-stetigen Black-Scholes-Modell. Dies rigoros zu beweisen, übersteigt den Rahmen dieses Beitrags wesentlich. Für einen solchen Beweis sei wieder auf Korn und Korn (1999), Kapitel III verwiesen.

Zur heuristischen Herleitung betrachten wir jetzt also eine Folge von n -Perioden-Binomialmodellen, die gegen die obigen Preise im Black-Scholes-Modell konvergieren. Wenn man in den zu den Binomialmodellen gehörenden Märkten als risikolosen Zinssatz r_n immer jeweils

$$r_n = e^r - 1$$

wählt, wobei r der risikolose Zinssatz des Black-Scholes-Modells ist, so stimmen die Kursentwicklungen der risikolosen Anlage in allen Handelszeitpunkten der Binomialmodelle mit der des Black-Scholes-Modells überein. Wir haben also

$$B(j \cdot \frac{T}{n}) = S_0^{(n)}(j \cdot \frac{T}{n}) \quad \text{für alle } j = 0, 1, \dots, n,$$

wobei $S_0^{(n)}(\cdot)$ die Wertentwicklung der risikolosen Anlage im jeweiligen n -Perioden-Binomialmodell beschreibt.

Als nächstes betrachten wir uns den Aktienkurs. Wir verwenden die bereits in 1.3 angedeutete Möglichkeit der Approximation des Aktienkurses $S(t)$ durch eine Folge von Binomialpreisen,

d.h. wir bestimmen zu gegebener Aktienverzinsung b und Aktienvolatilität σ die Vermehrungsfaktoren u_n und d_n des n -Binomialmodells als

$$u_n = \exp\left(\tilde{r}\Delta t + \sigma \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{\Delta t}\right), \quad d_n = \exp\left(\tilde{r}\Delta t - \sigma \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{\Delta t}\right),$$

wobei $\tilde{r} = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, $\Delta t = T/n$ und p eine beliebige Zahl ist, die zwischen 0 und 1 liegt. Man erinnere sich in diesem Zusammenhang auch noch einmal daran, dass p keine Rolle für die Berechnung des Call-Preises im Binomialmodell spielte. Im Gegenteil, der Optionspreis im Binomialmodell wird bezüglich dem risiko-neutralen Maß (also bezüglich dem eindeutigen äquivalentes Martingalmaß) berechnet, d.h. zur Optionspreisberechnung kann man auch direkt das Binomialmodell mit den „Erfolgswahrscheinlichkeiten“ (also den Wahrscheinlichkeiten für eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses)

$$q_n = \frac{e^{rT/n} - d_n}{u_n - d_n}$$

verwenden. Da in diesen Märkten jetzt jeweils die Renditen der risikolosen Geldanlage und der Aktie gleichen Erwartungswert besitzen, sollte sich dies in einem sinnvollen Rahmen auch auf das als Grenzfall angestrebte Black-Scholes-Modell übertragen, was unsere spezielle Wahl von $b = r$ im Black-Scholes-Modell rechtfertigt. Da die Anzahl der Aufwärtsbewegungen des Aktienkurses X_n bezüglich Q_n eine $B(n, q_n)$ -Verteilung besitzt, müssen wir den Exponent von

$$S_1^{(n)}(T) = s \cdot \exp\left(X_n \ln\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + n \ln(d_n)\right)$$

in eine geeignete Form umschreiben, um den Satz von de Moivre-Laplace bezüglich der Folge der X_n unter Q_n anwenden zu dürfen. Wir beachten hierzu, dass mit der Definition der einzelnen „Zutaten“ folgt:

$$\begin{aligned} S_1^{(n)}(T) &= s \cdot \exp\left(\frac{X_n - nq_n}{\sqrt{nq_n(1-q_n)}}\sqrt{nq_n(1-q_n)}\ln\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + n\left(q_n \ln\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + \ln(d_n)\right)\right) \\ &= s \cdot \exp\left(\frac{X_n - nq_n}{\sqrt{nq_n(1-q_n)}}\sigma\sqrt{T} + \tilde{r}T\right). \end{aligned}$$

Da nach dem Satz von de Moivre-Laplace (ist wegen der verschiedenen q_n eigentlich nur approximativ oder aber jeweils für festes n anwendbar) der Ausdruck

$$\frac{X_n - nq_n}{\sqrt{nq_n(1-q_n)}}$$

für $n \rightarrow \infty$ standard-normal verteilt ist, ist der Exponent von $S(T)$ unter dem aus der obigen Folge Q_n hervor gehenden „Grenzmaß“ Q normal verteilt mit Erwartungswert $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ und Varianz $\sigma^2 T$.

Vertraut man dieser heuristischen Herleitung (das Ergebnis stimmt in der Tat (siehe Korn und Korn (1999))), so kann man sich also zur Optionspreisbestimmung auf den Fall $b = r$ zurück ziehen, d.h. wir können annehmen, dass wir uns in einem **risiko-neutralen Markt** befinden !

Wir erhalten dann den Optionspreis als erwartete abgezinste Endzahlung in diesem Markt und nicht in unserem ursprünglichen Markt, in dem b und r verschieden waren.

Also:

Zur Berechnung des Preises einer Call-Option im Black-Scholes-Modell berechnen wir

$$E\left(e^{-rT} \left(s e^{\sigma Z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K \right)^+\right),$$

wobei Z eine $N(0, T)$ -verteilte Zufallsvariable ist. Berechnet man diesen Erwartungswert explizit (wir geben den Beweis der Vollständigkeit halber an!), so erhält man:

Satz 2.7 „Black-Scholes-Formel“

a) Der eindeutige Preis p_{call} eines europäischen Calls mit Ausübungspreis K und Laufzeit T ist im Black-Scholes-Modell durch

$$p_{call} = sN(d_1) - Ke^{rT}N(d_2)$$

gegeben, wobei N die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist und d_1, d_2 als

$$d_1 = \frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

definiert sind.

b) Der eindeutige Preis p_{put} eines europäischen Puts mit Ausübungspreis K und Laufzeit T ist im Black-Scholes-Modell durch

$$p_{put} = Ke^{rT}N(-d_2) - sN(-d_1)$$

gegeben, wobei N, d_1, d_2 wie in a) definiert sind.

Bemerkungen:

1. *Existenz einer Duplikationsstrategie*

Es kann gezeigt werden, dass das oben beschriebene Black-Scholes-Modell bestehend aus der risikolosen Anlage und einer Aktie vollständig ist. Also existiert auch eine Duplikationsstrategie sowohl für den europäischen Call als auch den europäischen Put (siehe Korn und Korn (1999)). Dies sichert die Eindeutigkeit der jeweiligen Optionspreise für Put und Call.

2. *Unabhängigkeit von der Ertragsrate*

Der wohl entscheidende Grund für die Akzeptanz für die Black-Scholes-Formel in der Praxis ist die Unabhängigkeit des Optionspreises von der Ertragsrate b der Aktie, was ein Analogon zur Unabhängigkeit des Call-Preises von p im Binomialmodell darstellt. Der Festzins r lässt sich nämlich direkt am Markt beobachten, die Volatilität σ kann gut aus den Daten geschätzt werden, während es zwei verschiedene Investoren sicherlich schwer haben sich über den Wert der Ertragsrate b zu einigen. Deshalb war für die Praktiker eine wissenschaftlich fundierte Optionspreisformel, in der dieser umstrittene Parameter nicht vorkam, natürlich ein willkommenes Resultat.

3. Äquivalentes Martingalmaß

Das oben heuristisch „hergeleitete“ Maß Q ist tatsächlich das eindeutige äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell. Um es rigoros zu konstruieren, benötigt man tiefliegende Resultate aus der Theorie der stochastischen Prozesse (siehe z.B. Korn und Korn (1999)).

4. Berechnung des Preises

Die Hauptarbeit beim Lösen des Optionsbewertungsproblems im Black-Scholes-Modell besteht darin, die Vollständigkeit des Marktes zu zeigen und das äquivalente Martingalmaß Q zu konstruieren. Danach ist „nur noch“ der zur Option gehörige abgezinste Erwartungswert der Endzahlung bezüglich zu berechnen. Dies kann im Einzelfall noch sehr schwierig sein. Im Fall der europäischen Put- und Call-Option ist dies allerdings nicht allzu schwierig, weswegen wir dies auch exemplarisch für den Call vorführen.

5. Nobelpreis für Finanzmathematik

Wegen der überragenden theoretischen und praktischen Bedeutung der Black-Scholes-Formel erhielten Robert Merton und Myron Scholes 1973 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für ihre Arbeiten zur Optionsbewertung. Fischer Black erlebte diese Krönung seiner Arbeit nicht mehr. Er starb bereits 1995.

Beweis der Black-Scholes-Formel: (nur für den Fall des europäischen Calls)

Wir nehmen an, dass σ positiv ist. Der Fall eines negativen σ ist analog. Nach der Vorbemerkung ist lediglich der folgende Erwartungswert zu berechnen:

$$\begin{aligned} E\left(e^{-rT} \left(se^{\alpha Z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right)^+\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \left(se^{\alpha x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right)^+ e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{-rT} \left(se^{\alpha x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right) e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \end{aligned}$$

wobei der Wert c , ab dem der Positivteil des Integranden strikt positiv ist, durch

$$c = \frac{\ln(K/s) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}$$

gegeben ist. Jetzt kann man die Differenz unter dem Integral auflösen und muss nur noch die zwei entstehenden Integrale berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{-rT} se^{\alpha x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} se^{-\frac{(x + \sigma T)^2}{2T}} dx = sN\left(-\frac{c + \sigma T}{\sqrt{T}}\right) = sN\left(\frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{-rT} Ke^{-\frac{x^2}{2T}} dx &= e^{-rT} K \cdot N\left(-\frac{c}{\sqrt{T}}\right) = e^{-rT} K \cdot N\left(\frac{\ln(s/K) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung:

Die Black-Scholes-Formel kann sehr gut durch die beiden binomialen Formeln aus den Sätzen 2.4/5 approximiert werden, wenn man $n \geq 30$ wählt.

2.5 Modellunabhängige Preisgrenzen für Optionen und die Put-Call-Parität

Alle bisher berechneten Optionspreise hingen vom verwendeten Modell für den Aktienkurs ab. Somit ist auch ihre Richtigkeit ganz wesentlich von der Richtigkeit des zugrunde liegenden Aktienkursmodells abhängig. Wir können aber insbesondere bei den einfachen von uns verwendeten Modellen nicht unbedingt erwarten, dass sie die Realität exakt wiedergeben.

Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen wollen wir in diesem Abschnitt überhaupt keine (wesentlichen) Annahmen an die Aktienpreisverläufe in unserem betrachteten Wertpapiermarkt machen. Man sollte deshalb natürlich auch nicht ähnlich explizite, geschlossene Formeln wie die Black-Scholes-Formeln für die Preise einzelner Optionen erwarten. Der Preis, den wir für die Allgemeingültigkeit der unten erzielten Resultate zu zahlen haben, besteht darin, dass wir lediglich Schranken für die Preise europäischer und amerikanischer Put- und Call-Optionen berechnen werden (die Darstellung in diesem Abschnitt lehnt sich stark an Abschnitt III.5 in Korn und Korn (1999) an). Die einzige Annahme, die wir von unserem Marktmodell fordern, ist:

Annahme NA: Der betrachtete Wertpapiermarkt ist arbitrage-frei.

Diese Annahme ist sicherlich das Minimum an Voraussetzungen, unter das man nicht gehen kann, da sonst überhaupt keine sinnvolle Methode zur Optionspreisbestimmung möglich ist. Wir weisen auch noch einmal darauf hin, dass bei vorhandener Möglichkeit, ohne Kapitaleinsatz Gewinn zu erzielen, diese von allen Marktteilnehmern sofort wahrgenommen werden würde, worauf dann der Markt seinerseits mit sofortiger Preisänderung reagieren würde, bis keine Arbitragemöglichkeit mehr vorhanden wäre.

Die Beweistechnik, die im Folgenden für alle unsere behaupteten Schranken verwendet werden wird, beruht auf dem Prinzip, dass man immer eine Arbitragestrategie angeben kann, wenn die jeweilige Preis-Schranke verletzt wäre. Da aber unser Markt gemäß Annahme arbitragefrei ist, ist somit – auf indirekte Art – gezeigt, dass die Schranke gültig sein muss. Wir sprechen deshalb auch von **Arbitragegrenzen** (oder **Arbitrageschranken**). Für die tatsächliche Gültigkeit der im Folgenden hergeleiteten Arbitragegrenzen ist daher im jeweiligen Marktmodell nur dessen Arbitragefreiheit zu überprüfen.

Ein weiterer Vorteil der in diesem Abschnitt hergeleiteten Grenzen wird darin bestehen, dass sie auch für Optionen vom amerikanischen Typ gültig sein werden. Wir erinnern hieran, dass es z.B. im Black-Scholes-Modell keine explizite Formel für den Preis eines amerikanischen Puts gibt! Mehr noch, da wir bei amerikanischen Optionen immer die Möglichkeit der sofortigen Ausübung des Optionsrechts haben, lassen sich durch Vergleich mit dem sogenannten **inneren Wert**, also mit der Zahlung, die der Optionshalter bei sofortiger Ausübung erhalten würde, relativ leicht Arbitragegrenzen herleiten.

Offenbar sind die folgenden Schranken für Preise amerikanischer und europäischer Puts gültig,

$$C_E(t, S_1(t)) \geq 0, P_E(t, S_1(t)) \geq 0, C_A(t, S_1(t)) \geq 0, P_A(t, S_1(t)) \geq 0,$$

wobei C_E, C_A jeweils Preise europäischer und amerikanischer Calls und P_E, P_A Preise europäischer und amerikanischer Puts bezeichnen. $S_1(t)$ ist jeweils der aktuelle Preis der zugrunde liegenden Aktie.

Zum „Beweis“ obiger Relationen beachte man, dass im Fall negativer Preise sogar die Strategie

- „Kaufe die jeweilige Option und lasse sie ohne Ausübung verfallen“

eine Arbitragestrategie ist, da der Investor in $t=0$ einen Geldbetrag erhält (nämlich den negativen „Optionspreis“!) und später keine Zahlung aus dieser Strategie heraus zu leisten hat.

Zum weiteren Vorgehen machen wir noch die

Annahme RA: Es sei zu jedem Zeitpunkt t möglich ist, Geld zum risikolosen Zinssatz r anlegen oder leihen zu können.

Wir erhalten dann das erste nicht-triviale Resultat:

Proposition 2.8

a) Für den Preis $C_A(t, S_1(t))$ eines amerikanischen Calls mit Ausübungspreis $K \geq 0$ gilt

$$(S_1(t) - K)^+ \leq C_A(t, S_1(t)) \leq S_1(t).$$

b) Für den Preis $P_A(t, S_1(t))$ eines amerikanischen Puts mit Ausübungspreis $K \geq 0$ gilt

$$(K - S_1(t))^+ \leq P_A(t, S_1(t)) \leq K.$$

Beweis:

Wir werden im folgenden nur die Arbitragegrenzen aus Behauptung a) mittels der oben beschriebenen indirekten Methode beweisen. Die Grenzen aus Teil b) folgen auf analoge Weise. Der zugehörige Beweis wird dem Leser als leichte Übung überlassen.

Würde die Beziehung $(S_1(t) - K)^+ > C_A(t, S_1(t))$ gelten, so wäre die Strategie

- „Kaufe die Option zum Preis $C_A(t, S_1(t))$, übe sie sofort aus und lege die erzielte Differenz risikolos ab“

eine Arbitragestrategie. Sie liefert nämlich in t die per Annahme positive Zahlung

$$S_1(t) - K - C_A(t, S_1(t)) > 0,$$

die Differenz zwischen dem inneren Wert der Option und dem Optionspreis. Legt man diese positive Zahlung bis zum Zeithorizont T risikolos an, so erhält man ein positives Endvermögen, also einen risikolosen Gewinn ohne Kapitaleinsatz.

Würde $S_1(t) < C_A(t, S_1(t))$ gelten, so wäre die folgende Strategie eine Arbitragestrategie:

- „Verkaufe den Call für $C_A(t, S_1(t))$, kaufe die Aktie für $S_1(t)$ und lege den positiven Rest $C_A(t, S_1(t)) - S_1(t)$ zum risikolosen Zinssatz r an“

Je nach Verwendung der Option durch den Optionskäufer entstehen jetzt zwei Fälle. Übt der Käufer irgendwann die Option aus, so erhält er die Aktie und zahlt dafür an den Verkäufer der Option K Geldeinheiten. Übt er hingegen die Option nie aus, so behält der Verkäufer die Aktie. Unabhängig hiervon erzielt der Optionsverkäufer immer mindestens ein **strikt positives Endvermögen** in Höhe des risikolos investierten Anfangsgewinns,

$$(C_A(t, S_1(t)) - S_1(t)) e^{r(T-t)},$$

ohne ein positives Anfangsvermögen zu benötigen, was zeigt, dass die beschriebene Strategie eine Arbitragestrategie ist.

Insgesamt haben wir somit die Ungleichung aus Behauptung a) gezeigt. □

Da man bei amerikanischen Optionen die freie Wahl des Ausübungszeitpunkts hat, bei europäischen Optionen aber nur am Ende der Laufzeit ausüben darf, gelten für amerikanische und europäische Optionen mit gleicher Laufzeit und gleichem Ausübungspreis offenbar die Beziehungen

$$C_A(t, S_1(t)) \geq C_E(t, S_1(t)), \quad P_A(t, S_1(t)) \geq P_E(t, S_1(t)) .$$

Diese Beziehungen werden für den Beweis der folgenden Proposition benötigt:

Proposition 2.9

a) Für den Preis $C_E(t, S_1(t))$ eines europäischen Calls mit Ausübungspreis $K \geq 0$ und Laufzeit T gilt

$$(S_1(t) - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq C_E(t, S_1(t)) \leq S_1(t) .$$

b) Für den Preis $P_E(t, S_1(t))$ eines europäischen Puts mit Ausübungspreis $K \geq 0$ und Laufzeit T gilt

$$(Ke^{-r(T-t)} - S_1(t))^+ \leq P_E(t, S_1(t)) \leq K .$$

Beweis:

Es wird wiederum nur die Aussage a) gezeigt werden. Wegen Proposition A1 und den Beziehungen zwischen den Preisen europäischer und amerikanischer Calls gilt offenbar

$$C_E(t, S_1(t)) \leq S_1(t) .$$

Wir nehmen nun an, dass

$$(*) \quad (S_1(t) - e^{-r(T-t)}K)^+ > C_E(t, S_1(t))$$

gelten würde, wobei wegen der Nicht-Negativität des Call-Preises automatisch der Positivteil in der obigen Ungleichung strikt positiv sein müsste. Damit wäre die folgende Strategie eine Arbitragestrategie:

- „Kaufe den Call für $C_E(t, S_1(t))$, führe einen Leerverkauf einer Aktie zum Preis $S_1(t)$ durch (d.h. verkaufe die Aktie ohne sie zu besitzen und liefere sie zu einem späteren Zeitpunkt) und lege den positiven Rest $S_1(t) - C_E(t, S_1(t))$ zum risikolosen Zinssatz r an“.

Unter der Annahme (*) erhält man so im Zeitpunkt $t=T$ das verzinste Kapital

$$(S_1(t) - C_E(t, S_1(t))) \cdot e^{r(T-t)} > K ,$$

wobei aber noch der getätigte Leerverkauf auszugleichen ist. D.h. es muss noch die zugehörige Aktie erworben und kostenlos an den Partner des Leerverkaufs geliefert werden. Hierfür ergeben sich in $t=T$ die beiden folgenden Möglichkeiten:

i) $S_1(T) > K$

In diesem Fall ist es günstig, die Aktie zum Preis K durch Ausüben des Call am Laufzeitende zu erwerben. Mit ihr gleicht man den in t getätigten Leerverkauf aus und hat dann insgesamt in T den Gewinn von

$$(S_1(t) - C_E(t, S_1(t))) \cdot e^{r(T-t)} - K > 0$$

realisiert.

ii) $S_1(T) \leq K$

Jetzt ist es günstiger, die Aktie am Markt zum Preis $P_1(T) \leq K$ zu erwerben und damit den Leerverkauf auszugleichen. Man lässt gleichzeitig die Option verfallen. Man erhält hier als Gewinn

$$(S_1(t) - C_E(t, S_1(t))) \cdot e^{r(T-t)} - P_1(T) > K - K = 0.$$

Da man nun in beiden Fällen ein strikt positives Endvermögen ohne Einsatz von Anfangskapital erhalten hat, ist die gewünschte Existenz einer Arbitragemöglichkeit gezeigt. \square

b) Der analoge Beweis bleibt dem Leser überlassen.

Bemerkung:

a) Schaut man sich nun die Resultate aus den Propositionen 2.8 und 2.9 sowie die Beziehungen zwischen den Preisen europäischer und amerikanischer Optionen an, so fällt eine Unsymmetrie zwischen Put und Call auf. So gilt die Ungleichung für europäische Calls aus Proposition 2.9 a) auch für amerikanische Calls (die ja mindestens so viel wert sind wie ihr europäisches Gegenstück), d.h. es gilt auch

$$(S_1(t) - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq C_E(t, S_1(t)) \leq S_1(t),$$

und diese Ungleichung stellt eine echte Verschärfung der analogen Beziehung aus Proposition 2.8 a) dar. Hingegen ist die Ungleichung für europäische Puts aus Teil b) von Proposition 2.9 schwächer als ihr Gegenstück für amerikanische Puts in Proposition 2.8 b).

b) Den oben hergeleiteten Beziehungen in Proposition 2.9 liegt auch implizit die Annahme zugrunde, dass die Aktie während der Laufzeit keine Dividende zahlt (sonst bekäme man im Beweis Probleme mit dem Leerverkauf!). Dies wurde nicht explizit gefordert, da wir bisher sowieso nie eine Dividendenmöglichkeit modelliert haben.

