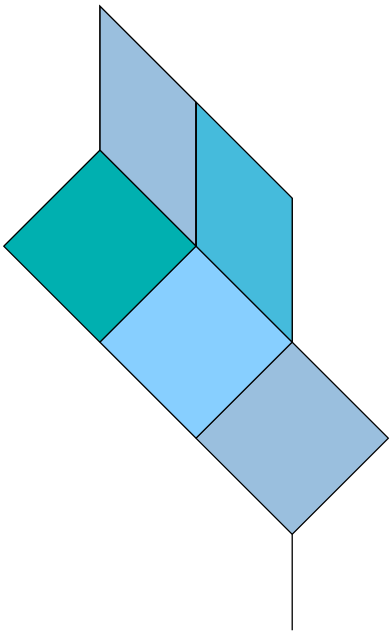
Die McKay-Vermutung für quasi-einfache Gruppen vom Lie-Typ

Britta Späth



Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium, Dr. rer. nat.) genehmigte Dissertation

1. Gutachter: Prof. Dr. Gunter Malle
2. Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Hiß

Vollzug der Promotion: 26. Januar 2007

D386

Ich weiß wohl, daß der Leser dies alles nicht zu
wissen begehrt, aber ich habe das Bedürfnis,
es ihm mitzuteilen.

Rousseau

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gebiet der Arbeit

Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen untersucht die Gruppenhomomorphismen

$$\mathcal{D} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$$

für eine endliche Gruppe G und einen Körper $\mathbb{F}$. Diese Abbildungen heißen Darstellungen von G, wobei n als der Grad der Darstellung bezeichnet wird. Solche Darstellungen können stets in ihre kleinsten Bausteine, die irreduziblen Darstellungen, zerlegt werden. Für eine endliche Gruppe gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele irreduzible Darstellungen.

Zu einer Darstellung $\mathcal{D}$ von G wird durch die Abbildung

$$\chi : G \to \mathbb{F} \text{ mit } g \mapsto \mathrm{tr}(\mathcal{D}(g))$$

der Charakter von $\mathcal{D}$ definiert. Bei $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ gibt es zu jedem Charakter χ bis auf Isomorphie genau eine Darstellung $\mathcal{D}$, deren Charakter χ ist. Jeder Charakter ist eine Klassenfunktion, d.h. auf Konjugationsklassen von G konstant. Eine Frage der Charaktertheorie ist, wie die irreduziblen Charaktere von G und ihre Grade mit den irreduziblen Charakteren ihrer Untergruppen zusammenhängen, d.h. wie von lokalen Informationen globale Eigenschaften bestimmt werden.

Die Clifford-Theorie beschreibt, wie die Charaktere eines Normalteilers $L \lhd G$ mit den Charakteren von G zusammenhängen. Zu jedem Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ ist die Trägheitsgruppe $\mathrm{I}_G(\chi)$ die größte Gruppe in G, auf die χ als Klassenfunktion fortgesetzt werden kann. Jedoch ist χ im Allgemeinen nicht als Charakter auf diese Gruppe fortsetzbar, d.h. es gibt im allgemeinen keinen Charakter auf $\mathrm{I}_G(\chi)$, dessen Einschränkung auf L der ursprüngliche Charakter χ ist. Gibt es zu einem Charakter eine solche Fortsetzung, so heißt dieser *maximal fortsetzbar* in G und seine Fortsetzung auf $\mathrm{I}_G(\chi)$ *maximale Fortsetzung*. Es gibt nur wenige allgemeine Hilfsmittel, um die Fortsetzbarkeit von Charakteren zu beweisen.

John McKay beobachtete für bestimmte einfache Gruppen G und gewisse Primzahlen r eine Gleichheit von $k_0(G)$ und $k_0(\mathrm{N}_G(P))$, wobei P eine r-Sylowgruppe in G und $\mathrm{N}_G(P)$ ihr Normalisator in G sind und k_0 die Anzahl der irreduziblen Charaktere über $\mathbb{C}$ mit Grad prim zu r angibt. Die irreduziblen Charaktere von G mit einem nicht durch

r teilbaren Grad bilden die Menge $\mathrm{Irr}_{r'}(G)$. Jon Alperin vermutete, dass diese Gleichheit für alle Primzahlen r und endlichen Gruppen G gilt.

Für einige Klassen von Gruppen wurde diese Vermutung bereits bewiesen: Isaacs prüfte die Richtigkeit für Gruppen ungerader Ordnung in [Isa73]. Jedoch existiert bisher kein Beweis für die allgemeine Vermutung.

Ein großer Schritt zu einem allgemeinen Beweis ist die Reduktion auf eine dekorierte McKay-Vermutung für quasi-einfache Gruppen in [IMN05]. Bei diesen quasi-einfachen Gruppen muss für jede Primzahl r eine Gruppe $T \geq \mathrm{N}_G(Q)$ für eine r-Sylowgruppe Q von G und eine Bijektion zwischen $\mathrm{Irr}_{r'}(G)$ und der Menge $\mathrm{Irr}_{r'}(T)$ mit zusätzlichen Eigenschaften existieren.

Quasi-einfache Gruppen sind Gruppen G, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen und für die ${}^{G}/\mathrm{Z}(G)$ einfach ist. Die Gruppen vom Lie-Typ stellen gemäß den Resultaten der Klassifikation einfacher endlicher Gruppen dabei eine wichtige Klasse dieser Gruppen dar. Diese Gruppen vom Lie-Typ sind Fixpunktgruppen linearer algebraischer Gruppen $\mathbf{G}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$ unter einer Frobeniusabbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.

In der Arbeit [Mal06] gibt Gunter Malle eine Parametrisierung der Charaktere $\mathrm{Irr}_{r'}(G)$, also der irreduziblen Charaktere mit Grad prim zu r, an, wobei G eine Gruppe vom Lie-Typ ist und r sich von der Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers unterscheidet.

Bei dieser Parametrisierung wird die Theorie der generischen Gruppen und Sylowtori benutzt. Generische Gruppen spiegeln die geometrische Struktur der Lie-Gruppen wider. Innerhalb dieser Theorie werden auch Sylowtori definiert. Wie der Name schon vermuten lässt, zeigen sie ähnliches Verhalten wie Sylowgruppen, sind im Gegensatz zu diesen an die geometrische Struktur der Gruppe $\mathbf{G}$ besser angepasst und werden für die modulare Darstellungstheorie der Gruppen $\mathbf{G}^F$ verwendet. Die Zentralisatoren dieser Sylowtori $\mathbf{S}$ in G nennen wir in dieser Arbeit *Sylowlevigruppen* und ihre Normalisatoren *Sylownormalisatoren*. Zu jeder Primzahl r, die sich von der G zugrunde liegenden Charakteristik unterscheidet, gibt es bis auf wenige Ausnahmefälle einen Sylowtorus $\mathbf{S}$, so dass $\mathrm{N}_G(\mathbf{S})$ den Normalisator einer r-Sylowgruppe von G enthält. Lassen sich die irreduziblen Charaktere der Sylowlevigruppe auf ihre Trägheitsgruppe im zugehörigen Sylownormalisator fortsetzen, so gibt es gemäß [Mal06] auch eine Parametrisierung von $\mathrm{Irr}_{r'}(\mathrm{N}_G(\mathbf{S}))$, bei der die Parametermenge mit der von $\mathrm{Irr}_{r'}(G)$ übereinstimmen. Diese Parametrisierung bestimmt eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathrm{Irr}_{r'}(\mathrm{N}_G(\mathbf{S}))$ und $\mathrm{Irr}_{r'}(G)$.

Wir hoffen, dass diese Bijektion auch die übrigen in [IMN05] geforderten Eigenschaften zumindest nach geeigneter Modifizierung besitzt und damit einem allgemeinen Beweis der McKay-Vermutung dient. Der Nachweis dieser Eigenschaften konnte bisher nur in Einzelfällen vollzogen werden und bleibt daher weiterer Forschung überlassen.

Inhalt der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es die erwähnte maximale Fortsetzbarkeit irreduzibler Charaktere der Sylowlevigruppen im zugehörigen Sylownormalisator zu zeigen:

Theorem 0.1. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine einfach-zusammenhängende einfache algebraische Gruppe,* $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *eine Frobeniusabbildung,* $G := \mathbf{G}^F$*,* $\mathbf{S}$ *ein Sylowtorus von* $\mathbf{G}$*,* $L := \mathrm{C}_G(\mathbf{S})$ *und* $N := \mathrm{N}_G(\mathbf{S})$*. Dann sind alle irreduziblen Charaktere* $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ *auf* $\mathrm{I}_N(\chi)$ *fortsetzbar.*

Zum Beweis dieses Theorems müssen wir uns zunächst klar machen, wie wir Sylowtori, Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren erhalten und welche Rechenregeln für die Elemente dieser Gruppen gelten. Dabei verwenden wir die Steinberg-Präsentation von $\mathbf{G}$, da dadurch ein einheitlicher Zugang zu allen Gruppen möglich ist und insbesondere auch der Fall, in dem $\mathbf{G}$ eine Spingruppe ist, betrachtet werden kann. Zudem sammeln wir speziell auf solche Fortsetzungsfragen passende Resultate der Charaktertheorie bzw. beweisen einige spezielle Aussagen dafür.

In vielen Fällen weisen wir die maximale Fortsetzbarkeit nach, indem wir sukzessive den Charakter fortsetzen. Die Konstruktion von Fortsetzungen ist bei linearen Charakteren besonders einfach. Daher beginnen wir immer mit dem so genannten regulären Fall, in dem L abelsch ist. Bei den nichtregulären Fällen werden wir die Struktur der Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren genau analysieren. Dabei werden wir Untergruppen finden, für die wir aus den regulären Fällen die Fortsetzbarkeit kennen. Diese Eigenschaft überträgt sich dann meistens auf die zu betrachtende Situation. Dabei ist es wichtig, immer wieder Untergruppen von $\mathbf{G}$ als universelle Chevalleygruppen zu Unterwurzelsystemen zu identifizieren.

Die wesentlichen logischen Zusammenhänge in den weiteren Kapiteln sollen durch das nachfolgende Bild 0.1 verdeutlicht werden. Dabei stehen gestrichelte Pfeile für die wesentliche Benutzung der Fortsetzungsaussagen aus Kapitel 3.

Wir beginnen die Aussagen für Spezialfälle zu beweisen. Ist F ein Frobeniusendomorphismus, so ist jeder Sylowtorus ein d-Sylowtorus von $(\mathbf{G}.F)$ für eine gewisse natürliche Zahl d. Gilt $d = 1$ und ist F ein Standard-Frobeniusendomorphismus von $\mathbf{G}$, so ist L ein maximal-zerfallender Torus. Bei exzeptionellen Gruppen wird die Aussage bei regulärem d durch Computerrechnungen bewiesen, wenn $d \neq 4$ ist oder $\mathbf{G}$ nicht ein Wurzelsystem vom Typ E_7 besitzt. Der verbeleibende nichtreguläre Fall erfordert ein sorgfältiges Vorgehen, da die relative Weylgruppe auf dem halbeinfachen Anteil der Sylowlevigruppe äußere Automorphismen induziert. Dabei ist es entscheidend, die Fragestellungen aus einer Aussage über die erweiterte Weylgruppe bzw. deren Untergruppen zu folgern.

Bei den klassischen Gruppen vom Typ A_l, ${}^2\mathsf{A}_l$, B_l, C_l haben bei regulärem d die beteiligten Gruppen ähnliche Strukturen. Daher beweisen wir in einem allgemeinen 'Setting' eine Aussage über die maximale Fortsetzbarkeit und zeigen in den darauf folgenden Kapiteln, dass die Bedingungen bei den verschiedenen Wurzelsystemen erfüllt werden. Überraschend ist vielleicht, dass wir dabei die beteiligten Gruppen vom Typ A_{l-1} in eine Gruppe vom Typ C_l einbetten und bei Gruppen vom Typ B_l in einem Zwischenschritt auch Gruppen betrachten, die nicht in $\mathbf{G}^F$ liegen. Wir betten die Sylowlevigruppe in eine Gruppe ein, die das zentrale Produkt isomorpher Tori ist, und auf deren einzelne

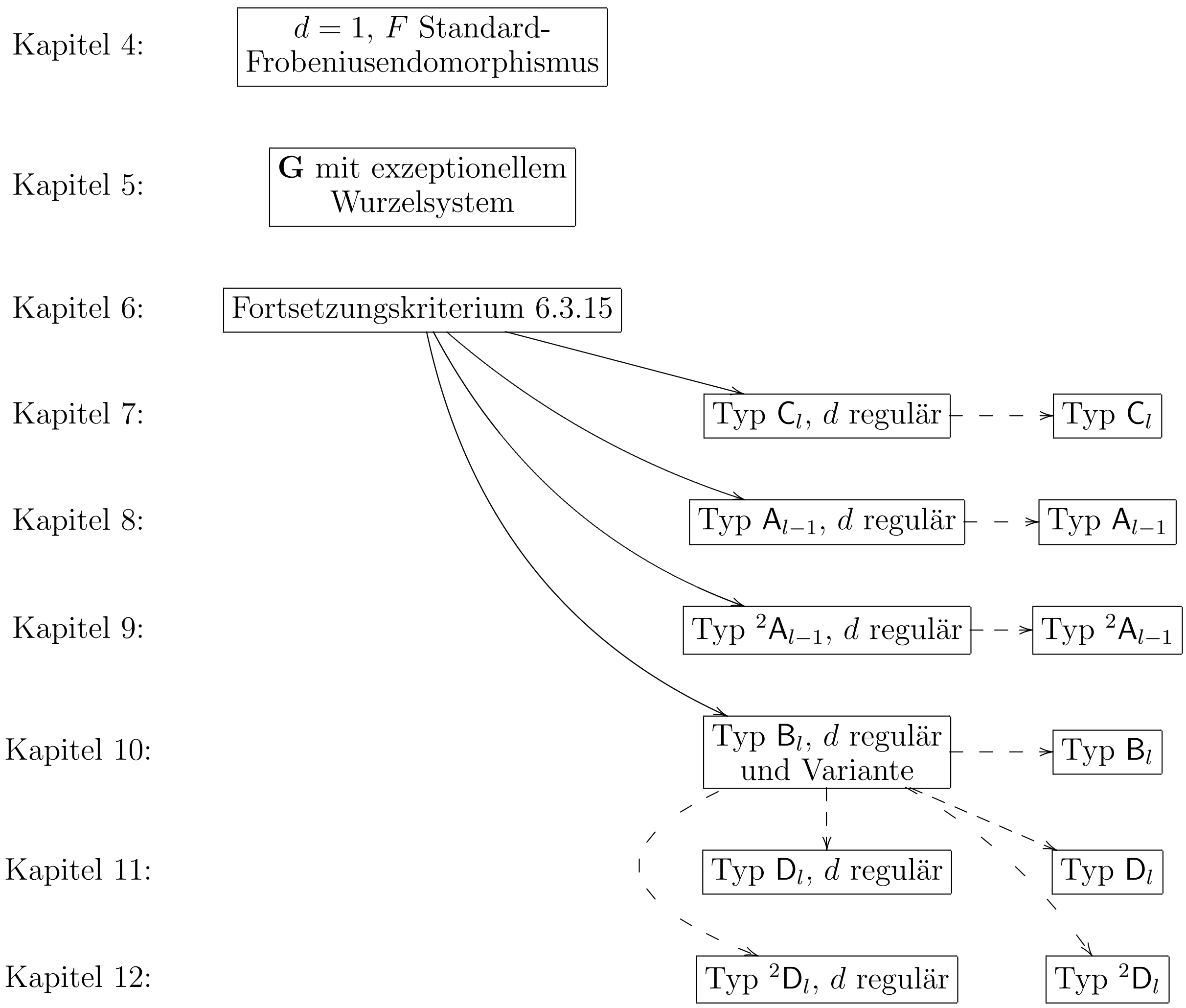


Abbildung 0.1: Logischer Aufbau der Arbeit

Faktoren die relativen Weylgruppe transitiv operiert. Diese Aussage über die „falschen“ Gruppen führt mit Hilfe eines linearen Charakters zu einem Resultat über die gewünschten Gruppen.

Da die relativen Weylgruppen im Allgemeinen keine Kranzprodukte sind, wenn die Gruppen vom Typ D_l oder ${}^2\mathsf{D}_l$ sind, diese Gruppen aber eng mit den Gruppen vom Typ B_l verwandt sind, beweisen wir dort die maximale Fortsetzbarkeit mit Hilfe dieser Verbindung.

Aufbau der Arbeit

Zum Beweis der Aussage sind verschiedene Grundlagen nötig. Vor allem die Theorie linearer algebraischer Gruppen wird hier nicht näher erläutert. Wir verweisen an den gegebenen Stellen auf das Buch von Springer [Spr98].

Im ersten Kapitel geben wir eine Einführung in die Resultate und Sprechweisen zu so genannten generischen Gruppen. Wir beschreiben die Konstruktion der im Hauptresultat 0.1 auftretenden Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren.

Im zweiten Kapitel stellen wir die Steinberg-Präsentation und die dort geltenden Rechenregeln vor. Zur Anwendung der Theorie aus dem ersten Kapitel geben wir auch das vollständige Wurzeldatum dieser Gruppen an. Ein weiteres entscheidendes Hilfsmittel ist die erweiterte Weylgruppe $V \leq \mathbf{G}$ aus [Tit66]. Diese Gruppe besitzt Verbindungen zur Zopfgruppe und zur Weylgruppe von $\mathbf{G}$. Mit Hilfe der Theorie der Weyl- und Zopfgruppen können wir entscheiden, in welchen Fällen die Sylowlevigruppe ein Torus ist. Diese Situation nennen wir später den *regulären Fall*. Zudem finden wir mit Hilfe von V Elemente, die so genannten *Sylowtwists*, mit denen wir Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren konstruieren.

Das dritte Kapitel listet einige bekannte Resultate über Fortsetzbarkeit auf. Weiter beweisen wir einige technischere Sätze über die so genannte „maximale Fortsetzbarkeitseigenschaft“ von Gruppen. Diese Eigenschaft überträgt sich unter mehreren zusätzlichen Voraussetzungen auf weitere Gruppen. Dies wird später dazu dienen, aus der Struktur von Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren und mit Hilfe der Ergebnisse des regulären Falls die maximale Fortsetzbarkeit im allgemeinen zu folgern.

Im vierten Kapitel konzentrieren wir uns darauf, das Theorem 0.1 für den Fall zu beweisen, dass $\mathbf{S}$ ein 1-Sylowtorus ist und F der Standard-Frobeniusendomorphismus. Dazu genügt es, sich auf eine spezielle Fortsetzungsfrage in der erweiterten Weylgruppe zu konzentrieren. Diese wird im Wesentlichen anhand von Unterwurzelsystemen, die zu den Charakteren assoziiert werden, beantwortet.

Im fünften Kapitel beschäftigen wir uns mit einem weiteren Spezialfall, nämlich dem, dass das zugrunde liegende Wurzelsystem von $\mathbf{G}$ vom exzeptionellen Typ ist. Wie im vierten Kapitel stellen wir fest, dass die gesuchten Fortsetzungen im regulären Fall anhand anderer maximaler Fortsetzungen in $K \lhd U$ konstruiert werden können. Die Gruppen K und U sind dabei Untergruppen von V, die mit Hilfe eines Sylowtwists definiert werden. Computerrechnungen liefern einen Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit bei $K \lhd U$. Es verbleibt im Wesentlichen ein Fall, bei dem die Sylowlevigruppe nicht abelsch ist. Dort werden wir die Vorgehensweise beim nichtregulären Fall zum ersten Mal vorstellen. Entscheidend dabei ist eine Untergruppe $\mathbf{G}' \leq \mathbf{G}$, die gleichzeitig eine einfach-zusammenhängende reduktive Gruppe ist, den d-Sylowtorus enthält und in der die zugehörige d-Sylowlevigruppe ein Torus ist. Die Struktur der Gruppen ermöglicht die Anwendungen eines Resultats aus 3.2 und damit den Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit.

Für die klassischen Gruppen wird in Kapitel 6 ein allgemeiner Zugang entwickelt. Dort sind die meisten relativen Weylgruppen Kranzprodukte. Wir formulieren dabei vier Bedingungen, die es uns ermöglichen eine Aussage über maximale Fortsetzbarkeit zu beweisen. Wir benutzen dabei vor allem Unterwurzelsysteme und ihre kombinatorischen Eigenschaften. Diese spiegeln sich dann in Eigenschaften von Untergruppen, die wir zu den Unterwurzelsystemen assoziieren, wider. Dies ermöglicht die sukzessive Konstruktion maximaler Fortsetzungen. Entscheidend dabei sind Abbildungen, die Charakteren jeweils eine Fortsetzung auf ihre Trägheitsgruppe zuweisen und auch mit Gruppenoperationen verträglich sind.

Im siebten Kapitel wenden wir das Resultat des vorangegangenen Kapitels zum Beweis von Theorem 0.1 für $\mathbf{G} := \mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ und eine abelsche Sylowlevigruppe an. Wir führen nacheinander alle für die in Kapitel 6 beschriebene Situation nötigen Gruppen, Wurzelsysteme und Elemente ein und zeigen, dass alle Forderungen dabei erfüllt werden. Aus der Anwendung folgt dann die Aussage für den Fall, dass L ein Torus ist. Ist L eine nichtabelsche Gruppe, so sind die fortzusetzenden Charaktere im Allgemeinen nicht linear. Wir analysieren die Struktur der Sylowlevigruppe L genauer und zeigen die maximale Fortsetzbarkeit mit Hilfe der maximalen Fortsetzbarkeit im regulären Fall und einem Resultat aus Kapitel 3.

Ähnlich gehen wir auch vor, wenn $\mathbf{G}$ isomorph zu $\mathrm{SL}_l(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ist und darauf F als Standard-Frobeniusendomorphismus operiert. Auch hier erfolgt der Beweis durch Anwendung von Satz 6.3.15.

Der Fall $\mathbf{G}^F \cong \mathrm{SU}_l(q)$ wird in Kapitel 9 betrachtet. Auch hier führt die Strategie aus Kapitel 7 und 8 zum Ziel. Aufgrund des vom Graphautomorphismus induzierten Frobeniusendomorphismus F sind einige zusätzliche Überlegungen nötig.

Im Kapitel 10 betrachten wir den Fall, in dem die Wurzeln von $\mathbf{G}$ ein Wurzelsystem vom Typ B_l bilden. Aufgrund der Struktur des Wurzelsystems treten hier mehrere Schwierigkeiten auf. Die Bedingungen für Satz 6.3.15 können nur durch aufwendigere Rechnungen nachgewiesen werden. Neben dem Satz 10.1.1, der die maximale Fortsetzbarkeit im regulären Fall beweist, zeigen wir eine dazu sehr ähnliche Aussage. Beide sind dann im nichtregulären Fall nötig, um auch dort die maximale Fortsetzbarkeit zu beweisen.

Eng verwandt zu diesen Gruppen sind die vom Typ D_l, die in den Kapiteln 11 und 12 genauer betrachtet werden. Da die relativen Weylgruppen bei diesen Gruppen im Allgemeinen keine Kranzprodukte sind, beweisen wir die maximale Fortsetzbarkeit bei regulärem d hier durch einen Rückgriff auf die Ergebnisse beim Typ B_l, die wir mittels verschiedener Homomorphismen übertragen. Bei nichtregulärem d konstruieren wir einen d-Sylowtwist, eine d-Sylowlevigruppe und einen d-Sylownormalisator. Die Strukturen der Sylownormalisatoren sind bei B_l und D_l sehr ähnlich. Daher führen analoge Überlegungen zur maximalen Fortsetzbarkeit in dieser Situation.

Insgesamt bilden die Sätze 5.3.10, 7.2.1, 8.2.1, 9.2.1, 10.2.7, 11.2.8 und 12.2.1 einen Beweis des Hauptresultats 0.1. Im Kapitel 12.2 fassen wir die Aussagen dieser Arbeit zusammen.

Danksagung

Diese Arbeit wäre ohne die Hilfe vieler Menschen nicht möglich gewesen. Dafür bedanke ich mich bei all diesen recht herzlich. Manche grundlegenden Ideen entstanden während einiger Gespräche mit Paul Fong, I.Martin Isaacs und Bhama Srinivasan. Das Lemma 3.2.3 entstand während eines kurzen Besuchs in Aachen am Lehrstuhl D unter Mithilfe einiger dortiger Mitarbeiter. Herzlich bedanke ich mich bei Herrn Malle fr seine Betreuung und vor allem für das Vertrauen mir dieses Thema zu geben, das mich immer wieder aufs Neue begeisterte. Große Unterstützung fand ich bei meiner Familie, die mir die Kraft gab, auch mit Rückschlägen fertig zu werden, und immer an mich glaubte.

Kapitel 1

Generische Gruppen

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Einblick in die wichtigsten Definitionen und Resultate aus der Theorie der generischen Gruppen. Die in Theorem 0.1 zentralen Gruppen sind mit Hilfe generischer Gruppen definiert und wir können diese mit Resultaten dieser Theorie konstruieren.

Im ersten Abschnitt skizzieren wir die Definitionen und wichtigsten Eigenschaften generischer Gruppen. Diese beschreiben die geometrische Struktur endlicher reduktiver Gruppen unabhängig vom zugrunde liegenden Körper. Auch die Tori und Levigruppen reduktiver Gruppen besitzen ein Pendant in der generischen Welt.

Im zweiten Abschnitt erläutern wir kurz die Definition generischer Sylowtori. Diese werden durch Ordnungspolynome einer generischen Gruppe charakterisiert und besitzen ähnliche Eigenschaften wie Sylowgruppen, im Gegensatz zu diesen aber eine stärkere Verbindung zur geometrischen Struktur der Gruppen.

Schließlich führen wir den Begriff des d-Sylowtwists ein. Mit Hilfe solcher Elemente können wir Formeln für Sylowtori, Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren angeben. Diese Aussagen helfen später bei der Konstruktion der für das Theorem 0.1 wichtigen Gruppen.

1.1 Grundlegende Definitionen

Generische Gruppen erlauben eine kompakte Beschreibung zusammenhängender reduktiver algebraischer Gruppen und einer darauf operierenden Frobeniusabbildung. Dabei benutzen wir die in [Car85, S.31] eingeführte Definition der Frobeniusabbildung. Alle in diesem Abschnitt aufgeführten Resultate gehen auf [BM92] zurück.

Jede generische Gruppe enthält neben den vier Komponenten eines Wurzeldatums noch eine zusätzliche.

Definition 1.1.1. Sei $(X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ ein Quintupel mit folgenden Eigenschaften:

(a) X und Y sind $\mathbb{Z}$-Gitter von gleichem endlichen Rang mit einer Dualitätsabbildung $\langle , \rangle : X \times Y \to \mathbb{Z}$,

(b) R und $R^\vee$ sind Wurzelsysteme in X bzw. Y mit einer bijektiven Abbildung ${}^\vee : R \to R^\vee$, die $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ für alle $\alpha \in R$ erfüllt,

(c) W ist die Coxetergruppe zum Wurzelsystem $R^\vee \subset Y$ und ϕ ein Automorphismus endlicher Ordnung von Y mit $\phi(R^\vee) = R^\vee$. In $\mathrm{GL}(Y)$ liegt die Nebenklasse $W\phi$.

Dann heißt $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ eine *allgemeine generische Gruppe*.

Neben diesen generischen Gruppen wurden in [BM92, 1A] noch weitere eingeführt, deren Definition wir hier nur andeuten.

1.1.2 (Weitere generische Gruppen). Sei $p \in \{2, 3\}$. Eine *p-getwistete generische Gruppe* ist ein Quintupel $(X, R, Y, R^\vee, W\phi)$, bei dem X, R, Y, $R^\vee$ die in der Definition beschriebenen Eigenschaften besitzen, ϕ ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ ist und R die disjunkte Vereinigung von Wurzelsystemen vom Typ $\widetilde{\mathsf{A}}_1 \times \mathsf{A}_1$ und

- vom Typ B_2 oder F_4 bei $p = 2$, bzw.
- vom Typ G_2 bei $p = 3$

ist. Dabei steht $\widetilde{\mathsf{A}}_1 \times \mathsf{A}_1$ für ein Wurzelsystem mit zwei kurzen und zwei langen Wurzeln, bei der die kurzen und langen Wurzeln zueinander orthogonal sind.

Jede zusammenhängende reduktive Gruppe besitzt ein bis auf Isomorphie eindeutiges Wurzeldatum. Analog kann mit Hilfe von endlichen reduktiven Gruppen eine generische Gruppe bestimmt werden.

1.1.3. Seien p eine Primzahl und $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über dem Körper $\overline{\mathbb{F}}_p$ mit einer Frobeniusabbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. Weiter seien $\mathbf{T}$ ein F-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$, der in einer F-stabilen Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ liegt, und $W := {}^{\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})}/_{\mathbf{T}}$ die zugehörige Weylgruppe, deren definierender Epimorphismus $\rho : \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) \to W$ ist.

- Die Gruppe $X := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \overline{\mathbb{F}}_p^\star)$ ist das *Charaktergitter* von $\mathbf{T}$, $Y := \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p^\star, \mathbf{T})$ das *Kocharaktergitter* von $\mathbf{T}$. Auf $X \times Y$ ist gemäß [Car85, 1.9] eine Dualität definiert.
- Zu $\mathbf{B}$ und $\mathbf{T}$ gibt es eine eindeutige Borelgruppe $\mathbf{B}^-$. Jede minimale echte $\mathbf{T}$-invariante Untergruppe des unipotenten Radikals von $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{B}^-$ bestimmt gemäß [Car85, 1.9] ein Element in X und ein dazu duales Element in Y. Diese Elemente sind die *Wurzeln* R bzw. *Kowurzeln* $R^\vee$ von $\mathbf{G}$. Die Wurzeln werden in positive und negative unterteilt, indem die mittels Untergruppen von $\mathbf{B}$ gewonnenen als positiv gewählt werden.
- Die Gruppe W operiert gemäß [Car85, 1.9] treu in natürlicher Weise auf $\mathbf{T}$, X und Y. Zu jeder Wurzel $\alpha \in R$ gibt es ein Element $w_\alpha \in W$, das auf den Gittern wie eine Spiegelung entlang α bzw. $\alpha^\vee$ operiert. Außerdem wird W von diesen w_α erzeugt.

- Auf Y bzw. $\mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ operiert F wie $q\phi$, wobei ϕ ein Automorphismus endlicher Ordnung auf Y bzw. $\mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ ist. Dabei ist q entweder eine Potenz von p oder eine ungerade Potenz von $\sqrt{p}$.

Für die konstruierten Objekte gilt nun folgender Satz.

Satz 1.1.4. *Das ausgehend von einer reduktiven zusammenhängenden algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ und einer Frobeniusabbildung bestimmte Quintupel $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ ist eine generische Gruppe.*

Zu jeder allgemeinen generischen Gruppe $\mathbb{G}$ und jeder Primzahlpotenz q existiert eine reduktive Gruppe $\mathbf{G}$ mit einer Frobeniusabbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, die $\mathbb{G}$ als generische Gruppe besitzt. Analog gibt es zu jeder p-getwisteten generischen Gruppe $\mathbb{G}$ und jeder ungeraden Potenz von $\sqrt{p}$ eine reduktive Gruppe $\mathbf{G}$ mit einer Frobeniusabbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, die $\mathbb{G}$ als generische Gruppe besitzt.

Dabei sind die Gruppe $\mathbf{G}$ und die Frobeniusabbildung F bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$ wird *generische Gruppe* oder *vollständiges Wurzeldatum von* $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$ bzw. $(\mathbf{G}, F)$ genannt. Für die bis auf Isomorphie bestimmte Gruppe $\mathbf{G}^F$ schreiben wir auch $\mathbb{G}(q)$.

Beweis. Dies wird in [BM92, 2] gezeigt. $\square$

Definition 1.1.5 (Generischer Torus). Ein *generischer Torus* ist eine generische Gruppe, bei der die Wurzelmengen R und $R^\vee$ leer sind und daher die Nebenklasse $W\phi$ aus genau einem Element besteht, d.h.

$$\mathbb{T} = (X, \emptyset, Y, \emptyset, \phi) =: (X, Y, \phi).$$

Ein *Torus von* $\mathbb{G}$ ist eine generische Gruppe der Form

$$\left({}^{X}\!/\!{Y'^{\perp}}, \emptyset, Y', \emptyset, w\phi\rceil_{Y'} \right),$$

wobei $w \in W$ und Y' ein $w\phi$-stabiles Untergitter von Y sind. (Für die Einschränkung von $w\phi$ auf Y' schreiben wir $w\phi\rceil_{Y'}$.) Die Faktorgruppe ${}^{X}\!/\!{Y'^{\perp}}$ mit

$$Y'^{\perp} := \langle x \in X \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y' \rangle$$

heißt *duales Gitter* von Y'.

Die Weylgruppe von $\mathbb{G}$ operiert in natürlicher Weise auf der Menge der Tori von $\mathbb{G}$ durch Operation auf den einzelnen Komponenten.

Die Gruppe W operiert auf den Tori von $\mathbb{G}$, indem die Gitter und Wurzelmengen durch ihre Bilder unter der Abbildung w bzw. w^{-1} und ϕ durch die dazu konjugierte Abbildung ersetzt werden.

Diese Tori stehen in enger Verbindung mit den F-stabilen Tori von $\mathbf{G}$.

Satz 1.1.6. *Die generische Gruppe eines F-stabilen Torus von $\mathbf{G}$ ist ein Torus von $\mathbb{G}$. Dies definiert eine Bijektion zwischen den W-Konjugationsklassen der Tori von $\mathbb{G}$ und den $\mathbf{G}^F$-Konjugationsklassen F-stabiler Tori von $\mathbf{G}$.*

Beweis. siehe [BM92, Théorème 2.1 (1)]. □

Analog zu den Tori von $\mathbb{G}$ werden auch die Levigruppen von $\mathbb{G}$ definiert, die dann entsprechende Eigenschaften wie die Levigruppen von $\mathbf{G}$ besitzen.

Definition und Satz 1.1.7. *Seien $w\phi \in W\phi$ und $R'^\vee$ ein $w\phi$-stabiles parabolisches Untersystem von $R^\vee$ mit zugehöriger Weylgruppe $W_{R'}$. Dann heißt die generische Gruppe*

$$(X, R', Y, R'^\vee, W_{R'}w\phi)$$

Levigruppe von $\mathbb{G}$.

Wieder existiert eine Bijektion zwischen den W-Konjugationsklassen von Levigruppen in $\mathbb{G}$ und den $\mathbf{G}^F$-Konjugationsklassen von F-stabilen Levigruppen in $\mathbf{G}$.

Beweis. siehe [BM92, Théorème 2.1 (2)]. □

Ebenso gibt es auch den Zentralisator eines Torus in $\mathbb{G}$.

Definition 1.1.8. Sei $\mathbb{S} = (X', Y', (w\phi)\rceil_{Y'})$ ein generischer Torus von $\mathbb{G}$. Dann heißt

$$(X, R', Y, R'^\vee, W_{R'}w\phi)$$

mit $R' := R \cap Y'^\perp$ der *Zentralisator von* $\mathbb{S}$ *in* $\mathbb{G}$ und wird daher mit $\mathrm{C}_\mathbb{G}(\mathbb{S})$ abgekürzt.

Diese Zentralisatoren sind gemäß Proposition 1.22 aus [DM91] ebenfalls Levigruppen von $\mathbb{G}$.

Auch hier existiert eine enge Verbindung zu der reduktiven Gruppe und ihren Untergruppen.

Satz 1.1.9. *Sei $\mathbf{S}$ ein F-stabiler Torus in $\mathbf{G}$ mit vollständigem Wurzeldatum $\mathbb{S}$. Dann hat $\left(\mathrm{C}_\mathbf{G}(\mathbf{S}),\, F\rceil_{\mathrm{C}_\mathbf{G}(\mathbf{S})}\right)$ das vollständige Wurzeldatum $\mathrm{C}_\mathbb{G}(\mathbb{S})$.*

Beweis. Der Zentralisator $\mathbf{L} := \mathrm{C}_\mathbf{G}(\mathbf{S})$ ist eine zusammenhängende reduktive Gruppe. Als eine solche wird $\mathbf{L}$ von einem maximalen Torus und den Wurzelgruppen von $\mathbf{L}$ erzeugt. Es gibt in $\mathbf{G}$ einen maximalen F-stabilen Torus $\mathbf{T}$ mit $\mathbf{T} \geq \mathbf{S}$. Dieser liegt auch in $\mathbf{L}$. Wir nehmen an, dass mit Hilfe von $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$ die generische Gruppe $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ definiert ist und $\mathbf{X}_\alpha$ die Wurzelgruppe zu $\alpha \in R$ ist.

Der Torus $\mathbf{T}$ besitzt das vollständige Wurzeldatum $(X, Y, w'\phi)$ für ein Element $w' \in W$. Der Automorphismus $w'\phi$ erfüllt dabei $w'\phi\rceil_{Y'} = w\phi\rceil_{Y'}$, da F auf dem zu $\mathbf{S}$ assoziierten Kocharaktergitter denselben Automorphismus induziert wie $F\rceil_{Y'}$. Also operiert $w'w^{-1}$ trivial auf Y'. Laut [Ste64] gilt dann $w'w^{-1} \in W_{R'}$ mit $R' = R \cap Y'^\perp$.

Bei der Konstruktion der generischen Gruppe von $(\mathbf{L}, \mathbf{T}, F\rceil_{\mathbf{L}})$ erhalten wir als Charaktergitter X, als Kocharaktergitter Y und als Automorphismus $w'\phi$. Das Kocharaktergitter Y' von $\mathbf{S}$ besteht aus den Kocharakteren $\chi \in Y$ mit $\mathrm{Bild}(\chi) \leq \mathbf{S}$. Analog sind alle Elemente des Charaktergitters von $\mathbf{S}$ von der Form $\chi\rceil_{\mathbf{S}}$ mit $\chi \in X$.

Somit operiert $\mathbf{S}$ genau dann trivial auf der Wurzelgruppe $\mathbf{X}_\alpha$ von $\mathbf{G}$, wenn der dadurch entstehende Charakter trivial ist, d.h. $\alpha \in Y'^{\perp}$ gilt.

Dies beweist $\mathbf{L} = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in Y'^{\perp} \cap R \right\rangle$. Das vollständige Wurzeldatum dieser Gruppe ist also $(X, R', Y, R'^{\vee}, W_{R'}w'\phi)$. Dies ist wegen $w'w^{-1} \in W_{R'}$ das für $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ angegebene. □

Diese Aussage wird unter anderem in [BM98, 2.2] erwähnt. Neben diesen Unterstrukturen der generischen Gruppe werden wir später vor allem auch die relativen Weylgruppen der Levigruppen benutzen.

Lemma 1.1.10 (Relative Weylgruppe). *Seien* $\mathbf{L}$ *eine* F*-stabile Levigruppe und* $\mathbb{L} = (X, R', Y, R'^{\vee}, W_{R'}w\phi)$ *das vollständige Wurzeldatum von* $(\mathbf{L}, F\rceil_{\mathbf{L}})$. *Dann gilt*

$$\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})/\mathbf{L}^F \cong W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}).$$

mit

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) := \left\langle w' \in W \,\middle|\, R'^{w'} = R' \text{ und } (w'W_{R'})^{w\phi} = w'W_{R'} \right\rangle / W_{R'}.$$

Die Gruppe $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$ heißt *relative Weylgruppe* von $\mathbb{L}$ in $\mathbb{G}$.

Beweis. Die Isomorphie folgt aus [BM92, Thm. 2.1]. □

Diese Aussage wird später vor allem bei der Konstruktion der d-Sylownormalisatoren helfen, da diese gleichzeitig Normalisatoren von Levigruppen sind.

1.2 Sylowtori

Bevor wir Sylowtori einer generischen Gruppe $\mathbb{G}$ definieren, beschreiben wir die wichtigsten Eigenschaften des Ordnungspolynoms von $\mathbb{G}$, mit dem die Sylowtori charakterisiert werden.

1.2.1 (Ordnungspolynom von $\mathbb{G}$). In [BM92, 1.9] wurde für eine generische Gruppe $\mathbb{G}$ das *Ordnungspolynom* $|\mathbb{G}|$ definiert. Dieses hat bei einer allgemeinen generischen Gruppe $\mathbb{G}$ die folgenden Eigenschaften:

- Das Polynom hat die Form

$$|\mathbb{G}|(x) = x^N \prod_{d \in \mathbb{N}} \Phi_d(x)^{a(d)} \in \mathbb{Z}[x]$$

  für gewisse $a(d) \geq 0$ und eine Zahl $N \in \mathbb{N}_0$. Dabei steht $\Phi_d(x)$ für das d-te zyklotomische Polynom.

- Ist $\mathbb{G}(q)$ die zu der Primzahlpotenz q und $\mathbb{G}$ gehörende endliche Gruppe, so gilt
$$|\mathbb{G}(q)| = |\mathbb{G}|\,(q).$$

Analog gilt bei p-getwisteten generischen Gruppen auch:

- Das Polynom erfüllt
$$|\mathbb{G}|(x) = x^N \prod_{\Psi} \Psi(x)^{a_\Psi} \in \mathbb{Z}[\sqrt{p}^{-1}][x]$$
für gewisse $a_\Psi \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$, wobei Ψ für ein tp-zyklotomisches Polynom im Sinne von [BM92, 3F] steht. Diese sind minimale Produkte zyklotomischer Polynome über $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ mit $\Psi(\sqrt{p}x) \in \mathbb{Z}[x]$.

- Ist $\mathbb{G}(q)$ die zu $\mathbb{G}$ und $q = \sqrt{p}^{2i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$) gehörende endliche Gruppe, so gilt analog
$$|\mathbb{G}(q)| = |\mathbb{G}|\,(q).$$

Ist die generische Gruppe ein generischer Torus $\mathbb{T} = (X, Y, \phi)$, so gilt gemäß [BM98, Abschnitt 3.1] für das Ordnungspolynom
$$|\mathbb{T}| = \det\nolimits_{\overline{Y}}(x\phi - 1),$$
mit $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$.

Mit diesen Polynomen werden Sylowtori definiert.

Definition 1.2.2. Seien $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{G}$ eine allgemeine generische Gruppe, $(\mathbf{G}, F)$ eine reduktive Gruppe mit Frobeniusabbildung F und vollständigem Wurzeldatum $\mathbb{G}$. Ein Torus $\mathbb{T}$ von $\mathbb{G}$ mit $|\mathbb{T}| = \Phi_d^{a(d)}$ heißt *d-Sylowtorus* von $\mathbb{G}$. Auch den zugehörigen Torus der Gruppe $\mathbf{G}$ nennt man *d-Sylowtorus* von $\mathbf{G}$.

Seien $\mathbb{G}$ eine p-getwistete generische Gruppe, Ψ ein tp-zyklotomisches Polynom und $(\mathbf{G}, F)$ eine reduktive Gruppe mit Frobeniusabbildung und vollständigem Wurzeldatum $\mathbb{G}$. Ein Torus $\mathbb{T}$ von $\mathbb{G}$ mit $|\mathbb{T}| = \Psi_d^{a_\Psi}$ heißt *Ψ-Sylowtorus* von $\mathbb{G}$. Der zugehörige Torus $\mathbf{T} \leq \mathbf{G}$ ist der *Ψ-Sylowtorus* von $(\mathbf{G}, F)$.

In [BM92, Theorem 3.4 bzw. 3F] wurde bewiesen, dass diese Gruppen ähnliche Eigenschaften wie Sylowgruppen besitzen, von denen aber nur die folgenden zwei hier erwähnt werden sollen.

Satz 1.2.3 (Sylow-Sätze für Tori). *Seien $\mathbb{G}$ eine allgemeine generische Gruppe, $(\mathbf{G}, F)$ die zugehörige reduktive Gruppe und $d \in \mathbb{N}$. Dann werden folgende Aussagen erfüllt:*

(a) Es existiert ein d-Sylowtorus von $\mathbf{G}$.

(b) Je zwei d-Sylowtori von $(\mathbf{G}, F)$ *sind in* $\mathbf{G}^F$ *konjugiert.*

Für jede p-getwistste generische Gruppe, die zugehörige reduktive Gruppe $(\mathbf{G}, F)$ *und jedes tp-zyklotomisches Polynom* Ψ *gilt:*

(a') Es existiert ein Ψ*-Sylowtorus von* $\mathbf{G}$.

(b') Je zwei Ψ*-Sylowtori von* $(\mathbf{G}, F)$ *sind in* $\mathbf{G}^F$ *konjugiert.*

In dieser Arbeit sind die im Theorem 0.1 erwähnten Gruppen, die mit Hilfe dieser Tori definiert werden besonders wichtig. Wir verwenden daher für diese folgende Namen.

Definition 1.2.4. Seien $(\mathbf{G}, F)$ eine reduktive Gruppe, $G := \mathbf{G}^F$ und $\mathbf{S}$ ein d-Sylowtorus bzw. ein Ψ-Sylowtorus von $(\mathbf{G}, F)$. Dann nennen wir $\mathrm{C}_G(\mathbf{S})$ eine *d-Sylowlevigruppe* bzw. *Ψ-Sylowlevigruppe* und analog $\mathrm{N}_G(\mathbf{S})$ den *d-Sylownormalisator* bzw. *Ψ-Sylownormalisator von* $\mathrm{C}_G(\mathbf{S})$.

Diese Gruppen haben folgende Eigenschaften.

Lemma 1.2.5. *Seien* $g \in \mathbf{G}$, L' *eine d-Sylowlevigruppe in* $(\mathbf{G}, gF)$ *und* N' *ihr d-Sylownormalisator. Weiter seien* L *eine d-Sylowlevigruppe in* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr d-Sylownormalisator. Dann gibt es ein* $g' \in \mathbf{G}$ *mit* $L^{g'} = L'$ *und* $N^{g'} = N'$. *Außerdem sind je zwei d-Sylowlevigruppen bzw. d-Sylownormalisatoren von* $(\mathbf{G}, F)$ *in* G *zueinander konjugiert. Dabei gilt* $\mathrm{N}_G(\mathbf{S}) = \mathrm{N}_G(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}))$ *für jeden d-Sylowtorus von* $(\mathbf{G}, F)$.

Der Frobeniusendomorphismus gF operiert dabei auf $\mathbf{G}$ durch

$$x \mapsto F(x^g) \text{ für alle } x \in \mathbf{G}.$$

Beweis. Da die Sylowtori von $(\mathbf{G}, F)$ in G zueinander konjugiert sind, sind auch ihre Sylownormalisatoren in G konjugiert.

Sei g' ein Element mit $F(g')g'^{-1} = g$. Dieses existiert gemäß dem Satz von Lang-Steinberg [Gec03, Theorem 4.1.12]. Dann ist $L'^{g'}$ eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, F)$ und $N'^{g'}$ ihr Sylownormalisator.

Wir beweisen nun $\mathrm{N}_G(\mathbf{S}) = \mathrm{N}_G(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}))$ für jeden beliebigen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ von $(\mathbf{G}, F)$. Da $\mathbf{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ selbst eine zusammenhängende reduktive Gruppe ist, sind alle d-Sylowtori bzw. Ψ-Sylowtori von $(\mathbf{L}, F)$ zu $\mathbf{S}$ in $\mathbf{L}$ konjugiert. Wegen $\mathbf{S} \leq \mathrm{Z}(\mathbf{L})$ gibt es in L genau einen d-Sylowtorus bzw. Ψ-Sylowtorus. Die Gruppe $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ operiert auf den Sylowtori von $\mathbf{L}$ und normalisiert somit $\mathbf{S}$. Daraus folgt $\mathrm{N}_G(\mathbf{S}) \geq \mathrm{N}_G(\mathbf{L})$. Die verbleibende Inklusion $\mathrm{N}_G(\mathbf{L}) = \mathrm{N}_G(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})) \geq \mathrm{N}_G(\mathbf{S})$ ist aus der Gruppentheorie bekannt. □

Dieses Lemma werden wir häufig benutzen, da wir uns damit bei den Beweisen auf spezielle d-Sylowlevigruppen und d-Sylownormalisatoren beschränken können.

1.3 Konstruktionen mit Sylowtwists

Für die späteren Kapitel ist es wichtig, d-Sylowlevigruppen und d-Sylownormalisatoren bis auf Isomorphie zu bestimmen. Dazu benutzen wir d-Sylowtwists.

Definition 1.3.1. Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ eine generische Gruppe und $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$ eine zugehörige reduktive Gruppe, so dass (X, Y, ϕ) die generische Gruppe von $(\mathbf{T}, F\rceil_{\mathbf{T}})$ ist. Weiter seien Γ und F_0 zwei Automorphismen von $\mathbf{G}$ mit $\Gamma \circ F_0 = F$ und den folgenden Eigenschaften:

- beide Automorphismen stabilisieren $\mathbf{T}$ und eine F-stabile Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ und
- Γ hat endliche Ordnung und induziert auf Y den Automorphismus ϕ.

Ist $\mathbb{G}$ eine allgemeine generische Gruppe, so seien $d \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbf{N} := \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ mit

$$\Phi_d^{a(d)} \Big| \det\nolimits_{Y \otimes \mathbb{C}}(x\rho(v)\phi - 1).$$

(Dabei verwenden wir die Abbildung $\rho : \mathbf{N} \to W$ aus 1.1.3.) Dann nennen wir $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ einen *d-Sylowtwist* von $(\mathbf{G}, F)$ bzw. von $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$. Die Abbildung $v\Gamma$ operiert dabei auf $\mathbf{G}$ durch

$$x \mapsto \Gamma(x^v) \text{ für alle } x \in \mathbf{G}.$$

Für eine p-getwistete generische Gruppe $\mathbb{G}$, ein tp-zyklotomisches Polynom Ψ und $v \in \mathbf{N} := \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ bezeichnen wir $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ als *Ψ-Sylowtwist* von $(\mathbf{G}, F)$ bzw. von $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$, falls

$$\Psi^{a_\Psi} \Big| \det\nolimits_{Y \otimes \mathbb{C}}(x\rho(v)\phi - 1)$$

gilt.

In den meisten Fällen wird bei $F = \Gamma \circ F_0$ der Automorphismus Γ ein Graphautomorphismus sein und F_0 ein Standard-Frobeniusendomorphismus. Wir benutzen nur das Element v von einem d-Sylowtwist für die späteren Konstruktionen. Durch die Erwähnung von $\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ deuten wir an, mit welchem Automorphismus ϕ das Element $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ ein Sylowtwist ist. Später wird der Automorphismus $\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ von dem Graphautomorphismus des Dynkindiagramms in 2.3.3 abgeleitet werden.

Eine solche Zerlegung von F geben wir für einzelne Fälle in Lemma 2.2.5 an. Die Existenz der Sylowtwists wird durch folgendes Lemma in vielen Fällen gesichert.

Lemma 1.3.2. *Seien $\mathbb{G}$, $\mathbf{G}$ und F wie in 1.3.1. Gibt es Endomorphismen Γ und F_0 mit den in der Definition 1.3.1 beschriebenen Eigenschaften, so existiert für jedes d bzw. Ψ ein Sylowtwist. Bei $\phi = \mathrm{id}_Y$ ist $v = 1_{\mathbf{G}}$ ein 1-Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$.*

Beweis. Gemäß Satz 1.2.3 gibt es einen d- bzw. Ψ-Sylowtorus $\mathbb{S} := ({}^{X}/{Y'^{\perp}}, Y', w\phi)$ in $\mathbb{G}$ mit $Y' \leq Y$ und $|\mathbb{S}| = \Phi_d^{a(d)}$ bzw. $|\mathbb{S}| = \Psi^{a_\Psi}$. Aus der Bemerkung 1.2.1 ist

$$|\mathbb{S}| = \det_{\overline{Y}'}(x(w\phi) - 1)$$

mit $\overline{Y}' := Y' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ bekannt. Daraus folgt

$$\Phi_d^{a(d)} \Big| \det_{\overline{Y}}(x(w\phi) - 1) \text{ bzw. } \Psi^{a_\Psi} \Big| \det_{\overline{Y}}(x(\rho(v)\phi) - 1)$$

mit $\overline{Y} := Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Wir wählen $n \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ mit $\rho(n) = w$. Ein solches Element existiert, da ρ surjektiv ist. Gemäß der Definition ist $n\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ ein Sylowtwist.

Bei $\phi = \mathrm{id}_Y$ und $v = 1_{\mathbf{G}}$ ist die Dimension des 1-Eigenraums von $\rho(v)$ auf $Y \otimes \mathbb{C}$ maximal. □

Mit Hilfe eines Sylowtwists $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ konstruieren wir nun einen Sylowtorus von $\mathbb{G}$ und $(\mathbf{G}, vF)$. Sei im Folgenden $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ ein d-Sylowtwist bzw. Ψ-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Lemma 1.3.3 (Konstruktion eines d-Sylowtorus). *Seien $\mathbb{G}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, Γ wie in der Definition 1.3.1, $v\,\Gamma\rceil_{\mathbf{N}}$ ein d-Sylowtwist bzw. Ψ-Sylowtwist, $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$, $Y' := Y \cap \ker_{\overline{Y}}(\Phi_d(\rho(v)\phi))$, also der kleinste Unterraum von Y, dessen Tensorprodukt mit $\mathbb{C}$ alle Eigenvektoren zu primitiven d-ten Einheitswurzeln von $\rho(v)\phi$ enthält, und $X' := {}^{X}/{Y'^{\perp}}$.*

Dann ist $\mathbb{S} := (X', Y', \rho(v)\phi)$ ein d-Sylowtorus bzw. ψ-Sylowtorus von $\mathbb{G}$ und

$$\mathbf{S} := \left\{ t \in \mathbf{T} \;\middle|\; \lambda(t) = 1 \textit{ für alle } \lambda \in Y'^{\perp} \right\}$$

ein d-Sylowtorus bzw. Ψ-Sylowtorus von $(\mathbf{G}, vF)$.

Beweis. Gemäß der Definition 1.3.1 von v und der in 1.2.1 angegebenen Ordnung ist $\mathbb{S}$ ein Sylowtorus von $\mathbb{G}$.

Der Torus $\mathbf{S} := \left\{ t \in \mathbf{T} \;\middle|\; \lambda(t) = 1 \text{ für alle } \lambda \in Y'^{\perp} \right\}$ hat das Wurzelgitter ${}^{X}/{Y'^{\perp}}$ und das Kocharaktergitter Y'. Die Frobeniusabbildung vF operiert auf Y' durch $\rho(v)\phi$. Also hat $(\mathbf{S}, vF\rceil_{\mathbf{S}})$ das vollständige Wurzeldatum $\mathbb{S}$. □

Die zugehörige Levigruppe ist dann folgende:

Lemma 1.3.4 (Konstruktion der zugehörigen d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, vF)$). *Für die eben definierten Sylowtori $\mathbb{S}$ und $\mathbf{S}$ gilt:*

(a) $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, R', Y, R'^{\vee}, W'\rho(v)\phi)$ *mit* $R' := R \cap Y'^{\perp}$ *und* $W' := W_{R'}$,

(b) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle$, *wobei $\mathbf{X}_\alpha$ die Wurzeluntergruppe von $\mathbf{T}$ zu der Wurzel $\alpha \in R$ ist.*

Beweis. Der Teil (a) folgt aus der Definition von $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$.

Gemäß [DM91, Proposition 1.14] ist $\mathbf{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ reduktiv. Die Gruppe $\mathbf{L} := \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle$ enthält nach Definition den maximalen vF-stabilen Torus $\mathbf{T}$. Dieser hat X und Y als Charaktergitter bzw. Kocharaktergitter. Die Operation von vF auf Y definiert den Automorphismus $\rho(v)\phi$. Gemäß [DM91, Proposition 1.14.] enthält $\mathbf{L}$ nur die angegebenen Wurzeluntergruppen zu R'. □

Nun bleibt noch der zugehörige Sylownormalisator zu bestimmen. Für die Berechnung von $\mathrm{N}_G(\mathbf{S})$ wird die relative Weylgruppe $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$ von $\mathbb{L}$ benutzt.

Lemma 1.3.5 (Sylownormalisator). *Sei* $\mathbf{N} := \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. *Dann gilt:*

(a) $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \mathbf{N}^{vF}$ *für* $R' = \emptyset$ *und*

(b) $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \left\langle U, \mathbf{L}^{vF} \right\rangle$ *für jede Gruppe* $U \leq \mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{T})$, *die auch*

$$\langle \rho(U), W' \rangle / W' \cong W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) \text{ und } U \cap \mathbf{L} \leq \mathbf{T}$$

erfüllt.

Beweis. Aus Lemma 1.2.5 wissen wir $N := \mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{L})$, also $\mathbf{N}^{vF} \leq N$. Gemäß [Car85, 3.3.6] stimmen auch die Gruppen $\mathbf{N}^{vF}/\mathbf{T}^{vF}$ und $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$ überein. Zusammen mit dem Lemma 1.1.10 folgt daraus die Behauptung in (a).

Für den Beweis von (b) sei $u \in U$. Gemäß der Definition von $\mathbf{L}$ genügt es, $\mathbf{T}^u = \mathbf{T}$ und $\mathbf{X}_\alpha^u \in \mathbf{L}$ für alle $\alpha \in R'$ zu beweisen. Aus den Voraussetzungen an $\rho(U)$ und der Beschreibung von $\mathbf{X}_\alpha^u$ in [Car85, 2.5.15] ergibt sich $\mathbf{X}_\alpha^u \in \mathbf{L}$. Dies beweist $\langle U, L \rangle \leq \mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S})$ mit $L := \mathbf{L}^{vF}$. Aus Lemma 1.1.10 und $U \cap \mathbf{L} \leq \mathbf{T}$ folgt für N auch

$$\langle U, L \rangle / L \cong U / U \cap L \cong \rho(U) \cong \langle \rho(U), W' \rangle / W' = W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = N/L.$$

Die Umformungen werden durch $W' \cap \rho(U) = 1$ möglich. □

Wir werden später $\mathbf{T}$ so wählen, dass wir mit den Elementen von $\mathbf{N}$ und $\mathbf{T}$ gut umgehen können. Für die Elemente der eben konstruierten Gruppen kennen wir dann ebenfalls Rechenregeln.

Kapitel 2

Universelle Chevalleygruppen

In dieser Arbeit werden charaktertheoretische Eigenschaften der d-Sylowlevigruppen und der d-Sylownormalisatoren von einfach-zusammenhängenden einfachen Gruppen $\mathbf{G}$ bewiesen. Dazu ist eine effiziente Handhabe der Elemente dieser Gruppen wichtig. Wir benutzen dazu die Steinberg-Präsentation dieser Gruppen, da durch diese ein einheitlicher Zugang zu allen Gruppen möglich ist.

Wir definieren und erläutern im ersten Abschnitt zunächst die universellen Chevalleygruppen, wie diese Gruppen auch genannt werden. Zur Formulierung der dabei beteiligten Relationen sind verschiedene Konstanten nötig, die wir davor einführen. Daraus ergeben sich für die Elemente mehrere Rechenregeln, die wir in späteren Kapiteln immer wieder benutzen.

Anschließend stellen wir die Verbindung zwischen den so definierten endlich präsentierten Gruppen und den reduktiven Gruppen her. Für diese und die darauf operierenden Frobeniusabbildungen bestimmen wir außerdem die zugehörige generische Gruppe.

Im dritten Abschnitt skizzieren wir die Definition und die wichtigsten Eigenschaften der erweiterten Weylgruppe. Vor allem erläutern wir ihre Verbindung zu Zopfgruppen und Coxetergruppen, mit deren Hilfe wir später Sylowtwists ermitteln. Dazu benutzen wir reguläre Elemente der Coxetergruppe und die so genannten „guten Wurzeln von $\mathbf{w}_0^2$“ in der Zopfgruppe, deren Definition wir davor wiederholen.

2.1 Definition und Rechenregeln

In diesem Abschnitt führen wir die universellen Chevalleygruppen als endlich präsentierte Gruppen ein. Die Notation orientiert sich an dem Buch [Car72]. Ursprünglich wurden die Gruppen als Automorphismengruppen halbeinfacher Liealgebren definiert, siehe [Ste68b, Car72]. Hier stellen wir die Beschreibung als endlich präsentierte Gruppe in den Vordergrund.

Gegeben ist ein irreduzibles Wurzelsystem R, für das eine positive Wurzelmenge, ein Fundamentalsystem R_F, eine damit verträgliche Totalordnung „$<$“ und ein Skalarprodukt $(,)_R : R \times R \to \mathbb{Z}$ definiert sind. Daraus ergeben sich die folgenden weiteren Größen.

Definition 2.1.1 (Cartanzahl). Für zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ heißt

$$A_{\alpha,\beta} := \frac{2(\alpha,\beta)_R}{(\alpha,\alpha)_R}$$

die *Cartanzahl*. Sind die zwei Wurzeln linear unabhängig, so werden

$$p_{\alpha,\beta} := \max\{\, i \in \mathbb{Z} \mid -i\alpha + \beta \in R\} \text{ und } q_{\alpha,\beta} := \max\{\, i \in \mathbb{Z} \mid i\alpha + \beta \in R\}$$

gesetzt.

Abhängig von der auf R gegebenen Totalordnung werden folgende Begriffe benutzt.

Definition 2.1.2 (Spezielle und extraspezielle Paare). Ein Paar (α, β) mit $\alpha, \beta \in R$ ist ein *spezielles Paar*, falls $\alpha + \beta \in R$ und $0 < \alpha < \beta$ gilt. Das Paar (α, β) heißt *extraspeziell*, falls für jedes spezielle Paar (α', β') mit $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ auch $\alpha \leq \alpha'$ gilt.

Mit diesen Begriffen und der Norm $\mathbb{N}(\,) : R \to \mathbb{C}$, die $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)_R$ erfüllt, werden die Eigenschaften weiterer Konstanten formuliert.

Definition und Satz 2.1.3. *Seien $\epsilon_{\alpha,\beta} \in \{\pm 1\}$ für alle extraspeziellen Paare (α, β) aus R beliebig gewählt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung*

$$\epsilon : R \times R \to \{\pm 1\} \;\; \textit{mit } (\alpha, \beta) \mapsto \epsilon_{\alpha,\beta}$$

und folgenden Eigenschaften:

- $\epsilon_{\alpha,\beta} = -\epsilon_{\beta,\alpha}$ *für* $\alpha, \beta \in R$,
- $\epsilon_{\alpha,\beta} = -\epsilon_{-\alpha,-\beta}$ *für* $\alpha, \beta \in R$,
- $\epsilon_{\alpha,\beta} = \epsilon_{\beta,\gamma} = \epsilon_{\gamma,\alpha}$ *für* $\alpha + \beta + \gamma = 0$ *und*
- $\frac{N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\delta}}{\|\alpha+\beta\|^2} + \frac{N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta}}{\|\beta+\gamma\|^2} + \frac{N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\delta}}{\|\gamma+\alpha\|^2} = 0$ *für* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ *und* $N_{\alpha,\beta} := \epsilon_{\alpha,\beta}(p_{\alpha,\beta} + 1)$.

Dabei sind in der letzten Relation keine zwei Wurzeln zueinander invers oder gleich.

Beweis. Siehe [CMT04, Abschnitt 3] oder [Car72, 4.1.2 und 4.2.2.]. □

Die Relationen der Steinberg-Präsentation benutzen die von ϵ abgeleitete Konstantenfamilie $\{c_{i,j,\alpha,\beta}\}$, während in den Rechenregeln immer wieder die mit Hilfe von ϵ definierten Zahlen $\{\eta_{\alpha,\beta}\}$ auftauchen.

Definition 2.1.4. Seien $\alpha, \beta \in R$ und $i, j \in \mathbb{N}$ positiv.

(a) Für $(i-1)\alpha+\beta \in R$ sei

$$M_{\alpha,\beta,i} := \binom{p_{\alpha,\beta}+i}{i}\epsilon_{\beta,\alpha}\cdots\epsilon_{(i-1)\alpha+\beta,\alpha}.$$

(b) Für $i\alpha+j\beta \in R$ sei

$$c_{i,j,\alpha,\beta} := \begin{cases} M_{\alpha,\beta,i} & j=1, \\ (-1)^j M_{\beta,\alpha,j} & i=1, \\ \frac{1}{3}M_{\alpha+\beta,\alpha,2} & i=3, j=2, \\ -\frac{2}{3}M_{\alpha+\beta,\beta,2} & i=2, j=3. \end{cases}$$

(c) Die Konstante $\eta_{\alpha,\beta}$ wird bestimmt durch

$$\eta_{\alpha,\beta} := (-1)^p \frac{\epsilon_{\beta-p\alpha,\alpha}\cdots\epsilon_{\beta-\alpha,\alpha}}{\epsilon_{\beta-p\alpha,\alpha}\cdots\epsilon_{\beta+(q-p-1)\alpha,\alpha}}$$

mit $p = p_{\alpha,\beta}$ und $q = q_{\alpha,\beta}$.

Diese Definition ist [CMT04, 3.Abschnitt] und [Car72, Bws. zu 6.4.3] entnommen. In dem Buch [Car72] wird auch bewiesen, dass $M_{\alpha,\beta,i}$, $c_{i,j,\alpha,\beta}$ und $\eta_{\alpha,\beta}$ ganze Zahlen sind.

Damit sind alle Hilfsmittel für die Definition der universellen Chevalleygruppen als endlich präsentierte Gruppen bereitgestellt.

Definition 2.1.5 (Steinberg-Präsentation). Seien $\mathbb{F}$ ein Körper, $R \neq \mathsf{A}_1$ ein irreduzibles Wurzelsystem mit einer gegebenen Totalordnung, $\epsilon_{\alpha,\beta}$ wie in 2.1.3, und $c_{i,j,\alpha,\beta}$ ($i,j \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \in R$ mit $i\alpha+j\beta \in R$) aus der Definition 2.1.4. Weiter sei $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ die durch Elemente $x_\alpha(t)$ ($\alpha \in R$, $t \in \mathbb{F}$) erzeugte Gruppe mit den Relationen

$$\begin{array}{rcll} x_\alpha(t_1)x_\alpha(t_2) & = & x_\alpha(t_1+t_2) & \text{für alle } t_1,t_2 \in \mathbb{F} \text{ und } \alpha \in R, \\ [x_\beta(t_1),x_\alpha(t_2)] & = & \prod_{i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}\left(c_{i,j,\alpha,\beta}(-t_2)^i t_1^j\right) & \text{für alle } t_1,t_2 \in \mathbb{F} \text{ und } \alpha,\beta \in R, \text{ und} \\ h_\alpha(t_1)h_\alpha(t_2) & = & h_\alpha(t_1t_2) & \text{für } t_1,t_2 \in \mathbb{F}^\star \text{ und } \alpha \in R, \end{array}$$

und den Elementen

$$h_\alpha(t) := n_\alpha(t)n_\alpha(-1) \text{ und } n_\alpha(t) := x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{F}^\star$$

(Bei dem Produkt $\prod_{i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}(c_{i,j,\alpha,\beta}(-t)^i u^j)$ wird die Reihenfolge der Faktoren durch die Ordnung auf R bestimmt.) Die Gruppe $\mathcal{G}(\mathbb{F})$, für die wir auch $\mathcal{G}$ schreiben, nennen wir *universelle Chevalleygruppe* zum Wurzelsystem R und dem Körper $\mathbb{F}$.

Bei einem Wurzelsystem R vom Typ A_1 wird die zu R gehörende universelle Chevalleygruppe analog definiert, wobei die Kommutatorrelation durch

$$n_\alpha(t)x_\alpha(u)n_\alpha(t)^{-1} = x_{-\alpha}(-t^2u) \text{ für } t,u \in \mathbb{F}, t \neq 0$$

ersetzt wird.

Ist das Wurzelsystem R vom Typ A_l, so kürzen wir $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ durch $\mathsf{A}_{l,sc}(\mathbb{F})$ oder $\mathsf{A}_{l,sc}(q)$ ab, falls $\mathbb{F}$ der Körper mit $q \in \mathbb{N}$ Elementen ist. Analoge Schreibweisen werden auch bei den übrigen Wurzelsystemen verwendet.

Bekannt ist, dass bei der Definition von $\mathcal{G}$ mit Hilfe einer Liealgebra der Isomorphietyp von $\mathcal{G}$ unabhängig von $\epsilon : R \times R \to \{\pm 1\}$ ist. Die Gruppe wird allein durch $\mathbb{F}$ und R bestimmt. Diese Aussage folgt aus Bemerkung 2.2.4 (a) im nächsten Abschnitt.

Für das Rechnen mit den Elementen von $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ gelten folgende Aussagen.

Satz 2.1.6 (Relationen in universellen Chevalleygruppen). *Seien $t \in \mathbb{F}^\star$, $u \in \mathbb{F}$, $\alpha, \beta \in R$ und R_F das ausgezeichnete Fundamentalsystem von R. Die Spiegelung entlang $\alpha \in R$ wird mit w_α bezeichnet. Dann gelten folgende Relationen:*

(a) $n_\alpha(t)x_\beta(u)n_\alpha(t)^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(\eta_{\alpha,\beta}t^{-A_{\alpha,\beta}}u)$,

(b) $n_\alpha(t)n_\beta(u)n_\alpha(t)^{-1} = n_{w_\alpha(\beta)}(\eta_{\alpha,\beta}t^{-A_{\alpha,\beta}}u)$,

(c) $n_\alpha(t)h_\beta(u)n_\alpha(t)^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(u)$,

(d) $h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{-A_{\alpha,\beta}}u)$,

(e) $n_\alpha(t) = h_\alpha(t)n_\alpha(1)$,

(f) $h_\alpha(t)n_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = n_\beta(t^{A_{\alpha,\beta}}u)$,

(g) $h_\alpha(t) = \prod_{\beta \in R_F} h_\beta(t^{c_\beta})$ *mit der zu β dualen Wurzel* $\beta^\vee := \frac{2\beta}{(\beta,\beta)_R}$ *und den durch*

$$\alpha^\vee = \sum_{\beta \in R_F} c_\beta \beta^\vee$$

definierten Zahlen c_β ($\beta \in R_F$),

(h) $\langle h_\alpha(t) \,|\, \alpha \in R, t \in \mathbb{F}^\star\rangle = \langle h_{\alpha_1}(t) \,|\, t \in \mathbb{F}^\star\rangle \times \cdots \times \langle h_{\alpha_l}(t) \,|\, t \in \mathbb{F}^\star\rangle$ *mit* $R_F = \{\alpha_1, \dots \alpha_l\}$.

Beweis. Die Formeln (a)-(f) und (h) stammen aus dem Beweis von [Car72, 12.1.1]. Der Teil (g) ist aus [GLS98, 1.12.1 (e)] bekannt. □

Einige dieser Relationen hängen von der Wahl von ϵ ab, wodurch sie für allgemeine Beweise ungeeignet sind. Bei zueinander orthogonalen Wurzeln sind Aussagen unabhängig von ϵ möglich.

Bemerkung 2.1.7. *Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \perp \beta$, $u \in \mathbb{F}$ und $t \in \mathbb{F}^\star$. Dann gilt:*

(a) $x_\beta(u)^{h_\alpha(t)} = x_\beta(u)$ *und* $n_\beta(u)^{h_\alpha(t)} = n_\beta(u)$,

(b) $x_\beta(u)^{n_\alpha(t)} = x_\beta(u)$ *und* $n_\beta(u)^{n_\alpha(t)} = n_\beta(u)$ *für* $p_{\alpha,\beta} = q_{\alpha,\beta} = 0$,

(c) $x_\beta(u)^{n_\alpha(t)} = x_\beta(-u)$ *und* $n_\beta(u)^{n_\alpha(t)} = n_\beta(-u)$ *für* $p_{\alpha,\beta} = q_{\alpha,\beta} = 1$.

Beweis. Wegen $\alpha \perp \beta$ gilt $A_{\alpha,\beta} = 0$. Daraus ergibt sich sofort das Kommutieren von $x_\beta(u)$ und $h_\alpha(t)$ mit 2.1.6 (d). Gemäß der Definition 2.1.4 von $\eta_{\alpha,\beta}$ gilt $\eta_{\alpha,\beta} = 1$ bei (b) und $\eta_{\alpha,\beta} = -1$ bei (c). Mit 2.1.6 (d) folgen dann die Aussagen (b) und (c). □

Für diese Arbeit ist es sinnvoll, noch folgende Schreibweise einzuführen. Diese benutzt das zu R duale Wurzelsystem $R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$.

Bemerkung 2.1.8. *Für* $\alpha \in R$, $t \in \mathbb{F}^\star$ *und* $k_{\alpha^\vee}(t) := h_\alpha(t)$ *gelten*

$$\begin{array}{rcll} n_\alpha(t)k_{\beta^\vee}(u)n_\alpha(t)^{-1} & = & k_{w_{\alpha^\vee}(\beta^\vee)}(u) & \textit{und} \\ k_{\alpha^\vee}(t) & = & \prod_{\beta\in R_F} k_{\beta^\vee}(t)^{c_\beta} & \textit{für } \alpha^\vee = \sum_{\beta\in R_F} c_\beta\beta^\vee. \end{array}$$

Aus $\alpha^\vee + \beta^\vee \in R^\vee$ *folgt*

$$k_{\alpha^\vee}(t) \cdot k_{\beta^\vee}(t) = k_{\alpha^\vee+\beta^\vee}(t).$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.1.6 (g) zusammen mit 2.1.6 (c) und $w_\alpha(\beta)^\vee = w_{\alpha^\vee}(\beta^\vee)$. □

Wir werden auch häufiger verschiedene universelle Chevalleygruppen als Untergruppen anderer Chevalleygruppen betrachten. Dazu benutzen wir folgendes Lemma, das sich aus der Definition der universellen Chevalleygruppen ergibt.

Lemma 2.1.9. *Seien* R *ein Wurzelsystem,* R' *ein abgeschlossenes irreduzibles Unterwurzelsystem von* R, $\mathbb{F}$ *ein algebraisch abgeschlossener Körper mit* $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$, $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe zu* R *über* $\mathbb{F}$ *und* $\mathbf{G}_{R'} := \langle x_\alpha(t) \in \mathbf{G} \mid \alpha \in R', t \in \mathbb{F}\rangle$.

(a) Es gibt eine universelle Chevalleygruppe $\mathbf{G}'$ *mit den Erzeugern* $x'_\alpha(t)$ *zu* R', *so dass*

$$\iota : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}_{R'} \textit{ mit } x_\alpha(t) \mapsto x'_\alpha(t) \textit{ für alle } \alpha \in R', t \in \mathbb{F},$$

ein Epimorphismus ist.

(b) Ist R' *ein parabolisches Unterwurzelsystem von* R *oder ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von* R *mit* $\mathbb{Z}R'^\vee = \mathbb{Z}R^\vee$, *so ist* ι *ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir konstruieren zu R' eine universelle Chevalleygruppe $\mathbf{G}'$ und erhalten dabei Relationen, die auch in $\mathbf{G}_{R'} := \langle x_\alpha(t) \in \mathbf{G} \mid \alpha \in R', t \in \mathbb{F}\rangle$ erfüllt sind. Dies beweist (a). Für (b) betrachten wir dann die Bilder zentraler Elemente.

Da R' ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von R ist, ergeben sich für $\alpha, \beta \in R'$ dieselben Konstanten in der Definition 2.1.1. Sei $\epsilon : R \times R \to \{\pm 1\}$ die Konstantenfamilie mit der $\mathbf{G}$ definiert wurde. Dann erfüllt auch $\epsilon' := \epsilon\rceil_{R'\times R'}$ die in der Definition 2.1.3

geforderten Eigenschaften. Weiter sei $\mathbf{G}'$ die mit dieser ϵ'-Abbildung definierte universelle Chevalleygruppe zu R' und $\mathbb{F}$. Dabei stimmen die in 2.1.4 definierten Konstanten für $\mathbf{G}$ mit denen für $\mathbf{G}'$ überein.

Die erzeugenden Elemente von $\mathbf{G}'$ seien $x'_\alpha(t)$ ($\alpha \in R', t \in \mathbb{F}$) und die $\mathbf{G}'$ definierenden Relationen sind:

$$\begin{array}{rcll} x'_\alpha(t_1)x'_\alpha(t_2) & = & x'_\alpha(t_1+t_2) & \text{für alle } t_1,t_2 \in \mathbb{F}. \\ [x'_\beta(t_1), x'_\alpha(t_2)] & = & \prod_{i,j>0} x'_{i\alpha+j\beta}\left(c_{i,j,\alpha,\beta}(-t_2)^i t_1^j\right) & \text{für alle } t_1,t_2 \in \mathbb{F} \text{ und} \\ h'_\alpha(t_1)h'_\alpha(t_2) & = & h'_\alpha(t_1t_2) & \text{für } t_1,t_2 \in \mathbb{F}^\star. \end{array}$$

Auch die Elemente $x_\alpha(t) \in \mathbf{G}_{R'}$ erfüllen diese Relationen. Also ist $\mathbf{G}_{R'}$ eine Faktorgruppe von $\mathbf{G}'$ und ι ein Epimorphismus, wie in (a) behauptet.

Die nichttrivialen Normalteiler von $\mathbf{G}'$ und damit die einzigen Kandidaten für $\ker(\iota)$ sind gemäß [Ste68b, §3, Korollar 1] die Untergruppen des Zentrums. Diese liegen alle im Torus $\mathbf{T}' := \langle h'_\alpha(t) \,|\, \alpha \in R', t \in \mathbb{F}^\star \rangle$.

Sei nun also $1 \neq h \in \mathbf{T}'$. Ist R ein parabolisches Untersystem, so gibt es ein Fundamentalsystem ${R_F}'$ von $R'^\vee$, das zu einem Fundamentalsystem R_F von R ergänzt werden kann. Es gibt laut 2.1.6 (h) eindeutige Elemente $t_\alpha \in \mathbb{F}^\star$ ($\alpha \in {R_F}'$) mit

$$h = \prod_{\alpha \in {R_F}'} h'_\alpha(t_\alpha).$$

Aus $1 \neq h$ folgt $t_\alpha \neq 1$ für mindestens eine Wurzel $\alpha \in {R_F}'$. Das Element $\iota(h)$ ist das Produkt

$$\iota(h) = \prod_{\alpha \in R_F} h_\alpha(t_\alpha)$$

mit $t_\alpha := 1$ für alle $\alpha \in R_F \setminus {R_F}'$, das gemäß 2.1.6 (h) ebenfalls nichttrivial ist. Also ist ι ein Isomorphismus, falls R' ein parabolisches Unterwurzelsystem von R ist.

Gilt stattdessen $\mathbb{Z}R'^\vee = \mathbb{Z}R^\vee$, so zeigen wir die Injektivität von ι mit Hilfe von Gittern. Das Element h erfüllt

$$h = \prod_{\alpha \in {R_F}'} h'_\alpha(t_\alpha)$$

für gewisse Elemente $t_\alpha \in \mathbb{F}^\star$ ($\alpha \in {R_F}'$). Es gibt eine p-Potenz q, so dass $t_\alpha \in \mathbb{F}_q$ für alle $\alpha \in {R_F}'$ und $h^{q-1} = 1$ gilt. Die Gruppe $T' := \left\langle h'_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in R', t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle \leq \mathbf{G}'$ ist isomorph zu ${}^{\mathbb{Z}R'^\vee}/_{(q-1)\mathbb{Z}R'^\vee}$. Der dazugehörige Isomorphismus

$$\omega' : T' \to {}^{\mathbb{Z}R'^\vee}/_{(q-1)\mathbb{Z}R'^\vee}$$

wird durch

$$k_\alpha(\zeta) \mapsto \alpha + (q-1)\mathbb{Z}R'^\vee$$

mit einer primitiven $(q-1)$-ten Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{F}^\star$ definiert. Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{Z}R'^\vee \setminus ((q-1)\mathbb{Z}R'^\vee)$ mit $\omega'(h) = v + (q-1)\mathbb{Z}R'^\vee$.