Man kann nun auch versuchen, für andere Optionstypen Arbitragegrenzen zu finden. Allerdings sollte man sich auch im Klaren darüber sein, dass die oben gefundenen Schranken nicht sonderlich gut sind. Oft ist das zugehörige Intervall doch recht groß. Wir wollen uns deshalb der Aufgabe zuwenden, Schranken bzw. Preisbeziehungen für Portfolios von Optionen zu bestimmen. Das berühmteste und für die praktische Anwendung relevanteste Beispiel in diesem Zusammenhang ist die sogenannte *Put-Call-Parität*:

Satz 2.10 „Put-Call-Parität für europäische Optionen“

Für die Preise $P_E(t, S_1(t))$, $C_E(t, S_1(t))$ von europäischen Put- und Call-Optionen mit gleicher Laufzeit T und gleichem Ausübungspreis K gilt

$$(PCP) \quad C_E(t, S_1(t)) + K e^{-r(T-t)} = P_E(t, S_1(t)) + S_1(t)$$

(falls die zugehörige Aktie während der Laufzeit der Optionen keine Dividende zahlt!).

Beweis:

Die Beziehung (PCP) ist offenbar äquivalent zur Gleichung

$$(+)\quad C_E(t, S_1(t)) - P_E(t, S_1(t)) = S_1(t) - Ke^{-r(T-t)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht gerade dem Wert der Strategie, einen Call zu halten und einen Put leer zu verkaufen. Die rechte Seite gehört zur Strategie, einen Aktienkauf durch einen Kredit in Höhe von Ke^{-rT} Geldeinheiten zu finanzieren. Offenbar führen beide Strategien zum gleichen Endvermögen, denn es gilt

$$C_E(T, S_1(T)) - P_E(T, S_1(T)) = (S_1(T) - K)^+ - (K - S_1(T))^+ = S_1(T) - K.$$

Da beide Strategien zum gleichen Endvermögen führen (und zwischendurch keine weiteren Zahlungen liefern), muss auch ihr Wert im Zeitpunkt t übereinstimmen, woraus die Gültigkeit von (+) in $t=T$ folgt. Wäre sie in einem Zeitpunkt $t < T$ nicht gegeben, so bestünde eine Arbitragemöglichkeit darin, die teurere der beiden zugehörigen Strategien zu „verkaufen“ (d.h. die entsprechenden negativen Positionen zu halten) und die billigere zu „kaufen“. Dies würde in t zu einer positiven Zahlung führen, die risikolos angelegt werden könnte. Da sich – wie oben bereits gezeigt – die zugehörigen Endzahlungen der beiden Strategien neutralisieren, hätten wir wieder ohne Anfangsvermögen ein strikt positives Endvermögen erzielt. Folglich muss (+) und somit auch (PCP) für alle $t \in [0, T]$ gelten. \square

Bemerkungen:

a) Man kann die Put-Call-Parität auch graphisch beweisen, indem man sich die Payoff-Diagramme der Endzahlungen der beiden Seiten von (PCP) oder äquivalent dazu von (+) ansieht und feststellt, dass sie übereinstimmen (siehe Bild 16) :

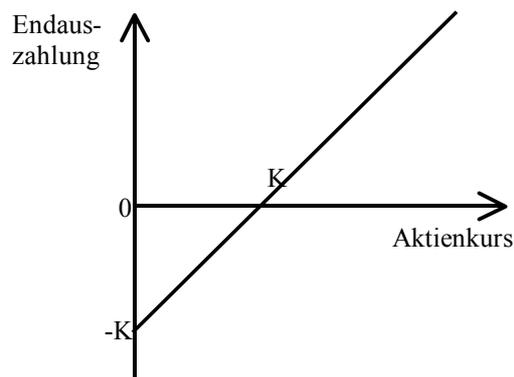


Bild 16: Payoff-Diagramm der Summe „Call–Put“

b) Da die Put-Call-Parität modellunabhängig ist, lässt sie sich natürlich auch im Black-Scholes-Modell anwenden. Sie liefert uns hier auch eine einfache Beweismöglichkeit der Black-Scholes-Formel für einen europäischen Put, wenn der Preis für den Call schon bekannt ist:

$$\begin{aligned} P_E(t, S_1(t)) &= C_E(t, S_1(t)) - S_1(t) - Ke^{-r(T-t)} \\ &= S_1(t) \cdot \Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t)) - S_1(t) - Ke^{-r(T-t)} \\ &= -S_1(t) \cdot (1 - \Phi(d_1(t))) + Ke^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2(t))) \\ &= -S_1(t) \cdot (\Phi(-d_1(t))) + Ke^{-r(T-t)} (\Phi(-d_2(t))). \end{aligned}$$

c) Eine weitere wichtige Konsequenz aus der Put-Call-Parität ist die, dass der Preis eines Puts bereits dann eindeutig festgelegt ist, wenn ein Call-Preis am Markt existiert. Die Verletzung der Put-Call-Parität war in der Vergangenheit die häufigste Ursache von Arbitragemöglichkeiten am Optionsmarkt.

Es wäre nun wünschenswert, wenn es auch ein zur Put-Call-Parität analoges Resultat für den Fall amerikanischer Optionen gäbe. Allerdings werden wir nur eine Ungleichung für die Beziehung zwischen den Preisen amerikanischer Calls und Puts zeigen können. Dies liegt im wesentlichen daran, dass es bei gleichem Ausübungspreis nie gleichzeitig vorteilhaft sein kann, einen Put und einen Call auszuüben. Um diese Beziehung zu beweisen benötigen wir noch ein deutlich überraschenderes Resultat, die Gleichheit der Preise europäischer und amerikanischer Calls mit gleichen Randbedingungen, sofern die Aktie keine Dividende während der Laufzeit der Optionen zahlt:

Proposition 2.11

Zahlt die zugrunde liegende Aktie während der Laufzeit T eines europäischen und eines amerikanischen Calls mit gleichem Ausübungspreis K keine Dividenden und ist der risikolose Zinssatz r positiv, so gilt für die Preise der beiden Optionen

$$C_A(t, S_1(t)) = C_E(t, S_1(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Insbesondere ist es nie vorteilhaft, den amerikanischen Call vorzeitig auszuüben.

Beweis:

Aufgrund der bisher bewiesenen Beziehungen gilt:

$$(\#) \quad C_A(t, S_1(t)) \geq C_E(t, S_1(t)) \geq (S_1(t) - e^{-r(T-t)}K)^+.$$

Da es nur dann vorteilhaft sein kann, einen amerikanischen Call auszuüben, wenn sein innerer Wert positiv ist, also $S_1(t) > K$ gilt, erhält man in diesem Fall hat man aber wegen $r > 0$ und (#)

$$C_A(t, S_1(t)) \geq (S_1(t) - e^{-r(T-t)}K)^+ > (S_1(t) - K)^+ = S_1(t) - K.$$

Folglich muss der tatsächliche Wert eines amerikanischen Calls vor dem Laufzeitende T immer **strikt** größer als sein innerer Wert $S_1(t) - K$ sein. Somit kann Ausüben des amerikanischen Calls nur im Zeitpunkt T vorteilhaft sein. Also sind die Zahlungen, die sich aus dem Besitz eines amerikanischen und dem eines europäischen Calls ergeben, gleich, woraus wegen der Voraussetzung der Arbitragefreiheit dann die Behauptung folgt. \square

Bemerkung

Die Gleichheit im Preis zwischen europäischem und amerikanischem Call mutet zunächst paradox an. Schließlich hat der Besitzer des amerikanischen Calls mehr Wahlrechte. Natürlich hat der Besitzer einer amerikanischen Option, die tief im Geld ist (d.h. bei der der zugehörige Aktienkurs weit über dem Ausübungspreis liegt), das Bedürfnis, diese für ihn günstige Situation auszunutzen. Da das vorzeitige Ausüben des Calls nach Proposition 2.11 unvorteilhaft ist, bleibt ihm hierzu nur noch die Möglichkeit, die Option zu verkaufen. Dies bringt ihm aufgrund von Ungleichung (#) einen höheren Erlös als das Ausüben der Option.

Auch unter dem Gesichtspunkt, die Option nur zu halten, um sich ein Kaufrecht auf die Aktie zu sichern, ist es nicht vorteilhaft, den amerikanischen Call vorzeitig auszuüben. Der vereinbarte Kaufpreis der Aktie wird auch bei einem weiteren Kursanstieg nicht größer als K . Im Gegenteil, übt der Call-Besitzer frühzeitig aus und fällt der Aktienkurs dann während der verbliebenen Zeit, so dass er in $t=T$ unterhalb von K liegt, so wäre die Aktie beim späten Ausüben der Option in $t=T$ billiger zu erwerben gewesen. Solange der gewillte Aktienkäufer die Option noch nicht ausgeübt hat, ist er gegen Kursschwankungen der Aktie abgesichert. Schlimmstenfalls lässt er in $t=T$ die Option wertlos verfallen, kann sich aber dann mit einem billigeren Kaufpreis der Aktie am Markt trösten. Außerdem würde er bei einem vorzeitigen Ausüben die Zinsen des zum Aktienwerb bereitgehaltenen Geldes verlieren, die sich bei risikoloser Anlage bis $t=T$ ergeben.

Es wird nun noch die versprochene zu (PCP) analoge Arbitragebeziehung für amerikanische Puts und Calls.

Satz 2.12 „Put-Call-Beziehung für amerikanische Optionen“

Unter den Voraussetzungen von der Put-Call-Parität gilt die Ungleichung:

$$(PCB) \quad S_1(t) - K \leq C_A(t, S_1(t)) - P_A(t, S_1(t)) \leq S_1(t) - K e^{-r(T-t)} .$$

Beweis:

i) Wenn wir die Put-Call-Parität für europäische Optionen und die Beziehungen

$$C_A(t, S_1(t)) = C_E(t, S_1(t)) , \quad P_A(t, S_1(t)) \geq P_E(t, S_1(t))$$

verwenden, erhalten wir die rechte Ungleichung in der Beziehung (PCB).

ii) Die linke Ungleichung in (PCB) beweisen wir wieder mit der üblichen indirekten Methoden. Wir nehmen also an, dass in einem Zustand $(t, S_1(t))$ die umgekehrte Beziehung gelten würde. Dann erzeugen wir durch den Verkauf der teureren Strategie und Kauf der billigen Strategie eine Arbitragemöglichkeit. Genauer verfolgen wir die Strategie:

- „Kaufe den Call, verkaufe den Put, verkaufe eine Aktie für $S_1(t)$ leer, lege K Geldeinheiten zum risikolosen Zinssatz r an“

Dann macht man nach obiger Annahme im Zeitpunkt t einen Gewinn der Höhe

$$P_A(t, S_1(t)) - C_A(t, S_1(t)) + K - S_1(t) < 0 .$$

Je nach Verhalten des Putkäufer ergeben sich zwei Fälle:

1. Fall: Der Put wird vor T ausgeübt

Dann muss der Putverkäufer (also der Investor, der obiger Strategie verfolgt) die Aktie zum Preis K erwerben, die er dann sofort zum Ausgleich des anfangs getätigten Aktienleerverkaufs verwendet. Er besitzt dann noch den Call sowie den nicht zum Aktienkauf benötigten Teil des risikolos angelegten Gelds, sowie den in t erzielten positiven Gewinn, der risikolos angelegt wurde. Insgesamt erhält er somit ein strikt positives Endvermögen.

2. Fall: Der Put wird nicht vor T ausgeübt

Dann ergeben sich in T zwei Unterfälle:

$S_1(T) \geq K$: Der Halter obiger Strategie kauft mit Hilfe des Calls die Aktie zum Preis K und gleicht mit ihr den Leerverkauf aus. Es bleiben ihm dann noch der nicht zum Aktienkauf benötigte Teil des risikolos angelegten Gelds sowie der risikolos angelegte Anfangsgewinn.

$S_1(T) < K$: Jetzt wird der Put ausgeübt. Der Halter der obigen Strategie muss somit die Aktie zum Preis K kaufen und gleicht mit ihr den Leerverkauf aus. Wiederum bleiben ihm dann noch der nicht zum Aktienkauf benötigte Teil des risikolos angelegten Gelds sowie der risikolos angelegte Anfangsgewinn.

Zusammenfassend wurde somit gezeigt, dass die angegebene Strategie eine Arbitragestrategie ist, womit die noch zu zeigende Behauptung folgt.

2.6 Exotische Optionen

Der Handel mit Optionskontrakten (und hier auch gerade der spekulative Handel) wurde in den zurück liegenden Jahrzehnten so populär, dass Angebot und Nachfrage nach Optionen, die von einem anderen Typ als die Standardbeispiele Call und Put sind, heute ganz enorm ist. Man hat als Oberbegriff für diese neuen Optionstypen die Bezeichnung *exotische Optionen* geprägt. Neben ihrem spekulativen Charakter haben sie auch andere, vorteilhafte Aspekte, bergen aber auch z.T. größere Risiken. Es sollen hier nur einige Beispiele vorgestellt werden. Wir machen noch folgende

Annahme: Wir befinden uns in einem Black-Scholes-Markt mit einer Aktie. Alle Optionen seien vom europäischen Typ

i) Alles-oder-Nichts-Option

Wie der Name bereits sagt erhält der Besitzer einer Alles-oder-Nichts-Option am Ende der Laufzeit der Option entweder den maximal möglichen Auszahlungsbetrag (den wir hier der Einfachheit halber auf $B = 1$ festsetzen) oder aber keine Auszahlung. Beim Alles-oder-Nichts-Call erhält der Besitzer die maximale Endzahlung, also eine Geldeinheit, falls die zugrunde liegende Aktie am Verfalltag der Option einen Kurs von mindestens K Geldeinheiten hat, ansonsten fließt keine Zahlung an den Halter der Option. Beim Alles-oder-Nichts-Put ist es genau umgekehrt: Der Optionshalter erhält die eine Geldeinheit, falls Aktienkurs am Verfalltag unterhalb von K liegt, ansonsten erfolgt keine Zahlung. Die Besonderheiten der Alles-oder-Nichts-Optionen im Vergleich zu den bisher kennen gelernten Calls oder Puts liegen also in:

- einer unstetigen Endzahlung
- einer Endzahlung, die nur zwei mögliche Werte annehmen kann, nämlich 0 oder 1

Mit Hilfe des im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Bewertungsprinzips ist es nun relativ einfach, die Preise der beiden Alles-oder-Nichts-Optionen zu bestimmen. Es gilt nämlich

$$p_{\text{alles-oder-nichts-call}} = Q(S_1(T) \geq K), \quad p_{\text{alles-oder-nichts-put}} = Q(S_1(T) < K),$$

wobei Q das äquivalente Martingalmaß bezeichnet. Man beachte hierfür, dass der Erwartungswert einer Zufallsvariablen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann (und genau eine solche ist die Endzahlung einer Alles-oder-Nichts-Option !) gerade gleich der Wahrschein-

lichkeit ist, mit der von ihr der Wert 1 angenommen wird. Ähnlich wie im Fall der europäischen Calls und Puts lassen sich nun die obigen Wahrscheinlichkeiten berechnen als (siehe auch Kapitel 4 in Korn und Korn (1999)):

$$P_{\text{alles-oder-nichts-call}} = e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln(P_1/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

$$P_{\text{alles-oder-nichts-put}} = e^{-rT} \Phi \left(-\frac{\ln(P_1/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Natürlich lassen sich analoge Formeln im n-Perioden-Binomialmodell berechnen, was dem Leser zur Übung empfohlen wird.

ii) Barriere-Optionen

Die Haupteigenschaft einer Barriere-Option ist die, dass bei ihr das Unter- oder Überschreiten einer gegebenen Barriere durch den Aktienkurs während der Laufzeit des Optionsvertrags eine entscheidende Bedeutung hat. So ist z.B. die Endzahlung eines *Knock-Out-Barrier-Calls* mit Schranke C und Ausübungspreis K durch

$$B = (S_1(T) - K)^+ \mathbf{1}_{\{S(t) < C \forall t \leq T\}}$$

gegeben. D.h. der Besitzer eines solchen Knock-Out-Barrier-Calls erhält nur dann am Ende der Laufzeit der Option die Auszahlung eines gewöhnlichen Calls mit Ausübungspreis K , wenn der Aktienkurs nie vor dem Ende der Laufzeit der Option die Barriere C überschreitet. Sobald hingegen diese Schranke überschritten wird, verfällt der Knock-Out-Barrier-Call wertlos. Man kann sich nun einfach die weiteren möglichen Varianten wie z.B. den *Knock-In-Barrier-Call* oder den *Knock-Out-Barrier-Put* vorstellen. Hierbei kann es sich auch um untere statt obere Schranken handeln. Auch Doppelbarriere-Optionen (d.h. es existieren gleichzeitig untere und obere Schranken für den Aktienpreis) werden in ihren verschiedenen Varianten gehandelt, wobei der wesentliche Unterschied darin besteht, dass es für die einfachen Barriere-Optionen geschlossene (komplizierte) Formeln zur Preisberechnung gibt (siehe Kapitel IV in Korn und Korn (1999)), während der Preis einer Doppelbarriere-Option im Allgemeinen nur mittels numerischer Verfahren approximativ berechnet werden kann.

Der praktische Vorteil einer Barriere-Option besteht darin, dass sie natürlich billiger ist als die entsprechende Put- oder Call-Option. Allerdings wird auch das Risiko, keine positive Endzahlung zu erhalten, gegenüber einem einfachen Put oder Call deutlich erhöht.

iii) Asiatische Optionen

Eine weitere populäre Klasse ist die der asiatischen Optionen. Sie besteht im wesentlichen aus Optionen, bei denen die Endauszahlung eine Funktion vom durchschnittlichen Wert des Aktienkurse während der Laufzeit der Option ist, wie z.B.

$$B = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K \right)^+.$$

Auch hier gibt es in der Regel nur die Möglichkeit, den Optionspreis mittels numerischer Verfahren näherungsweise zu berechnen.

Der Sinn einer solchen asiatischen Option besteht darin, dass es in Märkten mit wenigen Marktteilnehmern (wie z.B. im Gold- oder im Ölmarkt) für einzelne Teilnehmer möglich ist, den Preis des gehandelten Guts an wenigen Tagen stark zu beeinflussen. Dies kann aber für einen europäischen Call verheerende Auswirkungen haben, da seine Endzahlung nur vom Preis des zugrunde liegenden Guts im Endzeitpunkt abhängt. Da es aber für jeden Marktteilnehmer schwer sein wird, den Preis des Guts während einem kompletten Zeitraum zu beeinflussen, hat man die asiatischen Optionen eingeführt, bei denen die Preise des Guts zu allen Zeitpunkten mit gleichem Gewicht in die Endzahlung der Option eingehen. Die explizite analytische Bestimmung eines Preises einer asiatischen Option vom oben vorgestellten Typ ist bisher nicht gelungen. Auch hier muss auf numerische Methoden zurück gegriffen werden.

iv) Pfadunabhängige exotische Optionen

Im Gegensatz zur Alles-oder-Nichts-Option (die auch als „Digital-Option“ bezeichnet wird) waren die Endzahlungen einer Barriere-Option oder einer asiatischen Option vom vollständigen Verlauf des Aktienpreises während der Laufzeit der Optionen abhängig. Man nennt solche Optionen deshalb auch *pfadabhängige* Optionen. Die Berechnung ihrer Preise ist deutlich schwieriger als die Berechnung der Preise *pfadunabhängiger* exotischer Optionen, bei denen die Endzahlung der Option lediglich eine (wenn auch manchmal komplizierte) Funktion des Aktienkurses am Ende der Laufzeit der Option ist. Typischerweise handelt es sich bei pfadunabhängigen Optionen um Optionen, deren Endzahlung vom Kurs mehrerer Wertpapiere abhängt. Ein klassisches Beispiel ist die sogenannte **Basketoption**, die es in mehreren Ausprägungen gibt. Wir betrachten hier einen Basket-Call auf zwei Aktie, deren Preise (im risikoneutralen Markt) im Zeitpunkt T die Darstellungen

$$S_1(T) = s_1 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_1(T)\right), \quad S_2(T) = s_2 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2 W_2(T)\right)$$

besitzen, wobei für die Zufallsvariablen $W_1(T)$, $W_2(T)$ gilt:

$$W_1(T) \sim N(0, T), \quad W_2(T) \sim N(0, T), \quad \text{Korr}(W_1(T), W_2(T)) = \rho \in (-1, 1).$$

Die Endzahlung des Basket-Calls mit Ausübungspreis K ist dann durch

$$B_{B-call} = (S_1(T) + S_2(T) - K)^+$$

gegeben, wobei auch hier keine geschlossene Formel für den Optionspreis vorhanden ist.

Die mittlerweile vorhandene Fülle exotischer Optionen ist fast nicht mehr überschaubar, und dank ausgefeilter mathematischer Modelle nimmt ihre Vielfalt sogar noch zu. Umgekehrt sind es oft die (großen) Marktteilnehmer, die mit Forderungen wie „Wenn der DAX innerhalb einer Woche um 10% fällt, möchte ich die Hälfte meines Verlustes erstattet bekommen, sofern er X Geldeinheiten übersteigt“ die Motivation für immer neue Optionstypen geben.

Wir wollen im Folgenden ein relativ einfaches, aber universell anwendbares numerisches Verfahren zur Berechnung der Preise exotischer Optionen angeben, die Monte Carlo Simulation.

v) Optionspreisberechnung mittels Monte Carlo Methode

Optionspreise – auch die der exotischen Optionen – ergeben sich immer als Erwartungswerte. Das heißt aber auch, dass alle Methoden, die geeignet sind, Erwartungswerte zu berechnen, auch potentielle Methoden zur Berechnung von Optionspreisen darstellen. Die in diesem Zu-

sammenhang wohl populärste Methode mit stochastischem Hintergrund ist die Monte Carlo Methode. Sie basiert darauf, dass sich ein Erwartungswert eigentlich als der theoretische Mittelwert ergibt, den man erhalten würde, wenn man das zum Erwartungswert zugehörige Zufallsexperiment unendlich oft unabhängig voneinander wiederholen würde. Mathematisch wird dieser Satz durch das starke Gesetz der großen Zahl präzisiert, das wir hier in einer möglichst einfachen Form angeben wollen:

Satz: Starkes Gesetz der großen Zahl

Es seien X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mu = E(X_1) < \infty,$$

die alle auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert sind. Dann gilt:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \mu\right\}\right) = 1.$$

Insbesondere konvergieren also für alle ω (bis auf Elemente aus einer Menge mit Wahrscheinlichkeit Null) die Zahlenfolgen $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ gegen den Erwartungswert μ .

Die Konsequenz aus dem starken Gesetz ist der folgende

Algorithmus: „Monte Carlo Methode (Näherungsweise Berechnung von $E(X)$)“

1. Schritt: Simuliere hinreichend viele Zufallsexperimente mit gleicher Verteilung wie X , d.h. erzeuge für großes n (z.B. mit Hilfe des Computers) Zufallszahlen $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, wobei die X_i unabhängig sind und die gleiche Verteilung wie X besitzen.

2. Schritt: Berechne $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ und verwende es als Approximation für $E(X)$.

Man würfelt also sozusagen den Erwartungswert aus, indem man die zugehörigen Experimente hinreichend oft durchführt. Der Name *Monte Carlo Methode* soll assoziieren, dass wir unser Resultat mit Hilfe des Zufalls erhalten. Wie immer bei solch nicht ganz exakt ausformulierten Algorithmen stellen sich mehrere Fragen:

- Wie erhalte ich die geeigneten Zufallszahlen ?
- Wie groß muss die Anzahl n der Versuchswiederholungen sein, damit die Approximation des Erwartungswerts einigermaßen genau wird ?

Zur Beantwortung der ersten Frage wird zum einen auf den Anhang B verwiesen und zum anderen darauf, dass viele neuere Computerprogramme wie z.B. MS Excel bereits Routinen zur Simulation von Zufallszahlen mit gewünschter Verteilung besitzen.

Zur Beantwortung der zweiten Frage verweisen wir darauf, dass aus dem zentralen Grenzwertsatz, den wir hier nur im Spezialfall des Satzes von de Moivre-Laplace vorgestellt hatten, folgt, dass man für große n – falls zusätzlich zu obigen Annahmen auch noch $\sigma^2 := \text{Var}(X) < \infty$ gilt – erhält:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n \text{ ist approximativ } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\text{-verteilt.}$$

Hieraus sieht man zum einen deutlich, dass man auch für gleiche Anzahl der Versuchswiederholungen n im Allgemeinen zwei verschiedene Werte des arithmetischen Mittels bei zweimaligem Durchführen der Simulationsreihe erhält und zum anderen, dass die durch die (approximative) Standardabweichung bestimmte Schwankungsbreite als Funktion von n wie $1/\sqrt{n}$ fällt. D.h. aber insbesondere, dass man zur Erhöhung der (mittleren) Genauigkeit des obigen *Monte Carlo Schätzers* (also des arithmetischen Mittels) um eine Stelle die 100-fache Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen benötigt. Es liegt also eine recht langsame Konvergenz des arithmetischen Mittels gegen den Erwartungswert vor. Dies wird auch im folgenden Bild illustriert, in dem der Erwartungswert 0 einer $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen mit der Monte Carlo Methode für verschiedene Versuchsanzahlen n geschätzt wird.

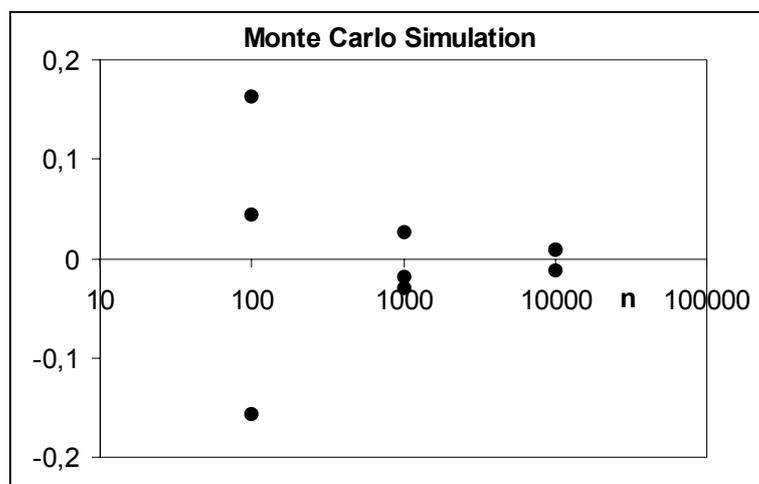


Bild 17: Genauigkeit von Monte Carlo Schätzern

Hierzu wurden mit den verschiedenen Wahlen von $n = 100, 1000, 10000$ je drei Simulationsreihen erstellt und dann in Bild die jeweils erhaltenen arithmetischen Mittel aufgetragen. Man sieht deutlich, dass die Werte bei $n = 100$ noch eine recht große Schwankungsbreite von 0,16 bis $-0,15$ besitzt, die sich bei $n = 10000$ auf 0,01 bis $-0,01$ reduziert, also tatsächlich um etwa den Faktor 10. Es wird aber auch deutlich, dass man in der Regel als großes n Werte in der Größenordnung von mindestens 10000 wählen sollte. Generell sollte man im Zweifelsfall lieber größere Anzahlen wählen, wobei dann aber auch der Rechenaufwand groß wird.

Anwendung zur Berechnung der Preise von Basketoptionen

Die Anwendung des Monte Carlo Algorithmus ist nun denkbar einfach. Es werden hinreichend viele der benötigten Zufallszahlen erzeugt, die zugehörigen Endzahlungen der Option berechnet und dann das sich hieraus ergebende arithmetische Mittel (entsprechend abgezinst) als Approximation für den Optionspreis genommen. Genauer:

1. Schritt: Setze $i=1$ und wiederhole bis $i=n$:

- Simuliere zwei Zufallszahlen $W_{1,i}(T), W_{2,i}(T)$ mit

$$W_{1,i}(T) \sim N(0, T), W_{2,i}(T) \sim N(0, T), \text{Korr}(W_{1,i}(T), W_{2,i}(T)) = \rho \in (-1, 1)$$

- Berechne hieraus die zugehörigen Aktienkurse und die Endzahlung der Option:

$$S_1^{(i)}(T) := s_1 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_{1,i}(T)\right), \quad S_2^{(i)}(T) := s_2 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2 W_{2,i}(T)\right)$$

$$B_{B-call}^{(i)} := \left(S_1^{(i)}(T) + S_2^{(i)}(T) - K\right)^+$$

- Setze $i := i + 1$

2. Schritt: Berechne $\exp(-rT) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{B-call}^{(i)}$ als Näherung für den Preis des Basketcalls.

Natürlich kann der Monte Carlo Algorithmus auch für alle anderen Typen pfadunabhängiger Optionen eingesetzt werden. Will man allerdings pfadabhängige Optionen wie z.B. Barriereoptionen mittels Monte Carlo Simulation bewerten, so werden Simulationen des gesamten Pfads der zugehörigen Aktien benötigt, was auch sehr aufwändig werden kann. Wir verweisen für die Durchführung z.B. auf Kapitel IV in Korn und Korn (1999).

2.7 Das Trinomialmodell als Beispiel unvollständiger Märkte

Warum ist die Mathematik in der Optionspreisberechnung und speziell die Black-Scholes-Formel so erfolgreich? Einer der Hauptgründe ist der, dass der Optionspreis aufgrund der Vollständigkeit der betrachteten Marktmodelle eindeutig ist. Es gibt quasi nichts zu verhandeln. Völlig anders ist die Situation in unvollständigen Märkten wie z.B. dem Trinomialmodell. Das einfachste Trinomialmodell für den Preis einer Aktie besteht aus den drei Möglichkeiten des Kursanstiegs, Kursverlusts und gleichbleibendem Preis (siehe Bild 18).

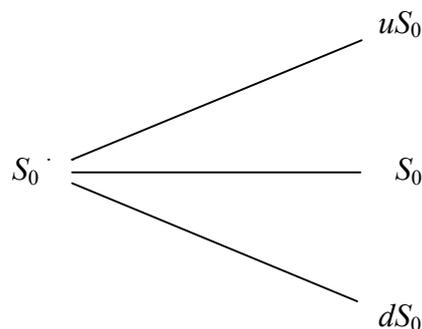


Bild 18: Ein-Perioden-Trinomialmodell

Natürlich werden wir wieder die übliche Bedingung der Form

$$(*) \quad d < (1+r)^T < u$$

fordern, um in diesem Modell Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Allerdings müssen wir feststellen, dass eine zum Binomialmodell analoge Vorgehensweise scheitert. Wollen wir nämlich wieder das Duplikationsprinzip zur Optionsbewertung verwenden, so führt dies bei einer Option mit Endzahlung $B(S_T)$ auf die folgenden drei (!) Gleichungen für das Paar (φ, ψ) der Anzahlen in $t = 0$ zu haltender Bonds und Aktien:

$$\varphi \cdot (1+r)^T + \psi u S_0 = B(uS_0)$$

$$\varphi \cdot (1+r)^T + \psi d S_0 = B(dS_0)$$

$$\varphi \cdot (1+r)^T + \psi S_0 = B(S_0) .$$

Da sich aus den ersten beiden Gleichungen bereits eine eindeutige Lösung (φ, ψ) ergibt (siehe Abschnitt 2.3), hat das gesamte System also nur dann eine Lösung, wenn entweder $d=1$ oder $u=1$ gilt (d.h. wir uns eigentlich in einem Binomialmodell befinden !) oder die Option eine vom Aktienkurs unabhängige Endzahlung oder eine zum Aktienkurs direkt proportionale Endzahlung liefert. Alles sind Fälle, die ohne Bedenken von der Betrachtung ausgeschlossen werden können.

Da man im Trinomialmodell nun nicht mehr jede Endzahlung einer Option durch Handelsstrategien im Bond und in der der Option zugrunde liegenden Aktie duplizieren kann, bezeichnet man das Trinomialmodell als ein *unvollständiges Modell*.

Wie bewertet man nun aber in einem unvollständigen Modell eine Option ?

Klar ist, dass die duplizierbaren Optionen auch weiterhin nach dem Duplikationsprinzip bewertet werden müssen, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Für die nicht-duplizierbaren Optionen verwendet man das *Prinzip der Sub- und Superduplikation*. Hier ist eine Subduplikationsstrategie eine Handelsstrategie, so dass das erzielte Endvermögen immer höchstens gleich der Endzahlung der Option ist, während sich eine Superduplikationsstrategie dadurch charakterisiert, dass sie ein Endvermögen liefert, das nie unter der Endzahlung der Option liegt. Aus diesem Ansatz heraus ist es klar, dass für jeden Optionspreis p_B einer Option mit Endzahlung B gelten muss:

$$p_B^- \leq p_B \leq p_B^+ .$$

Hierbei sind p_B^- , p_B^+ als das höchste (Anfangs-)Kapital, mit dem eine Subduplikationsstrategie bzw. als das niedrigste (Anfangs-)Kapital, mit dem eine Superduplikationsstrategie verfolgt werden kann, definiert.

Auch hier existiert wieder eine Beziehung zu den äquivalenten Martingalmaßen bzw. den risiko-neutralen Maßen. Es lässt sich nämlich zum einen zeigen, dass in einem unvollständigen Markt mehrere (typischerweise unendlich viele) äquivalente Martingalme existieren. Man erhält dann unter geeigneten Regularitätsannahmen, die wir nicht diskutieren wollen, die folgende Beziehung:

Sei IP die Menge aller äquivalenter Martingalme Q in unserem jeweils betrachteten Marktmodell. Dann gelten:

$$p_B^- = \inf_{Q \in IP} E \left(\frac{B}{S_0(T)} \right), \quad p_B^+ = \sup_{Q \in IP} E \left(\frac{B}{S_0(T)} \right).$$

Insbesondere erhält man so für den Fall des vollständigen Markts, bei dem genau ein äquivalentes Martingalmaß existiert, wieder die ursprünglich Formel für den Preis einer Option.

2.8 Weitere Aspekte der Optionsbewertung

Zwar ist die Black-Scholes-Formel mittlerweile in der Praxis akzeptiert, doch ist sie sicher nicht für alle möglichen Probleme der Praxis die Ideallösung. So ist sie im Allgemeinen nur für den Fall europäischer Calls und Puts gültig. Zwar lässt sich zeigen, dass ein amerikanischer und ein europäischer Call immer den gleichen Wert haben (solange während der Laufzeit der Optionen keine Dividenden auf die Aktie gezahlt werden und der risikolose Zinssatz r nicht-negativ ist), doch besitzt ein amerikanischer Put einen höheren Wert als ein europäischer. Mehr noch, für den amerikanischen Put existiert keine geschlossene Preisformel. Auch

die Voraussetzungen des Black-Scholes-Modells sind nicht immer erfüllt. So ist die Annahme konstanter Marktkoeffizienten r , b , σ in der Praxis oft nur schwer zu halten. Deshalb ist auch die Annahme log-normal verteilter Aktienkurse oft verletzt. Deshalb gibt es weiterhin sehr viele Forschungsaktivitäten mit dem Ziel, geeignete Verallgemeinerungen der Black-Scholes-Formel zu entwickeln.

Auch scheinen dem Erfindungsreichtum der Finanzmathematiker in den Banken (man nennt diese auch oft „Financial Engineer“) bezüglich immer neuer und komplizierterer Derivate keine Grenzen gesetzt. Da diese Preise genau und auch möglichst schnell zu berechnen sind, bleiben den Mathematikern genügend Aufgaben für die Zukunft.

3. Bestimmung optimaler Investmentstrategien: Portfolio-Optimierung

Die Bestimmung der optimalen Investmentstrategie eines Anlegers, also die Entscheidungen darüber, **wie viele** Anteile von **welchem** Wertpapier er **wann** halten soll, um seinen Nutzen aus dem Endvermögen $X(T)$ im Planungshorizont T zu maximieren, wird in der Finanzmathematik als *Portfolio-Optimierung* bezeichnet. Hierbei muss beachtet werden, dass dieses Optimierungsproblem außer den üblichen Mengen- und Auswahlkriterien („Wie viele Anteile von welchem Wertpapier?“) auch noch eine zeitliche Dimension („wann?“) aufweist. Es sind somit fortlaufend Entscheidungen zu treffen. Wir haben es deshalb im allgemeinen mit einem sogenannten dynamischen Optimierungsproblem zu tun.

Im ersten Schritt werden wir uns aber wieder Modelle und Aufgabenstellungen ansehen, bei denen auf die zeitliche Komponente des Entscheidungsproblems verzichtet werden kann, da es sich um einen Ein-Perioden-Ansatz handeln wird, bei dem nur zu Beginn der Investmentperiode über Verteilung des Kapitals auf verschiedene Wertpapiere entschieden wird. Diese Entscheidung wird dann nicht mehr vor dem Ende des Investmentzeitraums revidiert. Da des weiteren für die Behandlung des Portfolio-Problems (also des obigen Problems des Findens einer optimalen Investmentstrategie) in seiner vollen Allgemeinheit komplizierte mathematische Methoden wie z.B. die stochastische Steuerungstheorie benötigt werden, werden wir uns hier im wesentlichen auf die Präsentation der Lösung der jeweiligen Portfolio-Probleme konzentrieren (eine Einführung und Übersicht über die Ansätze und Resultate der zeit-stetigen Portfolio-Optimierung z.B. in Korn (1997) gegeben) und nur das oben erwähnte Ein-Periodenmodell nach Markowitz genauer untersuchen.

Bevor wir in die Theorie einsteigen ist zunächst zu klären, was wir unter der besten Investmentstrategie überhaupt verstehen wollen. Sicherlich wäre ein mögliches Kriterium:

„Bestimme die Strategie, mit der ich so reich wie möglich werde !“

Dies ist sicher für den Investor ein naheliegendes Ziel, aber sicher keine sinnvoll gestellte Aufgabe. Die Strategie zu bestimmen, mit der aus einem vorhandenen Anfangsvermögen das größtmögliche Endvermögen erzeugt wird, kann nämlich nur dann bestimmt werden, wenn bereits zu Beginn, also im Zeitpunkt der Entscheidung über die zu verfolgende Strategie, die vollständigen Preisverläufe aller Wertpapiere bekannt wären. Folglich könnte man die oben gestellte Aufgabe nur lösen, wenn man in die Zukunft schauen könnte.

Da die Aktienkurse als wichtigste Zutaten des Portfolio-Problems aber nicht (exakt) vorher-sagbar sind, können wir keine solche Strategie bestimmen, bei der wir immer – unabhängig von der zukünftigen Entwicklung der Aktienpreise – das größtmögliche Endvermögen erzielen werden. Wenn wir ein stochastisches Modell für die Entwicklung der Aktienkurse unterstellen (so, wie wir es in den beiden voran gegangenen Kapiteln getan haben), so können wir nur erwarten, ein geeignetes Durchschnittskriterium über alle möglichen Szenarien der Zukunft zu maximieren. Damit würde sich die nächste naheliegende Formulierung des Portfolio-Problems ergeben:

***„Bestimme die Strategie, die den Erwartungswert des Endvermögens,
 $E(X(T))$, maximiert!“***

Dieses Problem ist bei gegebener stochastischer Modellierung der Wertpapierpreise auch ohne Kenntnis der Zukunft zu lösen. Das Problem, das sich hier ergibt, ist aber die Form der Lösung selbst. Die optimale Strategie zu obiger Aufgabenstellung besteht nämlich darin, alles

in die Aktie mit dem höchsten erwarteten relativen Preiszuwachs zu investieren. Dies stellt aber eine sehr riskante Strategie dar, bei der das Endvermögen großen Schwankungen unterworfen sein kann. Auch rein subjektiv wird man sofort das Gefühl haben, dass hier nur nach Maximierung der Chance unter völliger Vernachlässigung des Risikos entschieden wurde. Es ergibt sich deshalb die folgende Aufgabenstellung:

„Finde eine Formulierung (und Lösung !) des Portfolio-Problems, in der sowohl Risiko als auch Ertrag angemessen berücksichtigt werden !“

Zur Modellierung und Lösung dieses Problems, gibt es in der Literatur viele Ansätze, von denen hier im wesentlichen zwei vorgestellt werden sollen:

3.1 Der Erwartungswert-Varianz-Ansatz

Der Erwartungswert-Varianz-Ansatz von H. Markowitz (1952) kann als Ausgangspunkt der modernen Portfolio-Theorie angesehen werden. Seine Bedeutung für Theorie und Praxis wird auch durch den 1990 an Markowitz verliehenen Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften unterstrichen.

Ausgangspunkt für den Ansatz von Markowitz ist das oben angesprochene Problem, dass die reine Maximierung des erwarteten Endvermögens $E(X(T))$ zum Investment des vollständigen Kapitals in eine einzige Aktie führt. Allerdings wird dabei außer Acht gelassen, dass die Schwankung des Endvermögens um diesen Erwartungswert sehr groß sein kann. Um nun diese Schwankung zu beschränken, führt Markowitz die Nebenbedingung ein, dass die Varianz des Endvermögens, $Var(X(T))$, unter einer vorgegebenen Schranke liegen soll. Hiermit soll sicher gestellt werden, dass das tatsächlich erzielte Endvermögen nicht allzu weit vom (erhofften) Erwartungswert des Endvermögens entfernt sein wird. Als eine optimale Investmentstrategie wird dann von Markowitz die Strategie bezeichnet, die unter der Einhaltung dieser Nebenbedingung an die Varianz den maximalen Erwartungswert $E(X(T))$ besitzt.

Genauer:

Es wird ein Ein-Perioden-Modell mit d Aktien betrachtet, deren heutige Kurse p_i , $i=1, \dots, d$ bekannt und deren Kurse im Endzeitpunkt T des betrachteten Investmentproblems, $P_i(T)$, durch die Modellierung ihrer **relativen Erträge**,

$$R_i = \frac{P_i(T)}{p_i},$$

gegeben sind. Es wird weiter angenommen, dass die Erwartungswerte und die Kovarianzen der Erträge bekannt sind:

$$\mu_i = E(R_i), \quad \sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Ansonsten lassen wir jede beliebige Verteilung der relativen Erträge zu. Es ist für das Markowitz-Modell egal, ob sich die obigen Erwartungswerte und Kovarianzen z.B. aus einem Binomial- oder einem Black-Scholes-Modell ergeben. Das Ziel besteht nun darin, die Wertpapierzusammenstellung zu finden, die den größten erwarteten Ertrag unter Einhaltung einer Obergrenze für die Varianz des Ertrags liefert. Es ist hierfür zweckmäßig, statt der Handelsstrategie (also den Anzahlen der einzelnen Anteile der Wertpapiere) den sogenannten Portfoliovektor π zu verwenden.

Der **Portfoliovektor** ist ein d -dimensionaler Vektor, bei dem π_i den prozentualen Anteil am Gesamtvermögen beschreibt, der in die i .Aktie investiert wird. Um ein negatives Endvermögen zu vermeiden fordern wir im folgenden immer, dass alle Komponenten des Portfoliovektors nichtnegativ sind. Ein Portfoliovektor muss somit die Bedingungen

$$\pi_i \geq 0, i = 1, \dots, d, \quad \sum_{i=1}^d \pi_i = 1$$

erfüllen. Der zu maximierende **Portfolioertrag** R^π ergibt sich als die mit den Komponenten des Portfoliovektors gewichtete Summe der einzelnen Aktienerträge, denn es gilt

$$R^\pi = \frac{X^\pi(T)}{x} = \sum_{i=1}^d \frac{\psi_i(0)P_i(T)}{x} = \sum_{i=1}^d \frac{\psi_i(0)p_i}{x} \frac{P_i(T)}{p_i} = \sum_{i=1}^d \pi_i R_i,$$

wobei $\psi(0)$ der Vektor der zu Beginn der Periode erworbenen Anzahlen der jeweiligen Wertpapiere – also die Handelsstrategie – ist. Aus dieser Beziehung ergeben sich Erwartungswert und Varianz des Portfolioertrags als

$$E(R^\pi) = \sum_{i=1}^d \pi_i \mu_i = \pi' \mu, \quad \text{Var}(R^\pi) = \sum_{i,j=1}^d \pi_i \sigma_{ij} \pi_j = \pi' \sigma \pi.$$

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen und Bezeichnungen können wir nun die folgenden drei verschiedenen Formulierungen des Erwartungswert-Varianz-Ansatzes formulieren, die in der Literatur auftauchen und alle eng miteinander verwandt sind:

i) „Maximiere den erwarteten Ertrag bei beschränkter Varianz“

$$\begin{aligned} & \max_{\pi \in R^d} \pi' \mu \\ \text{NB. : } & \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^d \pi_i = 1, \pi' \sigma \pi \leq C \end{aligned}$$

ii) „Minimiere die Varianz des Ertrags bei gegebenem Mindestertrag“

$$\begin{aligned} & \min_{\pi \in R^d} \pi' \sigma \pi \\ \text{NB. : } & \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^d \pi_i = 1, \pi' \mu \geq K \end{aligned}$$

iii) „Maximiere die gewichtete Differenz des erwarteten Ertrags und seiner Varianz“

$$\begin{aligned} & \max_{\pi \in R^d} (\pi' \mu - \lambda \pi' \sigma \pi) \\ \text{NB. : } & \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^d \pi_i = 1 \end{aligned}$$

Diese drei Probleme sind zunächst für beliebige Wert der Konstanten C, K, λ nicht (direkt) äquivalent. Wir werden deshalb zunächst nur die erste Formulierung genauer untersuchen und danach die Beziehung zwischen den drei Aufgabenstellungen herstellen.