Analog ist auch die Gruppe $T := \left\langle h_\alpha(t) \middle|\, \alpha \in R, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle \leq \mathbf{G}$ isomorph zu ${}^{\mathbb{Z}R^\vee}\!/(q-1)\mathbb{Z}R^\vee$. Durch

$$\omega : T \to {}^{\mathbb{Z}R^\vee}\!/(q-1)\mathbb{Z}R^\vee \text{ mit } k_\alpha(\zeta) \mapsto \alpha + (q-1)\mathbb{Z}R^\vee$$

wird ein Isomorphismus definiert. Aus $\omega(\iota(h)) = v + (q-1)\mathbb{Z}R^\vee$ folgt mit der Voraussetzung $\iota(h) \neq 1$.

Also ist ι eine Bijektion unter den genannten Voraussetzungen. □

Für spätere Zwecke benötigen wir noch folgende wohlbekannte Aussage:

Lemma 2.1.10. *Seien $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe zu einem irreduziblen Wurzelsystem R über $\mathbb{F}$ und R_F das ausgezeichnete Fundamentalsystem von R.*

Für $\mathbf{X}_\alpha := \langle x_\alpha(t) \,|\, t \in \mathbb{F} \rangle$ ($\alpha \in R$) gilt

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \pm\alpha \in R_F \rangle .$$

Beweis. Aus der Definition der Elemente $n_\alpha(t)$ ergibt sich $n_\alpha(t) \in \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R_F \rangle$ für alle Elemente $\alpha \in R_F$ und $t \in \mathbb{F}^\star$.

Gemäß [Kan01, 4-1] erfüllt die Coxetergruppe W zu R die Gleichung $W = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in R_F \rangle$. Zudem gibt es zu jeder Wurzel $\alpha \in R$ eine einfache Wurzel $\alpha_0 \in R_F$ und $w \in W$ mit $w^{-1}(\alpha_0) = \alpha$. Für $n \in \langle n_\alpha(t) \,|\, \alpha \in R_F, t \in \mathbb{F}^\star \rangle$ mit $\rho(n) = w$ ergibt sich mit der Relation 2.1.6 (a) dann

$$(\mathbf{X}_{\alpha_0})^n = \mathbf{X}_\alpha.$$

Dies zeigt $\mathbf{X}_{\alpha_0} \leq \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \pm\alpha \in R_F \rangle$ für alle $\alpha_0 \in R$ und beweist wegen $\mathbf{G} = \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R \rangle$ die Behauptung. □

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit den Eigenschaften universeller Chevalleygruppen, wenn der zugrunde liegende Körper algebraisch abgeschlossen ist.

2.2 Universelle Chevalleygruppen und endliche reduktive Gruppen

Universelle Chevalleygruppen sind nicht nur endlich präsentierte Gruppen, sondern auch reduktive Gruppen. Diese Eigenschaft erläutern wir in diesem Abschnitt.

Bemerkung 2.2.1. *Seien $\mathbb{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, R ein irreduzibles Wurzelsystem und W die zu R gehörende Coxetergruppe. Für eine damit definierte universelle Chevalleygruppe $\mathbf{G}$ gilt dann:*

(a) *Die Gruppe* $\mathbf{G}$ *ist eine halbeinfache, einfach-zusammenhängende, algebraische Gruppe.*

(b) *Die abelsche Gruppe* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{F}^\star, \alpha \in R\rangle$ *ist ein maximaler Torus von* $\mathbf{G}$.

(c) $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) = \mathbf{N} := \langle n_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{F}^\star, \alpha \in R\rangle$.

(d) *Der durch*

$$n_\alpha(t) \mapsto w_\alpha \in W \text{ für } \alpha \in R$$

definierte Homomorphismus $\rho : \mathbf{N} \to W$ *ist surjektiv und hat* $\mathbf{T}$ *als Kern.*

(e) *Die Wurzelgruppen von* $\mathbf{G}$ *bezüglich* $\mathbf{T}$ *sind* $\mathbf{X}_\alpha := \langle x_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{F}\rangle$ $(\alpha \in R)$.

In den folgenden Kapiteln stehen $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}$, W, $\rho : \mathbf{N} \to W$ und $\mathbf{X}_\alpha$ bei gegebener Gruppe $\mathbf{G}$ stets für die hier definierten Gruppen.

Beweis. Gemäß [Ste68b, 5,Theorem 6] ist $\mathbf{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe. Aus [Ste68b, 5,Theorem 6] gehen auch (b) und (c) hervor. Die Gruppe ist laut [GLS98, 1.12.4] einfach-zusammenhängend. Zwar stimmt die in [GLS98, 1.1.0.5] angegebene Definition nicht mit der aus [Car85, 1.11] überein, aber aus [GLS98, 1.14.1 (a)] folgt, dass das Charaktergitter X mit $\Omega := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})$ übereinstimmt. Dies ist die Definition aus [Car85].

Die Definition von ρ in (d) folgt dem Beweis aus [Car72, S.193]. Gemäß [Ste68b, S.60] sind die Gruppen $\mathbf{X}_\alpha$ $(\alpha \in R)$ die eindeutigen minimalen unipotenten Untergruppen, die von $\mathbf{T}$ normalisiert werden. □

Daraus lässt sich das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ ablesen.

Korollar 2.2.2. *Die Gruppe* $\mathbf{G}$ *besitzt das Wurzeldatum*

$$(\Omega, R, \mathbb{Z}R^\vee, R^\vee)$$

mit $\Omega := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})$.

Beweis. Die universellen Chevalleygruppen sind gemäß der Bemerkung 2.2.1 einfach-zusammenhängend. Aus [Car72, S.25] ist in diesem Fall

$$Y = \mathbb{Z}R^\vee \text{ und } X = \Omega$$

bekannt. □

Daraus folgt, dass der Isomorphietyp von $\mathbf{G}$ nur von $\mathbb{F}$ und R, nicht aber von ϵ abhängt.

Lemma 2.2.3. *Eine universelle Chevalleygruppe zu* R *über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* $\mathbb{F}$ *ist als algebraische Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Dies folgt aus der Bemerkung 2.2.1 zusammen mit [Spr98, 9.6.2]. □

Auf diesen Gruppen operieren im Wesentlichen nur drei Arten von Frobeniusabbildungen. Dabei verwenden wir die Definition von Frobeniusendomorphismen und Frobeniusabbildungen aus [Car85, S.31].

Bemerkung 2.2.4. *Seien p eine Primzahl,* $\mathbf{G}$ *wie eben eine universelle Chevalleygruppe über* $\overline{\mathbb{F}}_p$*,* q *eine Potenz von* p *und* R_F *das ausgezeichnete Fundamentalsystem von* R*.*

(a) Durch

$$F : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \quad \text{mit} \quad x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(t^q) \quad \text{für } \alpha \in R$$

wird eine Frobeniusabbildung, der so genannte Standard-Frobeniusendomorphismus zu q*, auf* $\mathbf{G}$ *definiert. Weiter gilt* $\mathbf{G}^F := \{x \in \mathbf{G} \mid x^F = x\} = \mathcal{G}(\mathbb{F}_q)$*, wobei* $\mathcal{G}(\mathbb{F}_q)$ *für die universelle Chevalleygruppe zu* R *und* $\mathbb{F}_q$ *steht, die mit der gleichen* ϵ*-Abbildung wie* $\mathbf{G}$ *definiert ist.*

(b) Sei σ *ein längenerhaltender Automorphismus von* R*, der* R_F *stabilisiert. Dann wird durch*

$$F : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \quad \text{mit } x_\alpha(t) \mapsto x_{\sigma(\alpha)}(t^q) \text{ für } \alpha \text{ oder } -\alpha \in R_F$$

eine Frobeniusabbildung zur Primzahlpotenz q *gegeben.*

(c) Seien R *ein Wurzelsystem vom Typ* B_2*,* G_2 *oder* F_4 *und* σ *ein nicht längenerhaltender Automorphismus von* R_F *und damit von* R*. Weiter seien* $p \in \{2, 3\}$ *wie in 1.1.2 durch den Typ vorgegeben und* $a \in \mathbb{N}$*. Dann wird durch*

$$x_\alpha(t) \mapsto \begin{cases} x_{\sigma(\alpha)}(t^{p^{a+1}}) & \text{für jede kurze Wurzel } \alpha, \\ x_{\sigma(\alpha)}(t^{p^a}) & \text{für jede lange Wurzel } \alpha \end{cases}$$

ein Endomorphismus F *auf* $\mathbf{G}$ *definiert. Die Gruppe* $\mathbf{G}^F$ *nennt man Suzukigruppe im Fall* B_2 *bzw. Reegruppe in den beiden anderen Fällen. Sie werden mit* ${}^2\mathsf{B}_2(p^{2a+1})$ *bzw.* ${}^2\mathsf{G}_2(p^{2a+1})$ *bzw.* ${}^2\mathsf{F}_4(p^{2a+1})$ *bezeichnet.*

Dies sind bis auf innere Automorphismen von $\mathbf{G}$ *die einzigen Frobeniusabbildungen dieser Gruppen.*

Beweis. In [Ste68a, 11.6] wird $\mathbf{G}^F$ für einen Standard-Frobeniusendomorphismus beschrieben und wurden die Endomorphismen von $\mathbf{G}$ bestimmt, bei denen die Fixpunktgruppe endlich und das zugehörige Wurzelsystem irreduzibel ist. Dabei ergeben sich bis auf innere Automorphismen von $\mathbf{G}$ nur die eben angegebenen. Offensichtlich ist stets eine Potenz der angegebenen Automorphismen ein Standard-Frobeniusendomorphismus. Daher sind diese Abbildungen Frobeniusabbildungen. □

Aus (a) folgt, dass $\mathcal{G}(\mathbb{F}_q)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Die eben in (b) vorgestellten Frobeniusendomorphismen können wir so faktorisieren, dass die entstehenden Abbildungen die Bedingungen aus der Definition 1.3.1 erfüllen.

Lemma 2.2.5. *Seien $\mathbb{F}$, $\mathbf{G}$, q, σ und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ wie in Bemerkung 2.2.4 (b) und F_0 der Standard-Frobeniusendomorphismus von $\mathbf{G}$ zu q. Durch*

$$\Gamma : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ mit } x_\alpha(t) \mapsto x_{\sigma(\alpha)}(t) \text{ für alle } \alpha \in R, t \in \mathbb{F}$$

wird ein Automorphismus von $\mathbf{G}$ mit $F = F_0 \circ \Gamma$ definiert.

Beweis. Gemäß [Car72, 12.2.3] ist Γ ein wohldefinierter Automorphismus. Aus der Definition ergibt sich $F = F_0 \circ \Gamma$ auf den Gruppen $\mathbf{X}_\alpha$ für $\pm\alpha \in R_F$. Mit dem Lemma 2.1.10 folgt daraus die Behauptung. □

Wir bestimmen nun für die verschiedenen Frobeniusendomorphismen den Automorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Bemerkung 2.2.6. *Seien $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe wie in Bemerkung 2.2.1, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ eine Frobeniusabbildung aus 2.2.4 (a) oder (b) und Y das Kocharaktergitter des Torus $\mathbf{T}$ aus der Bemerkung 2.2.1. Dann gilt für den gemäß 1.1.3 definierten Automorphismus ϕ von Y:*

(a) Ist F ein Standard-Frobeniusendomorphismus, so gilt

$$\phi = \mathrm{id}_Y .$$

Die zugehörige generische Gruppe ist dann

$$\mathbb{G} = (\Omega, R, \mathbb{Z}R^\vee, R^\vee, W).$$

(b) Wird F gemäß Bemerkung 2.2.4 (b) mit $\sigma \in \mathrm{Aut}(R_F)$ definiert, so gilt für ϕ die Gleichung

$$\phi(\alpha^\vee) = \sigma(\alpha)^\vee \text{ für alle } \alpha \in R_F.$$

Beweis. Der Frobeniusendomorphismus F operiert auf dem Gitter $\mathbb{Z}R^\vee$ durch Multiplikation mit q und bei (b) anschließend durch den von σ induzierten Basiswechsel. Daraus ergeben sich die Aussagen. □

Die vorangegangene Bemerkung zeigt auch, dass die Zerlegung von F aus Lemma 2.2.5 die Bedingungen aus 1.3.1 erfüllt. Aus den Ordnungen für universelle Chevalleygruppen ergeben sich folgende Aussagen über das Ordnungspolynom.

Bemerkung 2.2.7. *Seien $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ aus Bemerkung 2.2.4 (a), $\mathbb{G}$ die generische Gruppe von $(\mathbf{G}, F)$ mit $\phi = \mathrm{id}_Y$, W die Weylgruppe von $\mathbf{G}$ und $d \in \mathbb{N}$.*

(a) Dann stimmt $a(d)$ mit der Anzahl der Spiegelungsgrade von W überein, die von d geteilt werden.

(b) Mit $\mathbb{G}^-$ wird die generische Gruppe bezeichnet, die dadurch entsteht, dass $\phi = \mathrm{id}_Y$ durch $-\mathrm{id}_Y$ in $\mathbb{G}$ ersetzt wird. Für diese gilt

$$\left|\mathbb{G}^-\right|(q) = \left||\mathbb{G}|(-q)\right| \text{ für alle Primzahlpotenzen } q$$

und

$$a_{\mathbb{G}^-}(d) = \begin{cases} a_{\mathbb{G}}(2d) & 2 \nmid d, \\ a_{\mathbb{G}}(\frac{d}{2}) & 2 \Big| d \text{ und } 4 \nmid d, \\ a_{\mathbb{G}}(d) & 4 \Big| d. \end{cases}$$

(Der Index bei $a(d)$ gibt jeweils an, auf welche generische Gruppe $a(d)$ sich bezieht.)

Beweis. Das Ordnungspolynom einer generischen Gruppe $\mathbb{G}$ mit $\phi = \mathrm{id}_Y$ kann aus den Ordnungen der zugehörigen endlichen Gruppen abgelesen werden. Dabei nützt die Aussage $|\mathbb{G}(q)| = |\mathbb{G}|(q)$ aus Bemerkung 1.2.1. Nach [Car72, 9.4.10] ist

$$|\mathbb{G}| = x^N \prod_{d_i \text{ Spiegelungsgrad von } W} (x^{d_i} - 1).$$

Also ist $a(d)$ die Anzahl der Spiegelungsgrade, die von d geteilt werden.

Nach [BM92, Bemerkung bei 2.2] hängen $|\mathbb{G}^-|$ und das ursprüngliche Ordnungspolynom $|\mathbb{G}|$ in der angegebenen Weise zusammen. Daraus folgen zusammen mit [BM97, App. 2] die Werte von $a(d)$. □

Dies sind die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften der generischen Gruppen zu universellen Chevalleygruppen.

2.3 Die erweiterte Weylgruppe V

In diesem Abschnitt wird die Untergruppe $V \leq \mathbf{N}$ eingeführt und ihre Eigenschaften beschrieben. Diese Gruppe V bildet ein Supplement zu $\mathbf{T}$ in $\mathbf{N}$, d.h. sie erzeugt gemeinsam mit $\mathbf{T}$ ganz $\mathbf{N}$. Später wird diese Gruppe zentrale Bedeutung bei der Konstruktion der Sylownormalisatoren in den Kapiteln 4 und 5 haben.

Lemma 2.3.1. *Seien $\mathbb{F}$ ein Körper, $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ ein Fundamentalsystem von R, $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\mathbb{F}$, W die Coxetergruppe zu R mit den Erzeugern s_i $(1 \leq i \leq l)$ und $m_{ij} := o(s_i s_j)$ $(1 \leq i, j \leq l)$ die Ordnung von $s_i s_j$. Mit $n_i := n_{\alpha_i}(1) \in \mathcal{G}(\mathbb{F})$ und $h_i := h_{\alpha_i}(-1) = n_i^2 \in \mathcal{G}(\mathbb{F})$ seien*

$$V := \langle n_i \,|\, 1 \leq i \leq l \rangle \text{ und } H := \langle h_i \,|\, 1 \leq i \leq l \rangle .$$

Die Gruppen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{T}$ seien wie in Bemerkung 2.2.1 definiert. Dann gelten:

(a) $\mathbf{N} = \langle V, \mathbf{T} \rangle$ *und*

$$\mathbf{T} \cap V = H = \langle h_1 \rangle \times \ldots \times \langle h_l \rangle \,.$$

(b) In ungerader Charakteristik ergeben die Relationen

$$\begin{aligned} h_i h_j &= h_j h_i, \\ h_i^2 &= 1, \\ \mathrm{prod}(n_i, n_j, m_{ij}) &= \mathrm{prod}(n_j, n_i, m_{ij}) \textit{ mit } \mathrm{prod}(n_i, n_j, m_{ij}) := \underbrace{n_i n_j n_i \cdots}_{m_{ij}\textit{-mal}}, \\ h_i^{n_j} &= h_j^{A_{i,j}} h_i \textit{ für alle } 1 \leq i, j \leq l \textit{ mit } h_i := n_i^2 \end{aligned}$$

eine Präsentation von V *auf den Erzeugern* $\{ n_i \mid 1 \leq i \leq l \}$.

(c) Der Isomorphietyp von V *ist unabhängig von* $\mathbb{F}$*, falls die Charakteristik von* $\mathbb{F}$ *ungerade ist.*

Die Gruppe V heißt die *erweiterte Weylgruppe* von $\mathbf{G}$. Als *die erweiterte Weylgruppe zu* R bezeichnen wir die endlich präsentierte Gruppe aus (b).

Beweis. Nach Bemerkung 2.2.1 wird W von $\rho(n_i)$ $(1 \leq i \leq l)$ erzeugt, also gilt $\rho(V) = W$. Aus $\rho(\mathbf{N}) = W$ und $\ker(\rho) = \mathbf{T}$ folgt $\mathbf{N} = \langle \mathbf{T}, V \rangle$. Als Coxetergruppe besitzt W laut [GP00, 1.2.7] eine Präsentation durch die Relationen

$$\mathrm{prod}(s_i, s_j, m_{ij}) = \mathrm{prod}(s_j, s_i, m_{ij}) \text{ und } s_i^2 = 1 \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq l.$$

Rechnungen für die verschiedenen möglichen Werte von $A_{i,j}$ beweisen die Relation

$$\mathrm{prod}(n_i, n_j, m_{ij}) = \mathrm{prod}(n_j, n_i, m_{ij}) \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq l.$$

Die Gruppe ${}^{V}\!/H = {}^{V}\!/\langle n_i^2 \mid 1 \leq i \leq l \rangle$ muss eine Faktorgruppe von W sein, da diese Gruppe die W definierenden Relationen erfüllt. Aus $H \leq \ker(\rho)$ und $\rho(V) = W$ folgt ${}^{V}\!/H \cong W$. Dies beweist zusammen mit 2.1.6 (h) die Aussage in (a).

Für (b) prüfen wir die verbleibenden Relationen mit Hilfe von Satz 2.1.6 nach. Wegen $\rho(V) = W$ und

$$|\ker(\rho) \cap V| = 2^l$$

hat V die Ordnung $|W| \, 2^l$.

Wir betrachten die Relationen für die endlich präsentierte Gruppe

$$\langle n_i \mid 1 \leq i \leq l \rangle / \langle h_i \mid 1 \leq i \leq l \rangle$$

und erhalten die definierenden Relationen für W. Also hat die durch die Präsentation definierte Gruppe eine Ordnung, die $|W|\,2^l$ teilen muss. Daraus folgt (b).

Bei der Präsentation in Teil (b) sind die Konstanten A_{ij} unabhängig von der Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers und damit auch der Isomorphietyp von V. Dies beweist den Teil (c). □

Diese Gruppe wurde in der Arbeit [Tit66] eingeführt. Aufgrund ihrer Präsentation hat sie natürlich Verbindungen zur Zopfgruppe und zur Weylgruppe.

Lemma 2.3.2 (Verbindung zwischen V und $\mathbf{B}$). *Seien $\mathbf{B}$ die zu R gehörende Zopfgruppe mit den Erzeugern $\{\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_l\}$, R_F das ausgezeichnete Wurzelsystem von R und $\{s_1, \dots, s_l\}$ die Erzeuger von W mit $s_i := w_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq l)$. Weiter sei w_0 das längste Element in W.*

(a) Seien $\ell : W \to \mathbb{Z}$ die Abbildung die $w \in W$ die Länge eines reduzierten Ausdrucks zuweist und $\mathrm{r} : W \to \mathbf{B}$ die Abbildung mit

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(w)}} \mapsto \mathrm{s}_{i_1} \cdots \mathrm{s}_{i_{\ell(w)}} \in \mathbf{B},$$

falls $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(w)}}$ ein reduzierter Ausdruck ist. Für alle $w, w' \in W$ mit $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$ gilt

$$\mathrm{r}(w)\,\mathrm{r}(w') = \mathrm{r}(ww').$$

(b) Dann wird durch

$$\mathrm{s}_i \mapsto n_i$$

ein Epimorphismus $\tau : \mathbf{B} \to V$ definiert, der

$$\rho \circ \tau \circ \mathrm{r} = \mathrm{id}_W$$

erfüllt.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "\tau"] & V \arrow[r, "\rho"] & W \arrow[ll, bend left, "\mathrm{r}"] \end{tikzcd}$$

(c) Für jede Fundamentalspiegelung $s_i \in W$ und $\mathbf{w}_0 := \mathrm{r}(w_0)$ gilt

$$n_i^{\tau(\mathbf{w}_0)} = \tau(\mathrm{r}(s_i^{w_0})).$$

Beweis. Die Abbildung r aus [GP00, 4.1.1] ist wegen des Satzes von Matsumoto [GP00, 1.2.2] wohldefiniert. Aus der Definition folgt die angegebene Gleichung

$$\mathrm{r}(w)\,\mathrm{r}(w') = \mathrm{r}(ww') \text{ für } w, w' \in W \text{ mit } \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww').$$

Wegen der Relation

$$\mathrm{prod}(n_i, n_j, m_{ij}) = \mathrm{prod}(n_j, n_i, m_{ij}) \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq l$$

in V ist auch der Homomorphismus τ wohldefiniert. Aus den Definitionen der Abbildungen ergibt sich die Aussage $\rho \circ \tau \circ \mathrm{r} = \mathrm{id}_W$.

Der Teil (c) folgt aus der analogen Aussage für die Erzeuger s_i, die in [GP00, 4.1.9] bewiesen wurde. □

Bei der Definition der generischen Gruppe wird ϕ als Automorphismus des Kocharaktergitters definiert. Von diesem lassen sich noch weitere Automorphismen ableiten.

Definition und Satz 2.3.3. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe mit dem ausgezeichneten Fundamentalsystem* R_F*,* σ' *ein längenerhaltender Automorphismus von* R*, der* R_F *stabilisiert, und* $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *ein davon abgeleiteter Frobeniusendomorphismus aus 2.2.4 (b) zur Primzahlpotenz* q*. Aus dem von* F *auf dem Kocharaktergitter* Y *von* $\mathbf{T}$ *induzierten Automorphismus* ϕ *lassen sich folgende Automorphismen ableiten:*

(a) $\phi_{R_F} := \sigma'\rceil_{R_F}$ *mit*

$$\phi_{R_F} sigma'(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)} \textit{ für alle } 1 \leq i \leq l \textit{ und ein } \sigma \in \mathrm{S}_l,$$

(b) $\phi_R \in \mathrm{Aut}(R)$ *mit*

$$\phi_R(\alpha) = \phi(\alpha^\vee)^\vee \textit{ für alle } \alpha \in R,$$

(c) $\phi_W \in \mathrm{Aut}(W)$ *mit*

$$s_i^{\phi_W} = s_{\sigma(i)} \textit{ für alle } 1 \leq i \leq l,$$

(d) $\phi_{\mathbf{B}} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ *mit*

$$\mathrm{s}_i^{\phi_{\mathbf{B}}} = \mathrm{s}_{\sigma(i)} \textit{ für alle } 1 \leq i \leq l,$$

(e) $\phi_V \in \mathrm{Aut}(V)$ *mit*

$$n_i^{\phi_V} = n_{\sigma(i)} \textit{ für alle } 1 \leq i \leq l,$$

(f) $\phi_{\mathbf{T}} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ *mit*

$$h_\alpha(t)^{\phi_{\mathbf{T}}} = h_{\phi_R(\alpha)}(t) \textit{ für alle } \alpha \in R, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star,$$

(g) $\phi_{\mathbf{N}} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{N})$ *mit*

$$(vt)^{\phi_{\mathbf{N}}} = v^{\phi_V} t^{\phi_{\mathbf{T}}} \text{ für alle } v \in V, t \in \mathbf{T}.$$

Wir werden jeden dieser Automorphismen mit ϕ bezeichnen, falls aus dem Zusammenhang hervorgeht, welcher gemeint ist.

Beweis. Der Frobeniusendomorphismus wird von einem längenerhaltenden Graphautomorphismus des zu R_F gehörenden Dynkindiagramms induziert. Die ganzen Zahlen $m_{i,j}$ aus Lemma 2.3.1 zu R bzw. R_F erfüllen daher

$$m_{i,j} = m_{\sigma(i),\sigma(j)} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq j.$$

Somit permutiert ϕ_W die Erzeuger der Weylgruppe so, dass die definierenden Relationen von W erhalten bleiben. Für alle $1 \leq i \leq j$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{prod}(\phi_W(s_i), \phi_W(s_j), m_{\sigma(i),\sigma(j)}) &= \phi_W\left(\mathrm{prod}(s_i, s_j, m_{i,j})\right) \\ &= \phi_W\left(\mathrm{prod}(s_j, s_i, m_{i,j})\right) \\ &= \mathrm{prod}(\phi_W(s_j), \phi_W(s_i), m_{\sigma(i),\sigma(j)}) \end{aligned}$$

Daher wird durch

$$s_i^{\phi_W} = s_{\sigma(i)} \text{ für alle } 1 \leq i \leq l$$

ein Automorphismus von W definiert.

In $\mathbf{B}$ permutiert $\phi_{\mathbf{B}}$ die Erzeuger s_i. Dabei gilt für die Bilder ebenfalls

$$\mathrm{prod}(\phi_{\mathbf{B}}(\mathrm{s}_i), \phi_{\mathbf{B}}(\mathrm{s}_j), m_{\sigma(i),\sigma(j)}) = \mathrm{prod}(\phi_{\mathbf{B}}(s_j), \phi_{\mathbf{B}}(s_i), m_{\sigma(i),\sigma(j)}) \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq l.$$

Also gibt es einen Automorphismus $\phi_{\mathbf{B}}$ von $\mathbf{B}$, der so auf den Elementen s_i operiert.

Mittels des Epimorphismus τ erhalten wir aus $\phi_{\mathbf{B}}$ den Automorphismus ϕ_V. Dieser operiert auf den Erzeugern von V auf die oben angegebene Weise. Zudem stabilisiert $\phi_{\mathbf{B}}$ die Gruppe $\ker(\tau)$, die wir mit Hilfe der Präsentation aus 2.3.1 ermitteln.

Die Relation 2.1.6 (g) bleibt unter der Operation von $\phi_{\mathbf{T}}$ erhalten. Somit gibt es einen Automorphismus von $\mathbf{T}$ mit den angegebenen Eigenschaften.

Die Abbildungen ϕ_V und $\phi_{\mathbf{T}}$ induzieren auf $H = \mathbf{T} \cap V$ den gleichen Automorphismus, was wir leicht für die Elemente h_i nachrechnen. Daher ist $\phi_{\mathbf{N}}$ wohldefiniert. Anhand der Rechenregeln aus Satz 2.1.6 können wir auch die weiteren Automorphismuseigenschaften nachrechnen. □

Vor allem den Automorphismus $\phi_{\mathbf{N}}$ werden wir wegen der folgenden Eigenschaften benutzen.

Lemma 2.3.4. *Seien* $\mathbf{G}$ *ein universelle Chevalleygruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu einem irreduziblen Wurzelsystem* R *mit einem Fundamentalsystem* R_F*,* σ *ein längenerhaltender Automorphismus von* R_F*,* F *der damit konstruierte Frobeniusendomorphismus* $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *aus 2.2.4 (b),* ϕ *der von* F *auf dem Kocharaktergitter induzierte Automorphismus aus der Bemerkung 2.2.6 und* Γ *der Automorphismus von* $\mathbf{G}$ *aus Lemma 2.2.5. Dann gilt* $\Gamma\rceil_{\mathbf{N}} = \phi_{\mathbf{N}}$.

Beweis. Dies zeigen Rechnungen mit den $\mathbf{N}$ erzeugenden Elementen. □

Wir werden in Satz 2.3.10 sehen, dass reguläre Elemente und reguläre Zahlen von W in enger Verbindung mit der Theorie der Sylowtori stehen. Daher wiederholen wir, wie reguläre Elemente und Zahlen definiert sind.

Definition 2.3.5 (Reguläre Zahl). Seiem W eine reelle Spiegelungsgruppe auf dem Vektorraum $\mathcal{V}$ und $\phi \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ eine lineare Abbildung mit $\phi W \phi^{-1} = W$. Dann heißt ein Vektor $y \in \mathcal{V}$ *regulär*, falls er in keiner Spiegelungshyperebene von W liegt. Ein Element w bzw. $w\phi$, das einen regulären Vektor als Eigenvektor in $\mathcal{V}$ besitzt, wird ebenfalls *regulär* genannt. Die Ordnung eines solchen Elements ist dann eine *reguläre Zahl* bzw. eine *ϕ-reguläre Zahl* von W bzw. $W\phi$.

Einfache Eigenschaften regulärer Elemente sind:

Lemma 2.3.6. *Sei* $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ *eine generische Gruppe.*

(a) Für jedes reguläre Element $w\phi \in W\phi$ *gilt*

$$\dim \overline{Y}(w\phi, \zeta) = a(d)$$

mit $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$*,* $d = o(w\phi)$ *und eine beliebige* d*-te Einheitswurzel* ζ*, wobei* $\overline{Y}(w\phi, \zeta)$ *für den Eigenraum von* $w\phi$ *in* $\overline{Y}$ *zum Eigenwert* ζ *steht.*

(b) Ist d *eine reguläre Zahl für* $W\phi$ *und* $w\phi \in W\phi$ *ein Element mit*

$$\dim \overline{Y}(w\phi, \zeta) = a(d),$$

so ist $w\phi$ *ein reguläres Element.*

(c) Ist w *ein reguläres Element von* $W\phi$*, so auch die Elemente* $(w\phi)^i$ *(*$i \in \mathbb{N}$*).*

Beweis. Zum Beweis von (a) betrachten wir $\dim \overline{Y}(w\phi, \zeta)$ für ein reguläres Element $w\phi$ mit der Ordnung d. In [Spr74] wird $a(d)$ mit Hilfe der verallgemeinerten Grade von $W\phi$ bzw. $\mathbb{G}$ ermittelt. Die dort angegebene Definition stimmt mit jener in [BM92, 1.10] überein. Daher können wir die Aussagen in [Spr74, 4.2 bzw. 6.4] verwenden. Demzufolge gilt

$$\dim \overline{Y}(w\phi, \zeta) = a(d).$$

Da d eine reguläre Zahl ist, existiert ein reguläres Element $w'\phi \in W\phi$ mit der Ordnung d. Mit Hilfe von [Spr74, 4.2.(iv) und 6.4.(iv)] folgt daraus, dass $w\phi$ und $w'\phi$ in W konjugiert sind. Also ist $w\phi$ ein reguläres Element.

Als reguläres Element besitzt $w\phi$ einen regulären Eigenvektor $y \in \overline{Y}$. Dieser ist auch für alle Elemente aus $\langle w\phi \rangle$ ein Eigenvektor. Somit sind alle Elemente aus $\langle w\phi \rangle$ regulär. □

In der Literatur, z.B. in [LS99], wird eine weitere definierende Eigenschaft benutzt.

Bemerkung 2.3.7 (Weitere definierende Eigenschaft von regulär). *Seien w ein Element der Ordnung d und $\mathcal{V}'$ der Eigenraum von w zu einer primitiven d-ten Einheitswurzel. Genau dann ist w regulär, wenn die Gruppe*

$$\{ w' \in W \mid w'(x) = x \textit{ für alle } x \in \mathcal{V}' \}$$

trivial ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass w regulär ist. Dann gibt es einen regulären Vektor y, der ein Eigenvektor von w ist. Dieser ist in keiner Spiegelungshyperebene enthalten und somit gibt es keine Spiegelung in W, die diesen Vektor stabilisiert. Laut [Ste64] ist die Gruppe

$$\{ w' \in W \mid w'(x) = x \text{ für alle } x \in \mathcal{V}' \}$$

trivial, da eine solche Gruppe von den in ihr enthaltenen Spiegelungen erzeugt wird.

Für die umgekehrte Richtung sei die Gruppe $\{ w' \in W \mid w'(x) = x \text{ für alle } x \in \mathcal{V}' \}$ trivial. Also gibt es zu jeder Wurzel $\alpha \in R$ einen Vektor $x \in \mathcal{V}'$ mit $w_\alpha(x) \neq x$. Somit ist $\alpha^\perp \cap \mathcal{V}'$ für jede Wurzel $\alpha \in R$ ein echter Untervektorraum von $\mathcal{V}'$ und die Menge

$$\mathcal{V}' \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in R} (\alpha^\perp \cap \mathcal{V}') \right),$$

die definitionsgemäß nur aus regulären Vektoren besteht, nichtleer. □

Wir geben nun die regulären Zahlen verschiedener Coxetergruppen an.

2.3.8 (Reguläre Zahlen bei klassischen Typen). Sowohl in [Spr74, Abschnitt 5] als auch in [BM97] befindet sich eine Liste der regulären Zahlen für viele Coxetergruppen W bzw. Nebenklassen $W\phi$. In der folgenden Tabelle 2.1, in der die regulären Zahlen zusammengestellt sind, bedeuten ${}^2\mathsf{D}_l$ bzw. ${}^2\mathsf{A}_l$, dass ϕ die Ordnung 2 besitzt.

Folgende Bemerkung stellt eine Verbindung zwischen regulären Elementen und Sylowtwists her.

Typ	reguläre Zahlen d für W bzw. $W\phi$
A_{l-1}	$d\big\|(l-1)$ oder $d\big\|l$
${}^2\mathsf{A}_{l-1}$ $(2\big\|l)$	$d\big\|l$ oder $2\big\|d$ und $d\big\|2(l-1)$
${}^2\mathsf{A}_{l-1}$ $(2\nmid l)$	$d\big\|(l-1)$ oder $2\big\|d$ und $d\big\|2l$
B_l, C_l	$d\big\|2l$
D_l	$d\big\|2(l-1)$ oder $d\big\|l$
${}^2\mathsf{D}_l$	$d\big\|2(l-1)$ oder $d\big\|2l$ mit $2\nmid\frac{2l}{d}$

Tabelle 2.1: Reguläre Zahlen bei klassischen Typen

Bemerkung 2.3.9. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine Chevalleygruppe über* $\overline{\mathbb{F}}_q$*,* $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *eine Frobeniusabbildung aus Bemerkung 2.2.4,* $\mathbb{G}$ *die zugehörige allgemeine generische Gruppe mit Weylgruppe* W *und Automorphismus* ϕ *und* $w\phi \in W\phi$ *ein reguläres Element.*

Weiter sei $n \in \mathbf{N}$ *ein Element mit*

$$\rho(n) = w,$$

wobei $\mathbf{N}$ *und* ρ *wie in 2.2.1 definiert sind. Dann ist* $n\phi$ *ein* d*-Sylowtwist für* $(\mathbf{G}, F)$*, wobei* d *die Ordnung von* $w\phi$ *ist.*

Beweis. Aus Lemma 2.3.6 (a) ist

$$\dim \overline{Y}(w\phi, \zeta) = a(d)$$

für jede primitive d-te Einheitswurzel ζ bekannt.

Aus den Gleichungen $F = F_0 \circ \Gamma$ und $\Gamma\rceil_{\mathbf{N}} = \phi_{\mathbf{N}}$, die in Lemma 2.2.5 bzw. in Lemma 2.3.4 bewiesen wurden, ergibt sich, dass die Endomorphismen die in der Definition 1.3.1 geforderten Eigenschaften besitzen. Zusammen mit den obigen Ausführungen zeigt dies, dass $n\phi$ ein d-Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$ ist. $\square$

Die regulären Zahlen sind wegen der folgenden Eigenschaft in dieser Arbeit wichtig.

Satz 2.3.10. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ eine allgemeine generische Gruppe und $d \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Alle d-Sylowlevigruppen von $\mathbb{G}$ sind Tori.

(ii) Die Zahl d ist regulär für die Nebenklasse $W\phi$.

Eine Zahl d mit dieser Eigenschaft nennen wir daher auch *reguläre Zahl für* $\mathbb{G}$. Hat die reduktive Gruppe $(\mathbf{G}, F)$ das vollständige Wurzeldatum $\mathbb{G}$, so nennen wir d auch *reguläre Zahl für* $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Wir beginnen mit der Beweisrichtung „(ii)$\Rightarrow$ (i)“ und nehmen an, dass d regulär für $W\phi$ ist. Dann gibt es ein reguläres Element $w\phi \in W\phi$ der Ordnung d. Für $n \in \rho^{-1}(w)$ ist $n\phi$ gemäß der Bemerkung 2.3.9 ein d-Sylowtwist.

Für eine primitive d-te Einheitswurzel ζ enthält der Eigenraum von $w\phi$ zum Eigenwert ζ einen regulären Vektor y, der in keiner Spiegelungshyperebene liegt. Also enthält das vollständige Wurzeldatum der zugehörigen Sylowlevigruppe keine Wurzel, was „(ii)$\Rightarrow$ (i)“ zeigt.

Wir beweisen nun die umgekehrte Richtung. Sei nun $d \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die alle d-Sylowlevigruppen Tori sind, Y' das Kocharaktergitter eines d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ und $w\phi$ ($w \in W$) der Automorphismus des zugehörigen vollständigen Wurzeldatums. Gemäß der in Lemma 1.3.4 angegebenen Formel für $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ liegt Y' in keiner Spiegelungshyperebene, da sonst die Wurzelmenge nichtleer wäre. Die Menge

$$\{w' \in W \mid w'(y) = y \text{ für alle } y \in Y' \otimes \mathbb{C}\}$$

besteht laut [Ste64] daher nur aus dem neutralen Element von W. Sei ζ wie eben eine primitive d-te Einheitswurzel. Der Zentralisator des Eigenraums $\mathcal{V}' := (Y' \otimes \mathbb{C})(w\phi, \zeta)$ ist daher ebenfalls trivial. Gemäß Bemerkung 2.3.7 ist d eine reguläre Zahl für $W\phi$. □

Für die Konstruktion 1.3.5 benötigen wir später bei regulärem d Gruppen $U \leq \mathbf{N}$ mit $\rho(U) = \mathrm{C}_W(w\phi)$. Also ist ein Sylowtwist mit der Eigenschaft $\rho(V^{vF}) = \mathrm{C}_W(w\phi)$ besonders geeignet. Solche Sylowtwists konstruieren wir mit Hilfe so genannter guter Wurzeln, also Elementen aus der Zopfgruppe $\mathbf{B}$, die in [BM97] folgendermaßen eingeführt werden.

Definition 2.3.11 (Gute Wurzeln von $\mathbf{w}_0^2$). Seien w_0 das längste Element von W und $\mathbf{w}_0 = \mathrm{r}(w_0)$. Ein Element $\mathbf{w} \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{red}} := \{\mathrm{r}(w) \mid w \in W\}$ heißt *gute d-te Wurzel von* $\mathbf{w}_0^2$, falls $\mathbf{w}$ folgende Eigenschaften besitzt:

- $\mathbf{w}^d = \mathbf{w}_0^2$,
- $\mathbf{w}^i \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{red}}$ für jedes $i \leq \frac{d}{2}$.

Existiert ein nichttrivialer längenerhaltender Automorphismus des zu $\mathbf{B}$ gehörenden Dynkindiagramms, so existiert auch ein analog operierender Automorphismus ϕ von $\mathbf{B}$ und W aus 2.3.3. Ein Element $\mathbf{w}\phi \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{red}}\phi \subset \mathbf{B} \rtimes \langle\phi\rangle$ wird *gute d-te ϕ-Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$* genannt, falls

- $(\mathbf{w}\phi)^d = \mathbf{w}_0^2\phi^d$ und
- $(\mathbf{w}\phi)^i \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{red}}\phi^i$ für jedes $i \leq \frac{d}{2}$ gelten.

Für jede reguläre Zahl d von $W\phi$ bzw. W ist in [BM97, A.1] eine gute d-te Wurzel angegeben. Diese können mit Hilfe des folgenden Lemmas zur Konstruktion von Sylowtwists benutzt werden.

Bemerkung 2.3.12 (Konstruktion von Sylowtwists mit guten Wurzeln). *Sei $\mathbf{w}$ eine gute d-te Wurzel bzw. $\mathbf{w}\phi$ eine gute d-te ϕ-Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$. Dann ist $\tau(\mathbf{w})$ bzw. $\tau(\mathbf{w})\phi$ ein d-Sylowtwist.*

Beweis. Gemäß [BM97, 3.14] bzw. [BM97, 6.6] ist dann $\rho(\tau(\mathbf{w}))$ bzw. $\rho(\tau(\mathbf{w}))\phi$ ein reguläres Element der Ordnung d. Mit Hilfe von 2.3.9 folgt die Behauptung. □

Diese guten Wurzeln scheinen noch weitere Eigenschaften zu haben.

2.3.13. Darüberhinaus wird vermutet, dass alle guten d-ten Wurzeln in der Zopfgruppe zueinander konjugiert sind. Gemäß einem Gespräch mit Jean Michel hat er dies auch bei exzeptionellen Typen nachgerechnet.

Gleichzeitig können auch Aussagen über $\mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w})\phi)$ gemacht werden.

Bemerkung 2.3.14. *Seien $\mathbf{w}$ eine gute Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$, R ein Wurzelsystem von einem klassischen Typ und $v := \tau(\mathbf{w})$. Dann gilt*

$$\rho(V^{vF}) = \mathrm{C}_W(\rho(v)).$$

Beweis. Unter anderem in [Bes00, 1. Abschnitt] wird zu $\mathbf{w}$ eine Zopfgruppe $\mathbf{B}(\mathbf{w}) \subseteq \mathbf{B}$ definiert. Diese wird bei klassischen Gruppen gemäß [Bes00, Satz 1.3] als Untergruppe von $\mathbf{B}$ aufgefasst. Weiter ist bekannt, dass

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{w}), \mathbf{P}\rangle/\mathbf{P} = W^{\mathrm{op}}(w)$$

mit der zu $\mathbf{B}$ gehörende reinen Zopfgruppe $\mathbf{P}$ und $W(w) = \mathrm{C}_W(w)$ gilt. Daraus folgt

$$\rho(\tau(\mathbf{B}(\mathbf{w}))) = \mathrm{C}_W(w).$$

Zusammen mit $\mathbf{B}(\mathbf{w}) \leq \mathrm{C}_{\mathbf{B}}(\mathbf{w})$ aus [BM97, 3.4] ergibt isch damit

$$\rho(\tau(\mathrm{C}_{\mathbf{B}}(\mathbf{w}))) \geq \mathrm{C}_W(w).$$

Die Inklusion $\rho(\tau(\mathrm{C}_{\mathbf{B}}(\mathbf{w}))) \leq \mathrm{C}_W(w)$ ist aus der Gruppentheorie bekannt. Dies zeigt $\rho(\mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w}))) = \mathrm{C}_W(w)$. □

Die Wahl geeigneter Sylowtwists ist für die Konstruktion von Sylownormalisatoren wichtig. Für reguläre Zahlen d nennen wir d-Sylowtwists $v\phi$ mit $V^{v\phi} = V$ und

$$\rho(\mathrm{C}_V(v\phi)) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$$

erfüllen, *gut*.

Bemerkung 2.3.15. *Seien $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist, d.h.*

$$\rho(V^{vF}) = \mathrm{C}_W(\rho(v))$$

und $U := V^{vF}$. Dann ist $\mathbf{T}^{vF}$ eine d-Sylowlevigruppe und $\left\langle \mathbf{T}^{vF}, U \right\rangle$ ihr d-Sylownormalisator in $(\mathbf{G}, vF)$.

Beweis. Gemäß 2.3.10 ist jede d-Sylowlevigruppe ein Torus. Die Gruppe U erfüllt die in 1.3.5 geforderten Eigenschaften. Daraus folgt die Aussage. $\square$

Für den Standard-Frobeniusendomorphismus F wurde die erweiterte Weylgruppe in [Tit66] als „minimale“ Gruppe mit

$$\left\langle V, \mathbf{T}^F \right\rangle = \mathbf{N}^F$$

definiert. Für einen guten d-Sylowtwist $v\phi$ erfüllt $U := V^{vF}$ ebenfalls

$$N = \langle U, T \rangle \,,$$

wobei T die d-Sylowlevigruppe und N der d-Sylownormalisator ist. Wir vermuten, dass U mit dieser Eigenschaft in vielen Fällen auch minimal ist.

Lemma 2.3.16. *Seien R ein irreduzibles Wurzelsystem, $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$, $R' \leq R$ ein irreduzibles parabolisches Wurzelsystem, so dass $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle$ gemäß dem Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R' ist. Darüberhinaus seien $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ und $F' := F\rceil_{\mathbf{G}'}$ Frobeniusendomorphismen und ϕ bzw. ϕ' die auf $\mathbb{Z}R^\vee$ bzw. $\mathbb{Z}R'^\vee$ induzierten Automorphismen. Weiter seien $d \in \mathbb{N}$, $a(d)$ bzw. $a'(d)$ ($d \in \mathbb{N}$) der Exponent in den Ordnungspolynomen zu $(\mathbf{G}, F)$ bzw. zu $(\mathbf{G}', F')$ und $v\phi'$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', F')$. Gilt $a(d) = a'(d)$, so ist $v\phi$ ein d-Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$.*

Beweis. Es ist $R'^\vee \otimes \mathbb{C}$ ein Untervektorraum von $R^\vee \otimes \mathbb{C}$.

Gemäß der Definition von $v\phi'$ teilt $\Phi_d^{a'(d)}$ das charakteristische Polynom von $\rho(v)\phi$ auf $R'^\vee \otimes \mathbb{C}$, d.h.

$$\Phi_d^{a'(d)} \Big| \det_{R'^\vee \otimes \mathbb{C}} \left(x(\rho(v)\phi') - 1 \right).$$

Dieses Polynom ist selbst ein Teiler des charakteristische Polynom von $\rho(v)\phi$ auf $R^\vee \otimes \mathbb{C}$:

$$\det_{R'^\vee \otimes \mathbb{C}} \left(x(\rho(v)\phi') - 1 \right) \Big| \det_{R^\vee \otimes \mathbb{C}} \left(x(\rho(v)\phi) - 1 \right).$$

Daraus folgt

$$\Phi_d^{a'(d)} \Big| \det_{R^\vee \otimes \mathbb{C}} \left(x\rho(v) - 1 \right),$$

was wegen $a'(d) = a(d)$ zeigt, dass $v\phi$ ein d-Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$ ist. $\square$

Nun sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um die Charaktere von d-Sylowlevigruppen und d-Sylownormalisatoren genauer zu studieren.

Kapitel 3

Fortsetzbarkeit

In dieser Arbeit soll vor allem gezeigt werden, dass sich bestimmte Charaktere auf ihre Trägheitsgruppe fortsetzen. Die dazu nötigen Hilfsmittel aus der Charaktertheorie sind in diesem Kapitel zusammengestellt. Einerseits wiederholen wir einige der zahlreichen „kleinen“ Kriterien, die zeigen, dass sich ein Charakter auf eine Gruppe fortsetzt. Andererseits stellen wir im zweiten Unterkapitel verschiedene relativ spezielle Gruppenstrukturen vor, für die wir die so genannte maximale Fortsetzbarkeit beweisen können.

Im ersten Abschnitt präsentieren wir Kriterien, welche die Fortsetzbarkeit eines Charakters zur Folge haben. Diese beziehen sich beispielsweise auf die Ordnung des Charakters und die Struktur der Gruppen. Weiter werden wir ein paar damit in Verbindung stehende Resultate wie den Satz von Gallagher wiederholen.

Im zweiten Abschnitt beweisen wir für verschiedene Gruppen die maximale Fortsetzbarkeit. Dort überträgt sich die maximale Fortsetzbarkeitseigenschaft gewisser Untergruppen auf weitere Gruppen. Diese Situationen sind technisch und scheinen zunächst sehr unnatürlich, werden aber in den späteren Kapiteln so auftreten. Die Sätze 3.2.5 und 3.2.6 ermöglichen später Aussagen über maximale Fortsetzbarkeit in nichtregulären Fällen.

3.1 Allgemeine Fortsetzbarkeitsaussagen

Wir tragen hier mehrere Kriterien für die Fortsetzbarkeit eines Charakters zusammen. Wohlbekannt sind folgende.

Lemma 3.1.1. *Seien $L \lhd N$, $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ und $\mathrm{I}_N(\chi) = N$. Der Charakter χ ist auf N fortsetzbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(a) *die Gruppe $^N/L$ ist zyklisch,*

(b) *die Gruppe $^N/L$ hat trivialen Schurmultiplikator,*

(c) *die Gruppe $^N/\ker(\chi)$ ist abelsch,*

(d) $\chi(1) = 1$ *und die Ordnung von* χ *und* $\left|^N/L\right|$ *sind teilerfremd, d.h.* $\mathrm{ggT}(o(\chi), \left|^N/L\right|) = 1$.

Beweis. Die Aussage (a) entspricht Korollar [Isa76, 11.22].

Für (b) ordnen wir wie in [Isa76, 11.3] erklärt dem Charakter χ ein Element des Schurmultiplikators $\mathrm{M}({}^{N}\!/L)$ zu. Dieses ist wegen $\mathrm{M}({}^{N}\!/L) = 1$ trivial und damit χ laut Theorem 11.7 aus [Isa76] fortsetzbar.

Der Teil (c) wird in [Isa76, 5.5] bewiesen und der Teil (d) in [Isa76, 8.16]. □

In manchen Fällen hilft auch folgende Aussage.

Lemma 3.1.2. *Seien $L \lhd N$ und $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ mit $\mathrm{I}_N(\chi) = N$. Für jede Sylowgruppe ${}^{P}\!/L$ von ${}^{N}\!/L$ sei χ auf P fortsetzbar. Dann ist χ auf N fortsetzbar.*

Beweis. Dies ist die Aussage von [Isa76, 11.31]. □

Wie viele verschiedene Fortsetzungen es dann gibt, erklärt der folgende Satz

Lemma 3.1.3 (Satz von Gallagher). *Seien $L \lhd N$, $\chi \in \mathrm{Irr}\,(N)$ mit $\theta := \chi\rceil_L \in \mathrm{Irr}\,(L)$. (Dabei bezeichnet $\chi\rceil_L \in \mathrm{Irr}\,(L)$ die Einschränkung von χ auf L.) Dann sind die Charaktere $\chi\mu$ mit $\mu \in \mathrm{Irr}\left({}^{N}\!/L\right)$ irreduzibel, paarweise verschieden und die irreduziblen Bestandteile von $(\chi\rceil_L)^N$, d.h.*

$$\mathrm{Irr}\,(N \mid \theta) = \left\{ \chi\mu \;\middle|\; \mu \in \mathrm{Irr}\left({}^{N}\!/L\right) \right\}.$$

(Die Menge $\mathrm{Irr}\,(N \mid \theta)$ wird durch

$$\mathrm{Irr}\,(N \mid \theta) := \{\psi \in \mathrm{Irr}\,(N) \mid (\psi\rceil_L, \theta) \neq 0\}$$

definiert.)

Beweis. siehe [Isa76, 6.17]. □

Ab und an benötigen wir auch Aussagen über die induzierten Charaktere von maximalen Fortsetzungen. Dabei hilft die Cliffordtheorie.

Lemma 3.1.4 (Clifford-Korrespondenz). *Seien $L \lhd N$ und $\mu \in \mathrm{Irr}\,(L)$. Durch*

$$\psi \mapsto \psi^N$$

wird eine Bijektion zwischen $\mathrm{Irr}\,(\mathrm{I}_N(\mu) \mid \mu)$ und $\mathrm{Irr}\,(N \mid \mu)$ definiert. Für $\chi \in \mathrm{Irr}\,(N \mid \mu)$ gilt

$$\mathrm{Irr}\,(L \mid \chi) = \{\mu^n \mid n \in N\}.$$

(Dabei ist $\mathrm{Irr}\,(L \mid \chi)$ durch

$$\mathrm{Irr}\,(L \mid \chi) := \{\mu \in \mathrm{Irr}\,(L) \mid (\mu, \chi\rceil_L) \neq 0\}$$

definiert.)

Beweis. siehe [Isa76, 6.11 (c)]. □

Zentrales Instrument bei der Clifford-Theorie ist die Operation von N auf $\mathrm{Irr}\,(L)$. Diese kann verallgemeinert werden und wird vor allem in Kapitel 6 bei der Konstruktion von Charakteren helfen.

Definition und Satz 3.1.5 (Verallgemeinerte Konjugation von Charakteren). *Seien $U \leq N$, $g \in N$ und $\chi \in \mathrm{Irr}\,(U)$. Dann wird durch*

$$\chi^g(u') := \chi(u'^{g^{-1}}) \text{ für alle } u' \in U^g$$

ein irreduzibler Charakter $\chi^g \in \mathrm{Irr}\,(U^g)$ definiert.

Damit operiert N auf der Menge $\bigcup_{g \in N} \mathrm{Irr}\,(U^g)$.

Für $U \lhd N$ stimmt diese Definition mit der ansonsten üblichen überein.

Beweis. Nachrechnen. □

Eine zentrale Rolle bei der Fortsetzbarkeit linearer Charaktere spielt der folgende wohlbekannte Satz.

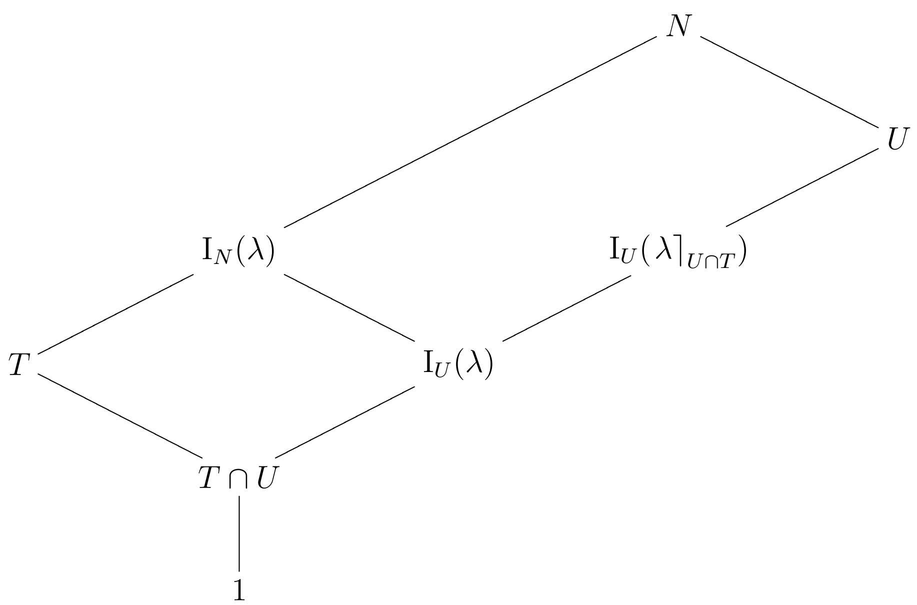
Satz 3.1.6. *Seien U, $T \leq N$ endliche Gruppen mit $N = \langle T, U \rangle$ und $T \lhd N$, $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ ein linearer Charakter und ψ eine Fortsetzung von $\lambda\rceil_{U\cap T}$ auf $\mathrm{I}_U(\lambda\rceil_{U\cap T})$. Dann gibt es auch eine Fortsetzung $\widetilde{\lambda}$ von λ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ mit*

$$\widetilde{\lambda}\Big\rceil_{\mathrm{I}_U(\lambda)} = \psi\rceil_{\mathrm{I}_U(\lambda)}\,.$$

Beweis. Wegen $\mathrm{I}_U(\lambda) \leq \mathrm{I}_U(\lambda\rceil_{U\cap T})$ wird durch

$$\widetilde{\lambda}(tu) := \lambda(t)\psi(u) \text{ für } t \in T, u \in \mathrm{I}_U(\lambda),$$

ein Charakter auf $\langle \mathrm{I}_U(\lambda), T \rangle = \mathrm{I}_N(\lambda)$ definiert.



Als Abbildung ist $\widetilde{\lambda}$ wohldefiniert, da die Charaktere ψ und λ auf $U \cap T$ übereinstimmen. Die Multiplikativität von $\widetilde{\lambda}$ können wir leicht nachrechnen. □

Viele Sylowlevigruppen sind zentrale Produkte. Daher ist es nötig, die Struktur der irreduziblen Charaktere solcher Gruppen genauer zu kennen.

Lemma 3.1.7. *Seien T, $G \leq L$ zwei Untergruppen mit $[T,G] = 1$. Für $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ und $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G)$ mit $\mathrm{Irr}\,(Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(Z \mid \eta)$ und $Z := T \cap G$ sei $\lambda.\eta$ durch*

$$\lambda.\eta(tg) := \lambda(t)\eta(g) \text{ für alle } t \in T, g \in G$$

gegeben. Es gilt

$$\mathrm{Irr}\,(T \circ_Z G) = \{\, \lambda.\eta \mid \lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)\,, \eta \in \mathrm{Irr}\,(G) \;\text{ mit }\; \mathrm{Irr}\,(Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(Z \mid \eta)\}\,.$$

(Dabei steht $T \circ_Z G$ für die Gruppe $\langle T, G\rangle$.)

Beweis. Wir können auch das äußere direkte Produkt $T \times G$ dieser Gruppen definieren. Gemäß [Isa76, 4.21] hat diese Gruppe die irreduziblen Charaktere $\lambda \times \eta$ mit $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ und $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G)$, d.h.

$$\mathrm{Irr}\,(T \times G) = \{\, \lambda \times \eta \mid \lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)\,, \eta \in \mathrm{Irr}\,(G)\}\,.$$

Die Faktorgruppe ${}^{(T \times G)}/_{Z'}$ mit

$$Z' := \left\langle (z, z^{-1}) \,\middle|\, z \in Z \right\rangle$$

ist isomorph zu $T \circ_Z G$. Somit gibt es eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von $T \circ_Z G$ und den Charakteren von $T \times G$, deren Kern Z' umfasst. Die Aussage $Z' \leq \ker(\lambda \times \eta)$ ist äquivalent zu $\mathrm{Irr}\,(Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(Z \mid \eta)$. Somit bilden die angegebenen Charaktere die Menge $\mathrm{Irr}\,(T \circ_Z G)$. □

Während wir in diesem Abschnitt sehr viele bekannte allgemeine Aussagen wiederholt haben, werden wir im nächsten Abschnitt spezielle Situationen studieren. Die Resultate sind beim Studium der Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren entstanden.

3.2 Maximale Fortsetzbarkeit

Zur Verkürzung der Beweise führen wir folgende Sprechweisen ein.

Definition 3.2.1. Seien $L \lhd N$ und $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$. Ist der Charakter auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar, so sagen wir, dass der Charakter in N *maximal fortsetzbar* ist. Jede Fortsetzung von χ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ heißt *maximale Fortsetzung von χ in N.*

Ist jeder Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ in N maximal fortsetzbar, so *liegt maximale Fortsetzbarkeit* bei $L \lhd N$ vor.

Es ist klar, dass bei $L \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt, falls die Grupppe ${}^{N}\!/L$ zyklisch ist. In den meisten anderen Fällen ist es nicht einfach, die maximale Fortsetzbarkeit zu beweisen. Es ist aber möglich zu zeigen, dass diese Eigenschaft zwischen Untergruppen auf die größeren Gruppen bei verschiedenen Konstruktionen „vererbt“ wird.

Lemma 3.2.2. *Seien T, N, $N_C \leq G$ endliche Gruppen mit $T \lhd N$, $T \leq N_C$, $N_C \lhd N$ und $|N : N_C| = 2$, $k \in \mathrm{C}_G(N_C) \setminus N_C$ und $c \in N \setminus N_C$.*
Liegt bei $T \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vor, so auch bei $T \lhd N'$ mit $N' := \langle N_C, ck\rangle$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$. Gemäß den Voraussetzungen existiert eine Fortsetzung λ' auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$. Der Charakter $\lambda'\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)}$ ist invariant in $\mathrm{I}_{\langle N_C, c\rangle}(\lambda)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{N'}(\lambda) \arrow[dr, dash, "\text{zyklisch}"'] & & \mathrm{I}_N(\lambda) \arrow[dl, dash, "\text{zyklisch}"] & \lambda' \\
& \mathrm{I}_{N_C}(\lambda) \arrow[d, dash] & \lambda'\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)} & \\
& T & \lambda &
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe ${}^{\mathrm{I}_{N'}(\lambda)}\!/\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)$ ist zyklisch und somit gibt es ein Element $n \in N_C$ mit

$$\mathrm{I}_{N'}(\lambda) = \langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda), nck\rangle\,.$$

Wegen $[k, N_C] = 1$ folgt daraus $cn \in \mathrm{I}_N(\lambda)$. Also ist der Charakter $\lambda'\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)}$ invariant unter der Operation von nck und wegen 3.1.1 (a) auf ganz $\mathrm{I}_{N'}(\lambda)$ fortsetzbar. □

Mit Hilfe des folgenden Lemmas, das eine Aussage über den Kern eines Charakters macht, können wir später Elemente der Trägheitsgruppe ermitteln.

Lemma 3.2.3. *Seien $L \lhd N$, $T_1 \leq N$, $G_2 \leq N$, $N_C \leq N$ endliche Gruppen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) T_1 *ist abelsch,* $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$,

(ii) $L_0 := \langle T_1, G_2\rangle \lhd L$,

(iii) $N = \langle N_C, L\rangle$, $[N_C, L] \leq T_1$, $[N_C, G_2] = 1$ *und* $L \cap N_C = T_1$.

Für $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ mit $\chi\rceil_{L_0} \in \mathrm{Irr}\,(L_0)$, $l \in L$ und $n \in \mathrm{I}_{N_C}(\chi)$ gilt

$$\chi([l, n]) = 1.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[d, dash] & \\
 & L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
 & T_1 \cap G_2 \arrow[d, dash] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir untersuchen dazu zunächst $\chi\rceil_{L_0}$ genauer. Anschließend zeigen wir, dass der lineare Charakter $\psi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ mit $\psi(l) := \frac{\chi([l,n])}{\chi(1)}$ $(l \in L)$ trivial ist, und folgern daraus die Behauptung.

Wir stellen zunächst fest, dass L_0 wegen $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$ das zentrale Produkt der Gruppen G_2 und T_1 ist. Mit $Z := T_1 \cap G_2$ gilt

$$L_0 = T_1 \circ_Z G_2.$$

Nach den Ausführungen über Charaktere bei zentralen Produkten in Lemma 3.1.7 ist der irreduzible Charakter $\chi\rceil_{L_0}$ das Produkt eines linearen Charakters $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$ und eines irreduziblen Charakters $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2)$ mit

$$\mathrm{Irr}\,(\,Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(\,Z \mid \eta)\,.$$

Nun betrachten wir den Charakter $\psi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ mit $\psi(l) := \lambda([l,n])$ $(l \in L)$ für ein festes $n \in \mathrm{I}_{N_C}(\chi)$. Mit $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$ lässt sich leicht zeigen, dass ψ ein linearer Charakter mit $L_0 = \langle G_2, T_1 \rangle \leq \ker(\chi)$ ist.

Sei $\mathcal{D}$ eine zu χ gehörende Darstellung. Wegen $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$ und $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ ist jede Matrix $\mathcal{D}(t)$ $(t \in T_1)$ eine Skalarmatrix. Für die Matrix $\mathcal{D}(l^n)(l \in L)$ ergibt sich

$$\mathcal{D}(l^n) = \mathcal{D}(l[l,n]) = \mathcal{D}(l)\mathcal{D}([l,n]) = \mathcal{D}(l)\lambda([l,n]),$$

da $[l,n] \in T_1$ gilt und $\mathcal{D}([l,n])$ eine Skalarmatrix ist. Also gilt

$$\chi = \chi^n = \chi\psi.$$

Daraus folgt mit dem Satz von Gallagher 3.1.3, angewandt auf die Fortsetzungen von $\chi\rceil_{L_0}$, auch $\psi = 1$, was $[l,n] \in \ker(\lambda)$ für alle $l \in L$ und damit die Behauptung zeigt. $\square$

Mit Hilfe dieser Aussage können wir maximale Fortsetzungen konstruieren.

Lemma 3.2.4. *Seien L, T_1, G_2, N_C und N Gruppen mit den in Lemma 3.2.3 vorausgesetzten Eigenschaften und abelscher Faktorgruppe ${}^{L}\!/L_0$. Weiter seien $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ ein Charakter mit $\chi\rceil_{L_0} \in \mathrm{Irr}\,(L_0)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1 \mid \chi)$ ein Charakter, der eine Fortsetzung λ' auf $N_I := \mathrm{I}_{N_C}(\chi)$ besitzt.*

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
 & N_C \arrow[d, dash] & & L \arrow[d, dash] & & \\
\lambda' & N_I \arrow[dr, dash] & & L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \lambda.\eta & \\
 & \lambda & T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] & \eta \\
 & & & T_1 \cap G_2 & &
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{\chi}$ von χ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ mit

$$\widetilde{\chi}\rceil_{N_I} = \chi(1)\lambda'.$$

Beweis. Sei $\mathcal{D}$ eine Darstellung zu χ. Wir definieren die Darstellung $\widetilde{\mathcal{D}}$ durch

$$\widetilde{\mathcal{D}}(nl) = \lambda'(n)\mathcal{D}(l) \text{ für alle } n \in N_1, l \in L.$$

Für Elemente $n, n' \in N_I$ und $l, l' \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}(nl)\widetilde{\mathcal{D}}(n'l') &= \lambda'(n)\mathcal{D}(l)\lambda(n')\mathcal{D}(l') \\
&= \lambda'(nn')\mathcal{D}(ll')\lambda(nn')\mathcal{D}(l)\mathcal{D}(l') \\
&= \lambda'(nn')\mathcal{D}(l)\mathcal{D}([l,n'])\mathcal{D}(l') \\
&= \lambda'(nn')\mathcal{D}(l^{n'}l') = \widetilde{\mathcal{D}}(nn'l^{n'}l') = \widetilde{\mathcal{D}}(nln'l').
\end{aligned}$$

Diese Umformungen sind möglich, da wir $[l, n'] \in \ker(\chi)$ aus Lemma 3.2.3 wissen. Dies beweist, dass $\widetilde{\mathcal{D}}$ eine Darstellung von $\mathrm{I}_N(\chi) = \langle N_I, L\rangle$ ist. Die Spur dieser Darstellung ist eine maximale Fortsetzung von χ mit den geforderten Eigenschaften. $\square$

Wir beweisen damit folgenden Satz. Bei diesem folgern wir aus der maximalen Fortsetzbarkeit zweier Untergruppen das Vorliegen der maximalen Fortsetzbarkeitseigenschaft für die allgemeinere Situation. In einem gewissen Sinne schließen wir anhand einer lokalen maximalen Fortsetzbarkeitseigenschaft auf die analoge Eigenschaft der größeren Gruppen.

Satz 3.2.5. *Seien $L \lhd N$, sowie T_1, G_2, $N_C \leq N$ endliche Gruppen mit folgenden Eigenschaften:*

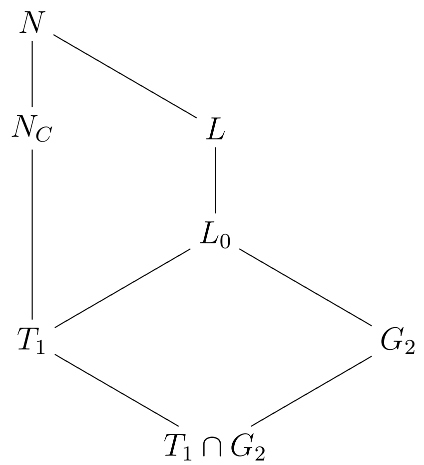
(i) T_1 *ist abelsch,* $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$,

(ii) $L_0 := \langle T_1, G_2 \rangle \lhd L$, ${}^{L}/_{L_0}$ *ist zyklisch,*

(iii) $N = \langle N_C, L \rangle$, $[N_C, L] \leq T_1$, $[N_C, G_2] = 1$, $L \cap N_C = T_1$ *und*

(iv) bei $T_1 \lhd N_C$ *liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Dann liegt auch maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ vor.



Beweis. Wir zeigen für den Beweis, dass sich ein beliebiger Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzt.

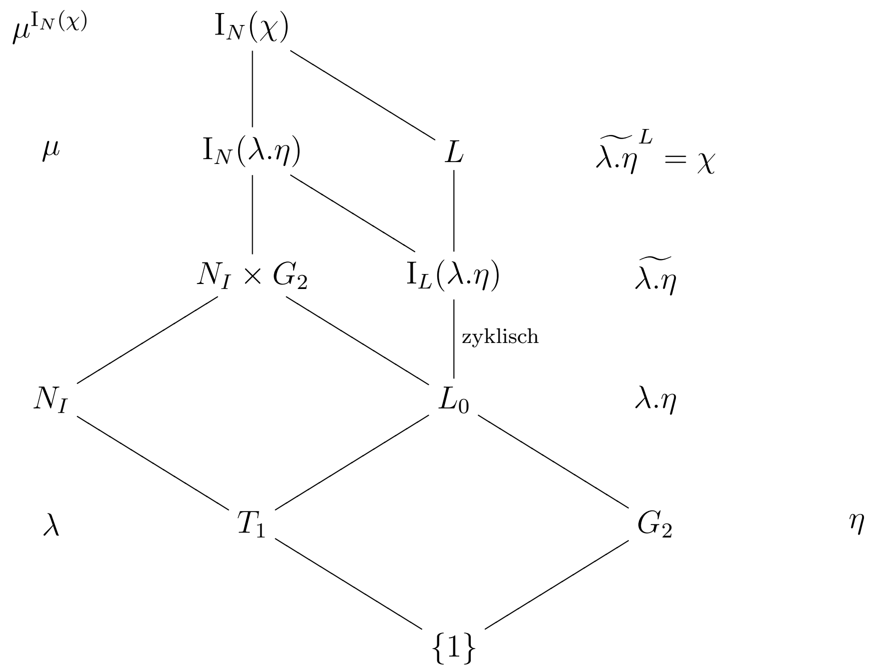
Seien $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1 \mid \chi)$, $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2 \mid \chi)$ und $\lambda.\eta \in \mathrm{Irr}\,(L_0 \mid \chi)$. Dieser Charakter besitzt eine Fortsetzung $\widetilde{\lambda.\eta} \in \mathrm{Irr}\,(\mathrm{I}_L(\lambda.\eta))$ mit

$$\chi = \widetilde{\lambda.\eta}^{L}.$$

Dies ist eine Folge der Clifford-Korrespondenz aus Lemma 3.1.4 und der zyklischen Faktorgruppe ${}^{L}/_{L_0}$.

Nun gibt es zu dem Charakter $\widetilde{\lambda.\eta} \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_L(\widetilde{\lambda.\eta})\right)$ nach Lemma 3.2.4 eine maximale Fortsetzung $\mu \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_N(\widetilde{\lambda.\eta})\right)$. Dabei nehmen wir $\widetilde{\lambda.\eta}$ als Charakter und verwenden

$\mathrm{I}_L(\lambda.\eta)$ als „L-Gruppe". Damit werden die Voraussetzungen erfüllt.



Der Charakter $\mu^{\mathrm{I}_N(\lambda.\eta)}$ ist eine maximale Fortsetzung von χ gemäß dem Lemma von Mackey (siehe [Hup98, 17.4]).

□

Leider liegt nicht immer die eben beschriebene Struktur bei d-Sylowlevigruppen vor. Wir stellen daher hier noch eine kleine Variante des Resultats vor, die wir später benötigen.

Satz 3.2.6. *Seien $L \lhd N$, sowie T_1, G_2, $N_1 \le N$ endliche Gruppen und $h \in L \setminus L_0$ ein Element mit folgenden Eigenschaften:*

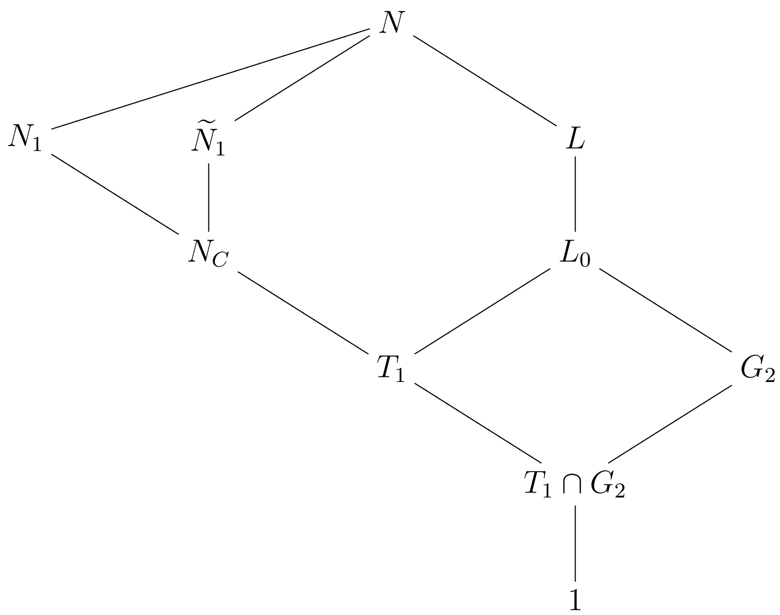
(i) T_1 *ist abelsch,* $T_1 \le \mathrm{Z}(L)$,

(ii) $L_0 := \langle T_1, G_2 \rangle \lhd L$, $\left|{}^{L}\!/L_0\right| = 2$,

(iii) $N = \langle N_1, L \rangle$, $G_2 \lhd N$, $L \cap N_1 = T_1$, $[N_C, L] \le T_1$ *und* $|N_1 : N_C| = 2$ *für* $N_C := \mathrm{C}_{N_1}(G_2)$,

(iv) bei $T_1 \lhd N_1$ *und* $T_1 \lhd \widetilde{N}_1$ *mit* $\widetilde{N}_1 := \langle N_C, ch \rangle$ $(c \in N_1 \setminus N_C)$ *liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Dann liegt auch maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ vor.

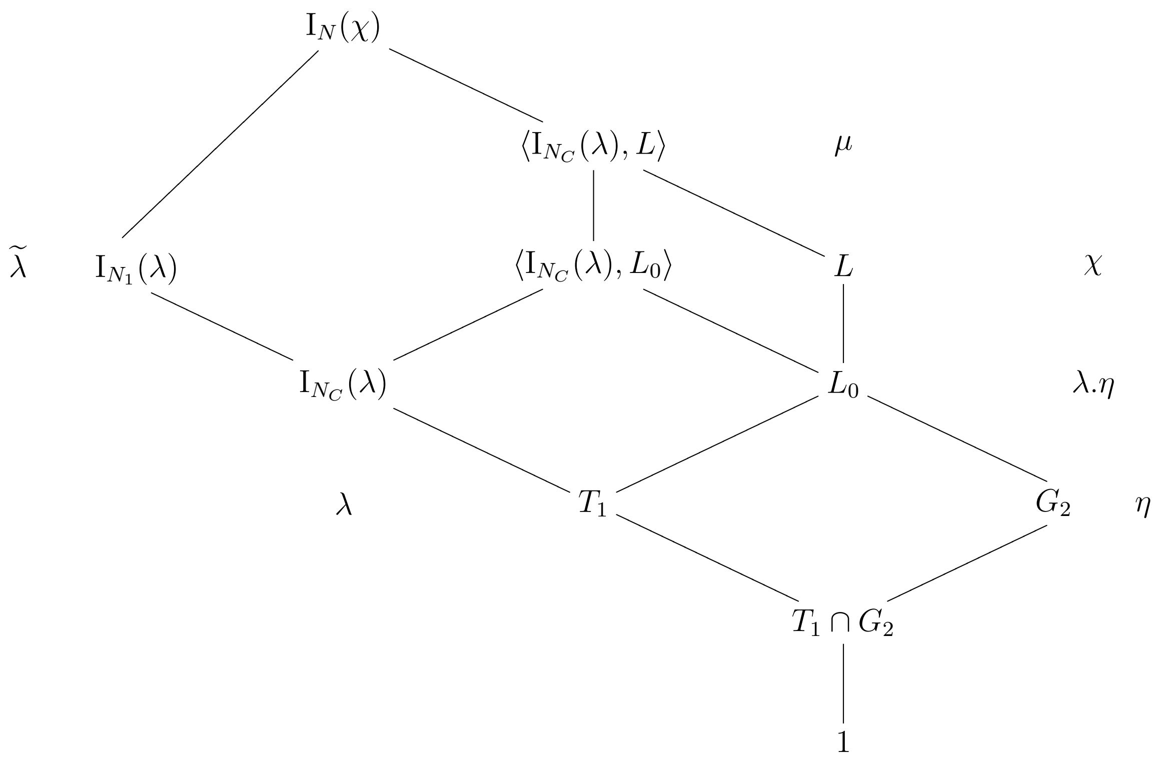


Beweis. Seien $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ ein beliebiger Charakter, $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2 \mid \chi)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1 \mid \chi)$. Unser Vorgehen richtet sich nach den Eigenschaften von $\chi\rceil_{L_0}$.

1.Fall: $\chi\rceil_{L_0} \in \mathrm{Irr}\,(L_0)$

Ist der Charakter χ eine Fortsetzung von $\lambda.\eta$, so wenden wir Lemma 3.2.4 an. Verwenden wir $\langle N_C, L\rangle$ als „N-Gruppe“, so sind die gruppentheoretischen Voraussetzungen erfüllt. Bei der Konstruktion der Fortsetzung von χ verwenden wir die Fortsetzung $\widetilde{\lambda}\Big\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)}$, wobei $\widetilde{\lambda}$ eine Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$ ist. Gemäß Lemma 3.2.4 gibt es eine Fortsetzung μ von χ auf $\langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda), L\rangle$. Diese erfüllt

$$\mu(nl) = \widetilde{\lambda}(n)\chi(l) \text{ für alle } n \in N_C,\, l \in L.$$



Wir rechnen leicht

$$\mu^n = \mu \text{ für alle } n \in \mathrm{I}_{N_1}(\chi)$$

nach. Mit Hilfe von $\mathrm{I}_N(\chi)/\langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda), L\rangle \leq \mathrm{C}_2$ und dem Lemma 3.1.1 (a) folgt, dass μ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar ist. (Dabei steht C_i $(i \in \mathbb{N})$ für die zyklische Gruppe der Ordnung i.) Der entstehende Charakter ist dann eine maximale Fortsetzung von χ.

2.Fall: $\chi\rceil_{L_0} \notin \mathrm{Irr}\,(L_0)$

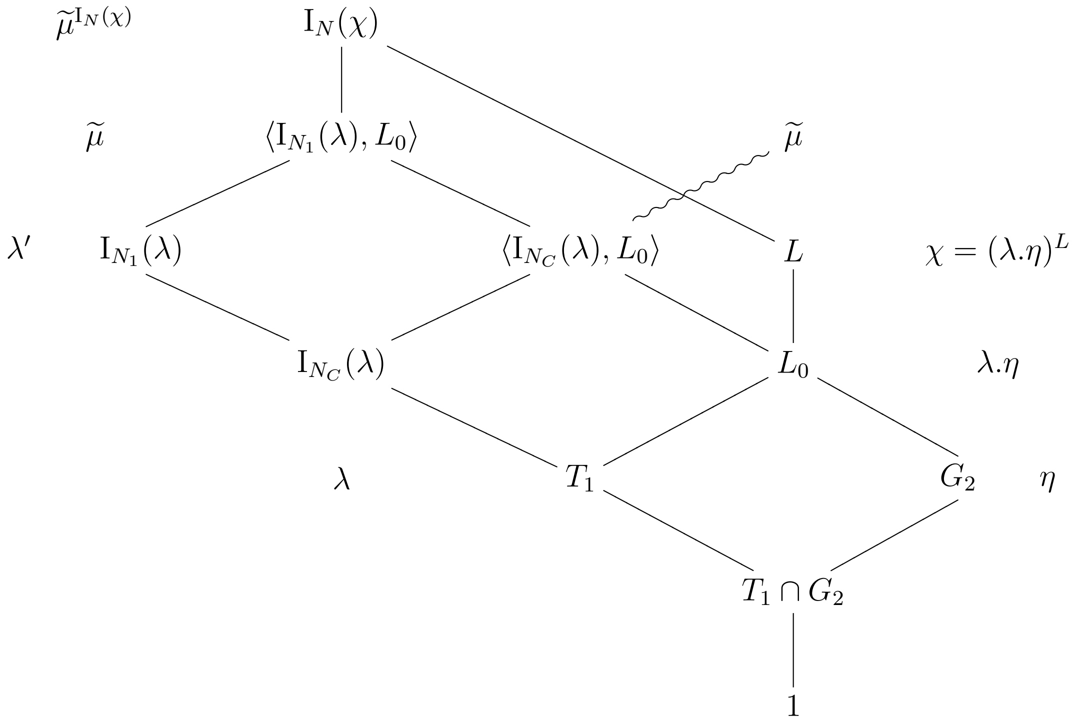
Ist $\chi\rceil_{L_0}$ reduzibel, so induziert $\lambda.\eta$ laut Lemma 3.1.4 auf L den Charakter χ. Für $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta)$ gilt eine der beiden Gleichungen

$$\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \langle \mathrm{I}_{N_1}(\lambda.\eta), L_0\rangle \;\text{ oder }\; \mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \left\langle \mathrm{I}_{\widetilde{N}_1}(\lambda.\eta), L_0\right\rangle.$$

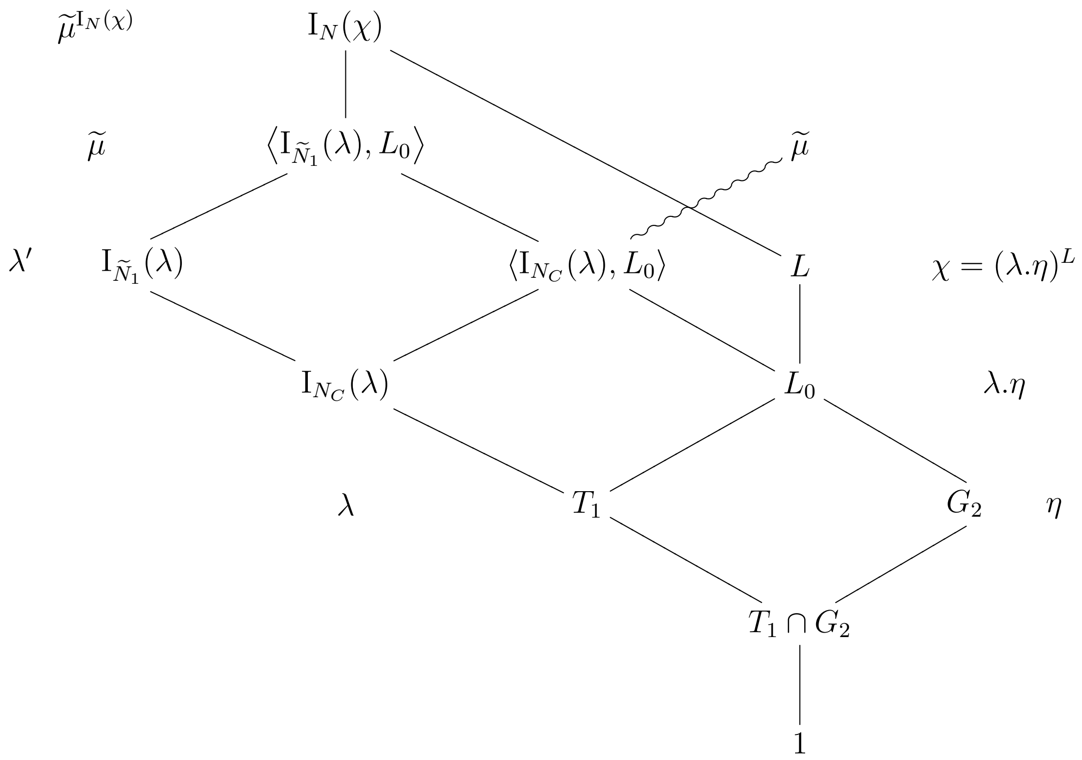
Bei $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \langle \mathrm{I}_{N_1}(\lambda.\eta), L_0\rangle$ sei λ' eine maximale Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$. Dann ist $\mu := \lambda'\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)}.\eta$ eine Fortsetzung von $\lambda.\eta$ auf $\langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda.\eta), L\rangle$ mit

$$\mu^x = \mu \text{ für alle } x \in \mathrm{I}_N(\lambda.\eta).$$

Mit Hilfe von Lemma 3.1.1 (a) folgt, dass μ auf ganz $\mathrm{I}_N(\mu)$ zu $\widetilde{\mu}$ fortsetzbar ist. Der Charakter $\widetilde{\mu}^{\mathrm{I}_N(\chi)}$ ist laut Lemma von Mackey, siehe [Hup98, 17.4], eine maximale Fortsetzung von χ.



Für $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \left\langle \mathrm{I}_{\widetilde{N}_1}(\lambda.\eta), L_0 \right\rangle$ ergibt sich folgende ähnliche Untergruppenstruktur.



Wir erhalten dabei durch folgendes Vorgehen eine maximale Fortsetzung von χ. Sei λ' eine Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$ und $\mu := \lambda'\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)} .\eta \in \mathrm{Irr}\left(\langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda), L_0 \rangle\right)$. Die gleichen Überlegungen wie oben zeigen, dass μ auf $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta)$ zu $\widetilde{\mu}$ fortsetzbar ist. Diese Fortsetzung induziert auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ laut dem Lemma von Mackey eine maximale Fortsetzung von χ.

Dies zeigt insgesamt, dass stets χ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar ist. □

Wir werden die scheinbar sehr unnatürlichen Gruppensituation tatsächlich in den späteren Kapiteln vorfinden. Die Aussagen werden wir vor allem bei nichtabelschen Sylowlevigruppen anwenden.

Kapitel 4

1-Sylownormalisatoren von ungetwisteten Chevalleygruppen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass alle Charaktere einer 1-Sylowlevigruppe T von $(\mathbf{G}, F)$ in dem zugehörigen d-Sylownormalisator N maximal fortsetzbar sind, wenn $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe und F der Standard-Frobeniusendomorphismus von $\mathbf{G}$ ist. Dieser Fall ist besonders einfach, da die Faktorgruppe ${}^{N}/T$ eine Weylgruppe und T abelsch ist. Wir analysieren zunächst die Struktur von T und N und zeigen Verbindungen dieser Gruppen zur erweiterten Weylgruppe V von $\mathbf{G}$ und ihrem abelschen Normalteiler $H \lhd V$ auf. Anschließend bestimmen wir $\mathrm{Irr}\,(H)$ bis auf W-Konjugation. Die Charaktere von $\mathrm{Irr}\,(H)$ setzen wir zunächst auf einen Normalteiler der Trägheitsgruppe fort. Aus diesen Fortsetzungen entstehen unter zusätzlichen Voraussetzungen maximale Fortsetzungen. Die anschließenden Rechnungen prüfen diese Bedingungen für die verschiedenen zugrunde liegenden Wurzelsysteme nach.

Im ersten Unterkapitel stellen wir fest, dass es für die maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ genügt, diese Eigenschaft bei $H \lhd V$ zu zeigen. Daraus ergibt sich in Korollar 4.1.3 ein erstes Resultat für den Fall, dass die Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers gerade ist.

Für den Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$ bei zugrunde liegender ungerader Charakteristik klassifizieren wir die irreduziblen Charaktere von H bis auf W-Konjugation. Dazu ordnen wir $\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem $\mathcal{R}(\chi)$ von $R^\vee$ zu. Die Eigenschaften dieser Unterwurzelsysteme, die sich aus dieser Konstruktion ergeben, und der Satz von Borel-de Siebenthal ermöglichen die Klassifikation von $\mathrm{Irr}\,(H)$ bis auf W-Konjugation.

Im dritten Abschnitt beschreiben wir anhand der Menge $\mathcal{R}(\chi)$ die Trägheitsgruppe $\mathrm{I}_V(\chi)$. In dieser Gruppe definieren wir einen Normalteiler $I^0 \lhd \mathrm{I}_V(\chi)$, auf den wir χ in Lemma 4.3.3 fortsetzen. Die verbleibende Faktorgruppe ${}^{I}/I^0$ ist isomorph zu dem Stabilisator eines Fundamentalsystems von $\mathcal{R}(\chi)$. In dem Korollar 4.3.4 formulieren wir Eigenschaften des Stabilisators, aus denen folgt, dass der konstruierte Charakter sich weiter auf $\mathrm{I}_V(\chi)$ fortsetzt und damit χ in V maximal fortsetzbar ist.

Der letzte Abschnitt zeigt, dass die Voraussetzung für 4.3.4 erfüllt wird. Dies ist das Resultat expliziter Rechnungen mit den verschiedenen Wurzelsystemen und Weylgruppen. Daraus ergeben sich dann die Sätze 4.1.4 und 4.4.8.

Viele der Aussagen dieses Abschnitts werden wir später nochmals beweisen, da bei den klassischen Gruppen die maximale Fortsetzbarkeitseigenschaft der irreduziblen Charaktere der d-Sylowlevigruppe gleichzeitig für alle regulären Zahlen d gezeigt wird. Dort sind deutlich technischere Methoden nötig, die nicht mit dem Wurzelsystem in so enge Verbindung gebracht werden können.

4.1 Eine 1-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$

Als ersten Schritt bestimmen wir eine 1-Sylowgruppe und ihren 1-Sylownormalisator.

Lemma 4.1.1. *Seien R ein irreduzibles Wurzelsystem, q eine Primzahlpotenz, $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe über $\overline{\mathbb{F}}_q$ zu R, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus zu q und V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$. Dann ist*

$$T := \left\langle h_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in R, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle$$

eine 1-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und

$$N := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in R, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle$$

ihr 1-Sylownormalisator mit

$$N = \langle V, T \rangle .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & N \arrow[dl, dash, "W"'] \arrow[dr, dash] & \\ T \arrow[dr, dash] & & V \arrow[dl, dash, "W"] \\ & V \cap T \arrow[d, dash] & \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

Beweis. Seien Y das Kocharaktergitter von $\mathbf{G}$, ϕ der von F induzierte Automorphismus von Y. Gemäß der Bemerkung 2.2.6 gilt $\phi = \mathrm{id}_Y$ und damit ist $v = 1_{\mathbf{G}}$ gemäß 1.3.2 ein 1-Sylowtwist.

Die Zahl 1 ist für die Weylgruppe W von $\mathbf{G}$ regulär. Somit ist $\mathbf{T}^F$ nach Lemma 1.3.4 eine 1-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und $\mathbf{N}^F$ ihr 1-Sylownormalisator. Diese Gruppen stimmen mit den angegebenen überein.

Aus Lemma 2.3.1 (a) ist $\mathbf{N} = \langle V, \mathbf{T} \rangle$ für die wie in Bemerkung 2.2.1 definierten Gruppen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{T}$ bekannt. Wegen $N = \mathbf{N}^F$ folgt daraus $N = \langle V, T \rangle$. $\square$

Diese Struktur ermöglicht es uns, Satz 3.1.6 anzuwenden und führt uns zu folgendem Lemma.

Lemma 4.1.2. *Jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ ist maximal in N fortsetzbar, wenn maximale Fortsetzbarkeit bei $H := V \cap T \lhd V$ vorliegt.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus Satz 3.1.6 und der in Satz 4.1.1 bewiesenen Struktur von N. $\square$

Bei geradem q ist daher folgende Aussage möglich.

Korollar 4.1.3. *Seien* $\mathbf{G}$*,* F*,* N *und* V *wie in 4.1.1 gegeben und* q *eine gerade Primzahlpotenz. Dann ist* $\lambda \in \operatorname{Irr}(L)$ *in* N *maximal fortsetzbar.*

Beweis. Die Gruppe $V \cap T$ ist gemäß 2.3.1 (a) trivial. Daher ist die Bedingung in Lemma 4.1.2 erfüllt. □

Es zeigt sich, dass die Voraussetzung von Lemma 4.1.2 auch für ungerades q erfüllt wird.

Satz 4.1.4. *Seien* $\mathbf{G}$*,* F*,* N *wie in 4.1.1 gegeben,* V *und* H *aus Lemma 2.3.1 und* q *eine ungerade Primzahlpotenz. Dann liegt maximale Fortsetzbarkeit bei* $H \lhd V$ *vor.*

Ziel der nachfolgenden Abschnitte ist der Beweis dieser Aussage. In diesen Abschnitten ist also q stets ungerade.

4.2 Klassifikation der Charaktere $\operatorname{Irr}(H)$

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die Charaktere von $\operatorname{Irr}(H)$ bis auf W-Konjugation. Dazu führen wir eine Abbildung $\mathcal{R}$ ein, die dem Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von $R^\vee$ zuordnet.

Definition und Satz 4.2.1. *Sei*

$$\mathcal{R} : \{\textit{Untergruppen von } H\} \longrightarrow \{\textit{abgeschlossene Unterwurzelsysteme von } R^\vee\}$$

mit

$$\mathcal{R}(K) := \{\alpha \in R^\vee \mid k_\alpha(-1) \in K\}.$$

Für $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ *heißt* $\mathcal{R}(\chi) := \mathcal{R}(\ker(\chi))$ *das zu* χ *assoziierte Unterwurzelsystem von* $R^\vee$*.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{R}(K)$ für alle Untergruppen $K \leq H$ ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von $R^\vee$ bildet.

Aus den Relationen in Bemerkung 2.1.8 erkennen wir, dass $\mathcal{R}(K)$ ein Wurzelsystem ist.

Das Unterwurzelsystem $\mathcal{R}(K)$ ist gemäß der Definition in [Kan01, 12-1] abgeschlossen, falls für alle Wurzeln $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(K)$ mit $\alpha+\beta \in R^\vee$ auch $\alpha+\beta \in \mathcal{R}(K)$ gilt. Die Relationen in Bemerkung 2.1.8 beweisen

$$k_{\alpha+\beta}(-1) = k_\alpha(-1) \cdot k_\beta(-1) \in K \text{ für } \alpha, \beta \in \mathcal{R}(K) \text{ mit } \alpha + \beta \in R^\vee$$

und damit $\alpha + \beta \in \mathcal{R}(K)$ für solche Wurzeln. Also ist $\mathcal{R}(K)$ ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von $R^\vee$. □

Für spätere Beweise brauchen wir folgendes wohlbekannte Lemma über irreduzible Wurzelsysteme:

Lemma 4.2.2. *Seien R_F ein Fundamentalsystem des irreduziblen Wurzelsystems $R^\vee$, $\beta_1, \beta_2 \in R_F$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_j \in R_F$ die Knoten auf dem kürzesten Weg zwischen β_1 und β_2 im Dynkindiagramm. Dann gilt*

$$\beta_1 + \sum_{i=1}^{j} \gamma_i + \beta_2 \in R^\vee.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus den in [Car72, Abschnitt 3.6] angegebenen Wurzelsystemen. $\square$

Wir ordnen nun umgekehrt auch Teilmengen von $R^\vee$ Untergruppen von H zu.

Definition 4.2.3. Mit

$$\mathcal{H}(R') := \langle k_\alpha(-1) \,|\, \alpha \in R' \rangle \text{ für } R' \subseteq R^\vee$$

definieren wir eine Abbildung

$$\mathcal{H} : \{\text{Teilmengen von } R^\vee\} \longrightarrow \{\text{Untergruppen von } H\}\,.$$

Diese Abbildung besitzen folgende grundsätzlichen Eigenschaften.

Lemma 4.2.4. *Es gelten*

(a) $R' \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R}(R'))$ *für jede Menge* $R' \subseteq R^\vee$,

(b) $\mathcal{H}(R') = \mathcal{H}({R_F}')$ *für jedes Unterwurzelsystem* $R' \subseteq R'^\vee$ *und jedes Fundamentalsystem* ${R_F}'$ *von* R',

(c) $\mathcal{H}(\mathcal{R}(K)) \leq K$ *für jede Untergruppe* $K \leq H$.

(d) $\mathcal{H}(R'') \leq \mathcal{H}(R')$ *für alle* $R'' \subseteq R' \subseteq R$ *und*

(e) $\mathcal{R}(K'') \subseteq \mathcal{R}(K')$ *für alle* $K'' \leq K' \leq H$.

Beweis. Dies ergibt sich aus den Definitionen von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{R}$ unter Benutzung von Bemerkung 2.1.8. $\square$

Unterwurzelsysteme vom Typ $\mathcal{R}(\chi)$ ($\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$) besitzen eine weiter Eigenschaft.

Lemma 4.2.5. *Sei* $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$. *Dann gilt* $\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi)) = \ker(\chi)$.

Beweis. Die Inklusion $\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi)) \leq \ker(\chi)$ folgt aus der Definition von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{R}$.

Für die verbleibende Inklusion bestimmen wir Erzeuger von $\ker(\chi)$ und zeigen, dass diese in $\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi))$ liegen.

Seien R_F ein Fundamentalsystem in $R^\vee$,

$$M_1 := R_F \cap \mathcal{R}(\chi) \text{ und } M_2 := R_F \setminus M_1.$$

Die maximale Untergruppe $\ker(\chi)$ wird erzeugt von den Elementen

$$k_\alpha(-1) \ (\alpha \in M_1)$$

und

$$k_{\alpha_1}(-1) \cdot k_{\alpha_2}(-1) \ (\alpha_1, \alpha_2 \in M_2),$$

wobei auf dem kürzesten Weg zwischen α_1 und α_2 im Dynkindiagramm keine Wurzeln aus M_2 liegen. Für die Erzeuger der ersten Form ist $k_\alpha(-1) \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi))$ $(\alpha \in M_1)$ offensichtlich.

Bei den Erzeugern der zweiten Art liegen auf dem kürzesten Weg zwischen α_1 und α_2 Wurzeln $\gamma_1, \ldots, \gamma_j \in M_1$. Nach Lemma 4.2.2 gilt $\beta := \alpha_1 + \sum_{i=1}^{j} \gamma_i + \alpha_2 \in R^\vee$, so dass gemäß Bemerkung 2.1.8 folgende Umformung möglich ist:

$$k_\beta(-1) = k_{\alpha_1}(-1) \cdot k_{\alpha_2}(-1) \prod_{i=1}^{j} k_{\gamma_i}(-1).$$

Dieses Element liegt wegen $\alpha_1, \alpha_2 \notin M_1$ und $\gamma_i \in M_1$ im Kern von χ, was $\beta \in \mathcal{R}(\chi)$ und

$$k_{\alpha_1}(-1) \cdot k_{\alpha_2}(-1) \in \langle k_\alpha(-1) \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi) \rangle \ \ (\alpha_1, \alpha_2 \in M_2)$$

beweist. Dies zeigt

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi)) = \ker(\chi).$$

□

Dieses Lemma hat mehrere Eigenschaften des Unterwurzelsystems $\mathcal{R}(\chi)$ $(\chi \neq 1)$ zur Folge.

Korollar 4.2.6. *(a) Für einen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ gilt*

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi))) = \mathcal{R}(\chi).$$

(b) Zu einer Wurzelmenge $R' \subseteq R^\vee$ mit $\mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \neq R'$ gibt es keinen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ mit $\mathcal{R}(\chi) = R'$.

(c) *Seien* $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$, $\mathcal{R}(\chi) \subseteq R'$ *ein abgeschlossenes Unterwurzelsystem von* $R^\vee$ *mit* $\mathcal{H}(R') \neq H$. *Dann gilt*

$$R' = \mathcal{R}(\chi).$$

Beweis. Die Teile (a) und (b) werden vom vorangegangenen Lemma impliziert.

Bei (c) folgen aus $\mathcal{R}(\chi) \subseteq R'$ und Lemma 4.2.4 (d) die Inklusionen

$$\ker(\chi) = \mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi)) \leq \mathcal{H}(R') \lneq H.$$

Wegen $|H : \ker(\chi)| = 2$ ergibt sich daraus $\mathcal{H}(R') = \ker(\chi)$ und $\mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) = \mathcal{R}(\chi)$. Aufgrund der Eigenschaften 4.2.4 (a) gilt zudem

$$R' \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) = \mathcal{R}(\chi).$$

Zusammen mit der vorausgesetzten Inklusion $\mathcal{R}(\chi) \subseteq R'$ folgt daraus $R' = \mathcal{R}(\chi)$. □

Bei der Klassifikation der möglichen $\mathcal{R}(\chi)$ spielen wegen 4.2.6 (c) folgende Fundamentalsysteme maximaler abgeschlossener Unterwurzelsysteme eine zentrale Rolle.

Definition 4.2.7. Seien $R_F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ ein Fundamentalsystem in $R^\vee$ und

$$\alpha_0^\star = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$$

die höchste Wurzel in $R^\vee$.

Für $i \in \{1, \dots, l\}$ sei

$$R_{Fi} := \begin{cases} \{\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha_i}, \dots, \alpha_l\} & k_i = 1, \\ \{\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha_i}, \dots, \alpha_l, -\alpha_0^\star\} & k_i \text{ prim.} \end{cases}$$

Jedes Fundamentalsystem eines maximalen abgeschlossenen Unterwurzelsystems von $R^\vee$ ist gemäß [Kan01, 12-1] zu einem dieser R_{Fi} unter W konjugiert.

Diese Bezeichnungsweise überträgt sich in natürlicher Weise auf reduzible Wurzelsysteme. Statt $(R_{Fi})_j$ schreiben wir $R_{Fi,j}$. Bei reduziblen Wurzelsystemen gibt es für jede Zusammenhangskomponente des Dynkindiagramms ein zugehöriges Wurzelsystem und darin eine höchste Wurzel. Sei k'_j der Koeffizient vor der j-ten Wurzel in der Summe all dieser Wurzeln. Diese Zahlen (k'_j) nennen wir *verallgemeinerte Koeffizienten der höchsten Wurzeln.*

Mit diesen Fundamentalsystemen beschreiben wir mögliche Fundamentalsysteme von $\mathcal{R}(\chi)$. Dafür benötigen wir zuvor einige kleinere Lemmata.

Lemma 4.2.8. *Sei* $i \in \{1, \dots, l\}$ *mit* $k_i \in \{1, 2\}$. *Dann ist* $\mathcal{H}(R_{Fi})$ *eine maximale Untergruppe von* H.

Beweis. Bei $k_i = 1$ besteht R_{Fi} nur aus $l-1$ Elementen, woraus $|\mathcal{H}(R_{Fi})| = 2^{l-1}$ mit Satz 2.1.6 (h) folgt.

Bei $k_i = 2$ ergibt sich mit Hilfe der Bemerkung 2.1.8 für den Erzeuger $k_{\alpha_0^\star}(-1)$ die Aussage $k_{\alpha_0^\star}(-1) \in \mathcal{H}(R_{Fi} \setminus \{-\alpha_0^\star\})$. Daraus folgt $\mathcal{H}(R_{Fi}) = \mathcal{H}(R_{Fi} \setminus \{-\alpha_0^\star\})$. Somit wird die Gruppe von $l-1$ Elementen erzeugt. Dies zeigt, dass $\mathcal{H}(R_{Fi})$ eine maximale Untergruppe von H ist. □

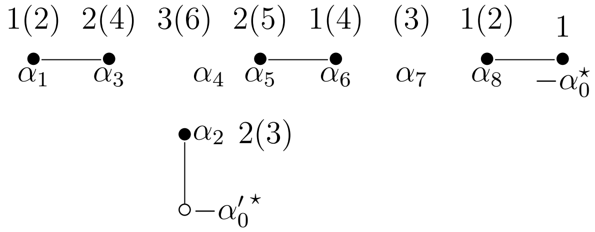
Andere Teilmengen mit dieser Eigenschaft sind folgende:

Lemma 4.2.9. *Seien $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $k_i \in \{3, 5\}$, k'_j die verallgemeinerten Koeffizienten der höchsten Wurzeln im Wurzelsystem zu R_{Fi} und $i' \in \{0, 1, \dots, l\}$ mit $i' \neq i$. Dann ist $\mathcal{H}(R_{Fi,i'})$ eine maximale Untergruppe von H, falls $k'_{i'} \in \{1, 2\}$ gilt.*

Beweis. Die Gruppe $\mathcal{H}(R_{Fi,i'})$ wird gemäß der Argumentation im Beweis zu Lemma 4.2.8 von einer Menge mit $l-1$ Elementen erzeugt. Aus den Relationen in 2.1.8 ergibt sich mit kleineren Umformungen $\left|\mathcal{H}(R_{Fi,i'})\right| = 2^{l-1}$.

□

Für die Bestimmung möglicher Mengen $\mathcal{R}(\chi)$ benötigen wir später noch folgende Aussage. Sei $R^\vee$ ein Wurzelsystem vom Typ E_8 und $R_{F7,4}$ folgendes Fundamentalsystem eines abgeschlossenen Unterwurzelsystems. Unter den Knoten wurden die Namen der Wurzeln vermerkt, während über der Wurzel α_j die Koeffizienten „$k'_j(k_j)$“ stehen, falls die Wurzel α_j in R_F bzw. R_{Fi} liegt.



Lemma 4.2.10. *Seien $R^\vee$ ein Wurzelsystem vom Typ E_8, R'' das maximale abgeschlossene Unterwurzelsystem mit $R_{F7,4}$ als Fundamentalsystem und R' ein maximales abgeschlossenes Unterwurzelsystem in R''. Dann gilt*

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \neq R'.$$

Beweis. Wir gehen die einzelnen Möglichkeiten für R' durch. Das Fundamentalsystem von R' sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_{F7,4,i''}$ für ein geeignetes i'':

- Bei $2 \big| k_{i''}$ liegt α_7 in $\mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \setminus R'$.
- Analog gilt bei $2 \nmid k_{i''}$ stets $k'_{i''} = 2$ gemäß der obigen Grafik und somit $\alpha_4 \in \mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \setminus R'$.

- Für $\alpha_{i''} = -\alpha_0^\star$ ergibt sich $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \in \mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \setminus R'$.
- Aus $\alpha_{i''} = -\alpha_0'^\star$ folgt $\alpha_7 \in \mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \setminus R'$.

Die zeigt

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}(R')) \neq R'.$$

□

Mit Hilfe der letzten drei Lemmata können wir nun folgende wichtige Aussage beweisen.

Satz 4.2.11. *Sei* $1 \neq \chi \in \operatorname{Irr}(H)$. *Dann ist jedes Fundamentalsystem von* $\mathcal{R}(\chi)$ *zu einem der unten angegebenen Fundamentalsysteme* W*-konjugiert:*

(a) R_{Fi} *für ein* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *mit* $k_i = 1$ *oder* $k_i = 2$*,*

(b) $R_{Fi,i'}$ *für gewisse* $i, i' \in \{1, \ldots, l\}$ *mit* $i \neq i'$*, ungeradem primen* k_i*, und ungeradem* $k_{i'}$ *bzw.* $R_{Fi,0}$ *für* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *mit ungeradem primen* k_i*.*

Beweis. Als abgeschlossenes Unterwurzelsystem ist $\mathcal{R}(\chi)$ in einem maximalen Unterwurzelsystem R' enthalten. Gemäß dem Satz von Borel-de Siebenthal aus [Kan01, 12-1] hat R' nach entsprechender W-Konjugation R_{Fi} für ein geeignetes

$$i \in \{j \in \{1, \ldots, l\} \mid k_j = 1 \text{ oder } k_j \text{ prim}\}$$

als Fundamentalsystem. Wir können annehmen, dass R_{Fi} bereits ein einfaches System von R' ist.

Wir entscheiden anhand von $\mathcal{H}(R')$, ob $\mathcal{R}(\chi) = R'$ gilt. Dazu betrachten wir die verschiedenen Werte von k_i:

1. Fall: $k_i = 1$ oder $k_i = 2$

   Gemäß dem Lemma 4.2.8 gilt dann $\mathcal{H}(R_{Fi}) \neq H$. Mit Hilfe von Korollar 4.2.6 (c) folgt daraus, dass R_{Fi} ein Fundamentalsystem von $R(\chi)$ ist.

2. Fall: k_i ist ungerade und prim

   Hier gilt $\mathcal{H}(R') = H$ und damit $R' \neq \mathcal{R}(\chi)$. In diesem Fall gibt es ein in R' maximales abgeschlossenes Unterwurzelsystem R'' mit

   $$R' \supsetneq R'' \supseteq \mathcal{R}(\chi).$$

   Sei $R_{Fi,i'}$ das Fundamentalsystem von R'' und k'_j die verallgemeinerten Koeffizienten in den höchsten Wurzeln in R'. Wir prüfen nun anhand der Werte von $k'_{i'}$ die Gleichung $R' = \mathcal{R}(\chi)$ nach.

- Bei $k'_{i'} \in \{1,2\}$ gilt $\mathcal{H}(R'') \neq H$ gemäß Lemma 4.2.9. Nur bei $2 \nmid k_{i'}$ wird auch $\alpha_i \notin \mathcal{R}(\mathcal{H}(R''))$ erfüllt. Also gilt $R' = \mathcal{R}(\chi)$ nur für $2 \nmid k_{i'}$. Dies ist der in (b) beschriebene Fall.
- Laut [Kan01, Tabelle 7] ist $k'_{i'} \notin \{1,2\}$ nur dann möglich, falls $R^\vee$ ein Wurzelsystem vom Typ E_8 ist und R'' nach geeigneter W-Konjugation die Menge $R_{F7,4}$ als Fundamentalsystem hat. Wegen $\mathcal{H}(R_{F7,4}) = H$ muss $\mathcal{R}(\chi)$ in einem maximalen abgeschlossenen Unterwurzelsystem R''' von R'' liegen. Gemäß 4.2.10 gilt für alle möglichen Unterwurzelsysteme R''' die Ungleichung
$$\mathcal{R}(\mathcal{H}(R''')) \neq R'''.$$
Demzufolge können wir R''' als Kandidaten für $\mathcal{R}(\chi)$ ausschließen.

Insgesamt verbleiben nur die in der Behauptung aufgeführten Möglichkeiten für Fundamentalsysteme von $\mathcal{R}(\chi)$. □

Dies bedeutet für die Charaktere von H folgendes:

Korollar 4.2.12. *Sei $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$. Dann gibt es ein $1 \leq i_0 \leq l$, so dass nach einer geeigneten W-Konjugation*
$$\chi(h_i) = \begin{cases} -1 & i = i_0, \\ 1 & i \neq i_0 \end{cases} \quad \textit{für alle } 1 \leq i \leq l$$
gilt, oder es existieren Zahlen i, i_0 mit $1 \leq i_0 < i_1 \leq l$, $2 \nmid k_{i_0} \cdot k_{i_1}$, primen k_{i_0} oder k_{i_1} und
$$\chi(h_i) = \begin{cases} -1 & i \in \{i_0, i_1\} \\ 1 & i \notin \{i_0, i_1\} \end{cases} \quad \textit{für alle } 1 \leq i \leq l.$$

Beweis. Jeder Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ hat nach geeigneter W-Konjugation eines der in 4.2.11 aufgeführten Fundamentalsysteme von $\mathcal{R}(\chi)$. Die angegebenen Charaktere werden durch $\mathcal{R}$ auf Unterwurzelsysteme mit genau diesen dort aufgeführten Fundamentalsystemen abgebildet. □

4.3 Methoden zur Konstruktion maximaler Fortsetzungen

In diesem Abschnitt geben wir eine Beschreibung der Trägheitsgruppe $\mathrm{I}_V(\chi)$ ($\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$) mit Hilfe des abgeschlossenen Unterwurzelsystems $\mathcal{R}(\chi)$ an. Weiter konstruieren wir eine Fortsetzung von χ auf einen Normalteiler von $\mathrm{I}_V(\chi)$. Dieser Charakter ist auch zur Konstruktion maximaler Fortsetzungen geeignet. Am Ende werden Kriterien formuliert, mit denen wir die maximale Fortsetzbarkeit im darauf folgenden Abschnitt beweisen werden.

Lemma 4.3.1. *Für* $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ *gilt*

$$\operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi)) = \rho(\mathrm{I}_V(\chi)).$$

Beweis. Für den trivialen Charakter stimmt die Gleichung offensichtlich. Ansonsten ist χ ein linearer Charakter der Ordnung 2 und für diese stimmt die Trägheitsgruppe mit dem Normalisator des Kerns überein, d.h.

$$\mathrm{I}_V(\chi) = \mathrm{N}_V(\ker(\chi)).$$

Aus Lemma 4.2.5 wissen wir $\ker(\chi) = \mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi))$. Die Elemente aus V operieren auf H gemäß Bemerkung 2.1.8 durch

$$n_\alpha(1)k_\beta(-1)n_\alpha(1)^{-1} = k_{w_\beta(\alpha)}(-1).$$

Für $\beta \in \mathcal{R}(\chi)$ sind $k_\beta(-1)^{n_\alpha(-1)} \in \ker(\chi)$ und $w_\alpha(\beta) \in \mathcal{R}(\chi)$ äquivalent. Daher müssen alle Elemente aus $\mathcal{R}(\chi)$ von der Gruppe ${}^{\mathrm{I}_V(\chi)}/H$ stabilisiert werden. Andererseits stabilisieren die Elemente aus $\operatorname{Stab}_V(\mathcal{R}(\chi))$ ein Erzeugendensystem von $\ker(\chi)$. Dies beweist die Behauptung. □

Die Gruppe $\operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi))$ besitzt eine weitere Beschreibung.

Lemma 4.3.2. *Seien* $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ *und* R_{F_χ} *ein Fundamentalsystem von* $\mathcal{R}(\chi)$. *Dann gilt*

$$\operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi)) = \left\langle W_{\mathcal{R}(\chi)}, \operatorname{Stab}_W(R_{F_\chi}) \right\rangle.$$

Beweis. Die Gruppe $\langle w_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi)\rangle$ stabilisiert $\mathcal{R}(\chi)$. Auch die Elemente von $\operatorname{Stab}_W(R_{F_\chi})$ haben die gewünschten Eigenschaften.

Für die umgekehrte Inklusion sei $w \in \operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi))$ beliebig. Es existiert ein Element $x \in \langle w_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi)\rangle$ mit $x(w(R_{F_\chi})) = R_{F_\chi}$, da alle Fundamentalsysteme in Coxetergruppen laut [Kan01, 4-6] zueinander konjugiert sind. Dies zeigt

$$x \in \left\langle W_{\mathcal{R}(\chi)}, \operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi)) \right\rangle.$$

□

Die Gruppe $W_{\mathcal{R}(\chi)}$ ist ein Normalteiler von $\operatorname{Stab}_W(\mathcal{R}(\chi))$. Wir setzen χ auf den dieser Gruppe entsprechenden Normalteiler I^0 von $\mathrm{I}_V(\chi)$ fort.

Satz 4.3.3. *Für* $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ *gibt es eine Fortsetzung* $\widetilde{\chi} \in \operatorname{Irr}(I^0)$ *von* χ *auf*

$$I^0 := \langle\langle n_\alpha(1) \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi)\rangle, H\rangle \lhd \mathrm{I}_V(\chi),$$

mit $\mathrm{I}_{\mathrm{I}_V(\chi)}(\widetilde{\chi}) = \mathrm{I}_V(\chi)$.

Beweis. Wegen $\langle n_\alpha(1) \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi)\rangle \cap H \leq \langle h_\alpha(-1) \mid \alpha \in \mathcal{R}(\chi)\rangle \leq \ker(\chi)$ wird durch

$$\widetilde{\chi}(n_\alpha(-1)) := 1 \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{R}(\chi) \text{ und } \widetilde{\chi}\rceil_H = \chi$$

eine Fortsetzung von χ auf I^0 definiert.

Sei nun $x \in \mathrm{I}_V(\chi)$ mit $\rho(x) \in \mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi})$. Aufgrund der Relation 2.1.6 (b) ergibt sich dabei folgende Gleichung

$$n_\alpha(1)^x = n_{\rho(x)(\alpha)}(\pm 1) \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{R}(\chi).$$

Aus $\rho(x)(\alpha) \in \mathcal{R}(\chi)$ für alle $\alpha \in \mathcal{R}(\chi)$ folgt $x \in \mathrm{N}_V(I^0)$ und

$$\widetilde{\chi}(n_\alpha(1)^x) = 1 = \widetilde{\chi}(n_\alpha(1)).$$

Dies zeigt $x \in \mathrm{I}_V(\widetilde{\chi})$ und damit $\mathrm{I}_{\mathrm{I}_V(\chi)}(\widetilde{\chi}) = \mathrm{I}_V(\chi)$. □

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt unmittelbar:

Korollar 4.3.4. *Seien $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ und R_{F_χ} ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$, so dass*

(i) $\mathrm{M}(\mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi})) = 1$ *oder*

(ii) es eine Gruppe $U \leq V$ mit $\rho(U) = \mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi})$ gibt, auf die $\chi\rceil_{U\cap H}$ fortsetzbar ist.

Dann ist der Charakter χ in V maximal fortsetzbar.

Beweis. Wir zeigen nacheinander die Aussage unter den verschiedenen Voraussetzungen. Um die Voraussetzung (i) anzuwenden, beweisen wir zuvor $I/I^0 \cong \mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi})$.

Die Gruppe $W_{\mathcal{R}(\chi)}$ operiert gemäß [Kan01, 4-6] auf den Fundamentalsystemen von $\mathcal{R}(\chi)$ frei, d.h.

$$\mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi}) \cap W_{\mathcal{R}(\chi)} = \mathrm{Stab}_{W_{\mathcal{R}(\chi)}}(R_{F_\chi}) = 1.$$

Daraus folgt zusammen mit $\mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi}) \leq \mathrm{N}_W(W_{\mathcal{R}(\chi)})$ die Isomorphie

$$I/I^0 = \rho(I)/\rho(I^0) \cong \left\langle W_{\mathcal{R}(\chi)}, \mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi})\right\rangle/W_{\mathcal{R}(\chi)} \cong \mathrm{Stab}_W(R_{F_\chi}).$$

Nach den Voraussetzungen gilt $\mathrm{M}(I/I^0) = 1$. Gemäß 3.1.1 (b) ist der Charakter $\widetilde{\chi}$ aus 4.3.3 auf ganz $\mathrm{I}_V(\chi)$ fortsetzbar. Dies beweist die Behauptung unter der Voraussetzung (i).

Bei (ii) ergibt sich aus den Lemmata 4.3.1 und 4.3.2 die Gleichung

$$\mathrm{I}_V(\chi) = \left\langle I^0, U\right\rangle.$$

Die Fortsetzung $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}\,(I^0)$ von χ aus Satz 4.3.3 ist invariant unter U.

Mit Hilfe von (ii) können wir χ gemäß Satz 3.1.6 auf $\mathrm{I}_V(\chi)$ fortsetzen. □

Wir haben nun Kriterien, um die maximale Fortsetzbarkeit zu überprüfen. Die Voraussetzungen werden offensichtlich vom trivialen Charakter erfüllt. Für die übrigen Charaktere weisen wir die Voraussetzung anhand der verschiedenen Wurzelsysteme sukzessive im nächsten Abschnitt nach.

4.4 Trägheitsgruppen und Fortsetzungen in den einzelnen Fällen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für jedes irreduzible Wurzelsystem mit zugehörigen Gruppen H und V und jeden nichttrivialen Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$ die Voraussetzung für das Korollar 4.3.4 erfüllt ist. Dazu ist es bei den klassischen Gruppen nötig, die Operation von W auf $R^\vee$ genau zu kennen. Diese wird durch das folgende Lemma beschrieben.

Lemma 4.4.1 (Zu W isomorphe Permutationsgruppe). *Seien $l \in \mathbb{N}$, e_i $(1 \leq i \leq l)$ die Standardbasisvektoren des l-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{C}^l$ und $\overline{Y} = R^\vee \otimes \mathbb{C}$.*

(a) Seien $l \geq 2$, $\alpha_i := e_{i+1} - e_i$ $(1 \leq i < l)$, $R_F := \{\alpha_i \mid 1 \leq i < l\}$, R das zu R_F gehörende Wurzelsystem vom Typ A_{l-1} und $W < \mathrm{GL}(\overline{Y})$ die Coxetergruppe zu R. Mit

$$^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l := \left\{\sigma \in \mathrm{S}_{\{\pm 1,\dots,\pm l\}} \;\middle|\; \sigma(i) = -\sigma(-i) \text{ und } \sigma(i) > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq l\right\}$$

und

$$\mathrm{s}_i \mapsto (i, i+1)(-i, -i-1) \in {}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l \text{ für alle } i \in \{1 \leq i \leq l\}$$

wird ein Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ definiert. Für alle $w \in W$ gilt

$$w(e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq l \text{ mit } i \neq j \text{ und } \sigma := f(w).$$

(b) Seien $\alpha_1 := e_1$, $\alpha_i := e_i - e_{i-1}$, $R_F := \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, R das zu R_F gehörende Wurzelsystem vom Typ B_l und $W < \mathrm{GL}(Y)$ die zugehörige Coxetergruppe. Mit

$$^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l := \left\{\sigma \in \mathrm{S}_{\{\pm 1,\dots,\pm l\}} \;\middle|\; \sigma(i) = -\sigma(-i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l\right\}$$

und

$$s_i \mapsto \begin{cases} (1, -1) \in {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l & i = 1, \\ (i, i-1)(i, -i+1) \in {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l & 2 \leq i \leq l, \end{cases}$$

wird ein Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ definiert. Für jedes Element $w \in W$ mit $f(w) = \sigma$ gilt

$$w(e_i) = \mathrm{sgn}(\sigma(i)) e_{|\sigma(i)|} \text{ für } 1 \leq i \leq l,$$

wobei $\mathrm{sgn} : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \{\pm 1\}$ *die Vorzeichenabbildung ist.*

(c) *Seien* $\alpha_1 := 2e_1$, $\alpha_i := e_i - e_{i-1}$, $R_F := \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, R *das zu* R_F *gehörende Wurzelsystem vom Typ* C_l *und* $W < \mathrm{GL}(Y)$ *die Coxetergruppe zu* R. *Das duale Wurzelsystem* $R^\vee$ *ist das in (b) beschriebene. Daher ist* W *zu der dort definierten Coxetergruppe isomorph und durch* ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l := {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ *können wir aus dem Isomorphismus in (b) einen Isomorphismus* $f : W \to {}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ *ableiten. Für* $w \in W$ *mit* $f(w) = \sigma$ *ergibt sich wie dort*

$$w(e_i) = \mathrm{sgn}(\sigma(i))e_{|\sigma(i)|} \text{ für } 1 \leq i \leq l.$$

(d) *Seien* $\alpha_1 := e_2 + e_1$, $\alpha_i := e_i - e_{i-1}$, $R_F := \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, R *das zu* R_F *gehörende Wurzelsystem vom Typ* D_l *und* $W < \mathrm{GL}(Y)$ *die Coxetergruppe zu* R. *Mit*

$${}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l := \left\{ \sigma \in \mathrm{S}_{\{\pm 1,\ldots,\pm l\}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(i) = -\sigma(-i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l \text{ und} \\ 2 \big| |\{1 \leq i \leq l \mid \sigma(i) < 0\}| \end{array} \right\}$$

und

$$s_i \mapsto \begin{cases} (2,-1)(-2,1) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l & i = 1, \\ (i,i-1)(i,-i+1) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l & 2 \leq i \leq l. \end{cases}$$

wird ein Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$ *definiert.*

Beweis. Die angegebenen Wurzel- und Fundamentalsysteme sind analog zu denen aus [Car72, 3.6] definiert.

Die Eigenschaften von f können leicht nachgerechnet werden. In [GLS98, Rem. 1.8.8] wird die Operation von W auf R beschrieben. □

Gibt es genau eine kurze Wurzel oder genau eine lange Wurzel im Fundamentalsystem, so ist diese α_1. Dies erleichtert die Notation in späteren Kapiteln. Wir beginnen nun mit dem Fall, in denen das $\mathbf{G}$ zugrunde liegende Wurzelsystem vom Typ A_l ($l \in \mathbb{N}$) ist.

Lemma 4.4.2. *Seien* R *das Wurzelsystem aus 4.4.1 (a) vom Typ* A_{l-1} ($l \geq 2$), q *eine ungerade Primzahlpotenz,* $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe zu* R *über* $\overline{\mathbb{F}}_q$, $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ *und* $R_{F\chi}$ *ein Fundamentalsystem zu* $\mathcal{R}(\chi)$. *Dann gilt*

$$\mathrm{M}(\mathrm{Stab}_W(R_{F\chi})) = 1.$$

Beweis. Sei R_F das in Lemma 4.4.1 (a) angegebene Fundamentalsystem von R. Gemäß [Kan01, Tabelle 7] haben alle Koeffizienten k_i in der höchsten Wurzel den Wert 1. Nach Satz 4.2.11 hat $\mathcal{R}(\chi)$ nach geeigneter W-Konjugation R_{Fi} für ein geeignetes $i \in \{1,\ldots,l\}$ mit

$$R_{Fi} = \{\alpha_j \mid j \neq i, 1 \leq j < l\} = \{e_{j+1} - e_j \mid j \neq i, 1 \leq j < l\}$$

als Fundamentalsystem. Die Coxetergruppe W zu $R = R^\vee$ operiert wie in 4.4.1 (a) angegeben auf diesen Wurzeln.

Die Operation von ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ auf $\overline{Y}$, die wir 4.4.1 (a) entnehmen können, erweitern wir auf natürliche Weise mit

$$\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} \text{ für } 1 \leq j \leq l$$

zu einer Operation der Gruppe ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ auf $\mathbb{C}^l$. Für $\sigma \in \mathrm{Stab}_{{}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l}(R_{Fi})$ gilt

$$|\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, e_j\rangle > 0\}| = |\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, \sigma(e_j)\rangle > 0\}|\,.$$

(Dabei ist $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^l$.) Nur für $j \in \{l, i\}$ haben diese Mengen jeweils ein Element. Daher gilt:

$$\sigma(\{e_l, e_i\}) = \{e_l, e_i\}\,.$$

Daraus folgt

$$\sigma(\alpha_j) \in \{\alpha_j, \alpha_{j-l+i}\} \text{ für } j > i$$

und analog

$$\sigma(\alpha_j) \in \{\alpha_j, \alpha_{j+l-i}\} \text{ für } j < i.$$

Bei $\sigma(l) = i$ gilt demnach auch

$$\sigma\left(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}\right) = \{\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{l-1}\}\,.$$

Diese Mengen sind aber nur bei $i = \frac{l}{2}$ gleichmächtig. Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Stab}_{{}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l}(R_{Fi}) = \begin{cases} \langle (1) \rangle & i \neq \frac{l}{2}, \\ \left\langle \prod_{j=1}^{\frac{l-1}{2}} (-j, -j-i)\,(j, j+i) \right\rangle & i = \frac{l}{2}. \end{cases}$$

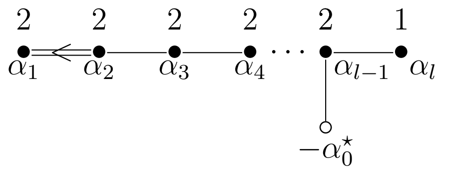
Der Schurmultiplikator beider Gruppen ist gemäß [Isa76, 11.21] trivial. □

Analog gehen wir auch vor, wenn R ein Wurzelsystem vom Typ C_l ist.

Lemma 4.4.3. *Seien R ein Wurzelsystem vom Typ C_l aus 4.4.1 (c), q eine ungerade Primzahlpotenz, $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$, $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ und $R_{F\chi}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$. Dann gilt*

$$\mathrm{M}(\mathrm{Stab}_W(R_{F\chi})) = 1.$$

Beweis. Aus der Konstruktion ergibt sich, dass $R^\vee$ das Wurzelsystem aus 4.4.1 (b) ist. Wir verwenden im Weiteren das dort angegebene Fundamentalsystem R_F von $R^\vee$. Für dieses Wurzelsystem zeigt die Grafik das erweiterte Dynkindiagramm aus [Kan01, Tabelle7]:



Die Zahlen über α_j geben die jeweiligen Koeffizienten k_j in der höchsten Wurzel an. Gemäß Satz 4.2.11 gibt es eine Zahl $1 \leq i \leq l$ und ein Element $w \in W$, so dass R_{Fi} ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $w = 1_W$ an. Die Fundamentalsysteme R_{Fi} $(1 \leq i \leq l)$ sind

$$R_{Fi} = \begin{cases} \{e_2 - e_1, \ldots, e_l - e_{l-1}, -e_l - e_{l-1}\} & i = 1, \\ \left\{e_1, e_2 - e_1, \ldots, \widehat{e_i - e_{i-1}}, \ldots, e_l - e_{l-1}, -e_{l-1} - e_l\right\} & i \in \{2, \ldots l-1\}, \\ \{e_1, e_2 - e_1, \ldots, e_{l-1} - e_{l-2}\} & i = l. \end{cases}$$

Im Lemma 4.4.1 ist die Operation der Coxetergruppe W zu R auf Y angegeben. Die Gruppen W und ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ sind isomorph und somit ist auch eine Operation von ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ auf $R^\vee$ wohldefiniert. Für $\sigma \in \mathrm{Stab}_{{}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l}(R_{Fi})$ gilt

$$\begin{aligned} |\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, e_j \rangle > 0\}| &= |\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, \sigma(e_j) \rangle > 0\}| \text{ und} \\ |\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, e_j \rangle < 0\}| &= |\{x \in R_{Fi} \mid \langle x, \sigma(e_j) \rangle < 0\}|. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Nachrechnen $\sigma(l-1) = l-1$ und damit $\sigma(l) \in \{l, -l\}$. Die Wurzeln α_j $(i < j \leq l-2)$ werden von σ fixiert. Für $i \neq 1$ ist e_1 die einzige kurze Wurzel in R_{Fi}. Also gilt $\sigma(\alpha_1) = \alpha_1$ und damit $\sigma(\alpha_j) = \alpha_j$ für $j < i$. Für $\mathrm{Stab}_W(R_{Fi})$ haben wir damit

$$f(\mathrm{Stab}_W(R_{Fi})) = \langle(+l, -l)\rangle \cong \mathrm{C}_2$$

gezeigt. Der Schurmultiplikator dieser Gruppe ist gemäß [Isa76, 11.21] trivial. □

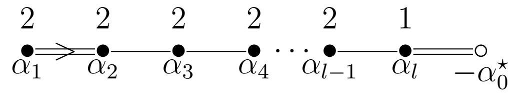
Sehr ähnlich gehen wir auch vor, wenn das Wurzelsystem R vom Typ B_l ist.

Lemma 4.4.4. *Seien R das Wurzelsystem aus 4.4.1 (b) vom Typ B_l $(l \geq 2)$, q eine ungerade Primzahlpotenz,* $\mathbf{G}$ *die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$, $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ ein nichttrivialer Charakter und $R_{F\chi}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$. Dann gilt*

$$\mathrm{M}(\mathrm{Stab}_W(R_{F\chi})) = 1.$$

Beweis. Dann ist $R^\vee$ das Wurzelsystem aus 4.4.1 (c) vom Typ C_l und R_F das dort angegebene Fundamentalsystem von $R^\vee$. Gemäß 4.2.11 genügt es, die Aussage für $R_{F\chi} = R_{Fi}$ $(1 \leq i \leq l)$ zu prüfen.

Das erweiterte Dynkindiagramm von $R^\vee$ aus [Kan01, Tabelle 7] ist das Folgende:



Die Fundamentalsysteme R_{Fi} $(1 \leq i \leq l)$ sind

$$R_{Fi} := \begin{cases} \{e_2 - e_1, \ldots, e_l - e_{l-1}\} & \text{für } i = 1, \\ \left\{2e_1, e_1 - e_2, \ldots, \widehat{e_i - e_{i+1}}, \ldots, e_{l-1} - e_l, -2e_l\right\} & \text{für } 2 \leq i \leq l. \end{cases}$$

Die Weylgruppe W zu R und damit die dazu isomorphe Gruppe ${}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ operiert auf $\mathbb{C}^l$ in der in 4.4.1 angegebenen Weise. Sei $\sigma \in \mathrm{Stab}_{\mathsf{C}_l}(R_{Fi})$. Aus ähnlichen Überlegungen wie beim Beweis des vorangegangenen Lemmas folgt $\sigma(l) \in \{l, -1\}$ und $\sigma(1) \in \{1, -l\}$.

Durch $\sigma(e_l) = e_l$ oder $\sigma(e_l) = -e_1$ wird σ eindeutig bestimmt. Es gilt

$$\mathrm{Stab}_{{}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l}(R_{Fi}) = \begin{cases} \langle (1) \rangle & i \neq \frac{l}{2} + 1, \\ \left\langle \prod_{j=1}^{l} (j, -(l - j + 1)) \right\rangle & i = \frac{l}{2} + 1. \end{cases}$$

Der Schurmultiplikator dieser Gruppen ist gemäß [Isa76, 11.21]trivial. $\square$

Bei einem Wurzelsystem vom Typ D_l benutzen wir eine Aussage, die aus unseren Überlegungen beim Typ B_l folgt.

Lemma 4.4.5. *Seien R ein Wurzelsystem vom Typ B_l $(l \in \mathbb{N})$ aus 4.4.1 (b), V die erweiterte Weylgruppe zu R mit dem abelschen Normalteiler $H \leq V$. Dann liegt bei $H \lhd V$ maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Aus Lemma 4.4.4 folgt mit Hilfe von Korollar 4.3.4 die maximale Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$. $\square$

Die Verbindung zwischen den Wurzelsystemen vom Typ B_l und D_l liefert eine Möglichkeit, diese Aussage auf den Typ D_l zu übertragen, ohne die Voraussetzungen für 4.3.4 bei diesem Wurzelsystem nachzurechnen.

Lemma 4.4.6. *Seien R das Wurzelsystem aus 4.4.1 (d) vom Typ D_l $(l \geq 4)$, q eine ungerade Primzahlpotenz, $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$, V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$ und H der abelsche Normalteiler von V aus 2.3.1.*

Dann liegt bei $H \lhd V$ maximale Fortsetzbarkeit vor.

Beweis. Sei R' das Wurzelsystem aus 4.4.1 (b) vom Typ B_l. Dieses erfüllt

$$\mathbb{Z}R'^{\vee} = \mathbb{Z}R^{\vee}.$$

Laut Lemma 2.1.9 können wir annehmen, dass $\mathbf{G}$ eine Untergruppe der universellen Chevalleygruppe $\mathbf{G}'$ zu R' über $\overline{\mathbb{F}}_q$ ist. Die zugehörige Einbettung $\iota : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ aus Lemma 2.1.9 (b) erfüllt $\iota(H) = H'$ und $\iota(V) \leq V'$, wobei V' die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}'$ mit abelschen Normalteiler H' ist. Aus der maximalen Fortsetzbarkeit bei $H' \lhd V'$ aus Lemma 4.4.5 folgt die maximale Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$. $\square$

Für die exzeptionellen Wurzelsysteme haben wir eine analoge Aussage:

Lemma 4.4.7. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe über* $\mathbb{F}_q$ *zu einem Wurzelsystem* R *vom Typ* E_6*,* E_7*,* E_8*,* F_4 *oder* G_2*,* $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ *und* $R_{F\chi}$ *ein Fundamentalsystem von* $\mathcal{R}(\chi)$*. Dann werden die Voraussetzungen für Korollar 4.3.4 erfüllt.*

Beweis. Jedes Fundamentalsystem $R_{F\chi}$ von $\mathcal{R}(\chi)$ stimmt nach geeigneter W-Konjugation mit einem in Satz 4.2.11 beschriebenen überein. Für die dort angegebenen Kandidaten von $R_{F\chi}$ berechnen wir mit dem Programm [BC03] die Gruppe $\mathrm{Stab}_W(R_{F\chi})$ und stellen fest, dass diese Gruppen außer in den folgenden Fällen zyklisch sind:

- Es gilt $\mathbf{G} = \mathsf{E}_{7,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ und $R_{F3,5}$ ist ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$.
- Es gilt $\mathbf{G} = \mathsf{E}_{8,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ und $R_{F2,7}$ ist ein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$.

Im ersten Fall zeigen wir, dass die Bedingung (ii) von Lemma 4.3.4 erfüllt wird.

Sei U eine Gruppe mit $H \leq U \leq V$ mit $\rho(U) = \mathrm{Stab}_W(R_{F3,5})$ und $P \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Stab}_W(R_{F3,5}))$. Computerrechnungen zeigen $P \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$. Mit dem Computer können wir zwei Elemente $x_1, x_2 \in V$ mit $\rho(\langle x_1, x_2\rangle) = P$ ermitteln. Diese erfüllen

$$[x_1, x_2] \in \ker(\chi).$$

Der Charakter χ ist laut Lemma 3.1.1 (c) auf $\langle H, x_1, x_2\rangle$ fortsetzbar, denn die Gruppe

$$\langle x_1, x_2\rangle/(\ker(\chi) \cap \langle x_1, x_2\rangle)$$

ist abelsch. Somit ist χ auch auf jede Gruppe $H \leq U_2 \leq U$ mit $\rho(U) \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Stab}_W(R_{F3,5}))$ fortsetzbar.

Für jede ungerade Primzahl r sei $H \leq U_r \leq V$ eine Untergruppe mit

$$\rho(U_r) \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{Stab}_W(R_{F3,5})).$$

Wegen $\mathrm{ggT}(o(\chi), r) = 1$ gibt es laut Lemma 3.1.1 (d) eine Fortsetzung von χ auf U_r.

Damit erfüllt χ die Voraussetzungen für Lemma 3.1.2 und ist auf U fortsetzbar. Dies beweist, dass in diesem Fall U die in 4.3.4 (ii) geforderten Eigenschaften besitzt.

Der zweite Ausnahmefall tritt nur für den Charakter χ mit

$$\chi(h_i) = \begin{cases} 1 & i \notin \{2,7\}\,, \\ -1 & i \in \{2,7\} \end{cases}$$

auf. Computerrechnungen zeigen, dass $\mathcal{H}(\mathcal{R}(\chi))$ genau 128 Wurzeln enthält, während aber das Wurzelsystem mit Fundamentalsystem $R_{F2,7}$ vom Typ $\mathsf{A}_5 \times \mathsf{A}_2$ ist und so nur 36 Wurzeln hat. Daher kann $R_{F2,7}$ kein Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$ sein. □

Diese Aussagen führen uns zu einem Beweis von Satz 4.1.4.

Beweis zu Satz 4.1.4. In den Lemmata 4.4.5 und 4.4.6 haben wir die maximale Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$ für die Fälle bewiesen, dass die zugrunde liegenden Wurzelsysteme vom Typ B_l oder D_l ($l \in \mathbb{N}$) ist.

Hat $\mathbf{G}$ ein Wurzelsystem vom exzeptionellen Typ oder vom Typ A_l oder C_l, so können wir mit Hilfe der Lemmata 4.4.7, 4.4.2 und 4.4.3 folgern, dass jeder Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(H)$ die Voraussetzungen für die Anwendung von Korollar 4.3.4 erfüllt. Aus diesem folgt, dass bei $H \lhd V$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt. $\square$

Aus Satz 4.1.4 folgt zusammen mit dem Lemma 4.1.2 und Korollar 4.1.3 die Aussage:

Satz 4.4.8. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine Chevalleygruppe über* $\overline{\mathbb{F}}_q$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *der Standard-Frobeniusendomorphismus,* T *eine* 1*-Sylowlevigruppe von* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr Sylownormalisator. Dann sind die irreduziblen Charaktere von* T *auf ihre Trägheitsgruppe in* N *fortsetzbar.*

Im nächsten Kapitel werden wir die maximale Fortsetzbarkeit für $d \neq 1$ und Gruppen zeigen, deren Wurzelsystem von einem exzeptionellen Typ ist. Wie hier werden dort Untergruppen der erweiterten Weylgruppe zum Beweis dienen. Eine enge Verbindung zu Wurzelsystemen wird es dabei aber nicht geben, da im Allgemeinen die relativen Weylgruppen keine reellen Spiegelungsgruppen sind.

Kapitel 5

Exzeptionelle Typen

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass alle irreduziblen Charaktere einer d-Sylowlevigruppe L von $(\mathbf{G}, F)$ maximal im zugehörigen d-Sylownormalisator N fortsetzbar sind, wenn $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe zu einem exzeptionellen Wurzelsystem ist und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ eine Frobeniusabbildung ist. In diesem Zusammenhang betrachten wir auch den Fall, in dem $\mathbf{G}^F$ isomorph zu ${}^3\mathsf{D}_4(q)$ für eine Primzahlpotenz q ist. Im vorangegangenen Kapitel haben wir Satz 4.1.4, also die maximale Fortsetzbarkeit bei der erweiterten Weylgruppe, bewiesen und daraus Satz 4.4.8 gefolgert. Bei regulären Zahlen d verfolgen wir eine ähnliche Strategie und zeigen, dass die Existenz sehr guter d-Sylowtwists die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ zur Folge hat. Sehr gute Sylowtwists sind gute Sylowtwists, zu denen wir Gruppen mit einer maximalen Fortsetzbarkeitseigenschaft assoziieren können.

Nach einigen kleineren Überlegungen zu sehr guten d-Sylowtwists beweisen wir mit Hilfe des Computers die Existenz sehr guter Sylowtwists im zweiten Abschnitt. Schließlich betrachten wir die nichtregulären Fälle.

Der erste Abschnitt zeigt mit Lemma 5.1.1 auf, dass die Existenz sehr guter Sylowtwists die gewünschte maximale Fortsetzbarkeit bei regulärem d zur Folge hat. Zudem können wir Aussagen für verschiedene triviale Fälle machen. Aufgrund von Lemma 5.1.7 genügt es, im Wesentlichen sehr gute d-Sylowtwists für $d = d_2$ zu finden.

Im zweiten Abschnitt beweisen wir die Existenz sehr guter Sylowtwists für die verbleibenden Fälle. In mehreren Lemmata 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 und 5.2.4 werden Isomorphien und Einzelfälle, vor allem für $d \in \{1, 2\}$ bewiesen. Mit Hilfe von 5.2.5 und Computerrechnungen finden wir in 5.2.6, 5.2.7 und 5.2.8 sehr gute d-Sylowtwists für die exzeptionellen Gruppen. Dies hat die gewünschte maximale Fortsetzbarkeit bei regulärem d zur Folge.

Im letzten Abschnitt konzentrieren wir uns dann auf die Situationen, in denen d für $(\mathbf{G}, F)$ nicht regulär ist. Die Berechnungen zeigen, dass hier in fast allen Fällen die relative Weylgruppe zyklisch ist. Die verbleibenden Fälle werden wir dann genauer betrachten und anhand dieser Situation das spätere Vorgehen im nichtregulären Fall vorstellen. Wir analysieren die Struktur der beteiligten Gruppen und beweisen die maximale Fortsetzbarkeit mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.

Sämtliche Computerrechnungen wurden mit dem Algebrasystem MAGMA [BC03] durchgeführt.

5.1 Reduktionen

Bei regulärem d können wir das Lemma 4.1.2 verallgemeinern.

Lemma 5.1.1. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe über* $\overline{\mathbb{F}}_q$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *eine Frobeniusabbildung aus Bemerkung 2.2.4,* W *die Weylgruppe von* $\mathbf{G}$*,* ϕ *der von* F *induzierte Kocharaktergitterautomorphismus und* V *die erweiterte Weylgruppe von* $\mathbf{G}$ *mit abelschem Normalteiler* H*. Für eine für* $W\phi$ *reguläre Zahl* d *seien* $v\phi$ *ein guter* d*-Sylowtwist,* $U := V^{vF}$ *und* $K := U \cap H$*. Weiter seien* L *eine* d*-Sylowlevigruppe von* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr* d*-Sylownormalisator.*

Dann liegt bei $L \lhd N$ *maximale Fortsetzbarkeit vor, wenn bei* $K \lhd U$ *diese vorliegt.*

Beweis. Aus der Bemerkung 2.3.15 folgt, dass $T := \mathbf{T}^{vF}$ eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ und $\langle U, T\rangle$ ihr d-Sylownormalisator ist.

$$\begin{tikzcd} & \langle U,T\rangle & \\ T \arrow[ur, dash] & & U \arrow[ul, dash] \\ & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Gemäß Satz 3.1.6 folgt dann aus der maximalen Fortsetzbarkeit bei $K \lhd U$, dass die Charaktere von T auf ihre Trägheitsgruppe in $\langle U, T\rangle$ fortsetzbar sind.

Nach Lemma 1.2.5 ist N zu $\langle U, T\rangle$ in $\mathbf{G}$ so konjugiert, dass sich die maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd \langle U, T\rangle$ auf $L \lhd N$ überträgt. □

Wir werden daher bei regulärem d einen guten d-Sylowtwist $v\phi \in V\phi$ suchen und die damit definierten Gruppen $K \lhd U$ analysieren. Gemäß Lemma 2.3.1 hängt der Isomorphietyp der Gruppen nur davon ab, ob q gerade oder ungerade ist.

Bei gerader Charakteristik ist zudem folgende Aussage möglich.

Bemerkung 5.1.2 $(2\big|q)$**.** *Seien* $2\big|q$ *eine Primzahlpotenz und* $\mathbf{G}$*,* F *und* $W\phi$ *wie in Lemma 5.1.1. Weiter seien* d *eine für* $W\phi$ *reguläre Zahl,* L *eine* d*-Sylowlevigruppe von* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr* d*-Sylownormalisator. Dann liegt bei* $L \lhd N$ *maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Wegen $2\big|q$ gilt $V = W$, also gibt es einen guten d-Sylowtwist $v\phi \in V\phi$. Die Gruppe $H \cap \mathrm{C}_V(v\phi) \leq H = 1$ ist gemäß 2.3.1 (a) trivial. Daher werden alle Voraussetzungen für 5.1.1 erfüllt. □

Als nächstes behandeln wir einen weiteren trivialen Fall, bei dem d nicht regulär sein muss.

Lemma 5.1.3. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Ist die relative Weylgruppe einer d-Sylowlevigruppe L zyklisch, so sind alle irreduziblen Charaktere von L in N maximal fortsetzbar.*

Beweis. Dies folgt aus 3.1.1 (a). □

Wir führen nun noch mehrere Begriffe ein, die unsere Sprechweise in den folgenden Beweisen vereinfachen. Sie übertragen nur verschiedene Begriffe bei reduktiven Gruppen auf die Gruppe V mit ihrem Automorphismus ϕ.

Definition 5.1.4. Seien R ein irreduzibles Wurzelsystem, V die erweiterte Weylgruppe zu R und ϕ ein aus einem Automorphismus des Dynkindiagramms abgeleiteter Automorphismus von V, der wie in 2.3.3 definiert ist.

Dann nennen wir das Element $v\phi$ ($v \in V$), für das $\rho(v)\phi$ ein reguläres Element ist, *d-Sylowtwist von* (V, ϕ). Ein d-Sylowtwist $v\phi$ von (V, ϕ) mit

$$\rho(\mathrm{C}_V(v\phi)) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$$

heißt *guter d-Sylowtwist von* (V, ϕ).

Ein Element $v\phi$ mit $v \in V$ nennen wir *sehr guten d-Sylowtwist von* (V, ϕ), falls $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist ist und bei $\mathrm{C}_H(v\phi) \lhd \mathrm{C}_V(v\phi)$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt.

Folgende Aussage wird in diesem und dem nächsten Abschnitt bewiesen.

Satz 5.1.5. *Seien V eine erweiterte Weylgruppe vom Typ E_l ($6 \leq l \leq 8$), F_4, G_2 oder D_4, W die zugehörige Weylgruppe und ϕ ein von einem längenerhaltenden Graphautomorphismus des Dynkindiagramms induzierter Automorphismus von V. Dieser habe beim Typ D_4 die Ordnung 3. Weiter sei d eine reguläre Zahl für $W\phi$.*

Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist $v\phi \in V\phi$ für (V, ϕ).

Es sind mehrere Einzelfallbetrachtungen zum Beweis dieses Satzes nötig. Ein genereller Beweis ist möglich, falls die Faktorgruppe ${}^{U}\!/K$ zyklisch ist und $\phi = \mathrm{id}_V$.

Lemma 5.1.6. *Seien W, V, d und ϕ wie in 5.1.5 mit $\phi = \mathrm{id}_V$ und d eine reguläre Zahl für W, für die ein reguläres Element $w \in W$ der Ordnung d mit zyklischem Zentralisator $\mathrm{C}_W(w)$ existiert. Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist von (V, ϕ).*

Beweis. Seien $w' \in W$ ein Element mit $\langle w' \rangle = \mathrm{C}_W(w)$ und $v \in V$ mit $\rho(v) = w'$. Dann existiert eine Zahl $j \in \mathbb{N}$ mit $w'^j = w$. Für diese Zahl j ist v^j wegen $\rho(v^j) = w$ ein d-Sylowtwist mit

$$\rho(\mathrm{C}_V(v^j)) \geq \rho(\langle v \rangle) = \langle w' \rangle .$$

Also ist v^j ein guter d-Sylowtwist für (V, id_V).

Die Aussage über die Fortsetzbarkeit ergibt sich aus der zyklischen Faktorgruppe ${}^{V^{vF}}\!/H^{vF}$ mit Lemma 3.1.1 (a). □

Die nächsten zwei Bemerkungen zeigen folgende Aussage:

Lemma 5.1.7. *Seien W, V, d und ϕ wie in 5.1.5.*

Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist für (V, ϕ), falls ein sehr guter d_2-Sylowtwist $v'\phi^{\frac{d}{d_2}}$ von $(V, \phi^{\frac{d}{d_2}})$ und ein d-Sylowtwist $v\phi$ mit $(v\phi)^{\frac{d}{d_2}} = v'\phi^{\frac{d}{d_2}}$ existieren.

Wir zeigen zunächst, dass $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist von (V, ϕ) ist.

Bemerkung 5.1.8. *Seien d regulär für $W\phi$, $v\phi \in V\phi$ ein d-Sylowtwist für (V, ϕ) und $(v\phi)^j$ ein guter d_2-Sylowtwist mit $j := (d)_{2'}$, der $2'$-Anteil von d.*

Dann ist auch $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist von (V, ϕ).

Beweis. Für $U := \mathrm{C}_V(v\phi)$ zeigen wir

$$\rho(U) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi).$$

Die Inklusion $\rho(\mathrm{C}_V(v\phi)) \leq \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$ ist klar.

Sei $w \in \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$. Wegen

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)\phi) \leq \mathrm{C}_W\left((\rho(v)\phi)^j\right)$$

gibt es auch ein Element $n \in U_j := \mathrm{C}_V((v\phi)^j) \leq U$ mit $\rho(n) = w$.

Da $v\phi$ auf

$$K_j := \mathrm{C}_H\left((v\phi)^j\right)$$

einen Automorphismus der Ordnung j mit Fixpunktgruppe $K := \mathrm{C}_H(v\phi)$ induziert und $\mathrm{ggT}(|K_j|, j) = 1$ gilt, können wir die Aussage über teilerfremde Gruppenoperationen aus [Hup98, 14.5 (c)] benutzen und erhalten

$$K_j = K \times [K_j, v\phi].$$

Daher existieren Elemente $k_2 \in K$ und $k_1 \in K_j$ mit

$$n^{-1}n^{v\phi} = k_2[k_1, v\phi].$$

Kleinere Rechnungen zeigen

$$(nk_1)^{v\phi} = nk_2[k_1, v\phi]k_1^{v\phi} = nk_1k_2$$

und

$$nk_1 = (nk_1)^{(v\phi)^j} = nk_1(k_2)^j.$$

Daraus folgen $k_2^j = 1$ und $k_2 = 1_K$ wegen $2 \nmid j$. Dies zeigt $nk_1 \in U$ bzw. $w \in \rho(U)$.

Somit ist $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist von (V, ϕ). $\square$

Bei dieser und der anschließenden Bemerkung ist zu beachten, dass die Automorphismen ϕ und ϕ^j verschieden sein können. Dies tritt auf, falls das zugrunde liegende Wurzelsystem vom Typ D_4 ist und ϕ vom Graphautomorphismus der Ordnung 3 induziert wird.

Bemerkung 5.1.9. *Seien $v\phi$ ein d-Sylowtwist für (V, ϕ) und $(v\phi)^j$ ein sehr guter d_2-Sylowtwist für (V, ϕ^j) mit $j := d_{2'}$. Dann ist $v\phi$ ein sehr guter d-Sylowtwist von (V, ϕ).*

Beweis. Wir benutzen neben den Gruppen $U := \mathrm{C}_V(v\phi)$ und $K := U \cap H$ die analog definierten Gruppen $U_j := \mathrm{C}_V((v\phi)^j)$ und $K_j := \mathrm{C}_H((v\phi)^j)$. Wie im Beweis zu Bemerkung 5.1.8 gilt

$$K_j = [K_j, v\phi] \times K.$$

Laut Bemerkung 5.1.8 ist $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist.

Sei $\chi \in \mathrm{Irr}\,(K)$. Eine Fortsetzung $\widetilde{\chi}$ dieses Charakters auf K_j wird durch

$$\widetilde{\chi}\rceil_{[K_j, v\phi]} = 1$$

definiert.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & U_j \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & \widetilde{\chi}' & \mathrm{I}_{U_j}(\widetilde{\chi}) \arrow[dl, dash] & & U \arrow[ddll, dash] \\
 & & \langle K_j, \mathrm{I}_U(\chi)\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
\widetilde{\chi} & K_j \arrow[dr, dash] & & \mathrm{I}_U(\chi) & \widetilde{\chi}'\rceil_{\mathrm{I}_U(\chi)} & \\
 & & K \arrow[ur, dash] & \chi & &
\end{tikzcd}$$

Aus der Definition von U und K_j folgt $U \leq \mathrm{N}_V(K_j)$, da gemäß der Gruppentheorie für alle $u \in U$ die Gleichung

$$K_j^u = \mathrm{C}_H\left((v\phi)^j\right)^u = \mathrm{C}_{H^u}\left(((v\phi)^j)^u\right) = \mathrm{C}_H\left((v\phi)^j\right) = K_j$$

gilt. Daraus ergibt sich $U \leq \mathrm{N}_{U_j}([K_j, v\phi])$ und daraus

$$\mathrm{I}_{U_j}(\widetilde{\chi}) \geq \mathrm{I}_U(\chi).$$

Gemäß den Voraussetzungen existiert eine Fortsetzung $\widetilde{\chi}'$ von $\widetilde{\chi}$ auf $\mathrm{I}_{U_j}(\widetilde{\chi})$. Schränken wir diese dann auf $\mathrm{I}_U(\chi)$ ein, so erhalten wir eine maximale Fortsetzung von χ. $\square$

Dies führt zu einem Beweis von 5.1.7.

Beweis von Lemma 5.1.7. Die beiden vorangegangenen Bemerkungen zeigen die Behauptung. $\square$

Ein Beweis eines analogen Resultats für den 2-Anteil von d wäre wünschenswert. Jedoch sind die durch die teilerfremden Gruppenoperationen möglichen Aussagen im allgemeinen dort falsch.

5.2 Regulärer Fall

In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 5.1.5. Für $d = 1$ und $\phi = \mathrm{id}_V$ wurden der Satz 5.1.5 schon in 4.1.4 gezeigt. Bei $d = 2$ können wir häufig das folgende Lemma verwenden.

Lemma 5.2.1. *Seien d eine reguläre Zahl für $W\phi$ und $v\phi$ ein d-Sylowtwist von (V, ϕ) mit $\mathrm{C}_V(v\phi) = V$. Dann ist $v\phi$ ein sehr guter d-Sylowtwist.*

Beweis. Aus $\mathrm{C}_V(v\phi) = V$ folgt

$$W = \rho(\mathrm{C}_V(v\phi)) \leq \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi) \leq W.$$

Also ist $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist.

Aus Satz 4.1.4 ist die maximale Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$ bekannt. Dies beweist die Behauptung. $\square$

Solche d-Sylowtwists gibt es bei mehreren Gruppen. Auch die klassichen Gruppen mit solchen Elementen zählen wir hier auf.

Satz 5.2.2. *Seien V die erweiterte Weylgruppe vom Typ G_2, F_4, E_7, E_8, B_l ($l \in \mathbb{N}$), C_l ($l \in \mathbb{N}$) oder D_l ($l \in \mathbb{N}$, $2 \big| l$) und $\mathbf{w}_0$ wie in 2.3.11 als Bild des längsten Elements in der zugehörigen Weylgruppe definiert. Dann gilt $\tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V)$ und $\tau(\mathbf{w}_0)$ ist ein sehr guter 2-Sylowtwist von (V, id_V).*

Beweis. Wir zeigen zunächst $\tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V)$ und dann, dass $\tau(\mathbf{w}_0)$ ein 2-Sylowtwist ist.

In den aufgeführten Fällen gilt $w_0 \in \mathrm{Z}(W)$ für das längste Element w_0 in W. Dies zeigen bei den exzeptionellen Gruppen Computerrechnungen. Bei den übrigen Gruppen haben wir in Lemma 4.4.1 gezeigt, wie die Gruppen treu auf dem zugehörigen Wurzelsystem R und damit auf $\mathbb{Z}R^\vee$ operieren. In den genannten Fällen gibt es auch ein Element in W, dass wie $-\mathrm{id}$ auf $\mathbb{Z}R^\vee$ operiert. Dieses Element ist zentral in W und gemäß [GP00, 1.5.1] das längste Element von w_0. Mittels 2.3.2 (c) folgt daraus

$$\tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V).$$

Es ist klar, dass $\mathbf{w}_0$ eine gute 2-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ ist und damit gemäß Bemerkung 2.3.12 das Element $\tau(\mathbf{w}_0)$ ein 2-Sylowtwist von (V, id_V) ist. Daraus folgt die Behauptung mit dem Lemma 5.2.1. $\square$

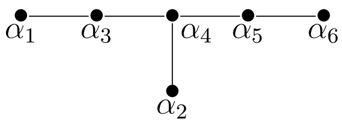
Die Anzahl der zu betrachtenden Fälle können wir weiter verringern, indem wir Isomorphien zwischen den zu betrachtenden Gruppen ausnutzen.

Lemma 5.2.3. *Seien W eine Coxetergruppe vom Typ E_6, V die zugehörige erweiterte Weylgruppe mit dem abelschen Normalteiler H und $\widehat{W}$, $\widehat{V}$, $\widehat{H}$ die entsprechenden Gruppen vom Typ F_4. Weiter sei ϕ der Automorphismus von V, der vom nichttrivialen Automorphismus des Dynkindiagramms induziert wird.*

(a) Für $U := \mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w}_0))$ und $K := U \cap H$ gibt es einen Isomorphismus $\kappa : U \to \widehat{V}$ mit $\kappa(K) = \widehat{H}$.

(b) Der 2-Sylowtwist $\tau(\mathbf{w}_0)\phi \in V\phi$ operiert trivial auf V.

Beweis. Seien R_6 ein Wurzelsystem vom Typ E_6 und $R_F = \{\alpha_1, \ldots \alpha_6\}$ ein Fundamentalsystem mit dem nachfolgendem Dynkindiagramm und $n_1, \ldots, n_6$ die Erzeuger von V.



Dann enthält U die Elemente n_1n_6, n_3n_5, n_4 und n_2.