Bezüglich der expliziten Lösung ist zunächst zu bemerken, dass die beiden letzten Probleme jeweils darin bestehen eine quadratische Zielfunktion über einem durch lineare Nebenbedingungen gegebenen zulässigen Bereich zu minimieren bzw. zu maximieren. Zur Lösung dieser Art von Problemen existieren Standardverfahren der quadratischen Optimierung wie z.B. der Algorithmus von Gill und Murray (1978) oder von Goldfarb und Idnani (1983), die zudem auch noch schnell und effizient sind (siehe auch Anhang C für eine Einführung in das Lösen quadratischer Optimierungsprobleme). Die erste Formulierung des Problems besteht aus der Maximierung einer linearen Zielfunktion über einem zulässigen Bereich, der durch eine quadratische und mehrere lineare Nebenbedingungen gegeben ist. Hierfür existieren keine Standardverfahren. Man könnte sich zwar mit allgemeinen nicht-linearen Optimierungsverfahren behelfen, doch sind diese nicht sonderlich effizient, da sie keinen Vorteil aus der sehr speziellen Struktur des Problems ziehen können. Ein Iterationsverfahren zur Lösung des ersten Problems durch Lösen einer Folge von Problemen der zweiten Formulierung wird in Korn (1997) beschrieben.

Wir wollen jedoch jetzt eine graphische Lösung des ersten Problems für den Fall zweier Wertpapiere angeben (siehe auch Korn (1997)). Wir verwenden hierzu die Daten

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{3}{2}$$

d.h. die erste Aktie wird im Mittel im Kurs gleich bleiben, während die zweite im Mittel einen Kursgewinn von 50 % erzielen wird. Bezüglich ihrer Schwankung gemessen in der Varianz der Erträge sind beide Aktien gleich. Allerdings verbietet die Varianznebenbedingung eine Investment des ganzen Vermögens in lediglich eine der beiden Aktien. Da die Aktienkurse aber negativ korreliert sind (d.h. tendenziell wird die eine Aktie im Kurs fallen, falls die andere Aktie steigt und umgekehrt), kann man durch ihre Kombination die Portfoliovarianz unter die Einzelvarianzen der Aktien drücken. Wir haben also das Problem

$$\max_{\pi_1, \pi_2} (\pi_1 + \frac{3}{2} \pi_2)$$

$$NB.: \pi_1 \geq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_1 + \pi_2 = 1, 2(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \pi_1 \pi_2) \leq \frac{3}{2}$$

zu lösen. Dies lässt sich mit Hilfe von Bild 19 erledigen. Wir sehen dort Zielfunktion und Nebenbedingung als Funktion der beiden Portfoliokomponenten π_1, π_2 dargestellt. Durch die Vorzeichenbedingungen können wir uns zunächst Paare (π_1, π_2) aus dem positiven Quadranten beschränken. Die Nebenbedingung „ $\pi_1 + \pi_2 = 1$ “ schränkt den zulässigen Bereich dann weiter auf den durch $(1,0)$ und $(0,1)$ gehenden Geradenabschnitt im positiven Quadranten ein. Schließlich schränkt die Varianznebenbedingung „ $2(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \pi_1 \pi_2) \leq 3/2$ “ den zulässigen Bereich auf den Teil des Geradenabschnitts ein, der in der zur Varianznebenbedingung gegebenen Ellipse liegt, denn nur diese Paare erfüllen zusätzlich zu den linearen Bedingungen auch die Varianznebenbedingung. Wir müssen jetzt nur noch auf diesem Geradenstück das Paar (π_1, π_2) finden, das den maximalen Portfolioertrag besitzt.

Da aber die Zielfunktion lediglich eine Summe der mit den Komponenten des Vektors μ gewichteten Komponenten des Portfoliovektors sind, sind die Niveaulinien der Zielfunktion (also die Linien, auf denen die Zielfunktion einen konstanten Wert besitzt) Geraden, die orthogonal zum Vektor μ sind.

Um also das Maximum der Zielfunktion zu finden, müssen wir nur die Gerade bestimmen, die orthogonal zu μ ist, einen Schnittpunkt mit dem Geradenstück besitzt, das den für unser Problem zulässigen Bereich beschreibt und die in Richtung von μ am weitesten vom Ursprung entfernt ist. Dies ist in unserem Beispiel offensichtlich der Fall für die Niveaulinie, die durch den linken oberen Schnittpunkt der Ellipse (die durch die Gleichung „ $2(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \pi_1\pi_2) = 3/2$ “ gegeben ist) und die Gerade „ $\pi_1 + \pi_2 = 1$ “ geht. Wir müssen also nur noch diesen Schnittpunkt bestimmen, was dem Lösen einer quadratischen Gleichung entspricht.

Genauer: Wir lösen das System

$$\begin{aligned} 2(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \pi_1\pi_2) &= 3/2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

indem wir durch Auflösen der zweiten Gleichung nach π_2 und Einsetzen des Ergebnisses in die erste Gleichung die quadratische Gleichung

$$\pi_1^2 - \pi_1 + 1/12 = 0$$

erhalten. Unter den beiden erhaltenen Lösungen dieser Gleichung (die Ellipse und die Gerade besitzen ja zwei Schnittpunkte !) wählen wir die aus, bei der $\pi_1 < \pi_2$ gilt, da wir so den linken oberen Schnittpunkt erhalten (dies kann auch dadurch begründet werden, dass dieser Schnittpunkt den höheren Zielfunktionswert besitzt). Die Lösung ist somit:

$$(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{6}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{6}} \right).$$

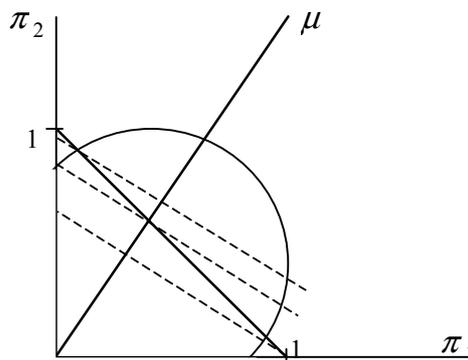


Bild 19: Zulässiger Bereich und Niveaulinien zum Erwartungswert-Varianz-Beispiel

Löst man nun das Problem für alle Varianzschranken C , die erfüllbar sind, so erhält man zu jedem C auch einen optimalen Portfolioertrag $E(R^\pi(C))$. Den Graph der so erhaltenen Funktion, deren typische Gestalt in Bild 20 wiedergegeben ist, nennt man die **Erwartungswert-Varianz-effiziente Menge**. Auf ihr liegen auch alle Paare $(C, E(R^\pi(C)))$, die Lösungen der beiden anderen Problemformulierungen des Erwartungswert-Varianz-Problems sind. Hierbei ergibt sich die Erwartungswert-Varianz-effiziente Menge bei der zweiten Problemstellung, indem die Erwartungswertschranke K durch all die Werte läuft, bei denen die Forderung eines Mindestertrags auch eine echte Nebenbedingung darstellt, d.h. bei denen diese Forderung im optimalen Paar $(Var(R^\pi(K)), K)$ tatsächlich aktiv ist. Die Erwartungswert-Varianz-effiziente

Menge erhält man bei der dritten Problemformulierung, in dem man λ durch alle positiven Zahlen laufen lässt und so die jeweils optimalen Paare $(Var(R^\pi(\lambda)), E(R^\pi(\lambda)))$ erhält. Man hat also insbesondere immer ein Tripel (C, K, λ) , so dass die Lösung der drei Problemstellungen zum gleichen optimalen Portfoliovektor (π_1, π_2) führt.

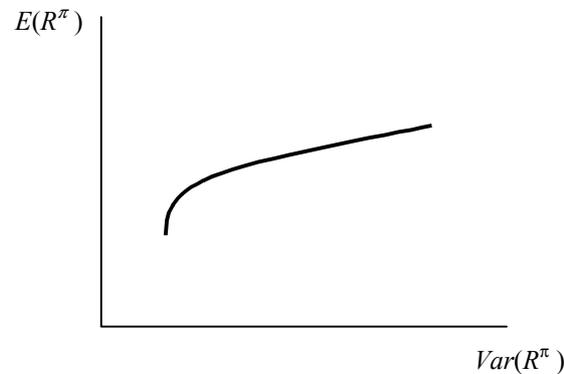


Bild 20: Erwartungswert-Varianz-effiziente Menge

Zwar besitzt der Erwartungswert-Varianz-Ansatz die Vorteile eines verständlichen Zielkriteriums und einer einfachen praktischen Umsetzbarkeit (leicht implementierbar) und wird deshalb auch heute noch vielfach in der Praxis angewandt, doch hat er auch gravierende Nachteile. So gestattet er keine Verwendung einer anderen Nutzenfunktion als den Erwartungswert. Das Risiko einer Investition wird nur über die Varianz des Ertrags gemessen, was aber auch zur Folge hat, dass durchaus erwünschte große Abweichungen vom mittleren Ertrag nach oben als Risiko (!) angesehen werden.

Der größte Nachteil des Erwartungswert-Varianz-Ansatzes besteht aber in seiner Einfachheit. Im zugehörigen Ein-Perioden-Modell ist nur ein Handel zu Beginn der Periode möglich. Es ist keinerlei weitere Eingriffsmöglichkeit vorgesehen, egal wie lange der Zeitraum bis zum Investmenthorizont ist. Man muss quasi entscheiden und bis zum Ende der Investmentzeit wegsehen.

Diese Art der Modellierung spiegelt sich auch in der statischen Modellierung der Aktienkurse wider. Eine Aktie wird hier mit dem Erwartungswert und der Varianz (und Kovarianzen) ihres Ertrags identifiziert. Die zeitliche Entwicklung des Aktienkurses spielt keine Rolle. Das typische, unregelmäßige Verhalten, wie es in den Bildern 1 und 2 oder aber auch im Modell in Bild 3 dargestellt wird, wird hier durch die statische Modellierung einfach ignoriert. Dem entsprechend kann auch kein Platz für eine Handlung aufgrund von Preisänderungen vorhanden sein.

Bemerkung: „Der Diversifikationseffekt“

Eine Grundweisheit beim Investment mit riskanten Gütern ist die, dass man sein Vermögen nie nur in eine Alternative investieren soll. Man sollte immer ein *diversifiziertes Portfolio* (also eine *gesunde Mischung* verschiedenster Alternativen) halten, um sein Risiko möglichst klein zu halten. Dies ist schon von Alters her bekannt, ohne dass es zugehörige Mathematik gegeben hätte und leuchtet auch ohne mathematische Modellierung ein. So wurde schon im Babylonischen Talmud vor ca. 3000 Jahren empfohlen, sein Vermögen auf die drei Alternativen Grund und Boden, Produktivvermögen und auf leicht veräußerbare Gegenstände aufzu-

teilen. Um diesem Prinzip der Diversifikation auch eine mathematische Rechtfertigung zu geben, zeigen wir in der folgenden Proposition, dass die Standardabweichung der Rendite eines Portfolios von Investmentmöglichkeiten (wie z.B. Aktien) immer kleiner oder gleich der gewichteten Summe der Standardabweichungen der Einzelinvestments ist:

Proposition 3.1:

Für einen beliebigen Portfoliovektor π sei

$$\sigma(R^\pi) := \sqrt{\text{Var}(R^\pi)}$$

die Standardabweichung des Portfolioreturns. Dann gilt

$$\sigma(R^\pi) \leq \sum_{i=1}^d \pi_i \sigma(R_i),$$

wenn wir – wie oben gefordert – nur Portfoliovektoren mit nicht-negativen Komponenten zulassen.

Beweis:

Aufgrund der für beliebige Zufallsvariablen X, Y allgemein gültigen Beziehungen

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y),$$

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$$

folgt

$$(*) \quad (\sigma(X + Y))^2 = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \leq (\sigma(X) + \sigma(Y))^2.$$

Mit den Wahlen

$$X = \pi_1 R_1, \quad Y = \sum_{i=2}^d \pi_i R_i$$

erhält man somit aus (*)

$$(+)$$

$$\sigma(R^\pi) = \sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y) = \pi_1 \sigma(R_1) + \sigma\left(\sum_{i=2}^d \pi_i R_i\right).$$

Wiederholt man diese Abschätzung jetzt $d-1$ mal für die Standardabweichung der Summe in (+), so erhält man die Behauptung.

Eine weitere beeindruckende Wirkung des Diversifikationseffekts sieht man im Fall unkorrelierter Aktien, d.h. wenn wir

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, d$$

vorliegen haben. Teilt man dann sein Vermögen so auf, dass in alle Aktien der gleiche Anteil des Vermögens investiert wird, so gilt:

$$\text{Var}(R^\pi) = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^d \text{Var}(R_i) \quad \text{für } \pi = (\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}).$$

Um die Wirkung dieser Beziehung zu illustrieren schauen wir auf den Spezialfall, dass alle Aktien dieselbe Varianz der Rendite besitzen. Dann beträgt die Varianz des Portfolios ledig-

lich das $1/d$ -fache der Varianz des Investments des vollständigen Vermögens in eine Aktie, denn es gilt in diesem Spezialfall:

$$\text{Var}(R^\pi) = \frac{1}{d} \text{Var}(R_1) \text{ für } \pi = (\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}).$$

Dies entspricht für mittlere bis große d einer dramatischen Reduktion des Risikos, die alleine durch simple Diversifikation erzielt wurde.

3.2 Erwartungsnutzen-Maximierung

Eine direkte Konsequenz aus der Kritik am Erwartungswert-Varianz-Ansatz war die Betrachtung von Portfolio-Problemen mit einer allgemeinen Nutzenfunktion in zeit-stetigen Marktmodellen wie z.B. denen vom Typ des Black-Scholes-Modells oder in zeit-diskreten Mehrperiodenmodellen wie z.B. dem n -Perioden-Binomialmodell.

Was zunächst bei solchen Modellen offensichtlich gegeben ist, ist die zeitliche Dynamik sowohl bei der Wertpapiermodellierung als auch bei der Modellierung der Handelsstrategien. Die Zutat, die wir bis jetzt noch nicht näher betrachtet haben, ist die Nutzenfunktion. Da die zeitlich dynamischen Probleme die Gestalt

$$\max_{\pi(\cdot)} E(U(X^\pi(T)))$$

besitzen, wobei über **Portfolioprozesse** (also stochastische Prozesse, die in jedem Zeitpunkt einen Portfoliovektor darstellen) maximiert wird, muss der Ausgleich zwischen Risiko und Ertrag über die Nutzenfunktion $U(x)$ geschehen. Deshalb stellt man typischerweise die folgenden Forderungen an eine Nutzenfunktion:

Definition:

Eine strikt konkave, streng monoton wachsende Funktion U , die stetig differenzierbar ist (auf dem Innern ihres Definitionsbereichs), heißt eine **Nutzenfunktion**.

Typische Beispiele für Nutzenfunktionen sind

$$U(x) = \ln(x), \quad U(x) = \sqrt{x}, \quad U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \text{ für ein festes } \gamma < 1, \quad U(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ für } \lambda > 0 \text{ fest.}$$

Hierbei brauchen wir die Differenzierbarkeitsannahme aus mathematischen Gründen. Die Annahme, dass die Nutzenfunktion streng monoton wachsend ist, entspricht dem Grundsatz „**mehr ist besser als weniger**“ und unterstellt somit einen „(hab-)gierigen Investor“. Die strikte Konkavität bedeutet, dass mit zunehmendem Vermögen der zusätzliche Nutzen des Investors aus einer weiteren Geldeinheit abnimmt („**abnehmender Grenznutzen**“), was eine durchaus sinnvolle Annahme ist. Schließlich würde sich jeder nach einer Euromünze bücken, der unterwegs zur Mensa ist, aber kein Geld für den Nachtsch in der Tasche hat, während der millionenschwere (übergewichtige) Finanzjongleur den Euro eventuell einfach liegen lassen würde.

Warum ersetzt jetzt aber die Wahl einer einzigen Nutzenfunktion die Risikonebenbedingung des Markowitz-Modells? Die Antwort wird direkt durch die nächste Proposition gegeben, die zeigt, dass sich ein Investor der seine Entscheidungen nach dem Erwartungsnutzen trifft, bei Verwendung einer der obigen Nutzenfunktionen **risikoavers** verhält, d.h. bei gleichem

Erwartungswert zweier Handlungsalternativen, von denen eine ein risikoloses Investment ist, wird er die risikolose Alternative vorziehen.

Proposition 3.2:

Es sei U eine Nutzenfunktion gemäß obiger Definition. Weiter sei X eine Zufallsvariable mit $\mu = E(X)$, $0 < Var(X)$ und $Y = \mu$ eine Konstante („risikoloses Investment“). Dann gilt:

$$E(U(Y)) > E(U(X)).$$

Beweis: Da die Zufallsvariable X nicht-entartet ist (also wegen der Varianzannahme nicht fast sicher konstant ist) und die Nutzenfunktion U strikt konkav ist, gilt die strikte Jensensche Ungleichung, so dass folgendes gilt:

$$E(U(Y)) = E(U(\mu)) = U(\mu) = U(E(X)) > E(U(X)).$$

Diese Risikoaversion ist bei parametrischen Familien von Nutzenfunktion (wie z.B. die der negativen Exponentialfunktion (s.o.)) für gewisse Wahlen des freien Parameters stärker ausgeprägt. Dies zeigt sich im wesentlichen durch die Ableitung der Nutzenfunktion nach x , also den Verlauf des Grenznutzens. In Bild 21 wird das für verschiedene Wahlen des Risikoparameters λ anhand der verschiedenen Verläufe der Nutzenfunktion illustriert.

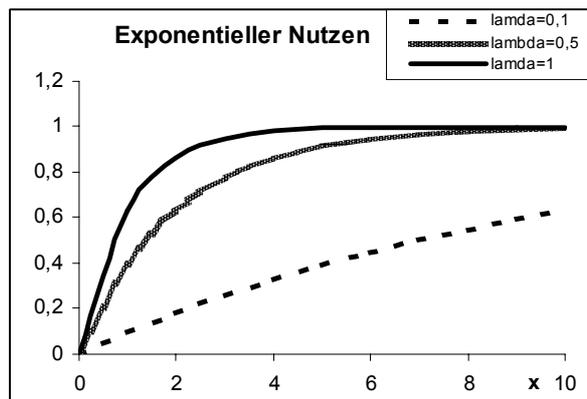


Bild 21: Beispiele der exponentiellen Nutzenfunktion

Man sieht deutlich, dass sich für größere Werte von λ viel schneller ein Sättigungseffekt einstellt. Der maximal erzielbare Nutzen von 1 ist schon für kleine Werte von x fast erreicht. Deshalb wird auch ein Investor, der einen hohen Risikoparameter λ besitzt, sich viel eher für weniger riskante Investitionen entscheiden als ein Investor mit einem kleinen λ , für den riskante Investments, die mit geringer Wahrscheinlichkeit große Erträge versprechen, attraktiv sind. Dieses Verhalten kann man auch mit Hilfe des Begriffs des *Sicherheitsäquivalents* messen:

Definition:

Für einen Investor mit einer Nutzenfunktion U ist das **Sicherheitsäquivalent** $s_U(X)$ einer Investitionsmöglichkeit X als die Höhe einer sicheren Zahlung definiert, aus der er den gleichen Erwartungsnutzen zieht wie aus dem Investment in X :

$$s_U(X) = z \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad U(z) = E(U(X)).$$

Beispiel: *Sicherheitsäquivalent bei exponentieller Nutzenfunktion*

Wir betrachten drei verschiedene Investoren, die alle exponentielle Nutzenfunktionen haben, sich aber in der Wahl ihrer Risikoaversionsparameter unterscheiden. Wir wählen dieselben drei Werte 0.1, 0.5, 1 für λ wie in Bild 21. Wir bieten den drei Investoren jetzt die Möglichkeit an, ein Wertpapier zu kaufen, das morgen folgende Zahlung X liefert:

$$X = \begin{cases} 10 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ 8 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir erhalten dann für die drei Investoren die folgenden Sicherheitsäquivalente:

λ	0.1	0.5	1
$s_U(X)$	8.95	8.76	8.57

Man beachte, dass die verschiedenen Investoren dem Investment X , das einen Erwartungswert von 9 besitzt, immer sichere Zahlungen niedrigerer Höhe vorziehen würden, sofern sie über dem jeweiligen Sicherheitsäquivalent liegen. Dies zeigt, dass alle drei Investoren risikoavers sind. Weiter sieht man, dass die Risikoaversion der Investoren mit steigendem λ zunimmt.

Wir werden im folgenden kurze Überblicke über die Lösung des Portfolio-Problems in diskreter und kontinuierlicher Zeit geben. Aufgrund der Komplexität der Lösungsmethoden werden wir in diskreter Zeit nur eine Methode vorstellen und in stetiger Zeit lediglich die Lösung eines Beispiels als Illustration geben.

i) Zeit-diskrete Portfolio-Probleme

Wir nehmen hier an, dass wir uns in einem arbitragefreien, zeitdiskreten Markt befinden, wie er in Kapitel 1 beschrieben wurde. Unser Ziel wird es sein, durch Wahl eines geeigneten Portfolioprozesses $\pi(t)$ den Erwartungsnutzen aus unserem Endvermögen im Zeitpunkt T , dem Investmenthorizont, zu maximieren.