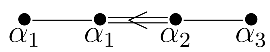
Die Gruppe K wird von den Quadraten dieser Elemente erzeugt. Das Element $\tau(\mathbf{w}_0)$ permutiert gemäß Lemma 2.3.2 (c) auch die Erzeuger h_i der abelschen Gruppe H. Daher hat K die Erzeuger $\{h_i' : 1 \leq i \leq 6\}$ mit

$$h_i' := \begin{cases} h_i & h_i = h_i^{\tau(\mathbf{w}_0)} \\ h_i h_i^{\tau(\mathbf{w}_0)} & h_i \neq h_i^{\tau(\mathbf{w}_0)} \end{cases}$$

Zusammen mit $\rho(U) \leq \mathrm{C}_W(\rho(\tau(\mathbf{w}_0)))$ ergibt sich daraus, dass U von den Elementen n_1n_6, n_3n_5, n_4 und n_2 erzeugt wird. Rechnungen am Computer ergeben, dass diese Elemente die Relationen aus 2.3.1 (b) für die erweiterte Weylgruppe $\widehat{V}$ vom Typ F_4 erfüllen. Wegen $|U| = |\widehat{V}| = 2^4 \cdot |\widehat{W}|$ sind die Gruppen U und $\widehat{V}$ isomorph, d.h. durch

$$\kappa(n_1n_6) = \widehat{n}_1 \ , \ \kappa(n_3n_5) = \widehat{n}_2 \ , \ \kappa(n_4) = \widehat{n}_3 \text{ und } \kappa(n_2) = \widehat{n}_4$$

wird ein Gruppenisomorphismus $\kappa : U \to \widehat{V}$ definiert. Dabei sind die Elemente $\widehat{n}_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ die Erzeuger von $\widehat{V}$ mit $\widehat{h}_i := \widehat{n}_i^2$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Die Nummerierung erfolgt gemäß dem folgenden Dynkindiagramm.



Die Gruppe $\kappa(K)$ enthält die Elemente $\widehat{n}_i^2 = \widehat{h}_i$ $(1 \leq i \leq 4)$, woraus $\kappa(K) = \widehat{H}$ folgt. Dies zeigt den Teil (a) der Behauptung.

Das Element $\tau(\mathbf{w}_0)\phi \in V\phi$ ist gemäß Bemerkung 2.3.12 ein 2-Sylowtwist, da $\mathbf{w}_0\phi$ eine gute 2-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ gemäß der Liste [BM97, Anhang 1] ist.

Der Automorphismus $\tau(\mathbf{w}_0)\phi$ operiert trivial auf V, da $w_0\phi$ auf W trivial operiert und laut Lemma 2.3.2 (c) der Automorphismus $\tau(\mathbf{w}_0)\phi$ die Erzeuger n_i zentralisiert. □

Dies führt zu folgenden sehr guten Sylowtwists.

Lemma 5.2.4. *Seien V die erweiterte Weylgruppe vom Typ E_6, W die zugehörige Coxetergruppe, ϕ der vom nichttrivialen Graphautomorphismus induzierte Automorphismus von V und $\mathbf{w}_0$ das Bild des längsten Elements von W. Dann ist*

(a) $\tau(\mathbf{w}_0)$ ein sehr guter 2-Sylowtwist von (V, id_V),

(b) ϕ ein sehr guter 1-Sylowtwist von (V, ϕ) und

(c) $\tau(\mathbf{w}_0)\phi$ ein sehr guter 2-Sylowtwist von (V, ϕ).

Beweis. Das Element $v := \tau(\mathbf{w}_0)$ ist gemäß Bemerkung 2.3.12 ein 2-Sylowtwist. In der Weylgruppe W ist der Zentralisator des längsten Elements w_0 eine Coxetergruppe vom Typ F_4, was einfache Computerrechnungen zeigen. Zusammen mit dem vorangegangenen Lemma 5.2.3 (a) beweist dies

$$\rho(\mathrm{C}_V(v)) = \mathrm{C}_W(v),$$

also dass v ein guter 2-Sylowtwist ist. Für die Behauptung müssen wir nun die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathrm{C}_H(v) \lhd \mathrm{C}_V(v)$ beweisen. Mit dem Isomorphismus folgt dies aus 4.1.4.

Bei (b) ist ϕ gemäß Bemerkung 2.3.12 ein 1-Sylowtwist. Rechnungen in der Weylgruppe zeigen, dass $\mathrm{C}_W(\phi)$ eine Coxetergruppe vom Typ F_4 ist. Aus 5.2.3 (b) erhalten wir $\mathrm{C}_V(\phi) = \mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w}_0))$ und $\mathrm{C}_H(\phi) = \mathrm{C}_H(\tau(\mathbf{w}_0))$. Insbesondere ist daher ϕ auch ein guter 1-Sylowtwist. Aus den Ausführungen für (a) ist die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathrm{C}_H(\phi) \lhd \mathrm{C}_V(\phi)$ bekannt. Dies beweist (b).

Bei (c) folgt aus Lemma 5.2.3 (b) die Gleichung $\mathrm{C}_V(v\phi) = V$. Zusammen mit Lemma 5.2.1 beweist dies die Behauptung. □

Bei den späteren Computerberechnungen nützen wir folgendes charaktertheoretisches Hilfsmittel.

Lemma 5.2.5. *Seien $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist für (V, ϕ) mit $U := \mathrm{C}_V(v\phi)$. Für jede maximale Untergruppe K_1 von $K := H \cap U$ gelte*

$$K \cap [\mathrm{N}_U(K_1), \mathrm{N}_U(K_1)] \leq K_1.$$

Dann ist $v\phi$ ein sehr guter d-Sylowtwist.

Beweis. Sei $1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}\,(K)$. Der Kern von χ bildet eine maximale Untergruppe K_1 von K. Die Trägheitsgruppe von χ ist dann $I := \mathrm{I}_U(\chi) = \mathrm{N}_U(K_1)$. Nun können wir χ wegen der Voraussetzung des Lemmas

$$K \cap [I, I] \leq \ker(\chi)$$

zu einem Charakter auf ${}^{\langle K,[I,I]\rangle}\!/_{[I,I]}$ liften und gemäß Lemma 3.1.1 (c) auf die abelsche Gruppe ${}^{I}\!/_{[I,I]}$ fortsetzen. Damit haben wir eine maximale Fortsetzung von χ auf I. □

Anhand dieses Kriteriums prüfen wir Satz 5.1.5 nach. Wir beschränken uns zuerst auf Fälle, in denen ϕ trivial auf V operiert.

Satz 5.2.6. *Seien V eine erweiterte Weylgruppe vom Typ E_6, E_7, E_8, F_4 oder G_2 und $d \neq 1$ eine reguläre Zahl der zugehörigen Coxetergruppe W. Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist v.*

Beweis. Wir unterscheiden dabei verschiedene Fälle. Wir beginnen mit $d = 2$, betrachten dann den Fall, in dem die relative Weylgruppe zyklisch ist, und beschreiben anschließend das Vorgehen bei $d_2 \neq d$.

Für $d = 2$ haben wir die Behauptung in den Lemmata 5.2.4 und 5.2.2 bewiesen.

In [BM97, Anhang 1] finden wir eine Liste guter Wurzeln von $\mathbf{w}_0^2$, deren Bilder unter τ gemäß Bemerkung 2.3.12 Sylowtwists sind. In der unten aufgeführten Tabelle 5.1 werden die dort eingeführten Bezeichnungen bzw. Elemente verwendet. Mit diesen berechnen wir die relative Weylgruppe $W_G(\mathbb{L})$ aus Lemma 1.1.10. Ist diese zyklisch, so folgt die Aussage wegen $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \mathrm{C}_W(w)$ bei regulären Zahlen d mit Lemma 5.1.6.

In den Fällen mit $d = d_2 > 2$ zeigen Computerrechnungen, dass die angegebenen Elemente sehr gute d-Sylowtwists sind. In der vierten Spalte der Tabelle steht der sehr gute d-Sylowtwist.

Ist d keine Potenz von 2, so finden wir mit Hilfe der Liste aus [BM97, Anhang 1] einen d-Sylowtwist $v\phi$. Wir haben die bisherigen Sylowtwists so gewählt, dass wir schon wissen, dass $(v\phi)^{d_{2'}}$ ein sehr guter Sylowtwist ist. Also ist dann auch $v\phi$ ein sehr guter d-Sylowtwist.

Die Tabelle 5.1 zeigt die Vorgehensweise in den einzelnen Fällen auf. □

Es bleiben die Fälle, in denen F kein Standard-Frobeniusendomorphismus ist und damit einen nichttrivialen Automorphismus auf V gemäß 2.2.6 und 2.3.3 induziert.

Satz 5.2.7. *Seien V eine erweiterte Weylgruppe vom Typ E_6 bzw. D_4 und ϕ ein Automorphismus von V, der von einem nichttrivialen Graphautomorphismus induziert wird, mit $o(\phi) = 2$ beim Typ E_6 und $o(\phi) = 3$ beim Typ D_4. Weiter seien W die Weylgruppe zu V und d eine reguläre Zahl für $W\phi$. Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist für (V, ϕ).*

Tabelle 5.1: Vorgehen bei regulärem $d > 2$ und exzeptionellen Gruppen mit $\phi = 1$

Typ	d	$\mathrm{C}_W(\rho(v))$ ist zyklisch	nachgerechnet für	Reduktion
E_6	3			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	4		$v = \tau(\mathrm{r}(w')^2)$	
	6			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$
	$8, 9, 12$	$\times$		
E_7	$3, 5$			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	6			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$
	$7, 9, 14, 18$	$\times$		
E_8	$3, 5$			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	$6, 10$			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$
	4		$v = \tau(\mathrm{r}(w)^6)$	
	8		$v = \tau(\mathrm{r}(w)^3)$	
	12			$d = 4$ mit $v = \tau(\mathrm{r}(w)^6)$
	$15, 20, 24, 30$	$\times$		
F_4	3			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	4		$v = \tau(\mathrm{r}(c^3))$	
	6			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$
	$8, 12$	$\times$		
G_2	3			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	6			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$

Beweis. Wir gehen wie im vorangegangenen Satz vor und stellen erstmal fest, welche Aussagen bereits in den vorangegangenen Lemmata bewiesen wurden. Dann beweisen wir die Behauptung bei zyklischer relativer Weylgruppe. Für die verbleibenden Fälle benutzen wir Computerrechnungen und verwenden das Lemma 5.1.7.

Im Lemma 5.2.4 wurde die Aussage 5.1.5 für die Fälle gezeigt, in denen V vom Typ E_6 ist und $d \in \{1, 2\}$ gilt.

In den Fällen, in denen die relative Weylgruppe zyklisch ist, folgt die Aussage nicht aus 5.1.6. Wir wissen aber aus Lemma 5.1.3, dass jeder guter d-Sylowtwist auch sehr gut ist.

Seien V die erweiterte Weylgruppe vom Typ E_6 und $d \in \{8, 12, 18\}$. Aus [BM97, S.131] entnehmen wir eine gute d-te ϕ-Wurzel $\mathbf{w}\phi$ von $\mathbf{w}_0^2$. Dabei ist $\mathbf{w}$ ein ϕ-stabiles Element der Ordnung d. Dann gelten für $v := \tau(\mathbf{w})$ die Aussagen $v \in \mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w})\phi)$, $\langle v \rangle \leq \mathrm{C}_V(v\phi)$ und $\langle \rho(v) \rangle \leq \rho(\mathrm{C}_V(v\phi)$. Gemäß den Ausführungen in [BM97] gilt zudem $\mathrm{C}_W(\rho(\tau(\mathbf{w})\phi)) \cong \mathrm{C}_d$. Wegen

$$\mathrm{C}_d \cong \langle \rho(v) \rangle \leq \rho(\mathrm{C}_V(v\phi)) \leq \mathrm{C}_W(\rho(\tau(\mathbf{w})\phi)) \cong \mathrm{C}_d$$

ist $v\phi$ ein guter d-Sylowtwist. Also ist $\tau(\mathbf{w})\phi$ ein sehr guter d-Sylowtwist.

Ist die Gruppe V vom Typ D_4 mit $o(\phi) = 3$, entnehmen wir den Tabellen aus dem Artikel [BM97] eine gute d-te ϕ-Wurzel $\mathbf{w}\phi$ und definieren mit $v\phi := \tau(\mathbf{w})\phi$ einen d-Sylowtwist. Gemäß den Tabellen gilt $\mathrm{C}_W(\rho(v)\phi) \cong \mathrm{C}_4$. Aus $(v\phi)^3 \in \mathrm{C}_V(v\phi)$ ergibt sich

$$\mathrm{C}_4 \cong \left\langle (v\phi)^3 \right\rangle \leq \rho(\mathrm{C}_V(v\phi)).$$

Also ist $v\phi$ ein sehr guter Sylowtwist.

Für die verbleibenden d's gehen wir wie im Beweis zu 5.2.6 vor. Die Tabelle 5.2 gibt nun die dabei verwendeten Elemente und die einzelnen Fälle an. Wie schon eben verwenden wir die in [BM97, A1] definierten Elemente mit der dort eingeführten Bezeichnungsweise.

Typ	d	$\mathrm{C}_W\,(\rho(v)\phi)$ ist zyklisch	nachgerechnet für	Reduktion auf
${}^2\mathsf{E}_6$	3			$d = 1$ mit $v\phi = \phi$
	4		$v\phi = \tau(\mathrm{r}(c^3))\phi$	
	6			$d = 2$ mit $v\phi = \tau(\mathbf{w}_0)\phi$
	$8, 12, 18$	$\times$		
${}^3\mathsf{D}_4$	1		$v\phi = \phi$	
	2		$v\phi = \tau(\mathbf{w}_0)\phi$	
	3			$d = 1$ mit $v = 1_V$
	6			$d = 2$ mit $v = \tau(\mathbf{w}_0)$
	12	$\times$		

Tabelle 5.2: Vorgehen bei regulärem d mit $\phi \neq 1$

Für die d-Sylowtwists aus der letzten Spalte wurden die Aussagen bereits im Lemma 5.2.4 bzw. 5.2.2 gezeigt. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Wir haben also mit den zwei vorangegangenen Sätzen den Beweis von Satz 5.1.5 abgeschlossen. Nun betrachten wir die Suzuki- und Reegruppen.

Lemma 5.2.8. *Seien $\mathbf{G} \in \left\{\mathsf{B}_2(\overline{\mathbb{F}}_q), \mathsf{G}_2(\overline{\mathbb{F}}_q), \mathsf{F}_4(\overline{\mathbb{F}}_q)\right\}$ und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ eine Frobeniusabbildung, so dass $\mathbf{G}^F$ eine Suzuki- oder Reegruppe ist. Weiter seien L eine Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr Sylownormalisator. Bei $L \lhd N$ liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Wir stellen zunächst zwei zentrale Hilfsmittel vor: das eine wiederholt die Besonderheiten bei $2\big|q$ und das andere ist ein Kriterium, um zu erkennen, dass eine Sylowlevigruppe ein Torus ist. Anschließend zeigen wir, dass unter obigen Voraussetzungen jede Sylowlevigruppe ein Torus ist oder mit $\mathbf{G}$ übereinstimmt, und betrachten die Situation bei $(\mathsf{G}_2(\overline{\mathbb{F}}_3), F)$.

Bei $\mathbf{G} \in \{\mathsf{B}_2(\overline{\mathbb{F}}_q), \mathsf{F}_4(\overline{\mathbb{F}}_q)\}$ ist die Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers 2. In diesem Fall wurde die Behauptung für Sylowlevigruppe, die gleichzeitig Tori sind, in der Bemerkung 5.1.2 bewiesen.

Seien X das Charaktergitter, Y das Kocharaktergitter von $\mathbf{G}$, $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$ und Ψ ein beliebiges tp-zyklotomische Polynom. Die Ψ-Sylowlevigruppe des Ψ-Sylowtorus $(X', Y', w\phi)$ ist laut 1.3.4 ein Torus, falls $Y'^{\perp} \cap R = \emptyset$. Hat Ψ^{a_Ψ} den Grad $\dim(\overline{Y})$, so gilt

$$\ker_{\overline{Y}}(\Psi(w\phi)) = \overline{Y}$$

für jedes Element $w\phi \in W\phi$, für das $(X', Y', w\phi)$ ein Ψ-Sylowtorus ist. Also gilt dann auch $Y' = Y$ und $Y'^{\perp} \cap R = \emptyset$. Die zugehörige Ψ-Sylowlevigruppe ist also ein Torus.

Die Ordnungen der nichttrivialen Ψ-Sylowtori von $(\mathsf{B}_2(\overline{\mathbb{F}}_2), F)$ besitzen den Grad 2, wie wir anhand der in [BM92, S.262] angegebenen Polynome erkennen.

Für die Gruppe ${}^2\mathsf{F}_4(q)$ stehen die Ordnungspolynome der nichttrivialen Sylowtori ebenfalls in [BM92, 3F] und haben Grad 4. Daher sind auch hier alle Sylowlevigruppen Tori.

Die Gruppe ${}^2\mathsf{G}_2(q)$ ist über einem Körper der Charakteristik 3 definiert. Hier sind die relativen Weylgruppen der Sylowtori stets zyklisch, wie man der Tabelle aus [BM97, Anhang 1, S.133] entnehmen kann. Aus Lemma 5.1.3 folgt, dass die Charaktere der Sylowlevigruppe sich im Sylownormalisator maximal fortsetzen lassen. □

Insgesamt haben wir also folgende Aussage bewiesen.

Satz 5.2.9. *Seien $\mathbf{G}$ eine universelle Chevalleygruppe und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ eine Frobeniusabbildung, so dass $\mathbf{G}^F$ eine der Gruppen*

$$\{\mathsf{E}_{6,sc}(q), \mathsf{E}_{7,sc}(q), \mathsf{E}_{8,sc}(q), \mathsf{F}_{4,sc}(q), \mathsf{G}_{2,sc}(q), {}^2\mathsf{E}_{6,sc}(q), {}^3\mathsf{D}_{4,sc}(q), {}^2\mathsf{B}_{2,sc}(q), {}^2\mathsf{F}_{4,sc}(q), {}^2\mathsf{G}_{2,sc}(q)\}$$

für eine geeignete Primzahlpotenz q ist. Weiter seien L eine Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N der zugehörige Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(L)$ maximal in N fortsetzbar.

Beweis. Die Sätze 5.2.6 und 5.2.7 beweisen Satz 5.1.5. Daraus folgt mit dem Lemma 5.1.1 die Behauptung, falls $\mathbf{G}^F$ keine Suzuki- oder Reegruppe ist.

In diesen verbleibenden Fällen zeigt Lemma 5.2.8 die Aussage. □

Im nächsten Abschnitt dehnen wir diese Aussage auch auf nichtreguläre d-Werte aus. Wir vermuten, dass es auch bei klassischen Gruppen sehr gute Sylowtwists gibt, beweisen dies aber nicht in dieser Arbeit.

5.3 Nichtregulärer Fall

Wir verallgemeinern Satz 5.2.9 und zeigen, dass die maximale Fortsetzbarkeitseigenschaft auch gilt, wenn d nicht regulär ist.

Dazu berechnen wir mit Lemma 1.1.10 die Faktorgruppe $^{N}/L$. Wir erhalten dabei folgende Tabelle 5.3, welche die relativen Weylgruppen für alle nichtregulären Zahlen aus 5.2.9 angibt. Die dort angegebenen relativen Weylgruppen werden berechnet, indem ein d-Sylowtwist mit dem Computer und anschließend mit dem Lemma 1.1.10 die relative Weylgruppe bestimmt wird. In der Tabelle steht G_8 für die entsprechende komplexe Spiegelungsgruppe nach der Notation von Shephard-Todd [ST54].

Typ	d	$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$
E_6	5	C_5
E_7	4	G_8
	5	C_{10}
	8	C_8
	10	C_{10}
	12	C_{12}
E_8	7	C_{14}
	9	C_{18}
	14	C_{14}
	18	C_{18}
$^2\mathsf{E}_6$	10	C_5

Tabelle 5.3: Relative Weylgruppen bei nichtregulärem d

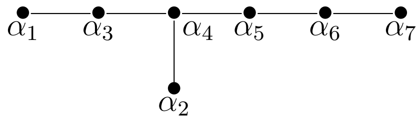
Bei zyklischer relativer Weylgruppe können wir das Lemma 5.1.3 anwenden. Wir konzentrieren uns nun auf die Fälle, in denen die Faktorgruppe nicht zyklisch ist. Folgende Vorgehensweise ist ein Beispiel, wie die Fortsetzbarkeitseigenschaft bei nichtregulärem d im Allgemeinen bewiesen werden kann.

5.3.1 (Vorgehensweise beim nichtregulären Fall). Der Beweis erfolgt in diesen Schritten:

- Bestimmung einer F-stabilen Untergruppe $\mathbf{G}' \leq \mathbf{G}$ und eines d-Sylowtwists v mit Zusatzeigenschaften,
- Bestimmung einer d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, vF)$ und Analyse ihrer Struktur,
- Bestimmung des zugehörigen d-Sylownormalisators und Auffinden eines d-Sylownormalisator von $(\mathbf{G}', vF\rceil_{\mathbf{G}'})$,
- Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit mit Resultaten aus Abschnitt 3.2.

Ziel der Überlegung ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 5.3.2. *Seien R ein Wurzelsystem vom Typ E_7 und $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\}$ ein Fundamentalsystem von R mit folgendem Dynkindiagramm.*



Seien $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus, L eine 4-Sylowlevigruppe für $(\mathbf{G}, F)$ und N der zugehörige Sylownormalisator. Dann sind die Charaktere von L in N maximal fortsetzbar.

Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben beginnen wir die Konstruktion von d-Sylowlevigruppen mit der Wahl eines d-Sylowtwists.

Lemma 5.3.3. *Seien R' das parabolische Unterwurzelsystem zu ${R_F}' := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$ und $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle \leq \mathbf{G}$, die gemäß Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R' ist. Dann ist das Element $v := n_3 n_4 n_2 n_3 n_4 n_5 \in V$ sowohl für $(\mathbf{G}, F)$ als auch $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ ein 4-Sylowtwist.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Voraussetzungen für das Lemma 2.3.16 erfüllt sind und beweisen damit die Aussage.

In R liegt das parabolische Wurzelsystem $\widetilde{R}_1$ vom Typ D_4 mit dem Fundamentalsystem $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_5\}$. Zu $\widetilde{R}_1$ bildet $\mathbf{G}_4 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$ laut Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe. Gemäß [BM97, A1.3] ist $\rho(v)$ ein reguläres Element von $W_{\widetilde{R}_1}$ der Ordnung 4 und damit v ein 4-Sylowtwist von $(\mathbf{G}_4, F\rceil_{\mathbf{G}_4})$.

Gemäß Bemerkung 2.2.7 und den in [Car72, 10.2.5] angegebenen Spiegelungsgraden der Gruppen gilt $a_{\mathsf{D}_4}(4) = a_{\mathsf{E}_7}(4) = a_{\mathsf{E}_6}(4) = 2$. Dabei gibt der Index den Typ des zugrunde liegenden Wurzelsystems an.

Laut Lemma 2.3.16 ist unter diesen Voraussetzungen v auch ein Sylowtwist von $(\mathbf{G}', F')$ und $(\mathbf{G}, F)$. □

Wir konstruieren nun anhand der Aussagen in 1.3 eine 4-Sylowlevigruppe vonn $(\mathbf{G}, F)$.

Lemma 5.3.4. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W)$ das vollständige Wurzeldatum von $(\mathbf{G}, F)$ und v der d-Sylowtwist aus 5.3.3. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S} \leq \mathbf{G}$ von $(\mathbf{G}, vF)$ mit:*

(a) $\mathbb{L} := \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v))$ *mit* $\widetilde{R}_2 = \{\pm\beta_1, \pm\beta_2, \pm\beta_3\}$ *und* $\beta_1 := \alpha_7$, $\beta_2 := \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$ *und* $\beta_3 := 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$,

(b) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$ *und* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,|\, \alpha \in R \rangle$.

(c) $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ *mit* $Z := \langle h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_5}(-1), h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_3}(-1)\rangle$ *und* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \;\middle|\; \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$, *wobei* $\widetilde{R}_1$ *das Wurzelsystem mit dem Fundamentalsystem* $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_5\}$ *ist,*

(d) $L_0 \lhd \mathbf{L}^{vF}$ *und* $\left|\mathbf{L}^{vF} : L_0\right| = (\mathrm{ggT}(q-1,2))^2$ *mit* $L_0 = T_1 \circ_Z G_2$, $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$ *und* $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[d, dash, "(\mathrm{ggT}(2,q-1))^2"] & \\
 & L_0 = T_1 \circ_Z G_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
 & T_1 \cap G_2 \arrow[d, dash, "(\mathrm{ggT}(2,q-1))^2"] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Mit dem 4-Sylowtwist v von $(\mathbf{G}, F)$ und dem Lemma 1.3.3 erhalten wir 4-Sylowtori $\mathbb{S}$ und $\mathbf{S}$.

Gemäß Lemma 1.3.4 konstruieren wir mit Hilfe von v die generische Gruppe $\mathbb{L}$ des Sylownormalisators $\mathbf{L}$ und berechnen mit dem Computer die Wurzeln $\widetilde{R}_2$ von $\mathbb{L}$. Daraus ergeben sich dann die in (a) und (b) angegebenen Formeln.

Für die Aussage bei (b) zeigen wir $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$, berechnen $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$ und beweisen $\mathbf{T} \leq \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$.

Aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ folgt mit den Relationen in 2.1.7 (a) die Gleichung $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$. Die Menge $R_{F2} := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ bildet ein Fundamentalsystem von $\widetilde{R}_2$. Jedes Element aus $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$ liegt in $\mathbf{T}_1$ und gleichzeitig in

$$\mathbf{T}_2 := \mathbf{G}_2 \cap \mathbf{T} = \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \;\middle|\; \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle.$$

Daher ist jedes Element $x \in \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2$ gemäß 2.1.6 (h) ein Produkt der Form

$$x = \prod_{i=2}^{5} h_{\alpha_i}(t'_i) \text{ mit eindeutig bestimmten } t'_i \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star$$

und lässt sich auch durch

$$x = \prod_{i=1}^{3} h_{\beta_i}(t_i) \text{ mit geeigneten } t_i \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star$$

ausdrücken. Mit Hilfe von 2.1.6 (g) können wir $h_{\beta_i}(t_i)$ umformen und erhalten daraus

$$x = h_{\alpha_1}(t_3^2)h_{\alpha_2}(t_2t_3^2)h_{\alpha_3}(t_2t_3^3)h_{\alpha_4}(t_2^2t_3^4)h_{\alpha_5}(t_2^2t_3^3)h_{\alpha_6}(t_2^2t_3^2)h_{\alpha_7}(t_1t_2t_3).$$

Zusammen mit der Aussage in 2.1.6 (h) folgt daraus dann

$$t_1, t_2, t_3 \in \{\pm 1\} \quad \text{mit} \quad t_1t_2t_3 = 1$$

und $x \in \langle h_{\alpha_5}(-1)h_{\alpha_2}(-1), h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_3}(-1)\rangle$, also $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = Z$. Ähnliche Überlegungen zeigen auch $\mathbf{T} \leq \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\rangle$. Dies beweist $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$.

Jedes Element $x \in L$ ist das Produkt von Elemente $t \in \mathbf{T}_1$ und $g \in \mathbf{G}_2$ mit $(tg)^{vF} = tg$. Wegen $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = Z$ gilt daher $t^{vF}t^{-1} = g^{vF}g^{-1} \in Z$. Da gleichzeitig die Gruppen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{G}_2$ reduktiv sind, hat L_0 den Index $|Z| = (\mathrm{ggT}(2, q-1))^2$ in L und ist damit ein Normalteiler von L. □

Die Gruppen L, L_0, T_1 und G_2 erfüllen dabei folgenden gruppentheoretischen Aussagen:

Lemma 5.3.5. *Die Gruppen aus Lemma 5.3.4 erfüllen*

- $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$,
- $L_0 \lhd L$, ${}^{L}/{L_0}$ *ist abelsch.*

Beweis. Diese Aussagen ergeben sich aus der Definition der Gruppen. □

Der zu L gehörende 4-Sylownormalisator in $(\mathbf{G}, vF)$ wird mit Hilfe der schon bekannten relativen Weylgruppe berechnet.

Lemma 5.3.6. *Seien V, H, $\{n_i | 1 \leq i \leq 7\}$ und $\{h_i | 1 \leq i \leq 7\}$ wie in Lemma 2.3.1 als Untergruppen und Elemente von $\mathbf{G}$ definiert, $U_6 := \langle n_i \,|\, 1 \leq i \leq 6\rangle^{vF}$ und $U_5 := \langle n_i \,|\, 2 \leq i \leq 5\rangle^{vF}$. Dann gelten:*

(a) $U_6 \cap L \leq T_1$.

(b) Die Gruppe $N := \langle U_6, L\rangle$ ist der Sylownormalisator von L.

(c) $\mathrm{C}_{U_6}(G_2) = U_5$.

(d) Es gibt eine Wahl der Konstanten bei der Definition von $\mathbf{G}$, so dass für jedes Element $u \in U_6$ eine Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_3$ mit

$$x_{\beta_i}(t)^u = x_{\beta_{\sigma(i)}}(t) \text{ und } x_{-\beta_i}(t)^u = x_{-\beta_{\sigma(i)}}(t) \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{F}}_q$$

existiert. Weiter gibt es zu jedem Element $\sigma \in \mathrm{S}_3$ ein so operierendes Element.

(e) $[U_5, L] \leq T_1$ *und* $[U_5, G_2] = 1$.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & N \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\langle T_1, U_6 \rangle \arrow[d, "\mathrm{S}_3"'] & & L \arrow[d, "\mathrm{ggT}(2,q-1)^2"'] & \\
\langle T_1, U_5 \rangle \arrow[dr] & & L_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & T_1 \arrow[dr] & & G_2 \arrow[dl] \\
 & & Z \arrow[d] & \\
 & & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Für (a) bestimmen wir $U_6 \cap L$. Den Sylownormalisator ermitteln wir mit Hilfe von Lemma 1.3.5. Die Aussagen in (c) und (d) ergeben sich aus Computerrechnungen und Eigenschaften der Wurzeln.

Aus $\rho(\mathbf{L} \cap \mathbf{N}) = \langle w_{\beta_i} \mid i \in \{1,2,3\} \rangle$ für $\mathbf{N} = \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$ und den Berechnungen von $\rho(U_6)$ zeigen

$$\rho(U_6) \cap \rho(\mathbf{L} \cap \mathbf{N}) = 1.$$

Daraus folgt $(U_6 \cap \mathbf{L}) \leq \mathbf{T}$ bzw. $U \cap \mathbf{L} \leq H$. Computerrechungen ergeben $U_6 \cap \mathbf{L} = \mathrm{C}_H(v) = \langle h_2 h_3, h_3 h_5 \rangle$. Diese Gruppe liegt in T_1.

Mit dem Computer prüfen wir auch

$$\langle \rho(U_6), W_{R'} \rangle / W_{R'} \cong W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$$

nach. Daraus folgt mit Hilfe von Lemma 1.3.5 (b) die Aussage (b).

Aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ und

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in \widetilde{R}_1 \text{ und } \beta \in \widetilde{R}_2$$

folgt mit Hilfe von Bemerkung 2.1.7 (b) die Inklusion $U_5 \leq \mathrm{C}_{U_6}(G_2)$.

Die Nebenklassen von U_5 in U_6 permutieren die Gruppen $\mathbf{G}_{2,i} := \langle \mathbf{X}_{\beta_i}, \mathbf{X}_{-\beta_i} \rangle$ $(1 \leq i \leq 3)$ auf die in (d) angegebene Weise. Dies ist Ergebnis entsprechender Rechnungen auf dem Computer, wenn wir die Relationen aus 2.1.6 berücksichtigen. Daraus folgt $\mathrm{C}_{U_6}(G_2) = U_5$.

Die Aussagen $[U_5, L] \leq T_1$ und $[U_5, G_2] = 1$ sind eine direkte Konsequenz der bisherigen Ergebnisse. $\square$

Wir benötigen später genauere Aussagen über die Struktur von $\mathbf{G}_2$.

Lemma 5.3.7. *Für* $\mathbf{G}_{2,i} := \langle \mathbf{X}_{\beta_i}, \mathbf{X}_{-\beta_i} \rangle$ *gilt* $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_{2,1} \times \mathbf{G}_{2,2} \times \mathbf{G}_{2,3}$.

Beweis. Die Wurzeln β_i sind orthogonal zueinander. Zudem gilt

$$\pm\beta_i \pm \beta_{i'} \notin R \text{ für alle } i \neq i'.$$

Daraus folgt $[\mathbf{G}_{2,i}, \langle \mathbf{G}_{2,i'}, \mathbf{G}_{2,i''} \rangle] = 1$ für $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$ mit Hilfe von Lemma 2.1.7 (b) und

$$\mathbf{G}_{2,i} \cap \langle \mathbf{G}_{2,i'}, \mathbf{G}_{2,i''} \rangle \leq \mathrm{Z}(\mathbf{G}_{2,i}) \cap \langle \mathbf{G}_{2,i'}, \mathbf{G}_{2,i''} \rangle .$$

Nach 2.1.9 (a) sind die Gruppen $\mathbf{G}_{2,i}$ isomorph zu einer Faktorgruppe von $\mathsf{A}_{1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Somit können wir mit Hilfe von Korollar 2 aus [Ste68b, S.41] auch $\mathrm{Z}(\mathbf{G}_{2,i}) \leq \left\langle h_{\beta_i}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\star} \right\rangle$ bzw. $\mathrm{Z}(\langle \mathbf{G}_{2,i'}, \mathbf{G}_{2,i''} \rangle) = \left\langle h_{\beta_{i'}}(t), h_{\beta_{i''}}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\star} \right\rangle$ folgern. Mit Hilfe von 2.1.6 (g) und den schon im Beweis zu Lemma 5.3.4 aufgeführten Rechnungen folgt

$$\mathbf{G}_{2,i} \cap \langle \mathbf{G}_{2,i'}, \mathbf{G}_{2,i''} \rangle = 1.$$

Dies beweist die Behauptung. □

Daraus ergibt sich folgendes Lemma für $L_0 \lhd L$.

Lemma 5.3.8. *Bei* $L_0 \lhd L$ *liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Gemäß den Ausführungen in Lemma 5.3.4 ist L/L_0 bei $2 \nmid q$ isomorph zu $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$. Jeder irreduzible Charakter von L_0 ist das Produkt $\lambda.\eta$ zweier Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$ und $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2)$ mit $\mathrm{Irr}\,(Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(Z \mid \eta)$.

Gemäß Lemma 3.1.1 (a) genügt es zu zeigen, dass jeder Charakter $\lambda.\eta \in \mathrm{Irr}\,(L_0)$ mit $\mathrm{I}_L(\lambda.\eta) = L$ sich maximal in L fortsetzt. Weiter ist η gemäß den Ausführungen über die Struktur von G_2 das Produkt eindeutig bestimmter Charaktere $\eta_i \in \mathrm{Irr}\,(G_{2.i} \mid \eta)$ $(1 \leq i \leq 3)$. Die Elemente aus $\mathbf{T}^{vF} \setminus L_0$ operieren auf $G_{2,i}$ und damit auf η_i durch Konjugation von $h_{\beta_i}(\zeta)$ mit einer primitiven $2(q-1)$-ten Einheitswurzel $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_q$. Aus der Invarianz von $\lambda.\eta$ folgt

$$\eta_i^{h_{\beta_i}(\zeta)} = \eta_i \text{ für } 1 \leq i \leq 3.$$

Nun ist jeder Charakter η_i auf $\langle G_{2,i}, h_{\beta_i}(\zeta) \rangle$ zu $\widetilde{\eta}_i$ gemäß 3.1.1 (a) fortsetzbar. Ähnliche Überlegungen zeigen auch, dass λ auf $\left\{ x \in \mathbf{T}_1 \,\middle|\, x^{vF} x^{-1} \in Z \right\}$ zu $\widetilde{\lambda}$ fortsetzbar ist. Der Charakter $\widetilde{\lambda}.(\widetilde{\eta}_1 \times \widetilde{\eta}_2 \times \widetilde{\eta}_3)$ auf $\left\{ x \in \mathbf{L} \,\middle|\, x^{vF} x^{-1} \in Z \right\}$ kann zu einer Fortsetzung von $\lambda.\eta$ auf L eingeschränkt werden. Also ist $\lambda.\eta$ auf L fortsetzbar.

Dies beweist die Behauptung. □

Die Konstruktion maximaler Fortsetzungen wird vereinfacht, wenn immer ähnliche Strukturen bei der Trägheitsgruppe vorliegen. Daher werden wir im späteren Beweis statt eines Charakters einen dazu konjugierten betrachten, dessen Trägheitsgruppe diesen Anforderungen genügt.

Lemma 5.3.9. *Seien* $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$, $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2)$ *mit* $\mathrm{Irr}\,(Z \mid \lambda) = \mathrm{Irr}\,(Z \mid \eta)$ *und* ζ *eine primitive* $2(q-1)$*-te Einheitswurzel in* $\overline{\mathbb{F}}_q$. *Dann gibt es ein Element* $k \in \langle h_{\beta_i}(\zeta) \,|\, i \in \{1,2,3\}\rangle$, *so dass für* $\mu := (\lambda.\eta)^k$ *die Gleichung*

$$\mathrm{I}_N(\mu) = \langle \mathrm{I}_{U_6}(\mu), \mathrm{I}_L(\mu)\rangle$$

gilt.

Beweis. Wir wählen zunächst ein Element k und weisen für μ die behaupteten Eigenschaften nach.

Wie im Beweis zu Lemma 5.3.8 schon beschrieben können wir η als Produkt der Charaktere $\eta_1 \times \eta_2 \times \eta_3$ schreiben. Die Operation von $\langle h_{\beta_1}(\zeta)\rangle$ zerlegt $\mathrm{Irr}\,(G_{2,1})$ in Bahnen. Sei $\mathcal{T}_1$ eine Transversale von $\mathrm{Irr}\,(G_{2,1})$ bezüglich dieser Operation mit $\eta_1 \in \mathcal{T}_1$.

Gemäß den Ausführungen gibt es ein Element $u_2 \in U_6$ zur Permutation $(1,2)$, also ein Element mit

$$G_{2,1}^{u_2} = G_{2,2} \text{ und } G_{2,2}^{u_2} = G_{2,1}.$$

Für dieses Element ist $\mathcal{T}_2 := \mathcal{T}_1^{u_2}$ eine Transversale in $\mathrm{Irr}\,(G_{2,2})$ unter der Operation von $\langle h_{\beta_2}(\zeta)\rangle$. Es gibt somit ein Element $k_2 \in \langle h_{\beta_2}(\zeta)\rangle$ mit $\eta_2^{k_2} \in \mathcal{T}_2$.

Analog gibt es auch ein Element $u_3 \in U_6$ zur Permutation $(1,3)$, also ein Element mit

$$G_{2,1}^{u_3} = G_{2,3} \text{ und } G_{2,3}^{u_3} = G_{2,1}.$$

Wir wählen ein Element k_3 mit $\eta_3^{k_3} \in \mathcal{T}_1^{u_3}$.

Sei nun $k := k_2 k_3$ und $\mu := \eta^k = \eta_1 \times \eta_2^{k_2} \times \eta_3^{k_3}$. Aus der Konstruktion ergibt sich die behauptete Struktur der Trägheitsgruppe. □

Wir sind nun in der Lage die gewünschte maximale Fortsetzbarkeit zu beweisen.

Beweis von Satz 5.3.2. Mit dem Computer prüfen wir zuerst die maximale Fortsetzbarkeit bei $(T_1 \cap U_6) \lhd U_6$. Daher existiert gemäß Satz 3.1.6 für jeden Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$ auch eine Fortsetzung auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$ mit $N_1 := \langle U_6, T_1\rangle$.

Seien $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$, $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1 \mid \chi)$ und $\eta \in \mathrm{Irr}\,(G_2 \mid \chi)$. Gemäß Lemma 5.3.9 können wir annehmen, dass für $\lambda.\eta$ die Gleichung

$$\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \langle \mathrm{I}_{N_1}(\lambda.\eta), \mathrm{I}_L(\lambda.\eta)\rangle\,.$$

Ansonsten gibt es ein Element $k \in \langle h_{\beta_i}(\zeta) \,|\, 1 \leq i \leq 3\rangle$, so dass $(\lambda.\eta)^k$ diese Eigenschaft besitzt. Aus einer maximalen Fortsetzung von χ^k entsteht durch Konjugieren mit k^{-1} eine maximale Fortsetzung von χ.

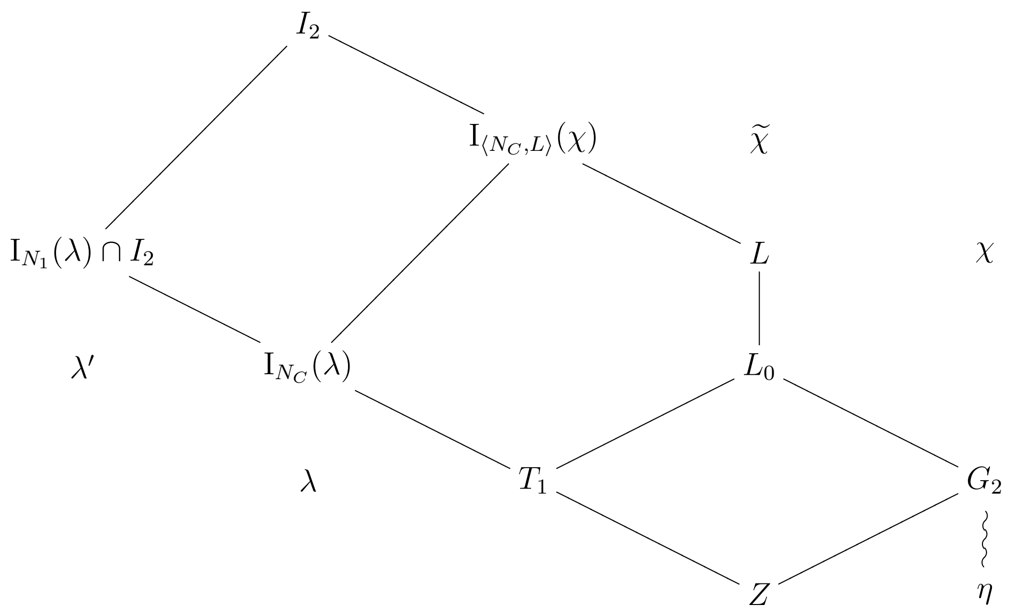
Die 3-Sylowgruppe von G_8 ist zyklisch. Daher genügt es gemäß Lemma 3.1.2 den Charakter χ auf eine Untergruppe $L \leq I_2 \leq \mathrm{I}_N(\chi)$ mit

$$I_2/L \in \mathrm{Syl}_2\Big(\mathrm{I}_N(\chi)/L\Big)$$

fortzusetzen. In dieser Gruppe ist $\mathrm{I}_{N_C}(\chi)$ mit $N_C := \langle T_1, U_5\rangle$ ein Normalteiler vom Index 1 oder 2. Die weitere Vorgehensweise richtet sich nach den Eigenschaften von $\mathrm{I}_L(\lambda.\eta)$.

1.Fall: $\mathrm{I}_L(\lambda.\eta) = L \gneqq L_0$

Gemäß dem Lemma 5.3.8 und dem Satz von Gallagher 3.1.3 ist χ eine Fortsetzung von $\lambda.\eta$, da L/L_0 abelsch ist. Es existiert zudem eine Fortsetzung $\widetilde{\lambda}$ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$. Sei $\lambda' := \widetilde{\lambda}\big]_{\mathrm{I}_{N_1}(\chi)}$.



Das Bild, bei dem die Charaktere immer neben der entsprechenden Gruppe stehen, verdeutlicht unsere Vorgehensweise.

Nach den Ausführungen in den Lemmata 5.3.6 und 5.3.5 können wir das Lemma 3.2.4 hier anwenden. Nach diesem gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{\chi}$ von χ auf $\mathrm{I}_{\langle N_C, L\rangle}(\chi)$ mit

$$\widetilde{\chi}\big]_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)} = \chi(1)\lambda'.$$

Dieser Charakter ist invariant in I_2. Wegen der zudem zyklischen Faktorgruppe $I_2/\langle \mathrm{I}_{N_C}(\chi), L\rangle$ folgt daraus mit Lemma 3.1.1 (a), dass wir χ auf I_2 fortsetzen können.

2.Fall: $L_0 \leq \mathrm{I}_L(\lambda.\eta) \lneq L$

Es gibt gemäß 3.1.1 (a) eine Fortsetzung μ von $\lambda.\eta$ auf $\mathrm{I}_L(\lambda.\eta)$, die auf L den Charakter χ gemäß 3.1.4 auf L den Charakter χ induziert, d.h. $\chi = \mu^L$ und statt χ werden wir zunächst den Charakter μ in N maximal fortsetzen. Auch hier benutzten wir eine Fortsetzung $\widetilde{\lambda}$ von λ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$ und $\lambda' := \widetilde{\lambda}\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)}$.

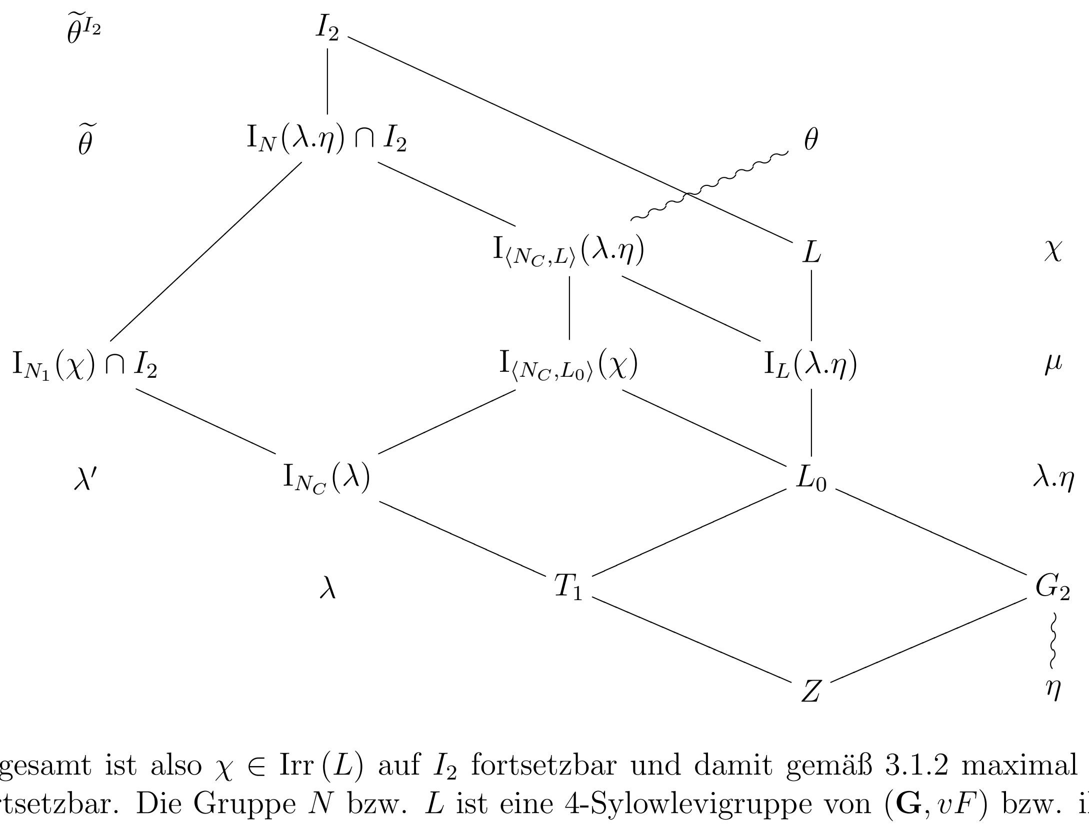
Gemäß dem Lemma 3.2.4 gibt es eine Fortsetzung θ von μ auf $\langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda.\eta), \mathrm{I}_L(\lambda.\eta)\rangle$. Für diesen Charakter gilt

$$\theta(nl) = \lambda'(n)\mu(l) \text{ für alle } n \in \mathrm{I}_{N_C}(\lambda.\eta),\ l \in \mathrm{I}_L(\lambda.\eta).$$

Dieser Charakter ist aufgrund der Konstruktion in $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda.\eta)$ invariant. Da für die Trägheitsgruppe von $\lambda.\eta$ die Gleichung

$$\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) = \langle \mathrm{I}_{N_1}(\lambda.\eta), \mathrm{I}_L(\lambda.\eta)\rangle$$

gilt, ist dieser Charakter in ganz $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta)$ invariant und gemäß 3.1.1 (a) auf $\mathrm{I}_N(\lambda.\eta) \cap I_2$ zu $\widetilde{\theta}$ fortsetzbar. Der induzierte Charakter $\widetilde{\theta}^{\mathrm{I}_2}$ ist gemäß dem Lemma von Mackey eine maximale Fortsetzung von χ.



Insgesamt ist also $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf I_2 fortsetzbar und damit gemäß 3.1.2 maximal in N fortsetzbar. Die Gruppe N bzw. L ist eine 4-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ bzw. ihr 4-Sylownormalisator. Die maximale Fortsetzbarkeit bei diesen Gruppen überträgt sich mit Hilfe des Lemmas 1.2.5 auf alle Sylowlevigruppen von $(\mathbf{G}, F)$. $\square$

Damit haben wir also folgenden Satz bewiesen

Satz 5.3.10. *Seien* $\mathbf{G}$ *eine universelle Chevalleygruppe über* $\overline{\mathbb{F}}_q$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *eine Frobeniusabbildung, so dass* $G := \mathbf{G}^F$ *isomorph zu einer der Gruppen*

$$\left\{\mathsf{E}_{6,sc}(q), \mathsf{E}_{7,sc}(q), \mathsf{E}_{8,sc}(q), \mathsf{F}_{4,sc}(q), \mathsf{G}_{2,sc}(q), {}^2\mathsf{E}_{6,sc}(q), {}^3\mathsf{D}_{4,sc}(q), {}^2\mathsf{B}_2(q), {}^2\mathsf{F}_4(q), {}^2\mathsf{G}_2(q)\right\}$$

ist. Seien L *eine* d*-Sylowlevigruppe von* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ein* d*-Sylownormalisator von* $(\mathbf{G}, F)$*. Dann sind alle Charaktere von* L *in* N *maximal fortsetzbar.*

Beweis. Ist d eine reguläre Zahl von $(\mathbf{G}, F)$, so beweist der Satz 5.2.9 die Behauptung.

Bei den übrigen d ist laut Tabelle 5.3 entweder die relative Weylgruppe zyklisch und das Lemma 5.1.3 anwendbar oder die in Satz 5.3.2 beschriebene Situation liegt vor. In diesen Fällen gilt also ebenfalls die Behauptung. □

Die hier aufgeführten Methoden können wir auch bei klassischen Gruppen verwenden. Jedoch ersetzen generelle Rechnungen mit den Elementen den Computereinsatz.

Kapitel 6

Ein allgemeines Fortsetzungskriterium

In diesem Kapitel stellen wir eine Methode vor, die wir bei den meisten klassischen Gruppen benutzen, um die maximale Fortsetzbarkeit für reguläres d zu beweisen. Bei den klassischen Gruppen mit zugrunde liegenden Wurzelsystemen vom Typ A_l, B_l oder C_l sind die auftretenden relativen Weylgruppen jeweils Kranzprodukte. Beim Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit in diesen Fällen führt die stets gleiche Vorgehensweise zum Erfolg. Daher formulieren wir in diesem Kapitel einen allgemeinen Beweis, für den wir die Voraussetzungen in den einzelnen Typen später nachprüfen.

Im ersten Abschnitt erläutern wir am Beispiel der 1-Sylowtori in der $\mathrm{SL}_l(q)$ die Strategie. Auch wenn die relative Weylgruppe dabei isomorph zu S_l ist und daher einige Zwischenschritte beim Beweis nicht nötig sind, können wir dabei die wichtigsten Ideen sehen.

Im zweiten Abschnitt definieren wir wichtige Unterstrukturen und formulieren die Bedingungen. Zentral sind die Definitionen einiger Untergruppen, die wir zu Unterwurzelsystemen assoziieren.

Im Abschnitt 6.3 konstruieren wir sukzessive in verschiedenen Situationen Abbildungen, die Charaktere auf jeweilige maximale Fortsetzungen abbilden. Für diese Abbildungen weisen wir dann weitere „praktische“ Eigenschaften nach. Diese ermöglichen den Beweis von Satz 6.3.15, mit dem wir später in den einzelnen Fällen die maximale Fortsetzbarkeit der Charaktere auf d-Sylowlevigruppen beweisen werden.

Im letzten Abschnitt zeigen wir mehrere Lemmata, mit denen wir leichter die Gültigkeit der Bedingungen nachweisen können. Außerdem geben wir einen Ausblick, inwiefern Satz 6.3.15 verallgemeinert werden könnte.

6.1 Beispiel

Bevor wir die Methoden näher ausführen, betrachten wir ein Beispiel: Wir zeigen, dass die irreduziblen Charaktere der 1-Sylowlevigruppe T von $G := \mathrm{SL}_l(q)$ maximal im zugehörigen 1-Sylownormalisator N fortsetzbar sind. Hier erläutern wir, welche Gruppen auftreten und in welchen Schritten die maximale Fortsetzbarkeit gezeigt werden kann. Dies soll verdeutlichen, warum es später sinnvoll ist, solche Gruppen zu betrachten.

1. Die Gruppen T und N:

   Die 1-Sylowlevigruppe T ist die Gruppe der Diagonalmatrizen in G und der zugehörige 1-Sylownormalisator N besteht aus den Monomialmatrizen in G.

2. Einführung von $\widehat{S}$ und $\widehat{S}_r$:

   Der 1-Sylowtorus T in G liegt in der Gruppe $\widehat{S}$ der Diagonalmatrizen in der $\mathrm{GL}_l(q)$. Diese Gruppe $\widehat{S}$ ist das direkte Produkt der Untergruppen $\widehat{S}_r$ $(1 \leq r \leq l)$, die aus allen Diagonalmatrizen bestehen, die höchstens an der r-ten Stelle einen Eintrag ungleich 1 besitzen, und damit mit $\mathbb{F}_q^\star$ identifiziert werden können.

3. Einführung von $\widehat{N}$:

   Die Gruppe N liegt in der Gruppe $\widehat{N}$ der Monomialmatrizen in der $\mathrm{GL}_l(q)$. Die Gruppe $\widehat{N}$ permutiert die Gruppen $\widehat{S}_r$.

4. Der Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ und seine Trägheitsgruppe:

   Mit dem Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$, den wir als erstes fortsetzen wollen, definieren wir die Charaktere $\lambda_r := \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \in \mathrm{Irr}\left(\mathbb{F}_q^\star\right)$. Zwei Charaktere stimmen auf $\widehat{S}$ genau dann überein, wenn ihre Einschränkungen auf alle Gruppen $\widehat{S}_r$ gleich sind.

   Wir wählen für alle $1 \leq i < i' \leq l$ eine monomiale Matrix $p_{(i,i')} \in \mathrm{SL}_l(q)$, die nur Einträge 1 oder 0 auf der Diagonalen hat, auf Diagonalmatrizen durch Vertauschen der Einträge des i-ten und i'-ten Eintrags auf der Diagonalen operiert, die übrigen fest lässt und insgesamt nur Einträge aus $\{0, \pm 1\}$ besitzt. So gilt für die Einträge von $p_{(i,i')} = (a_{j,j'})_{j,j'}$ auch

$$a_{j,j'} = \begin{cases} 0 & j \neq j' \text{ und } (j,j') \notin \{(i,i'),(i',i)\}\,, \\ 0 & j = j' \text{ und } j,j' \in \{i,i'\}\,, \\ 1 & j = j' \text{ und } j \notin \{i,i'\}\,. \\ \pm 1 & (j,j') \in \{(i,i'),(i',i)\}\,. \end{cases}$$

   Sei N_S die von all diesen Elementen erzeugte Gruppe. Das Element $p_{(i,i')}$ liegt genau dann in der Trägheitsgruppe $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$, wenn $\lambda_i = \lambda_{i'}$ gilt. Die Gruppe $N_{S,\lambda}$ sei die von diesen Elementen erzeugte Gruppe. Da die Gruppe $\widehat{N}$ auf den Charakteren von $\widehat{S}$ durch Permutation der λ_i operiert, erzeugt diese Gruppe zusammen mit $\widehat{S}$ ganz $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$.

5. Definition von Λ:

   Wir definieren zu jedem Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ eine maximale Fortsetzung $\widetilde{\lambda} \in \operatorname{Irr}(\mathrm{I}_N(\lambda))$ durch

   $$\widetilde{\lambda}\Big\rceil_{N_{S,\lambda}} = 1.$$

   Dies ist möglich, da die Gruppe $N_{S,\lambda} \cap \widehat{S}$ von den Elementen $p_{(i,i')}^2$ mit $p_{(i,i')} \in N_{S,\lambda}$ erzeugt wird und diese Elemente wiederum wegen $\lambda_i = \lambda_{i'}$ im Kern von λ liegen.

   Insgesamt erhalten wir dadurch eine Abbildung

   $$\Lambda : \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right) \to \bigcup_{\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) \mid \lambda\right) \text{ mit } \lambda \mapsto \widetilde{\lambda}.$$

6. Eigenschaften von Λ:

   Die Abbildung Λ ist $\widehat{N}$-äquivariant. Sei $\delta \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ ein linearer Charakter mit $\ker(\delta) = \mathrm{SL}_l(q) \cap \widehat{N}$. Für diesen Charakter erfüllt Λ zudem

   $$\Lambda(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}) = \Lambda(\lambda)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)} \text{ für alle } \lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right),$$

   was aus der Definition von $\Lambda(\lambda)$ und $N_{S,\lambda} \leq \mathrm{SL}_l(q)$ folgt.

7. „Zwischenfortsetzung“ für $\mu \in \operatorname{Irr}(T)$:

   Sei $\mu \in \operatorname{Irr}(T)$. Für eine Fortsetzung $\widetilde{\mu}$ von μ auf $\widehat{S}$ und $n \in \mathrm{I}_N(\mu)$ gilt

   $$\Lambda(\widetilde{\mu})^n = \Lambda(\widetilde{\mu}^n) = \Lambda(\widetilde{\mu}\, \delta^i\rceil_{\widehat{S}}) = \Lambda(\widetilde{\mu})\, \delta^i\Big\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\mu)}$$

   für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}$, da $\widetilde{\mu}^n$ eine weitere Fortsetzung von μ auf $\widehat{S}$ ist und diese Fortsetzungen stets von der Form $\widetilde{\mu}\, \delta^i\rceil_{\widehat{S}}$ $(i \in \mathbb{N})$ sind. Die Charaktere stimmen somit auf $\mathrm{I}_N(\widetilde{\mu})$ überein und der Charakter $\Lambda(\widetilde{\mu})\rceil_{\mathrm{I}_N(\widetilde{\mu})}$ ist in $\mathrm{I}_N(\mu)$ invariant, da N der Kern von δ ist.

8. Maximale Fortsetzbarkeit von μ:

   Die Gruppe $\mathrm{I}_N(\mu)$ bildet den Charakter $\widetilde{\mu}$ auf andere Fortsetzungen von μ ab. Jede Fortsetzung von μ auf $\widehat{N}$ ist das Produkt eines Charakters aus $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}/S\right) = \left\langle \delta\rceil_{\widehat{S}} \right\rangle$ und $\widetilde{\mu}$. Also gehen auch die $\mathrm{I}_N(\mu)$-Konjugierten von $\widetilde{\mu}$ aus $\widetilde{\mu}$ durch Tensorierung mit $\delta^i\rceil_{\widehat{S}}$ $(i \in \mathbb{N})$ hervor. Dabei gibt es eine minimale Zahl $i \in \mathbb{N}$, für die $\widetilde{\mu}\, \delta^i\rceil_{\widehat{S}}$ unter $\mathrm{I}_N(\mu)$ zu $\widetilde{\mu}$ konjugiert ist. Sei $n \in \mathrm{I}_N(\mu)$ ein Element mit

   $$\widetilde{\mu}^n = \widetilde{\mu}\, \delta^i\Big\rceil_{\widehat{S}}.$$

Wegen $\left(\delta^i\rceil_{\widehat{S}}\right)^n = \delta^i\rceil_{\widehat{S}}$ sind die $\langle n\rangle$-Konjugierten zu $\widetilde{\mu}$ die Charaktere

$$\left\{\widetilde{\mu}\,\delta^{i'}\Big\rceil_{\widehat{S}} | i' \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aus der Minimalität von i folgt, dass dies alle unter $\mathrm{I}_N(\mu)$ zu $\widetilde{\mu}$ konjugierten Charaktere sind. Daher ist die Gruppe ${\mathrm{I}_N(\mu)}/{\mathrm{I}_N(\widetilde{\mu})}$ zyklisch.

Daraus folgt mit den in Schritt 7 bewiesenen Eigenschaften von $\Lambda(\widetilde{\mu})\rceil_{\mathrm{I}_N(\widetilde{\mu})}$ und dem Lemma 3.1.1 (a) die Fortsetzbarkeit von μ auf $\mathrm{I}_N(\mu)$.

Bei der Verallgemeinerung dieser Strategie ist folgendes zu beachten:

- Für die Schritte 4 und 5 ist eine sorgfältige Wahl von $\widehat{S}$ nötig. Sie wird in den einzelnen Fällen verschieden sein. Wir definieren später diese Gruppe, indem wir zu einem „feineren“ Wurzelsystem $\overline{R}$ einen Torus $\overline{\mathbf{T}}$ assoziieren und darin eine „Fast“-Fixpunktgruppe unter einer Frobeniusabbildung als $\widehat{S}$ festlegen.

- Die Untergruppen $\widehat{S}_i$ werden im Allgemeinen mit Unterwurzelsystemen definiert. Diese leiten wir aus den Bahnen von $\rho(v)\phi$ ab, wobei $v\phi$ der zugrunde liegende d-Sylowtwist ist.

- Die Schritte 4 und 5 erfordern im Allgemeinen mehr Sorgfalt, da die relative Weylgruppe der d-Sylowlevigruppen ein Kranzprodukt $\mathrm{C}_{d'} \wr \mathrm{S}_j$ ist. Den zyklischen Untergruppen $\mathrm{C}_{d'}$ entsprechen dabei zyklische Erweiterungen der Gruppen $\widehat{S}_r$, die wir $\widehat{N}_r$ nennen und mit Hilfe der oben schon erwähnten Unterwurzelsysteme definieren. Zusammen erzeugen diese eine Gruppe $\widehat{N}_C$, auf die wir λ in einem Zwischenschritt maximal fortsetzen. In unserem Beispiel stimmen aber $\widehat{S}_r$ mit $\widehat{N}_r$ und $\widehat{N}_C$ mit $\widehat{S}$ überein.

  Der Konstruktion von Λ ist das Kapitel 6.3 gewidmet. Zum Auffinden der Gruppe $N_{S,\lambda}$ wie auch zur Definition der Fortsetzungen sind zahlreiche Bedingungen nötig.

- Das Vorgehen in den Schritten 7 und 8, in denen die Charaktertheorie in $T \lhd N$ betrachtet wird, hängt zentral von dem Charakter δ ab. Die Existenz eines solchen Charakters werden wir nur bei vorgegebenen Gruppen nachweisen.

Aufgabe späterer Kapitel ist es also Situationen aufzufinden, in denen wir das Resultat 6.3.15 anwenden können und dadurch die maximale Fortsetzbarkeit der Charaktere auf der abelschen d-Sylowlevigruppe T im Sylownormalisator N beweisen.

6.2 Voraussetzungen und Definitionen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist folgende Situation.

6.2.1. Es sind folgende Gruppen und Wurzelsysteme gegeben:

- Seien $R \leq \overline{R}$ Wurzelsysteme vom Typ A_{l-1} ($l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$), B_l, C_l oder D_l, $\overline{\mathbf{G}}$ eine universelle Chevalleygruppe zu $\overline{R}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$ und $\mathbf{G} := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R \rangle$ eine universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$. Wenn $\overline{R}$ nicht mit R übereinstimmt, sind die Wurzelsysteme vom Typ C_l und A_{l-1}.
- Weiter seien $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Frobeniusendomorphismus und $F := \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}}$ eine Abbildung aus der Bemerkung 2.2.4. Der von F auf dem Kowurzelgitter von $\mathbf{G}$ induzierte Automorphismus sei ϕ und habe die Ordnung 2 oder 1.
- Die Zahl d ist regulär für $W\phi$ und $v\phi \in V\phi$ ist ein d-Sylowtwist.
- Die Gruppen $\overline{\mathbf{N}}$ und $\overline{W}$ sowie die Abbildung $\rho : \overline{N} \to \overline{W}$ seien die mit Hilfe von $\overline{G}$ definierten Gruppen und die Abbildung aus 2.2.1.

In dieser Situation definieren wir verschiedene Untergruppen und Unterwurzelsysteme.

Definition 6.2.2. Zu $\rho(v)\phi$ gibt es eine Permutation σ in ${}^R\mathrm{S}_l$, wobei die Gruppe ${}^R\mathrm{S}_l$ die zur Weylgruppe von $\overline{\mathbf{G}}$ assoziierte Permutationsgruppe auf $\{\pm 1, \ldots, \pm l\}$ aus Lemma 4.4.1 ist.

Wir können daraus auch eine Operation von $\rho(v)\phi$ auf $\{1, \ldots, l\}$ durch Identifikation von i und $-i$ für $1 \leq i \leq l$ ableiten. Diese zerlegt dann die Menge $\{1, \ldots, l\}$ in j Bahnen, die wir mit $\mathcal{B}^{(r)}$ für $1 \leq r \leq j$ bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Elemente von R in dem Vektorraum $\langle e_i \,|\, 1 \leq i \leq l \rangle$ liegen. Zu diesen Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ definieren wir mit

$$R_r := \left\{ \pm e_i, \pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \;\middle|\; i, i' \in \mathcal{B}^{(r)} \right\} \cap R$$

und

$$\overline{R}_r := \left\{ \pm e_i, \pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \;\middle|\; i, i' \in \mathcal{B}^{(r)} \right\} \cap \overline{R}$$

weitere parabolische Unterwurzelsysteme vom jeweils gleichen „Typ“, aber von geringerem Rang. Diese Mengen erfüllen auch

$$R_r = R \cap \left\langle e_i \;\middle|\; i \in \mathcal{B}^{(r)}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \text{ bzw. } \overline{R}_r = \overline{R} \cap \left\langle e_i \;\middle|\; i \in \mathcal{B}^{(r)}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle.$$

Wir assoziieren zu diesen jeweils folgende Gruppen

$$\mathbf{S}_r := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \;\middle|\; \alpha \in \overline{R}_r \right\rangle \text{ und } \mathbf{N}_r := \langle \mathbf{S}_r, n_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,|\, \alpha \in R_r \rangle$$

und definieren die Abbildung $\mathcal{L}$ durch

$$\mathcal{L} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}} \text{ mit } x \mapsto x^{v\overline{F}} x^{-1}.$$

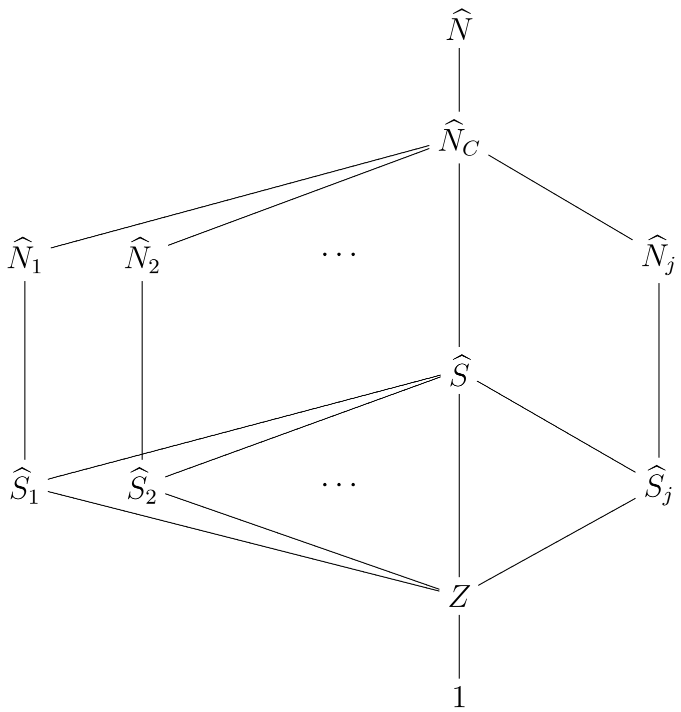
Zerlegt $\rho(v)\phi$ die Menge $\{1, \ldots, l\}$ in mehr als eine Bahn und gilt daher $j \geq 2$, dann sei $Z := \bigcap_{r=1}^{j} \mathbf{S}_r$. Für $j = 1$ sei Z eine geeignete vorgegebene zentrale Gruppe von $\overline{\mathbf{G}}$. Mit Hilfe von Z definieren wir folgende Gruppen:

$$\widehat{S}_r := \{ x \in \mathbf{S}_r \mid \mathcal{L}(x) \in Z \} \text{ und } \widehat{N}_r := \left\langle \mathbf{N}_r^{vF}, \widehat{S}_r \right\rangle.$$

Im Weiteren sind noch folgende Gruppen wichtig

$$\begin{aligned}
\widehat{S} &:= \left\langle \widehat{S}_r \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle, \\
\widehat{N}_C &:= \left\langle \widehat{N}_r \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle \text{ und} \\
\widehat{N} &:= \left\langle \widehat{S}, \mathbf{N}^{vF} \right\rangle \text{ mit } \mathbf{N} := \langle n_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,|\, \alpha \in R \rangle\,.
\end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen den verschiedenen endlichen Gruppen wird in folgendem Bild verdeutlicht.



Die Gruppe $\widehat{N}_C$ wird später sehr wichtig sein, daher formulieren wir folgende Aussagen über das Verhalten ihrer Elemente.

Lemma 6.2.3. *(a) Für $r \neq r'$ sind $\overline{R}_r$ und $\overline{R}_{r'}$ orthogonal zueinander.*

(b) $\widehat{N}_r \leq \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{S}_{r'})$ für $r \neq r'$,

(c) $\widehat{N}_r \leq \mathrm{N}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_{r'})$ für $r \neq r'$.

Beweis. Die Wurzeln aus R_r liegen in dem von e_i ($i \in \mathcal{B}^{(r)}$) aufgespannten Vektorraum. Dieser ist orthogonal zu $\left\langle e_i \,\middle|\, i \in \mathcal{B}^{(r')} \right\rangle$, da die Bahnen disjunkt sind.

Aus der Bemerkung 2.1.7 (a) und der Orthogonalität der Wurzeln folgt, dass $n_\alpha(t) \in \mathbf{N}_r$ mit jedem Element $h_{\alpha'}(t') \in \mathbf{S}_{r'}$ kommutiert.

Für die Elemente $n_\alpha(t) \in \mathbf{N}_r$ und $n_{\alpha'}(t') \in \mathbf{N}_{r'}$ gilt aufgrund der Relationen 2.1.6 auch

$$n_\alpha(t)^{n_{\alpha'}(t')} \in \{n_\alpha(t), n_\alpha(-t)\}\,.$$

Also normalisieren sich die Gruppen gegenseitig. □

Auch an den Zentralisator des Sylowtwists stellen wir einige Bedingungen, die aber in einem Großteil des Fälle erfüllt sein werden.

Bedingung 6.2.Bi (an den Sylowtwist $v\phi$). Für den Sylowtwist $v\phi$ gilt:

(a) die Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ haben alle gleiche Länge,

(b) die Gruppe $\mathrm{C}_{W_{R_r}}(\rho(v)\phi)$ ist zyklisch,

(c) in $\mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$ liegen für alle $1 \le r < j$ Involutionen $w_{(r,r+1)}$, welche die Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ und $\mathcal{B}^{(r+1)}$ und damit die Wurzelmengen R_r und R_{r+1} vertauschen, während sie die jeweils übrigen Bahnen invariant lassen.

(d) Die Gruppe $\mathrm{C}_W(\rho(v))$ ist das semidirekte Produkt der Gruppe $W_C := \left\langle \mathrm{C}_{W_{R_r}}(\rho(v)) \,\middle|\, 1 \le r \le j \right\rangle$ mit einer zu S_j isomorphen Gruppe $W_S := \left\langle w_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \le r < j \right\rangle$.

Über die Struktur von Z und $\mathbf{S}_r$ benötigen wir später folgende Annahmen.

Bedingung 6.2.Bii (an Z und $\mathbf{S}_r$). Es gelten

$$\langle \mathbf{S}_r \,|\, 1 \le r \le j \rangle = \overline{\mathbf{T}}$$

mit $\overline{\mathbf{T}} := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R} \right\rangle$ und für $j > 2$ die Gleichung

$$Z = \mathbf{S}_i \cap \langle \mathbf{S}_{i'} \,|\, i \neq i' \rangle \text{ für alle } 1 \le i \le j \le \mathrm{Z}(\langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \rangle).$$

Daraus ergibt sich folgende Struktur von $\widehat{N}$:

Lemma 6.2.4. *Seien die Bedingungen 6.2.***B***i und 6.2.***B***ii erfüllt und $r, r' \in \{1, \ldots, j\}$ mit $r \neq r'$. Für*

$$\begin{aligned}
R_{\{r,r'\}} &:= \left\{ \pm e_i, \pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r)} \cup \mathcal{B}^{(r')} \right\} \cap R, \\
\overline{R}_{\{r,r'\}} &:= \left\{ \pm e_i, \pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r)} \cup \mathcal{B}^{(r')} \right\} \cap \overline{R}, \\
\mathbf{S}_{\{r,r'\}} &:= \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R}_{\{r,r'\}}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \quad \text{und} \\
\mathbf{N}_{\{r,r'\}} &:= \left\langle n_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in R_{\{r,r'\}}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle
\end{aligned}$$

gilt:

(a) Die Faktorgruppe $\widehat{N}_r/\widehat{S}_r$ *ist zyklisch und* $\widehat{N}_r = \left\langle \mathbf{N}_r^{vF}, \widehat{S} \right\rangle$.

(b) Es gibt Elemente $p_r \in \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}$ *mit*

$$\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}.$$

(c) Alle Elemente $p_r \in \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}$ *mit* $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$ *erfüllen*

$$\begin{aligned} (\widehat{N}_{r+1})^{p_r} &= \widehat{N}_r, \\ (\widehat{N}_r)^{p_r} &= \widehat{N}_{r+1} \quad \textit{und} \\ p_r &\in \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_{r'}) \textit{ für alle } r' \notin \{r, r+1\}. \end{aligned}$$

(d) $\widehat{N} = \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$ *mit* $N_S := \langle p_i \,|\, 1 \leq i < j \rangle$ *und den Elementen* p_i *aus (c),*

(e) $\widehat{N}_C \lhd \widehat{N}$.

Beweis. Für den Beweis von (a) benutzen wir die Definition $\widehat{N}_r := \left\langle \widehat{S}_r, \mathbf{N}_r^{vF} \right\rangle$. Aus dieser folgt

$$\widehat{N}_r/\widehat{S}_r \cong \mathbf{N}_r^{vF}/(\mathbf{N}_r^{vF} \cap \widehat{S}_r) = \mathbf{N}_r^{vF}/\mathbf{T}_r^{vF} \cong \rho(\mathbf{N}_r^{vF})$$

mit $\mathbf{T}_r := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in R_r, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$. Auf der Gruppe $\rho(\mathbf{N}_r) = W_{R_r}$ operiert vF durch $\rho(v)\phi$. Somit ist $\rho(\mathbf{N}_r^{vF})$ eine Untergruppe von $\mathrm{C}_{W_{R_r}}(\rho(v)\phi)$. Gemäß 6.2.**B**i (a) sind also beide Gruppen zyklisch. Diese Gruppen sind gemäß [Car85, 1.17] sogar gleich, da $\mathbf{T}_r$ eine zusammenhängende Gruppe ist und sowohl $\mathbf{N}_r$ als auch $\mathbf{T}_r$ abgeschlossene vF-stabile Untergruppen von $\mathbf{G}$ sind.

Wir suchen nun für $1 \leq r \leq j$ ein Element $p_r \in \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}$ mit $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$. Aus [Car85, 1.17] ist

$$\mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}/\mathbf{T}_{\{r,r+1\}}^{vF} \cong \mathrm{C}_{W_{\{r,r+1\}}}(\rho(v)\phi)$$

mit $\mathbf{T}_{\{r,r+1\}} := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in R_{\{r,r+1\}}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$ bekannt, da $\mathbf{T}_{\{r,r+1\}} \lhd \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}$, beide Gruppen vF-stabil sind und $\mathbf{T}_{\{r,r+1\}}$ zusammenhängend ist. Daher gibt es ein Element $x \in \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}$ mit

$$\rho(x) = w_{(r,r+1)} \in \mathrm{C}_{W_{R_{\{r,r+1\}}}}(\rho(v)\phi).$$

Dies ist der Teil (b) der Behauptung.

Nun untersuchen wir die Operation von $p_r \in \mathbf{N}_{\{r,r+1\}}^{vF}$ mit $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$ auf den Gruppen $\widehat{N}_{r'}$. Aus den in 6.2.**B**i(b) beschriebenen Eigenschaften von $w_{(r,r+1)}$ folgt, dass

$w_{(r,r+1)}$ die Wurzelsysteme $\overline{R}_r$ und $\overline{R}_{r+1}$ ebenso wie R_r und R_{r+1} vertauscht. Mit Hilfe von Satz 2.1.6 folgt daraus

$$(\widehat{N}_{r+1})^{p_r} = \widehat{N}_r \text{ und } (\widehat{N}_{r+1})^{p_r} = \widehat{N}_r$$

für jedes Element p_r mit $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$.

Wir können $w_{(r,r+1)}$ als Produkt von Spiegelungen entlang geeigneter Wurzeln $\beta_{r''} \in R_{\{r,r+1\}}$ $(1 \leq r'' \leq \frac{l}{j})$ mit $\beta_{r''} = \pm e_i \pm e_{i'}$, $i \in \mathcal{B}^{(r)}$ und $i' \in \mathcal{B}^{(r+1)}$ schreiben, d.h.

$$w_{(r,r+1)} = w_{\beta_1} w_{\beta_2} \cdots w_{\beta_{\frac{l}{j}}}.$$

Wegen $p_r \in \mathbf{N}^{vF}_{\{r,r+1\}}$ gibt es ein Element

$$s \in \overline{\mathbf{T}}_{\{r,r+1\}} := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \;\middle|\; \alpha \in \overline{R}_{\{r,r+1\}}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$$

mit

$$p_r = s \prod_{r''=1}^{\frac{l}{j}} n_{\beta_{r''}}(1).$$

Für jedes $1 \leq r' \leq j$ mit $r' \notin \{r, r+1\}$ gilt

$$\beta_{r''} + \alpha \notin R \text{ für alle } 1 \leq r'' \leq \frac{l}{j} \text{ und } \alpha \in R_{r'},$$

was wir anhand der Wurzelsysteme zu den klassischen Typen einzeln nachprüfen können. Daraus folgt zusammen mit

$$\beta_{r''} \perp \alpha \text{ für alle } 1 \leq r'' \leq \frac{l}{j} \text{ und } \alpha \in R_{r'}$$

die Aussage

$$p_r \in \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_{r'}) \text{ für alle } r' \notin \{r, r+1\}\,.$$

Dies beweist die drei Gleichungen in (c).