Im Gegensatz zum Ein-Periodenmodell, das dem Markowitz-Erwartungswert-Varianz-Ansatz zugrunde lag, haben wir es jetzt mit einem zeitlich dynamischen Modell zu tun, bei dem mehrere Entscheidungen über die Zusammensetzung unseres Portfolios in zeitlicher Abfolge durchzuführen sind. Wir erhalten so eine ungleich schwierigere Optimierungsaufgabe, da wir jetzt nicht einfach über feste Variablen, sondern über stochastische Prozesse optimieren müssen. Hierzu benötigen wir erst einmal einige Definitionen und Bezeichnungen:

Definition:

Wir betrachten ein T -Periodenmarktmodell aus Abschnitt 1.2 mit $d+1$ Wertpapieren mit Preisen S .

a) Zu einer $(d+1)$ -dimensionalen Handelsstrategie $\psi(t)$, $t = 0, 1, \dots, T-1$ mit Vermögensprozess $V^\psi(t)$ definieren wir den zugehörigen **Portfolioprozess** $\pi(t)$, $t = 0, 1, \dots, T-1$ als den d -dimensionalen Prozess, dessen i . Komponente gerade dem prozentualen Anteil am Vermögen des Investors entspricht, der in die i . Aktie investiert wird, also

$$\pi_i(t) = \frac{\psi_i(t)S_i(t)}{V^\psi(t)}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Die „nullte Komponente“ des Portfolioprozesses ergibt sich als

$$1 - \sum_{i=1}^d \pi_i(t),$$

und den zum Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ gehörenden Vermögensprozess bezeichnen wir mit $X^\pi(\cdot)$. Wir bezeichnen mit $A(x, t)$ alle die Portfolioprozesse $\pi(\cdot)$, deren Verwendung in den Zeitpunkten $\{t, \dots, T-1\}$ bei einem Anfangsvermögen von x in t zu einem positiven Endvermögen im Investmenthorizont T führt.

b) Das Portfolio-Problem eines Investors mit Nutzenfunktion U und Anfangsvermögen $x > 0$ besteht in der Lösung des Maximierungsproblems

$$(P) \quad \max_{\pi(\cdot) \in A(0, x)} E(U(X^\pi(T))).$$

Wie lösen wir nun aber unser Portfolio-Problem? Die Idee der Lösung ähnelt der Bestimmung des Optionspreises im Mehr-Periodenmodell und basiert wieder auf dem Prinzip der Rückwärtsinduktion, wobei hier allerdings noch zusätzlich optimiert werden muss. Um das zugehörige Vorgehen genauer beschreiben zu können, betrachten wir nicht nur das obige Portfolio-Problem, sondern führen eine ganze Familie von Teilproblemen von (P) ein. Es sei hierzu

$$(V) \quad v(t, x; S(t)) := \sup_{\pi(\cdot) \in A(x, t)} E^{t, x, S(t)}(U(X^\pi(T))),$$

die **Wertfunktion** des Portfolio-Problems, wobei wir immer annehmen, dass sie endlich sei (was dann im einzelnen konkreten Problem zu überprüfen ist). Die Wertfunktion stellt also den optimalen Nutzen dar, der mit einem Vermögen von x zur Zeit t erzielt werden kann, wenn dann die Aktienpreise $S(t)$ vorliegen. Insbesondere stimmt also $v(0, x, S(0))$ mit dem optimalen Nutzen unseres Portfolio-Problems (P) überein.

Wir werden nun zeigen, wie man mit Hilfe der Wertfunktion das Problem (P) auf das Lösen einer Folge einfacherer Problem zurück führen kann. Die Grundidee ist die der Rückwärtsinduktion. Wir kennen die Wertfunktion nämlich bereits im Endzeitpunkt T , denn es gilt

$$v(T, x; S(T)) = U(x),$$

da im Endzeitpunkt keine Änderung des Vermögens mehr erzielbar ist. Formal werden einfach alle Wertpapiere verkauft. Zur Illustration aller weiterer Schritte verwenden wir als Beispiel einen Markt mit $T = 2$ Perioden, in dem ein risikoloses Wertpapier mit Preisen $S_0(t)=1$ für alle $t = 0, 1, 2, 3$ und lediglich eine Aktie mit einer Preisentwicklung, die durch

den Baum aus Bild 22 gegeben ist, gehandelt werden. Hierbei stehen die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die Aufwärts- oder Abwärtsbewegungen des Aktienkurses in den einzelnen Knoten über den zugehörigen Verbindungslinien. Als Nutzenfunktion verwenden wir $U(x) = \ln(x)$ und nehmen ein Anfangsvermögen von 10000 € an.

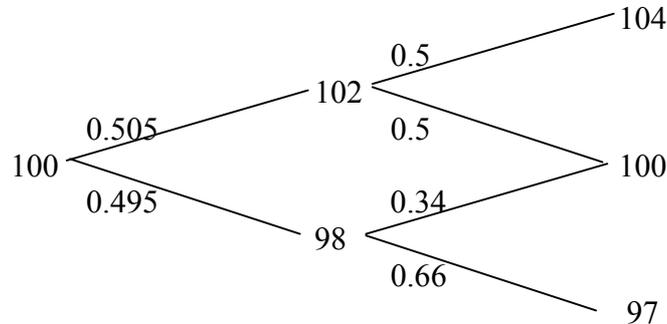


Bild 22: Aktienkurs im 2-Periodenmarktmodell

Zurück zur allgemeinen Theorie: Nachdem wir die Wertfunktion in T kennen, wollen wir nun einen Schritt in der Zeit zurück gehen und ihre Werte für alle möglichen Preise $S(T-1)$ und beliebiges Vermögen $x > 0$ im Zeitpunkt $T-1$ berechnen. Dies geschieht durch Lösen der Optimierungsprobleme

$$(P_{T-1}) \quad \max_{\pi(\cdot) \in A(x, T-1)} E^{T-1, x, s}(U(X^\pi(T))),$$

wobei der Vektor s alle endlich vielen, möglichen Werte der Wertpapierpreise im Zeitpunkt $T-1$ durchläuft.

Wichtig: Die Probleme (P_{T-1}) sind ganz normale deterministische Optimierungsprobleme, bei denen eine deterministische Funktion zu maximieren ist (der Erwartungswert ist ja nur eine gewichtete Summe nicht-linearer Funktionen) und die Portfolioprozesse keine zeitliche Dimension besitzen, da nur noch einmal (nämlich genau im Zeitpunkt $T-1$) über die Zusammensetzung des Portfolios zu entscheiden ist ! Die möglichen Portfolioprozesse sind also nur eine Teilmenge des IR^d , bei der lediglich auf die Nichtnegativitätsbedingung des Endvermögens zu achten ist.

Im Beispiel haben wir zwei solche Probleme zu lösen, nämlich die für die möglichen Aktienpreise 98 und 102. Wir lösen hier nur das Problem für den Fall $S_1(1) = 98$ explizit:

$$\begin{aligned} \max_{\pi} [0.34 \ln(x((1-\pi) + \frac{100}{98} \pi)) + 0.66 \ln(x((1-\pi) + \frac{97}{98} \pi))] = \\ \ln(x) + \max_{\pi} [0.34 \ln(1 + \frac{2}{98} \pi) + 0.66 \ln(1 - \frac{1}{98} \pi)] \end{aligned}$$

Nebenbedingungen: $-49 < \pi < 98$

Man beachte, dass zum einen das Optimierungsproblem vom Vermögen x unabhängig ist und dass die Nebenbedingung an π sichert, dass das Endvermögen positiv ist. Wie man durch Ableiten leicht verifiziert erhalten wir als optimales π im Zustand $S_1(1) = 98$

$$\pi(1; 98) = 0.98$$

mit Funktionswert der Wertfunktion von

$$v(1, x; 98) = \ln(x) + 0.34 \ln(1.02) + 0.66 \ln(0.99).$$

Im Zustand $S_1(1) = 102$ erhält man

$$\pi(1; 102) = 0, \quad v(1, x; 102) = \ln(x).$$

Wir haben nun also alle Werte der Wertfunktion im Zeitpunkt $T-1$ berechnet und wollen als nächstes alle ihre Werte der Wertfunktion im Zeitpunkt $T-2$ berechnen. Hierzu genügt es, jetzt für alle möglichen Werte s von $S(T-2)$ die gewöhnlichen (!) Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned} & \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E^{T-2, x, s} (v(T-1, X^\pi(T-1); S(T-1))) \\ \text{mit: } & \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_i\right) + \sum_{i=1}^d \pi_i \frac{\tilde{S}_i}{S_i} > 0 \quad \text{für alle Werte } \tilde{s}, \text{ die } S(T-1) \text{ annehmen kann} \\ & X^\pi(T-1) = x \left(\left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_i\right) + \sum_{i=1}^d \pi_i \frac{S(T-1)_i}{S_i} \right) \end{aligned}$$

zu lösen. Der Grund hierfür liegt darin, dass wir ja ab $T-1$ bereits wissen, wie wir uns optimal verhalten müssen und welchen optimalen Nutzen wir aus allen möglichen Konstellationen in $T-1$ erzielen können. Wir können deshalb auf die Berücksichtigung des Portfolioprozesses in $T-1$ verzichten und die Nutzenfunktion bezüglich des Endvermögens durch die Wertfunktion bezüglich der relevanten Größen in $T-1$ ersetzen. Die Vorzeichennebenbedingungen an die gewichteten Summen der Komponenten der Vektoren π in obigem Problem stellen sicher, dass der Vermögensprozess auch in $T-1$ positiv ist, während die definierende Gleichung für den Vermögensprozess in $T-1$ garantiert, dass die Wahl der Vektoren π in obigem Problem tatsächlich Teile eines Portfolioprozesses sind. Insgesamt haben wir also das zeitlich dynamische Optimierungsproblem

$$\max_{\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x, T-2)} E^{T-2, x, s} (U(X^\pi(T))),$$

bei dem ja schon über stochastische Prozesse optimiert werden muss, durch das entsprechende obige deterministische Problem ersetzt.

Dies demonstrieren wir nun auch im Beispiel. Es ist nur noch in $t = 0$ das Problem

$$\begin{aligned} \max_{\pi \in \mathbb{R}} E^{0, x, 100} (v(1, X^\pi(1); S(1))) &= \max_{\pi \in \mathbb{R}} \{ \ln(x) + 0.505 \ln(1 + 0.02\pi) + 0.495 [\ln(1 - 0.02\pi) + \tilde{c}] \} \\ \text{mit: } & -50 < \pi < 50, \quad \tilde{c} = 0.34 \ln(1.02) + 0.66 \ln(0.99) \end{aligned}$$

zu lösen. Dabei beinhaltet die Ungleichung an π schon alle Vorzeichenforderungen aus dem obigen deterministischen Problem. Die Definition von $X^\pi(1)$ wurde bereits in die Zielfunktion eingearbeitet. Wie man durch Lösen dieses Problems (wieder elementar durch Ableiten und Verifizieren der Optimalität lösbar) feststellt, ist das optimale π im Zustand $S_1(0) = 100$

$$\pi(0) = \pi(0; 100) = 0.5$$

mit zugehörigem Funktionswert der Wertfunktion von

$$v(0, x; 100) = \ln(x) + 0.495 \tilde{c} + 0.505 \ln(1.02) + 0.495 \ln(0.98).$$

Wenn wir jetzt annehmen, dass in allen Optimierungsschritten, die wir durchführen immer ein Maximum angenommen wird, so haben wir in Verallgemeinerung der obigen Überlegungen

eine allgemeine Beziehung, die es uns erlaubt, die Wertfunktion per Rückwärtsinduktion zu berechnen. Dieser Zusammenhang wird auch als **Bellman-Prinzip** oder **Prinzip der dynamischen Optimierung** bezeichnet und hat die folgende Form:

$$v(t, x; s) = \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E^{t, x, s} (v(t+1, X^\pi(t+1); S(t+1))), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

wobei s alle möglichen Werte von $S(t)$ annehmen kann, sich $X^\pi(t+1)$ aus x bei verwendetem π gemäß

$$(VG) \quad X^\pi(T-1) = x \left(\left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_i \right) + \sum_{i=1}^d \pi_i \frac{S(T-1)_i}{s_i} \right)$$

ergibt und π die Vorzeichenbedingungen

$$(VB) \quad \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_i \right) + \sum_{i=1}^d \pi_i \frac{\tilde{s}_i}{s_i} > 0 \quad \text{für alle Werte } \tilde{s}, \text{ die } S(t+1) \text{ annehmen kann}$$

erfüllen muss. Man erhält dann neben der Wertfunktion auch jeweils die in den einzelnen Zuständen der Aktienkurse bei gegebenem Vermögen optimalen Portfolioprozesse π^* . Insgesamt ergibt sich der folgende Algorithmus:

Algorithmus: *Dynamische Optimierung*

Voraussetzung: Bei allen im folgenden auftretenden Optimierungsproblemen werde das Maximum angenommen.

1.Schritt: $v(T, x; S(T)) := U(x)$

2.Schritt: Für alle $t = T-1, \dots, 0$ verwende das Bellman-Prinzip

$$v(t, x; s) = \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E^{t, x, s} (v(t+1, X^\pi(t+1); S(t+1)))$$

zur Berechnung der Wertfunktion und der Bestimmung der optimalen Portfolioprozesse $\pi^*(t)$.

ii) Zeit-stetige Portfolio-Probleme

Wir betrachten hier nun das Problem, den Erwartungswert des Nutzens aus dem Endvermögen durch Wahl des besten zeit-stetigen Portfolioprozesses in einem Modell vom Black-Scholes-Typ zu maximieren. Hier ist nun Handel in stetiger Zeit (und in kontinuierlichen Stückzahlen !) möglich. Diese Modellierung ist zwar wegen den diskreten Maßeinheiten in Zeit und Stückzahlen in der Praxis nur als Approximation zu verstehen und verlangt umgekehrt sehr schwieriges mathematisches Werkzeug wie z.B. Itô-Integrale und stochastische Steuerung, doch zahlt sich dies oft durch einfache explizite Resultate aus.

In unserem Modell darf das Vermögen in kontinuierlicher Zeit umgeschichtet werden, ohne das Transaktionskosten entstehen. Es dürfen weiterhin nur solche Portfolioprozesse ausgewählt werden, die zu einem nicht-negativen Vermögensprozess führen. Bezeichnet $A(x)$ die Menge aller solcher zulässigen Portfolioprozesse, die mit einem Anfangsvermögen von $x > 0$

verfolgt werden können und steht $X^\pi(T)$ für das mit dem Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ im Endzeitpunkt T erreichte Vermögen, so schreibt sich das zugehörige Optimierungsproblem als

$$\max_{\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)} E(U(X^\pi(T))).$$

Im Rahmen dieser Übersicht kann allerdings keine Einführung in die zeit-stetige Portfolio-Optimierung gegeben werden. Es wird dafür auf Korn (1997) oder Korn und Korn (1999) verwiesen. Es soll nur an einem Beispiel gezeigt werden, wie die typische optimale Lösung aussieht.

Beispiel: *Logarithmischer Nutzen*

Wir betrachten das Black-Scholes-Modell aus Abschnitt 1.3, also einen Markt, der aus einem Bond und einer Aktie mit Preisen

$$B(t) = e^{rt}, \quad S(t) = se^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

besteht, wobei r, b, σ gegebene reelle Zahlen sind. Unser Ziel ist es nun, den Portfolioprozess $\pi(t), t \in [0, T]$ – also den Prozess, der den jeweils im Zeitpunkt t in die Aktie zu investierenden Anteil am Gesamtvermögen angibt – zu bestimmen, der den Erwartungswert

$$E(\ln(X^\pi(T)))$$

maximiert. Es kann nun auf mehrere Arten (siehe z.B. in Korn (1997)) gezeigt werden, dass es optimal ist, einen konstanten Portfolioprozess

$$\pi^*(t) = \frac{b - r}{\sigma^2} \text{ für alle } t \in [0, T]$$

zu wählen. Es ist also in jedem Zeitpunkt immer derselbe Prozentsatz des Gesamtvermögens in die Aktie zu investieren ! Dies bedeutet nicht (!), dass der Investor nichts tun muss. Im Gegenteil, durch die fortwährend verschiedene Preisentwicklung von Aktie und Bond muss er in jedem Zeitpunkt handeln, um das prozentuale Verhältnis des investierten Vermögens zwischen Bond und Aktie konstant zu halten ! Dies soll auch durch Bild 23 illustriert werden, wo wir den Verlauf der optimalen Anzahl zu haltender Aktien verfolgen. Wir wählen als Marktparameter $r = 0.05, b = 0.07, \sigma = 0.2$, woraus sich $\pi^*(t) = 0.5$ ergibt. Bei einem Anfangsaktienkurs von 10 und einem Anfangsvermögen von 10000 würde man somit mit 500 Aktien starten.

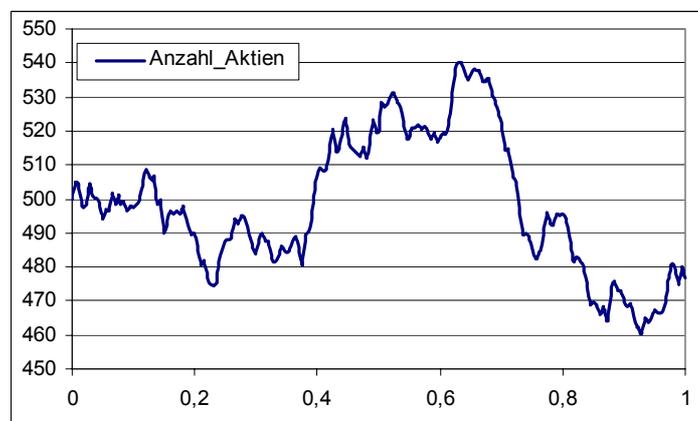


Bild 23: Verlauf der optimalen Aktienanzahl

Wie man dem Bild entnehmen kann, schwankt die optimal zu haltende Aktienanzahl doch stark zwischen 460 und 540 Stück. Es sind insbesondere viele einzelne Aktienkäufe und Verkäufe durchzuführen (streng genommen sogar überabzählbar viele infinitesimal kleine Transaktionen), was belegt, dass ein in die Aktie zu investierender konstanter prozentualer Anteil am Gesamtvermögen alles andere als eine langweilige Strategie ohne Handeln ist.

3.3 Weitere Aspekte der Portfolio-Optimierung

Das oben gegebene Beispiel des maximalen logarithmischen Nutzens zeigt einige der Hauptprobleme der Praxis bei der Anwendung der Resultate zeit-stetiger Portfolio-Optimierung auf. So ist es sowohl aus physischen Gründen („keine unendliche Reaktionsgeschwindigkeit“) und auch aus finanziellen Gründen („dauernder Handel führt zum Ruin wegen der anfallenden Transaktionskosten“) nicht möglich, in jedem einzelnen Zeitpunkt zu handeln. Es kann allerdings gezeigt werden (siehe z.B. Rogers (1998)), dass beispielsweise eine lediglich wöchentliche Anpassung der Verhältnisse an die optimale Strategie nur zu geringfügigen Abweichungen gegenüber dem aus der optimalen zeit-stetigen Strategie erzielten Nutzen führt.

Weitere aktuelle Aspekte der Forschung auf dem Gebiet der Portfolio-Optimierung sind die Berücksichtigung der am Markt anfallenden Transaktionskosten, der Portfolio-Optimierung mit unsicheren Marktkoeffizienten, der Optimierung unter Einbeziehung von Option, der Bestimmung optimaler Strategien beim Risiko eines bevorstehenden Crash, der Entscheidung über optimales Investment unter der Vorgabe von Höchstwerten für bestimmte Risikomaße, optimales Investment für Versicherungen ...

Sicherlich ist dieses Spektrum viel zu groß, um auch nur einen einigermaßen vollständigen Überblick zu geben. Es soll lediglich verdeutlichen, dass es durchaus noch viele aktuelle, praxis-relevante Probleme im Bereich der Portfolio-Optimierung zu lösen gibt.

4. Finanzmathematik im Schulunterricht

Sicherlich ist die Behandlung finanzmathematischer Probleme im Schulunterricht aufgrund des enorm gestiegenen Interesses am Börsenhandel ein attraktives Themengebiet, bei dem auch insbesondere deutlich wird, dass sich mathematische Modellierung an der Realität zu orientieren hat. Leider ist es nur schwer möglich, die spektakulären Ergebnisse wie die Black-Scholes-Formel oder die expliziten Resultate der zeit-stetigen Portfolio-Optimierung in den Schulunterricht einzubinden. Es sollte aber mühelos möglich sein, finanzmathematische Prinzipien wie

- das Prinzip der Arbitragefreiheit
- das Duplikationsprinzip der Optionsbewertung
- das Erwartungswert-Varianz-Prinzip nach Markowitz

zu erläutern und sie auf einfache Modelle wie das Binomialmodell oder aber das Ein-Perioden-Modell im Erwartungswert-Varianz-Ansatz im Unterricht anzuwenden. Die Vorteile dieser elementaren Modelle liegen auch darin, dass man direkte Anwendungen für mehrere Aspekte der Schulmathematik wie z.B. Lösung linearer Gleichungen, Maximierung/Minimierung quadratischer oder linearer Funktionen, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung hat.

Literatur

Black F., Scholes M. (1973) *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economics 81, 637-659.

Gill P., Murray W. (1978) *Numerically stable methods for quadratic programming*, Mathematical Programming 14, 349-372.

Goldfarb D., Idnani A. (1983) *A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs*, Mathematical Programming 27, 1-33.

Korn R. (1997) *Optimal Portfolios*, World Scientific.

Korn R., Korn E. (1999) *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung – Moderne Methoden der Finanzmathematik*, Vieweg Verlag.

Markowitz H. (1952) *Portfolio selection*, Journal of Finance 7, 77-91.

Merton R. (1973) *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-183.

Rogers L.C.G. (1998) *The relaxed investor and uncertain parameters*, working paper.