Für Teil (d) zeigen wir, dass die Gruppen $\widehat{N}$, $\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$ und

$$\widetilde{N} := \left\{ x \in \langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \rangle \;\middle|\; \mathcal{L}(x) \in Z \right\}$$

gleich sind. Dazu zeigen wir zunächst, dass beide Untergruppen von $\widetilde{N}$ sind, alle drei Gruppen sowohl in ihrem Bild unter ρ als auch in dem Schnitt mit $\overline{\mathbf{T}}$ übereinstimmen.

Aus den Definitionen von $\widehat{N}$ und $\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$ folgen sowohl

$$\widehat{N} \leq \langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \rangle \text{ und } \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \leq \langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \rangle$$

als auch

$$\mathcal{L}(\widehat{N}) \leq Z \text{ und } \mathcal{L}\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right) \leq Z.$$

Zur Berechnung der Bilder $\rho(\widehat{N})$, $\rho(\widetilde{N})$ und $\rho\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right)$ benutzen wir [Car85, 3.3.6] und erhalten

$$\begin{aligned}
\rho(\widetilde{N}) &\geq \rho(\langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \rangle^{vF}) = \rho(\mathbf{N}^{vF}) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi), \\
\rho(\widehat{N}) &= \rho\left(\left\langle \widehat{S}, \mathbf{N}^{vF} \right\rangle\right) \geq \rho(\mathbf{N}^{vF}) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi) \text{ und} \\
\rho\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right) &= \left\langle \rho(\widehat{N}_C), \rho(N_S) \right\rangle = \left\langle \rho(\widehat{N}_C), W_S \right\rangle = \left\langle \rho(\widehat{N}_r), W_S \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle = \\
&= \left\langle \mathrm{C}_{W_{R_r}}(\rho(v)\phi), W_S \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle = \langle W_C, W_S \rangle = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi).
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die für den Beweis von (a) berechneten Gruppen $\rho(\widehat{N}_r)$. Nun muss wegen $\rho(Z) = 1$ sogar $\rho(\widetilde{N}) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$ und damit

$$\rho(\widetilde{N}) = \rho(\widehat{N}) = \rho\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right) = \mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$$

gelten.

Als nächstes bestimmen wir die Gruppen $\widetilde{N} \cap \overline{\mathbf{T}}$, $\widehat{N} \cap \overline{\mathbf{T}}$ und $\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \cap \overline{\mathbf{T}}$. Aus den Definitionen ergeben sich

$$\widetilde{N} \cap \overline{\mathbf{T}} = \left\{ x \in \overline{\mathbf{T}} \;\middle|\; \mathcal{L}(x) \in Z \right\}$$

und

$$\begin{aligned}
\widehat{N} \cap \overline{\mathbf{T}} &= \widehat{S} = \left\langle \widehat{S}_r \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle = \\
&= \{ x \in \langle \mathbf{S}_r \mid 1 \leq r \leq j \rangle \mid \mathcal{L}(x) \in Z \} = \left\{ x \in \overline{\mathbf{T}} \;\middle|\; \mathcal{L}(x) \in Z \right\}.
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Aussagen von 6.2.**B**ii. Aus $\widetilde{N} \geq \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$ und

$$\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \cap \overline{\mathbf{T}}\right) \geq \widehat{S} = \left\{ x \in \overline{\mathbf{T}} \;\middle|\; \mathcal{L}(x) \in Z \right\}$$

folgt

$$\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \cap \overline{\mathbf{T}} = \left\{ x \in \overline{\mathbf{T}} \;\middle|\; \mathcal{L}(x) \in Z \right\}$$

und damit

$$\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \cap \overline{\mathbf{T}} = \widetilde{N} \cap \overline{\mathbf{T}} = \widehat{N} \cap \overline{\mathbf{T}}.$$

Die Gruppen haben wegen $\left|\widetilde{N}\right| = \left|\rho(\widetilde{N})\right| \cdot \left|\widetilde{N} \cap \overline{\mathbf{T}}\right|$, bzw. $\left|\widehat{N}\right| = \left|\rho(\widehat{N})\right| \cdot \left|\widehat{N} \cap \overline{\mathbf{T}}\right|$ und

$$\left|\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right| = \left|\rho\left(\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle\right)\right| \cdot \left|\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \cap \overline{\mathbf{T}}\right|$$

die gleiche Ordnung. Wegen $\widehat{N} \leq \widetilde{N}$ und $\left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle \leq \widetilde{N}$ sind die Gruppen gleich, insbesondere $\widehat{N} = \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$.

Aus den Aussagen in (c) folgt $N_S \leq \mathrm{N}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_C)$. Wegen $\widehat{N} = \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle$ muss dann auch $\widehat{N}_C \lhd \widehat{N}$, also die Aussage in (e) gelten. □

Wir benötigen aber noch weitere Eigenschaften für die Elemente p_r $(1 \leq r \leq j-1)$.

Definition 6.2.5. Wir nennen $j-1$ Elemente p_r $(1 \leq r < j)$ **tolle Elemente**, falls sie folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $p_r \in \mathbf{N}^{vF}_{\{r,r+1\}}$ und $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$ für alle $1 \leq r < j$.

(b) Es gibt Elemente $\{\, l_r \in \mathbf{S}_r \mid 1 \leq r \leq j\}$ mit

$$p_r^2 = l_r l_{r+1}^{-1} \text{ und } l_r^{p_r} = l_{r+1} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1.$$

(c) $N_{S,I} \cap \mathbf{T} = \left\langle l_r l_{r+1}^{-1} \,\middle|\, r \in I \right\rangle$ für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$ und $N_{S,I} := \langle p_r \,|\, r \in I\rangle$.

(d) Für $n \in N_S$ und $I, I' \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$ mit

$$\{\, \rho(p_r) \mid r \in I\}^{\rho(n)} = \{\, \rho(p_r) \mid r \in I'\}$$

gilt auch

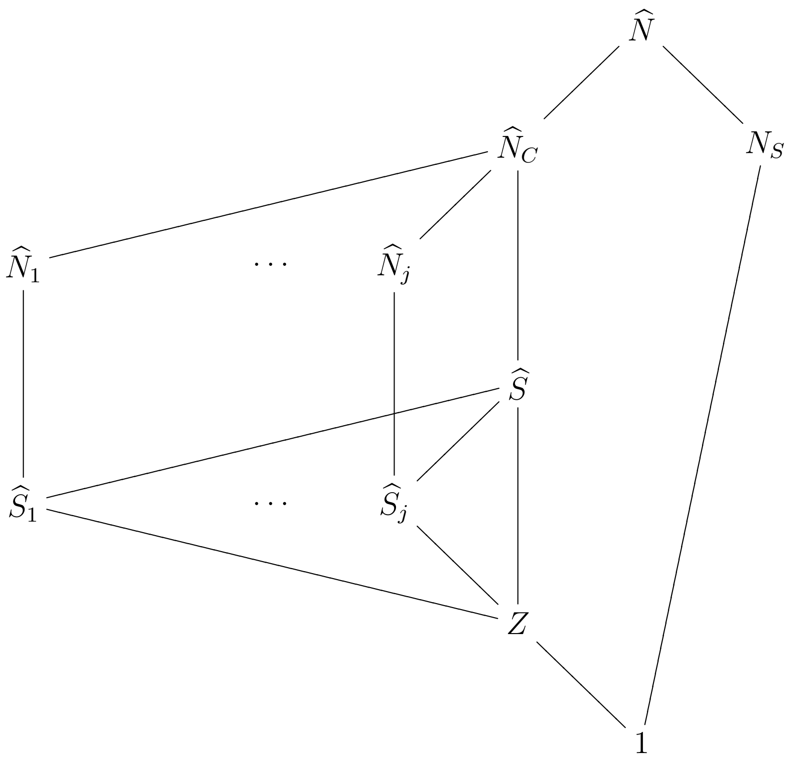
$$N_{S,I}^n = N_{S,I'}.$$

(e) $x x^{p_r} = x^{p_r^{-1}} x$ für alle $1 \leq r < j$ und $x \in N_r$.

Die Existenz solcher Elemente können wir im Allgemeinen nicht beweisen. Da sie aber für die charaktertheoretischen Aussagen wichtig sind, stellt dies unsere nächste Bedingung dar.

Bedingung 6.2.Biii. Es gibt tolle Elemente.

Daraus ergibt sich folgende Struktur von $\widehat{N}$.



Wie im Beispiel 6.1 sind die Gruppen $\widehat{S}$ und $\widehat{N}$ nicht die Gruppen, für deren charaktertheoretischen Eigenschaften wir uns interessieren. Wir benutzen einen linearen Charakter $\delta \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ mit besonderen Eigenschaften, um statt $\widehat{S} \lhd \widehat{N}$ eine kleinere Situation $S \lhd N$ zu studieren.

6.2.6. Es sei $\delta \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ mit

(a) $\delta(1) = 1$,

(b) $\left\langle \ker \delta \cap \widehat{N}_r, \widehat{S}_r \right\rangle = \widehat{N}_r$ für alle $1 \leq r < j$ und

(c) $\delta(p_r) = 1$ für alle $1 \leq r < j$.

Der 1-Charakter auf $\widehat{N}$ erfüllt diese Eigenschaften. Auch $\eta \circ \mathcal{L}$ mit $\eta \in \operatorname{Irr}(Z)$ besitzt die geforderten Eigenschaften. Dies ergibt sich aus der Definition der Gruppen $\widehat{N}_r$ und der Definition toller Elemente. Da die Aussage zentral von δ abhängt, wählen wir bei jeder Anwendung den Charakter einzeln und weisen für diesen dann die obigen Eigenschaften nach.

Wir benötigen noch eine letzte Bedingung, durch die $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ ($\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$) eine besonders einfache Stuktur besitzt.

Bedingung 6.2.Biv. Für alle $r, r' \in \{1, \ldots, j\}$ mit $r \neq r'$ und alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}_r\right)$ gilt

$$[\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda), \widehat{N}_{r'}] \leq \ker(\lambda) \cap Z.$$

Wir haben in diesem Abschnitt anhand der in 6.2.1 gegebenen Situation Unterwurzelsysteme und Gruppen definiert. Zudem haben wir in den Bedingungen noch zusätzliche Annahmen formuliert. Daraus entsteht eine übersichtliche charaktertheoretische Situation, wie wir im nächsten Abschnitte sehen.

6.3 Maximale Fortsetzbarkeit in $\widehat{N}$

Wir werden nun sukzessive Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ fortsetzen. Dabei nehmen wir an, dass die Gruppen, Wurzelsysteme und der Charakter δ wie in 6.2.1 und 6.2.6 gegeben sind und die Bedingungen 6.2.**B**i- 6.2.**B**iv erfüllen. Wir benutzen die Untergruppen aus 6.2.

Ziel ist der Beweis von Satz 6.3.15, bei dem die maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ mit mit $T := \ker(\delta\rceil_{\widehat{S}})$ und $N := \ker(\delta)$ gezeigt wird. Dieses Resultat ist das Haupthilfsmittel in den nachfolgenden Kapiteln.

Wir geben uns nun nacheinander verschiedene Gruppenpaare vor, bei der eine Gruppe ein Normalteiler der anderen ist. Die dabei zugrunde liegenden Gruppen sind nacheinander

(a) $\widehat{S}_1 \lhd \widehat{N}_1$,

(b) $\widehat{S} \lhd \widehat{N}_C$ und

(c) $\widehat{S} \lhd \widehat{N}$.

Für diese Situationen konstruieren wir Abbildungen

$$\begin{aligned}
\Theta' : \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}_1\right) &\to \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)} \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda) \mid \lambda\right), \\
\Theta : \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right) &\to \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda) \,\middle|\, \lambda\right) \text{ und} \\
\Lambda : \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right) &\to \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) \mid \lambda\right).
\end{aligned}$$

Diese Abbildungen ordnen jedem Charakter eine maximale Fortsetzung in $\widehat{N}_1$ bzw. $\widehat{N}_C$ bzw. $\widehat{N}$ zu.

Wir beweisen für diese Äquivarianz-Eigenschaften, was bei der Konstruktion weiterer Fortsetzungen hilft. Beispielsweise benutzen wir zur Konstruktion von Θ die Abbildung Θ'. Außerdem beweisen wir für diese Abbildungen eine Art „δ-Kompatibilität“.

Diese Eigenschaften ermöglichen schließlich den Beweis von Satz 6.3.15, nach dem die maximalen Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ vorliegt.

Wir beginnen mit der Abbildung für $\widehat{S}_1 \lhd \widehat{N}_1$.

Lemma 6.3.1. *Es gibt eine $\widehat{N}_1$-äquivariante Abbildung*

$$\Theta' : \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right) \to \bigcup_{\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)} \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda) \mid \lambda\right),$$

die jedem Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ eine Fortsetzung auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)$ zuordnet. Weiter gilt

$$\Theta'\left(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}_1}\right) = \Theta'(\lambda)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}.$$

Beweis. Wir wählen zunächst eine Menge $\mathcal{T} \subset \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ und definieren auf dieser Menge Θ'. Anschließend setzen wir Θ' auf $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ fort und weisen die behaupteten Eigenschaften von Θ' nach, die sich aus der Konstruktion von Θ' ergeben.

Die Menge $\mathcal{T}$ wird als Transversale in $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ unter folgenden Operationen gewählt: Tensorierung definiert eine Operation der durch $\left\langle \delta\rceil_{\widehat{S}_1}\right\rangle$ erzeugten multiplikativen Gruppe auf $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$. Auch $\widehat{N}_1$ operiert auf $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$, so dass daraus eine Operation von $\left\langle \delta\rceil_{\widehat{S}_1}\right\rangle \times \widehat{N}_1$ auf $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ entsteht. Sei nun $\mathcal{T}$ eine Transversale in $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ bezüglich dieser Operation.

Wir legen $\Theta'(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathcal{T}$ fest. Für jeden Charakter $\lambda \in \mathcal{T}$ wählen wir eine Fortsetzung $\Theta'(\lambda) := \widetilde{\lambda} \in \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)\right)$. Solche Fortsetzungen existieren gemäß Lemma 3.1.1 (a), da die Faktorgruppe $\widehat{N}_1/\widehat{S}_1$ zyklisch ist.

Nun definieren wir Θ' auf ganz $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$: Für jedes $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ gibt es aufgrund der Definition von $\mathcal{T}$ einen Charakter $\lambda' \in \mathcal{T}$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein Element $n \in \widehat{N}_1$ mit

$$\lambda = \left(\lambda'\, \delta\rceil_{\widehat{S}_1}^{k}\right)^{n}.$$

Dabei ist λ' eindeutig. Wir definieren $\Theta'(\lambda)$ durch

$$\Theta'(\lambda) := \left(\Theta'(\lambda')\, \delta^{k}\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{S}_1}(\lambda)}\right)^{n}.$$

Um festzustellen, ob damit Θ' wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass λ auch mit $n' \in \widehat{N}_1$ und $k' \in \mathbb{N}$ ausgedrückt werden kann, d.h.

$$\lambda = \left(\lambda'\, \delta\rceil_{\widehat{S}_1}^{k'}\right)^{n'}.$$

Klar ist

$$\left(\Theta'(\lambda')\,\delta^k\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}\right)^n(s) = \lambda(s) \text{ und } \left(\Theta'(\lambda')\,\delta^{k'}\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}\right)^{n'} = \lambda(s) \text{ für alle } s \in \widehat{S}_1.$$

Wir wählen $x \in \widehat{N}_1 \cap \ker(\delta)$ mit $\left\langle x, \widehat{S}_1 \right\rangle = \widehat{N}_1$. Aufgrund der Eigenschaften von δ aus 6.2.6 und Lemma 6.2.4 (a) existiert ein solches Element. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass n und n' Potenzen von x sind und daher mit x kommutieren. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $x^i \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\Theta'(\lambda')\,\delta^k\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}\right)^n(x^i) &= \left(\Theta'(\lambda')\,\delta^k\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}\right)(x^i) \\
&= \left(\Theta'(\lambda')(x^i)\right)\cdot\left(\delta^k\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}(x^i)\right) \\
&= \Theta'(\lambda')(x^i)\cdot 1 \\
&= \Theta'(\lambda')(x^i)
\end{aligned}$$

und analog

$$\left(\Theta'(\lambda')\,\delta^{k'}\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)}\right)^{n'}(x^i) = \Theta'(\lambda')(x^i).$$

Die beiden linearen Charaktere stimmen daher auf

$$\left\langle \langle x\rangle \cap \mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda), \widehat{S}_1 \right\rangle = \mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)$$

überein. Die Abbildung Θ' ist also wohldefiniert.

Es bleibt noch

$$\begin{aligned}
\Theta'(\lambda^n) &= \Theta'(\lambda)^n && \text{für alle } \lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right),\ n \in \widehat{N}_1, \text{ und} \\
\Theta'\left(\lambda\,\delta\rceil_{\widehat{S}_1}\right) &= \Theta'(\lambda)\,\delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda)} && \text{für alle } \lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)
\end{aligned}$$

nachzuweisen. Dies folgt aus der Definition von Θ'. □

Für die Konstruktion einer Fortsetzung von $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$ benutzen wir Θ'. Dies ist mittels der Isomorphismen $\iota_r : \widehat{N}_r \to \widehat{N}_1$ $(1 \leq r \leq j)$ möglich.

6.3.2 (Definition der ι_r). Seien $p_1, \dots, p_{j-1}$ die tollen Elemente aus der Bedingung 6.2.**B**iii. Dann definieren wir durch

$$\iota_1 : \widehat{N}_1 \to \widehat{N}_1 \text{ mit } \iota_1(x) := x \text{ für alle } x \in \widehat{N}_1$$

und für $2 \leq r \leq j$

$$\iota_r : \widehat{N}_r \to \widehat{N}_1 \text{ mit } \iota_r(x) := \iota_{r-1}(x^{p_{r-1}}) \text{ für alle } x \in \widehat{N}_r$$

Isomorphismen.

Mit Hilfe dieser Isomorphismen zwischen den Gruppen $\widehat{N}_r$ definieren wir maximale Fortsetzungen bei $\widehat{S} \lhd \widehat{N}_C$.

Lemma 6.3.3. *Zu jedem Charakter* $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ *gibt es eine maximale Fortsetzung* $\widetilde{\lambda} \in \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)\right)$ *und somit existiert eine Abbildung*

$$\Theta : \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right) \to \bigcup_{\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda) \;\middle|\; \lambda\right) \text{ mit } \lambda \mapsto \widetilde{\lambda}.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$. Wir analysieren zunächst die Struktur von $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$. Anschließend definieren wir mit Hilfe der Abbildung Θ' aus Lemma 6.3.1 eine Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$.

Zu λ assoziieren wir die Charaktere

$$\lambda_r := \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j,$$

die

$$\lambda_r\rceil_Z = \lambda\rceil_Z \text{ für alle } 1 \leq r \leq j$$

erfüllen.

Da $\widehat{S}$ das zentrale Produkt der Gruppen $\widehat{S}_i$ $(1 \leq i \leq j)$ ist, können wir λ gemäß Lemma 3.1.7 als Produkt der Charaktere λ_r auffassen, d.h.

$$\lambda = \lambda_1. \cdots .\lambda_j.$$

Jedes Element $x \in \widehat{N}_C$ lässt sich aufgrund der Definition von $\widehat{N}_C$ und Lemma 6.2.3 (b) als Produkt von Elementen aus $x_r \in \widehat{N}_r$ mit

$$x = \prod_{r=1}^{j} x_r$$

schreiben. Aus Lemma 6.2.3 (c) folgt

$$\lambda^x = \lambda_1^{x_1}. \cdots .\lambda_j^{x_j}.$$

Dementsprechend ist $x \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$ äquivalent zu

$$x_r \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r) \text{ für alle } 1 \leq r \leq j.$$

Daraus folgt $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r) \,\middle|\, 1 \leq r \leq j \right\rangle$.

Aufgrund der Bedingung 6.2.**B**iv ist auch $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)/\ker(\lambda\rceil_Z)$ ein zentrales Produkt und zwar

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)/\ker(\lambda\rceil_Z) = \mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda_1)/\ker(\lambda\rceil_Z) \circ_Z \cdots \circ_Z \mathrm{I}_{\widehat{N}_j}(\lambda_j)/\ker(\lambda\rceil_Z).$$

Die Charaktere $\widetilde{\lambda}_r := \Theta'(\lambda_r \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r)\right)$ können wir auch als Charaktere auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda_r)/\ker(\lambda\rceil_Z)$ betrachten. Durch

$$\widetilde{\lambda} := \widetilde{\lambda}_1. \cdots .\widetilde{\lambda}_j$$

definieren wir einen Charakter $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)/\ker(\lambda\rceil_Z)\right)$, den wir auch als Charakter auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$ auffassen können. Als solcher ist er eine Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$.

Die Abbildung $\Theta(\lambda)$ wird durch

$$\Theta(\lambda) := \widetilde{\lambda}_1. \cdots .\widetilde{\lambda}_j$$

definiert. □

Die Abbildung Θ ist auch „mit δ kompatibel".

Lemma 6.3.4. *Für die Abbildung Θ aus dem Beweis von 6.3.3 gilt*

$$\Theta(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}) = \Theta(\lambda)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)} \text{ für alle } \lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right).$$

Beweis. Wir bestimmen alle Charaktere, die für die Konstruktion von $\Theta(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}})$ benutzt werden, und zeigen, wie diese mit den entsprechenden Charakteren bei der Konstruktion von $\Theta(\lambda)$ zusammenhängen. Daraus ergibt sich dann in Verbindung mit den Eigenschaften von δ die Behauptung.

Seien $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$, λ_r und $\widetilde{\lambda}_r$ $(1 \leq r \leq j)$ wie im Beweis zu 6.3.3 definiert. Mit

$$\lambda'_r := \lambda\delta\rceil_{\widehat{S}_r} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j$$

und

$$\widetilde{\lambda}'_r := \Theta'(\lambda'_r \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r)\right) \text{ für alle } 1 \leq r \leq j$$

gilt

$$\Theta(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}) = \widetilde{\lambda}'_1. \cdots .\widetilde{\lambda}'_j.$$

Zwischen λ'_r und λ gibt es mit

$$\delta_r := \delta\rceil_{\widehat{S}_r} \text{ für alle } 1 \le r \le j$$

folgende Verbindung

$$\lambda'_r = \lambda_r \delta_r.$$

Mit 6.3.1 folgt daraus

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}'_r &= \Theta'((\lambda_r\delta_r) \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \\
&= \Theta'((\lambda_r \circ \iota_r^{-1})\delta_1) \circ \iota_r \\
&= \left(\Theta'(\lambda_r \circ \iota_r^{-1})\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\lambda_r \circ \iota_r^{-1})}\right) \circ \iota_r \\
&= \left(\Theta'(\lambda_r \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r\right)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r)} \\
&= \widetilde{\lambda}_r\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r)}.
\end{aligned}$$

Die Isomorphismen ι_r wurden durch die Konjugation mit Elementen aus N_S definiert. Zusammen mit $\delta \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ folgt daraus

$$\delta_r \circ \iota_r^{-1} = \delta_1 \text{ und } \delta_1 \circ \iota_r = \delta_r.$$

Mit den Charakteren

$$\delta'_r := \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda_r)} \text{ für alle } 1 \le r \le j$$

ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\Theta(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}) &= \widetilde{\lambda}'_1. \cdots .\widetilde{\lambda}'_j \\
&= (\widetilde{\lambda}_1\delta_1). \cdots .(\lambda_j\delta_j) \\
\\
&= (\widetilde{\lambda}_1. \cdots .\widetilde{\lambda}_j)\delta_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)} \\
&= \Theta(\lambda)\delta_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

Eine weitere später sehr nützliche Eigenschaft ist die $\widehat{N}$-Äquivarianz von Θ.

Lemma 6.3.5. *Die Abbildung Θ ist $\widehat{N}$-äquivariant.*

Beweis. Wir zeigen dafür

$$\Theta(\lambda^x) = \Theta(\lambda)^x \text{ für alle } \lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$$

für alle $x \in \widehat{N}_r$ $(1 \leq r \leq j)$ und $x = p_{r'}$ $(1 \leq r' < j)$. Wegen

$$\left\langle \widehat{N}_r, p_{r'} \,\middle|\, 1 \leq r \leq j, 1 \leq r' < j \right\rangle = \left\langle \widehat{N}_C, N_S \right\rangle = \widehat{N}$$

aus Lemma 6.2.4 (d) beweist dies bereits die Behauptung.

Seien wie eben λ_i' und $\widetilde{\lambda}_i'$ die bei den Zwischenschritten auftretenden Charaktere zur Berechnung von $\Theta(\lambda^x)$: Mit

$$\lambda_i' := \lambda^x\rceil_{\widehat{S}_i} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j$$

und

$$\widetilde{\lambda}_i' := \Theta'(\lambda_i' \circ \iota_i^{-1}) \circ \iota_i \in \operatorname{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}_i}(\lambda_i)\right) \text{ für alle } 1 \leq i \leq j$$

gilt

$$\Theta(\lambda^x) = \widetilde{\lambda}_1'. \cdots \widetilde{\lambda}_j'.$$

- Für $x \in \widehat{N}_r$ ist $x \in \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{S}_i)$ für alle $i \neq r$ aus Lemma 6.2.3 bekannt. Daraus folgt

$$\lambda_i' = \begin{cases} \lambda_i & i \neq r, \\ \lambda_i^x & i = r. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich für die Charaktere $\widetilde{\lambda}_i'$ definitionsgemäß

$$\widetilde{\lambda}_i' = \widetilde{\lambda}_i \text{ für } i \neq r.$$

Wegen der $\widehat{N}_1$-Äquivarianz von Θ' aus 6.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_r' &= \Theta'(\lambda_r^x \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \\ &= \Theta'\left((\lambda_r \circ \iota_r^{-1})^{\iota_r(x)}\right) \circ \iota_r \\ &= \left(\Theta'(\lambda_r \circ \iota_r^{-1})\right)^{\iota_r(x)} \circ \iota_r \\ &= (\widetilde{\lambda}_r)^x. \end{aligned}$$

Auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)/\ker(\lambda) \cap Z$ ergibt sich

$$\Theta(\lambda^x) = \widetilde{\lambda}_1. \cdots .(\widetilde{\lambda}_r)^x. \cdots .(\widetilde{\lambda}_j).$$

Wegen $[\widehat{N}_r, \mathrm{I}_{\widehat{N}_i}(\lambda_i)] \leq \ker(\lambda_i) \cap Z$ für alle $i \neq r$, was durch die Bedingung 6.2.**B**iv sicher gestellt wird, gilt sogar

$$\Theta(\lambda^x) = \widetilde{\lambda}_1. \cdots .(\widetilde{\lambda}_i)^x. \cdots .\widetilde{\lambda}_j = \left(\widetilde{\lambda}_1. \cdots .\widetilde{\lambda}_r. \cdots .\widetilde{\lambda}_j\right)^x = \Theta(\lambda)^x.$$

- Wir betrachten nun den Fall $x = p_r$ für ein beliebiges $r \in \{1, \ldots, j-1\}$. Gemäß 6.2.4 (c) gilt

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i & i \notin \{r, r+1\}, \\ \lambda_i^x & i \in \{r, r+1\}. \end{cases}$$

Dabei ist λ_r^x bzw. λ_{r+1}^x durch

$$\lambda_r^x(t) = \lambda_r(t^{x^{-1}}) \text{ für alle } t \in \widehat{S}_{r+1} \text{ bzw. } \lambda_{r+1}^x(t) = \lambda_r(t^{x^{-1}}) \text{ für alle } t \in \widehat{S}_r$$

definiert und erfüllt somit

$$\lambda'_r = \lambda_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1} \circ \iota_r \text{ bzw. } \lambda'_{r+1} = \lambda_r \circ \iota_r^{-1} \circ \iota_{r+1}.$$

Daraus ergeben sich für die Charaktere $\widetilde{\lambda}'_i$

$$\widetilde{\lambda}'_i = \widetilde{\lambda}_i \text{ für } i \notin \{r, r+1\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}'_r &= \Theta'(\lambda'_r \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \\ &= \Theta'((\lambda_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1} \circ \iota_r) \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_r \\ &= \Theta'(\lambda_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1}) \circ \iota_r \\ &= \widetilde{\lambda}_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1} \circ \iota_r = \widetilde{\lambda}_{r+1}^{p_r} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}'_{r+1} &= \Theta'(\lambda'_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1}) \circ \iota_{r+1} \\ &= \Theta'((\lambda_r \circ \iota_r^{-1} \circ \iota_{r+1}) \circ \iota_{r+1}^{-1}) \circ \iota_{r+1} \\ &= \Theta'(\lambda_r \circ \iota_r^{-1}) \circ \iota_{r+1} \\ &= \widetilde{\lambda}_r \circ \iota_r^{-1} \circ \iota_{r+1} = \widetilde{\lambda}_r^{p_r}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von 6.2.4 (c) ergibt sich daraus

$$\Theta(\lambda^{p_r}) = \widetilde{\lambda}_1. \cdots .\widetilde{\lambda}_{r+1}^{p_r}.\widetilde{\lambda}_r^{p_r}. \cdots .\widetilde{\lambda}_j = (\widetilde{\lambda}_1. \cdots, \widetilde{\lambda}_j)^{p_r} = \Theta(\lambda)^{p_r}.$$

Die betrachteten Elemente erzeugen wie oben schon erwähnt die ganze Gruppe $\widehat{N}$. Daraus ergibt sich die behauptete $\widehat{N}_1$-Äquivarianz von Θ. □

Diese Fortsetzungen sind im Allgemeinen keine maximalen Fortsetzungen von $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in $\widehat{N}$. Wir nutzen diese aber zur weiteren Konstruktion. Zunächst beschränken wir uns darauf, nur bestimmte Charaktere aus $\mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ fortzusetzen.

Definition 6.3.6. Wir sagen, dass ein Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in **Normalform** ist, falls

(a) die Menge

$$\mathcal{M}_\lambda := \left\{ \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} \;\middle|\; 1 \leq r \leq j \right\} \subseteq \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$$

keine zwei verschiedenen Charaktere aus der gleichen $\widehat{N}_1$-Bahn in $\operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ enthält und

(b) für jeden Charakter $\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$ die Menge

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu} := \left\{ r \;\middle|\; \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \mu \right\} \subset \mathbb{N}$$

eine Menge aufeinander folgender Zahlen in $\mathbb{N}$ oder kurz eine Art „Intervall“ ist.

Die Trägheitsgruppe solcher Charaktere in Normalform hat eine ähnliche Struktur wie $\widehat{N}$:

Lemma 6.3.7. *Für jeden Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in Normalform gilt*

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda), N_{S,I} \right\rangle$$

für eine geeignete Menge $I \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda^x}$ für alle $x \in N_S$ und damit

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda), \mathrm{I}_{N_S}(\lambda) \right\rangle.$$

Anschließend beschäftigen wir uns mit der Struktur von $\mathrm{I}_{N_S}(\lambda)$.

Für jede Zahl $1 \leq r \leq j-1$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda^{p_r}} &= \left\{ \lambda^{p_r}\rceil_{\widehat{S}_i} \circ \iota_i^{-1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \right\} \\ &= \left\{ \lambda\rceil_{\widehat{S}_i} \circ \iota_i^{-1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq j, i \notin \{r, r+1\} \right\} \cup \left\{ (\lambda\rceil_{\widehat{S}_{r+1}})^{p_r} \circ \iota_r, (\lambda\rceil_{\widehat{S}_r})^{p_r} \circ \iota_{r+1} \right\} \\ &= \left\{ \lambda\rceil_{\widehat{S}_i} \circ \iota_i^{-1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \right\} \\ &= \mathcal{M}_\lambda. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda^x}$ für alle $x \in N_S$.

Jedes Element $x \in \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ kann gemäß 6.2.4 (d) als Produkt von $x_C \in \widehat{N}_C$ und $x_S \in N_S$ geschrieben werden. Wegen $\lambda^x = \lambda$ gilt auch $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda^{x_C}}$. Wir wählen Elemente $x_r \in \widehat{N}_r$ mit $x_C = \prod_{r=1}^{j} x_r$. Aus

$$\mathcal{M}_\lambda \ni \lambda^{x_C}\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \lambda^{x_r}\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \left(\lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1}\right)^{\iota_r(x_r)} \quad \text{für alle } 1 \leq r \leq j$$

folgt mit Hilfe von 6.3.6 (a) bereits $x_r \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda)$, also $x_C \in \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$. Dies beweist bereits

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda), \mathrm{I}_{N_S}(\lambda) \right\rangle.$$

Für jedes Element $x_S \in N_S$ gibt es eine Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_j$ mit

$$\widehat{N}_i^{x_S} = \widehat{N}_{\sigma(i)} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j.$$

Mit Hilfe dieser Permutation beschreiben wir die Mengen $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ durch

$$\sigma^{-1}(r) \in \mathcal{N}_{\lambda^{x_S},\mu} \text{ für alle } \mu \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}.$$

Aus $x_S \in \mathrm{I}_{N_S}(\lambda)$ folgt

$$\rho(x_S) \in \left\langle \mathrm{S}_{\mathcal{N}_{\lambda,\mu}} \,\middle|\, \mu \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \right\rangle.$$

Auch die umgekehrte Richtung gilt, da λ eindeutig durch die Menge $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ festgelegt wird.

Die Gruppe $\left\langle \mathrm{S}_{\mathcal{N}_{\lambda,\mu}} \,\middle|\, \mu \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \right\rangle$ wird wegen der in 6.3.6 (b) beschriebenen Struktur der Mengen $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ von gewissen Transpositionen $(i, i+1)$ mit

$$i \in I := \left\{ r \,\middle|\, \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \lambda\rceil_{\widehat{S}_{r+1}} \circ \iota_{r+1}^{-1} \right\}$$

erzeugt. Für I gilt auch

$$I = \left\{ r \,\middle|\, \text{es existiert ein } \mu \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ mit } \{r, r+1\} \subseteq \mathcal{N}_{\lambda,\mu} \right\}.$$

Dies hat $\mathrm{I}_{N_S}(\lambda) = N_{S,I}$ zur Folge und beweist die behauptete Struktur von $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$. $\square$

Nun setzen wir mit Hilfe von Θ Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in Normalform auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ fort.

Lemma 6.3.8. *Zu jedem Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in Normalform existiert eine Fortsetzung $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)\right)$. Daher existiert eine Abbildung*

$$\Lambda : \left\{ \lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right) \,\middle|\, \lambda \textit{ ist in Normalform} \right\} \to \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) \mid \lambda\right) \textit{ mit } \lambda \mapsto \widetilde{\lambda}.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer Wiederholung der Struktur von $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ und zeigen

$$N_{S,I} \cap \widehat{S} \leq \ker(\lambda).$$

Mit Hilfe der Eigenschaften von $\Theta(\lambda)$ können wir dann eine Fortsetzung von λ auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ konstruieren.

Da λ in Normalform ist, hat die Trägheitsgruppe $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ die in 6.3.7 beschriebene Struktur, also

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \langle \mathrm{I}_{N_C}(\lambda), N_{S,I} \rangle$$

für eine geeignete Menge $I \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$.

Aus der Bedingung 6.2.**B**iii und der Definition 6.2.5 wissen wir

$$N_{S,I} \cap \widehat{S} = \left\langle l_r l_{r+1}^{-1} \,\middle|\, r \in I \right\rangle.$$

Für $r \in I$ gilt gemäß der in 6.3.7 angegebenen Formel auch

$$\lambda_r \circ \iota_r^{-1} = \lambda_{r+1} \circ \iota_{r+1}^{-1}.$$

Dies hat

$$\lambda_r(x) = \lambda_{r+1}(x^{p_r^{-1}}) \text{ für alle } x \in \widehat{S}_r$$

und insbesondere

$$\lambda_r(l_r) = \lambda_{r+1}(l_r^{p_r^{-1}}) = \lambda_{r+1}(l_{r+1})$$

zur Folge. Wegen $\lambda(l_r l_{r+1}^{-1}) = 1$ wird

$$N_{S,I} \cap \widehat{S} \leq \ker \lambda$$

erfüllt. Es gilt sogar allgemeiner $N_{S,I} \cap \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda) \leq \ker \lambda$.

Wir konstruieren nun unter Zuhilfenahme dieser Resultate $\Lambda(\lambda)$: Wegen der $\widehat{N}$-Äquivarianz aus 6.3.5 gilt auch

$$\Theta(\lambda)^x = \Theta(\lambda) \text{ für alle } x \in \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda).$$

Gemäß Satz 3.1.6 definieren wir durch

$$\Lambda(\lambda)\rceil_{\mathrm{I}_{N_C}(\lambda)} := \Theta(\lambda) \text{ und } \Lambda(\lambda)\rceil_{N_{S,I}} := 1.$$

eine maximale Fortsetzung von λ. □

Wie schon bei den anderen Abbildungen bestimmen wir auch hier das Bild von $\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}$, wobei $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ ein Charakter in Normalform ist.

Lemma 6.3.9. *Für jeden Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in Normalform gilt*

$$\Lambda\left(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}\right) = \Lambda(\lambda)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}$ in Normalform ist und damit $\Lambda\left(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}\right)$ definiert ist. Anschließend bestimmen wir $\Lambda\left(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}\right)$.

Um zu zeigen, dass $\lambda' := \lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}$ in Normalform ist, berechnen wir $\mathcal{M}_{\lambda'}$, für diese Menge gilt

$$\mathcal{M}_{\lambda'} = \left\{\ \lambda\rceil_{\widehat{S}_r}\delta_r \circ \iota_r^{-1}\ \middle|\ 1 \leq r \leq j\right\} = \left\{\delta_1\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_\lambda\right\}.$$

Für alle Charaktere $\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$ gilt analog

$$\mathcal{N}_{\lambda',\mu} = \left\{r\ \middle|\ \lambda\delta\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \mu\right\} = \left\{r\ \middle|\ \lambda\rceil_{\widehat{S}_r} \circ \iota_r^{-1} = \mu\delta^{-}1\right\} = \mathcal{N}_{\lambda,\mu\delta^{-1}}.$$

Also ist λ' auch ein Charakter in Normalform.

Aus der Definition von I im Beweis zu 6.3.7 geht

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda') = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda'), N_{S,I}\right\rangle$$

hervor.

Daher gelten für $\Lambda(\lambda)$ die Gleichungen

$$\Lambda(\lambda')\rceil_{N_{S,I}} = 1$$

und

$$\Lambda(\lambda')\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda')} = \Theta(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}) = \Theta(\lambda)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)},$$

wobei wir die in Lemma 6.3.4 bewiesene Eigenschaft von Θ ausnutzen.

Beide Gleichungen werden wegen $N_S \leq \ker(\delta)$ aus 6.2.6 auch von $\Lambda(\lambda)\delta_0$ mit $\delta_0 := \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}$ erfüllt, d.h.

$$\Lambda(\lambda)\delta_0\rceil_{N_{S,I}} = 1$$

und

$$\Lambda(\lambda)\delta_0\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda')} = \Theta(\lambda)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)}.$$

Daraus folgt

$$\Lambda\left(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}\right) = \Lambda(\lambda)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}.$$

□

Wir möchten Λ zu einer Abbildung auf ganz $\operatorname{Irr}(\widehat{S})$ fortsetzen. Diese entstehende Abbildung soll ebenfalls $\widehat{N}$-äquivariant sein. Für die späteren Beweise benötigen wir, dass bereits Λ in der bisherigen Form eine eingeschränkte Äquivarianzbedingung erfüllt und zwar

$$\Lambda(\lambda)^n = \Lambda(\lambda^n)$$

für jedes Element $n \in \widehat{N}$ und jeden Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$, bei dem λ und λ^n in Normalform sind. Um den Beweis dieser eingeschränkten Äquivarianz zu vereinfachen, zeigen wir folgende Aussage.

Lemma 6.3.10. *Sind $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ und λ^x für $x_S \in N_S$, $x_C \in \widehat{N}_C$ und $x := x_C x_S$ Charaktere in Normalform, so ist auch λ^{x_C} in Normalform.*

Beweis. Dazu zeigen wir, dass die Mengen $\mathcal{M}_{\lambda'}$ und $\mathcal{N}_{\lambda',\mu}$ ($\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$) für $\lambda' := \lambda^{x_C}$ die geforderten Eigenschaften besitzen. Ein wichtiger Zwischenschritt dabei ist, die Gleichung

$$\mu^{\iota_{r'}(x_{r'})} = \mu^{\iota_r(x_r)} \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$$

für $x = \prod_{i=1}^{j} x_i$ mit $x_i \in \widehat{N}_i$ zu zeigen.

Aus dem Beweis von Lemma 6.3.7 ist $\mathcal{M}_{\lambda^x} = \mathcal{M}_{\lambda'}$ bekannt. Also hat diese Menge die geforderten Eigenschaften 6.3.6 (a).

Für $x_r \in \widehat{N}_r$ mit $x = \prod_{r=1}^{j} x_r$ und $\lambda_r := \lambda\rceil_{\widehat{S}_r}$ gilt

$$\mathcal{M}_{\lambda'} = \left\{ \lambda_r^{x_r} \circ \iota_r^{-1} \;\middle|\; 1 \leq r \leq j \right\}.$$

Aus dieser Definition ergeben sich für alle $\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$ und $r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ die Aussagen

$$\begin{aligned} \lambda_r^{x_r} \circ \iota_r^{-1} &= (\lambda_r \circ \iota_r^{-1})^{\iota_r(x_r)} = \mu^{\iota_r(x_r)} \in \mathcal{M}_{\lambda'} \text{ und} \\ \lambda_{r'}^{x_{r'}} \circ \iota_{r'}^{-1} &= (\lambda_{r'} \circ \iota_{r'}^{-1})^{\iota_{r'}(x_{r'})} = \mu^{\iota_{r'}(x_{r'})} \in \mathcal{M}_{\lambda'}. \end{aligned}$$

Diese sind $\widehat{N}_1$-konjugierte Charaktere und wegen 6.3.6 (a) gleich, d.h.

$$\mu^{\iota_{r'}(x_{r'})} = \mu^{\iota_r(x_r)} \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}.$$

Auf analoge Weise können wir auch

$$\mu^{\iota_{r'}(x_{r'}^{-1})} = \mu^{\iota_r(x_r^{-1})} \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda',\mu}$$

beweisen.

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu} = \mathcal{N}_{\lambda',\mu^{\iota_r(x_r)}} \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}.$$

Somit sind auch die Mengen $\mathcal{N}_{\lambda',\mu}$ ($\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$) Intervalle und erfüllen die Eigenschaften aus 6.3.6 (b). Also ist λ' ein Charakter in Normalform. $\square$

Wir prüfen nun die Aussage über die eingeschränkte $\widehat{N}$-Äquivarianz in zwei Schritten nach.

Lemma 6.3.11. *Für alle Charaktere $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ und Elemente $x \in \widehat{N}_C$, für die λ und λ^x Charaktere in Normalform sind, gilt*

$$\Lambda(\lambda)^x = \Lambda(\lambda^x).$$

Beweis. Wir ersetzen x durch ein weiteres Element $y \in \widehat{N}_C$ mit $\lambda^x = \lambda^y$ und

$$\iota_{r'}(y_{r'}) = \iota_r(y_r) \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu},$$

wobei $y = \prod_{r=1}^{j} y_r$ für Elemente $y_r \in \widehat{N}_r$ gilt. Im Anschluss daran beweisen wir $\Lambda(\lambda^y) = \Lambda(\lambda)^y$.

Für $x_r \in \widehat{N}_r$ $(1 \leq r \leq j)$ mit $x = \prod_{r=1}^{j} x_r$ gilt gemäß den Ausführungen im Beweis zu 6.3.10 bereits

$$\mu^{\iota_{r'}(x_{r'})} = \mu^{\iota_r(x_r)} \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}.$$

Zu jedem $\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$ und allen $r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ existiert ein $x' \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_1}(\mu)$ mit

$$\iota_{r'}(x_{r'}) = x' \iota_r(x_r).$$

Es gibt also Elemente $y_r \in \widehat{N}_r$, so dass $y := \prod_{r=1}^{j} y_r$ sowohl $yx^{-1} \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$ als auch

$$\iota_{r'}(y_{r'}) = \iota_r(y_r) \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \text{ und } r, r' \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$$

erfüllt.

Wir berechnen nun $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^y)$: Gemäß Lemma 6.3.7 gibt es geeignete Mengen I, I' mit

$$\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda), N_{S,I} \right\rangle \text{ und } \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^y) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda^y), N_{S,I'} \right\rangle.$$

Im Beweis zu 6.3.7 wurde eine Formel für I bzw. I' angegeben. Aus dieser geht hervor, dass I' nur von $\left\{ \mathcal{N}_{\lambda^y,\mu} \;\middle|\; \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \right\}$ abhängt. Aus dem Beweis zu 6.3.10 ergibt sich

$$\left\{ \mathcal{N}_{\lambda^y,\mu} \;\middle|\; \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \right\} = \left\{ \mathcal{N}_{\lambda,\mu} \;\middle|\; \mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right) \right\}$$

und damit $I = I'$.

Für den Nachweis von $N_{S,I}^y = N_{S,I}$ berechnen wir p_i^y für alle $i \in I$. Zu allen $i \in I$ gibt es gemäß der Definition von I ein $\mu \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$ mit $i, i+1 \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$. Somit gilt gemäß der Definition von y auch

$$\iota_i(y_i) = \iota_{i+1}(y_{i+1}) \text{ bzw. } y_i = y_{i+1}^{p_i}.$$

Wegen $p_i \in \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_r)$ für alle $r \notin \{i, i+1\}$ aus Lemma 6.2.4 (c) gilt auch

$$p_i^y = p_i^{y_i y_{i+1}} = (y_i^{-1})^{p_i} y_i^{-1} p_i y_i y_i^{p_i} = (y_i^{-1})^{p_i} y_i^{-1} y_i^{p_i^{-1}} y_i p_i.$$

Mit Hilfe von 6.2.5 (e) ergibt sich daraus

$$p_i^y = (y_i^{-1})^{p_i} y_i^{-1} \left(y_i^{p_i^{-1}} y_i \right) p_i = (y_i^{-1})^{p_i} y_i^{-1} \left(y_i y_i^{p_i} \right) p_i = p_i.$$

Daraus folgt

$$N_{S,I}^y = N_{S,I}.$$

Der Charakter $\Lambda(\lambda^y)$ wird durch

$$\Lambda(\lambda^y)\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)} = \Theta(\lambda^y) = \Theta(\lambda)^y$$

und

$$\Lambda(\lambda^y)\rceil_{N_{S,I}} = 1$$

definiert. Aus $N_{S,I}^y = N_{S,I}$ ergibt sich auch

$$\Lambda(\lambda)^y\rceil_{N_{S,I}} = 1.$$

Als lineare Charaktere erfüllen $\Lambda(\lambda)^y$ und $\Lambda(\lambda^y)$ auch

$$\Lambda(\lambda)^y = \Lambda(\lambda^y).$$

Wegen $yx^{-1} \in \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda)$ folgt daraus die behauptete Gleichung

$$\Lambda(\lambda)^x = \Lambda(\lambda^x).$$

□

Analog zu eben zeigen wir nun die eingeschränkte N_S-Äquivarianz.

Lemma 6.3.12. *Sind $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ und λ^x für $x \in N_S$ in Normalform, so gilt*

$$\Lambda(\lambda^x) = \Lambda(\lambda)^x.$$

Beweis. Der Charakter $\Lambda(\lambda)^x$ ist auf $\left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda^x), N_{S,I'} \right\rangle$ für eine geeignete Menge I' definiert. Die Behauptung ist daher äquivalent zu

$$\Lambda(\lambda^x)\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x)} = \Lambda(\lambda)^x\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x)} \text{ und } \Lambda(\lambda^x)\rceil_{N_{S,I'}} = \Lambda(\lambda)^x\rceil_{N_{S,I'}}.$$

Die erste Gleichung ist wegen $\Lambda(\lambda^x)\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x)} = \Theta(\lambda^x)$ aus Lemma 6.3.5 bekannt. Genauer gilt dabei

$$\Lambda(\lambda^x)\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x)} = \Theta(\lambda^x) = \Theta(\lambda)^x = \left(\Lambda(\lambda)\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}\right)^x = \Lambda(\lambda)^x\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x)}$$

Sei nun $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) = \left\langle \mathrm{I}_{\widehat{N}_C}(\lambda), N_{S,I} \right\rangle$ für eine geeignete Menge I. Wegen $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda^x) = \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)^x$ gilt dabei auch

$$\mathrm{I}_{N_S}(\lambda)^x = \left\langle \widehat{S}, N_{S,I} \right\rangle^x = \left\langle \widehat{S}, N_{S,I'} \right\rangle.$$

Daher gibt es ein Element $x' \in N_{S,I}$ mit

$$\{\, \rho(p_i) \mid i \in I \}^{\rho(x'x)} = \{\, \rho(p_i) \mid i \in I' \}\,.$$

Mit Hilfe von 6.2.5 (d) folgt daraus

$$N_{S,I}^x = N_{S,I}^{x'x} = N_{S,I'}.$$

Auf jedem Element $y \in N_{S,I'}$ hat $\Lambda(\lambda)^x$ den Wert

$$\Lambda(\lambda)^x(y) = \Lambda(\lambda)(y^{x^{-1}}) = 1.$$

Daraus folgt $\Lambda(\lambda)^x\rceil_{N_{S,I'}} = 1 = \Lambda(\lambda^x)\rceil_{N_{S,I'}}$ und insgesamt $\Lambda(\lambda^x) = \Lambda(\lambda)^x$. □

Die letzten drei Aussagen fassen wir im folgenden Lemma zusammen:

Lemma 6.3.13. *Sind $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ und λ^x für $x \in \widehat{N}$ in Normalform, so gilt*

$$\Lambda(\lambda)^x = \Lambda(\lambda^x).$$

Beweis. Wir schreiben x wieder als Produkt,

$$x = x_C x_S$$

mit $x_C \in \widehat{N}_C$ und $x_S \in \widehat{N}_S$. Aus Lemma 6.3.10 ist bekannt, dass auch λ^{x_C} ein Charakter in Normalform ist. Daher können wir die beiden vorangegangenen Lemmata sukzessive anwenden und erhalten daraus die Behauptung:

$$\Lambda(\lambda)^{x_C x_S} = \Lambda(\lambda^{x_C})^{x_S} = \Lambda(\lambda^{x_C x_S}).$$

□

Wir definieren nun eine Abbildung auf ganz $\mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$, deren Einschränkung auf Charaktere in Normalform mit Λ übereinstimmt.

Satz 6.3.14. *Es gibt eine $\widehat{N}$-äquivariante Abbildung*

$$\overline{\Lambda} : \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right) \to \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)} \mathrm{Irr}\left(\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) \mid \lambda\right).$$

auf $\mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ *mit:*

(a) *Für jeden Charakter* $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ *ist* $\overline{\Lambda}(\lambda)$ *eine Fortsetzung von* λ *auf* $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$.

(b) *Für jeden Charakter* $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ *gilt*

$$\overline{\Lambda}\left(\lambda\, \delta\rceil_{\widehat{S}}\right) = \Lambda(\lambda)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ zu einem Charakter in Normalform konjugiert ist. Dann definieren wir $\overline{\Lambda}$ und zeigen die „δ-Kompatibilität".

Sei $\mathcal{T}$ eine $\widehat{N}_1$-Transversale in $\mathrm{Irr}\left(\widehat{S}_1\right)$. Für ein geeignetes Element $x_C \in \widehat{N}_C$ gilt $\mathcal{M}_{\lambda^{x_C}} \subset \mathcal{T}$. Für alle $1 \leq r \leq j$ existiert ein $y_r \in \widehat{N}_1$ mit

$$(\lambda_r \circ \iota_r^{-1})^{y_r} \in \mathcal{T}.$$

Daraus folgt $\mathcal{M}_{\lambda^{x_C}} \subset \mathcal{T}$ für $x := \prod_{r=1}^{j} \iota(y_r)$. Damit erfüllt $\lambda' := \lambda^{x_C}$ die Bedingung 6.2.5 (a).

Es existiert eine Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_j$, so dass die Mengen $\sigma^{-1}(\mathcal{N}_{\lambda',\mu})$ für alle $\mu \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}_1\right)$ „Intervalle" sind. Dazu existiert gemäß den Ausführungen im Beweis 6.3.7 ein Element x_S mit

$$\widehat{N}_i^{x_S} = \widehat{N}_{\sigma(i)} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j.$$

Der Charakter λ'^{x_S} ist somit ein Charakter in Normalform. Also existiert zu jedem Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ ein Charakter $\lambda_0 \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\right)$ in Normalform und ein Element $n \in \widehat{N}$ mit $\lambda_0^n = \lambda$.

Wir definieren dann $\overline{\Lambda}$ durch

$$\overline{\Lambda}(\lambda) := \Lambda(\lambda_0)^n.$$

Diese Abbildung ist wegen Lemma 6.3.13 wohldefiniert. Aufgrund der Definition ist $\overline{\Lambda}$ auch $\widehat{N}$-äquivariant.

Die Eigenschaft (b) folgt aus Lemma 6.3.9: Dort wurde für Charaktere λ_0 in Normalform

$$\overline{\Lambda}\left(\lambda_0\, \delta\rceil_{\widehat{S}}\right) = \Lambda(\lambda_0)\, \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda_0)}$$

gezeigt. Der Charakter $\lambda_0\ \delta\rceil_{\widehat{S}}$ ist gemäß den Ausführungen im Beweis von 6.3.9 ebenfalls in Normalform. Für die Berechnung von $\overline{\Lambda}(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}})$ können wir $\lambda = \left(\lambda_0\ \delta\rceil_{\widehat{S}}\right)^n$ benutzen. Es ergibt sich

$$\overline{\Lambda}(\lambda\ \delta\rceil_{\widehat{S}}) = \Lambda(\lambda_0\ \delta\rceil_{\widehat{S}})^n = \left(\Lambda(\lambda_0)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda_0)}\right)^n = \overline{\Lambda}(\lambda)\ \delta\rceil_{\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)}.$$

Dies zeigt (b). □

Wie im Beispiel gesehen, interessieren uns die Gruppen $\widehat{S} \lhd \widehat{N}$ eigentlich nicht. Die Vorarbeit über diese Gruppen ist aber zum Beweis des folgenden Satzes nötig.

Satz 6.3.15. *Seien die Gruppen und ein Charakter $\delta \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ wie in 6.2.1 und 6.2.6 gegeben, die Bedingungen 6.2.*$\mathbf{B}$*i- 6.2.*$\mathbf{B}$*iv erfüllt, $N := \ker\delta$ und $T := \ker\delta \cap \widehat{S}$. Dann sind alle irreduziblen Charaktere $\mu \in \mathrm{Irr}\,(T)$ maximal in N fortsetzbar.*

Beweis. Seien $\mu \in \mathrm{Irr}\,(T)$ und $\delta_0 := \delta\rceil_{\widehat{S}}$. Wir setzen zunächst μ zu λ auf $\widehat{S}$ fort, zeigen $\mathrm{I}_N(\Theta(\lambda)\rceil_{\mathrm{I}_N(\lambda)}) = \mathrm{I}_N(\mu)$ und beweisen, dass ${}^{\mathrm{I}_N(\mu)}/{\mathrm{I}_N(\lambda)}$ zyklisch ist. Daraus folgern wir dann die Behauptung.

Wir wählen also $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{S}\ \middle|\ \mu\right)$. Dieser Charakter ist gemäß 3.1.1 (c) eine Fortsetzung von μ, da $\widehat{S}$ abelsch ist. Auf $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ ist $\overline{\Lambda}(\lambda)$ definiert. Wegen $\delta \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ gelten $T \lhd \widehat{N}$ und damit $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda) \lhd \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\mu)$. Für jedes Element $n \in \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\mu) \setminus \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\lambda)$ ist λ^n eine Fortsetzung von μ. Diese Fortsetzungen gehen aus λ gemäß Lemma 3.1.3 durch Tensorierung mit linearen Charakteren $\eta \in \mathrm{Irr}\left({}^{\widehat{S}}/T\right)$ hervor. Aus der Definition von T folgt $\mathrm{Irr}\left({}^{\widehat{S}}/T\right) = \langle\delta_0\rangle$ mit $\delta_0 := \delta\rceil_{\widehat{S}}$. Es gibt also zu jedem Element $n \in \mathrm{I}_N(\mu)$ eine Zahl $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda^n = \delta_0^i\lambda.$$

Sei $n \in \mathrm{I}_N(\mu)$ ein Element, so dass $i \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^n = \delta_0^i\lambda$ minimal ist.

Wegen $(\delta_0^i)^n = \delta_0^i\rceil_{\widehat{S}}$ sind die $\langle n\rangle$-Konjugierten zu λ die Charaktere

$$\left\{\lambda\delta_0^{ik}\ \middle|\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

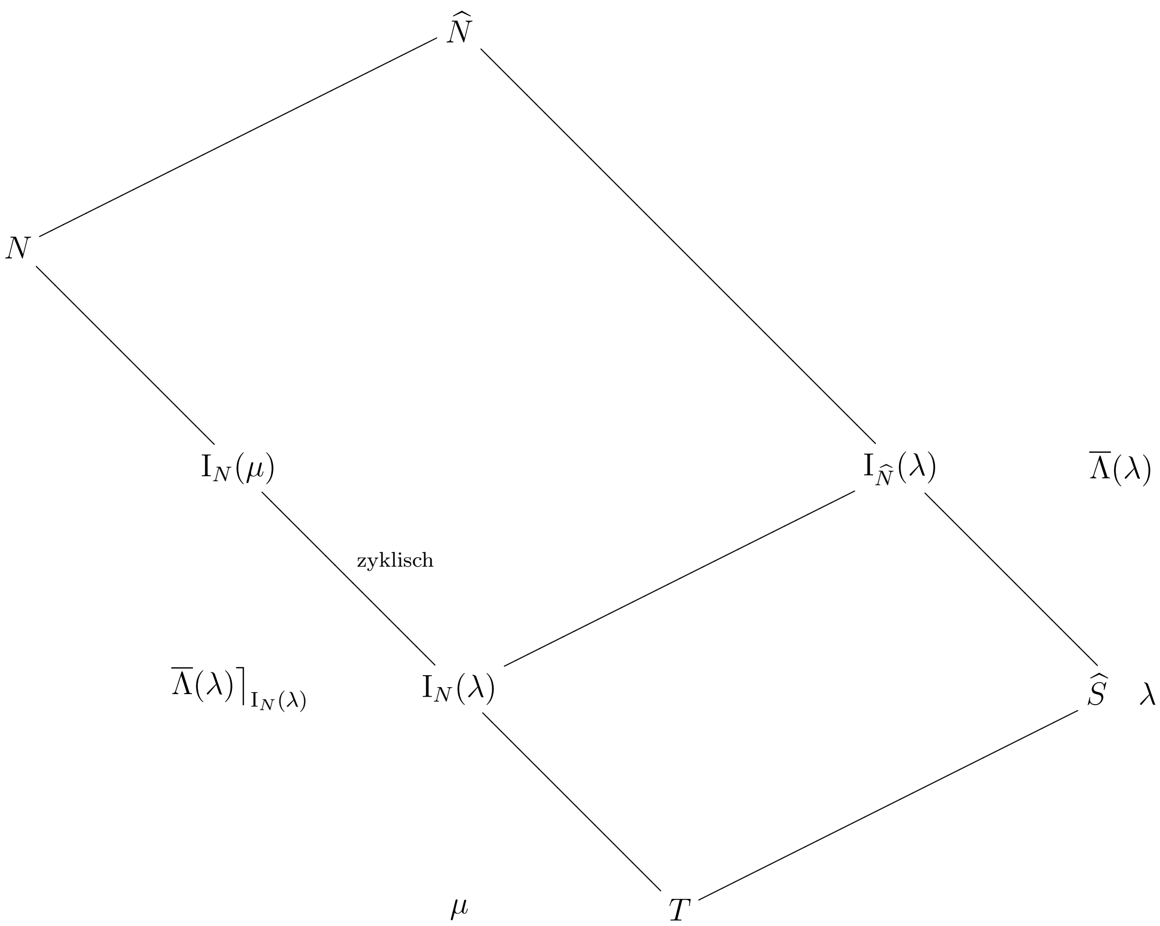
Für jedes $n' \in \mathrm{I}_N(\mu)$ gibt es eine Zahl $i' \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\lambda^{n'} = \lambda\delta_0^{i'}.$$

Ebenso existiert eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i' - ri < i$ Nach Konjugation mit n^{-r} gilt dann auch

$$\lambda^{n'n^{-r}} = (\lambda\delta_0^{i'})^{n^{-r}} = (\lambda\delta_0^{i'})^{n^{-r}} = \lambda\delta_0^{i'-ri}.$$

Mit Hilfe der Minimalität von i folgt daraus $n'n^{-1} \in \mathrm{I}_N(\mu)$. Somit ist die Gruppe ${}^{\mathrm{I}_N(\mu)}/{\mathrm{I}_N(\lambda)}$ zyklisch.



Aufgrund der Eigenschaften der Abbildung Λ aus Satz 6.3.14 gilt

$$\overline{\Lambda}(\lambda)^n = \overline{\Lambda}(\lambda^n) = \overline{\Lambda}(\lambda\delta_0^i) = \Lambda(\lambda)\ \delta^i\rceil_{\mathrm{I}_N(\lambda)},$$

woraus $\mathrm{I}_N(\overline{\Lambda}(\lambda)\rceil_{\mathrm{I}_N(\lambda)}) = \mathrm{I}_N(\mu)$ folgt.

Aufgrund der gezeigten Struktur von $\mathrm{I}_N(\mu)/\mathrm{I}_N(\lambda)$ gibt es gemäß 3.1.1 (a) eine Fortsetzung von $\overline{\Lambda}(\lambda)\rceil_{\mathrm{I}_N(\lambda)}$ auf ganz $\mathrm{I}_N(\mu)$. Diese ist gleichzeitig eine Fortsetzung von μ auf $\mathrm{I}_N(\mu)$. $\square$

Es ist hier anzumerken, dass die entstehenden Trägheitsfaktorgruppen zyklische Erweiterungen der Trägheitsfaktorgruppen von $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\mu)/\widehat{S}$ sind. Die Ordnung von $n\,\mathrm{I}_N(\mu)$ in der Gruppe $\mathrm{I}_N(\lambda)/\mathrm{I}_N(\mu)$ entspricht dem Index von $\mathrm{I}_N(\mu)$ in $\mathrm{I}_N(\lambda)$. Dieser ist ein Teiler der Ordnung von δ. Die Gruppe $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\mu)/\widehat{S}$ ist das direkte Produkt von Kranzprodukten. Diese Gruppe wird erweitert von $n\widehat{S}$. Dieses Element permutiert die einzelnen Faktoren, wobei einzelne stabilisiert werden können.

Wir haben nun Voraussetzungen formuliert, die die maximale Fortsetzbarkeit zur Folge haben. Es sind in den einzelnen Fällen also solche Situationen zu suchen, die alle Annahmen aus 6.2.1, 6.2.6 und die Bedingungen 6.2.**B**i - 6.2.**B**iv erfüllen. Bevor wir uns in den folgenden Kapiteln auf die Anwendungen des letzten Satzes konzentrieren, führen wir Kriterien ein, mit denen leichter die Bedingungen nachgewiesen werden.

6.4 Anmerkungen

In diesem Abschnitt stellen wir Kriterien vor, mit denen der Nachweis der Bedingungen 6.2.**B**ii, 6.2.**B**iii und 6.2.**B**iv vereinfacht wird. Wir geben in Lemma 6.4.1 Kandidaten für tolle Elemente an, die unter den zusätzlichen Voraussetzungen des Lemmas 6.4.2 alle geforderten Eigenschaften toller Elemente besitzen. Die Lemmata 6.4.3 und 6.4.4 formulieren Eigenschaften der Wurzelsysteme, aus denen die Bedingungen 6.2.**B**ii und 6.2.**B**iv folgen.

Wir verwenden die in diesem Kapitel eingeführte Notation und nehmen zusätzlich $v \in V$ an, wobei V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$ ist.

Lemma 6.4.1. *Seien* $\{1, \ldots, j\}$ *eine Transversale der Bahnen von* $\rho(v)\phi$ *auf* $\{1, \ldots, l\}$, $\beta_i := e_{i+1} - e_i \in R$ *(*$1 \leq i \leq j-1$*) und* $(v\phi)^{\frac{l}{j}} \in \mathrm{Z}(V)$. *Für die Elemente*

$$p_i := \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1$$

gelte

$$\rho(p_i) = w_{(i,i+1)} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1$$

und es seien $l_i \in \widehat{S}_i$ *(*$1 \leq i \leq j$*) Elemente mit*

$$l_i l_{i+1}^{-1} = p_i^2 \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1.$$

Dann besitzen diese Elemente die Eigenschaften 6.2.5 (a), (c) und (d).

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$p_i \in \mathrm{C}_V(v\phi) \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1.$$

Anschließend beweisen wir die Eigenschaft 6.2.5 (a) und konstruieren einen Isomorphismus zwischen der Gruppe $\langle p_i \,|\, 1 \leq i \leq j \rangle$ und einer weiteren Gruppe. Anhand dieses Isomorphismus weisen wir 6.2.5 (c) - (d) nach.

Gemäß 6.2.**B**i (a) haben alle Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ die gleiche Länge. Gilt für ein $r \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(\rho(v)\phi)^r(e_i) \in \{\pm e_i\},$$

so auch

$$(\rho(v)\phi)^r(e_{i+1}) \in \{\pm e_{i+1}\}\,.$$

Für alle $1 \leq i \leq j-1$ und $1 \leq r \leq \frac{l}{j}-1$ gelten somit

$$\beta_i \perp (\rho(v)\phi)^r(\beta_i) \text{ und } \beta_i - (\rho(v)\phi)^r(\beta_i),\ \beta_i + (\rho(v)\phi)^r(\beta_i) \notin R.$$

Somit können wir Satz 2.1.6 und Bemerkung 2.1.7 (b) anwenden und erhalten

$$[n_{\beta_i}(1), n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}] = 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1 \text{ und } 1 \leq r \leq \frac{l}{j}-1,$$

was

$$[n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^{r'}}, n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}] = 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1 \text{ und } 1 \leq r, r' \leq \frac{l}{j}-1,$$

zur Folge hat. Aus $(v\phi)^{\frac{l}{j}} \in \mathrm{Z}(V)$ folgt

$$\begin{aligned}
p_i^{v\phi} &= \left(\prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}\right)^{v\phi} = \prod_{r=1}^{\frac{l}{j}} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r} = \\
&= \left(\prod_{r=1}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}\right) n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^{\frac{l}{j}}} = \left(\prod_{r=1}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}\right) n_{\beta_i}(1) = \\
&= n_{\beta_i}(1)\left(\prod_{r=1}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}\right) = \\
&= p_i,
\end{aligned}$$

also $p_i \in \mathrm{C}_V(v\phi)$. Weiter führt die Definition zu $p_i \in \mathbf{N}^{vF}_{\{r,r+1\}}$. Da die Eigenschaft $\rho(p_i) = w_{(i,i+1)}$ vorausgesetzt wurde, erfüllen die Elemente p_i die Aussagen in 6.2.5 (a).

Sei

$$N_S := \langle p_i \,|\, 1 \leq i < j \rangle\,.$$

Diese Gruppe ist mittels dem durch

$$p_i \mapsto n_{\beta_i}(1) \text{ für } 1 \leq i < j$$

definierten Homomorphismus $\iota : N_S \to \widetilde{V}$ isomorph zur Gruppe $\widetilde{V} := \langle n_{\beta_i}(1) \,|\, 1 \leq i < j\rangle \leq \mathbf{G}$. Bei $2 \nmid q$ ist $\widetilde{V}$ die erweiterte Weylgruppe vom

Typ A_{j-1}, ansonsten die Coxetergruppe vom Typ A_{j-1}. Daher können wir $\widetilde{V}$ auch als endlich präsentierte Gruppe auffassen.

Die verschiedenen definierenden Relationen von $\widetilde{V}$, die bei $2 \nmid q$ im Lemma 2.3.1 (b) aufgeführt wurden, prüfen wir für die Elemente p_i nach. Für $1 \leq i, i' \leq j-1$ und $0 \leq r', r \leq \frac{l}{j} - 1$ mit $r \neq r'$ gilt

$$[n_{\beta_i}^{(v\phi)^{r'}}(1), n_{\beta_{i'}}(1)^{(v\phi)^r}] = 1.$$

Für alle $1 \leq i, i' \leq j-1$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\mathrm{prod}(p_i, p_{i'}, m_{i,i'}) &= \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} \mathrm{prod}(n_{\beta_i}(1)^{(v\phi)^r}, n_{\beta_{i'}}(1)^{(v\phi)^r}, m_{i,i'}) \\
&= \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} \mathrm{prod}(n_{\beta_i}(1), n_{\beta_{i'}}(1), m_{i,i'})^{(v\phi)^r} \\
&= \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} \mathrm{prod}(n_{\beta_{i'}}(1), n_{\beta_i}(1), m_{i,i'})^{(v\phi)^r} \\
&= \mathrm{prod}(p_{i'}, p_i, m_{i,i'}).
\end{aligned}$$

Ebenso werden auch die übrigen $\widetilde{V}$ definierenden Relationen erfüllt. Wegen

$$\left|\widetilde{V}\right| = 2^{j-1} j! = |N_S|$$

bei $2 \nmid q$ ist ι ein Isomorphismus.

Zum Beweis von 6.2.5 (c) sei $I \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$ und $N_{S,I} := \left\langle n_{(i,i+1)} \,\middle|\, i \in I \right\rangle$. Wir betrachten $N_{S,I} \cap \mathbf{T}$ unter der Abbildung ι und erhalten

$$\begin{aligned}
\iota(N_{S,I} \cap \mathbf{T}) &= \iota(N_{S,I}) \cap \iota(N_S \cap \mathbf{T}) = \langle n_{\beta_i}(1) \,|\, i \in I \rangle \cap \langle h_{\beta_r}(-1) \,|\, 1 \leq r \leq j \rangle = \\
&= \langle h_{\beta_i}(-1) \,|\, i \in I \rangle .
\end{aligned}$$

Wegen $l_i l_{i+1}^{-1} = p_i^2$ folgt daraus

$$N_{S,I} \cap \mathbf{T} = \left\langle l_i l_{i+1}^{-1} \,\middle|\, i \in I \right\rangle$$

und damit 6.2.5 (c).

Für den Beweis der verbleibenden Eigenschaft seien $n \in N_S$ und $I, I' \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$ mit

$$\{\, \rho(p_i) \mid i \in I \}^{\rho(n)} = \{\, \rho(p_i) \mid i \in I' \}\, .$$

Daraus folgt

$$\{\, \rho(n_{\beta_i}(1)) \mid i \in I \}^{\rho(\iota(n))} = \{\, \rho(n_{\beta_i}(1)) \mid i \in I' \}\, .$$

In $\widetilde{V}$ ist $\iota(p_i)^{\iota(n)}$ von der Form $n_\alpha(\pm 1)$ für eine geeignete Wurzel $\alpha \in R$. Aus $\rho(n_{\beta_i}(1)) \in \{\rho(n_{\beta_i}(1)) \mid i \in I'\}$ folgt $\alpha = \pm(e_i - e_{i+1})$ für ein geeignetes $i \in I'$, also

$$n_{\beta_i}(1)^{\iota(n)} \in \{n_{\beta_i}(\pm 1) \mid i \in I'\}$$

und

$$\left\langle n_{\beta_i}(1)^{\iota(n)} \middle| \, i \in I \right\rangle^{\iota(n)} = \langle n_{\beta_i}(\pm 1) | \, i \in I' \rangle \, .$$

Wenden wir ι^{-1} auf diese Gleichung an, so erhalten wir $N^n_{S,I} = N_{S,I'}$, also 6.2.5 (d). $\square$

Der Nachweis der nicht behandelten Teilaussagen 6.2.5 (b) und (e) erfordert weitere Voraussetzungen.

Lemma 6.4.2. *Sind die Voraussetzungen für Lemma 6.4.1 und die Bedingung 6.2.***B***ii mit* $Z = 1$ *erfüllt und gelten*

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \textit{ für } 1 \leq r, r' \leq j \textit{ mit } r \neq r'$$

und $l_r \in \mathrm{Z}(\widehat{N}_r)$, *so sind die Elemente* p_i *tolle Elemente.*

Beweis. Es genügt, die Eigenschaften 6.2.5 (b) und 6.2.5 (d) zu zeigen, da die übrigen aus Lemma 6.4.1 bekannt sind.

Die Voraussetzungen $[\widehat{N}_i, \widehat{N}_{i+1}] = 1$ und $l_i \in \mathrm{C}_{\widehat{N}}(\widehat{N}_i)$ ermöglichen für alle $1 \leq i \leq j$, $x \in \widehat{N}_i$ die Umformungen

$$xx^{p_i} = x^{p_i}x = x^{l_i l_{i+1}^{-1} p_i^{-1}} x = x^{p_i^{-1}} x.$$

Also gilt

$$xx^{p_i} = x^{p_i^{-1}} x \text{ für alle } 1 \leq i \leq j, \, x \in \widehat{N}_i.$$

Dies ist die Aussage in 6.2.5 (d).

Für 6.2.5 (b) ist $l_i^{p_i} = l_{i+1}$ und $l_{i+1}^{p_i} = l_i$ für alle $1 \leq i \leq j-1$ zu überprüfen. Als Element von $\langle p_i \rangle$ kommutiert $l_i l_{i+1}$ mit p_i. Gemäß Lemma 6.2.4 (c) gilt zudem $l_i^{p_i} \in \widehat{S}_{i+1}$ und $l_{i+1}^{p_i} \in \widehat{S}_i$, also

$$l_i l_{i+1} = p_i^2 = l_{i+1}^{p_i} l_i^{p_i}.$$

Wegen $Z = 1$ ist die Zerlegung von p_i^2 in Faktoren aus $\widehat{S}_i$ und $\widehat{S}_{i+1}$ eindeutig. Daraus folgt 6.2.5 (b), bzw.

$$l_i^{p_i} = l_{i+1} \text{ und } l_{i+1}^{p_i} = l_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1.$$

$\square$

Weitere Aussagen über die Existenz toller Elemente werden wir nur in den einzelnen Fällen machen. Beim Nachweis der Bedingung 6.2.**B**iv hilft folgendes Lemma.

Lemma 6.4.3. *Gilt*

$$\alpha + \beta \notin R \textit{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \textit{ mit } r \neq r',$$

so ist $[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1$.

Beweis. Zusammen mit 2.1.7 (b) folgt aus den Voraussetzungen

$$[n_\alpha(t), n_{\alpha'}(t')] = 1 \text{ für alle } \alpha \in R_r \text{ und } \alpha' \in R_{r'}.$$

Dies zeigt gemäß der Definition der Gruppen $\widehat{N}_r$ die Aussage. □

Die Bedingung 6.2.**B**ii können wir später anhand der Wurzelsysteme nachprüfen.

Lemma 6.4.4. *Seien* $\overline{R}$ *und* $\overline{R}_i$ *Wurzelsysteme mit folgenden Eigenschaften:*

- $2\alpha^\vee \in \bigoplus_{r=1}^{j} \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee$ *für alle* $\alpha \in \overline{R}$.
- *Die Faktorgruppe* $\left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_i^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_{i'}^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ *sei für jede Primzahlpotenz* q *unabhängig von der Wahl von* $1 \leq i' \leq j$ *und* W *operiere trivial auf dieser Gruppe.*

*Dann wird die Bedingung 6.2.***B***ii erfüllt.*

Beweis. Wir müssen

$$\langle \mathbf{S}_r \mid 1 \leq r \leq j \rangle = \overline{\mathbf{T}}$$

und

$$\mathbf{S}_1 \cap \langle \mathbf{S}_{i'} \mid 1 \neq i' \rangle = \mathbf{S}_i \cap \langle \mathbf{S}_{i'} \mid i \neq i' \rangle \leq \mathrm{Z}(\widehat{N}) \text{ für alle } 1 \leq i \leq j \text{ und } j \geq 2$$

für den Beweis zeigen.

Seien $x \in \overline{\mathbf{T}}$ und p die Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $x^{p^a} = x$. Also liegt $x \in \overline{\mathbf{T}}^{\widetilde{F}}$, wobei $\widetilde{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus zu $q := p^{2a}$ ist.

Aus [Car85, Proposition 3.2.2] ist bekannt, dass $\overline{\mathbf{T}}^{\widetilde{F}}$ und $\mathbb{Z}\overline{R}^\vee/(q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ isomorph sind. Für eine feste $(q-1)$-te Einheitswurzel $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_q$ definiert

$$\overline{\mathbf{T}} \ni k_\beta(\zeta) \mapsto \beta + (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \text{ für alle } \beta \in R^\vee$$

einen Isomorphismus $\omega : \overline{\mathbf{T}}^{\widetilde{F}} \to \mathbb{Z}\overline{R}^\vee/(q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$.

Zu dem Element $\omega(x)$ gibt es ein $v \in \mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ mit

$$\omega(x) = v + (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee.$$

Wegen $x^{p^a} = x$ liegt auch $p^a v$ im Bild von $\omega(x)$. Für $2 \nmid q$ folgt daraus

$$(p^a - 1)v \in (q-1)\mathbb{Z}R^\vee$$

und

$$v \in \left(\frac{q-1}{p^a-1}\right)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \leq 2\mathbb{Z}\overline{R}^\vee.$$

Bei geradem q können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit v durch $p^a v$ ersetzen. In beiden Fällen erhalten wir $v \in 2\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$.

Gemäß der ersten Voraussetzungen gilt

$$v \in 2\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \leq \bigoplus_{r=1}^{j} \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee,$$

also

$$\omega(x) \in \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_i^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee = \langle \omega(S_i) \,|\, 1 \leq i \leq j \rangle\,.$$

Dies zeigt $\overline{\mathbf{T}} \leq \langle \mathbf{S}_i \,|\, 1 \leq i \leq j \rangle$.

Die übrigen geforderten Bedingungen zeigen die Eigenschaften von Z. Aus der zweiten Eigenschaft folgt

$$\mathbf{S}_1 \cap \langle \mathbf{S}_i \,|\, 2 \leq i \leq j \rangle = \mathbf{S}_{i'} \cap \langle \mathbf{S}_i \,|\, 1 \leq i \leq j, i \neq i' \rangle \text{ für alle } 1 \leq i' \leq j.$$

Für $j \geq 2$ gilt daher $Z = \mathbf{S}_1 \cap \langle \mathbf{S}_i \,|\, 2 \leq i \leq j \rangle$.

Die Gruppe $\widehat{N}/\widehat{S} \leq W$ operiert auf natürliche Weise auf $\mathbb{Z}R^\vee$ und $\overline{\mathbf{T}}$. Bezüglich dieser Operation ist ω sogar $\widehat{N}/\widehat{S}$-äquivariant. Dies hat $Z \leq \mathrm{Z}(\widehat{N})$ zur Folge. □

Der Faktor 2 in der Bedingung an die Gitter ist für Wurzelsysteme $\overline{R}$ vom Typ B_l nötig. In der dort gegebenen Situation wird die Aussage ohne diesen Faktor nicht erfüllt.

6.4.5. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist Satz 6.3.15, den wir bei vielen klassischen Gruppen anwenden und dadurch auf sehr direktem Weg beweisen, dass die Charaktere einer d-Sylowlevigruppe in ihrem d-Sylownormalisator bei regulärem d maximal fortsetzbar sind. Dies unterscheidet sich vom Vorgehen in den Kapiteln 4 und 5. Dort wurde die maximale Fortsetzbarkeit für die Gruppensituation $\mathrm{C}_H(v\phi) \lhd \mathrm{C}_V(v\phi)$ bewiesen.

Das Vorgehen im Abschnitt 6.3 wurde durch die in 6.2 bewiesenen gruppentheoretischen Eigenschaften von $\widehat{N}$ ermöglicht. Diese Struktur liegt auch vor, falls $Z = 1$ gilt und alle Gruppen durch ihren Schnitt mit $\mathrm{C}_{\widetilde{V}}(v\phi)$ ersetzt werden, wobei $\widetilde{V}$ die zu $\overline{R}$ assoziierte erweiterte Weylgruppe ist. Daher kann die Vorgehensweise auch auf diese Situation übertragen werden.