Anhang A: Stochastische Prozesse, bedingte Erwartung und Martingale

In diesem Teil des Anhangs sollen einige wenige Grundlagen stochastischer Prozesse und bedingter Erwartungen gesammelt werden. Es soll sich nicht um eine vollständige Entwicklung der zugehörigen Theorie handeln.

Definition A1:

(Ω, \mathcal{F}, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum.

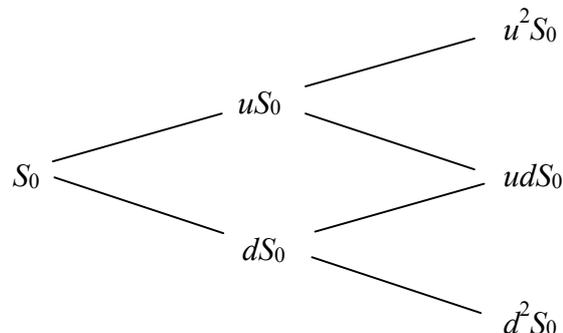
a) Eine Folge $\{f_t\}_{t \in I}$ aus σ -Algebren $f_t \subseteq \mathcal{F}$, wobei I eine geordnete Indexmenge ist und $f_t \subseteq f_s$ für $s \geq t$ gilt, heißt **Filterung**.

b) Zu einer gegebenen Indexmenge I seien eine Filterung $\{f_t\}_{t \in I}$ und eine Menge von Zufallsvariablen $\{X(t)\}_{t \in I}$ gegeben, so dass $X(t)$ f_t -messbar ist für alle $t \in I$. Dann heißt $\{(X(t), f_t)\}_{t \in I}$ ein **stochastischer Prozess**. Man sagt dann auch, der Prozess $X(t)$ sei f_t -adaptiert.

Um diese theoretischen Begriffe zu veranschaulichen, geben wir ein simples

Beispiel: Binomialmodell

Wir betrachten den Aktienkurs $S(iT/n)$ im Binomialmodell und wollen hieran die in Definition A.1 stehenden „Zutaten“ eines stochastischen Prozesses erläutern. Die passende Indexmenge ist $I = \{iT/n \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ und beschreibt bei einem stochastischen Prozess in der Regel die „Zeit“ (generell lässt sich damit ein stochastischer Prozess als die Beschreibung eines sich über die Zeit hin entwickelndes Zufallsexperiment auffassen). Da wir bereits die Zufallsvariablen vorgegeben haben (nämlich den Aktienkurs in den verschiedenen Zeitpunkten), benötigen wir jetzt noch eine passende Filterung. Die Filterung soll die zeitliche Entwicklung des Informationsflusses, die Entwicklung der beobachtbaren Ereignisse, modellieren. Dies soll im Fall $n=2$ detailliert erklärt werden:



Offensichtlich besteht unsere Grundmenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ aus den vier möglichen Preisverläufen des Aktienkurses, die wir mit $\omega_1 = „uu“$, $\omega_2 = „ud“$, $\omega_3 = „du“$ und $\omega_4 = „dd“$ bezeichnen wollen (wobei der erste Buchstabe immer den Multiplikator des Aktienkurses zwischen den ersten beiden Zeitpunkten, der zweite Buchstabe immer den Multiplikator des Aktienkurses zwischen den nächsten beiden Zeitpunkten angibt).

Hat man zur Zeit 0 nicht die Möglichkeit in die Zukunft zu schauen, so kann man nur den Anfangskurs der Aktie beobachten, weiß also nur, dass eines der vier Ereignisse aus Ω eintreten

wird. Da man nur diese minimale Information hat, wählt man als f_0 die minimal mögliche σ -Algebra, nämlich:

$$f_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Im Zeitpunkt $t=1$ wissen wir bereits, ob der Aktienkurs gestiegen ist (also beim ersten Preiswechsel der Zustand „ u “ eingetreten ist) oder nicht. Wir können also entscheiden, ob wir eines der Ereignisse aus $\{\omega_1, \omega_2\}$ oder eines aus $\{\omega_3, \omega_4\}$ beobachten werden, aber noch nicht, welches ω tatsächlich eintreten wird. Unsere Information ist zwar detaillierter als die im Startzeitpunkt. Sie ist aber noch nicht vollständig. Deshalb wählt man

$$f_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}.$$

Im Endzeitpunkt $t=2$ wissen wir nun tatsächlich, welchen Preisverlauf wir beobachtet haben, und wählen deshalb als σ -Algebra die Potenzmenge (= Menge aller Teilmengen von Ω), die hier mit f übereinstimmen muss. Damit haben wir auch unseren stochastischen Prozess vollständig konstruiert.

Weitere Beispiele stochastischer Prozesse sind Temperaturverläufe, Populationsgrößenentwicklungen oder aber der Vermögensprozess eines Spielers, der an einer Folge von Glücksspielen teilnimmt.

Das letzte Beispiel wollen wir als Aufhänger wählen, um die nächsten Begriffe, den der bedingten Erwartung und den des Martingals, zu erläutern.

Definition A2:

(Ω, f, P) sei ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{S} \subseteq f$ sei eine σ -Algebra über Ω . X sei eine auf obigem Wahrscheinlichkeitsraum definierte reellwertige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert.

Dann heißt eine Zufallsvariable Z **bedingte Erwartung von X gegeben \mathfrak{S}** , falls gelten:

- i) Z ist \mathfrak{S} -messbar.
- ii) Für alle Elemente $A \in \mathfrak{S}$ mit $P(A) > 0$ gilt: $\sum_{\omega \in A} Z(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in A} X(\omega)P(\omega)$.

Wir schreiben dann für Z auch $E(X|\mathfrak{S})$ und bemerken, dass die bedingte Erwartung durch die obigen Forderungen nur fast sicher eindeutig ist, da wir ihre Werte auf Nullmengen aus \mathfrak{S} beliebig abändern können, solange die Messbarkeitsbedingung i) erfüllt bleibt.

Zwar erscheint die Definition der bedingten Erwartung zunächst sehr technisch, aber auf den zweiten Blick ist sie durchaus natürlich. Wir betrachten hierzu unser Beispiel der Vermögensentwicklung eines Glücksspielers und nehmen an, dass der Spieler an 5 Spielen nacheinander teilnimmt, jeweils eine Geldeinheit mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewinnt oder eine Geldeinheit mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verliert. Sein Anfangsvermögen sei y , der Ausgang des i .Spiels sei X_i . Dann gilt für sein Endvermögen Y nach dem 5.Spiel:

$$Y = y + \sum_{i=1}^5 X_i, \quad E(Y) = y + \sum_{i=1}^5 E(X_i) = y.$$

Nachdem der Spieler das erste Spiel absolviert hat, wird sich sein Vermögen entweder um +1 oder um -1 geändert haben. Um genau diesen Wert wird sich dann auch $E(Y)$ ändern, wenn der Wert nach dem Spiel neu berechnet wird. D.h. wenn wir den Ausgang des ersten Spiels

kennen, kennen wir auch unseren „neuen“ Erwartungswert. Da dieser Ausgang heute aber noch unbekannt ist, wissen wir nur:

- der „neue“ Erwartungswert ist eine Funktion des noch unbekanntes Ergebnisses des ersten Spiels, also eine bzgl. diesem Ausgang messbare Zufallsvariable.
- die möglichen Werte des „neuen“ Erwartungswerts sind bekannt und auf den Ereignissen, die durch die Ausgänge des ersten Spiels bestimmt sind, konstant.

Dies sind aber genau die definierenden Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts, und mit der Wahl $\mathfrak{S} = \{\emptyset, \Omega, \{X_1=1\}, \{X_1=-1\}\}$ ergibt sich der „neue“, heute unbekanntes Erwartungswert gegeben \mathfrak{S} als

$$E(Y | \mathfrak{S}) = y + X_1 .$$

Nimmt der Spieler nun an einem fairen Spiel teil (was wir oben unterstellt hatten), so wird man fordern, dass die bedingte Erwartung seines Vermögens nach dem Spiel genau gleich dem Vermögen vor dem Spiel ist. Dies ist auch der Grundgedanke des Martingalbegriffs

Definition A.3

Es sei $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ein an eine Filterung \mathcal{F}_t adaptierter stochastischer Prozess $M(t)$ heißt **Martingal**, falls für $s \geq t$

$$M(t) = E(M(s) | \mathcal{F}_t)$$

gilt. Insbesondere folgt daraus auch $E(M(t)) = E(M(0))$ für alle $t = 0, 1, 2, \dots$

Wir wollen noch formal zeigen, dass der Vermögensverlauf in einem fairen Spiel ein Martingal ist. Es sei hierzu eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots mit $E(X_1) = 0$. Dies seien die Ausgänge der einzelnen Spiele. Wir definieren dann das Vermögen des Spielers nach dem n . Spiel als die Summe der Ausgänge plus sein Startvermögen y , also

$$Y(n) = y + \sum_{i=1}^n X_i .$$

Weiter sei \mathcal{F}_n die von den Ergebnissen X_1, \dots, X_n der Spiele bis zum n . Zeitpunkt erzeugte σ -Algebra. Da der Vermögenszuwachs zwischen dem m . und dem n . Spiel für $m > n$ von \mathcal{F}_n unabhängig ist, gilt dann

$$E(Y(m) - Y(n) | \mathcal{F}_n) = E(Y(m) - Y(n)) = 0.$$

Die erste Gleichheit folgt direkt aus der Definition der bedingten Erwartung im Fall einer Zufallsvariablen, die nicht von der Bedingung abhängt. Mit dieser Beziehung gilt dann

$$E(Y(m) | \mathcal{F}_n) = E(Y(m) - Y(n) + Y(n) | \mathcal{F}_n) = E(Y(m) - Y(n)) + E(Y(n) | \mathcal{F}_n) = 0 + Y(n) = Y(n) .$$

Dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen aus der Linearität der bedingten Erwartung. Für das dritte Gleichheitszeichen lässt sich mit der Definition der bedingten Erwartung zeigen, dass für eine bzgl. der Bedingung messbare Zufallsvariable gerade gleich ihrer bedingten Erwartung gegeben diese Bedingung ist. Insgesamt haben wir die Martingaleigenschaft des stochastischen Prozesses $\{(Y(n), \mathcal{F}_n)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ gezeigt.

Anhang B: Simulation von Zufallsgrößen

In diesem Kapitel soll beschrieben werden, wie man Zufallsgrößen mit vorgegebener Verteilung erzeugen kann. Natürlich kann man viele Zufallsgrößen rein physisch erzeugen, wie z.B. eine Gleichverteilung auf den Zahlen 1,2,3,4,5,6 durch Würfeln mit einem fairen Würfel, aber dies ist in Anbetracht der für die Anwendung oft enorm hohen benötigten Anzahl der zugehörigen Zufallszahlen sehr ineffizient. Deshalb wird hier immer die folgende Annahme gemacht:

Annahme:

Es liegt ein Mechanismus vor, mit dem man beliebig viele unabhängige, auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallszahlen erzeugen kann.

Unter einem solchen Mechanismus wollen wir der Einfachheit halber eine vom Computer bereitgestellte Funktion verstehen (typischerweise mit Namen „Random“, der aber je nach verwendeter Software anders lauten kann). Es wird hier nicht auf die zahlentheoretischen Methoden eingegangen, die der Computer zur Erzeugung der Zufallszahlen verwendet.

Wir müssen einige Fälle der Transformation dieser gleichmäßig verteilten Zufallszahlen in Zufallszahlen gewünschter Verteilung unterschieden werden:

i) Zufallszahlen mit stetiger Verteilungsfunktion

Wir setzen voraus, dass die gewünschten Zufallszahlen reellwertig (ein-dimensional) sind und eine stetige Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzen. Wir definieren dann die verallgemeinerte Umkehrfunktion von $F(x)$ als

$$\tilde{F}^{-1}(y) := \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) = y\}, \quad y \in [0,1].$$

Hierbei können – je nach Typ der gewünschten Verteilung – auch die Werte $\pm\infty$ angenommen werden. Die Erzeugung der gewünschten Zufallszahlen ist nun ganz einfach:

1. Schritt:

Erzeuge N unabhängige auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallszahlen y_1, \dots, y_N .

2. Schritt:

Transformiere y_1, \dots, y_N zu x_1, \dots, x_N mit $x_i = \tilde{F}^{-1}(y_i)$

Die Verteilungsannahme für die transformierten Zufallsgrößen lässt sich leicht nachprüfen:

Sei $X = \tilde{F}^{-1}(Y)$, wobei Y auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilt ist. Dann gilt

$$P(X \leq x) = P(\tilde{F}^{-1}(Y) \leq x) = P(Y \leq F(x)) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h. X besitzt die vorgegebene Verteilungsfunktion F .

Beispiel: Exponentialverteilte Zufallszahlen

Aus $F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$ folgt $\tilde{F}^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), y \in]0,1]$, und man kann obigen Algorithmus anwenden, um $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallszahlen für $\lambda > 0$ zu erzeugen.

Im Falle der Normalverteilung ist allerdings die Verteilungsfunktion nicht durch eine geschlossene analytische Form gegeben, so dass wir eine andere Methode bevorzugen.

ii) Normal verteilte Zufallszahlen

Hier basiert unsere Methode auf der sogenannten Box-Muller-Transformation:

Sind Y, Y' unabhängig und jeweils auf $(0,1)$ gleichmäßig verteilt, so sind X, X' gegeben als

$$X = \sqrt{-2 \ln(Y)} \cos(2\pi Y'), \quad X' = \sqrt{-2 \ln(Y)} \sin(2\pi Y')$$

unabhängig und jeweils $N(0,1)$ -verteilt. Man erzeugt sich dann auch hier wieder erst die unabhängigen, gleichmäßig verteilten Zufallszahlen und transformiert sie dann paarweise mittels der Box-Muller-Transformation in die standard normalverteilten Zufallszahlen.

Will man jetzt n -dimensional normalverteilte Zufallsvektoren Z mit Erwartungswertvektor μ und Varianz-Kovarianzmatrix AA' erzeugen, so erhält man diese aus unabhängigen ein-dimensionalen standard normalverteilten Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n wie folgt:

$$Z = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \mu.$$

iii) Diskret verteilte Zufallszahlen

Die Methodik zur Erzeugung von Zufallszahlen mit einer vorgegebenen diskreten Verteilung ist prinzipiell genau dieselbe wie die bei stetigen Verteilungen. Allerdings lässt sie sich hier auch noch vereinfachen. Wir betrachten zunächst den Fall, wenn eine Zufallsgröße X simuliert werden soll, die nur endlich viele Werte $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ annimmt, wobei

$$p_i = P(X = x^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n$$

gilt. Um nun aus einer auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilten Zufallsgrößen Y eine Zufallsgröße mit derselben Verteilung wie X zu erhalten, teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in n Teilintervalle I_1, \dots, I_n auf mit

$$I_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} p_j, \sum_{j=1}^i p_j \right], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad I_n = \left[\sum_{j=1}^{n-1} p_j, 1 \right].$$

Wir erhalten dann zu einer auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilten Zufallsgrößen Y eine Zufallsgröße Z mit derselben Verteilung wie X , wenn wir Z folgendermaßen definieren:

$$Z = x^{(i)}, \quad \text{falls } Y \in I_i.$$

Eine diskrete Zufallsvariable, die eine Verteilung besitzt, bei der abzählbar viele Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden, kann vollkommen analog simuliert werden. Man muss lediglich das Intervall $[0,1]$ auf dieselbe Art wie oben in unendlich viele Intervalle aufteilen, wobei es natürlich keine letztes Intervall geben kann.

Anhang C: Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben

Wir betrachten das Problem

$$(Q) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} x' C x + \mu' x \right)$$
$$NB: Ax \geq b$$

für eine gegebene positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n,n}$, gegebenes $\mu \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, wobei A maximalen Rang habe und im Fall $m \geq n$ gelte, dass jede Teilmatrix von A , die aus n Zeilen besteht, regulär ist.

Die Idee der Lösung dieses Problems besteht darin, „Teilprobleme“ der Form

$$(QJ) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} x' C x + \mu' x \right)$$
$$NB: a_i x = b_i, i \in J \subseteq \{1, \dots, m\}$$

für maximal n -elementige Teilmengen J von $\{1, \dots, m\}$ zu lösen, wobei a_i die i . Zeile von A ist. Man kann sich nämlich leicht überlegen, dass die Lösung des Ursprungsproblems durch die Nebenbedingungen gegeben ist, die im Optimum als Gleichungen erfüllt sind. Die Nebenbedingungen, die im Optimum nicht aktiv sind (also im Optimum als echte Ungleichung erfüllt sind), spielen keine Rolle. Folglich muss man eigentlich nur alle möglichen Probleme (QJ) lösen. Unter den erhaltenen Optimallösungen dieser Teilprobleme, die auch die restlichen Nebenbedingungen aus (Q) erfüllen, ist dann die Lösung mit dem niedrigsten Zielfunktionswert die Optimallösung von (Q).

Es bleiben noch zwei Probleme:

- Wie löst man überhaupt Teilprobleme (QJ) ?
- Wie gestaltet man die Suche nach der Optimallösung von (Q) durch Lösen von Teilproblemen (QJ) möglichst effizient, bzw. wie wählt man das richtige (QJ) aus ?

1. Schritt: Lösung von (QJ)

Es sei A_J die aus den zu J gehörenden Zeilen von A gebildete Matrix, b_J der zugehörige Vektor. Hat A_J n Zeilen, so gibt es nur einen zulässigen Punkt für (QJ), der dann auch automatisch Optimallösung ist. Wir betrachten deshalb den Fall, dass J weniger als n Elemente hat. Es sei $k=|J|$. Dann gelten nach unseren Annahmen:

- $\dim(\text{Kern}(A_J)) = n-k$
- Jede Lösung von $A_J x = b_J$ besitzt die eindeutige Darstellung

$$x = x^* + y,$$

wobei x^* eine fest gewählte Lösung von $A_J x = b_J$ ist und $y \in \text{Kern}(A_J)$.

- Es existieren eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ und eine reguläre obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit

$$A_J = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = (Q_1, Q_2) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1 R \quad \text{„QR-Zerlegung“}.$$

- Zu $y \in \text{Kern}(A_J)$ existiert genau ein $z \in \mathbb{R}^k$ mit $y = Q_2 z$.

Verwenden all dieser Fakten und Einsetzen der einzelnen Darstellungen für x, y liefert die Äquivalenz des Problems (QJ) mit

$$(QJ^*) \quad \min_{z \in \mathbb{R}^k} \left(\frac{1}{2} z' Q_2' C Q_2 z + (\mu' Q_2 + x^{*'} Q_2' C Q_2) z \right)$$

Dies ist aber ein freies Optimierungsproblem mit einer positiv definiten Zielfunktionsmatrix und besitzt die explizite Lösung

$$z^* = (Q_2' C Q_2)^{-1} (Q_2' \mu + Q_2' C Q_2 x^*).$$

Folglich hat das Problem (QJ) die Optimallösung $x^* + Q_2 z^*$.

2. Schritt: Auswahl des richtigen Teilproblems (QJ)

Natürlich kann man alle Teilproblem (QJ) lösen und unter den Optimallösungen die von (Q) suchen. Wir wollen hier aber einen effizienteren Vorschlag machen, der auch noch verbessert werden kann, dann aber zusätzliche Überlegungen über die Theorie der Lagrange-Multiplikatoren erfordert, die hier nicht entwickelt werden soll (siehe z.B. Goldfarb und Idnani (1983)).

Man überlegt sich leicht, dass sobald eine Optimallösung eines Problems (QJ) auch für (Q) zulässig ist, es nicht mehr nötig ist, Probleme (QJ') mit $J \subsetneq J'$ zu betrachten, da durch Hinzunahme weiterer Gleichungsnebenbedingungen der optimale Zielfunktionswert höchstens steigen kann. Darauf baut der folgende Algorithmus auf:

Algorithmus zur Lösung von (Q):

1. Löse das freie Problem (Q \emptyset). Ist die Optimallösung schon zulässig für (Q), so löst sie auch (Q). Sonst setze $k=0$ und gehe zum 2. Schritt.
2. Setze $k=k+1$ und löse alle Probleme (QJ) mit $|J|=k$, für die keine echte Teilmenge J^* existiert, deren Optimallösung $x^{*_{J^*}}$ zulässig für (Q) ist. Falls keine solchen Probleme mehr existieren oder $k=n$ gilt, so gehe zum 3. Schritt.
3. Suche unter allen im 2. Schritt berechneten $x^{*_{J^*}}$, die zulässig für (Q) sind, das mit dem kleinsten Zielfunktionswert heraus. Ist kein für (Q) zulässiges $x^{*_{J^*}}$ berechnet worden, so melde „Der zulässige Bereich von (Q) ist leer.“

Dieser Algorithmus findet nach endlich vielen Schritten eine Optimallösung von (Q) oder stellt fest, dass der zulässige Bereich von (Q) leer ist.

Natürlich sind zur Implementierung noch einige technische Dinge explizit zu gestalten (wie z.B. die Berechnung der QR-Zerlegung der Nebenbedingungsmatrizen), aber hierauf soll im Rahmen dieses Anhangs nicht eingegangen werden. Es wird statt dessen auf die einführende Standardliteratur zur Numerik verwiesen.

Übungen zur „Elementaren Finanzmathematik“

Themengebiete:

Zinsen

(Umrechnung verschiedener Verzinsungsverfahren, Konsistenz bei Zinssätzen für verschiedene Zeiträume)

Modellierung von Aktienkursen

(Binomialmodell und Martingalwahrscheinlichkeiten, Arbitragemöglichkeiten, Bäume, Berechnung bedingte Erwartungswerte, Simulationen von Binomial- und Black-Scholes-Modellen, Binomial- und Normalverteilung)

Optionen

(Einsatzmöglichkeiten, Payoff-Diagramme, Erzeugung neuer Optionen, Duplikationsstrategien, Berechnung konkreter Beispiele von Optionspreisen, Unterschiede Black-Scholes-Preis \Leftrightarrow Binomialpreis, Arbitragegrenzen, Monte Carlo Simulation, Bewertung exotischer Optionen)

Optimales Investment

(Lösung von Erwartungswert-Varianz-Problemen, Nutzenfunktion, Sicherheitsäquivalent, Rückwärtsinduktion, Börsenspiele)

Themengebiet „Zinsen“

Aufgabe 1:

- a) Unsere Hausbank bietet uns für eine Festgeldanlage für 2 Jahre 5 % Verzinsung an (bei jährlicher Zinszahlung), für ein einjährige Festgeldanlage 4,8 % Zins an. Welche Verzinsung r_2 benötigen wir für das zweite Jahr um mit der einjährigen Festgeldanlage und anschließender weiterer einjähriger Festgeldanlage dasselbe Endvermögen in $t=2$ zu besitzen wie mit der obigen zweijährigen Festgeldanlage ?
- b) Berechne den Zinssatz, den man bei monatlicher Verzinsung benötigt, um nach einem Jahr dasselbe Vermögen zu besitzen wie bei einer einmaligen jährlichen Verzinsung von 6 %.

Aufgabe 2:

- a) Ein Investment für drei Jahre bietet uns pro 1000 € investierten Gelds in den nächsten drei Jahren Zinszahlungen (jeweils am Ende des Jahres) in Höhe von

Jahr1: 10 € Jahr 2: 15 € Jahr 3: 40 €

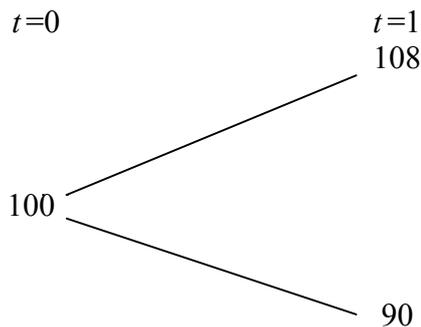
- an. Welcher jährliche konstante Zinssatz liefert ein zu obigem Investment äquivalentes Vermögen ?
- b) Man erstelle ein Excel-Sheet, auf dem die Entwicklung einer investierten Geldeinheit bei jährlicher, halbjährlicher, vierteljährlicher und stetiger Verzinsung für beliebigen Zinssatz graphisch dargestellt werden.

Themengebiet „Modellierung von Aktienkursen“

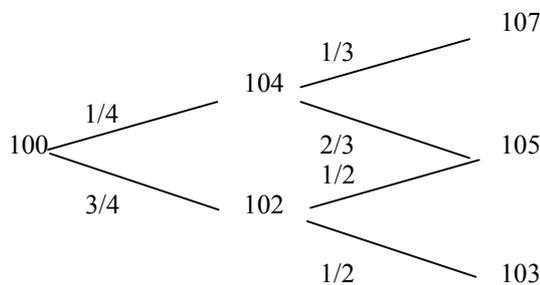
Aufgabe 1:

Durch die folgenden Baumdiagramme werden immer die möglichen zeitlichen Entwicklungen von Aktienkursen dargestellt.

a) Wie muss die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses im folgenden Baumdiagramm gewählt werden, damit sich der Aktienkurs im Mittel besser entwickelt als Bargeld? Was ändert sich, wenn der Aktienkurs mit einer 5 % Festgeldanlage verglichen werden soll, was, wenn er mit einer 10 % Festgeldanlage verglichen werden soll? Die Periodenlänge betrage ein Jahr.



b) Außer der Aktieninvestition mit dem folgenden zugehörigen Baumdiagramm kann ein Investor zu den Zeitpunkten $t=0$ und $t=1$ noch jeweils in Festgeld zu den Zinssätzen r_0 bzw. r_1 investieren. Wie müssen r_0 und r_1 gewählt werden, damit im betrachteten Modell keine Arbitragemöglichkeit besteht?



c) Der Aktienkurs zur Zeit $t \in \{0,1,2\}$ aus Teil b) werde mit $S(t)$ bezeichnet. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und bedingte Erwartungswerte:

$$P(S(2) \geq 105) = ?$$

$$P(S(2) + S(1) \geq 205) = ?$$

$$E(S(2)) = ?$$

$$E(S(2) - S(1)) = ?$$

$$E\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right) = ?$$

$$E(S(2) | S(1)) = ?$$

d) Bestimme die jeweiligen Aufwärtswahrscheinlichkeiten im Baum in Teil b), so dass der Aktienpreis ein Martingal ist.

Aufgabe 2:

- a) Erstelle ein Excel-Sheet, auf dem das Histogramm der Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p=0.5$ und $n=10$ mit der Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu=5$ und Varianz $\sigma^2 = 2.5$ verglichen wird. Vergleiche die Form des Histogramms mit der Dichte !
- b) Was ändert sich, wenn man in a) p in $p=0.4$ und μ, σ^2 in $\mu=4$ und $\sigma^2 = 2.4$. Vergleiche erneut die Formen von Dichte und Histogramm !

Aufgabe 3:

Wir nehmen von einer Aktie mit heutigem Preis $S(0)=100$, dass ihr Preis zum Jahresende $S(365)$ einen Erwartungswert von $\mu = 110$ und eine Varianz von $\sigma^2=25$ besitzt.

- a) Finde zu den Werten $n=365$ und $p=0.5$, einen Wert u , so dass im zugehörigen n -Perioden-Binomialmodell mit $d=1/u$ und Anfangspreis $S_{bin}(0) = 100$ auch $E(S_{bin}(n)) = 110$ gilt.
- b) Erstelle ein Excel-Sheet, auf dem mit Hilfe eines Makros ein Verlauf des Aktienpreises im Binomialmodell aus Teil a) simuliert werden und dann in einer Grafik veranschaulicht werden kann.
- c) Welche Werte d und u benötigt man in a), wenn man – ohne die Beziehung $d=1/u$ – neben der Gleichheit $E(S_{bin}(n)) = 110$ auch noch $Var(S_{bin}(n)) = 25$ fordert.
- d) Man berechne die Varianz $Var(S_{bin}(n))$ des Binomialmodells aus Teil a) mittels Simulation und vergleiche sie mit der Varianz des Binomialmodells aus Teil c).

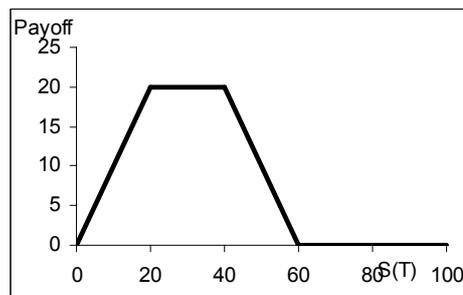
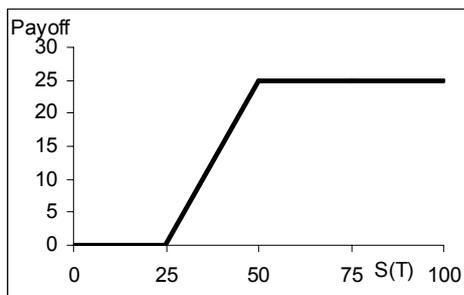
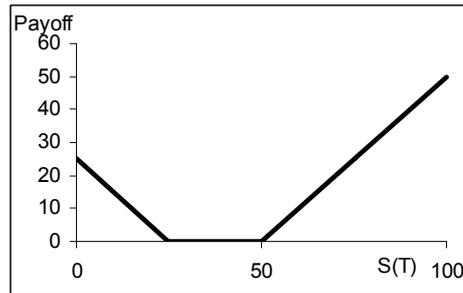
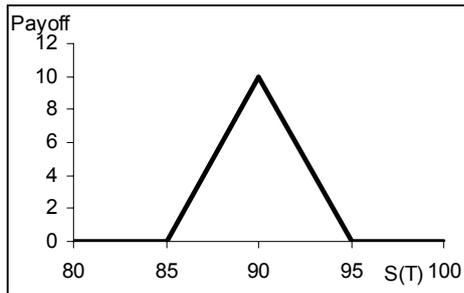
Themengebiet „Optionen“

Aufgabe 1:

a) Zeichne die Payoff-Diagramme der folgenden durch ihre Endauszahlungen gegebenen Optionen:

$$B = ((S_1(T) - K)^+)^2, \quad B = \frac{1}{2}(S_1(T) - 10)^+ + \frac{1}{2}(S_1(T) - 16)^+ - (S_1(T) - 13)^+$$

b) Versuche, für die folgenden durch ihre Payoff-Diagramme gegebenen Optionen die funktionale Form ihrer Endauszahlungen B zu bestimmen !



c) Finde in einem Modell (z.B. Black-Scholes-Modell oder Binomialmodell) den Preis der Optionen aus Teil b).

Aufgabe 2:

a) Berechne im Ein-Perioden-Binomialmodell den Preis und die zugehörige Duplikationsstrategie der Option $B = ((S_1(T) - K)^+)^2$.

b) Berechne im n -Perioden-Binomialmodell den Preis der „Alles-oder-Nichts“-Option

$$B = 1_{\{S_1(T) \geq K\}}.$$

Aufgabe 3:

Erstelle ein Excel-Sheet, mit dem man für beliebige Wahlen von r , σ , T , K , s Call-Preise im n -Perioden-Binomialmodell und im Black-Scholes-Modell vergleichen kann.

a) Ab welcher Größenordnung von n werden die Approximationen gut ?

b) Wo liegen bei festem n und K die größten Unterschiede zwischen Binomial- und Black-Scholes-Preis ?

Themengebiet „Optimales Investment“

Aufgabe 1:

Einem Investor soll aus zwei Aktien mit den Erwartungswerten und Kovarianzen der Renditen, die durch

$$\mu = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ -0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, ein Portfolio bilden, das ihm bezüglich der Rendite maximalen Portfolioreturn liefert, dessen Portfoliovarianz aber höchstens 0,25 betragen darf.

Aufgabe 2:

a) Zeige, dass für alle Parameterwerte $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ die Funktion

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x \geq 0$$

eine Nutzenfunktion ist.

b) Illustriere graphisch und durch das Berechnen einiger Sicherheitsäquivalente für verschiedene Werte von γ , dass diese Nutzenfunktionen umso risikoaverser sind, je niedriger der Parameter γ gewählt wird.

Aufgabe 3:

Erstelle ein Excel-Simulationsprogramm für ein einfaches Börsenspiel. Hierbei sollen die teilnehmenden Spieler zu gegebenen Investmentmöglichkeiten (Festgeld, Aktien) vor Beginn des Spiels ihren Portfoliovektor wählen dürfen. Als Optionen sollen vorhanden sein:

- a) Wahl eines Durchlaufs mit Ausgabe des Endvermögens
- b) Wahl mehrerer Durchläufe mit Ausgabe des mittleren Endvermögens, der Standardabweichung, des maximalen und minimalen Endvermögens

der einzelnen Teilnehmer. Als Option kann auch ein Mehrperiodenmodell (z.B. Binomialmodell) implementiert werden und die Vermögensverläufe der einzelnen Teilnehmer sowie die Preisverläufe der Wertpapiere graphisch ausgegeben werden.

The PDF-files of the following reports are available under:

www.itwm.fraunhofer.de/zentral/berichte.html

1. D. Hietel, K. Steiner, J. Struckmeier
A Finite - Volume Particle Method for Compressible Flows

We derive a new class of particle methods for conservation laws, which are based on numerical flux functions to model the interactions between moving particles. The derivation is similar to that of classical Finite-Volume methods; except that the fixed grid structure in the Finite-Volume method is substituted by so-called mass packets of particles. We give some numerical results on a shock wave solution for Burgers equation as well as the well-known one-dimensional shock tube problem. (19 pages, 1998)

2. M. Feldmann, S. Seibold
Damage Diagnosis of Rotors: Application of Hilbert Transform and Multi-Hypothesis Testing

In this paper, a combined approach to damage diagnosis of rotors is proposed. The intention is to employ signal-based as well as model-based procedures for an improved detection of size and location of the damage. In a first step, Hilbert transform signal processing techniques allow for a computation of the signal envelope and the instantaneous frequency, so that various types of non-linearities due to a damage may be identified and classified based on measured response data. In a second step, a multi-hypothesis bank of Kalman Filters is employed for the detection of the size and location of the damage based on the information of the type of damage provided by the results of the Hilbert transform. *Keywords: Hilbert transform, damage diagnosis, Kalman filtering, non-linear dynamics* (23 pages, 1998)

3. Y. Ben-Haim, S. Seibold
Robust Reliability of Diagnostic Multi-Hypothesis Algorithms: Application to Rotating Machinery

Damage diagnosis based on a bank of Kalman filters, each one conditioned on a specific hypothesized system condition, is a well recognized and powerful diagnostic tool. This multi-hypothesis approach can be applied to a wide range of damage conditions. In this paper, we will focus on the diagnosis of cracks in rotating machinery. The question we address is: how to optimize the multi-hypothesis algorithm with respect to the uncertainty of the spatial form and location of cracks and their resulting dynamic effects. First, we formulate a measure of the reliability of the diagnostic algorithm, and then we discuss modifications of the diagnostic algorithm for the maximization of the reliability. The reliability of a diagnostic algorithm is measured by the amount of uncertainty consistent with no-failure of the diagnosis. Uncertainty is quantitatively represented with convex models. *Keywords: Robust reliability, convex models, Kalman filtering, multi-hypothesis diagnosis, rotating machinery, crack diagnosis* (24 pages, 1998)

4. F.-Th. Lentz, N. Siedow
Three-dimensional Radiative Heat Transfer in Glass Cooling Processes

For the numerical simulation of 3D radiative heat transfer in glasses and glass melts, practically applicable mathematical methods are needed to handle such problems optimal using workstation class computers. Since the exact solution would require super-computer capabilities we concentrate on approximate solutions with a high degree of accuracy. The following approaches are studied: 3D diffusion approximations and 3D ray-tracing methods. (23 pages, 1998)

5. A. Klar, R. Wegener
A hierarchy of models for multilane vehicular traffic Part I: Modeling

In the present paper multilane models for vehicular traffic are considered. A microscopic multilane model based on reaction thresholds is developed. Based on this model an Enskog like kinetic model is developed. In particular, care is taken to incorporate the correlations between the vehicles. From the kinetic model a fluid dynamic model is derived. The macroscopic coefficients are deduced from the underlying kinetic model. Numerical simulations are presented for all three levels of description in [10]. Moreover, a comparison of the results is given there. (23 pages, 1998)

Part II: Numerical and stochastic investigations

In this paper the work presented in [6] is continued. The present paper contains detailed numerical investigations of the models developed there. A numerical method to treat the kinetic equations obtained in [6] are presented and results of the simulations are shown. Moreover, the stochastic correlation model used in [6] is described and investigated in more detail. (17 pages, 1998)

6. A. Klar, N. Siedow
Boundary Layers and Domain Decomposition for Radiative Heat Transfer and Diffusion Equations: Applications to Glass Manufacturing Processes

In this paper domain decomposition methods for radiative transfer problems including conductive heat transfer are treated. The paper focuses on semi-transparent materials, like glass, and the associated conditions at the interface between the materials. Using asymptotic analysis we derive conditions for the coupling of the radiative transfer equations and a diffusion approximation. Several test cases are treated and a problem appearing in glass manufacturing processes is computed. The results clearly show the advantages of a domain decomposition approach. Accuracy equivalent to the solution of the global radiative transfer solution is achieved, whereas computation time is strongly reduced. (24 pages, 1998)

7. I. Choquet
Heterogeneous catalysis modelling and numerical simulation in rarefied gas flows Part I: Coverage locally at equilibrium

A new approach is proposed to model and simulate numerically heterogeneous catalysis in rarefied gas flows. It is developed to satisfy all together the following points: 1) describe the gas phase at the microscopic scale, as required in rarefied flows, 2) describe the wall at the macroscopic scale, to avoid prohibitive computational costs and consider not only crystalline but also amorphous surfaces, 3) reproduce on average macroscopic laws correlated with experimental results and 4) derive analytic models in a systematic and exact way. The problem is stated in the general framework of a non static flow in the vicinity of a catalytic and non porous surface (without aging). It is shown that the exact and systematic resolution method based on the Laplace transform, introduced previously by the author to model collisions in the gas phase, can be extended to the present problem. The proposed approach is applied to the modelling of the Eley-Rideal and Langmuir-Hinshelwood recombinations, assuming that the coverage is locally at equilibrium. The models are developed considering one atomic species and extended to the general case of several atomic species. Numerical calculations show that the models derived in this way reproduce with accuracy behaviors observed experimentally. (24 pages, 1998)

8. J. Ohser, B. Steinbach, C. Lang
Efficient Texture Analysis of Binary Images

A new method of determining some characteristics of binary images is proposed based on a special linear filtering. This technique enables the estimation of the area fraction, the specific line length, and the specific integral of curvature. Furthermore, the specific length of the total projection is obtained, which gives detailed information about the texture of the image. The influence of lateral and directional resolution depending on the size of the applied filter mask is discussed in detail. The technique includes a method of increasing directional resolution for texture analysis while keeping lateral resolution as high as possible. (17 pages, 1998)

9. J. Orlik
Homogenization for viscoelasticity of the integral type with aging and shrinkage

A multi-phase composite with periodic distributed inclusions with a smooth boundary is considered in this contribution. The composite component materials are supposed to be linear viscoelastic and aging (of the non-convolution integral type, for which the Laplace transform with respect to time is not effectively applicable) and are subjected to isotropic shrinkage. The free shrinkage deformation can be considered as a fictitious temperature deformation in the behavior law. The procedure presented in this paper proposes a way to determine average (effective homogenized) viscoelastic and shrinkage (temperature) composite properties and the homogenized stress-field from known properties of the components. This is done by the extension of the asymptotic homogenization technique known for pure elastic non-homogeneous bodies to the non-homo-

geneous thermo-viscoelasticity of the integral non-convolution type. Up to now, the homogenization theory has not covered viscoelasticity of the integral type. Sanchez-Palencia (1980), Francfort & Suquet (1987) (see [2], [9]) have considered homogenization for viscoelasticity of the differential form and only up to the first derivative order. The integral-modeled viscoelasticity is more general than the differential one and includes almost all known differential models. The homogenization procedure is based on the construction of an asymptotic solution with respect to a period of the composite structure. This reduces the original problem to some auxiliary boundary value problems of elasticity and viscoelasticity on the unit periodic cell, of the same type as the original non-homogeneous problem. The existence and uniqueness results for such problems were obtained for kernels satisfying some constrain conditions. This is done by the extension of the Volterra integral operator theory to the Volterra operators with respect to the time, whose 1 kernels are space linear operators for any fixed time variables. Some ideas of such approach were proposed in [11] and [12], where the Volterra operators with kernels depending additionally on parameter were considered. This manuscript delivers results of the same nature for the case of the space-operator kernels.
(20 pages, 1998)

10. J. Mohring

Helmholtz Resonators with Large Aperture

The lowest resonant frequency of a cavity resonator is usually approximated by the classical Helmholtz formula. However, if the opening is rather large and the front wall is narrow this formula is no longer valid. Here we present a correction which is of third order in the ratio of the diameters of aperture and cavity. In addition to the high accuracy it allows to estimate the damping due to radiation. The result is found by applying the method of matched asymptotic expansions. The correction contains form factors describing the shapes of opening and cavity. They are computed for a number of standard geometries. Results are compared with numerical computations.
(21 pages, 1998)

11. H. W. Hamacher, A. Schöbel

On Center Cycles in Grid Graphs

Finding "good" cycles in graphs is a problem of great interest in graph theory as well as in locational analysis. We show that the center and median problems are NP hard in general graphs. This result holds both for the variable cardinality case (i.e. all cycles of the graph are considered) and the fixed cardinality case (i.e. only cycles with a given cardinality p are feasible). Hence it is of interest to investigate special cases where the problem is solvable in polynomial time. In grid graphs, the variable cardinality case is, for instance, trivially solvable if the shape of the cycle can be chosen freely. If the shape is fixed to be a rectangle one can analyze rectangles in grid graphs with, in sequence, fixed dimension, fixed cardinality, and variable cardinality. In all cases a complete characterization of the optimal cycles and closed form expressions of the optimal objective values are given, yielding polynomial time algorithms for all cases of center rectangle problems. Finally, it is shown that center cycles can be chosen as rectangles for small cardinalities such that the center cycle problem in grid graphs is in these cases completely solved.
(15 pages, 1998)

12. H. W. Hamacher, K.-H. Küfer

Inverse radiation therapy planning - a multiple objective optimisation approach

For some decades radiation therapy has been proved successful in cancer treatment. It is the major task of clinical radiation treatment planning to realize on the one hand a high level dose of radiation in the cancer tissue in order to obtain maximum tumor control. On the other hand it is obvious that it is absolutely necessary to keep in the tissue outside the tumor, particularly in organs at risk, the unavoidable radiation as low as possible. No doubt, these two objectives of treatment planning - high level dose in the tumor, low radiation outside the tumor - have a basically contradictory nature. Therefore, it is no surprise that inverse mathematical models with dose distribution bounds tend to be infeasible in most cases. Thus, there is need for approximations compromising between overdosing the organs at risk and underdosing the target volume. Differing from the currently used time consuming iterative approach, which measures deviation from an ideal (non-achievable) treatment plan using recursively trial-and-error weights for the organs of interest, we go a new way trying to avoid a priori weight choices and consider the treatment planning problem as a multiple objective linear programming problem: with each organ of interest, target tissue as well as organs at risk, we associate an objective function measuring the maximal deviation from the prescribed doses. We build up a data base of relatively few efficient solutions representing and approximating the variety of Pareto solutions of the multiple objective linear programming problem. This data base can be easily scanned by physicians looking for an adequate treatment plan with the aid of an appropriate online tool.
(14 pages, 1999)

13. C. Lang, J. Ohser, R. Hilfer

On the Analysis of Spatial Binary Images

This paper deals with the characterization of microscopically heterogeneous, but macroscopically homogeneous spatial structures. A new method is presented which is strictly based on integral-geometric formulae such as Crofton's intersection formulae and Hadwiger's recursive definition of the Euler number. The corresponding algorithms have clear advantages over other techniques. As an example of application we consider the analysis of spatial digital images produced by means of Computer Assisted Tomography.
(20 pages, 1999)

14. M. Junk

On the Construction of Discrete Equilibrium Distributions for Kinetic Schemes

A general approach to the construction of discrete equilibrium distributions is presented. Such distribution functions can be used to set up Kinetic Schemes as well as Lattice Boltzmann methods. The general principles are also applied to the construction of Chapman Enskog distributions which are used in Kinetic Schemes for compressible Navier-Stokes equations.
(24 pages, 1999)

15. M. Junk, S. V. Raghurame Rao

A new discrete velocity method for Navier-Stokes equations

The relation between the Lattice Boltzmann Method, which has recently become popular, and the Kinetic Schemes, which are routinely used in Computational Fluid Dynamics, is explored. A new discrete velocity model for the numerical solution of Navier-Stokes equations for incompressible fluid flow is presented by combining both the approaches. The new scheme can be interpreted as a pseudo-compressibility method and, for a particular choice of parameters, this interpretation carries over to the Lattice Boltzmann Method.
(20 pages, 1999)

16. H. Neunzert

Mathematics as a Key to Key Technologies

The main part of this paper will consist of examples, how mathematics really helps to solve industrial problems; these examples are taken from our Institute for Industrial Mathematics, from research in the Technomathematics group at my university, but also from ECMI groups and a company called TecMath, which originated 10 years ago from my university group and has already a very successful history.
(39 pages (4 PDF-Files), 1999)

17. J. Ohser, K. Sandau

Considerations about the Estimation of the Size Distribution in Wickseil's Corpuscle Problem

Wickseil's corpuscle problem deals with the estimation of the size distribution of a population of particles, all having the same shape, using a lower dimensional sampling probe. This problem was originally formulated for particle systems occurring in life sciences but its solution is of actual and increasing interest in materials science. From a mathematical point of view, Wickseil's problem is an inverse problem where the interesting size distribution is the unknown part of a Volterra equation. The problem is often regarded ill-posed, because the structure of the integrand implies unstable numerical solutions. The accuracy of the numerical solutions is considered here using the condition number, which allows to compare different numerical methods with different (equidistant) class sizes and which indicates, as one result, that a finite section thickness of the probe reduces the numerical problems. Furthermore, the relative error of estimation is computed which can be split into two parts. One part consists of the relative discretization error that increases for increasing class size, and the second part is related to the relative statistical error which increases with decreasing class size. For both parts, upper bounds can be given and the sum of them indicates an optimal class width depending on some specific constants.
(18 pages, 1999)

18. E. Carrizosa, H. W. Hamacher, R. Klein, S. Nickel

Solving nonconvex planar location problems by finite dominating sets

It is well-known that some of the classical location problems with polyhedral gauges can be solved in polynomial time by finding a finite dominating set, i. e. a finite set

of candidates guaranteed to contain at least one optimal location.