Dies könnte die Existenz sehr guter d-Sylowtwists bei klassischen Gruppen, zumindest bei den Typen A_l, ${}^2\mathsf{A}_l$ und C_l, beweisen. Dieser Ansatz wurde hier nicht verfolgt, da die Fortsetzbarkeitsaussage in Satz 10.1.10 daraus nicht hervorgeht. Beim Typ B_l benötigen wir nämlich eine zusätzliche Variante der maximalen Fortsetzbarkeitsaussage, die wir mit dem Satz 6.3.15, aber nicht mit der Existenz sehr guter d-Sylowtwists beweisen können.

Wir gehen nun auf die einzelnen klassischen Gruppen ein und wenden dort jeweils Satz 6.3.15 an. Damit beweisen wir bei regulärem d die maximale Fortsetzbarkeit. Mit Hilfe der Aussagen aus dem Abschnitt 3.2 können wir daraus die maximale Fortsetzbarkeit im nichtregulären Fall folgern.

Kapitel 7

Gruppen vom Typ C_l

In diesem Kapitel behandeln wir den Fall, in dem das zugrunde liegende Wurzelsystem vom Typ C_l ist, also $\mathbf{G} := \mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ gilt und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ auf $\mathbf{G}$ als Standard-Frobeniusendomorphismus operiert. In diesem Kapitel zeigen wir für die dadurch entstehenden reduktiven Gruppen $(\mathbf{G}, F)$, dass alle irreduziblen Charaktere einer d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ eine Fortsetzung auf ihre Trägheitsgruppe im zugehörigen d-Sylownormalisator besitzen. Wir beginnen mit dieser Gruppe, da die Prüfung der Voraussetzungen für Satz 6.3.15 und die Struktur der Sylowlevigruppe im nichtregulären Fall einfacher als bei den übrigen klassischen Gruppen ist.

Bei regulären Zahlen d benutzen wir Satz 6.3.15. Dafür müssen wir mehrere Gruppen, Wurzelsysteme und einen Sylowtwist wählen und zeigen, dass diese die Bedingungen aus 6.2 erfüllen. Unter anderem setzen wir $\delta := 1$ und $\overline{\mathbf{G}} := \mathbf{G}$. Dadurch stimmen mehrere Gruppen überein und wird die Situation verständlicher als in anderen Fällen. Aus der Anwendung von Satz 6.3.15 folgt dann die maximale Fortsetzbarkeit für reguläres d im Satz 7.1.2.

Im zweiten Teil dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit dem nichtregulären Fall. Ausgehend von der Wahl eines Sylowtwists bestimmen wir wie in 5.3 eine d-Sylowlevigruppe L und einen d-Sylownormalisator N. Insbesondere studieren wir in den Lemmata 7.2.3 und 7.2.5 die Struktur dieser Gruppen, die uns ermöglicht, Lemma 3.2.4 anzuwenden und aus der Fortsetzbarkeitsaussage 7.1.2, die sich auf den regulären Fall bezieht, Satz 7.2.1, also die Fortsetzbarkeit im nichtregulären Fall, zu folgern.

7.1 Regulärer Fall

Wir beschränken uns anfangs auf reguläre Zahlen als Werte von d. Diese sind gemäß der Tabelle 2.1 die Teiler von $2l$. Für diese beweisen wir:

Satz 7.1.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 1)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus, d eine reguläre Zahl der Weylgruppe W von $\mathbf{G}$, T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.*

Um Satz 6.3.15 anwenden zu können, genügt es nicht $\mathbf{G}$ und F zu kennen. Daher legen wir nun weitere für 6.2.1 nötige Objekte fest.

7.1.2. In diesem Abschnitt verwenden wir folgende Gruppen und Wurzelsysteme:

- Seien R das Wurzelsystem aus 4.4.1 (c) und R_F das dort angegebene Fundamentalsystem von R.
- Weiter sei $\mathbf{G} := \mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ die universelle Chevalleygruppe zu R für eine Primzahlpotenz q und die Weylgruppe W.
- Auf $\mathbf{G}$ operiert der Standard-Frobeniusendomorphismus $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.
- Die Zahl d sei regulär für W.
- Aus der Wahl $\overline{R} := R$ folgt $\overline{\mathbf{G}} := \mathbf{G}$ mit $\overline{F} := F$.

Für die in 6.2.1 beschriebene Situation müssen wir noch einen d-Sylowtwist wählen. Dazu nutzen wir die zu W isomorphe Permutationsgruppe ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ und den Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ aus 4.4.1.

Lemma 7.1.3. *Sei V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$ und $n_1, \ldots, n_l$ die Erzeuger von V aus 2.3.1.*

(a) Für $v_0 := n_1 \cdots n_l \in V$ und alle $j' \big| 2l$ ist $v_0^{j'}$ ein $\frac{2l}{j'}$-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

(b) $v_0^l \in \mathrm{Z}(V)$.

(c) Mit $j' := \frac{2l}{d}$ und $v := v_0^{j'}$ seien j und $\mathcal{B}^{(r)}$ $(1 \le r \le r)$ wie in 6.2.2 definiert. Dann gilt

$$j = \begin{cases} \frac{j'}{2} & 2 \nmid d, \\ j' & \text{sonst.} \end{cases}$$

und die Menge $\{1, \ldots, j\}$ bildet eine Transversale der Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$.

(d) Für $\sigma := f(\rho(v))$ und alle $1 \le r \le j$ sei

$$\sigma_{c_r} := \begin{cases} \big(r, \sigma(r), \ldots, \sigma^{d-1}(r)\big)\big(-r, -\sigma(r), \ldots, -\sigma^{d-1}(r)\big) & 2 \nmid d, \\ \big(r, \sigma(r), \ldots, \sigma^{d-1}(r)\big) & 2 \big| d. \end{cases}$$

Weiter sei

$$\sigma_{(r,r+1)} := \prod_{\substack{i=1 \\ i \equiv r \bmod j}}^{l} (i, i+1)(-i, -i-1) \text{ für alle } 1 \le r < j.$$

Mit $W_C := f^{-1}\left(\langle \sigma_{c_r} \,|\, 1 \le r \le j \rangle\right)$ und $W_S := f^{-1}\left(\left\langle \sigma_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \le r < j \right\rangle\right)$ gilt

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)) = W_C \rtimes W_S.$$

(e) *Die Bedingung 6.2.***B***i wird vom Sylowtwist v mit*

$$w_{(r,r+1)} := f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)}) \text{ für alle } 1 \leq r \leq r-1$$

erfüllt.

Beweis. Wir beweisen zunächst Teil (a). Die Permutation

$$f(w) = (1, 2, \dots, l, -1, \dots, -l)$$

mit $w := \rho(v_0)$ hat das charakteristische Polynom $X^l + 1$ auf $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$, wobei Y das Kocharaktergitter von $\mathbf{G}$ ist. Aus Lemma 2.3.6 (b) und $a(2l) = 1$ (gemäß [Spr74, 5.1]) folgt, dass w ein reguläres Element von W der Ordnung $2l$ ist. Die Elemente $\rho(v_0^{j'}) = w^{j'}$ sind laut 2.3.6 (c) ebenso reguläre Elemente. Gemäß der Bemerkung 2.3.9 ist dann jedes Element $v_0^{j'}$ ein $\frac{2l}{j'}$-Sylowtwist.

Für (b) zeigen wir

$$v_0^l = \tau(\mathbf{w}_0) \text{ und } \tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V).$$

Aus $|R| = 2l^2$ folgt $\ell(w_0) = l^2$ für das längste Element w_0 in W. Das Element $\prod_{i=1}^{l}(i, -i) \in {}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ operiert auf $\overline{Y}$ durch $-\mathrm{id}$. Dieses Element stimmt wegen [GP00, 1.5.1] mit $f(w_0)$ überein. Wegen

$$\ell(w) = l = \frac{l^2}{l} = \frac{\ell(w_0)}{l} \text{ und } (f(w))^l = \prod_{i=1}^{l}(i, -i) = f(w_0)$$

gilt auch

$$\ell(w^i) = i \cdot \ell(w) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist r aus 2.3.2 angewandt auf $w^i w$ $(0 \leq i \leq l-1)$ multiplikativ, d.h.

$$\mathrm{r}(w^i w) = \mathrm{r}(w^i)\,\mathrm{r}(w) \text{ für alle } 0 \leq i \leq l-1.$$

multiplikativ. Daraus ergibt sich

$$\mathrm{r}(w)^l = \mathrm{r}(w^l) = \mathrm{r}(w_0) = \mathbf{w}_0.$$

Zusammen mit $v_0 = \tau(\mathrm{s}_1 \cdots \mathrm{s}_l) = \tau(\mathrm{r}(w))$ folgt daraus

$$v_0^l = \tau(\mathrm{r}(w))^l = \tau(\mathrm{r}(w)^l) = \tau(\mathbf{w}_0).$$

In 5.2.2 wurde $\tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V)$ gezeigt. Dies beweist die Aussage in (b).

Wegen $f(\rho(v_0)) = (1,2,\ldots,l,-1,\ldots,-l)$ können wir für die Aussagen in (c) die Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ mit

$$\mathcal{B}^{(r)} = \{\, 1 \leq i \leq l \mid i \equiv r \bmod j \,\} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j$$

wählen. Die angegebene Menge ist somit eine Transversale.

Die Aussagen (d) und (e) folgen aus Berechnungen von $\mathrm{C}_{(\mathsf{C})\mathsf{S}_l}(f(\rho(v)))$. □

Wir verwenden nun weiter den eben definierten d-Sylowtwist v. Mit der Festlegung von v liegt eine wie in 6.2.1 beschriebene Situation vor, bei der auch die Bedingung 6.2.**B**i erfüllt wird. In 6.2.**B**ii wurden die gewünschten Eigenschaften der Tori formuliert. Wir zeigen die Aussage zunächst allgemeiner:

Lemma 7.1.4. *Seien $\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_{j''}$ mit $\{1,\ldots,l\} = \bigcup_{i=1}^{j''} \mathcal{M}_i$ und*

$$\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_{i'} = \emptyset \text{ für alle } i \neq i',$$

und

$$R'_i := \{\, \pm 2e_{i'}, \pm e_{i'} \pm e_{i''} \mid i', i'' \in \mathcal{M}_i, i' \neq i'' \,\} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j''$$

Dann gelten:

- $2\alpha \in \bigoplus_{r=1}^{j} \mathbb{Z}R'^{\vee}_r$ *für alle* $\alpha \in R^\vee$.
- *Die Faktorgruppe* $\left\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_{i'}, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}R^\vee$ *ist trivial.*

Beweis. Die Wurzelsystem $R'^{\vee}_r$ sind Wurzelsysteme vom Typ $\mathsf{B}_{|\mathcal{M}_r|}$. Diese erfüllen

$$R'^{\vee}_r = \{\, \pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' \in \mathcal{M}_r, i \neq i' \,\}$$

Für $\alpha \in R^\vee$ gibt es $1 \leq i < i' \leq l$ mit $\alpha = \pm e_i \pm e_{i'}$. Wegen $\bigcup_{r=1}^{j} \mathcal{M}_r = \{1,\ldots,j\}$ gilt $\alpha \in \langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i \mid 1 \leq i \leq j'' \rangle$. Somit erfüllen die Wurzelsysteme

$$\mathbb{Z}R^\vee = \langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i \mid 1 \leq i \leq j'' \rangle \,.$$

Für jede Primzahlpotenz q und jede Zahl $1 \leq i \leq j''$ gilt

$$\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \rangle = \langle \mathbb{Z}e_i, \mathbb{Z}(q-1)e_{i'} \mid i \in \mathcal{M}_r, 1 \leq i' \leq j'' \rangle \,.$$

Daraus ergibt sich

$$\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_{i'}, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle = (q-1)\mathbb{Z}R^\vee.$$

Die Gruppe

$$\left\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_i, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}R'^{\vee}_{i'}, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}R^\vee$$

besteht also nur aus dem trivialen Element. □

Angewandt auf diese Situation ergibt sich:

Lemma 7.1.5. *Die Bedingung 6.2.***B***ii wird mit $Z = 1$ erfüllt.*

Beweis. Für $\mathcal{M}_i := \mathcal{B}^{(i)}$ $(1 \leq i \leq j)$ folgt aus dem Lemma 7.1.4 die Behauptung: Es ist klar, dass die durch $\mathcal{M}_i := \mathcal{B}^{(i)}$ definierten Mengen die Eigenschaften aus 7.1.4 erfüllen. Daraus ergibt sich, dass die Wurzelsysteme $\overline{R_i} = R_i'$ die vorausgesetzten Eigenschaften für Lemma 6.4.4 besitzen. Das Lemma zeigt, dass die Bedingung 6.2.**B**ii erfüllt ist. Die Faktorgruppe in der zweiten Voraussetzung ist trivial. Da diese Gruppe das Bild von $Z^{\widetilde{F}}$ unter dem im Beweis zu 6.4.4 definierten Isomorphismus ω ist, muss $Z = \bigcap_{i=1}^{j''} \mathbf{S}_i$ trivial sein. □

Wir können zeigen, dass hier eine Verschärfung der Aussage 6.2.**B**iv gilt.

Lemma 7.1.6. *Die Bedingung 6.2.***B***iv wird erfüllt und es gilt stets*

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \textit{ für alle } r \neq r'.$$

Beweis. Für $1 \leq r < r' \leq j$ überprüfen wir

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \text{ mit } r \neq r'.$$

Dann folgt mit Hilfe von Lemma 6.4.3 die Behauptung.

Die beteiligten Wurzelsysteme sind

$$\begin{aligned} R &= \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq j, i \neq i'\} \\ R_r &= \left\{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \;\middle|\; i, i' \in \mathcal{B}^{(r)}, i \neq i'\right\} \text{ und} \\ R_{r'} &= \left\{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \;\middle|\; i, i' \in \mathcal{B}^{(r')}, i \neq i'\right\}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \text{ mit } r \neq r'.$$

Damit sind die Voraussetzungen für Lemma 6.4.3 erfüllt. Mit diesem folgt

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \text{ für } r \neq r'.$$

□

Wir können nun auch die Lemmata 6.4.1 und 6.4.2 anwenden und tolle Elemente angeben.

Lemma 7.1.7. *Mit $l_i := \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r)}} h_{2e_i}(1)$ $(1 \leq r \leq j)$ und den in 6.4.1 definierten Wurzeln β_i $(1 \leq i \leq j-1)$ sind*

$$p_i := \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{v^r} \textit{ für } 1 \leq i \leq j-1$$

tolle Elemente.

Beweis. Wir prüfen zunächst die verschiedenen Voraussetzungen für 6.4.1 und 6.4.2 nach und wenden dann diese Lemmata an. Daraus folgt dann die Aussage.

Für die Wurzeln $\beta_i = e_{i+1} - e_i$ aus 6.4.1 ist $\beta_i \in R$ klar. Aus 7.1.3 (b)-(c) wissen wir, dass $\{1, \ldots, j\}$ eine Transversale der Bahnen von $\rho(v)$ auf $\{1, \ldots, l\}$ ist und die Gleichungen

$$\rho(p_r) = f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)}) \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1$$

und $v^{\frac{l}{j}} = \tau(\mathbf{w}_0) \in \mathrm{Z}(V)$ gelten. Mit Hilfe von Satz 2.1.6 erkennen wir

$$p_i^2 = l_i l_{i+1}^{-1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq j-1.$$

Somit sind die Voraussetzungen für 6.4.1 erfüllt.

Anhand der Relationen aus Satz 2.1.6 erkennen wir leicht $l_i \in \mathrm{Z}(\widehat{N}_i)$. Die Lemmata 7.1.6 und 7.1.4 zeigen $Z = 1$ und $[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1$ für alle $r \neq r'$.

Damit sind die Voraussetzungen für das Lemma 6.4.2 erfüllt und die Elemente sind tolle Elemente. □

Wir benötigen noch einen geeigneten linearen Charakter auf $\widehat{N}$.

7.1.8. Der triviale Charakter $\delta := 1 \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ erfüllt die Voraussetzungen aus 6.2.6.

Wir haben nun die Voraussetzungen nachgeprüft und können den Satz 6.3.15 anwenden.

Beweis von Satz 7.1.1. Die Gruppe $\mathbf{T}^{vF}$ ist gemäß 1.3.4 (b) eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ und $\mathbf{N}^{vF}$ gemäß 1.3.5 (a) ihr d-Sylownormalisator. Gemäß 1.2.5 genügt es für die Behauptung, die maximale Fortsetzbarkeit für die Gruppen T und N, also in $T \lhd N$ zu zeigen.

Wir benutzen nun die mit Hilfe von v, R und $\overline{R}$ definierten Gruppen aus 6.2.2. Aus $Z = 1$, $\overline{R} = R$ und $\delta = 1$ folgt

$$T = \widehat{S} = \left\langle \widehat{S}_i \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \right\rangle = \left\langle x \in \mathbf{S}_i \,\middle|\, x^{vF} = x \right\rangle = \mathbf{T}^{vF}.$$

Diese Umformungen benutzen $1 = Z = \bigcap_{i=1}^{j} \mathbf{S}_i$ und 6.2.**B**ii. Analog gilt auch

$$N = \widehat{N} = \left\langle \widehat{S}, \mathbf{N}^{vF} \right\rangle = \left\langle T, \mathbf{N}^{vF} \right\rangle = \mathbf{N}^{vF}.$$

Satz 6.3.15 besagt nun, dass jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ sich auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzt. □

Wir verallgemeinern nun Satz 7.1.1 auf beliebige Zahlen d von W.

7.2 Nichtregulärer Fall

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall, in dem d eine beliebige ganze Zahl ist. Wir verwenden weiterhin das Wurzelsystem R mit Fundamentalsystem $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ aus Lemma 4.4.1 (c), die damit definierte universelle Chevalleygruppe $\mathbf{G}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$ für eine Primzahlpotenz q und den Standard-Frobeniusendomorphismus $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. In diesem Unterkapitel verallgemeinern wir den Satz 7.1.1 auf beliebige Zahlen d und beweisen:

Satz 7.2.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Standard-Frobeniusendomorphismus, $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar.*

Wie im Abschnitt 5.3 verwenden wir für die Konstruktion einer d-Sylowlevigruppe und ihres d-Sylownormalisators einen d-Sylowtwist.

Lemma 7.2.2. *Seien $d \in \mathbb{N}$,*

$$l' := \begin{cases} \left\lfloor \frac{l}{d} \right\rfloor \cdot d & 2 \nmid d, \\ \left\lfloor \frac{2l}{d} \right\rfloor \cdot \frac{d}{2} & 2 \mid d, \end{cases}$$

und R' das Wurzelsystem zu ${R_F}' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'}\}$. Weiter sei $\mathbf{G}' = \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R' \rangle \leq \mathbf{G}$, also gemäß Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R'.

(a) Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ ist regulär für die Weylgruppe von $\mathbf{G}'$.

(b) Jeder d-Sylowtwist $v \in \mathbf{G}'$ von $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist auch ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass d eine reguläre Zahl für die Weylgruppe von $\mathsf{C}_{l',sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ist, dann $a_{\mathsf{C}_{l'}}(d) = a_{\mathsf{C}_l}(d)$, und folgern daraus die Behauptung.

Die Zahl d teilt offensichtlich $2l'$. Also ist d gemäß Tabelle 2.1 regulär für die Weylgruppe von $\mathbf{G}'$.

Aus den in [Car72, 10.2.5] angegebenen Spiegelungsgraden erhalten wir mit Hilfe der Bemerkung 2.2.7 für $a_{\mathsf{C}_i}(d)$ ($i \in \mathbb{N}$) folgende Werte:

$$a_{\mathsf{C}_i}(d) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{i}{d} \right\rfloor & 2 \nmid d, \\ \left\lfloor \frac{2i}{d} \right\rfloor & 2 \mid d. \end{cases}$$

Aufgrund der Definition von l' gilt dann $a_{\mathsf{C}_{l'}}(d) = a_{\mathsf{C}_l}(d)$.

Daraus folgt mit Hilfe von Lemma 5.1.1 die Behauptung. □

Mit diesem Sylowtwist v konstruieren wir in $(\mathbf{G}, vF)$ eine Sylowlevigruppe L, die das direkte Produkt eines Torus und einer reduktiven Gruppe ist.

Lemma 7.2.3. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W)$ die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$ und v der d-Sylowtwist aus 7.2.2. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ in $(\mathbf{G}, vF)$ mit:*

(a) $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v))$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i'\}$,

(b) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$ *und* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \mid \alpha \in R \rangle$,

(c) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{G}_2$ *mit* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$ *und*

$$\widetilde{R}_1 = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' \leq l', i \neq i'\},$$

(d) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF} = T_1 \times G_2$ *mit* $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$ *und* $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L = T_1 \times G_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
 & \{1\} = T_1 \cap G_2 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir berechnen nacheinander mit den Lemmata aus 1.3 Sylowtori $\mathbb{S}$ und $\mathbf{S}$, die Gruppen $\mathbb{L} := \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ und $\mathbf{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$. Anschließend berechnen wir $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$ und bestimmen damit die Struktur von $\mathbf{L}$.

Seien $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$, $\mathcal{V} := \ker_{\overline{Y}}(\Phi_d(\rho(v)))$ und $Y' := Y \cap \mathcal{V}$. Gemäß 1.3.3 ist $\mathbb{S} := \left({}^{X}/{Y'^\perp}, Y', \rho(v)\right)$ ein d-Sylowtorus in der generischen Gruppe $\mathbb{G}$ zu $(\mathbf{G}, vF)$. Weiter sei $\mathbf{S}$ der in 1.3.3 angegebene d-Sylowtorus von $(\mathbf{G}, vF)$.

Gemäß Lemma 1.3.4 (a) sind $Y'^\perp \cap R$ die Wurzeln von $\mathbb{L}$. Für das Wurzelsystem $R' \subset R$ gilt

$$R' \cap Y'^\perp = \emptyset,$$

da d eine reguläre Zahl für die zu $\mathsf{C}_{l'}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ gehörende Weylgruppe ist und somit gemäß 2.3.10 jede d-Sylowlevigruppe ein Torus ist.

Für $R = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq l, i \neq i'\}$ und die Projektion $\mathrm{pr} : \mathbb{C}^l \to \mathbb{C}^l$ mit

$$e_i \mapsto \begin{cases} e_i & i \leq l', \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

gilt

$$\mathrm{pr}(R) = \{0, \pm 2e_i, \pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq l', i \neq i'\} \subset \left\{0, \frac{1}{2}\alpha, \alpha \,\middle|\, \alpha \in R\right\}.$$

Aus $R' \cap Y'^{\perp} = \emptyset$ folgt $\mathrm{pr}(R) \cap Y'^{\perp} = \{0\}$. Wegen $Y' \subset R' \otimes \mathbb{C}$ sind

$$\alpha \in Y'^{\perp} \cap R \text{ und } \mathrm{pr}(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in R$$

äquivalent. Daraus ergibt sich $R \cap Y'^{\perp} = \widetilde{R}_2 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i'\}$. Laut 1.3.4 (a) ist $(X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^{\vee}, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v))$ der Zentralisator von $\mathbb{S}$ in $\mathbb{G}$. Dies ist die Aussage in (a).

Gemäß 1.3.4 (b) gilt

$$\mathbf{L} = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle.$$

Wir zeigen nun, dass $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{T}_1 \cap (\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2)$ trivial ist. Seien $s \in \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$, q' eine Potenz von q mit $s^{q'-1} = 1$, $\widetilde{F}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus zu q', ζ eine primitive $(q'-1)$-te Einheitswurzel in $\overline{\mathbb{F}}_q$ und

$$\omega : \mathbf{T}^F \to \mathbb{Z}R^{\vee}/(q-1)\mathbb{Z}R^{\vee} \text{ mit } k_\beta(\zeta) \mapsto \beta$$

der im Beweis zu 6.4.4 angegebene Isomorphismus. Wir berechnen $\omega(s)$ anhand von

$$\omega(\mathbf{T}_1^{\widetilde{F}}) = (\mathbb{Z}\widetilde{R}_1^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R)/(q'-1)\mathbb{Z}R$$

und

$$\omega((\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{T})^{\widetilde{F}}) = (\mathbb{Z}\widetilde{R}_2^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R)/(q'-1)\mathbb{Z}R.$$

Für die Gitter gilt

$$\mathbb{Z}\widetilde{R}_1^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R = \langle e_i, (q'-1)e_{i'} \mid i \leq l', l' < i' \leq l \rangle_{\mathbb{Z}}$$

und

$$\mathbb{Z}\widetilde{R}_2^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R = \langle e_i, (q'-1)e_{i'} \mid i > l', 1 \leq i' \leq l' \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Dabei ist $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ das von a und b erzeugte Gitter. Der Schnitt dieser beiden Gitter ist

$$\left(\mathbb{Z}\widetilde{R}_1^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R\right) \cap \left(\mathbb{Z}\widetilde{R}_2^{\vee} + (q'-1)\mathbb{Z}R\right) = \langle (q'-1)e_{i'} \mid 1 \leq i \leq l \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Daraus folgt $\omega(\mathbf{T}_1^{\widetilde{F}}) \cap \omega((\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2)^{\widetilde{F}}) = 1$ und $s = 1$.

Aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ folgt mit Hilfe der Bemerkung 2.1.7 (a) die Gleichung $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$. Dies zeigt $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{G}_2$, also den Teil (c) der Behauptung.

Aus $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{G}_2$ folgt $L = T_1 \times G_2$, da die Gruppen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{G}_2$ von vF stabilisiert werden. □

Nach der Sylowlevigruppe konstruieren wir den zugehörigen Sylownormalisator. Für die Berechnung des Sylownormalisators ist die relative Weylgruppe wichtig.

Lemma 7.2.4. *Die generische Levigruppe $\mathbb{L}$ aus Lemma 7.2.3 hat die relative Weylgruppe*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)) \times W_{\widetilde{R}_2}/W_{\widetilde{R}_2}.$$

Beweis. Berechnungen in ${}^{(\mathrm{C})}\mathrm{S}_l$ zeigen, dass der Stabilisator von $\widetilde{R}_2$ in W die Gruppe $W_{\widetilde{R}_1} \times W_{\widetilde{R}_2}$ ist. In dieser Gruppe zentralisieren die Elemente aus $\mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)) \times W_{\widetilde{R}_2}$ die Nebenklasse $\rho(v)W_{\widetilde{R}_2}$. □

Wir geben nun den zu L gehörenden d-Sylownormalisator an.

Lemma 7.2.5. *(a) Für $N_1 = \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$ ist $N := \langle N_1, L \rangle$ der d-Sylownormalisator von L.*

(b) $N_1 \leq \mathrm{C}_N(G_2)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\rho(N_1) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v))$. Daraus folgern wir, dass N der Sylownormalisator von L ist. Schließlich beweisen wir (b) mit Hilfe von $\widetilde{R}_1$ und $\widetilde{R}_2$.

Der Torus $\mathbf{T}_1$ ist ein maximaler Torus in $(\mathbf{G}', vF\rceil_{\mathbf{G}'})$, der aus einem maximal zerfallenden Torus von $\mathbf{G}'$ „durch Twist mit $\rho(v)$" hervorgeht. Aus [Car85, 3.3.6] folgt $\rho(N_1) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v))$. Damit gilt auch

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \rho(N_1) \times W_{\widetilde{R}_2}/W_{\widetilde{R}_2}.$$

Laut Lemma 1.3.4 ist N der d-Sylownormalisator von L.

Die Wurzelsysteme erfüllen

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für jedes } \alpha \in \widetilde{R}_1 \text{ und } \beta \in \widetilde{R}_2.$$

Gemäß Bemerkung 2.1.7 (b) hat dies

$$\mathbf{N}_1 \leq \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_2)$$

zur Folge. □

Mit Hilfe der Strukturen von N und L beweisen wir Satz 7.2.1.

Beweis von Satz 7.2.1. Die Gruppe L ist gemäß Lemma 7.2.3 eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, vF)$ und N gemäß 7.2.5 ihr Sylownormalisator. Wir können uns gemäß Lemma 1.2.5 darauf beschränken zu zeigen, dass jeder Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar ist.

Nun ist T_1 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ und N_1 ihr d-Sylownormalisator. Gemäß 7.1.1 ist jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\chi)$ zu $\widetilde{\lambda}$ fortsetzbar.

Die Gruppen besitzen gemäß dem Lemma 7.2.5 die im Satz 3.2.5 geforderte Struktur

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
N \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
N_1 \arrow[dd] & L \arrow[d] & \\
& L = T_1 \times G_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T_1 \arrow[dr] & & G_2 \arrow[dl] \\
& T_1 \cap G_2 &
\end{tikzcd}
$$

Gemäß diesem Satz besitzt $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ eine Fortsetzung auf $\mathrm{I}_N(\chi)$. $\square$

Die hier benutzte Vorgehensweise wird auch bei anderen klassischen Gruppen zum Ziel führen. Bemerkenswert ist vielleicht die Einführung zweier zueinander orthogonaler Unterwurzelsysteme, anhand derer L und N sich als direkte Produkte schreiben lassen. Auch wenn sich die weiteren klassischen im Allgemeinen nicht mehr in dieser Art als direktes Produkt schreiben lassen, haben diese Wurzelsysteme weiterhin eine zentrale Bedeutung. Bei den übrigen Fällen entstehen mit diesen Unterwurzelsystemen zentrale Produkte, die gleichzeitig Normalteiler von relativ kleinem Index sind.

Kapitel 8

Gruppen vom Typ A_{l-1}

Hauptresultat dieses Kapitels ist Satz 8.2.1. Dieses zeigt, dass alle irreduziblen Charaktere einer d-Sylowlevigruppe von $(\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$ $(l \geq 2)$ eine Fortsetzung auf ihre Trägheitsgruppe im zugehörigen d-Sylownormalisator besitzen, falls F der Standard-Frobeniusendomorphismus von $\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ist. Dieses Kapitel ist im Wesentlichen so aufgebaut wie das Vorangegangene: Wir beginnen damit, die Aussage für reguläre Zahlen d von $(\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$ zu beweisen, und verallgemeinern anschließend diesen Satz.

Im regulären Fall folgt die Aussage wieder im Wesentlichen aus der Anwendung von Satz 6.3.15. Wir unterscheiden „zwei Typen von regulären Zahlen". Für die eine Art von regulären Zahlen wählen wir wie in 7.1 Gruppen und Unterwurzelsysteme so, dass diese die Bedingungen aus dem Unterkapitel 6.2 erfüllen. Beispielsweise nehmen wir für $\overline{R}$ ein Wurzelsystem vom Typ C_l, da bei $\overline{R} = R$ die Bedingung 6.2.**B**ii im Allgemeinen nicht gilt. Dadurch liegen in $\widehat{N}$ und $\widehat{S}$ Elemente aus $\overline{\mathbf{G}} \setminus \mathbf{G}$. Um diesen „Fehler auszugleichen" und durch die Anwendung von Satz 6.3.15 doch eine Aussage über d-Sylowlevigruppen und d-Sylownormalisatoren von $(\mathbf{G}, F)$ zu bekommen, wählen wir für δ einen nichttrivialen Charakter. Insgesamt unterscheiden sich nun alle in 6.2 definierten Gruppen voneinander. Daraus folgern wir dann im Beweis zu Satz 8.1.1 auch für die übrigen regulären Zahlen die maximale Fortsetzbarkeit.

Für die Verallgemeinerung der Aussage konstruieren wir eine d-Sylowlevigruppe L und ihren d-Sylownormalisator N mit Hilfe eines d-Sylowtwists, den wir mit Hilfe einer „kleineren" Gruppe $\mathsf{A}_{l'-1}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ mit $2 \leq l' < l$ ermitteln. Entscheidend für das weitere Vorgehen ist die gruppentheoretische Struktur von L und N. Durch diese ist es möglich, wie im Beweis zu 7.2.1 Lemma 3.2.5 anzuwenden und aus der maximalen Fortsetzbarkeit bei regulären Zahlen d die Fortsetzbarkeit für beliebige Zahlen d, also Satz 8.2.1, zu folgern.

8.1 Regulärer Fall

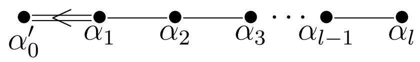
Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgender Aussage:

Satz 8.1.1. *Seien* $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ *$(l \geq 2)$, F ein Standard-Frobeniusendomorphismus, $d \in \mathbb{N}$ eine für $(\mathbf{G}, F)$ reguläre Zahl, T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.*

Zum Beweis von 8.1.1 zeigen wir, dass wir den Satz 6.3.15 anwenden können und dieser die Behauptung zur Folge hat. Wir beginnen mit der Festlegung der Gruppen und der Wurzelsysteme für 6.2.1. Gemäß Tabelle 2.1 sind die regulären Zahlen von $(\mathbf{G}, F)$ die Teiler von l und die Teiler von $l-1$. Wir beschränken uns zunächst auf die Teiler von l als Werte von d. Die restlichen regulären Zahlen d behandeln wir erst im Beweis zu 8.1.1.

8.1.2. In diesem Unterkapitel verwenden wir folgende Gruppen und Unterwurzelsysteme:

- Seien $\overline{R}$ das Wurzelsystem vom Typ C_l aus 4.4.1 (c) mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $\overline{R_F} := \{\alpha_0', \alpha_1 \ldots, \alpha_{l-1}\}$, wobei wir die Wurzeln α_i $(1 \leq i \leq l-1)$ aus 4.4.1 (a) entnehmen und $\alpha_0' := 2e_1$ gilt. Weiter seien q eine Primzahlpotenz und $\overline{\mathbf{G}}$ die universelle Chevalleygruppe zu $\overline{R}$, deren Weylgruppe wir mit $\overline{W}$ bezeichnen.



- Zudem sei $F : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus.

- Weiterhin sei $R \leq \overline{R}$ das Wurzelsystem aus 4.4.1 (a) vom Typ A_{l-1} mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $R_F := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ und $\mathbf{G} := \left\langle x_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q \right\rangle$. Letztere ist gleichzeitig gemäß Lemma 2.1.9 die universelle Chevalleygruppe zu R mit Weylgruppe W.

- Die Zahl d sei regulär für W und teile l.

Diese Gruppen und Wurzelsysteme besitzen die in 6.2.1 geforderten Eigenschaften. Um alle Voraussetzungen in 6.2.1 zu erfüllen, wählen wir einen Sylowtwist, für den wir die Bedingung 6.2.**B**i nachprüfen. Wir benutzen dazu die eingeführte Permutationsgruppen ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ und ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ sowie den dabei eingeführten Isomorphismus $f : \overline{W} \to {}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ aus 4.4.1 (c), der $f(W) = {}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ erfüllt.

Lemma 8.1.3. *Seien V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$, die Elemente $n_1, \ldots, n_{l-1}$ die Erzeuger von V aus 2.3.1, $\mathbf{B}$ die Zopfgruppe zu R mit dem Epimorphismus $\tau : \mathbf{B} \to V$ aus Lemma 2.3.2 und $\mathbf{w}_0$ das Bild des längsten Elements w_0 von W unter der Abbildung $\mathrm{r} : W \to \mathbf{B}$. Mit*

$$v_0 := n_1 n_2 \cdots n_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} n_{l-1} n_{l-2} \cdots n_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor + 1} \in V$$

sind die Elemente $v_0^{j'}$ für alle $j' \middle| l$ gute $\frac{l}{j'}$-Sylowtwists und $v_0^l = \tau(\mathbf{w}_0^2)$.

Beweis. Gemäß [BM97, A1.1] ist das Element

$$\mathbf{w} := \mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 \cdots \mathrm{s}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor}\,\mathrm{s}_{l-1}\,\mathrm{s}_{l-2} \cdots \mathrm{s}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor +1}$$

in der Zopfgruppe vom Typ A_{l-1} eine gute l-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$. Aus der Definition 2.3.11 guter Wurzeln von $\mathbf{w}_0^2$ folgt, dass auch die Elemente $\mathbf{w}^{j'}$ gute $\frac{l}{j'}$-te Wurzeln von $\mathbf{w}_0^2$ sind. Gemäß der Bemerkung 2.3.14 sind die Elemente $\tau(\mathbf{w}^{j'}) = v_0^{j'}$ gute Sylowtwists für $\mathbf{G}$. □

Wir setzen $j' := \frac{l}{d}$ und $v := v_0^{j'}$. Für dieses Element beschreiben wir die Gruppe $f\left(\mathrm{C}_W(\rho(v))\right)$. Dies benötigen wir für die Bedingung 6.2.**B**i.

Lemma 8.1.4. *Seien $j' := \frac{l}{d}$, $v := v_0^{j'}$ und sowohl j als auch die Mengen $\mathcal{B}^{(r)}$ $(1 \le r \le j)$ wie in 6.2.2 definiert. Dann gelten:*

(a) Die Menge $\{1, \ldots, j'\}$ bildet eine Transversale der Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ von $f(\rho(v))$ auf $\{1, \ldots, l\}$ und $j = j'$.

(b) Für $1 \le r \le j$ und $\sigma := f(\rho(v_0))$ sei

$$\sigma_{c_r} := \left(r, \sigma^j(r), \ldots, \sigma^{l-j}(r)\right)\left(-r, -\sigma^j(r), \ldots, -\sigma^{l-j}(r)\right)$$

Weiter sei

$$\sigma_{(r,r+1)} := \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r)}} (i, \sigma(i))(-i, -\sigma(i)) \text{ für } 1 \le r < j.$$

Dann ist

$$\mathrm{C}_{^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l}(f(\rho(v))) = \left\langle \sigma_{c_j}, \sigma_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \le r < j \right\rangle.$$

Mit $W_C := f^{-1}(\langle \sigma_{c_r} \mid 1 \le r \le j \rangle)$ und $W_S := f^{-1}(\left\langle \sigma_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \le r < j \right\rangle)$ gilt

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)) = W_C \rtimes W_S.$$

(c) Der Sylowtwist v erfüllt mit

$$w_{(r,r+1)} := f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)}) \text{ für alle } 1 \le r \le j-1$$

*die Bedingung 6.2.**B**i.*

Beweis. Aus

$$f(\rho(v_0)) = \left(1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1, l, l-1, \ldots, \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 2\right)$$

folgt die Aussage über die Transversale.

Berechnungen in $^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ zeigen Teil (b). Aus den Ergebnissen folgt, dass die Bedingung 6.2.**B**i mit

$$w_{(r,r+1)} := f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)}) \text{ für alle } 1 \le r \le j-1$$

erfüllt wird. □

Die gewünschten Eigenschaften der Tori wurden in 6.2.**B**ii formuliert.

Lemma 8.1.5. *Mit $Z = 1$ wird die Bedingung 6.2.***B***ii erfüllt.*

Beweis. Mit $\mathcal{M}_i := \mathcal{B}^{(i)}$ gilt für die in Lemma 7.1.4 definierten Wurzelsysteme

$$R'_i = \overline{R}_i.$$

Das Lemma 7.1.4 zeigt nun, dass die Voraussetzungen für Lemma 6.4.4 erfüllt sind. Daraus folgt 6.2.**B**ii.

Für den Beweis von $Z = 1$ benutzen wir den Isomorphismus ω aus dem Beweis zum Lemma 6.4.4. Für jede Potenz q' von q bildet ω die Gruppe $\overline{\mathbf{T}}^{\widetilde{F}}$ mit dem Standard-Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ zu q' auf $\mathbb{Z}\overline{R}^{\vee}/(q'-1)\mathbb{Z}\overline{R}^{\vee}$ ab. Dabei gilt

$$\omega(Z^{\widetilde{F}}) = \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_i^{\ \vee}, (q-1)\mathbb{Z}R^{\vee} \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_{i'}^{\vee}, (q-1)\mathbb{Z}R^{\vee} \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}R^{\vee}.$$

Gemäß Lemma 7.1.4 sind also beide Gruppen trivial. □

Nun prüfen wir 6.2.**B**iv also die Bedingungen an die Tori nach.

Lemma 8.1.6. *Die Bedingung 6.2.***B***iv wird erfüllt und es gilt*

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \text{ für alle } r \neq r'.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 6.4.3 und der Struktur von R: Aus der expliziten Angabe der Wurzelsysteme

$$\begin{aligned} R &= \{e_i - e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq j, i \neq i'\} \\ R_r &= \left\{e_i - e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r)}, i \neq i'\right\} \text{ und} \\ R_{r'} &= \left\{e_i - e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r')}, i \neq i'\right\}. \end{aligned}$$

erkennen wir

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \text{ mit } r \neq r'.$$

Dies ist die Voraussetzung für Lemma 6.4.3. Gemäß diesem gilt

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \text{ für } r \neq r'.$$

□

Diese Aussage hilft zu zeigen, dass tolle Elemente existieren.

Lemma 8.1.7. *Seien* $l_r := \prod_{i\in\mathcal{B}^{(r)}} h_{2e_i}(-1)$ $(1 \leq r \leq j)$. *Die Elemente*

$$p_r := \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\alpha_{r+1}}(1)^{v^r} \text{ für } 1 \leq r \leq j-1$$

sind tolle Elemente mit den angegebenen l_i.

Beweis. Gemäß Lemma 8.1.4 ist $\{1, \ldots, j\}$ eine Transversale der Bahnen von $\rho(v)$ auf $\{1, \ldots, l\}$. Für jede Wurzel $\beta_r := e_{r+1} - e_r$ $(1 \leq r \leq j-1)$ aus Lemma 6.4.1 gilt $\beta_r \in R$. Das Element $v^{\frac{l}{j}}$ stimmt gemäß 8.1.3 mit $\tau(\mathbf{w}_0^2)$ überein und liegt wegen $\mathbf{w}_0^2 \in \mathrm{Z}(\mathbf{B})$ im Zentrum von V. Für

$$p_i := \prod_{r=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_i}(1)^{v^r} \text{ für } 1 \leq i \leq j-1$$

erfüllen die Elemente l_i die Gleichung $p_i^2 = l_i l_{i+1}^{-1}$ $(1 \leq i \leq j-1)$, was sich aus den Relationen in Satz 2.1.6 mit Hilfe einfacher Rechnungen ergibt. Auch gilt $\rho(p_i) = w_{(i,i+1)}$. Daher können wir das Lemma 6.4.1 anwenden.

Die Aussage $l_r \in \mathrm{Z}(\widehat{N}_r)$ $(1 \leq r \leq j)$ folgt nach kurzer Rechnung aus Satz 2.1.6, wenn wir dabei die Operation von W auf R berücksichtigen. Die Lemmata 8.1.6 und 8.1.5 zeigen die übrigen Voraussetzungen des Lemmas 6.4.2. Demzufolge sind die Elemente p_i tolle Elemente. □

Wir haben also 6.2.**B**iii bewiesen. Nun benötigen wir noch einen geeigneten linearen Charakter auf $\widehat{N}$.

Lemma 8.1.8. *Seien* **N** *und* **T** *wie in 2.2.1 definiert. Dann gibt es einen linearen Charakter* $\delta \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ *der Ordnung* $q-1$ *mit* $\ker(\delta) \cap \widehat{S} = \mathbf{T}^{vF}$ *und* $\ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF}$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage für $d = 1$ und leiten daraus die allgemeine Aussage ab.

Für $v = 1$ ist $\widehat{S}$ wegen $Z = 1$ und Satz 2.1.6 (h) das direkte Produkt zyklischer Gruppen,

$$\widehat{S} = \left\langle h_{2e_1}(t) \,\middle|\, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle \times \left\langle h_{e_2-e_1}(t) \,\middle|\, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle \times \ldots \left\langle h_{e_l-e_{l-1}}(t) \,\middle|\, t \in \mathbb{F}_q^\star \right\rangle.$$

Für den treuen Charakter $\eta \in \mathrm{Irr}\left(\mathbb{F}_q^\star\right)$ gibt es einen Charakter δ' mit

$$\delta'(h_{2e_1}(t_0) h_{e_2-e_1}(t_1) h_{e_l-e_{l-1}}(t_{l-1})) = \eta(t_0) \text{ für alle } t_0, \ldots t_{l-1} \in \mathbb{F}_q^\star,$$

Dieser Charakter hat den Kern

$$\ker(\delta) = \mathbf{T}^F.$$

Auch gilt $\mathrm{I}_{\widehat{N}}(\delta') = \left\langle \mathbf{N}^F, \widehat{S} \right\rangle = \widehat{N}$. Für jedes $n \in \mathbf{N}^{vF}$ ist $\rho(n)(2e_1)$ eine Wurzel der Form $2e_{i'}$ mit $1 \leq i' \leq l$. Mit Hilfe von Bemerkung 2.1.8 ergibt sich daraus

$$h_{2e_1}(t_0)^n = h_{2e_{i'}}(t_0) = k_{e_{i'}}(t_0) = k_{e_1}(t_0)k_{-e_1+e_2}(t_0)\dots k_{-e_{i'-1}+e_{i'}}(t_0).$$

und

$$\delta'(h_{2e_1}(t_0)^n) = \delta'(h_{2e_i}(t_0)).$$

Analoge Rechnungen für die übrigen Erzeuger von $\widehat{S}$ zeigen

$$\mathbf{N}^{vF} \leq \mathrm{I}_{\widehat{N}}(\delta').$$

Aus der Definition von $\widehat{N}$ ist

$$\widehat{N} = \left\langle \mathbf{N}^F, \widehat{S} \right\rangle$$

bekannt. Zudem gilt $\mathbf{N}^F \cap \widehat{S} = \mathbf{T}^F = \ker(\widehat{S})$. Also gibt es gemäß Satz 3.1.6 eine Fortsetzung δ von δ' auf ganz $\widehat{N}$ mit

$$\delta\rceil_{\mathbf{N}^F} = 1.$$

Für $d \neq 1$ sei F' der Standard-Frobeniusendomorphismus zu q^d auf $\overline{\mathbf{G}}$. Auf $\widehat{N}' := \left\langle \overline{\mathbf{T}}^{F'}, \mathbf{N}^{F'} \right\rangle$ mit $\overline{\mathbf{T}} := \left\langle h_\alpha(t) \middle| \alpha \in \overline{R}, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle$ gibt es nach den bisherigen Ausführungen einen linearen Charakter $\delta_0 \in \mathrm{Irr}\left(\widehat{N}'\right)$ der Ordnung $q^d - 1$ mit

$$\ker(\delta_0) = \mathbf{N}^{F'} \text{ und } \ker(\delta_0) \cap \overline{\mathbf{T}}^{F'} = \mathbf{T}^{F'}.$$

Für $\delta := \delta_0\rceil_{\widehat{N}}$ gilt dann

$$\ker(\delta) = \mathbf{N}^{F'} \cap \widehat{N} = \mathbf{N}^{vF} \text{ und } \ker(\delta_0) \cap \overline{\mathbf{T}}^{F'} = \mathbf{T}^{F'} \cap \widehat{N} = \mathbf{T}^{vF}.$$

Für die charakteristischen Polynome gilt

$$\det_{\overline{R}^\vee \otimes \mathbb{C}}(x\rho(v) - 1) = (x-1)\det_{R^\vee \otimes \mathbb{C}}(x\rho(v) - 1).$$

Mit Hilfe von Bemerkung 1.2.1 folgt daraus

$$\left|\widehat{S}\right| = \left|\mathbf{T}^{vF}\right|(q-1).$$

Wegen $\widehat{N} = \left\langle \widehat{S}, \mathbf{N}^{vF} \right\rangle$ hat δ die Ordnung $q-1$. □

Dieser Charakter erfüllt die Bedingungen aus 6.2.6.

Lemma 8.1.9. *Der Charakter δ aus Lemma 8.1.8 besitzt die Eigenschaften aus 6.2.6.*

Beweis. Definitionsgemäß erfüllen die Elemente p_r die Gleichung $p_r \in \mathbf{N}^{vF}$ für alle $1 \leq r \leq j-1$. Daraus folgt die Eigenschaft 6.2.6 (c).

Es bleibt noch die Bedingung

$$\left\langle \widehat{N}_r \cap \ker(\delta), \widehat{S} \right\rangle = \widehat{N}_r \text{ für alle } 1 \leq r \leq j$$

mit den in 6.2 definierten Gruppen zu zeigen. Gemäß 6.2.4 (a) gilt

$$\left\langle \widehat{N}_r \cap \mathbf{N}^{vF}, \widehat{S}_r \right\rangle = \widehat{N}_r \text{ für alle } 1 \leq r \leq j,$$

was 6.2.6 (b) zeigt. □

Wir haben die Voraussetzungen nachgeprüft und können den Satz 6.3.15 anwenden.

Lemma 8.1.10. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($l \geq 2$), die Abbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Standard-Frobeniusendomorphismus, $d \in \mathbb{N}$ mit $d \big| l$, die Gruppe T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \operatorname{Irr}(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.*

Beweis. Gemäß 1.2.4 genügt es die maximale Fortsetzbarkeit für die Gruppen $\mathbf{T}^{vF}$ und $\mathbf{N}^{vF}$ zu zeigen, die gemäß den Lemmata 1.3.4 und 1.3.5 eine d-Sylowlevigruppe und ihr d-Sylownormalisator in $(\mathbf{G}, vF)$ sind. Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe von Satz 6.3.15.

Für $d \big| l$ haben wir in 8.1.2 Gruppen und Unterwurzelsysteme gewählt. Zusammen mit dem in 8.1.3 definierten d-Sylowtwist v werden die Bedingungen 6.2.**B**i- 6.2.**B**iv gemäß den Lemmata 8.1.4 - 8.1.7 erfüllt. Auch der in 8.1.8 definierte Charakter δ besitzt die in 6.2.6 formulierten Eigenschaften.

Für die Gruppen N und T aus Satz 6.3.15 erfüllen gemäß Lemma 8.1.8 folgende Gleichungen

$$\mathbf{T}^{vF} = \ker(\delta) \cap \widehat{S} = T \text{ und } N = \ker \delta = \mathbf{N}^{vF}.$$

Aus Satz 6.3.15 folgt nun, dass jeder Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar ist. □

Dies zeigt die Behauptung 8.1.1, aber nur für einen Teil der regulären Zahlen. Es bleibt folgende Aussage zu zeigen.

Lemma 8.1.11. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($l \geq 2$), die Abbildung $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Standard-Frobeniusendomorphismus, $1 \neq d \in \mathbb{N}$ mit $d \big| (l-1)$, die Gruppe T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \operatorname{Irr}(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen d-Sylowtwist v, anschließend eine d-Sylowlevigruppe T und ihren d-Sylownormalisator. Die Struktur dieser Gruppe ermöglicht es, die Behauptung mit Hilfe von Lemma 8.1.10 zu beweisen. Aus den Voraussetzungen folgt $l \geq 3$, so dass wir dabei die universelle Chevalleygruppen zu Wurzelsystemen vom Typ A_{l-2} benutzen können.

Seien R und $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}\}$ aus 4.4.1 (a) und $\mathbf{G}$ wie in 8.1.2 eine universelle Chevalleygruppe zu R. Weiter seien R' das Unterwurzelsystem mit dem Fundamentalsystem $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-2}\}$. Dann ist die Gruppe $\mathbf{G}_1 := \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R' \rangle$ gemäß 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R', $F_1 := F\rceil_{\mathbf{G}_1}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus auf $\mathbf{G}_1$ und v ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}_1, F_1)$, der wie in 8.1.4 definiert ist.

Aus [Spr74, 5.1] ist $a_{\mathsf{A}_{l-2}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d)$ bekannt. Wie im Beweis zu Lemma 7.2.2 folgt daraus, dass v auch ein Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$ ist.

Seien $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, W und $\rho : \mathbf{N} \to W$ die Gruppen bzw. die Abbildung aus der Bemerkung 2.2.1 zu $\mathbf{G}$. Gemäß Lemma 1.3.4 ist $\mathbf{T}^{vF}$ eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ und $\mathbf{N}^{vF}$ gemäß Lemma 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator.

Analog seien $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}_1$ und W_1 die wie in Bemerkung 2.2.1 definierten Gruppen von $\mathbf{G}_1$. Gemäß Lemma 1.3.4 ist $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$ eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}_1, vF_1)$ und $N_1 := \mathbf{N}_1^{vF}$ gemäß Lemma 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator. Wegen $d \big| (l-1)$ können wir hier Lemma 8.1.10 anwenden. Demzufolge ist jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T_1)$ auf $\mathrm{I}_{N_1}(\lambda)$ fortsetzbar.

Zum Beweis von $\left\langle \mathbf{N}_1^{vF}, \mathbf{T}^{vF} \right\rangle = \mathbf{N}^{vF}$ benutzen wir die Permutationsgruppen ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_{l-1}$ und den Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_{l-1}$ aus 4.4.1. Aus [Car85, 3.3.6] ist

$$\rho(\mathbf{N}_1^{vF}) = \mathrm{C}_{W_1}(\rho(v))$$

und

$$\rho(\mathbf{N}^{vF}) = \mathrm{C}_{W}(\rho(v))$$

bekannt. Gemäß dem Beweis zu 8.1.4 gilt

$$f(\rho(v)) = \left(1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{l-2}{2} \right\rfloor + 1, l-1, l-2, \ldots, \left\lfloor \frac{l-2}{2} \right\rfloor + 2\right)^{\frac{l-1}{d}}.$$

und wegen $d \neq 1$ auch

$$\mathrm{C}_{{}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_{l-1}}\left(f(\rho(v))\right) = \mathrm{C}_{{}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_{l}}\left(f(\rho(v))\right).$$

Daraus folgt

$$\rho(\mathbf{N}_1^{vF}) = \rho(\mathbf{N}^{vF}) \text{ und } \left\langle \mathbf{N}_1^{vF}, \mathbf{T}^{vF} \right\rangle = \mathbf{N}^{vF}.$$

Die Gruppen haben also folgende Struktur.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N_1 \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & T_1 & \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe von Satz 3.1.6 folgt daraus die Aussage: Jeder Charakter $\lambda \in \operatorname{Irr}(T)$ ist auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar. $\square$

Beweis von Satz 8.1.1. Aus der Tabelle 2.1 ist bekannt, dass d entweder l oder $l-1$ teilt. Für $d\big|l$ wurde die Aussage im Lemma 8.1.10 bewiesen. Ansonsten gilt $d\big|(l-1)$ und $d \neq 1$. In diesem Fall folgt die Behauptung aus Lemma 8.1.11. $\square$

Wir haben nun damit die Aussage 8.1.1 bewiesen. Wir möchten abschließend noch folgende Feststellung machen.

8.1.12. Beim Beweis von 8.1.11 besteht auch die Möglichkeit eine Isomorphie zu benutzen. Der Sylownormalisator N ist gleichzeitig isomorph zur Gruppe $\widehat{N}_{l-2}$, die wir erhalten, wenn wir eine Gruppe vom Typ A_{l-2} am Anfang benutzen. Gleichzeitig ist T dann isomorph zu $\widehat{S}_{l-2}$. Zwischen diesen beiden Gruppen ist die maximale Fortsetzbarkeit bekannt, da wir diese aus Satz 6.3.15 unter Benutzung des trivialen Charakters als δ ableiten können.

Wir haben nun die für uns wichtige Aussagen für reguläres d beim Typ A_{l-1} gezeigt.

8.2 Nichtregulärer Fall

In diesem Unterkapitel konzentrieren wir uns darauf Satz 8.1.1 auf beliebige Zahlen $d \in \mathbb{N}$ zu verallgemeinern. Wie im vorangegangenen Abschnitt seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ die universelle Chevalleygruppe zu dem Wurzelsystem R mit den Fundamentalwurzeln $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ aus 4.4.1 (a) und einer Primzahlpotenz q und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgender Aussage:

Satz 8.2.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($l \geq 2$), $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\chi \in \operatorname{Irr}(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar.*

Wir beginnen mit der Festlegung eines d-Sylowtwists.

Lemma 8.2.2. *Seien $d \in \mathbb{N}$ eine für W nichtreguläre Zahl, q eine Primzahlpotenz und $l' := \left\lfloor \frac{l}{d} \right\rfloor \cdot d$. Weiter seien R' das Wurzelsystem vom Typ $\mathsf{A}_{l'-1}$ mit den Fundamentalwurzeln $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'-1}\}$ und $\mathbf{G}' = \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R' \rangle$ wie in 2.1.9 die universelle Chevalleygruppe zu R'.*

(a) Die Zahl d ist regulär für $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$.

(b) Der d-Sylowtwist v der reduktiven Gruppe $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ aus Lemma 8.1.3 ist auch ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Wir gehen wie im Beweis zu 7.2.2 vor. Wir zeigen zunächst (a), dann mit Hilfe der Spiegelungsgrade der Weylgruppe W die Gleichung $a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l'-1}}(d)$ und beweisen damit, dass v ein d-Sylowtwist ist.

Offensichtlich ist d ein Teiler von l'. Mit Hilfe der Tabelle 2.1 ist dann d eine reguläre Zahl für $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$.

Die Gruppe $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist gemäß Lemma 2.1.9 eine reduktive Gruppe vom Typ $\mathsf{A}_{l'-1}$, auf der $F\rceil_{\mathbf{G}'}$ als Standard-Frobeniusendomorphismus operiert. Daher ist die Konstruktion von v mit Hilfe von Lemma 8.1.3 möglich.

Die Spiegelungsgrade von W sind gemäß [Car72, 10.2.5] die Zahlen $\{2, 3, \ldots, l\}$. Aus der Definition von l' und der Bemerkung 2.2.7 ergibt sich $a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l'-1}}(d)$.

Wir können nun Lemma 2.3.16 anwenden. Demzufolge ist v ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$. $\square$

Mit diesem Sylowtwist konstruieren wir in $(\mathbf{G}, vF)$ eine Sylowlevigruppe L und analysieren ihre Struktur.

Lemma 8.2.3. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W)$ die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$, $d \in \mathbb{N}$ eine für W nichtreguläre Zahl, l' die Zahl aus Lemma 8.2.2 und v der d-Sylowtwist aus 8.2.2. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen Sylowtorus $\mathbf{S}$ von $(\mathbf{G}, vF)$ mit:*

(a) $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v))$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{e_i - e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i'\}$,

(b) $\mathbf{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$ *und* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \mid \alpha \in R \rangle$,

(c) $\mathbf{L}_0 \lhd \mathbf{L}$ *mit* $\mathbf{L}_0 := \mathbf{T}_1 \times \mathbf{G}_2$, $\widetilde{R}_1 = \{e_i - e_{i'} \mid i, i' \leq l', i \neq i'\}$ *und* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$,

(d) $L_0 \lhd \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF}$ *und* $\left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF} : L_0\right| = q - 1$ *mit* $L_0 := T_1 \times G_2$, $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$ *und* $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, dash, "q-1"'] & \\
& L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& \{1\} = T_1 \cap G_2 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis zu 7.2.3 vor. Seien $Y' := \ker(\Phi_d(\rho(v)))$. Dann ist laut Lemma 1.3.3 der Torus $\mathbb{S} = \left({}^{X}\!/Y', Y', \rho(v)\right)$ ein generische d-Sylowtorus von $\mathbb{G}$. Im weiteren sei $\mathbf{S}$ der dort angegebene Sylowtorus von $\mathbf{G}$, der mit Hilfe von v berechnet wird.

Wir weisen nun für die Sylowtori $\mathbf{S}$ und $\mathbb{S}$ die Behauptungen nach. Dabei gehen wir wie im Beweis von 7.2.3 vor: Wir berechnen zunächst $Y'^{\perp} \cap R$. Mit Hilfe von Lemma 1.3.4 folgen daraus die Teilaussagen (a) und (b). Im Anschluss berechnen wir $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$ und beweisen damit (c). Die Teilsaussage (d) zeigen wir durch die Betrachtung von $\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$.

Seien R' das von den Fundamentalwurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'-1}$ erzeugte Unterwurzelsystem vom Typ $\mathsf{A}_{l'-1}$ und R'' das von den Fundamentalwurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'}$ erzeugte Unterwurzelsystem vom Typ $\mathsf{A}_{l'}$.

Aus [Spr74, 5.1] ist $a_{\mathsf{A}_{l'-1}}(d) = \left\lfloor \frac{l'}{d} \right\rfloor = a_{\mathsf{A}_{l'}}(d)$ für $d \neq 1$ bekannt. Gemäß Lemma 2.3.6 (b) ist $\rho(v)$ auch für $W_{\widetilde{R}_2}$ ein reguläres Element. Für dieses gilt daher

$$Y'^{\perp} \cap R'' = \emptyset.$$

und insbesondere auch

$$Y' \not\perp e_i - e_{l'+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'.$$

Wegen $Y' \leq \langle e_i \,|\, 1 \leq i \leq l' \rangle$ folgt daraus

$$Y' \not\perp e_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq l',$$

was $Y'^{\perp} \cap R = \widetilde{R}_2$ zur Folge hat. Mit Hilfe der in Lemma 1.3.4 angegebenen Formeln für $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ und $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ folgen die in (a) und (b) angegebenen Gleichungen.

Sei $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ das in Lemma 4.4.1 (a) angegebene Fundamentalsystem. Die Menge $R_{F1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'-1}\}$ bzw. $R_{F2} = \{\alpha_{l'+1}, \ldots, \alpha_l\}$ ist ein Fundamentalsystem von $\widetilde{R}_1$ bzw. $\widetilde{R}_2$. Diese erfüllen zudem $R_{F1} \,\dot\cup\, R_{F2} \subset R_F$.

Die Aussage in 2.1.6 (h) zeigt

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= \left\langle h_{\alpha_1}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_{l'-1}}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle, \\ \mathbf{T}_2 &= \left\langle h_{\alpha_{l'}}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_l}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \text{ und} \\ \mathbf{T} &= \left\langle h_{\alpha_1}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_l}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle\end{aligned}$$

für $\mathbf{T}_2 := \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$. Daraus folgt $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{T}_1 \cap (\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2) = \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2 = 1$.

Die Aussage $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$ folgt aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ mit Hilfe der Bemerkung 2.1.7 (a). Insgesamt ist $\mathbf{L}_0 = \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$ das direkte Produkt der beteiligten Gruppen.

Gemäß Satz 2.1.6 ist $\mathbf{G}_2$ ein Normalteiler in $\mathbf{L}$. Die Gruppe $\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$ ist ein Torus und damit zusammenhängend. Zu jedem Element $x \in L$ existieren Elemente $t \in \mathbf{T}$ und $g \in \mathbf{G}_2$ mit $x = tg$. Für diese Elemente gilt dann auch

$$t^{-1} t^{vF} = (g^{-1} g^{vF})^{-1} \in \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2.$$

Nach dem Satz von Lang-Steinberg gibt es Elemente $t' \in \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$ mit $(tt')^{vF} = tt'$ und $(t'^{-1} g) = t'^{-1} g$. Daraus folgt

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle^{vF} = \langle T, G_2 \rangle = L$$

mit $T := \mathbf{T}^{vF}$. Daraus folgt auch $L = \langle L_0, T \rangle$. Wegen $T \leq \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(L_0)$ gemäß Satz 2.1.6 ist L_0 ein Normalteiler von L.

Mit Hilfe der Bemerkung 1.2.1 wissen wir auch

$$|T_1| \cdot |T_2| \cdot (q-1) = |T|$$

für $T_2 := \mathbf{T} \cap G_2$, was $|L : L_0| = q - 1$ in (d) beweist. □

Die Gruppe ${}^{L}\!/\!_{L_0}$ ist zyklisch, wie wir in folgendem Lemma sehen.

Lemma 8.2.4. *Sei* $N_1 := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle^{vF}$. *Die Gruppe* ${}^{L}\!/\!_{L_0}$ *ist zyklisch von der Ordnung* $q-1$ *und* $[L, N_1] \leq T_1$.

Beweis. Wegen ${}^{L}\!/\!_{L_0} \cong {}^{T}\!/\!_{\langle T_1, T_2 \rangle}$ zeigen wir statt der Behauptung, dass die Faktorgruppe ${}^{T}\!/\!_{\langle T_1, T_2 \rangle}$ zyklisch ist.

Wir können $\mathbf{T}$ in den Torus

$$\overline{\mathbf{T}} := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R} \right\rangle \text{ mit } \overline{R} := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \leq l, i \neq j\}$$

einbetten. Auf $\overline{T} := \overline{\mathbf{T}}^{vF}$ existiert gemäß 8.1.8 ein Charakter $\delta' \in \mathrm{Irr}\left(\overline{T}\right)$ der Ordnung $q-1$ mit $\ker(\delta') = T$.

Analog können wir auch $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2 := \mathbf{G}_2 \cap \mathbf{T}$ in $\overline{\mathbf{T}}$ einbetten und zwar zunächst in die Tori

$$\overline{\mathbf{T}}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R}_1 \right\rangle \text{ mit } \overline{R}_1 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i,j \leq l', i \neq j\}$$

und

$$\overline{\mathbf{T}}_2 := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R}_2 \right\rangle \text{ mit } \overline{R}_2 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i,j \geq l'+1, i \neq j\}.$$

Die Charaktere $\delta_1 := \delta\rceil_{\overline{T}_1}$ und $\delta_2 := \delta\rceil_{\overline{T}_2}$ mit $\overline{T}_1 := \overline{\mathbf{T}}_1 \cap \overline{T}$ und $\overline{T}_2 := \overline{\mathbf{T}}_2 \cap \overline{T}$ besitzen ebenfalls wegen $\left|\overline{T}_1 : T_1\right| = q-1$ und $\left|\overline{T}_2 : T_2\right| = q-1$ die Ordnung $q-1$. Seien $h' \in \overline{T}_1$ ein Element, für das $\delta_1(h')$ eine primitive $(q-1)$-te Einheitswurzel ist, und $h'' \in \overline{T}_2$ mit $\delta_2(h'') = \delta(h')^{-1}$. Diese existieren wegen der Ordnung der Charaktere.

Das Element $h := h'h''$ liegt in T und erfüllt

$$\langle h, T_1, T_2 \rangle = T.$$

Somit ist ${}^{L}/{L_0}$ zyklisch.

Elemente aus N_1 operieren gemäß Bemerkung 2.1.7 trivial auf h'', was

$$[h,n] = [h',n] \in \overline{T}_1$$

zur Folge hat. Dies zeigt dann $[L, N_1] \leq T_1$. □

Nach der Sylowlevigruppe konstruieren wir den zugehörigen Sylownormalisator. Dazu ist die relative Weylgruppe wichtig.

Lemma 8.2.5. *Die generische Levigruppe $\mathbb{L}$ aus Lemma 8.2.3 hat die relative Weylgruppe*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left(\mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)) \times W_{\widetilde{R}_2}\right)/W_{\widetilde{R}_2}.$$

Beweis. Dies zeigen Berechnungen in ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$. □

Wir bestimmen nun den d-Sylownormalisator zu L.

Lemma 8.2.6. *(a) Die Gruppe $N := \langle N_1, L\rangle$ mit N_1 aus 8.2.4 ist der zu L gehörende d-Sylownormalisator.*

(b) $N_1 \leq \mathrm{C}_N(G_2)$.

Beweis. Die Aussage [Car85, 3.3.6] zeigt

$$\rho(N_1) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)).$$

Mit dem Lemma 8.2.5 folgt daraus

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left\langle \rho(N_1), W_{\widetilde{R}_2} \right\rangle / W_{\widetilde{R}_2}$$

Gemäß Lemma 1.3.5 ist N der Sylownormalisator von L.

Aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$, was wir aus der Definition der beiden Wurzelsysteme sehen, folgt mit Hilfe von Bemerkung 2.1.7 (b) die Aussage $N_1 \leq \mathrm{C}_N(G_2)$. □

Wir beweisen nun die Aussage 8.2.1 mit Hilfe von Satz 3.2.4.

Beweis von Satz 8.2.1. Gemäß Lemma 1.2.4 genügt es für den Beweis die Aussage für jedes $d \in \mathbb{N}$, eine d-Sylowlevigruppe und ihren d-Sylownormalisator in $(\mathbf{G}, vF)$ zu zeigen.

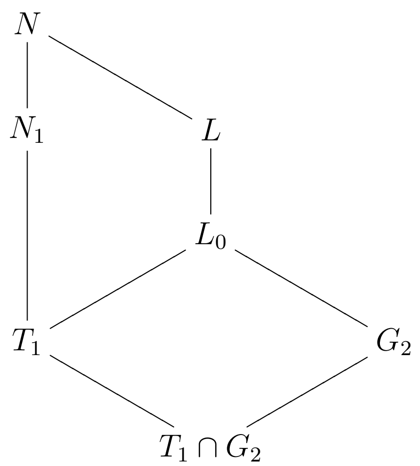
Wegen Satz 8.1.1 können wir außerdem annehmen, dass d für W nicht regulär ist.

Nach den Ausführungen in den Lemmata ist die Gruppe L aus Lemma 8.2.3 eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, vF)$ und N aus Lemma 8.2.6 ihr d-Sylownormalisator.

Um nun die maximale Fortsetzbarkeit für $L \lhd N$ zu zeigen, müssen wir die Voraussetzungen für Satz 3.2.5 nachweisen: Offensichtlich ist T_1 abelsch. Für $L_0 = \langle T_1, G_2 \rangle$ ist aus Lemma 8.2.4 bekannt, dass ${}^{L}/{L_0}$ zyklisch ist. Dies sind die Voraussetzungen (i) und (ii).

Mit $N_C := N_1$ werden auch die Gleichungen $N = \langle N_C, L \rangle$, $[N_C, L] \leq T_1$, $[N_C, G_2] = 1$ und $L \cap N_C = T_1$ aus 3.2.5 (iii) erfüllt, was aus den Definitionen von N und T_1 sowie der Gleichung $N_1 \leq \mathrm{C}_N(G_2)$ aus Lemma 8.2.6 (b) folgt.

In Lemma 3.2.5 (iv) wurde die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N_1$ vorausgesetzt. Die Gruppe $T_1 = \mathbf{T}_1^{vF}$ ist gemäß Lemma 1.3.4 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', vF)$ und $N_1 = \mathbf{N}_1^{vF}$ laut Lemma 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator. In Lemma 8.2.2 wurde bewiesen, dass d für $(\mathbf{G}', vF)$ eine reguläre Zahl ist. Daher sind die irreduziblen Charaktere von T_1 gemäß Lemma 8.1.1 auf ihre Trägheitsgruppe in N_1 fortsetzbar.



Daraus folgt mit Hilfe von Satz 3.2.5 die Behauptung. □

Wir haben also damit die maximale Fortsetzbarkeit bei $(\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$ gezeigt. Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Situation, die entsteht, wenn auf der Gruppe der Frobeniusendomorphismus operiert, der vom Graphautomorphismus induziert wird.

Kapitel 9

Gruppen vom Typ ${}^2\mathsf{A}_{l-1}$

In diesem Kapitel beweisen wir für eine weitere Serie endlicher reduktiver Gruppem $(\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$, dass sich jeder irreduzible Charakter einer d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ auf seine Trägheitsgruppe im zugehörigen d-Sylownormalisator fortsetzt. Der Frobeniusendomorphismus $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ wird dabei vom nichttrivialen Graphautomorphismus induziert. Wir gehen wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln vor: im regulären Fall wenden wir den Satz 6.3.15 an und leiten mit Hilfe von Satz 3.2.5 daraus die maximale Fortsetzbarkeit im nichtregulären Fall ab.

Im ersten Unterkapitel konzentrieren wir uns auf reguläre Werte von d. Anhand der Werte von d und l unterscheiden wir vier Fälle. Für einen dieser Fälle weisen wir die Voraussetzungen für Satz 6.3.15 nach und wenden diesen anschließend an. Dazu müssen wir wieder die Gruppe $\mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ in die Gruppe $\mathsf{C}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ einbetten. Nur dadurch können wir sicherstellen, dass der Torus das direkte Proukt kleinerer Tori ist, die vom Sylownormalisator permutiert werden. Mit Hilfe der Ergebnisse aus dem Unterkapitel 5.1 beweisen wir die maximale Fortsetzbarkeit für einen weiteren Fall. Aus diesen Ergebnissen können wir in Lemma 9.1.15 mit Hilfe eines anderen Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ die verbleibenden Aussagen folgern, da dieser Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F}$ sich auf Untergruppen, die universelle Chevalleygruppen sind, einschränken lässt und aus F durch einen inneren Automorphismus hervorgeht.

Im zweiten Unterkapitel verallgemeinern wir die Aussage auf nichtreguläre Werte von d. Wir konstruieren mit Hilfe eines d-Sylowtwists wieder eine d-Sylowlevigruppe und einen d-Sylownormalisator. Die Struktur dieser Gruppen ermöglicht es mit Hilfe von Satz 3.2.5 die maximale Fortsetzbarkeit für nichtreguläre Zahlen aus der bereits bewiesenen maximalen Fortsetzbarkeit bei regulären Zahlen zu folgern.

9.1 Regulärer Fall

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgender Aussage:

Satz 9.1.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 3)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der von einem Graphautomorphismus abgeleitete Frobeniusendomorphismus, d eine reguläre Zahl von $(\mathbf{G}, F)$, T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.*

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass $\mathbf{G}$ mit Hilfe des Wurzelsystems R aus Lemma 4.4.1 (a) mit dem Fundamentalsystem $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}\}$ definiert ist und das vollständige Wurzeldatum $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ besitzt. Wir beschränken uns anfangs wieder auf reguläre Zahlen von $W\phi$ als Werte von d. Gemäß der Tabelle 2.1 sind diese:

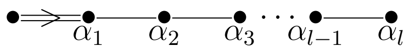
- die geraden Teiler von $2l$ und die Teiler von $l-1$ bei $2 \big| (l-1)$ und
- die geraden Teiler von $2(l-1)$ und die Teiler von l bei $2 \nmid (l-1)$.

Zum Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit in den vier Fällen gehen wir verschieden vor. Wir beginnen mit dem Fall $d \big| l$ und $2 \nmid (l-1)$.

Hierbei benutzen wir Satz 6.3.15 und beginnen mit der Wahl von $\overline{R}$, $\overline{\mathbf{G}}$, R, $\mathbf{G}$ und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.

9.1.2. Wir verwenden in diesem Abschnitt folgende Notation:

- Seien $\overline{R}$ das Wurzelsystem aus Lemma 4.4.1 (c) vom Typ C_l, $\overline{R_F}$ das dort angegebene Fundamentalsystem von $\overline{R}$ und $\overline{\mathbf{G}}$ die damit konstruierte universelle Chevalleygruppe über $\overline{\mathbb{F}}_q$.



- Zu dem parabolischen Unterwurzelsystem $R \leq \overline{R}$ vom Typ A_{l-1} aus Lemma 4.4.1 (a) mit dem Fundamentalsystem $R_F = \{\alpha_i \mid 1 \leq i < l\}$ ist gemäß Lemma 2.1.9 die Gruppe $\mathbf{G} := \left\langle \overline{\mathbf{X}}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in R \right\rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$ eine universelle Chevalleygruppe.
- Auf $R_F = \{\alpha_i \mid 1 \leq i < l\}$ operiert der Automorphismus $^- : R \to R$ mit $\alpha_i \mapsto \alpha_{l-i}$ ($\alpha_i \in R_F$). Durch diesen wird der Graphautomorphismus
$$\Gamma : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ mit } \Gamma(x_\alpha(t)) := x_{\overline{\alpha}}(t) \text{ für } \pm\alpha \in R_F$$
und der Frobeniusendomorphismus
$$F : \mathbf{G} \to \mathbf{G} \text{ mit } F(x_\alpha(t)) := x_{\overline{\alpha}}(t^q) \text{ für } \pm\alpha \in R_F$$
definiert. Dann gilt $F = F_0 \circ \Gamma$ mit dem Standard-Frobeniusendomorphismus $F_0 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.
- Weiter sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \big| l$ und $2 \nmid (l-1)$.

Bei der Konstruktion eines passenden Frobeniusendomorphismus $\overline{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ mit $\overline{F} \rceil_{\mathbf{G}} = F$ hilft folgendes Lemma:

Lemma 9.1.3. *Seien V bzw. $\overline{V}$ die erweiterten Weylgruppen von $\mathbf{G}$ bzw. $\overline{\mathbf{G}}$, $\mathbf{B}$ bzw. $\overline{\mathbf{B}}$ Zopfgruppen zu R bzw. $\overline{R}$. Die Epimorphismen $\tau : \mathbf{B} \to V$ und $\overline{\tau} : \overline{\mathbf{B}} \to \overline{V}$ seien wie in Lemma 2.3.2 definiert. Weiter seien $\mathbf{w}_0 := \mathrm{r}(w_0)$ das Bild des längsten Elements w_0 von W in $\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{w}}_0$ das analoge Element in $\overline{\mathbf{B}}$.*

Mit $n := \tau(\mathbf{w}_0)\overline{\tau}(\overline{\mathbf{w}}_0)$ gilt dann

$$\Gamma(x) = x^n \text{ für alle } x \in \mathbf{G}.$$

Beweis. Wir prüfen diese Aussage für alle Elemente $x = x_\alpha(t)$ ($\pm\alpha \in R_F$, $t \in \overline{\mathbb{F}}_q$) nach.

Aus Satz 2.1.6 folgt

$$x_\alpha(t)^n = x_{\overline{\alpha}}(i_\alpha t) \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{F}}_q, \pm\alpha \in R_F$$

mit gewissen $i_\alpha \in \{\pm 1\}$ ($\pm\alpha \in R_F$). Wir können n als Produkt

$$n = n_{\beta_1}(1) \cdots n_{\beta_l}(1)$$

schreiben. Daraus ergibt sich

$$i_\alpha = \eta_{\beta_1,\alpha}\eta_{\beta_2,w_{\beta_1}(\alpha)} \cdots .$$

Aus [Car72, Proposition 6.4.3] ist

$$\eta_{\alpha,\beta} = \eta_{\alpha,-\beta} \text{ für alle } \alpha, \beta \in R$$

bekannt. Daraus folgt

$$i_\alpha = i_{-\alpha} \text{ für alle } \alpha \in R_F.$$

Damit berechnen wir $n_\alpha(t)^n$ ($t \neq 0$) durch

$$n_\alpha(t)^n = x_\alpha(t)^n x_{-\alpha}(t^{-1})^n x_\alpha(t)^n = x_{\overline{\alpha}}(i_\alpha t) x_{-\overline{\alpha}}(i_\alpha t^{-1}) x_{\overline{\alpha}}(i_\alpha t) = n_{\overline{\alpha}}(i_\alpha t).$$

Rechnungen in W und die Gleichung aus Lemma 2.3.2 (c) zeigen

$$(n_i(1))^n = n_{l-i}(1) \text{ für } 1 \leq i \leq l-1.$$

Daraus folgt $i_\alpha = 1$ und

$$x_\alpha(t)^n = \Gamma(x_\alpha(t)) \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{F}}_q, \pm\alpha \in R_F.$$

Zusammen mit $\langle \mathbf{X}_\alpha \mid \pm\alpha \in R_F \rangle = \mathbf{G}$ aus Lemma 2.1.10 beweist dies die Behauptung. □

Der Frobeniusendomorphismus $\overline{F} := n\overline{F}_0 : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ mit dem Element n aus Lemma 9.1.3 und dem Standard-Frobeniusendomorphismus $\overline{F}_0 : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ von $\overline{\mathbf{G}}$ erfüllt

$$\overline{F}\rceil_{\mathbf{G}} = F.$$

Somit fehlt noch ein Sylowtwist für die in 6.2.1 beschriebene Ausgangssituation. Dafür setzen wir den in Lemma 4.4.1 (a) eingeführten Isomorphismus $f : W \to {}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ auf $\langle W, \phi\rangle$ fort.

Lemma 9.1.4. *Durch*

$$s_i \mapsto (i, i-1)(-i, -i+1) \ \ (1 \leq i \leq l) \text{ und } \phi \mapsto \prod_i^l (i, -l+i)$$

wird ein Monomorphismus $f : \langle W, \phi\rangle \to {}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l$ *definiert, der mit der Operation auf* $R^\vee$ *verträglich ist.*

Beweis. Nachrechnen. □

Mit Hilfe von f konstruieren wir nun einen d-Sylowtwist $v\phi$ mit $v \in V$.

Lemma 9.1.5. *Seien* $\mathbf{N}$ *und* $\rho : \mathbf{N} \to W$ *wie in 2.2.1 definiert und* $n_1, \ldots, n_{l-1}$ *die Erzeuger von* V *aus 2.3.1.*

(a) *Mit* $v_0 := n_1 n_2 \cdots n_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} n_{l-1} n_{l-2} \cdots n_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor + 1} \in V$ *ist* $v_0^{j'}\phi$ *für alle* $j' \big| l$ *ein* $\frac{l}{j'}$*-Sylowtwist für* $\mathbf{G}$.

(b) *Mit* $v := v_0^{j'}$ *und* $j' := \frac{l}{d}$ *seien* j *und* $\mathcal{B}^{(r)}$ $(1 \leq r \leq j)$ *wie im Abschnitt 6.2.1 definiert.*

Dann gelten $\mathrm{C}_V((v\phi)^{\frac{l}{j}}) = V$ *und*

$$j = \begin{cases} \frac{j'}{2} & 2 \nmid d, \\ j' & 4 \big| d, \\ 2j' & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge $\{1, \ldots, j\}$ *bildet eine Transversale der Bahnen* $\mathcal{B}^{(r)}$.

(c) *Sei* $\sigma := f(\rho(v)\phi)$. *Für* $1 \leq r \leq j$ *sei*

$$\sigma_{c_r} := \left(r, |\sigma(r)|, \ldots, \left|\sigma^{\frac{l}{j}}(r)\right|\right)\left(-r, -|\sigma(r)|, \ldots, -\left|\sigma^{\frac{l}{j}}(r)\right|\right).$$

Weiter sei

$$\sigma_{(r,r+1)} := \prod_{i=0}^{d} (\sigma^i(r), \sigma^i(r+1)) \text{ für } 1 \leq r < j.$$

Mit $W_C := f^{-1}(\langle \sigma_{c_r} \mid 1 \leq r \leq j\rangle)$ *und* $W_S := f^{-1}(\left\langle \sigma_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \leq r < j\right\rangle)$ *gilt*

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)) = W_C \rtimes W_S.$$

(d) *Die Bedingung 6.2.***B***i wird mit* $w_{(r,r+1)} := f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)})$ *(*$1 \leq r \leq j-1$*) vom Sylowtwist* v *erfüllt.*

Beweis. Wir beweisen die einzelnen Aussagen nacheinander: für Teil (a) benutzen wir eine d-te gute ϕ-Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ und für Teil (b) rechnen wir vor allem mit $f(\rho(v)\phi)$.

Aus [BM97, A1.1] ist bekannt, dass $\mathbf{w}^i\phi$ mit

$$\mathbf{w} := \mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 \cdots \mathrm{s}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor}\,\mathrm{s}_{l-1}\,\mathrm{s}_{l-2} \cdots \mathrm{s}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor + 1} \in \mathbf{B}$$

eine gute d-te ϕ-Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ ist. Aus $\tau(\mathbf{w}) = v_0$ folgt mit Hilfe von Bemerkung 2.3.12 die Aussage (a). Es ist anzumerken, dass auch $\mathbf{w}$ selbst eine ϕ-stabile l-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ ist, die auch bei der Konstruktion im Lemma 8.1.3 benutzt wurde.

Nun berechnen wir zunächst das Element $f(\rho(v)\phi)$, um die Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ und j zu berechnen. Aus

$$\begin{aligned}
f(\rho(v)\phi) &= f(\rho(v))f(\rho(\tau(\mathbf{w}_0)))\prod_{i=1}^{l}(i,-i) = \\
&= f(\rho(v_0^j))f\left(\rho\left(v_0^{\frac{l}{2}}\right)\right)\prod_{i=1}^{l}(i,-i) = \\
&= \left(\rho\left(v_0^{j+\frac{l}{2}}\right)\right)\prod_{i=1}^{l}(i,-i)
\end{aligned}$$

folgt, dass die Operation von $f(\rho(v)\phi)$ und $f\left(\rho\left(v_0^{j+\frac{l}{2}}\right)\right)$ auf $\{1,\ldots,l\}$ übereinstimmen und somit ihre Bahnen gleich sind. Die Ordnung von $f\left(\rho\left(v_0^{j+\frac{l}{2}}\right)\right)$ ist $\frac{l}{\mathrm{ggT}\left(l,j+\frac{l}{2}\right)}$, also

$$o\left(f(\rho(v_0^{j+\frac{l}{2}}))\right) = \begin{cases} d & 4 \mid d, \\ 2d & 2 \nmid d, \\ \frac{d}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusammen mit der Definition von j folgt daraus

$$jo\left(f\left(\rho\left(v_0^{j+\frac{l}{2}}\right)\right)\right) = l.$$

Daraus ergeben sich die oben angegebenen Formeln für j. Wegen

$$f(\rho(v_0)) = (1,2,\ldots,l,-1,\ldots,l)$$

zerlegt $\rho(v)\phi$ die Zahlen $\{1,\ldots,n\}$ in j Bahnen, die jeweils die Länge $\frac{l}{j}$ haben. Die in (b) angegebene Menge bildet eine Transversale.

Für den Beweis von $\mathrm{C}_V((v\phi)^{\frac{l}{j}}) = V$ berechnen wir

$$(\mathbf{w}\phi)^{\frac{l}{j}} = \begin{cases} \mathbf{w}_0^2 & 4\big| d, \\ \mathbf{w}_0^2 & 2\nmid d, \\ \mathbf{w}_0\phi & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Elemente liegen im Zentrum von V, da $\tau(\mathbf{w}_0)$ und ϕ auf den Erzeugern $n_1, \ldots, n_{l-1}$ von V gemäß Lemma 2.3.2 (c) durch

$$n_i^\phi = n_{l-i} \text{ und } n_i^{\tau(\mathbf{w}_0)} = n_{l-i} \text{ für alle } 1 \leq i \leq l-1$$

operieren.

Wegen $f(\rho(v)\phi) = f\left(\rho\left(v_0^{j+\frac{l}{2}}\right)\right)\prod_{i=1}^{l}(i,-i)$ stimmt $\mathrm{C}_W\,(v\phi)$ mit $\mathrm{C}_W\left(v_0^{\frac{l}{2}+j}\right)$ überein. Diese Gruppe ist der in 8.1.4 berechnete Zentralisator, der gemäß den dortigen Überlegungen die Bedingung 6.2.**B**i erfüllt. Dies sind die Behauptungen in (c) und (d). □

Mit der Festlegung von $v\phi$ als d-Sylowtwist haben wir alle Gruppen und Wurzelsysteme wie in 6.2.1 angegeben. Während die Bedingung 6.2.**B**i sich auf die Struktur der relativen Weylgruppe bezieht, fordert die Bedingung 6.2.**B**ii strukturelle Eigenschaften der Tori.

Lemma 9.1.6. *Die Bedingung 6.2.***B***ii wird mit $Z = 1$ erfüllt.*

Beweis. Wir gehen wie im Beweis zu 8.1.5 vor.

Mit $\mathcal{M}_i := \mathcal{B}^{(i)}$ gilt für die in Lemma 7.1.4 definierten Wurzelsysteme

$$R_i' = \overline{R}_i.$$

Das Lemma 7.1.4 zeigt nun, dass die Voraussetzungen für Lemma 6.4.4 erfüllt sind. Daraus folgt 6.2.**B**ii.

Für den Beweis von $Z = 1$ benutzen wir den Isomorphismus ω aus dem Beweis zum Lemma 6.4.4. Für jede Potenz q' von q bildet ω die Gruppe $\overline{\mathbf{T}}^{\widetilde{F}}$ mit dem Standard-Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ zu q' auf $\mathbb{Z}\overline{R}^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ ab. Dabei gilt

$$\omega(Z^{\widetilde{F}}) = \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_i{}^\vee, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_{i'}^\vee, (q-1)\mathbb{Z}R^\vee \,\middle|\, i' \neq i \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}R^\vee.$$

Gemäß Lemma 7.1.4 sind also beide Gruppen trivial. □

Als nächstes zeigen wir die Bedingung 6.2.**B**iv.

Lemma 9.1.7. *Die Bedingung 6.2.***B***iv wird erfüllt und es gilt stets*

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \textit{ für alle } r \neq r'.$$

Beweis. Wir können wie für den Beweis von Lemma 8.1.6 vorgehen. Der Beweis überträgt sich auf die hier vorliegende Situation.

Wir müssen für $1 \leq r < r' \leq j$ die Aussage

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \text{ mit } r \neq r'$$

zeigen, um Lemma 6.4.3 anwenden zu können.

Aus der expliziten Angabe der Wurzelsysteme

$$\begin{aligned} R &= \{e_i - e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq l, i \neq i'\}, \\ R_r &= \left\{e_i - e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r)}, i \neq i'\right\} \text{ und} \\ R_{r'} &= \left\{e_i - e_{i'} \,\middle|\, i, i' \in \mathcal{B}^{(r')}, i \neq i'\right\}. \end{aligned}$$

erkennen wir

$$\alpha + \beta \notin R \text{ für alle } \alpha \in R_r,\ \beta \in R_{r'} \text{ mit } r \neq r'.$$

Dies ist die Voraussetzung für Lemma 6.4.3. Gemäß diesem gilt

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \text{ für } r \neq r'.$$

□

Nun kommen wir zur Bestimmung toller Elemente.

Lemma 9.1.8. *Seien $l_r := \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r)}} h_{2e_i}(-1)$ $(1 \leq r \leq j)$. Die Elemente*

$$p_r := \prod_{i=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\alpha_{r+1}}(1)^{(v\phi)^i} \textit{ für } 1 \leq r \leq j-1$$

sind mit den angegebenen l_i tolle Elemente.

Beweis. Wir weisen dazu die verschiedenen Voraussetzungen für Lemma 6.4.2 nach.

Gemäß Lemma 8.1.4 ist $\{1, \ldots, j\}$ eine Transversale der Bahnen von $\rho(v)$ auf $\{1, \ldots, l\}$. Im Fundamentalsystem R_F liegt jede Wurzel β_i aus 6.4.1, und $v^{\frac{l}{j}} = \tau(\mathbf{w}_0^2)$ ist ein zenatrales Element von V. Für

$$p_r := \prod_{i=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\beta_r}(1)^{(v\phi)^i} \text{ für } 1 \leq r \leq j-1$$

erfüllen die Elemente l_r die Gleichung $p_r^2 = l_r l_{r+1}^{-1}$ $(1 \leq r \leq j-1)$. Auch gilt $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$. Daher können wir Lemma 6.4.1 anwenden.

Mit Hilfe von 2.1.6 und der Operation von W auf R erkennen wir leicht $l_r \in \mathrm{Z}(\widehat{N}_r)$ für alle $1 \leq r \leq j$. Aus den Lemmata 9.1.7 und 9.1.6 ist zudem $[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1$ und $Z = 1$ bekannt. Also sind die Voraussetzungen für das Lemma 6.4.2 erfüllt. Somit sind die definierten Elemente p_r tolle Elemente. □

Wir benötigen noch einen geeigneten linearen Charakter auf $\widehat{N}$.

Lemma 9.1.9. *Es gibt einen linearen Charakter* $\delta \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ *mit*

$$\ker(\delta) \cap \overline{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{vF} \text{ und } \ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF},$$

der die Bedingungen aus 6.2.6 erfüllt.

Beweis. Die Abbildung $\overline{F}' := (v\overline{F})^{j'}$ ist ein Standard-Frobeniusendomorphismus. Gemäß Lemma 8.1.8 gibt es einen Charakter $\delta' \in \operatorname{Irr}\left(\left\langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \right\rangle^{\overline{F}'}\right)$ mit

$$\ker(\delta') \cap \overline{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\overline{F}'} \text{ und } \ker(\delta') = \mathbf{N}^{\overline{F}'}.$$

Wegen $\widehat{N} \leq \left\langle \mathbf{N}, \overline{\mathbf{T}} \right\rangle^{\overline{F}'}$ können wir $\delta := \delta'\rceil_{\widehat{N}}$ setzen. Dieser Charakter erfüllt

$$\ker(\delta) \cap \overline{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\overline{F}'} \cap \widehat{N} = \mathbf{T}^{vF} \text{ und } \ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF}.$$

Gemäß 6.2.4 (a) und der Wahl von p_r als tolle Elemente besitzt dieser Charakter die in 6.2.6 beschriebenen Eigenschaften. □

Wir können nun den Satz 6.3.15 anwenden.

Satz 9.1.10. *Seien* **G** *und* F *wie in Abschnitt 9.1.2 beschrieben,* $2 \big| l$ *und* $d \big| l$*. Dann gilt die Aussage 9.1.1.*

Beweis. Wir erklären zunächst, warum es genügt, sich auf bestimmte d-Sylowlevigruppen und ihre d-Sylownormalisatoren zu beschränken. Für diese wenden wir dann den Satz 6.3.15 an.

Mit dem in Lemma 9.1.5 definierten Sylowtwist $v\phi$ ist die Gruppe $T := \mathbf{T}^{vF}$ eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ gemäß 1.3.4 und $N := \mathbf{N}^{vF}$ gemäß 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator. Gemäß Lemma 1.2.4 genügt es, für den Beweis die maximale Fortsetzbarkeit bei diesen Gruppen zu beweisen.

Wir haben in 9.1.2 Wurzelsysteme, Gruppen und Frobeniusendomorphismen gewählt, die zusammen mit dem Sylowtwist $v\phi$ aus Lemma 9.1.5 alle Bedingungen aus 6.2 erfüllen. Auch der Charakter δ aus 9.1.9 besitzt die gewünschten Bedingungen. Somit können wir Satz 6.3.15 anwenden. Dieser zeigt, dass alle Charaktere auf $\widehat{S} \cap \ker(\delta)$ maximal in $\widehat{N} \cap \ker(\delta)$ fortsetzbar sind. Aus dem Lemma 9.1.9 wissen wir $T = \widehat{S} \cap \ker(\delta)$ und $N = \ker(\delta)$. Also liegt bei $T \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vor. □

Wir haben für einen der vier Fälle die maximale Fortsetzbarkeit bewiesen. Wir betrachten im Weiteren die Situation bei $2 \big| (l-1)$, $2 \big| d$ und $d \big| 2l$.

Satz 9.1.11. *Seien* $\mathbf{G}$ *und* $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *wie eben mit* $2\big|(l-1)$, $2\big|d$ *und* $d\big|2l$. *Weiter seien* T *eine* d*-Sylowlevigruppe in* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr* d*-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere* $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ *auf* $\mathrm{I}_N(\lambda)$ *fortsetzbar.*

Beweis. Seien H und V die Untergruppen von $\mathbf{G}$ aus Lemma 2.3.1 .

Wir zeigen zunächst, dass ein sehr guter 2-Sylowtwist $v\phi$ existiert. Mit Hilfe von Lemma 5.1.9 folgt, dass es auch für jedes andere d einen sehr guten d-Sylowtwist $v\phi$ gibt. Daraus folgt gemäß Lemma 5.1.1 die Behauptung.

Für $d = 2$ ist $\mathbf{w}_0\phi$ laut [BM97, A1.1] eine gute ϕ-Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ und damit nach der Bemerkung 2.3.12 das Element vF mit $v := \tau(\mathbf{w}_0)$ ein 2-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Kleine Rechnungen in W zeigen zusammen mit Lemma 2.3.2 (c) die Gleichung $\mathrm{C}_V(\mathbf{w}_0\phi) = V$. Daraus ergibt sich $V = \mathrm{C}_V(\tau(\mathbf{w}_0)\phi)$ und $H = \mathrm{C}_H(\tau(\mathbf{w}_0)\phi)$. Die maximale Fortsetzbarkeit bei $H \lhd V$ wurde in Satz 4.1.4 bewiesen. Also ist $\mathbf{w}_0\phi$ ein sehr guter 2-Sylowtwist.

Wir zeigen nun die maximale Fortsetzbarkeit für die übrigen Zahlen d, die nach den Voraussetzungen auch $(d)_2 = 2$ erfüllen, d.h. $2\big|d$ und $4\nmid d$.

Die Elemente $v\phi := (\tau(c_\phi)\phi)^{j'}$ mit $j' := \frac{2l}{d}$ und

$$c_\phi := \mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 \cdots \mathrm{s}_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}$$

sind nach der Bemerkung 2.3.12 auch d-Sylowtwists für $(\mathbf{G}, F)$, da $\tau(c_\phi)\phi$ gemäß [BM97, A1.1] eine gute $2l$-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2$ ist.

Gemäß der Bemerkung 5.1.9 sind die Elemente $(\tau(c_\phi)\phi)^{\frac{2l}{d}}$ sehr gute d-Sylowtwists. Mit Hilfe von 5.1.1 folgt daraus die Behauptung. □

Für die verbleibenden regulären Zahlen d und später für den nichtregulären Fall konstruieren wir noch einen weiteren Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, der sich besser für den Vergleich verschiedener Chevalleygruppen eignet.

Lemma 9.1.12. *Der Automorphismus* $\widetilde{\Gamma} := \tau(\mathbf{w}_0)\Gamma$ *operiert auf* $\mathbf{G}$ *durch*

$$\widetilde{\Gamma}(x_\alpha(t)) = x_{-\alpha}(-t) \text{ für alle } \pm\alpha \in R_F.$$

Auf dem Kocharaktergitter Y *von* $\mathbf{G}$ *operiert* Γ *durch* $\widetilde{\phi} = -\mathrm{id}_Y$. *Durch* $\widetilde{F} := \widetilde{\Gamma} \circ F_0$ *wird ein Frobeniusendomorphismus von* $\mathbf{G}$ *definiert, der sich durch einen inneren Automorphismus von* F *unterscheidet.*

Beweis. Wir berechnen zunächst $x_\alpha(t)^{\tau(\mathbf{w}_0)}$ mit ähnlichen Methoden wie im Beweis zu Lemma 9.1.3. Anschließend beweisen wir noch die Aussage über den induzierten Automorphismus von Y.

Wie im Beweis zu Lemma 9.1.3 gibt es Konstanten $i_\alpha \in \{\pm 1\}$ $(\pm\alpha \in R_F)$ mit

$$\widetilde{\Gamma}(x_\alpha(t))^{\tau(\mathbf{w}_0)} = x_{-\alpha}(i_\alpha t) \text{ für alle } \pm\alpha \in R_F, t \in \overline{\mathbb{F}}_q.$$

Aus [Car72, Proposition 6.4.3] und analogen Überlegungen wie im Beweis zu Lemma 9.1.3 folgt

$$i_\alpha = i_{-\alpha} \text{ für alle } \alpha \in R_F.$$

Daraus ergibt sich auch

$$\widetilde{\Gamma}(n_\alpha(1))^{\tau(\mathbf{w}_0)} = n_{-\alpha}(i_\alpha 1) \text{ für } \alpha \in R_F.$$

Außerdem operiert $\tau(\mathbf{w}_0)$ wegen $W = \mathrm{C}_W(w_0\phi)$ und der Formel aus 2.3.2 (c) trivial auf den Erzeugern n_i $(1 \leq i \leq l-1)$ von V. Somit gilt $i_\alpha = -1$. Daraus folgt

$$\widetilde{\Gamma}(x_\alpha(t))^{\tau(\mathbf{w}_0)} = x_{-\alpha}(-t) \text{ für alle } \pm\alpha \in R_F.$$

Der Automorphismus ϕ ergibt sich dann aus der Operation von $\widetilde{F}$ auf dem Torus $\mathbf{T}$ durch

$$\widetilde{\Gamma}(h_\alpha(t)) = h_{-\alpha}(t) \text{ für } \alpha \in R.$$

Daher operiert $\widetilde{\Gamma}$ auf dem Kocharaktergitter Y durch $\widetilde{\phi} = -\operatorname{id}_Y$. □

Der Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F}$ ist für den Übergang zwischen verschiedenen Gruppen sehr gut geeignet.

Lemma 9.1.13. *Seien $1 < l' \leq l$, R' das Wurzelsystem mit dem Fundamentalsystem ${R_F}' := \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l'-1}\}$, $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R' \rangle$, die gemäß Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R' ist, und $\widetilde{\Gamma}' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ der Automorphismus von $\mathbf{G}'$, der wie im Lemma 9.1.12 definiert ist. Dann gilt $\widetilde{\Gamma}' := \widetilde{\Gamma}\rceil_{\mathbf{G}'}$ für den Automorphismus $\widetilde{\Gamma} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ aus 9.1.12.*

Beweis. Beide Automorphismen erfüllen

$$\widetilde{\Gamma}(x_\alpha(t)) = x_{-\alpha}(-t) = \widetilde{\Gamma}'(x_\alpha(t)) \text{ für alle } \pm\alpha \in {R_F}'.$$

Dies zeigt die Aussage für die Elemente $x_\alpha(t)$ $(\pm\alpha \in {R_F}')$, die gemäß Lemma 2.1.10 ganz $\mathbf{G}'$ erzeugen. Daraus folgt die Behauptung. □

Für die verbleibenden regulären Zahlen konstruieren wir mit Hilfe von $\widetilde{F}$ im nächsten Lemma einen d-Sylowtwist.

Lemma 9.1.14. *Seien $2 \neq d \in \mathbb{N}$,*

$$d' := \begin{cases} d & 4 \mid d, \\ 2d & 2 \nmid d, \\ \frac{d}{2} & \textit{sonst}, \end{cases}$$

und $l' := \left\lfloor \frac{l}{d'} \right\rfloor \cdot d'$. Weiter seien R', $\mathbf{G}'$ und $\widetilde{\Gamma}' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ wie in Lemma 9.1.13 und $v\widetilde{\phi}'$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', \widetilde{F}')$ mit $\widetilde{F}' := \Gamma' \circ (F_0\rceil_{\mathbf{G}'})$.

(a) Die Zahl d ist regulär auf $(\mathbf{G}', \widetilde{F}')$.

(b) Das Element $v\widetilde{\phi}$ ist ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ mit $\widetilde{F} := \Gamma' \circ F_0$.

Beweis. Wir berechnen anhand der zugehörigen generischen Gruppen zunächst die Werte von $a_{{}^2\mathsf{A}_{l'-1}}(d)$ und $a_{{}^2\mathsf{A}_{l-1}}(d)$. Anschließend zeigen wir, dass damit die Bedingungen für das Lemma 2.3.16 erfüllt werden und $v\widetilde{\phi}$ ein d-Sylowtwist ist.

Sei $\mathbb{G} := (X, R, Y, R^\vee, W)$ bzw. $\mathbb{G}'$ die generische Gruppe von $(\mathbf{G}, F_0)$ bzw. $(\mathbf{G}', F_0\rceil_{\mathbf{G}'})$. Dann ist $\mathbb{G}^-$ das vollständige Wurzeldatum von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$, da $\widetilde{F}$ gemäß Lemma 9.1.12 auf Y den Automorphismus $-\mathrm{id}_Y$ induziert. Aus Bemerkung 2.2.7 (b) wissen wir

$$a_{{}^2\mathsf{A}_{l-1}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d') \text{ und } a_{{}^2\mathsf{A}_{l-1}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d').$$

Die Spiegelungsgrade von W sind gemäß [Car72, 10.2.5] die Zahlen $\{2, \ldots, l\}$. Daraus ergibt sich mit Lemma 2.2.7 (a) wegen $d' \neq 1$ die Gleichung

$$a_{{}^2\mathsf{A}_{l-1}}(d) = a_{\mathsf{A}_{l-1}}(d') = \left\lfloor \frac{l'}{d'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{l}{d'} \right\rfloor = a_{\mathsf{A}_{l'-1}}(d') = a_{{}^2\mathsf{A}_{l'-1}}(d).$$

Der Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F}'$ bzw. $\widetilde{F}$ induziert auf den zu $\mathbf{G}$ bzw. $\mathbf{G}'$ gehörenden Kocharaktergitter Y' bzw. Y den Automorphismus $\widetilde{\phi}'$ bzw. $\widetilde{\phi}$. Diese erfüllen $\widetilde{\phi}\rceil_{Y'} = \widetilde{\phi}'$.

Damit sind die Voraussetzungen für das Lemma 2.3.16 erfüllt und $v\widetilde{\phi}$ ist ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$. □

Dies liefert uns Sylowtwists für die Fälle, in denen d weder die Bedingungen für Satz 9.1.10 noch für Satz 9.1.11 erfüllt.

Lemma 9.1.15. *Seien $l \geq 3$ und $d \neq 2$ eine reguläre Zahl, die eine der beiden Bedingungen erfüllt:*

- $d\big|(l-1)$ *und* $2\big|(l-1)$,
- $2\big|d$, $d\big|2(l-1)$ *und* $2\nmid(l-1)$.

Weiter seien T eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, F)$ und N der zugehörige d-Sylownormalisator. Dann liegt bei $T \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vor.

Beweis. Wir bestimmen einen Sylowtwist $v\widetilde{\phi}$ und damit eine d-Sylowlevigruppe und einen d-Sylownormalisator von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$. Anschließend beweisen wir anhand der Struktur dieser Gruppen die behauptete maximale Fortsetzbarkeit.

Seien d', l', $\mathbf{G}'$, $\widetilde{\phi}'$ und $\widetilde{F}'$ wie in Lemma 9.1.14 definiert. Für die vorgegebenen Zahlen erhalten wir mittels einfacher Rechnungen $l' = l - 1$. Zudem tritt einer der folgenden zwei Fälle ein:

- $d\big|l'$ und $2\nmid(l'-1)$, oder

- $2\big|d$, $d\big|2l'$ und $2\big|(l'-1)$.

Sei $v\widetilde{\phi}'$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', v\widetilde{F}')$. Dann ist $T' := \mathbf{T}'^{v\widetilde{F}'}$ mit $\mathbf{T}' := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G}' \mid \alpha \in R' \rangle$ gemäß Lemma 1.3.4 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', \widetilde{F}')$ und $N' := \mathbf{N}'^{v\widetilde{F}'}$ mit $\mathbf{N}' := \langle n_\alpha(t) \in \mathbf{G}' \mid \alpha \in R' \rangle$ gemäß Lemma 1.3.5 ihr Sylownormalisator.

Für beide Fälle wissen wir aus den Sätzen 9.1.10 und 9.1.11, dass bei $T' \lhd N'$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt.

Laut Lemma 9.1.14 ist $v\widetilde{\phi}$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$. Für $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ ist daher $T := \mathbf{T}^{v\widetilde{F}}$ gemäß Lemma 1.3.4 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ und $N := \mathbf{N}^{v\widetilde{F}}$ gemäß Lemma 1.3.5 ihr Sylownormalisator.

Wir zeigen nun $N = \langle N', T \rangle$. Dazu beweisen wir $\rho(N') = \rho(N)$. Beide Gruppe stimmen als relative Weylgruppen von T bzw. T' jeweils mit $\mathrm{C}_W(\rho(v)\widetilde{\phi})$ bzw. $\mathrm{C}_{W'}(\rho(v)\widetilde{\phi}')$ überein, wobei W' die Weylgruppe von $\mathbf{G}'$ ist. Genauere Rechnungen in ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$ zeigen, dass $f(\rho(v))$ das Produkt von $\left\lfloor \frac{l}{d'} \right\rfloor$ disjunkten Zykeln der Länge d' ist. Wegen $d' \neq 1$ folgt die Gleichung $\mathrm{C}_W(\rho(v)\widetilde{\phi}) = \mathrm{C}_{W'}(\rho(v)\widetilde{\phi}')$ aus

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)\widetilde{\phi}) = \mathrm{C}_W(\rho(v)) = \mathrm{C}_{W'}(\rho(v)) = \mathrm{C}_{W'}(\rho(v)\widetilde{\phi}'),$$

also gilt $N = \langle N', T \rangle$.

Zusammen mit der maximalen Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd N'$ und Satz 3.1.6 zeigt dies die maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
N' \arrow[dr, dash] & & T \arrow[dl, dash] \\
 & T' &
\end{tikzcd}$$

Gemäß der Konstruktion von $\widetilde{F}$ und Lemma 1.2.4 ist jede d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ in $\mathbf{G}$ zu T konjugiert. Somit folgt aus der maximalen Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ die Behauptung. □

Insgesamt haben wir damit alle Fälle für den Beweis von Satz 9.1.1 behandelt.

Beweis zu Satz 9.1.1. Die regulären Zahl von $W\phi$ wurden am Anfang des Abschnitts aufgezählt. Jede reguläre Zahl erfüllt die Voraussetzungen für das Lemma 9.1.15 oder die Sätze 9.1.11 und 9.1.10. Diese Aussagen zeigen die maximale Fortsetzbarkeit in den jeweiligen Fällen. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir haben nun die maximale Fortsetzbarkeit in $L \lhd N$ bei regulären Zahlen von $W\phi$ gezeigt. Vor allem den Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F}$ aus Lemma 9.1.12 werden wir auch im zweiten Abschnitt dieses Kapitels benutzen. Dort verallgemeinern wir den Satz 9.1.1 wieder auf beliebige Zahlen d.

9.2 Nichtregulärer Fall

Wie im vorangegangenen Abschnitt ist $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zum Wurzelsystem R aus Lemma 4.4.1 (a) vom Typ A_{l-1} über dem Körper $\overline{\mathbb{F}}_q$ für eine Primzahlpotenz q. Darauf operiert $\widetilde{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ aus Lemma 9.1.12. Für diese Gruppe $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ verallgemeinern wir die Aussage von Satz 9.1.1 auf beliebige Zahlen d. In diesem Abschnitt sei d nun eine für $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ nichtreguläre Zahl.

Satz 9.2.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{A}_{l-1,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 2)$, $\widetilde{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ aus Lemma 9.1.12, $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar.*

Wir können mit dem Lemma 9.1.14 Sylowtwists bestimmen und mit diesen d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, v\widetilde{F})$ konstruieren.

Lemma 9.2.2. *Seien $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{G}'$, $\widetilde{F}' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$, l', $\widetilde{\phi}'$ und $v\widetilde{\phi}'$ wie in Lemma 9.1.14 definiert und Y' das Kocharaktergitter von $\mathbf{G}'$. Dann gilt:*

(a) Genau dann erfüllt l' die Ungleichung $l' \leq l-2$, wenn d für $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$ nichtregulär ist.

(b) Für nichtreguläre Zahlen $d \neq 2$ gilt $Y'' \not\perp e_i$ für $Y'' := \ker_{Y'}\left(\Phi_d(\rho(v)\widetilde{\phi}')\right)$ und alle $1 \leq i \leq l'$.

Beweis. Für den Beweis von (a) zeigen einfache Rechnungen, dass bei $l' = l$ und $l' = l-1$ die Zahl d regulär ist und für die in Tabelle 2.1 angegebenen Zahlen l' stets den Wert $l-1$ oder l hat.

Seien R'' das Wurzelsystem zum Fundamentalsystem $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'}\}$, $\mathbf{G}''$ die universelle Chevalleygruppe zu R'' mit dem Frobeniusendomorphismus $\widetilde{F}'' : \mathbf{G}'' \to \mathbf{G}''$ und dem davon auf dem Kocharaktergitter Y'' induzierten Automorphismus $\widetilde{\phi}''$. Somit ist $v\widetilde{\phi}''$ auch ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}'', \widetilde{F}'')$.

Wegen $d \neq 2$ gilt ebenfalls $\left\lfloor \frac{l'+1}{d'} \right\rfloor d' = l'$. Daher ist d gemäß dem Teil (a) für $(\mathbf{G}'', \widetilde{F}'')$ eine reguläre Zahl und die Menge $R \cap Y_d^\perp$ mit $Y_d := Y'' \cap \ker_{R''^\vee \otimes \mathbb{C}}(\Phi_d(-\rho(v)))$ leer, wobei Y'' das Kocharaktergitter zu $\mathbf{G}''$ ist. Daraus folgt

$$e_i - e_{l'+1} \notin Y_d^\perp \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'.$$

Wegen $Y'' \subseteq \langle e_i \,|\, 1 \leq i \leq l' \rangle$ gilt auch

$$e_i \notin Y_d^\perp \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'.$$

□

Wir konstruieren nun eine d-Sylowlevigruppe:

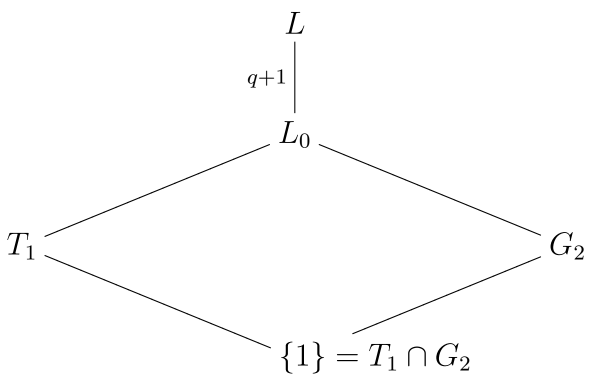
Lemma 9.2.3. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\widetilde{\phi})$ die generische Gruppe von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$, $d \in \mathbb{N}$ eine nichtreguläre Zahl von $(\mathbf{G}, F)$ und $v\widetilde{\phi}$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, \widetilde{F})$, der wie in Lemma 9.1.14 definiert ist. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ in $(\mathbf{G}, v\widetilde{F})$ mit:*

(a) $\mathbb{L} := \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v)\widetilde{\phi})$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{\, e_i - e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i' \}$,

(b) $\mathbf{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$ *und* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,|\, \alpha \in R \rangle$,

(c) $\mathbf{L}_0 \lhd \mathbf{L}$ *mit* $\mathbf{L}_0 := \mathbf{T}_1 \times \mathbf{G}_2$, $\widetilde{R}_1 = \{\, e_i - e_{i'} \mid i, i' \leq l', i \neq i' \}$ *und* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$,

(d) $L_0 \lhd \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF}$ *und* $\left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF} : L_0\right| = q + 1$ *mit* $L_0 := T_1 \times G_2$, $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$ *und* $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$.



Beweis. Wir gehen wie im Beweis zu Lemma 8.2.3 vor: Mit $Y' := \ker(\Phi_d(\rho(v)))$ ist $\mathbb{S} = \left(X/Y', Y', \rho(v)\right)$ laut Lemma 1.3.3 ein generischer d-Sylowtorus von $\mathbb{G}$. Im Weiteren sei $\mathbf{S}$ der dort angegebene Sylowtorus von $\mathbf{G}$, der mit Hilfe von $v\widetilde{\phi}$ berechnet wird.

Wir weisen nun für $\mathbf{S}$ und $\mathbb{S}$ die Behauptungen nach. Dazu bestimmen wir $Y'^\perp \cap R$. Mit Hilfe von Lemma 1.3.4 folgen daraus die Teilaussagen (a) und (b). Im Anschluss berechnen wir $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2$ und beweisen damit (c). Die Teilaussage (d) zeigen wir durch die Betrachtung von $\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$.

Aus dem Lemma 9.2.2 (b) ist

$$e_i \notin Y'^\perp \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'$$

bekannt. Konstruktionsgemäß erfüllt Y' die Gleichungen $Y' \subseteq \langle e_i \,|\, 1 \leq i \leq l' \rangle$ und $\widetilde{R}_1 \cap Y'^\perp = \emptyset$, da d eine reguläre Zahl für $(\mathbf{G}', \widetilde{F}')$ ist. Insgesamt ergibt sich daraus

$$R \cap Y'^\perp = \{\, e_i - e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i' \}\,.$$

Die in Lemma 1.3.4 angegebenen Formeln für $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ und $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ zeigen die Aussagen (a) und (b).

Sei $R_F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ das in Lemma 4.4.1 (a) angegebene Fundamentalsystem von R. Die Menge $R_{F1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l'-1}\}$ bzw. $R_{F2} = \{\alpha_{l'+1}, \ldots, \alpha_l\}$ ist ein Fundamentalsystem von $\widetilde{R}_1$ bzw. $\widetilde{R}_2$. Wegen $R_{F1} \dot\cup R_{F2} \subset R_F$ haben die Tori $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2 := \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$ nach Satz 2.1.6 (h) folgende Strukturen

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \left\langle h_{\alpha_1}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_{l'-1}}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle, \\
\mathbf{T}_2 &= \left\langle h_{\alpha_{l'+1}}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_l}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \text{ und} \\
\mathbf{T} &= \left\langle h_{\alpha_1}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle \times \cdots \times \left\langle h_{\alpha_l}(t) \,\middle|\, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{T}_1 \cap (\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2) = \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2 = 1$.

Die Gruppe $\mathbf{L}_0 = \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$ ist sogar das direkte Produkt der Gruppen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{G}_2$, da wir aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ mit Hilfe der Bemerkung 2.1.7 (a) die Gleichung $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$ erhalten.

Gemäß Satz 2.1.6 gilt $\mathbf{G}_2 \lhd \mathbf{L}$. Für jedes Element $l \in L$ gibt es daher Elemente $t \in \mathbf{T}$ und $g \in \mathbf{G}_2$ mit $l = tg$. Wir können $(tg)^{v\widetilde{F}} = tg$ zu

$$t^{-1} t^{v\widetilde{F}} = (g^{-1} g^{v\widetilde{F}})^{-1} \in \mathbf{T}_2$$

umformen. Nach dem Satz von Lang-Steinberg gibt es im Torus $\mathbf{T}_2$ Elemente $t' \in \mathbf{T}_2$ mit

$$t'^{v\widetilde{F}} t'^{-1} = (t^{v\widetilde{F}} t^{-1})^{-1}.$$

Daraus folgt $tt' \in T := \mathbf{T}^{vF}$ und $t'^{-1} g \in G_2$ und damit

$$L = \mathbf{L}^{v\widetilde{F}} = \langle T, G_2 \rangle = \langle L_0, T \rangle .$$

Aus den Relationen von Satz 2.1.6 ergibt sich $T \leq \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(L_0)$. Diese Gleichung zeigt wegen $L = \langle T, G_2 \rangle$ die Behauptung $L_0 \lhd L$.

Mit Hilfe der Bemerkung 1.2.1 wissen wir auch

$$|T_1| \cdot |T_2| \cdot (q+1) = |T|$$

mit $T_2 := \mathbf{T}_2^{v\widetilde{F}}$. Dies zeigt $|L : L_0| = q + 1$ in (d).

Damit haben wir alle behaupteten Eigenschaften von $\mathbf{L}$ und L bewiesen. □

Für die späteren Beweise ist entscheidend, dass die Gruppe L/L_0 zyklisch ist. Dies zeigen wir im folgenden Lemma.

Lemma 9.2.4. *Sei* $N_1 := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle^{v\widetilde{F}}$. *Die Gruppe* L/L_0 *ist zyklisch von der Ordnung* $q+1$ *und es gilt* $[L, N_1] \leq T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$.

Beweis. Wir gehen wie beim Beweis zu Lemma 8.2.4 vor und zeigen die Behauptung wegen ${}^{L}\!/L_0 \cong {}^{T}\!/\langle T_1, T_2\rangle$, indem wir beweisen, dass die Faktorgruppe ${}^{T}\!/\langle T_1, T_2\rangle$ zyklisch ist.

Seien $\overline{R} := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \leq l, i \neq j\}$ das Wurzelsystem vom Typ C_l und $\overline{\mathbf{G}}$ die universelle Chevalleygruppe zu $\overline{R}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$. Wir können gemäß Lemma 2.1.9 annehmen, dass $\mathbf{G} = \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R\rangle$ gilt. Weiter sei $F : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ ein Frobeniusendomorphismus mit $F\rceil_{\mathbf{G}} = \widetilde{F}$. Dieser existiert gemäß den Aussagen des vorangegangenen Abschnitts.

Der Torus $\mathbf{T}$ liegt in

$$\overline{\mathbf{T}} := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R} \right\rangle.$$

Auf $\overline{T} := \overline{\mathbf{T}}^{vF}$ existiert gemäß 9.1.9 ein Charakter $\delta' \in \operatorname{Irr}\left(\overline{T}\right)$ der Ordnung $q+1$ mit $\ker(\delta') = T$.

Analog können wir auch $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$ in $\overline{\mathbf{T}}$ einbetten

$$\overline{\mathbf{T}}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R}_1 \right\rangle \text{ mit } \overline{R}_1 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \leq l', i \neq j\}$$

und

$$\overline{\mathbf{T}}_2 := \left\langle h_\alpha(t) \in \overline{\mathbf{G}} \,\middle|\, \alpha \in \overline{R}_2 \right\rangle \text{ mit } \overline{R}_2 := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \geq l'+1, i \neq j\}.$$

Schränken wir die Charaktere auf $\overline{T}_1 := \overline{\mathbf{T}}_1 \cap \overline{T}$ und $\overline{T}_2 := \overline{\mathbf{T}}_2 \cap \overline{T}$ ein, so erhalten wir mit $\delta_1 := \delta\rceil_{\overline{T}_1}$ und $\delta_2 := \delta\rceil_{\overline{T}_2}$ wegen $\left|\overline{T}_1 : T_1\right| = q+1$ und $\left|\overline{T}_2 : T_2\right| = q+1$ Charaktere der Ordnung $q+1$. Seien $h' \in \overline{T}_1$ ein Element, für das $\delta_1(h')$ eine primitive $(q+1)$-te Einheitswurzel ist, und $h'' \in \overline{T}_2$ mit $\delta_2(h'') = \delta(h')^{-1}$. Diese existieren wegen der Ordnung der Charaktere.

Das Element $h := h'h''$ liegt in T und erfüllt definitionsgemäß

$$\langle h, T_1, T_2\rangle = T.$$

Somit ist ${}^{T}\!/\langle T_1, T_2\rangle \cong {}^{L}\!/L_0$ zyklisch.

Jedes Element $n \in N_1$ operiert gemäß Bemerkung 2.1.7 trivial auf h'', was

$$[h, n] = [h', n] \in \overline{T}_1$$

zur Folge hat. Zudem ist $[h, n] \in T$ bekannt. Dies zeigt $[h, N_1] \leq T_1$ und beweist die Gleichungen $[N_1, L] \leq T_1$ und $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$. □

Wir bestimmen nun den Sylownormalisator von L. Dazu benötigen wir die relative Weylgruppe von $\mathbf{L}$.

Lemma 9.2.5. *Die relative Weylgruppe von $\mathbb{L}$ aus Lemma 9.2.3 ist*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left(\mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}\left(\rho(v)\widetilde{\phi}\right) \times W_{\widetilde{R}_2}\right)/W_{\widetilde{R}_2}.$$

Beweis. Rechnungen in ${}^{(\mathsf{A})}\mathrm{S}_l$, bei denen die Zykelstruktur von $\rho(v)\widetilde{\phi}$ berücksichtigt wird, zeigen diese Behauptung. □

Damit bestimmen wir den Sylownormalisator von L.

Lemma 9.2.6. *(a) Die Gruppe $N := \langle N_1, L\rangle$ mit N_1 aus 9.2.4 ist der zu L gehörende d-Sylownormalisator.*

(b) $[N_1, G_2] = 1$.

Beweis. Das Vorgehen aus dem Beweis von Lemma 8.2.6 zeigt die Behauptung:
Die Gleichung

$$\rho(N_1) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v))$$

ergibt sich aus [Car85, 3.3.6]. Die in Lemma 9.2.5 berechnete relative Weylgruppe von $\mathbf{L}$ erfüllt

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left\langle \rho(N_1), W_{\widetilde{R}_2} \right\rangle / W_{\widetilde{R}_2}.$$

Somit ist $\langle N_1, L\rangle$ laut Lemma 1.3.5 der Sylownormalisator von L.
Die Gleichung $[N_1, G_2] = 1$ folgt aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ mit Hilfe von Bemerkung 2.1.7 (b). □

Aufgrund der Struktur von L und N können wir Satz 3.2.5 anwenden und damit den Satz 9.2.1 beweisen.

Beweis von Satz 9.2.1. Wir gehen wie im Beweis zu Satz 8.2.1 vor. Wegen Satz 9.1.1 können wir annehmen, dass d für W nicht regulär ist.

Nach den Ausführungen in den Lemmata ist die Gruppe L aus Lemma 9.2.3 eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, v\widetilde{F})$ und N aus Lemma 9.2.6 ihr d-Sylownormalisator.

Um nun die maximale Fortsetzbarkeit für $L \lhd N$ zu zeigen, müssen wir die Voraussetzungen für Satz 3.2.5 nachweisen: Offensichtlich ist T_1 abelsch. Für $L_0 = \langle T_1, G_2\rangle$ ist aus Lemma 9.2.4 bekannt, dass L/L_0 zyklisch ist. Dies sind die Voraussetzungen 3.2.5 (i) und 3.2.5 (ii).

Mit $N_C := N_1$ werden auch die Gleichungen $N = \langle N_C, L\rangle$, $[N_C, L] \leq T_1$, $[N_C, G_2] = 1$ und $L \cap N_C = T_1$ aus 3.2.5 (iii) erfüllt, was aus den Definitionen von N und T_1 sowie der Gleichung $[N_1, G_2] = 1$ aus Lemma 8.2.6 (b) folgt.

In Satz 3.2.5 (iv) wurde die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N_1$ vorausgesetzt. Die Gruppe $T_1 = \mathbf{T}_1^{vF}$ ist gemäß Lemma 1.3.4 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', vF)$ und $N_1 = \mathbf{N}_1^{vF}$ laut Lemma 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator. In Lemma 8.2.2 wurde bewiesen, dass d für $(\mathbf{G}', vF)$ eine reguläre Zahl ist. Daher sind die irreduziblen Charaktere von

T_1 gemäß Lemma 8.1.1 auf ihre Trägheitsgruppe in N_1 fortsetzbar.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
N_1 \arrow[dd, dash] & L \arrow[d, dash] & \\
& L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt mit Hilfe von Satz 3.2.5 die Behauptung. □

Wir haben also auch für diese endliche reduktive Gruppe bewiesen, dass die irreduziblen Charaktere der d-Sylowlevigruppen auf ihre Trägheitsgruppen in den zugehörigen d-Sylownormalisatoren fortsetzbar sind.

Kapitel 10

Gruppen vom Typ B_l

Wir beweisen in diesem Kapitel für die reduktiven Gruppen $(\mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$, dass jeder irreduzible Charakter einer d-Sylowlevigruppe sich maximal im zugehörigen d-Sylownormalisator fortsetzt. Dabei ist $F : \mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q) \to \mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ der Standard-Frobeniusendomorphismus. Wie in den vorangegangenen Kapiteln betrachten wir die Aussage zunächst für reguläre Zahlen d und folgern daraus anschließend anhand der Struktur der Sylowlevigruppen und Sylownormalisatoren die maximale Fortsetzbarkeit im nichtregulären Fall.

Bei allen regulären Zahlen wenden wir wieder Satz 6.3.15 an und wählen dafür einen d-Sylowtwist v, mehrere Wurzelsysteme und Gruppen. Im Gegensatz zu den beiden vorangegangenen Kapiteln ist $\overline{R} = R$ möglich. Jedoch gilt im Allgemeinen $Z \neq 1$, wodurch $\widehat{N}$ und $\widehat{S}$ wieder Elemente aus $\mathbf{G} \setminus \mathbf{G}^{vF}$ enthalten. Um dennoch mit 6.3.15 eine Aussage über die Sylowlevigruppe und den Sylownormalisatoren von $(\mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q), F)$ zu bekommen, benutzen wir für δ einen nichttrivialen Charakter beim Beweis der maximalen Fortsetzbarkeit. Mit Hilfe eines leicht abgeänderten Charakters erhalten wir eine Variante dieses Resultats in Satz 10.1.10, den wir später benötigen.

Im nichtregulären Fall beginnen wir wieder mit der Wahl eines d-Sylowtwists, mit dem wir danach eine Sylowlevigruppe und einen Sylownormalisator konstruieren. Die Struktur des d-Sylownormalisators genügt nicht den Voraussetzungen von Satz 3.2.5, da die ähnlich wie in Lemma 8.2.6 definierte Gruppe N_1 aus Lemma 10.2.5 nichttrivial auf dem halbeinfachen Anteil der d-Sylowlevigruppe operiert. Die Struktur der Gruppen genügt den Voraussetzungen von Satz 3.2.6 und wir können mit Hilfe der zwei bewiesenen Fortsetzbarkeitsaussagen aus den Sätezn 10.1.1 und 10.1.10 die maximale Fortsetzbarkeit im nichtregulären Fall folgern.

10.1 Regulärer Fall

Wir beschränken uns zunächst darauf, die genannte maximale Fortsetzbarkeit für den Fall zu zeigen, dass d regulär ist.

Satz 10.1.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus,*

d eine reguläre Zahl für $(\mathbf{G}, F)$, T eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann sind alle Charaktere $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(T)$ auf $\mathrm{I}_N(\lambda)$ fortsetzbar.

Wir wählen nun die für Satz 6.3.15 wichtigen Gruppen, Wurzelsysteme und Frobeniusendomorphismen.

10.1.2. In diesem Abschnitt benutzen wir folgende Objekte:

- Sei R das Wurzelsystem vom Typ B_l mit Fundamentalsystem $R_F = \{\,\alpha_i \mid 1 \leq i < l\}$ aus Lemma 4.4.1 (b).
- Weiter seien $\mathbf{G}$ die universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$ für eine Primzahlpotenz q, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus und W die Weylgruppe von $\mathbf{G}$.
- Die Zahl d sei regulär für W.
- Wir benutzen im weiteren $\overline{R} := R$, $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$ und $\overline{F} = F$.

Damit ist eine wie in 6.2.1 beschriebene Situation gegeben. Aus 4.4.1 (b) ist eine zu W isomorphe Permutationsgruppe bekannt. Mit Hilfe dieser Gruppe bestimmen wir einen d-Sylowtwist, der auch 6.2.**B**i erfüllt.

Lemma 10.1.3. *Sei V die erweiterte Weylgruppe von $\mathbf{G}$ und $n_1, \dots, n_l$ die Erzeuger von V aus 2.3.1.*

(a) Für $v_0 := n_1 \cdots n_l \in V$ und alle $j' \big| 2l$ ist $v_0^{j'}$ ein $\frac{2l}{j'}$-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

(b) $v_0^l \in \mathrm{Z}(V)$.

(c) Mit $j' := \frac{2l}{d}$ und $v := v_0^{j'}$ seien j und $\mathcal{B}^{(r)}$ $(1 \leq r \leq r)$ wie in 6.2.2 definiert. Dann gilt

$$j = \begin{cases} \frac{j'}{2} & 2 \nmid d, \\ j' & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und die Menge $\{1, \dots, j\}$ bildet eine Transversale der Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$.

(d) Für $\sigma := f(\rho(v))$ und alle $1 \leq r \leq j$ sei

$$\sigma_{c_r} := \begin{cases} \big(r, \sigma(r), \dots, \sigma^{d-1}(r)\big)\,\big(-r, -\sigma(r), \dots, -\sigma^{d-1}(r)\big), & 2 \nmid d, \\ \big(r, \sigma(r), \dots, \sigma^{d-1}(r)\big), & 2 \big| d. \end{cases}$$

Weiter sei

$$\sigma_{(r,r+1)} := \prod_{\substack{i=1 \\ i\equiv r \bmod j}}^{l} (i,i+1)(-i,-i-1) \textit{ für alle } 1 \leq r < j.$$

Mit $W_C := f^{-1}(\langle \sigma_{c_r} \mid 1 \leq r \leq j\rangle)$ *und* $W_S := f^{-1}\left(\left\langle \sigma_{(r,r+1)} \,\middle|\, 1 \leq r < j\right\rangle\right)$ *gilt*

$$\mathrm{C}_W(\rho(v)) = W_C \rtimes W_S.$$

*(e) Die Bedingung 6.2.***B***i wird vom Sylowtwist* v *mit*

$$w_{(r,r+1)} := f^{-1}(\sigma_{(r,r+1)}) \textit{ für alle } 1 \leq r \leq j-1$$

erfüllt.

Beweis. Seien $\mathbf{B}$ die Zopfgruppe zu R und W die Coxetergruppe von R. Wir benutzen die wie üblich definierten Abbildungen $\rho : \mathbf{N} \to W$ und $\tau : \mathbf{B} \to V$ aus 2.3.2.

Das Element

$$\mathbf{w} := \mathrm{s}_1 \cdots \mathrm{s}_l \in \mathbf{B}$$

ist eine gute $2l$-te Wurzel von $\mathbf{w}_0^2 := \mathrm{r}(w_0)^2$, wie im Beweis zu Lemma 7.1.3 gezeigt wurde. Die dort zugrunde liegende Zopfgruppe zu $R^\vee$ stimmt mit der Zopfgruppe zu R überein. Also ist $v_0 = \tau(\mathbf{w})$ gemäß 2.3.12 auch ein Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$. Dies ist die Aussage in (a).

Im Beweis zu Lemma 7.1.3 (b) wurde zudem $\mathbf{w}^l = \mathbf{w}_0 \in \mathrm{Z}(\mathbf{B})$ gezeigt. Daraus folgt durch Anwendung von τ auch $v_0^l \in \mathrm{Z}(V)$, also der Teil (b).

Die übrigen Behauptungen sind Eigenschaften von $f(\rho(v))$. Mittels ${}^{(\mathsf{C})}\mathrm{S}_l = {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ stimmt $f(\rho(v))$ mit dem in Lemma 7.1.3 betrachteten Element σ überein. Somit beweist Lemma 7.1.3 auch die Teile (c), (d) und (e) der Behauptung. □

Die gewünschten Eigenschaften der Tori wurden in Bedingung 6.2.**B**ii formuliert. Wir weisen diese mit Hilfe von Lemma 6.4.4 nach.

Lemma 10.1.4. *Die Bedingung 6.2.***B***ii wird mit* $Z = \langle h_{e_1}(-1)\rangle$ *erfüllt.*

Beweis. Wir zeigen im Folgenden, dass die Voraussetzungen 6.4.4 aufgrund der Struktur der Wurzelsysteme erfüllt werden.

Die Wurzelsysteme $\overline{R}_r^\vee$ $(1 \leq r \leq j)$ sind hier vom Typ $\mathsf{C}_{\frac{l}{j}}$ und bestehen aus folgenden Wurzeln:

$$\begin{aligned} \overline{R}_r^\vee &= \left\{2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \,\middle|\, i,i' \in \mathcal{B}^{(r)}, i \neq i'\right\} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1, \text{ und} \\ \overline{R}^\vee &= \left\{2e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid 1 \leq i,i' \leq l\right\}. \end{aligned}$$

Die Elemente von $\overline{R}^\vee$ erfüllen

$$2\alpha \in \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee \;\middle|\; 1 \leq r \leq j \right\rangle \text{ für alle } \alpha \in \overline{R}^\vee.$$

Damit ist die erste Voraussetzung für 6.4.4 erfüllt.

Für jede ungerade Primzahlpotenz q, jedes $1 \leq i \leq j$ und $j \geq 2$ wird die Gruppe

$$\left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_{r'}^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \;\middle|\; 1 \leq r' \leq j, r' \neq r \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$$

von $(q-1)e_1 + (q-1)\overline{R}^\vee\mathbb{Z}$ erzeugt. Bei $2\big|q$ ist diese Gruppe trivial. In beiden Fällen ist

$$\left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \;\middle|\; 1 \leq r' \leq j\,,\ r' \neq r \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$$

unter der Operation von W-invariant. Somit wird die Bedingung 6.2.**B**ii erfüllt.

Wir benutzen zur Berechnung von Z den Isomorphismus

$$\omega : \mathbf{T}^F \to \mathbb{Z}\overline{R}^\vee / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$$

aus dem Beweis von Lemma 6.4.4. Dieser bildet Z^F auf die Gruppe

$$\left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_r^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \right\rangle \cap \left\langle \mathbb{Z}\overline{R}_{r'}^\vee, (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee \;\middle|\; 1 \leq r' \leq j\,,\, r' \neq r \right\rangle / (q-1)\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$$

ab. Daraus folgt $Z = \langle h_{e_1}(-1) \rangle$.

Aus der Relation 2.1.6 (d) folgt $Z \leq \mathrm{Z}(\mathbf{G})$. Also ist Z auch für $j = 1$ eine zentrale Gruppe. □

Für die weiteren Überlegungen berechnen wir noch $\mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'})$ für $r \neq r'$.

Lemma 10.1.5. *Seien $1 \leq r, r' \leq j$ mit $r \neq r'$ und ${}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$ die Gruppe aus Lemma 4.4.1 (d). Dann gilt*

$$\mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'}) = \begin{cases} \mathbf{N}_r & 2\big|q, \\ \left\{ x \in \mathbf{N}_r \;\middle|\; f(\rho(x)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l \right\} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren zunächst ein Wurzelsystem $R' \leq R_r$ vom Typ $\mathsf{D}_{\frac{l}{j}}$ und assoziieren dazu eine Untergruppe von $\mathbf{N}_r$. Anschließend zeigen wir, dass bei $2 \nmid q$ diese Gruppe mit $\mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'})$ übereinstimmt.

Sei R' das Unterwurzelsystem von $\overline{R}_r$, das aus den langen Wurzeln von $\overline{R}$ besteht. Zu R' definieren wir mit $\mathbf{N}'_r := \langle \mathbf{S}_r, n_\alpha(t) \,|\, \alpha \in R' \rangle \lhd \mathbf{N}_r$ einen Normalteiler von $\mathbf{N}$ vom Index 2. Für diese gilt

$$\mathbf{N}'_r = \left\{ x \in \mathbf{N}_r \;\middle|\; \rho(x) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l \right\}.$$

Die Wurzelsysteme erfüllen $R' \perp \overline{R}_{r'}$ und

$$\alpha + \beta \notin \overline{R} \text{ für alle } \alpha \in R', \beta \in \overline{R}_{r'}.$$

Mit Hilfe von Bemerkung 2.1.7 (b) folgt daraus $\mathbf{N}'_r \leq \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'})$ für die eben definierte Gruppe N'_r. Für jedes Element $x \in \mathbf{N}_r$ mit $f(\rho(x)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$ gilt auch $x \in \mathbf{N}'_r$ und damit $x \in \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'})$.

Bei $2\big| q$ folgt $[\mathbf{N}_r, \mathbf{N}_{r'}] = 1$ aus $\overline{R}_r \perp \overline{R}_{r'}$ mit Hilfe von Lemma 2.1.7. Für $i \in \mathcal{B}^{(r)}$, $i' \in \mathcal{B}^{r'}$ und $2 \nmid q$ gilt

$$n_{e_i}(1) \notin \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'})$$

wegen $e_i + e_{i'} \in R$ und der sich daraus gemäß 2.1.7 (c) ergebenden Relation

$$n_{e_{i'}}(1)^{n_{e_i}(1)} = n_{e_{i'}}(-1).$$

Dies zeigt $\mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r'}) = \mathbf{N}'_r$ für $2 \nmid q$. □

Um tolle Elemente in dieser Situation zu bestimmen, können wir wegen $Z \neq 1$ das Lemma 6.4.2 nicht anwenden. Somit müssen wir einige Eigenschaften toller Elemente explizit nachweisen.

Lemma 10.1.6. *Seien $l_r := \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r)}} h_{2e_i}(\zeta)$ $(1 \leq r \leq j)$, wobei ζ eine* $\mathrm{ggT}(4, (q-1)^2)$*-te Einheitswurzel ist. Die Elemente*

$$p_r := \prod_{i=0}^{\frac{l}{j}-1} n_{\alpha_{r+1}}(1)^{v^i} \text{ für } 1 \leq r \leq j-1$$

sind tolle Elemente mit angegebenen l_r.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Voraussetzungen für das Lemma 6.4.1 erfüllt sind. Dadurch erfüllen die Elemente schon einige der geforderten Eigenschaften. Anschließend zeigen wir noch die verbleibenden Bedingungen.

Gemäß 10.1.3 ist $\{1, \ldots, j\}$ eine Transversale der Bahnen von $\rho(v)$ auf $\{1, \ldots, l\}$. Die in Lemma 6.4.1 definierten Wurzeln $\beta_r = e_{r+1} - e_r$ $(1 \leq r \leq j-1)$ erfüllen $\beta_r \in R$. Zudem erfüllt der d-Sylowtwist gemäß 10.1.3 (b) auch $v^{\frac{l}{j}} \in \left\{v_0^l, v_0^{2l}\right\} \subset \mathrm{Z}(V)$. Für die Elemente p_r und l_r $(1 \leq r \leq j-1)$ gilt

$$p_r^2 = l_r l_{r+1}^{-1} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1,$$

wie wir leicht anhand der Relation 2.1.6 (g) nachrechnen können.

Da zudem auch $\rho(p_r) = w_{(r,r+1)}$ für alle $1 \leq r \leq j-1$ gilt, können wir Lemma 6.4.1 anwenden. Dieses zeigt die Eigenschaften 6.2.5 (a), (c) und (d).

Wir zeigen nun 6.2.5 (b). Dazu müssen wir

$$l_r^{p_r} = l_{r+1} \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1$$

beweisen. Dies folgt aus den Umformungen

$$l_r^{p_r} = \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r)}} h_{2e_i}(\zeta)^{p_r} = \prod_{i \in \rho(p_r)(\mathcal{B}^{(r)})} h_{2e_i}(\zeta) = \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r+1)}} h_{2e_i}(\zeta) = l_{r+1},$$

die aufgrund der Relationen aus 2.1.6 (c) möglich sind.

Für die verbleibenden Eigenschaften müssen wir

$$xx^{p_r} = x^{p_r^{-1}} x \text{ für alle } 1 \leq r \leq j-1 \text{ und } x \in \widehat{N}_r$$

nachrechnen. Wir untersuchen diese Gleichung für $x \notin \mathrm{C}_{\widehat{N}_r}(\widehat{N}_{r+1})$ und $x \in \mathrm{C}_{\widehat{N}_r}(\widehat{N}_{r+1})$ getrennt.

Für $x \notin \mathrm{C}_{\widehat{N}_r}(\widehat{N}_{r+1})$ gilt gemäß der Bemerkung 2.1.7 (b) und Lemma 10.1.5 die Gleichung

$$xx^{p_r} = x^{p_r} h_{2e_1}(-1)x.$$

Zudem haben die Permutationen $f(\rho(x))$ und $f(\rho(x^{p_r}))$ als Elemente von ${}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l \setminus {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$ laut Lemma 10.1.5 eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln. Zusammen mit der Relation 2.1.6 (c) gilt daher

$$l_{r+1}^{x^{p_r}} = h_{2e_1}(-1) \prod_{i \in \mathcal{B}^{(r+1)}} h_{2e_i}(\zeta)$$

und damit $[x^{p_r}, p_r^2] = h_{2e_1}(-1)$. Wir verwenden dies für folgende Umformungen:

$$xx^{p_r} = x^{p_r} h_{2e_1}(-1)x = x^{p_r}[x^{p_r}, p_r^2]x = x^{p_r^3}x = x^{p_r^{-1}}x.$$

Für $x \in \mathrm{C}_{\widehat{N}_r}(\widehat{N}_{r+1})$ zeigen analoge Überlegungen $[x^{p_r}, p_r^2] = 1$, woraus

$$xx^{p_r} = x^{p_r^{-1}} x \text{ für alle } 2 \leq r \leq j \text{ und } x \in \mathrm{C}_{\widehat{N}_r}(\widehat{N}_{r+1})$$

folgt. Also besitzen die eben definierten Elemente p_r alle nötigen Eigenschaften und sind daher tolle Elemente. □

Wir prüfen nun die letzte verbleibende Bedingung nach und benutzen dabei vor allem das Lemma 10.1.5.

Lemma 10.1.7. *Die Bedingung 6.2.***B***iv wird erfüllt.*

Beweis. Wir müssen die Aussage

$$[\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda), \widehat{N}_{r'}] \leq \ker(\lambda) \cap Z \text{ für alle } r \neq r' \text{ und } \lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_r\right)$$

zeigen, also bei $2\big|q$ die Gleichung

$$[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1 \text{ für alle } r \neq r'.$$

Bei $2\nmid q$ unterscheiden wir die Fälle $Z \leq \ker(\lambda)$ und $\ker(\lambda) \cap Z = 1$.

Für $2\big|q$ ergibt sich $[\mathbf{N}_r, \mathbf{N}_{r'}] = 1$ $(r \neq r')$ aus dem Lemma 10.1.5. Wegen $\widehat{N}_r \leq \mathbf{N}_r$ und $\widehat{N}_{r'} \leq \mathbf{N}_{r'}$ folgt daraus $[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] = 1$.

Bei $2\nmid q$ überprüfen wir die Aussage zunächst für alle Charaktere λ mit $Z \leq \ker(\lambda)$ und müssen dafür $[\widehat{N}_r, \widehat{N}_{r'}] \leq Z$ beweisen. Gemäß 6.2.3 (c) gelten $[\mathbf{N}_r, \mathbf{N}_{r'}] \leq (\mathbf{N}_r \cap \mathbf{N}_{r'}) \leq Z$. Dies beweist wegen $\widehat{N}_r \leq \mathbf{N}_r$ und $\widehat{N}_{r'} \leq \mathbf{N}_{r'}$ die Eigenschaft des Kommutators.

Für Charaktere $\lambda \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{S}_r\right)$ mit $\lambda(h_{e_1}(-1)) = -1$ zeigen wir zunächst $\mathrm{I}_{\mathbf{N}_r}(\lambda) \leq \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r+1})$. Für das Element $l_r \in \widehat{S}_r$ und $x \in \mathbf{N}_r \setminus \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r+1})$ gilt gemäß den Ausführungen in Lemma 10.1.5 auch

$$l_r^x = h_{e_1}(-1) l_r$$

und damit $\lambda(l_r) \neq \lambda(l_r^x)$. Dies hat $\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda) \leq \mathrm{C}_{\mathbf{N}_r}(\mathbf{N}_{r+1})$ und

$$[\mathrm{I}_{\widehat{N}_r}(\lambda), \widehat{N}_{r'}] = 1$$

zur Folge.

Somit gilt stets die Bedingung 6.2.**B**iv. □

Wir benötigen noch einen geeigneten linearen Charakter auf $\widehat{N}$.

Lemma 10.1.8. *Durch*

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \mathcal{L}(n) = n^{vF} n^{-1} = 1, \\ -1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \widehat{N}$$

wird ein linearer Charakter $\delta \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ *mit allen in 6.2.6 beschriebenen Eigenschaften und* $\ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF}$ *definiert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass δ ein linearer Charakter mit $\ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF}$ ist. Anschließend weisen wir die einzelnen in 6.2.6 geforderten Aussagen nach.

Wegen $Z \leq \mathrm{Z}(\mathbf{N})$ ist $\mathcal{L}$ auf $\widehat{N}$ multiplikativ. Daraus folgt, dass δ ein linearer Charakter ist. Aus der Definition folgt auch sofort $\ker(\delta) = \mathbf{N}^{vF}$.

Die drei verschiedenen in 6.2.6 beschriebenen Eigenschaften gelten wegen $\delta(1) = 1$, $p_r \in \mathbf{N}_{r,r'}^{vF}$ und Lemma 6.2.4 (a) ebenfalls. □

Wir haben nun die Voraussetzungen nachgeprüft und können den Satz 6.3.15 anwenden.

Beweis von Satz 10.1.1. Wir gehen wie beim Beweis von 7.1.1 vor.

Es genügt für den Beweis gemäß den Lemmata 1.2.4, 1.3.4 und 1.3.5 die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathbf{T}^{vF} \lhd \mathbf{N}^{vF}$ zu zeigen.

In den bisherigen Ausführungen dieses Kapitels haben wir gezeigt, dass die verschiedenen Bedingungen und Voraussetzungen für den Satz 6.3.15 erfüllt werden. Wir benutzen dabei den Charakter δ aus Lemma 10.1.8.

Der Satz 6.3.15 zeigt, dass bei $T \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt. Die dort definierten Gruppen T und N erfüllen sowohl $N = \ker\delta = \mathbf{N}^{vF}$ als auch $T = \ker(\delta\rceil_{\widehat{S}}) = \mathbf{T}^{vF}$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Für den nichtregulären Fall benötigen wir eine Variante dieser Aussage. Dazu nehmen wir eine leichte Veränderung an δ vor und ersetzen den Charakter δ durch den neuen Charakter δ_1.

Lemma 10.1.9. *Seien* $2 \nmid q$,

$$N_C := \left\{ x \in \widehat{N} \;\middle|\; \mathcal{L}(x) = 1 \textit{ und } f(\rho(n)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l \right\}$$

und $\widetilde{N} := \langle N_C, ch\rangle$ *für Elemente* $c \in \mathbf{N}^{vF} \setminus N_C$ *und* $h \in \widehat{S} \setminus T$.

Durch

$$\delta_1(n) := \begin{cases} 1 & \textit{für } \mathcal{L}(n) = 1 \textit{ und } f(\rho(n)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l, \\ 1 & \textit{für } \mathcal{L}(n) = h_{e_1}(-1) \textit{ und } f(\rho(n)) \notin {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l, \\ -1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

für alle $n \in \widehat{N}$ *wird ein linearer Charakter* $\delta_1 \in \operatorname{Irr}\left(\widehat{N}\right)$ *mit allen in 6.2.6 beschriebenen Eigenschaften und* $\ker(\delta_1) = \widetilde{N}$ *definiert.*

Beweis. Wie beim Beweis zu 10.1.8 zeigen einfache Rechnungen, dass δ_1 ein linearer Charakter mit $\ker(\delta_1) = \widetilde{N}$ ist.

Die in 6.2.6 geforderten Aussagen werden erfüllt. Die Eigenschaft 6.2.6 (a) ist klar. Für 6.2.6 (b) ist

$$\widehat{N}_r = \left\langle \ker(\delta_1) \cap \widehat{N}_r, \widehat{S}_r \right\rangle \text{ für alle } 1 \le r \le j$$

zu zeigen. Die analoge Eigenschaft wurde bereits für δ bewiesen. Daher gibt es für jedes Element $x \in \widehat{N}_r$ Elemente $n \in \ker(\delta) \cap \widehat{N}_r$ und $t \in \widehat{S}_r$ mit $x = nt$.

Gilt $f(\rho(x)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$, so auch $\delta_1(n) = 1$. Ansonsten erhalten wir $\delta_1(nh) = 1$ und $x = nh(h^{-1}t) \in \left\langle \ker(\delta_1) \cap \widehat{N}_r, \widehat{S}_r \right\rangle$. Dies beweist 6.2.6 (b), also

$$\widehat{N}_r = \left\langle \ker(\delta_1) \cap \widehat{N}_r, \widehat{S}_r \right\rangle \text{ für alle } 1 \leq r \leq j.$$

Aus $p_r \in \mathbf{N}_{r,r'}^{vF}$ und $f(\rho(p_r)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$ folgt $\delta_1(p_r) = 1$ für alle $1 \leq r \leq j$. Dies entspricht der Bedingung 6.2.6 (c). □

Auch auf diese Situation können wir den Satz 6.3.15 anwenden und erhalten dadurch:

Satz 10.1.10. *Jeder Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\left(\mathbf{T}^{vF}\right)$ ist in $\widetilde{N}$ aus Lemma 10.1.9 maximal fortsetzbar.*

Beweis. Analog zu dem Beweis für den Satz 10.1.1 folgt dies aus der Anwendung von Satz 6.3.15, dessen Voraussetzungen auch mit dem Charakter δ_1 statt δ erfüllt sind.

Mit $\ker(\delta_1) \cap \widehat{S} = \mathbf{T}^{vF}$ und $\ker(\delta_1) = \widetilde{N}$ folgt die Aussage. □

Dieses Resultat benötigen wir, um den Satz 10.1.1 auf alle Zahlen als Werte von d zu verallgemeinern.

10.2 Nichtregulärer Fall

Wie eben seien $\mathbf{G} = \mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ für eine Primzahlpotenz q mit Hilfe des in 4.4.1 (b) angegebenen Wurzelsystems R und des dort angegebenen Fundamentalsystems R_F definiert und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die irreduziblen Charaktere einer d-Sylowlevigruppe L von $(\mathbf{G}, F)$ in dem zugehörigen d-Sylownormalisator N für jede Zahl $d \in \mathbb{N}$ maximal fortsetzbar sind.

Wir beginnen mit der Wahl des Sylowtwists.

Lemma 10.2.1. *Seien $d \in \mathbb{N}$,*

$$l' := \begin{cases} \left\lfloor \frac{2l}{d} \right\rfloor \cdot d & \text{für } 2 \,\middle|\, d, \\ \left\lfloor \frac{l}{d} \right\rfloor \cdot d & \text{für } 2 \nmid d, \end{cases}$$

und R' das Wurzelsystem zu ${R_F}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l'}\} \subseteq R_F$. Weiter sei $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R' \rangle \leq \mathbf{G}$, also gemäß Lemma 2.1.9 ein universelle Chevalleygruppe zu R.

(a) Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ ist regulär für die Weylgruppe W' von $\mathbf{G}'$.

(b) Jeder d-Sylowtwist $v \in \mathbf{G}'$ der reduktiven Gruppe $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Wir gehen wie beim Lemma 7.2.2 vor und beweisen zunächst (a) und dann mit Hilfe von Lemma 2.3.16 die Aussage (b).

Gemäß der Tabelle 2.1 und der Definition von l' ist d für W' eine reguläre Zahl, da R' ein Wurzelsystem vom Typ $\mathsf{B}_{l'}$ ist.

Aufgrund der Definition von R' mit Hilfe von ${R_F}' \subseteq R_F$ ist $\mathbf{G}'$ gemäß 2.1.9 die universelle Chevalleygruppe zu R'. Gemäß der Bemerkung 2.2.7 und den in [Car72, 10.2.5] angegebenen Spiegelungsgraden von W' und W gilt ebenso

$$a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) = a_{\mathsf{B}_l}(d).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.3.16 folgt daraus die Behauptung. $\square$

Mit diesem Sylowtwist konstruieren wir in $(\mathbf{G}, vF)$ eine Sylowlevigruppe und analysieren ihre Struktur.

Lemma 10.2.2. *Seien $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W)$ die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$, d eine nichtreguläre Zahl von W. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ in $(\mathbf{G}, vF)$ mit:*

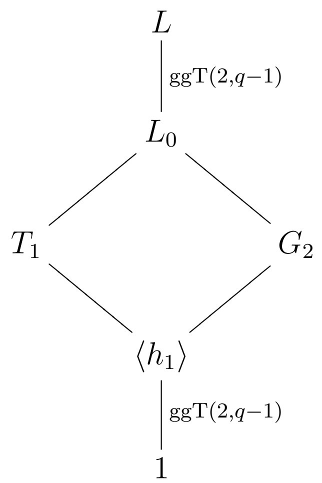
(a) $\mathbb{L} := C_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\rho(v))$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i'\}$,

(b) $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$ *und* $\mathbf{T} := \langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \mid \alpha \in R \rangle$,

(c) $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ *mit* $Z = \langle h_{e_1}(-1) \rangle$, $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$ *und*

$$\widetilde{R}_1 = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' \leq l', i \neq i'\},$$

(d) $L_0 \lhd L$ *und* $|L : L_0| = \operatorname{ggT}(q-1, 2)$ *mit* $L := \mathbf{L}^{vF}$, $L_0 := T_1 \circ_Z G_2$, $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$ *und* $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$.



Beweis. Wir berechnen nacheinander Sylowtori $\mathbb{S}$ und $\mathbf{S}$, die Wurzeln von $C_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ und die Gruppen $\mathbb{L} := C_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ und $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$. Anschließend bestimmen wir $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_1$ und die Struktur von $\mathbf{L}$.

In $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$ bestimmen wir die Wurzelmenge $\widetilde{R}_2 := R \cap Y'^{\perp}$ mit $Y' := \ker_{\overline{Y}}(\Phi_d(\rho(v))) \cap Y$. Gemäß 1.3.3 ist $\mathbb{S} := \left(X/Y'^{\perp}, Y', \rho(v)\right)$ ein d-Sylowtorus in der generischen Gruppe $\mathbb{G}$ zu $(\mathbf{G}, vF)$. Weiter sei $\mathbf{S}$ der in 1.3.3 angegebene d-Sylowtorus von $(\mathbf{G}, vF)$.

Wir berechnen nun $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ und benötigen dazu die Wurzeln von $\mathbf{L}$. Aus Lemma 10.2.1 (a) ist $R' \cap Y'^{\perp} = \emptyset$ bekannt. Zusammen mit $Y' \leq \langle e_i \,|\, 1 \leq i \leq l' \rangle$ folgt daraus

$$R \cap Y'^{\perp} = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid i, i' > l', i \neq i'\} = \widetilde{R}_2.$$

Mit Hilfe von Lemma 1.3.4 beweist dies die Teilaussagen (a) und (b), also

$$\mathbf{L} = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle.$$

Für die Aussage (c) berechnen wir zunächst $Z := \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2$ mit $\mathbf{T}_2 := \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$. Diese Gruppe bestimmen wir anhand der zugehörigen Gitter. Seien q' eine Potenz von q und $F' : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der zu q' gehörende Standard-Frobeniusendomorphismus. Dann ist $Z^{F'}$ mittels der in 6.4.4 beschriebenen Abbildung

$$\omega : \mathbf{T}^{F'} \to \mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee$$

isomorph zu

$$\mathbb{Z}\widetilde{R}_2^\vee + (q'-1)\mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee \cap \mathbb{Z}\widetilde{R}_1^\vee + (q'-1)\mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee.$$

Rechnungen zeigen, dass diese Gruppe für jedes q' genau $\mathrm{ggT}(2, q-1)$ Elemente besitzt. Das nichttriviale Element hat $h_{2e_1}(-1)$ als Urbild.

Mit dem Satz 2.1.7 (a) folgt aus $\widetilde{R}_1 \perp \widetilde{R}_2$ auch $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$. Also ist $\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$ das zentrale Produkt der beteiligten Gruppen.

Es ist nun $\mathbf{L} \leq \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ zu zeigen. Dazu genügt es, $t \in \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ für alle $t \in \mathbf{T}$ zu beweisen. Seien $a \in \mathbb{N}$ und $q' := q^{2a}$ mit $t^{q^a - 1} = 1$ und

$$\omega : \mathbf{T}^{F'} \to \mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee$$

der Isomorphismus aus dem Beweis zu 6.4.4. Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbf{T}_1^{F'}) &= \mathbb{Z}\widetilde{R}_1^\vee + (q'-1)\mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee \text{ und} \\
\omega(\mathbf{T}_2^{F'}) &= \mathbb{Z}\widetilde{R}_2^\vee + (q'-1)\mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee.
\end{aligned}$$

und

$$\omega(t) \in \mathrm{ggT}(2, q-1)\mathbb{Z}\widetilde{R}_2^\vee + (q'-1)\mathbb{Z}R^\vee/(q'-1)\mathbb{Z}R^\vee.$$

Anhand der Wurzelsysteme erkennen wir

$$2\alpha \in \mathbb{Z}\widetilde{R}_1^\vee + \mathbb{Z}\widetilde{R}_2^\vee \text{ für alle } \alpha \in R^\vee.$$

Daraus folgt $\omega(t) \in \big\langle \omega(\mathbf{T}_1^{F'}), \omega(\mathbf{T}_2^{vF'})\big\rangle$, also $t \in \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\rangle$. Dies beweist $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$, also den Teil (c) der Behauptung.

Wir berechnen nun $L := \mathbf{L}^{vF}$. Zu jedem Element $x \in L$ existieren Elemente $t \in \mathbf{T}_1$ und $g \in \mathbf{G}_2$ mit $x = tg$. Aus $x^{vF} = x$ ergibt sich

$$g^{vF} g^{-1} = (t^{-1})^{vF} t.$$

Die Gruppen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{G}_2$ sind vF-stabil, also gilt

$$g^{vF} g^{-1} = (t^{-1})^{vF} t \in \mathbf{G}_2 \cap \mathbf{T}_1 = Z.$$

Seien $h' \in \mathbf{T}_1$ und $h'' \in \mathbf{T}_2$ mit $h'^{vF} h'^{-1} = h''^{vF} h''^{-1} = h_{e_1}(-1)$ und $h := h'h''$. Einfache Rechnungen zeigen, dass entweder $x \in L_0$ oder $xh \in L_0$ gilt, woraus

$$L = \langle L_0, h\rangle$$

folgt. Also ist L_0 ein Normalteiler von L vom Index $\mathrm{ggT}(q-1, 2)$. Dies beweist den Teil (d) der Behauptung. □

Rechnungen mit dem im Beweis definierten Element h zeigen folgende Aussage.