In this paper it is first established that this result holds for a much larger class of problems than currently considered in the literature. The model for which this result can be proven includes, for instance, location problems with attraction and repulsion, and location-allocation problems. Next, it is shown that the approximation of general gauges by polyhedral ones in the objective function of our general model can be analyzed with regard to the subsequent error in the optimal objective value. For the approximation problem two different approaches are described, the sandwich procedure and the greedy algorithm. Both of these approaches lead - for fixed epsilon - to polynomial approximation algorithms with accuracy epsilon for solving the general model considered in this paper.

Keywords: Continuous Location, Polyhedral Gauges, Finite Dominating Sets, Approximation, Sandwich Algorithm, Greedy Algorithm
(19 pages, 2000)

19. A. Becker

A Review on Image Distortion Measures

Within this paper we review image distortion measures. A distortion measure is a criterion that assigns a "quality number" to an image. We distinguish between mathematical distortion measures and those distortion measures in-cooperating a priori knowledge about the imaging devices (e. g. satellite images), image processing algorithms or the human physiology. We will consider representative examples of different kinds of distortion measures and are going to discuss them.

Keywords: Distortion measure, human visual system
(26 pages, 2000)

20. H. W. Hamacher, M. Labbé, S. Nickel,
T. Sonneborn

Polyhedral Properties of the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem

We examine the feasibility polyhedron of the uncapacitated hub location problem (UHL) with multiple allocation, which has applications in the fields of air passenger and cargo transportation, telecommunication and postal delivery services. In particular we determine the dimension and derive some classes of facets of this polyhedron. We develop some general rules about lifting facets from the uncapacitated facility location (UFL) for UHL and projecting facets from UHL to UFL. By applying these rules we get a new class of facets for UHL which dominates the inequalities in the original formulation. Thus we get a new formulation of UHL whose constraints are all facet-defining. We show its superior computational performance by benchmarking it on a well known data set.

Keywords: integer programming, hub location, facility location, valid inequalities, facets, branch and cut
(21 pages, 2000)

21. H. W. Hamacher, A. Schöbel

Design of Zone Tariff Systems in Public Transportation

Given a public transportation system represented by its stops and direct connections between stops, we consider two problems dealing with the prices for the customers: The fare problem in which subsets of stops are already aggregated to zones and "good" tariffs have to be

found in the existing zone system. Closed form solutions for the fare problem are presented for three objective functions. In the zone problem the design of the zones is part of the problem. This problem is NP hard and we therefore propose three heuristics which prove to be very successful in the redesign of one of Germany's transportation systems.
(30 pages, 2001)

22. D. Hietel, M. Junk, R. Keck, D. Teleaga:

The Finite-Volume-Particle Method for Conservation Laws

In the Finite-Volume-Particle Method (FVPM), the weak formulation of a hyperbolic conservation law is discretized by restricting it to a discrete set of test functions. In contrast to the usual Finite-Volume approach, the test functions are not taken as characteristic functions of the control volumes in a spatial grid, but are chosen from a partition of unity with smooth and overlapping partition functions (the particles), which can even move along prescribed velocity fields. The information exchange between particles is based on standard numerical flux functions. Geometrical information, similar to the surface area of the cell faces in the Finite-Volume Method and the corresponding normal directions are given as integral quantities of the partition functions. After a brief derivation of the Finite-Volume-Particle Method, this work focuses on the role of the geometric coefficients in the scheme.
(16 pages, 2001)

23. T. Bender, H. Hennes, J. Kalcsics,
M. T. Melo, S. Nickel

Location Software and Interface with GIS and Supply Chain Management

The objective of this paper is to bridge the gap between location theory and practice. To meet this objective focus is given to the development of software capable of addressing the different needs of a wide group of users. There is a very active community on location theory encompassing many research fields such as operations research, computer science, mathematics, engineering, geography, economics and marketing. As a result, people working on facility location problems have a very diverse background and also different needs regarding the software to solve these problems. For those interested in non-commercial applications (e. g. students and researchers), the library of location algorithms (LoLA can be of considerable assistance. LoLA contains a collection of efficient algorithms for solving planar, network and discrete facility location problems. In this paper, a detailed description of the functionality of LoLA is presented. In the fields of geography and marketing, for instance, solving facility location problems requires using large amounts of demographic data. Hence, members of these groups (e. g. urban planners and sales managers) often work with geographical information too s. To address the specific needs of these users, LoLA was inked to a geographical information system (GIS) and the details of the combined functionality are described in the paper. Finally, there is a wide group of practitioners who need to solve large problems and require special purpose software with a good data interface. Many of such users can be found, for example, in the area of supply chain management (SCM). Logistics activities involved in strategic SCM include, among others, facility location planning. In this paper, the development of a commercial location software tool is also described. The tool is em-

bedded in the Advanced Planner and Optimizer SCM software developed by SAP AG, Walldorf, Germany. The paper ends with some conclusions and an outlook to future activities.

Keywords: facility location, software development, geographical information systems, supply chain management.
(48 pages, 2001)

24. H. W. Hamacher, S. A. Tjandra

Mathematical Modelling of Evacuation Problems: A State of Art

This paper details models and algorithms which can be applied to evacuation problems. While it concentrates on building evacuation many of the results are applicable also to regional evacuation. All models consider the time as main parameter, where the travel time between components of the building is part of the input and the overall evacuation time is the output. The paper distinguishes between macroscopic and microscopic evacuation models both of which are able to capture the evacuees' movement over time.

Macroscopic models are mainly used to produce good lower bounds for the evacuation time and do not consider any individual behavior during the emergency situation. These bounds can be used to analyze existing buildings or help in the design phase of planning a building. Macroscopic approaches which are based on dynamic network flow models (minimum cost dynamic flow, maximum dynamic flow, universal maximum flow, quickest path and quickest flow) are described. A special feature of the presented approach is the fact, that travel times of evacuees are not restricted to be constant, but may be density dependent. Using multicriteria optimization priority regions and blockage due to fire or smoke may be considered. It is shown how the modelling can be done using time parameter either as discrete or continuous parameter.

Microscopic models are able to model the individual evacuee's characteristics and the interaction among evacuees which influence their movement. Due to the corresponding huge amount of data one uses simulation approaches. Some probabilistic laws for individual evacuee's movement are presented. Moreover ideas to model the evacuee's movement using cellular automata (CA) and resulting software are presented.

In this paper we will focus on macroscopic models and only summarize some of the results of the microscopic approach. While most of the results are applicable to general evacuation situations, we concentrate on building evacuation.
(44 pages, 2001)

25. J. Kuhnert, S. Tiwari

Grid free method for solving the Poisson equation

A Grid free method for solving the Poisson equation is presented. This is an iterative method. The method is based on the weighted least squares approximation in which the Poisson equation is enforced to be satisfied in every iterations. The boundary conditions can also be enforced in the iteration process. This is a local approximation procedure. The Dirichlet, Neumann and mixed boundary value problems on a unit square are presented and the analytical solutions are compared with the exact solutions. Both solutions matched perfectly.

Keywords: Poisson equation, Least squares method, Grid free method
(19 pages, 2001)

26. T. Götz, H. Rave, D. Reinel-Bitzer,
K. Steiner, H. Tiemeier

Simulation of the fiber spinning process

To simulate the influence of process parameters to the melt spinning process a fiber model is used and coupled with CFD calculations of the quench air flow. In the fiber model energy, momentum and mass balance are solved for the polymer mass flow. To calculate the quench air the Lattice Boltzmann method is used. Simulations and experiments for different process parameters and hole configurations are compared and show a good agreement.

Keywords: Melt spinning, fiber model, Lattice Boltzmann, CFD

(19 pages, 2001)

27. A. Zemitis

On interaction of a liquid film with an obstacle

In this paper mathematical models for liquid films generated by impinging jets are discussed. Attention is stressed to the interaction of the liquid film with some obstacle. S. G. Taylor [Proc. R. Soc. London Ser. A 253, 313 (1959)] found that the liquid film generated by impinging jets is very sensitive to properties of the wire which was used as an obstacle. The aim of this presentation is to propose a modification of the Taylor's model, which allows to simulate the film shape in cases, when the angle between jets is different from 180° . Numerical results obtained by discussed models give two different shapes of the liquid film similar as in Taylor's experiments. These two shapes depend on the regime: either droplets are produced close to the obstacle or not. The difference between two regimes becomes larger if the angle between jets decreases. Existence of such two regimes can be very essential for some applications of impinging jets, if the generated liquid film can have a contact with obstacles.

Keywords: impinging jets, liquid film, models, numerical solution, shape

(22 pages, 2001)

28. I. Ginzburg, K. Steiner

Free surface lattice-Boltzmann method to model the filling of expanding cavities by Bingham Fluids

The filling process of viscoplastic metal alloys and plastics in expanding cavities is modelled using the lattice Boltzmann method in two and three dimensions. These models combine the regularized Bingham model for viscoplastic with a free-interface algorithm. The latter is based on a modified immiscible lattice Boltzmann model in which one species is the fluid and the other one is considered as vacuum. The boundary conditions at the curved liquid-vacuum interface are met without any geometrical front reconstruction from a first-order Chapman-Enskog expansion. The numerical results obtained with these models are found in good agreement with available theoretical and numerical analysis.

Keywords: Generalized LBE, free-surface phenomena, interface boundary conditions, filling processes, Bingham viscoplastic model, regularized models

(22 pages, 2001)

29. H. Neunzert

»Denn nichts ist für den Menschen als Menschen etwas wert, was er nicht mit Leidenschaft tun kann«

Vortrag anlässlich der Verleihung des Akademiepreises des Landes Rheinland-Pfalz am 21.11.2001

Was macht einen guten Hochschullehrer aus? Auf diese Frage gibt es sicher viele verschiedene, fachbezogene Antworten, aber auch ein paar allgemeine Gesichtspunkte: es bedarf der »Leidenschaft« für die Forschung (Max Weber), aus der dann auch die Begeisterung für die Lehre erwächst. Forschung und Lehre gehören zusammen, um die Wissenschaft als lebendiges Tun vermitteln zu können. Der Vortrag gibt Beispiele dafür, wie in angewandter Mathematik Forschungsaufgaben aus praktischen Alltagsproblemstellungen erwachsen, die in die Lehre auf verschiedenen Stufen (Gymnasium bis Graduiertenkolleg) einfließen; er leitet damit auch zu einem aktuellen Forschungsgebiet, der Mehrskalanalyse mit ihren vielfältigen Anwendungen in Bildverarbeitung, Materialentwicklung und Strömungsmechanik über, was aber nur kurz gestreift wird. Mathematik erscheint hier als eine moderne Schlüsseltechnologie, die aber auch enge Beziehungen zu den Geistes- und Sozialwissenschaften hat.

Keywords: Lehre, Forschung, angewandte Mathematik, Mehrskalanalyse, Strömungsmechanik

(18 pages, 2001)

30. J. Kuhnert, S. Tiwari

Finite pointset method based on the projection method for simulations of the incompressible Navier-Stokes equations

A Lagrangian particle scheme is applied to the projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. The approximation of spatial derivatives is obtained by the weighted least squares method. The pressure Poisson equation is solved by a local iterative procedure with the help of the least squares method. Numerical tests are performed for two dimensional cases. The Couette flow, Poiseuille flow, decaying shear flow and the driven cavity flow are presented. The numerical solutions are obtained for stationary as well as instationary cases and are compared with the analytical solutions for channel flows. Finally, the driven cavity in a unit square is considered and the stationary solution obtained from this scheme is compared with that from the finite element method.

Keywords: Incompressible Navier-Stokes equations, Meshfree method, Projection method, Particle scheme, Least squares approximation

AMS subject classification: 76D05, 76M28

(25 pages, 2001)

31. R. Korn, M. Krekel

Optimal Portfolios with Fixed Consumption or Income Streams

We consider some portfolio optimisation problems where either the investor has a desire for an a priori specified consumption stream or/and follows a deterministic pay in scheme while also trying to maximize expected utility from final wealth. We derive explicit closed form solutions for continuous and discrete monetary streams. The mathematical method used is classical stochastic control theory.

Keywords: Portfolio optimisation, stochastic control, HJB equation, discretisation of control problems.

(23 pages, 2002)

32. M. Krekel

Optimal portfolios with a loan dependent credit spread

If an investor borrows money he generally has to pay higher interest rates than he would have received, if he had put his funds on a savings account. The classical model of continuous time portfolio optimisation ignores this effect. Since there is obviously a connection between the default probability and the total percentage of wealth, which the investor is in debt, we study portfolio optimisation with a control dependent interest rate. Assuming a logarithmic and a power utility function, respectively, we prove explicit formulae of the optimal control.

Keywords: Portfolio optimisation, stochastic control, HJB equation, credit spread, log utility, power utility, non-linear wealth dynamics

(25 pages, 2002)

33. J. Ohser, W. Nagel, K. Schladitz

The Euler number of discretized sets - on the choice of adjacency in homogeneous lattices

Two approaches for determining the Euler-Poincaré characteristic of a set observed on lattice points are considered in the context of image analysis { the integral geometric and the polyhedral approach. Information about the set is assumed to be available on lattice points only. In order to retain properties of the Euler number and to provide a good approximation of the true Euler number of the original set in the Euclidean space, the appropriate choice of adjacency in the lattice for the set and its background is crucial. Adjacencies are defined using tessellations of the whole space into polyhedrons. In \mathbb{R}^3 , two new 14 adjacencies are introduced additionally to the well known 6 and 26 adjacencies. For the Euler number of a set and its complement, a consistency relation holds. Each of the pairs of adjacencies (14;1; 14;1), (14;2; 14;2), (6; 26), and (26; 6) is shown to be a pair of complementary adjacencies with respect to this relation. That is, the approximations of the Euler numbers are consistent if the set and its background (complement) are equipped with this pair of adjacencies. Furthermore, sufficient conditions for the correctness of the approximations of the Euler number are given. The analysis of selected microstructures and a simulation study illustrate how the estimated Euler number depends on the chosen adjacency. It also shows that there is not a uniquely best pair of adjacencies with respect to the estimation of the Euler number of a set in Euclidean space.

Keywords: image analysis, Euler number, neighborhood relationships, cuboidal lattice

(32 pages, 2002)

34. I. Ginzburg, K. Steiner

Lattice Boltzmann Model for Free-Surface flow and Its Application to Filling Process in Casting

A generalized lattice Boltzmann model to simulate free-surface is constructed in both two and three dimensions. The proposed model satisfies the interfacial boundary conditions accurately. A distinctive feature of the model is that the collision processes is carried out

only on the points occupied partially or fully by the fluid. To maintain a sharp interfacial front, the method includes an anti-diffusion algorithm. The unknown distribution functions at the interfacial region are constructed according to the first order Chapman-Enskog analysis. The interfacial boundary conditions are satisfied exactly by the coefficients in the Chapman-Enskog expansion. The distribution functions are naturally expressed in the local interfacial coordinates. The macroscopic quantities at the interface are extracted from the least-square solutions of a locally linearized system obtained from the known distribution functions. The proposed method does not require any geometric front construction and is robust for any interfacial topology. Simulation results of realistic filling process are presented: rectangular cavity in two dimensions and Hammer box, Campbell box, Sheffield box, and Motorblock in three dimensions. To enhance the stability at high Reynolds numbers, various upwind-type schemes are developed. Free-slip and no-slip boundary conditions are also discussed.

Keywords: Lattice Boltzmann models; free-surface phenomena; interface boundary conditions; filling processes; injection molding; volume of fluid method; interface boundary conditions; advection-schemes; upwind-schemes
(54 pages, 2002)

35. M. Günther, A. Klar, T. Materne, R. Wegener
Multivalued fundamental diagrams and stop and go waves for continuum traffic equations

In the present paper a kinetic model for vehicular traffic leading to multivalued fundamental diagrams is developed and investigated in detail. For this model phase transitions can appear depending on the local density and velocity of the flow. A derivation of associated macroscopic traffic equations from the kinetic equation is given. Moreover, numerical experiments show the appearance of stop and go waves for highway traffic with a bottleneck.

Keywords: traffic flow, macroscopic equations, kinetic derivation, multivalued fundamental diagram, stop and go waves, phase transitions
(25 pages, 2002)

36. S. Feldmann, P. Lang, D. Prätzel-Wolters
Parameter influence on the zeros of network determinants

To a network $N(q)$ with determinant $D(s; q)$ depending on a parameter vector $q \in \mathbb{R}^r$ via identification of some of its vertices, a network $N^\wedge(q)$ is assigned. The paper deals with procedures to find $N^\wedge(q)$, such that its determinant $D^\wedge(s; q)$ admits a factorization in the determinants of appropriate subnetworks, and with the estimation of the deviation of the zeros of D^\wedge from the zeros of D . To solve the estimation problem state space methods are applied.

Keywords: Networks, Equicofactor matrix polynomials, Realization theory, Matrix perturbation theory
(30 pages, 2002)

37. K. Koch, J. Ohser, K. Schladitz
Spectral theory for random closed sets and estimating the covariance via frequency space

A spectral theory for stationary random closed sets is developed and provided with a sound mathematical basis. Definition and proof of existence of the Bartlett spectrum of a stationary random closed set as well as the proof of a Wiener-Khinchine theorem for the power spectrum are used to two ends: First, well known second order characteristics like the covariance can be estimated faster than usual via frequency space. Second, the Bartlett spectrum and the power spectrum can be used as second order characteristics in frequency space. Examples show, that in some cases information about the random closed set is easier to obtain from these characteristics in frequency space than from their real world counterparts.

Keywords: Random set, Bartlett spectrum, fast Fourier transform, power spectrum
(28 pages, 2002)

38. D. d'Humières, I. Ginzburg
Multi-reflection boundary conditions for lattice Boltzmann models

We present a unified approach of several boundary conditions for lattice Boltzmann models. Its general framework is a generalization of previously introduced schemes such as the bounce-back rule, linear or quadratic interpolations, etc. The objectives are two fold: first to give theoretical tools to study the existing boundary conditions and their corresponding accuracy; secondly to design formally third-order accurate boundary conditions for general flows. Using these boundary conditions, Couette and Poiseuille flows are exact solution of the lattice Boltzmann models for a Reynolds number $Re = 0$ (Stokes limit).

Numerical comparisons are given for Stokes flows in periodic arrays of spheres and cylinders, linear periodic array of cylinders between moving plates and for Navier-Stokes flows in periodic arrays of cylinders for $Re < 200$. These results show a significant improvement of the overall accuracy when using the linear interpolations instead of the bounce-back reflection (up to an order of magnitude on the hydrodynamics fields). Further improvement is achieved with the new multi-reflection boundary conditions, reaching a level of accuracy close to the quasi-analytical reference solutions, even for rather modest grid resolutions and few points in the narrowest channels. More important, the pressure and velocity fields in the vicinity of the obstacles are much smoother with multi-reflection than with the other boundary conditions.

Finally the good stability of these schemes is highlighted by some simulations of moving obstacles: a cylinder between flat walls and a sphere in a cylinder.

Keywords: lattice Boltzmann equation, boundary conditions, bounce-back rule, Navier-Stokes equation
(72 pages, 2002)

39. R. Korn
Elementare Finanzmathematik

Im Rahmen dieser Arbeit soll eine elementar gehaltene Einführung in die Aufgabenstellungen und Prinzipien der modernen Finanzmathematik gegeben werden. Insbesondere werden die Grundlagen der Modellierung von Aktienkursen, der Bewertung von Optionen und der Portfolio-Optimierung vorgestellt. Natürlich können die verwendeten Methoden und die entwickelte Theorie nicht in voller Allgemeinheit für den Schulunterricht verwendet werden, doch sollen einzelne Prinzipien so herausgearbeitet werden, dass sie auch an einfachen

Beispielen verstanden werden können.

Keywords: Finanzmathematik, Aktien, Optionen, Portfolio-Optimierung, Börse, Lehrerweiterbildung, Mathematikunterricht
(98 pages, 2002)