Bemerkung 10.2.3. *Für $N_1 := \mathbf{N}_1^{vF}$ gilt $[N_1, L] \leq T_1$. Zudem gilt $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$.*

Beweis. Dies folgt aus Rechnungen mit h. □

Nach der Sylowlevigruppe konstruieren wir den zugehörigen Sylownormalisator. Dabei ist die relative Weylgruppe wichtig.

Lemma 10.2.4. *Das in 10.2.2 angegebene vollständige Wurzeldatum hat folgende relative Weylgruppe*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \Big(\mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)) \times W_{\widetilde{R}_2}\Big)/W_{\widetilde{R}_2}.$$

Beweis. Dies zeigen Rechnungen in der Gruppe ${}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ aus Lemma 4.4.1 (b). □

Mit Hilfe des nächsten Resultats können wir die Aussagen aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels anwenden.

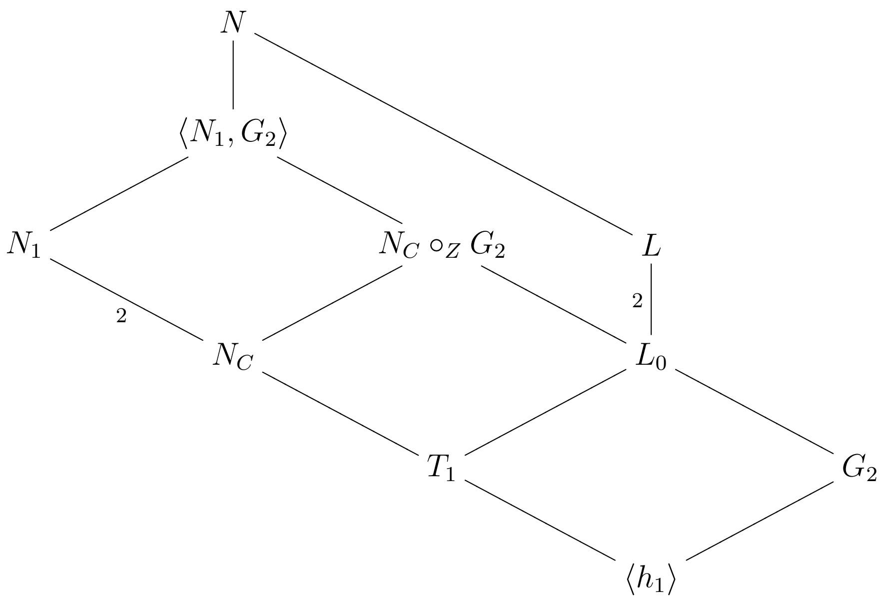
Lemma 10.2.5. *(a) Der zu L gehörende d-Sylownormalisator ist $N := \langle N_1, L\rangle$.*

(b) $\mathbf{N}_C := \mathrm{C}_{\mathbf{N}_1}(\mathbf{G}_2) = \begin{cases} \mathbf{N}_1 & 2 \mid q, \\ \{\, n \in \mathbf{N}_1 \mid f(\rho(n)) \in {}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l \,\} & \textit{sonst.} \end{cases}$

(c) Ein Element $n \in \mathbf{N}_1 \setminus \mathbf{N}_C$ operiert auf $x_\alpha(t) \in \mathbf{G}_2$ durch

$$x_\alpha(t)^n = \begin{cases} x_\alpha(t) & \alpha \in \widetilde{R}_2 \textit{ lang}, \\ x_\alpha(-t) & \alpha \in \widetilde{R}_2 \textit{ kurz}. \end{cases}$$

Bei $2 \nmid q$ hat N folgende Struktur.



Beweis. Wir gehen wie im Beweis zu Lemma 8.2.6 vor.

Für $\rho(N_1)$ erhalten wir mit Hilfe von [Car85, 3.3.6] die Gleichung

$$\rho(N_1) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_1}}(\rho(v)).$$

Mit Hilfe von Lemma 10.2.4 ergibt sich

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left\langle \rho(N_1), W_{\widetilde{R}_2} \right\rangle / W_{\widetilde{R}_2}.$$

Somit ist $\langle N_1, L \rangle$ laut Lemma 1.3.5 der d-Sylownormalisator zu L.

Der Teil (b) der Aussage ist die Übertragung von Lemma 10.1.5 auf diese Situation. Sei $\widetilde{R}_1'$ das Unterwurzelsystem der langen Wurzeln in $\widetilde{R}_1$. Aus Bemerkung 2.1.7 (b) ist

$$\mathbf{N}_1' := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1' \right\rangle \leq \mathrm{C}_{\mathbf{N}_1}(\mathbf{G}_2)$$

bekannt. Aus den Ausführungen im Beweis 10.1.5 ergibt sich auch $\mathrm{C}_{\mathbf{N}_1}(\mathbf{G}_2) = \mathbf{N}_C$.

Seien nun $\beta \in \widetilde{R}_1 \setminus \widetilde{R}_1'$ und $n := n_\beta(1)$. Für dieses Element und $x_\alpha(t) \in \mathbf{G}_2$ ergeben sich aus 2.1.7 (c) die Gleichungen

$$x_\alpha(t)^n = \begin{cases} x_\alpha(t) & \alpha \in \widetilde{R}_2 \text{ lang}, \\ x_\alpha(-t) & \alpha \in \widetilde{R}_2 \text{ kurz}. \end{cases}$$

Dies zeigt die Teile (b) und (c). $\square$

Die Operation von N_1 auf G_2 hat folgende Eigenschaft.

Bemerkung 10.2.6. *Der von $n \in N_1 \setminus N_C$ mit $N_C := \mathbf{N}_C^{vF}$ induzierte Automorphismus von G_2 ist bei $4 \big| (q-1)$ und bei $2 \big| (l-l')$ ein innerer Automorphismus von G_2. Ansonsten operiert hn_1 auf G_2 wie ein innerer Automorphismus, wobei n_1 das entsprechende Element der erweiterten Weylgruppe von $\mathbf{G}$ aus 2.3.1 ist.*

Beweis. Nach den Ausführungen im vorangegangenen Lemma existiert nur dann ein Element n, falls auch $2 \nmid q$ gilt. Die Elemente n und $n_1 := n_{\alpha_1}(1)$ induzieren auf G_2 den gleichen Automorphismus und operieren wie

$$t := \prod_{i=l'+1}^{l} h_{e_i}(\zeta),$$

wobei ζ eine primitive vierte Einheitswurzel in $\overline{\mathbb{F}}_q$ ist. Dies zeigen die Rechenregeln aus Satz 2.1.6. Unter den angegebenen Voraussetzungen, $4 \big| (q-1)$ oder $2 \big| (l-l')$, liegt dieses Element in G_2.

In den übrigen Fällen erfüllt t die Bedingungen an h''. Also operiert tn_1 wie ein innerer Automorphismus von G_2 und induziert auf G_2 den gleichen Automorphismus wie hn_1. □

Auf unseren Fall angewandt, erhalten wir damit folgende Aussage:

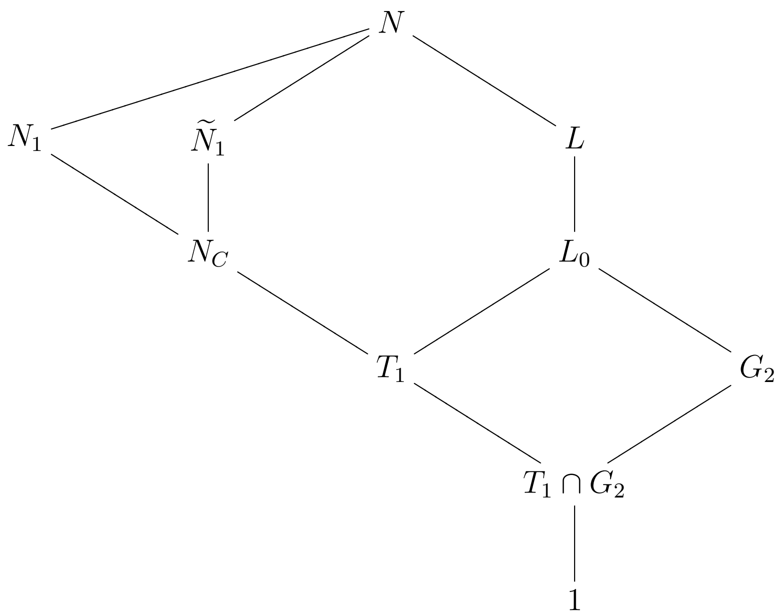
Satz 10.2.7. *Seien $\mathbf{G} := \mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann ist jeder irreduzible Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar.*

Beweis. Wegen Satz 10.1.1 können wir annehmen, dass d für W nichtregulär ist. Wir können uns laut Lemma 1.2.4 darauf beschränken, die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ mit den in 10.2.2 und 10.2.5 definierten Gruppen zu beweisen.

Für $2 \nmid q$ werden die Voraussetzungen für den Satz 3.2.6 erfüllt. Die dafür nötige Gruppenstruktur ergibt sich aus den Lemmata 10.2.2, 10.2.3 und 10.2.5.

Die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N_1$ und $T_1 \lhd \widetilde{N}_1$ mit $\widetilde{N}_1 := \langle N_C, ch \rangle$ ($c \in N_1 \setminus N_C$, $h \in (L \setminus L_0) \cap \mathbf{T}$) ergibt sich aus den Lemmata 10.1.1 und 10.1.10. Die Gruppe T_1 ist laut Lemma 1.3.4 eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', vF\rceil_{\mathbf{G}'})$ und N_1 laut 1.3.5 ihr d-Sylownormalisator. Da die Zahl d gemäß 10.2.1 regulär für $(\mathbf{G}', vF\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist, zeigt Lemma 10.1.1 die maximale Fortsetzbarkeit für diese Gruppen.

Die Gruppe N_C ist ein Normalteiler von $\widetilde{N}_1$ mit zyklischer Faktorgruppe. Das Element ch operiert auf N_C wie ch'. Daher ergibt sich die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd \widetilde{N}_1$ aus Satz 10.1.10 mit Hilfe von Lemma 3.2.2.



Somit sind alle Voraussetzungen bei $2 \nmid q$ für den Satz 3.2.6 erfüllt. Aus diesem Satz folgt nun die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$.

Bei $2 \Big| q$ werden analog die Voraussetzungen für Lemma 3.2.5 erfüllt. Die gruppentheoretischen Voraussetzungen wurden in den Lemmata 10.2.2, 10.2.3 und 10.2.5 bewiesen. Die geforderte maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N_1$ ist aus 10.1.1 bekannt. Daraus ergibt sich auch in diesem Fall die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$.

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Hier–wie auch in bei den übrigen Familien klassischer Gruppen– genügen nicht mehr die Fortsetzbarkeitsaussagen aus dem regulären Fall, da die Elemente von N auf den halbeinfachen Anteil von L äußere Automorphismen induzieren. Diese nichttrivialen äußeren Automorphismen traten auch bei den Gruppen im Abschnitt 5.3 auf. Aufgrund anderer Überlegungen, die hier nicht wiederholt werden können, genügte es dort, eine maximale Fortsetzbarkeitsaussage bei gewissen Untergruppen zu kennen. Insgesamt machen diese Automorphismen eine deutlich sorgfältigere Vorgehensweise nötig.

Die Fortsetzbarkeitsaussagen aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels sind zentrale Hilfsmittel in den nächsten zwei Kapiteln.

Kapitel 11

Gruppen vom Typ D_l

In diesem Kapitel beweisen wir das Theorem 0.1 für den Fall, dass $\mathbf{G}$ ein Wurzelsystem vom Typ D_l ($l \geq 4$) hat und F der Standard-Frobeniusendomorphismus von $\mathbf{G}$ ist. Im Kapitel 12 betrachten wir dann den Fall, dass der Frobeniusendomorphismus von einem nichttrivialen Graphautomorphismus induziert wird. Für eine d-Sylowlevigruppe L von $(\mathbf{G}, F)$ und ihren d-Sylownormalisator N zeigen wir die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$.

Die relativen Weylgruppen dieser d-Sylowlevigruppen sind aber im Allgemeinen keine Kranzprodukte. Im regulären Fall können wir also nicht Satz 6.3.15 anwenden. Stattdessen betrachten wir $\mathbf{G}$ als Untergruppe von $\mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ und beweisen dadurch die Aussagen.

Bei regulärem d konstruieren wir aus einem guten d-Sylowtwist für $(\mathbf{G}', F')$ einen geeigneten d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$. Dabei ist $\mathbf{G}' := \mathsf{B}_{l',sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ mit $l' \in \{l-1, l\}$ so, dass d für $(\mathbf{G}', F')$ mit dem Standard-Frobeniusendomorphismus $F' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ regulär ist. Aufgrund dieser Wahl des d-Sylowtwists finden wir auch Verbindungen zwischen den d-Sylownormalisatoren von $(\mathbf{G}', F')$ und solchen von $(\mathbf{G}, F)$. Für jeden Charakter $\lambda \in \mathrm{Irr}\,(L)$ können wir mit Hilfe der Fortsetzbarkeitaussagen aus dem Abschnitt 10.1 die maximale Fortsetzbarkeit beweisen.

Bei nichtregulärem d beginnen wir wie im Unterkapitel 10.2 mit der Wahl eines d-Sylowtwists, der ebenfalls mit geeigneten Gruppen vom Typ B_l gewählt wird. Anschließend beschreiben wir die Untergruppenstrukturen der damit konstruierten d-Sylowlevigruppe L und ihres d-Sylownormalisators N. Wie bei Gruppen vom Typ B_l induziert der Sylownormalisator auch äußere Automorphismen auf dem reduktiven Teil der Sylowlevigruppe. Wir können den Satz 3.2.6 anwenden, da N und L die dafür nötige Struktur besitzen und wir aus den Ergebnissen beim Typ B_l die außerdem dazu nötigen Fortsetzungsaussagen folgern können. Insgesamt führt dies zur maximalen Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$.

11.1 Regulärer Fall

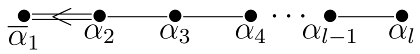
Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgender Aussage:

Satz 11.1.1. *Seien q eine Primzahlpotenz, $\mathbf{G} := \mathsf{D}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 4)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der Standard-Frobeniusendomorphismus zu q und d eine reguläre Zahl für $(\mathbf{G}, F)$. Weiter* *seien L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann liegt bei $L \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vor.*

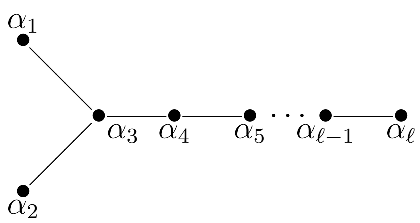
Um $\mathbf{G}$ in eine Gruppe vom Typ B_l einzubetten, soll die Gruppe folgendermaßen definiert sein:

11.1.2 (Die Gruppen G und $\overline{\mathbf{G}}$).

- Sei $\overline{R}$ ein Wurzelsystem vom Typ B_l aus 4.4.1 (b) mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $\overline{R_F} = \{\overline{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ und $\overline{\mathbf{G}}$ eine universelle Chevalleygruppe zu $\overline{R}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$.



- Weiter sei R das in 4.4.1 (d) angegebene Unterwurzelsystem vom Typ D_l mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $R_F = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ und $\mathbf{G} := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R \rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$. Diese Gruppe ist gemäß Lemma 2.1.9 (b) wegen $\mathbb{Z}R^\vee = \mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ eine universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$.



- Seien $\overline{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ und $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ die jeweiligen Standard-Frobeniusendomorphismen, die dann auch $\overline{F}\rceil_{\mathbf{G}} = F$ erfüllen.

Durch diese Definition ergeben sich weitere Aussagen für die Untergruppen.

Lemma 11.1.3. *Für die wie in Bemerkung 2.2.1 definierten Untergruppen $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\overline{\mathbf{T}}$, $\overline{\mathbf{N}}$, die Weylgruppen W bzw. $\overline{W}$ von $\mathbf{G}$ bzw. $\overline{\mathbf{G}}$ und $\overline{\rho} : \overline{\mathbf{N}} \to \overline{W}$ gelten*

(a) $\mathbf{T} = \overline{\mathbf{T}}$,

(b) $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}} \cap \mathbf{G}$ *und*

(c) $\mathbf{N} = \left\{ x \in \overline{\mathbf{N}} \;\middle|\; \overline{\rho}(x) \in W \right\}$.

Beweis. Nachrechnen. □

Es ist klar, dass $\overline{\rho}\rceil_{\mathbf{N}} = \rho$ für den in Bemerkung 2.2.1 definierten Epimorphismus $\rho : \mathbf{N} \to W$ gilt. Die Operation von $\rho(n)$ ($n \in \mathbf{N}$) auf $\mathbb{Z}R^\vee$ stimmt mit jener von $\overline{\rho}(n)$ auf $\mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ natürlich überein. Dies und den Isomorphismus $f : \overline{W} \to {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ aus Lemma 4.4.1 (b) werden wir bei der Wahl eines d-Sylowtwists benutzen.

Lemma 11.1.4. *Seien d eine reguläre Zahl von W,*

$$l' := \begin{cases} a_{\mathsf{D}_l}(d)d & 2 \nmid d, \\ a_{\mathsf{D}_l}(d)\frac{d}{2} & 2 \Big| d, \end{cases}$$

R' das Unterwurzelsystem von $\overline{R}$ mit dem Fundamentalsystem $R_F{}' := \{\overline{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l'}\}$ und $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$.

Für einen d-Sylowtwist v' von $(\mathbf{G}', \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist

$$v := \begin{cases} v' & v' \in \mathbf{G}, \\ v'n_{e_l}(-1) & v' \notin \mathbf{G} \end{cases}$$

ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Aus der Definition von $\mathbf{G}'$ ergibt sich, dass $\mathbf{G}'$ gemäß Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R' ist, da R' ein parabolisches Unterwurzelsystem von $\overline{R}$ ist. Durch die Definition von l' stellen wir

$$a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) = a_{\mathsf{D}_l}(d)$$

sicher. Mit Hilfe der Bemerkung 2.2.7 berechnen wir $a_{\mathsf{B}_{l'}}(d)$ aus den Graden der Weylgruppe von $\mathbf{G}'$ aus [Car72, 10.2.5]. Auch können wir für alle regulären Zahlen d den Wert von $a_{\mathsf{D}_l}(d)$ angeben. Gemäß der Bemerkung 2.3.8 ist d ein Teiler von l oder $2(l-1)$. Aus

$$a_{\mathsf{D}_l}(d) = \begin{cases} \frac{l}{d} & 2 \nmid d \text{ und } d \Big| l, \\ \frac{2l}{d} & 2 \Big| d \text{ und } d \Big| l, \\ \frac{l-1}{d} & 2 \nmid d \text{ und } d \nmid l, \\ \frac{2(l-1)}{d} & 2 \Big| d \text{ und } d \nmid l, \end{cases}$$

folgt, dass $l' = l - 1$ nur für Zahlen d mit $d > 2$ und $d \Big| 2(l-1)$ gilt. In diesen Fällen ist v gemäß der Konstruktion ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$, da wir den Beweis von Lemma 2.3.16 auf diese Situation übertragen können.

Bei $l' = l$ ist d ein Teiler von l. Die Anzahl der positiven Zahlen, die durch $f(\overline{\rho}(v'))$ auf negatrive abgebildet werden, ist 0 oder $\frac{2l}{d}$, also stets gerade. Daraus folgt $v' \in \mathbf{N}$ gemäß Lemma 11.1.3 (c). Wegen $\mathbb{Z}R'^{\vee} = \mathbb{Z}R^{\vee}$ und einfachen Überlegungen zu dem charakteristischen Polynom von v auf $\mathbb{Z}R^{\vee}$ ist v ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$. □

Damit können wir die im Satz 11.1.1 wichtigen Gruppen angeben und diesen für $l' = l$ beweisen.

Lemma 11.1.5. *Seien $T := \mathbf{T}^{vF}$ und $N := \mathbf{N}^{vF}$.*

(a) Die Gruppe T ist eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, vF)$ und N ihr d-Sylownormalisator.

(b) Für $l = l'$ liegt maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ vor.

Beweis. Der Teil (a) folgt aus den Lemmata 1.3.4 und 1.3.5, da v ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$ ist.

Bei $l' = l$ gilt $v' = v$, die Gruppe $\overline{T} := \overline{\mathbf{T}}^{v\overline{F}}$ ist eine Sylowlevigruppe von $(\overline{\mathbf{G}}, \overline{F})$ und $\overline{N} := \overline{\mathbf{N}}^{v\overline{F}}$ ihr Sylownormalisator. In Satz 10.1.1 wurde die maximale Fortsetzbarkeit bei $\overline{T} \lhd \overline{N}$ bewiesen. Wegen $T = \overline{T}$ und $N \leq \overline{N}$ folgt daraus die Behauptung. □

Im Fall $l' = l - 1$ sind mehrere Zwischenschritte nötig.

Lemma 11.1.6. *Seien v, v' und l' wie in 11.1.4 mit $l' = l - 1$. Weiter seien $\mathbf{N}'$ und $\mathbf{T}'$ die in Lemma 2.2.1 definierten Untergruppen von $\mathbf{G}'$, $N' := \mathbf{N}'^{v'\overline{F}}$, $T' := \mathbf{T}'^{v'\overline{F}}$ und $\widetilde{N} := \langle N' \cap N, nn_{e_l}(1) \rangle$ für ein $n \in N' \setminus N$. Dann gilt:*

(a) $\widetilde{N} \cap \mathbf{T} = T'$,

(b) $N = \left\langle \widetilde{N}, T \right\rangle$ und

(c) bei $T \lhd N$ liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.

Beweis. Die Aussage (a) ergibt sich aus der Definition von $\widetilde{N}$ mit den Relationen aus Satz 2.1.6.

Daher genügt es für (b), die Gleichung $\rho(\widetilde{N}) = \rho(N)$ und die Inklusion $\widetilde{N} \leq N$ nachzuweisen. Mit der Bemerkung 2.1.7 können wir anhand der Wurzeln die Inklusion $\widetilde{N} \leq N$ nachrechnen.

Die Gruppen $\overline{\rho}(N)$ und $\overline{\rho}(\widetilde{N})$ sind gleich: Aus [Car85, Proposition 3.3.6] folgt $\overline{\rho}(N') = \mathrm{C}_{{}^{(\mathrm{B})}\mathrm{S}_{l'}}(f(\overline{\rho}(v')))$. Die Definition von $\widetilde{N}$ zeigt nun

$$\overline{\rho}(\widetilde{N}) = \left\langle \mathrm{C}_{{}^{(\mathrm{D})}\mathrm{S}_{l'}}(f(\overline{\rho}(v'))), f(\overline{\rho}(n) w_{e_l}) \right\rangle .$$

Aus $l' = l - 1$ folgt $d > 2$. Aus der Zykelstruktur von $f(\overline{\rho}(v'))$ ergibt sich

$$\left\langle \mathrm{C}_{{}^{(\mathrm{D})}\mathrm{S}_{l'}}(f(\overline{\rho}(v'))), f(\overline{\rho}(n)) w_{e_l} \right\rangle = \mathrm{C}_{{}^{(\mathrm{D})}\mathrm{S}_{l}}(f(\overline{\rho}(v))).$$

Dies beweist $\overline{\rho}(\widetilde{N}) = \overline{\rho}(N)$ und damit den Teil (b) der Behauptung.

$$\begin{tikzcd}
 & & & N \\
N' \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N} \arrow[ur, dash] \arrow[dl, dash] & T \arrow[u, dash] \arrow[ddll, dash] \\
 & N' \cap \widetilde{N} \arrow[d, dash] & & \\
 & T' & &
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe T' ist eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', \overline{F})$ und N' ihr d-Sylownormalisator. Aus 10.1.1 ist die maximale Fortsetzbarkeit bei diesen Gruppen bekannt. Wegen $[(N' \cap N), n_{e_l}(-1)] = 1$ können wir das Lemma 3.2.2 anwenden. Daraus folgt dann die maximale Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd \widetilde{N}$. Zusammen mit dem Satz 3.1.6 und $N = \left\langle \widetilde{N}, T \right\rangle$ beweist dies die Behauptung in (c). $\square$

Damit können wir nun den Satz 11.1.1 beweisen.

Beweis von Satz 11.1.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns gemäß Lemma 1.2.5 darauf beschränken die Fortsetzbarkeitsaussage für die d-Sylowlevigruppe und ihren d-Sylownormalisator von $(\mathbf{G}, vF)$ aus 11.1.5 (a) zu zeigen.

In den Lemmata 11.1.5 (b) und 11.1.6 wurde gezeigt, dass die Charaktere aus $\operatorname{Irr}(T)$ sich auf ihre Trägheitsgruppe in N fortsetzen lassen. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Dieses Resultat wurde vor allem mit Aussagen aus 10.1 bewiesen. Auch im nächsten Abschnitt, in dem d nicht mehr regulär ist, greifen wir auf die bewiesenen Fortsetzbarkeitsaussagen beim Typ B_l zurück.

11.2 Nichtregulärer Fall

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir Satz 11.1.1 auf beliebige Zahlen d. Dabei benutzen wir die schon eingeführten Wurzelsysteme R und $\overline{R}$, die Gruppen $\mathbf{G}$ und $\overline{\mathbf{G}}$ und die Endomorphismen F und $\overline{F}$.

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass d für W nicht regulär ist.

11.2.1 (Eigenschaften von d). Nach der Bemerkung 2.3.8 ist d weder ein Teiler von l noch von $2(l-1)$. Die zu beweisende Aussage ist für $a(d) = 0$ trivial. In den nichttrivialen

Fällen teilt die Zahl d gemäß 2.2.7 mindestens einen Grad von W, d.h. eine Zahl aus $\{2, 4, \ldots, 2(l-1), l\}$, aber eben nicht $2(l-1)$ oder l. Für d gilt daher:

$$a_{\mathsf{D}_l}(d) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2l-2}{d} \right\rfloor & \text{für } 2 \,\big|\, d, \\ \left\lfloor \frac{2l-2}{2d} \right\rfloor & \text{für } 2 \nmid d. \end{cases}$$

Dies ergibt sich aus den Graden von W, die wir aus [Car85, Proposition 10.2.5] kennen, und der Bemerkung 2.2.7.

Zu Beginn bestimmen wir einen d-Sylowtwist aus den Lemmata 11.1.4 und 10.2.1.

Lemma 11.2.2. *Seien d eine nichtreguläre Zahl von W mit $a(d) \neq 0$,*

$$l' := \begin{cases} a(d) \cdot \frac{d}{2} & \textit{für } 2 \,\big|\, d, \\ a(d) \cdot d & \textit{für } 2 \nmid d, \end{cases}$$

R' ein Unterwurzelsystem von $\overline{R}$ vom Typ $\mathsf{B}_{l'}$ mit dem Fundamentalsystem $R_F = \{\overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_{l'}\}$ und $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle$. Für jeden d-Sylowtwist v' von $(\mathbf{G}', \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist

$$v := \begin{cases} v' & v' \in \mathbf{G}, \\ v' n_{e_l}(1) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Aus der Definition von l' folgt

$$a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) = a_{\mathsf{D}_l}(d)$$

und $l' \leq l - 2$. Das charakteristische Polynom von $\overline{\rho}(v')$ auf $\mathbb{Z}\overline{R}^\vee = \mathbb{Z}R^\vee$ wird definitionsgemäß von $\Phi_d^{a_{\mathsf{B}_{l'}}(d)}$ geteilt. Dies beweist analog zu den Ausführungen beim Lemma 2.3.16, dass v ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$ ist. $\square$

Wir konstruieren mit v eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, vF)$.

Lemma 11.2.3. *Seien v der d-Sylowtwist aus Lemma 11.2.2 und $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W)$ die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ von $\mathbf{G}$ mit*

(a) $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\overline{\rho}(v))$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{\pm e_i \pm e_j \in R \mid i, j > l'\}$,

(b) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$,

(c) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ *mit* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$, $\widetilde{R}_1 := \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \leq l'\}$ *und* $Z := \langle h_{\alpha_1}(-1) h_{\alpha_2}(-1) \rangle$,

(d) $L_0 \lhd L$ *und* $|L : L_0| = \mathrm{ggT}(2, q-1)$ *mit* $L := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF}$, $L_0 := T_1 \circ_Z G_2$, $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$ *und* $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, dash] & \\
& L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& Z \arrow[d, dash] & \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die Sylowtori $\mathbf{S}$ und $\mathbb{S} = (X', Y', \rho(v))$ mit $Y' := \ker_{Y\otimes\mathbb{C}}(\Phi_d(\rho(v)))$ und $X' := {}^{X}\!/Y'^{\perp}$ definieren wir mit dem Sylowtwist v durch die in Lemma 1.3.3 angegebene Formeln.

Die Eigenschaften können auf analoge Weise wie beim Lemma 10.2.2 bewiesen werden: Da d für $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ regulär ist, gilt

$$e_i \not\perp Y' \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'.$$

Daraus ergibt sich $\widetilde{R}_2 = R \cap Y'^{\perp}$. Zusammen mit dem Lemma 1.3.4 beweist dies (a) und (b).

Beim Teil (c) können wir wie beim Beweis von Lemma 10.2.2 anhand der Wurzeln $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$, $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{T}_1 \cap (\mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2)$ und $\mathbf{T} \leq \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$ beweisen.

Der Teil (d) folgt aus analogen Überlegungen wie beim Beweis von Lemma 10.2.2. $\square$

Insbesondere besitzen L und L_0 folgende im Satz 3.2.6 vorausgesetzte Strukturen.

Lemma 11.2.4. *Die Gruppen besitzen folgende Eigenschaften:*

- $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$ *und*
- $\left|{}^{L}\!/L_0\right| = |Z|$.

Für die Konstruktion des zugehörigen Sylownormalisators bestimmen wir die relative Weylgruppe von $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$.

Lemma 11.2.5. *Die Levigruppe* $\mathbb{L} := \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ *aus 11.2.3 hat die relative Weylgruppe*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left\langle \mathrm{C}_{W_{R_{1,l}}}(\rho(v)), W_{R_2} \right\rangle / W_{R_2} \cong \mathrm{C}_{W_{R_{1,l}}}(\rho(v)),$$

mit $R_{1,l} := \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, l', l\}, i \neq j\}$.

Beweis. Diese Aussage ergibt sich aus einfachen Berechnungen in ${}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$. $\square$

Damit können wir den Sylownormalisator konstruieren.

Lemma 11.2.6. *Seien* $\widetilde{R}'_1 := \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_{i'} \mid 1 \leq i, i' \leq l'\}$, $N' := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}'_1, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle^{v'\overline{F}}$ *und* $\widetilde{N} := \langle N' \cap \mathbf{G}, x n_{e_l}(1) \rangle$ *für ein beliebiges* $x \in N' \setminus \mathbf{G}$. *Für diese Gruppen gelten folgende Aussagen:*

(a) $\widetilde{N} \cap \mathbf{L} = T_1$,

(b) $\mathrm{C}_{\widetilde{N}}(G_2) = N' \cap \widetilde{N}$ *und*

(c) $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \left\langle \widetilde{N}, L \right\rangle$.

Beweis. Aus den Relationen in Satz 2.1.6 und der Bemerkung 2.1.7 folgt

$$\langle n_{e_l}(1), N' \rangle \cap \mathbf{T} = T_1$$

und daraus die Gleichung $\widetilde{N} \cap \mathbf{L} = T_1$, wenn wir noch $\overline{\rho}(\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{N}) \cap \overline{\rho}(\widetilde{N}) = 1$ berücksichtigen.

Wegen $\widetilde{R}'_1 \perp \widetilde{R}_2$ können wir die Bemerkung 2.1.7 anwenden und daraus ergibt sich

$$\mathrm{C}_{\widetilde{N}}(G_2) \geq (N' \cap \widetilde{N}).$$

Elemente aus $\overline{\rho}(\widetilde{N}) \setminus \rho(N' \cap \widetilde{N})$ operieren nichttrivial auf $\widetilde{R}_2$. Daraus folgt mit den Relationen 2.1.6 die Gleichung $\mathrm{C}_{\widetilde{N}}(G_2) = N' \cap \widetilde{N}$.

Die Überlegungen zum Lemma 11.1.6 zeigen

$$\overline{\rho}(\widetilde{N}) = \mathrm{C}_{W_{R_{1,l}}}(\overline{\rho}(v)) \cong W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}).$$

Gemäß Lemma 1.3.5 ist dann $\left\langle \widetilde{N}, L \right\rangle$ der Sylownormalisator von L. $\square$

Die Fortsetzbarkeitsaussage bei $T_1 \lhd N'$ überträgt sich auch auf weitere Gruppen.

Lemma 11.2.7. *Seien* $h \in (L \setminus L_0) \cap \mathbf{T}$, $x \in \widetilde{N} \setminus N'$ *und* $\widetilde{N}' := \langle N' \cap \mathbf{G}, x n_{e_l}(-1) h \rangle$. *Bei* $T_1 \lhd \widetilde{N}$ *und bei* $T_1 \lhd \widetilde{N}'$ *liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Im Satz 10.1.1 haben wir die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N'$ bewiesen. Aus den Relationen in 2.1.6 und 2.1.7 folgt $[N', n_{e_l}(-1)] = 1$. Mit dem Lemma 3.2.2 können wir daher die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N'$ auf $T_1 \lhd \widetilde{N}$ übertragen.

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N} \arrow[dl, dash] \\
& N' \cap \mathbf{G} \arrow[d, dash] & \\
& T_1 &
\end{tikzcd}$$

Sei $h' \in \mathbf{T}_1$ mit $h'^{vF} h'^{-1} = h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1)$. Dieses Element existiert nach dem Satz von Lang-Steinberg. Aus Satz 10.1.10 ist die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd \langle N \cap N', nh' \rangle$ bekannt.

Sei nun $h'' \in \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$ mit $h''^{vF} h''^{-1} = h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1)$. Aus $[N', n_{e_l}(-1)h''] = 1$ folgt mit dem Lemma 3.2.2 die behauptete maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd \widetilde{N}'$.

$$\begin{tikzcd}
\langle N \cap N', nh' \rangle \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N}' \arrow[dl, dash] \\
& N' \cap \mathbf{G} \arrow[d, dash] & \\
& T_1 &
\end{tikzcd}$$

□

Wir können nun den Satz 3.2.6 anwenden.

Satz 11.2.8. *Seien $\mathbf{G} := \mathsf{D}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 4)$, F der Standard-Frobeniusendomorphismus, $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe in $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann ist jeder Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ fortsetzbar.*

Beweis. Wegen 11.1.1 können wir annehmen, dass d für W nicht regulär ist.

Die Aussagen der vorangegangenen Lemmata in diesem Abschnitt zeigen, dass die Voraussetzungen für den Satz 3.2.6 erfüllt werden: In den Lemmata 11.2.4 und 11.2.6 wurde die vorausgesetzte Struktur für $2 \nmid q$ bewiesen. Weiter sind die Charaktere aus $\mathrm{Irr}\,(T_1)$ in $\widetilde{N}$ und in $\widetilde{N}'$ gemäß Lemma 11.2.7 maximal fortsetzbar.

$$\begin{tikzcd}
& & N \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\widetilde{N} \arrow[dr, dash] & \widetilde{N}' \arrow[d, dash] & & L \arrow[d, dash] & \\
& \widetilde{N} \cap \widetilde{N}' \arrow[dr, dash] & & L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& & T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& & & T_1 \cap G_2 \arrow[d, dash] & \\
& & & 1 &
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt mit Satz 3.2.6 die Behauptung für $2 \nmid q$.

Bei $2 \big| q$ gilt $L = T_1 \times G_2$.

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\widetilde{N} \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& & 1 &
\end{tikzcd}$$

Für jeden Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(L)$ mit $\lambda \in \operatorname{Irr}(T_1 \mid \chi)$ und $\eta \in \operatorname{Irr}(G_2 \mid \chi)$ definiert $\lambda'.\eta$ eine Fortsetzung von χ auf $\mathrm{I}_{N_C}(\chi) \times G_2$ mit $N_C := \widetilde{N} \cap N'$, wobei λ' die Einschränkung einer maximalen Fortsetzung von λ in $\widetilde{N}$ auf $\mathrm{I}_{N_C}(\chi)$ ist. Eine maximale Fortsetzung von λ in $\widetilde{N}$ existiert gemäß Lemma 11.2.7. Der Charakter $\lambda'.\eta$ ist definitionsgemäß in ganz $\mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi)$ invariant. Wegen

$$\mathrm{I}_N(\chi) = \left\langle \mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi), L \right\rangle$$

ist $\lambda'.\eta$ analog in ganz $\mathrm{I}_N(\chi)$ invariant.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I}_N(\chi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\text{zyklisch}"] & & & \\
\mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{I}_{N_C}(\chi) \times G_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \lambda'.\eta & \chi \arrow[dl, squiggly, dash] \\
\lambda' & \mathrm{I}_{N_C}(\chi) \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \eta \arrow[d, squiggly, dash] \\
& \lambda & T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
& & & 1 &
\end{tikzcd}$$

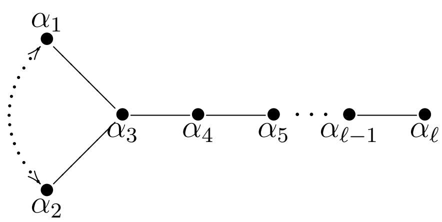
Mit der Faktorgruppe $\widetilde{N}/N_C$ ist auch $\mathrm{I}_N(\chi)/\langle \mathrm{I}_{N_C}(\chi), L\rangle$ zyklisch. Demnach ist $\lambda'.\eta$ auch auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ gemäß Lemma 3.1.1 (a) fortsetzbar. Dies beweist die maximale Fortsetzbarkeit von χ in N und die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ bei gerader Charakteristik. $\square$

Die Resultate dieses Kapitels wurden mit Hilfe der Aussagen aus Kapitel 10 bewiesen. Wir werden auch im nächsten Kapitel ähnlich vorgehen, da auch dort das $\mathbf{G}$ zugrunde liegende Wurzelsystem vom Typ D_l ist.

Kapitel 12

Gruppen vom Typ ${}^2\mathsf{D}_l$

Auf der algebraischen Gruppe $\mathbf{G} := \mathsf{D}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ $(l \geq 4)$ für eine Primzahlpotenz q operieren gemäß Bemerkung 2.2.4 für $l \geq 4$ im Wesentlichen zwei „verschiedene" Frobeniusendomorphismen. Im vorangegangenen Kapitel wurde der Fall betrachtet, in dem $F_0 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Standard-Frobeniusendomorphismus ist. In Kapitel 5 wurde die Aussage bewiesen, wenn auf $\mathsf{D}_4(\overline{\mathbb{F}}_q)$ der Frobeniusendomorphismus, der von einem Graphautomorphismus der Ordnung 3 abgeleitet wurde, operiert. Das zugehörige Dynkindiagramm und damit auch R besitzt einen Automorphismus σ der Ordnung 2. Dieser vertauscht die Fundamentalwurzeln α_1 und α_2 des Fundamentalsystems R_F aus 4.4.1 (d).



Somit gibt es auch einen Automorphismus $\Gamma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, der auf $\mathbf{G}$ durch

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\sigma(\alpha)}(t) \text{ für } \pm\alpha \in R_F$$

definiert ist. Für die reduktive Gruppe $(\mathbf{G}, F)$ mit $F := F_0 \circ \Gamma$ beweisen wir in diesem Kapitel das Theorem 0.1, also dass alle irreduziblen Charaktere einer d-Sylowlevigruppe L maximal im zugehörigen d-Sylownormalisator N fortsetzbar sind.

Im ersten Abschnitt betrachten wir den regulären Fall. Wir gehen analog wie im Unterkapitel 11.1 vor und konstruieren einen Sylowtwist, eine Sylowlevigruppe und einen Sylownormalisator, indem wir $\mathbf{G}$ in eine Gruppe mit Wurzelsystem $\overline{\mathbf{G}}$ vom Typ B_l einbetten. Die Fortsetzbarkeitsaussage in 12.1.1 ergibt sich dann aus Eigenschaften gewisser Untergruppen von $\overline{\mathbf{G}}$.

Danach verallgemeinern wir die Aussage auf beliebige Zahlen d. Wie auch schon in den anderen Abschnitten beginnen wir mit der Konstruktion von d-Sylowtwists. Diese bestimmen wir mit d-Sylowtwists von $(\mathbf{G}', F')$, wobei $\mathbf{G}'$ ein universelle Chevalleygruppe zu einem Wurzelsystem vom Typ $\mathsf{B}_{l'}$, F' ein Standard-Frobeniusendomorphismus und d eine reguläre Zahl für $(\mathbf{G}', F')$ ist.

Wir ermitteln die Struktur der damit bestimmten d-Sylowlevigruppe L von $(\mathbf{G}, vF_G)$. Diese ähnelt in wesentlichen Punkten stark den d-Sylowlevigruppen beim Typ B_l. Auch hier gibt es einen Normalteiler vom Index höchstens 2, der das zentrale Produkt eines Torus mit einer universellen Chevalleygruppe G_2 ist. Auf G_2 induziert der d-Sylownormalisator N äußere Automorphismen. Im Lemma 12.2.6 finden wir noch eine Untergruppe $\widetilde{N}_1$ von $\mathbf{N}$, die zusammen mit L den zugehörigen Sylownormalisator N erzeugt. Aus den Eigenschaften von $\widetilde{N}_1$ können wir schließlich die maximale Fortsetzbarkeit ablesen.

12.1 Regulärer Fall

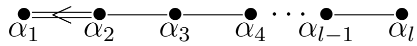
In diesem Abschnitt beweisen wir folgenden Satz.

Satz 12.1.1. *Seien* $\mathbf{G} := \mathsf{D}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *ein Frobeniusendomorphismus, der mit Hilfe eines Automorphismus der Ordnung* 2 *des Dynkindiagramms definiert wird, und* $d \in \mathbb{N}$ *eine für* $(\mathbf{G}, F)$ *reguläre Zahl. Weiter seien* L *eine* d*-Sylowlevigruppe von* $(\mathbf{G}, F)$ *und* N *ihr* d*-Sylownormalisator.*

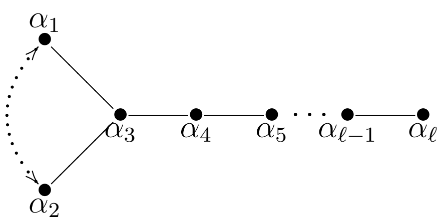
Dann sind alle Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}\,(L)$ *maximal in* N *fortsetzbar.*

Wir konkretisieren das Wurzelsystem von $\mathbf{G}$ und nehmen an, dass $\mathbf{G}$ und F folgendermaßen gewählt wurden.

12.1.2 (Die Gruppen G und $\overline{\mathbf{G}}$). • Sei $\overline{R}$ ein Wurzelsystem vom Typ B_l aus 4.4.1 (b) mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $\overline{R_F} = \{\overline{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ und $\overline{\mathbf{G}}$ eine universelle Chevalleygruppe zu $\overline{R}$ über $\overline{\mathbb{F}}_q$.



- Weiter seien R das in 4.4.1 (d) angegebene Unterwurzelsystem vom Typ D_l mit dem dort angegebenen Fundamentalsystem $R_F = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ und $\mathbf{G} := \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in R \rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$. Diese Gruppe ist gemäß Lemma 2.1.9 (b) wegen $\mathbb{Z}R^\vee = \mathbb{Z}\overline{R}^\vee$ eine universelle Chevalleygruppe zu R über $\overline{\mathbb{F}}_q$.



- Seien σ der Automorphismus von R_F mit

$$\alpha_i \mapsto \begin{cases} \alpha_i & i \geq 3, \\ \alpha_1 & i = 2, \\ \alpha_2 & i = 1 \end{cases}$$

  und $\Gamma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ der wie in Lemma 2.2.4 dadurch definierte Frobeniusendomorphismus mit

$$\Gamma(x_{\pm\alpha_i}(t)) = \Gamma(x_{\pm\sigma(\alpha_i)}(t)) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l \text{ und } t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star.$$

- Seien $F_0 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ und $\overline{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ Standard-Frobeniusendomorphismen und $F := F_0 \circ \Gamma$. Somit gilt $\overline{F}\rceil_{\mathbf{G}} = F_0$, aber auch $\overline{F}\rceil_{\mathbf{G}} \neq F$.
- Auf dem Kocharaktergitter Y von $\mathbf{G}$ induziere F den Automorphismus ϕ. Dieser operiert auf $\overline{Y} := Y \otimes \mathbb{C}$ gemäß der Bemerkung 2.2.6 durch

$$\phi(e_i) = \begin{cases} e_i & i \neq 1, \\ -e_1 & i = 1. \end{cases}$$

Wir konstruieren nun eine Frobeniusabbildung $\overline{F} : \overline{\mathbf{G}} \to \overline{\mathbf{G}}$ mit $\overline{F}\rceil_{\mathbf{G}} = F$.

Lemma 12.1.3. *Seien ζ_4 eine primitive* $\mathrm{ggT}((q-1)^2, 4)$*-te Einheitswurzel in $\overline{\mathbb{F}}_q$, $\overline{n}_i$ die Elemente der erweiterten Weylgruppe $\overline{V}$ von $\overline{\mathbf{G}}$ aus dem Lemma 2.3.1 und*

$$n := \overline{n}_1 \prod_{i=2}^{l} \widetilde{h}_{e_i}(\zeta_4) \in \overline{\mathbf{G}}.$$

(a) Dann gilt $\Gamma(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbf{G}$.

(b) Der Automorphismus von Y, der durch $\rho(n)$ induziert wird, stimmt mit ϕ überein.

Beweis. Wir prüfen die Aussage in (a) für die Elemente $x_{\pm\alpha}(t)(\alpha \in R_F,\ t \in \overline{\mathbb{F}}_q)$ nach. Aus der Definition von Γ folgt für $i > 2$ die Gleichung

$$\Gamma(x_{\pm\alpha_i}(t)) = x_{\pm\alpha_i}(t) = x_{\pm\alpha_i}(t).$$

Analog gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(x_{\pm\alpha_1}(t)) &= x_{\pm\alpha_2}(t) = x_{\pm\alpha_2}(t) \text{ und} \\ \Gamma(x_{\pm\alpha_2}(t)) &= x_{\pm\alpha_1}(t) = x_{\pm\alpha_1}(t). \end{aligned}$$

Das Element $x_{\alpha_i}(t)^n$ berechnen wir mit den Relationen aus 2.1.6. Aus diesen ergibt sich für $i > 2$ bereits

$$x_{\alpha_i}(t)^n = x_{\alpha_i}(t).$$

Für $i \in \{1,2\}$ erhalten wir analog:

$$x_{\alpha_i}(t)^n = x_{\alpha_{i'}}(-\eta_{e_1,\alpha_{i'}} t)$$

mit $i' := 3 - i$. Die Werte von η_{e_1,α_1} und η_{e_1,α_2} sind gemäß [Car72, Proposition 6.4.3] gleich. Aus der Definition 2.1.4 folgt

$$\eta_{e_1,\alpha_2} = \epsilon_{\alpha_1,e_1} \epsilon_{e_2,e_1}.$$

Nun benutzen wir die dritte und die erste Gleichung aus der Definition 2.1.3 und [Car72, Proposition 6.4.3] und erhalten

$$\epsilon_{\alpha_1,e_1} = \epsilon_{e_1,-e_2} = \epsilon_{e_1,e_2} = -\epsilon_{e_2,e_1}.$$

Die Definition von η zeigt nun

$$\eta_{e_1,\alpha_1} = \eta_{e_1,\alpha_2} = -1$$

und

$$x_{\alpha_i}(t)^n = x_{\alpha_{i'}}(t)$$

mit den Werten von i und i' wie oben.

Analog gilt mit $\{i, i'\} = \{1,2\}$ auch

$$x_{-\alpha_i}(t)^n = x_{\alpha_{i'}}(-\eta_{e_1,-\alpha_{i'}} t),$$

da aus [Car72, Proposition 6.4.3] die Gleichung $\eta_{\alpha,\beta} = \eta_{\alpha,-\beta}$ bekannt ist.

Dies beweist wegen $\mathbf{G} = \langle \mathbf{X}_\alpha \mid \pm\alpha \in R_F \rangle$ aus dem Lemma 2.1.10 die Gleichung in (a).

Daraus folgt, dass auch für $x_{-\alpha_1}(t)$ und $x_{-\alpha_2}(t)$ die in (a) behauptete Gleichung gilt. Da diese Elemente $x_{\pm\alpha_i}(t)$ $(1 \le i \le l)$ gemäß Satz 2.1.10 ganz $\mathbf{G}$ erzeugen, folgt daraus (a).

Für den Teil (b) betrachten wir die Operation des Elements $\rho(n)$ auf dem Kocharaktergitter Y. □

Aus 2.3.8 sind die regulären Zahlen d von $(\mathbf{G}, F)$ bekannt: diese sind die Teiler von $2(l-1)$ und die Teiler von $2l$ mit $2 \nmid \frac{2l}{d}$ ist. Für die Konstruktion eines d-Sylowtwists von $(\mathbf{G}, F)$ benötigen wir die Werte von $a(d)$. Dabei gelten für jede reguläre Zahl d von $W\phi$ die Gleichungen

$$a(d) = \begin{cases} \frac{2l}{2d} & d \mid 2l \text{ und } (d)_2 = (2l)_2, \\ \frac{2(l-1)}{2d} & 2 \nmid d, \\ \frac{2(l-1)}{d} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus [Car72, 14.3.2] ist die Ordnung von $\mathbf{G}^F$ bekannt. Aus der in der Bemerkung 1.2.1 angegebenen Gleichung

$$|\mathbb{G}|\,(q) = |\mathbb{G}(q)| \text{ für alle Primzahlpotenzen } q$$

erhalten wir die angegebenen Werte. Auch wählen wir einen d-Sylowtwist $v\phi$ mit Hilfe eines d-Sylowtwists von $\overline{\mathbf{G}}$.

Lemma 12.1.4. *Seien d ein reguläre Zahl von $(\mathbf{G}, F)$,*

$$l' := \begin{cases} l & \text{bei } d\big|2l \text{ und } (d)_2 = (2l)_2, \\ l-1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

R' das Unterwurzelsystem von $\overline{R}$ mit dem Fundamentalsystem ${R_F}' := \{\overline{\alpha}_1, \ldots \alpha_{l'}\}$, $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R'\rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$ eine universelle Chevalleygruppe zu R', v' ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}'})$ und

$$v'' := \begin{cases} v' & \text{Anzahl der Vorzeichenwechsel in } f(\rho(v)) \text{ ist ungerade,} \\ v' n_{e_l}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $v\phi$ mit $v := v''n^{-1}$ ein d-Sylowtwist für $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Das Element v ist gemäß Lemma 11.1.3 (c) ein Element von $\mathbf{G}$. Die Gruppe $\mathbf{G}'$ ist gemäß Lemma 2.1.9 eine universelle Chevalleygruppe zu R'. Wir unterscheiden beim Beweis die Fälle $l' = l$ und $l' = l-1$ und berücksichtigen die im Lemma 12.1.3 bewiesenen Eigenschaften. Wie beim Beweis von Lemma 2.1.9 schließen wir aus dem charakteristischen Polynom auf Untergittern auf Eigenschaften von $\overline{\rho}(v)\phi$.

Bei $l' = l$ besitzt $f(\overline{\rho}(v))$ aufgrund der Definition von l' eine ungerade Anzahl an Vorzeichenwechseln. Daraus folgt $v'' = v'$. Aus den Graden von $\overline{W}$ und der Bemerkung 2.2.7 ergibt sich

$$a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) = \begin{cases} \lfloor \frac{2l}{d} \rfloor & 2\big|d, \\ \lfloor \frac{l}{d} \rfloor & 2\nmid d. \end{cases}$$

Die Zahl l' erfüllt somit $a(d) = a_{\mathsf{B}_{l'}}(d)$.

Das Polynom $\Phi_d^{a(d)}$ teilt das charakteristische Polynom von $\overline{\rho}(v') = \overline{\rho}(v'')$ auf $Y = \mathbb{Z}R'^\vee$, da v' ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}'})$ ist und definitionsgemäß die Operation von $\overline{\rho}(v)\phi$ auf Y mit der von $\overline{\rho}(v'')$ übereinstimmt. Somit ist v ein d-Sylowtwist.

Gilt $l' = l-1$, so teilt $\Phi_d^{a(d)}$ das charakteristische Polynom von $\overline{\rho}(v')$ auf $\mathbb{Z}R'$ und damit $\det_{Y\otimes\mathbb{C}}(\overline{\rho}(v'')x - 1)$. Aufgrund der Verbindung zwischen n und ϕ stimmen die Operationen von $\overline{\rho}(v'')$ und $\overline{\rho}(v)\phi$ überein. □

Aus $\mathbf{G} \leq \overline{\mathbf{G}}$ ergeben sich auch Verbindungen zwischen den Sylowlevigruppen von $(\mathbf{G}', \overline{F}\rceil_{\mathbf{G}'})$ und $(\mathbf{G}, F)$.

Lemma 12.1.5. *Seien d und l wie im Lemma 12.1.4 mit $l' = l$, $\mathbf{T}'$ und $\mathbf{N}'$ die gemäß der Bemerkung 2.2.1 definierten Untergruppen von $\mathbf{G}'$. Dann liegt bei $\mathbf{T}^{vF} \lhd \mathbf{N}^{vF}$ maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Aus der Definition ist $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$ und $\mathbf{N}' \leq \mathbf{N}$ bekannt.

Die Zahl d ist gemäß der Definition von l' und der Tabelle 2.1 regulär für $(\mathbf{G}', \overline{F})$. Die Gruppe $\mathbf{T}'^{v'\overline{F}}$ ist eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', v'\overline{F})$ und $\mathbf{N}'^{v'\overline{F}}$ ihr Sylownormalisator. Aus dem Satz 10.1.1 ist bekannt, dass bei $\mathbf{T}'^{v'\overline{F}} \lhd \mathbf{N}'^{v'\overline{F}}$ maximale Fortsetzbarkeit vorliegt.

Da die Operation von $v'\overline{F}$ mit der von vF übereinstimmt, gilt $\mathbf{T}^{vF} = \mathbf{T}'^{v'\overline{F}}$ und $\mathbf{N}^{vF} \leq \mathbf{N}'^{v'\overline{F}}$. Auf diese Gruppen überträgt sich die Fortsetzbarkeit bei $\mathbf{T}'^{v'\overline{F}} \lhd \mathbf{N}'^{v'\overline{F}}$ offensichtlich. □

Für den Beweis bei $l' = l - 1$ benötigen wir noch eine Aussage über den von $n_{e_l}(1)$ auf $\mathbf{G}'$ induzierten Automorphismus.

Lemma 12.1.6. *Seien $\mathbf{T}'$ und $\mathbf{N}'$ die in der Bemerkung 2.2.1 definierten Untergruppen von $\mathbf{G}'$. Dann gibt es ein Element $h \in \mathbf{T}'$ mit*

$$hn_{e_l}(1) \in \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{N}').$$

Beweis. Bei $2 \big| q$ operiert $n_{e_l}(1)$ auf $\mathbf{G}'$ gemäß der Bemerkung 2.1.7 trivial.

Bei $2 \nmid q$ sei ζ ein primitive vierte Einheitswurzel. Die Relationen aus Satz 2.1.6 zeigen, dass

$$h := \prod_{i=1}^{l'} h_{e_i}(\zeta)$$

und $n_{e_l}(-1)$ die gleichen Automorphismen auf $\mathbf{G}'$ induzieren. □

Diese Aussage hilft, die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathbf{T}^{vF} \lhd \mathbf{N}^{vF}$ aus den Resultaten beim Typ B_l abzuleiten. Dazu benötigen wir einige Aussagen über die Struktur von $\mathbf{N}^{vF}$.

Lemma 12.1.7. *Seien l und d, so dass $l' = l - 1$ gilt. Weiter seien $\widehat{v} := v'n_{e_l}(1)$, $N' := \mathbf{N}'^{\widehat{v}\overline{F}}$, $N_C := N' \cap \mathbf{G}$, $x \in N' \setminus N_C$, $\widetilde{N} := \langle N_C, xn_{e_l}(1)\rangle$ und $N := \mathbf{N}^{vF}$. Dann gilt $N = \left\langle \widetilde{N}, T \right\rangle$.*

$$\begin{tikzcd}
& & & N \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
N' \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N} \arrow[dl, dash] & \\
& N_C \arrow[d, dash] & & T \arrow[dll, dash] \\
& T' & &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die Relationen in der Bemerkung 2.1.7 zeigen $xn_{e_l}(1) \in \mathbf{N}^{vF}$.

Aus der Definition von $\widetilde{N}$ folgt

$$\left|\overline{\rho}(\widetilde{N})\right| = |\overline{\rho}(N')| \cong \mathrm{C}_{W'}(\overline{\rho}(\widehat{v})).$$

Dabei ist W' die Weylgruppe von $\mathbf{G}'$. Zudem ist $\overline{\rho}(N) = \mathrm{C}_W(\overline{\rho}(v''))$ bekannt.

Um die Ordnungen beider Gruppen zu vergleichen, betrachten wir ihre Bilder unter dem Isomorphismus $f : \overline{W} \to {}^{(\mathsf{B})}\mathrm{S}_l$ aus Lemma 4.4.1 (b). Wir können die Zykelstruktur von $f(\overline{\rho}(v''))$ und $f(\overline{\rho}(\widehat{v}))$ ermitteln. Daraus folgt

$$\left|\overline{\rho}(\widetilde{N})\right| = |\overline{\rho}(N')| = |\mathrm{C}_{W'}(\overline{\rho}(\widehat{v}))| = \left|\mathrm{C}_{{}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l}(f(\overline{\rho}(v'')))\right|.$$

Dies beweist $N = \left\langle \widetilde{N}, T \right\rangle$. □

Mit diesen Aussagen können wir die maximale Fortsetzbarkeit bei $l' = l - 1$ zeigen.

Lemma 12.1.8. *Seien l und d, so dass $l' = l$ gilt. Bei $T \lhd N$ liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Wir zeigen diese Aussage, indem wir zunächst die maximale Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd N'$ zeigen. Anschließend folgern wir daraus die maximale Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd \widetilde{N}$

und bei $T \lhd N$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & N \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
N' \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N} \arrow[dl, dash] & T \arrow[ddll, dash] \\
 & N' \cap \widetilde{N} \arrow[d, dash] & & \\
 & T' & &
\end{tikzcd}$$

Mit dem Element $h \in \mathbf{T}'$ aus Lemma 12.1.6 gilt $T' = \mathbf{T}'^{v'h\overline{F}}$ und $N' = \mathbf{T}'^{v'h\overline{F}}$. Daher ist T' eine Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}', v'h\overline{F})$ und N' ihr Sylownormalisator. Die maximale Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd N'$ folgt aus Satz 10.1.1.

Aufgrund der Konstruktion von $\widetilde{N}$ können wir mit dem Lemma 3.2.2 diese maximale Fortsetzbarkeit bei $T' \lhd N'$ auf $T' \lhd \widetilde{N}$ übertragen. Wegen $N = \left\langle \widetilde{N}, T \right\rangle$ und $T' \leq T$ können wir mit dem Satz 3.1.6 daraus die maximale Fortsetzbarkeit bei $T \lhd N$ folgern. □

Insgesamt haben wir daher die oben behauptete Aussage bewiesen:

Beweis von Satz 12.1.1. Es genügt gemäß Lemma 1.2.5, die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathbf{T}^{vF} \lhd \mathbf{N}^{vF}$ mit einem Element v aus Lemma 12.1.4 zu zeigen, da $v\phi$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$ ist und die Gruppen gemäß den Lemmata 1.3.4 und 1.3.5 eine Sylowlevigruppen und ihr Sylownormalisator sind. In Lemma 12.1.4 wurde $l' \in \{l, l-1\}$ mit Hilfe von d und l definiert.

Die maximale Fortsetzbarkeit bei $\mathbf{T}^{vF} \lhd \mathbf{N}^{vF}$ wurde in Lemma 12.1.5 für $l' = l$ und in Lemma 12.1.8 für $l' = l - 1$ bewiesen. □

Im nächsten Abschnitt werden wir diese Aussage auf beliebige Zahlen $d \in \mathbb{N}$ verallgemeinern.

12.2 Nichtregulärer Fall

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Satz 12.1.1 auf allgemeine Zahlen $d \in \mathbb{N}$.

Satz 12.2.1. *Seien $\mathbf{G} = \mathsf{D}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($l \in \mathbb{N}$, $l \geq 4$), $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ ein Frobeniusendomorphismus, der von einem Graphautomorphismus der Ordnung 2 induziert wird, $d \in \mathbb{N}$, L eine d-Sylowlevigruppe von $(\mathbf{G}, F)$ und N ihr d-Sylownormalisator. Dann liegt bei $L \lhd N$ maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Wir verwenden für den Beweis die in 12.1.2 eingeführten Gruppen, Wurzelsysteme und Frobeniusendomorphismen. Wir nehmen an, dass d für $(\mathbf{G}, F)$ nicht regulär ist und $a_{\mathsf{D}_l}(d) \neq 0$ gilt, da ansonsten die Aussage bereits in Satz 12.1.1 bewiesen wurde bzw. trivial ist.

Wir beginnen wieder mit der Konstruktion eines d-Sylowtwists $v\phi$.

Lemma 12.2.2. *Seien d eine nichtreguläre Zahl von $(\mathbf{G}, F)$,*

$$l' := \begin{cases} a(d)\frac{d}{2} & 2 \big| d, \\ a(d)d & 2 \nmid d, \end{cases}$$

R' das Unterwurzelsystem von $\overline{R}$ mit dem Fundamentalsystem $\{\overline{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l'}\}$, $\mathbf{G}' := \langle \mathbf{X}_\alpha \,|\, \alpha \in R' \rangle \leq \overline{\mathbf{G}}$ und v' ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$. (Gemäß Lemma 2.1.9 ist $\mathbf{G}'$ eine universelle Chevalleygruppe zu R'.)

Dann ist $v\phi$ mit

$$v'' := \begin{cases} v' & v' \notin \mathbf{G}, \\ v'n_{e_l}(1) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und $v := v''n^{-1}$ ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Beweis. Wir überprüfen zunächst $v \in \mathbf{G}$, dann berechnen wir eine obere Schranke für l' und folgern daraus die Behauptung.

Für $x \in \overline{\mathbf{N}}$ gilt laut Lemma 11.1.3 die Äquivalenz

$$x \in \mathbf{G} \Leftrightarrow f(\overline{\rho}(x)) \in W.$$

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel von $f(\overline{\rho}(v''))$ ist gemäß der Definition von v'' also ungerade, d.h. eine gerade Anzahl positiver Zahlen wird durch $f(\overline{\rho}(v''))$ auf negative abgebildet. Daraus folgt $v \in \mathbf{N}$.

Gemäß der Tabelle 2.1 ist d kein Teiler von $2l$ mit $2 \nmid \frac{2l}{d}$ und auch kein Teiler von $2(l-1)$. In Theorem 14.3.2 in [Car72] wurde die Ordnung von $\mathbf{G}^F$ angegeben. Mit Hilfe der Bemerkung 1.2.1 ergibt sich für nichtreguläre Zahlen d daraus

$$a(d) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2(l-1)}{d} \right\rfloor & 2 \big| d, \\ \left\lfloor \frac{l-1}{d} \right\rfloor & 2 \nmid d. \end{cases}$$

Demnach gilt $l' \leq l - 2$ für alle nichtregulären Zahlen. Aus der Bemerkung 2.2.7 und den in [Car72, 10.2.5] angegebenen Graden der Coxetergruppen vom Typ $\mathsf{B}_{l'}$ folgt

$$a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) := \begin{cases} \left\lfloor \frac{l'}{d} \right\rfloor & 2 \nmid l', \\ \left\lfloor \frac{2l'}{d} \right\rfloor & 2 \big| l' \end{cases}$$

und $a(d) = a_{\mathsf{B}_{l'}}(d)$.

Aus Lemma 12.1.3 ist bekannt, dass die charakteristischen Polynome, die zu $v\phi$ und $vn = v''$ assoziiert werden, übereinstimmen. Aus der Definition von v'' ergibt sich, dass das charakteristische Polynom von v'' auf $\mathbb{Z}\overline{R}^\vee = \mathbb{Z}R^\vee$ von $\Phi_d^{a_{\mathsf{B}_{l'}}(d)}$ bei $l' < l$ geteilt wird. Dies zeigen Überlegungen analog zu dem Beweis von Lemma 2.3.16. Wegen $a_{\mathsf{B}_{l'}}(d) = a(d)$ ist dann $v\phi$ auch ein d-Sylowtwist von $(\mathbf{G}, F)$.

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Wir konstruieren nun mit diesem d-Sylowtwist eine d-Sylowlevigruppe.

Lemma 12.2.3. *Seien $v\phi$ der d-Sylowtwist aus Lemma 11.2.2 und $\mathbb{G} = (X, R, Y, R^\vee, W\phi)$ die generische Gruppe zu $(\mathbf{G}, F)$. Dann gibt es einen d-Sylowtorus $\mathbb{S}$ von $\mathbb{G}$ und einen d-Sylowtorus $\mathbf{S}$ von $\mathbf{G}$ mit*

(a) $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S}) = (X, \widetilde{R}_2, Y, \widetilde{R}_2^\vee, W_{\widetilde{R}_2}\overline{\rho}(v)\phi)$ *mit* $\widetilde{R}_2 := \{\pm e_i \pm e_j \in R \mid i, j > l'\}$,

(b) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{G}_2 \rangle$ *mit* $\mathbf{G}_2 := \left\langle \mathbf{X}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_2 \right\rangle$,

(c) $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \mathbf{T}_1 \circ_Z \mathbf{G}_2$ *mit* $\mathbf{T}_1 := \left\langle h_\alpha(t) \in \mathbf{G} \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1 \right\rangle$, $\widetilde{R}_1 := \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \leq l'\}$ *und* $Z := \langle h_{\alpha_1}(-1) h_{\alpha_2}(-1) \rangle$,

(d) $L_0 \lhd L$ *und* $|L : L_0| = \mathrm{ggT}(2, q-1)$ *mit* $L := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})^{vF}$, $L_0 := T_1 \circ_Z G_2$, $T_1 := \mathbf{T}_1^{vF}$ *und* $G_2 := \mathbf{G}_2^{vF}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[d, dash] & \\
 & L_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] \\
 & Z \arrow[d, dash] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir wählen als Sylowtorus $\mathbb{S} = (X', Y', \rho(v))$ mit $Y' := \ker_{Y \otimes \mathbb{C}}(\Phi_d(\rho(v)\phi))$ und $X' := {}^{X}\!/_{Y'^\perp}$ und definieren $\mathbf{S}$ wie in Lemma 1.3.3.

Ähnliche Überlegungen wie beim Lemma 10.2.2 beweisen die Eigenschaften dieser Tori: Da d für $(\mathbf{G}', F\rceil_{\mathbf{G}'})$ wegen $d \big| l'$ laut der Tabelle 2.1 regulär ist, ist die Menge $R' \cap Y'^\perp$ leer, d.h.

$$e_i \notin Y'^\perp \text{ für alle } 1 \leq i \leq l'.$$

Daraus folgt $\widetilde{R}_2 = R \cap Y'^{\perp}$. Mit der in Lemma 1.3.4 angegebenen Formel beweist dies (a) und (b).

Die Aussagen über die Struktur von $\mathbf{L}$ in (c) können wir mit den Methoden aus dem Beweis von Lemma 10.2.2 ermitteln: Dabei werden nacheinander die Gleichungen $[\mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2] = 1$, $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{G}_2 = Z$ und $\mathbf{T} \leq \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{G}_2 \rangle$ gezeigt.

Der Teil (d) folgt aus analogen Überlegungen wie beim Beweis von Lemma 10.2.2. □

Für die spätere Anwendung von Satz 3.2.6 beweisen wir noch weitere Eigenschaften von L.

Lemma 12.2.4. *Die Gruppen besitzen folgende Eigenschaften:*

- $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$ *und*
- $\left|{}^{L}/{L_0}\right| = |Z|$.

Beweis. Es gibt bei $2 \nmid q$ ein Element $h \in (L \setminus L_0) \cap \mathbf{T}$. Dieses operiert trivial auf T_1. Daraus folgt $T_1 \leq \mathrm{Z}(L)$. Die Gruppe T_1 ist offensichtlich abelsch und $\left|{}^{L}/{L_0}\right| = |Z|$ ist aus dem Lemma 12.2.3 bekannt. □

Wir berechnen nun für die in 12.2.3 (a) angegebene generische Gruppe $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ die zugehörige relative Weylgruppe.

Lemma 12.2.5. *Die generische Sylowlevigruppe* $\mathbb{L} := \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ *aus 12.2.3 (a) hat die relative Weylgruppe*

$$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}) = \left\langle \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_{1,l}}}(\rho(v)\phi), W_{R_2} \right\rangle / W_{R_2} \cong \mathrm{C}_{\widetilde{R}_{1,l}}(\rho(v)\phi)$$

mit $\widetilde{R}_{1,l} := \{\pm e_i \pm e_j \in R \mid i,j \in \{1,\ldots,l',l\}, i \neq j\}$.

Beweis. Diese Aussage ergibt sich aus Berechnungen in ${}^{(\mathsf{D})}\mathrm{S}_l$. □

Damit können wir den Sylownormalisator N von L konstruieren. Gleichzeitig machen wir zahlreiche Aussagen über die Struktur von N, um später die gewünschte maximale Fortsetzbarkeit zu zeigen.

Lemma 12.2.6. *Seien* $\widehat{v} := v' n_{e_l}(1)$, $N' := \left\langle n_\alpha(t) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{R}_1, t \in \overline{\mathbb{F}}_q^\star \right\rangle^{\widehat{v}\overline{F}}$, $x \in N' \setminus \mathbf{G}$ *und* $\widetilde{N} := \langle N' \cap \mathbf{G}, x n_{e_l}(1) \rangle$. *Für diese Gruppen gilt:*

(a) $\widetilde{N} \cap \mathbf{L} = T_1$,

(b) $\mathrm{C}_{\widetilde{N}}(G_2) = N' \cap \widetilde{N}$ *und*

(c) $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \left\langle \widetilde{N}, L \right\rangle$.

Beweis. Wir übertragen den Beweis von Lemma 11.2.6 auf die vorliegende Situation und erhalten dadurch die Teile (a) und (b).

Aus den Überlegungen im Beweis zu 12.1.7 folgt

$$\overline{\rho}(\widetilde{N}) = \mathrm{C}_{W_{\widetilde{R}_{1,l}}}(\rho(v)\phi).$$

Aus den Relationen der Bemerkung 2.1.7 folgt $\widetilde{N} \leq \mathbf{N}^{vF}$. Daraus folgt zusammen mit der relativen Weylgruppe von $\mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})$ aus dem Lemma 12.2.5 gemäß dem Lemma 1.3.5 die Gleichung

$$\mathrm{N}_{\mathbf{G}^{vF}}(\mathbf{S}) = \left\langle \widetilde{N}, L \right\rangle.$$

□

Wir können nun mehrere Aussagen über Fortsetzbarkeit beweisen.

Lemma 12.2.7. *Seien $h \in (L \setminus L_0) \cap \mathbf{T}$, $x \in \widetilde{N} \setminus N'$ und $\widetilde{N}' := \langle N' \cap \mathbf{G}, x n_{e_l}(-1)h \rangle$. Bei $T_1 \lhd \widetilde{N}$ und bei $T_1 \lhd \widetilde{N}'$ liegt maximale Fortsetzbarkeit vor.*

Beweis. Aus dem Satz 10.1.1 ist die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N'$ bekannt. Die Relationen in 2.1.7 zeigen $[N', n_{e_l}(-1)] = 1$. Mit dem Lemma 3.2.2 überträgt sich die maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd N'$ auf $T_1 \lhd \widetilde{N}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] N' \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N} \arrow[dl, dash] \\ & N' \cap \mathbf{G} \arrow[d, dash] & \\ & T_1 & \end{tikzcd}$$

Aus der Struktur von $\mathbf{L}$, die wir in 12.2.3 bewiesen haben, folgt, dass es zwei Elemente $h' \in \mathbf{T}_1$ und $h'' \in \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_2$ mit

$$h = h'h'' \text{ , } h'^{vF}h'^{-1} = h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1) \text{ und } h''^{vF}h''^{-1} = h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1)$$

gibt. Laut dem Satz 10.1.10 liegt bei $T_1 \lhd \langle N \cap N', nh' \rangle$ maximale Fortsetzbarkeit vor.

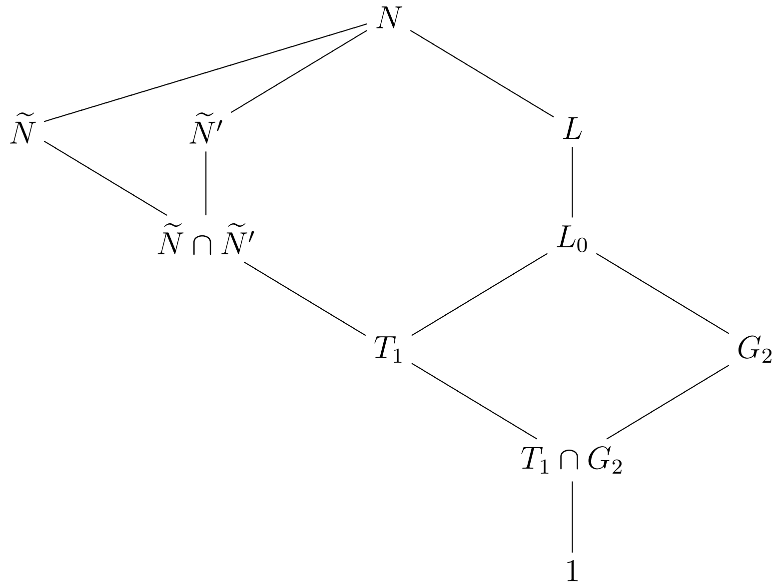
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \langle N \cap N', nh' \rangle \arrow[dr, dash] & & \widetilde{N}' \arrow[dl, dash] \\ & N' \cap \mathbf{G} \arrow[d, dash] & \\ & T_1 & \end{tikzcd}$$

Mit $[N', n_{e_l}(-1)h''] = 1$ und dem Lemma 3.2.2 folgt daraus die behauptete maximale Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd \widetilde{N}'$. □

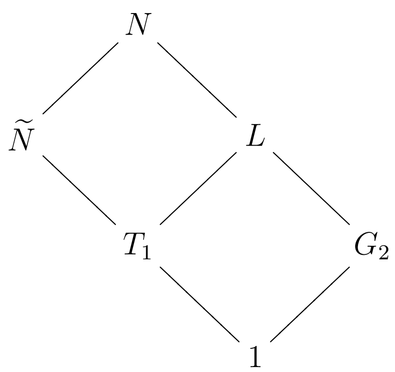
Wir können nun den Satz 3.2.6 anwenden und damit den Satz 12.2.1 beweisen.

Beweis von Satz 12.2.1. Wir gehen wie im Beweis zu Satz 11.2.8 vor. Die Behauptung ist für reguläres d aus Satz 12.1.1 bekannt.

Die Ausführungen über die Struktur von L und N zeigen, dass die Voraussetzungen für den Satz 3.2.6 erfüllt werden: Aus den Lemmata 12.2.4 und 12.2.6 folgt, dass die Gruppen die verlangte Struktur bei $2 \nmid q$ besitzen. Gemäß Lemma 12.2.7 liegt bei $T_1 \lhd \widetilde{N}$ und bei $T_1 \lhd \widetilde{N}'$ maximale Fortsetzbarkeit vor. Mit dem Satz 3.2.6 folgt daraus die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ bei $2 \nmid q$.



Wie im Beweis zu Satz 11.2.8 folgt die maximale Fortsetzbarkeit bei $L \lhd N$ bei $2 \mid q$ aus der maximalen Fortsetzbarkeit bei $T_1 \lhd \widetilde{N}$. Wegen $L = T_1 \times G_2$ liegt folgende Struktur vor.



Für $\chi \in \operatorname{Irr}(L)$, $\lambda \in \operatorname{Irr}(T_1 \mid \chi)$ und $\eta \in \operatorname{Irr}(G_2 \mid \chi)$ ist $\lambda'.\eta$ eine Fortsetzung von χ auf $\langle \mathrm{I}_{N_C}(\chi), L\rangle$ mit $N_C := \widetilde{N} \cap N'$. Dabei ist λ' die Einschränkung einer Fortsetzung von

λ in $\widetilde{N}$ auf $\mathrm{I}_{N_C}(\chi)$ ist. Die maximale Fortsetzung von λ in $\widetilde{N}$ existiert gemäß Lemma 12.2.7. Der Charakter $\lambda'.\eta$ ist definitionsgemäß in ganz $\mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi)$ invariant. Wegen

$$\mathrm{I}_N(\chi) = \left\langle \mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi), L \right\rangle$$

ist $\lambda'.\eta$ in ganz $\mathrm{I}_N(\chi)$ invariant.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{I}_N(\chi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\text{zyklisch}"] & & & & \\
\mathrm{I}_{\widetilde{N}}(\chi) \arrow[dr, dash] & & \langle \mathrm{I}_{N_C}(\chi), L \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \lambda'.\eta & & \\
\lambda' & \mathrm{I}_{N_C}(\chi) \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \chi & \\
 & \lambda & T_1 \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[dl, dash] & \eta \\
 & & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Mit der Faktorgruppe $\widetilde{N}/N_C$ ist auch $\mathrm{I}_N(\chi)/\langle \mathrm{I}_{N_C}(\chi), L \rangle$ zyklisch. Demnach ist $\lambda'.\eta$ auch auf $\mathrm{I}_N(\chi)$ gemäß Lemma 3.1.1 (a) fortsetzbar.

Mit dem Lemma 1.2.4 überträgt sich diese Eigenschaft auf alle d-Sylowlevigruppen und ihre Sylownormalisatoren von $(\mathbf{G}, F)$. $\square$

Damit haben wir auch für die letzte Serie reduktiver Gruppen die maximale Fortsetzbarkeitsaussage gezeigt.

Ausblick

Wir haben in den Kapiteln 5 und 7-12 für die verschiedenen Serien reduktiver Gruppen das Theorem 0.1 bewiesen. Diese Aussage folgt aus den Sätze 5.3.10, 7.2.1, 8.2.1, 9.2.1, 10.2.7, 11.2.8 und 12.2.1.

Die Sätze 4.1.4 und 5.1.5 lassen uns eine Verschärfung der Aussage bei regulärem d vermuten.

Vermutung 12.1. *Seien V eine erweiterte Weylgruppe, W die zugehörige Weylgruppe, ϕ ein von einem Graphautomorphismus des Dynkindiagramms induzierter Automorphismus von V und d eine reguläre Zahl für $W\phi$.*

Dann gibt es einen sehr guten d-Sylowtwist $v\phi \in V\phi$ von (V, ϕ).

Diese Aussage kann helfen die Operation äußerer Automorphismen, die L und N stabilisieren, zu beschreiben, da Körperautomorphismen auf der Gruppe V trivial operieren und Graphautomorphismen V stabilisieren. Dies ist vor allem in Hinblick auf eine Erweiterung für die dekorierte McKay-Vermutung interessant, da dort auch äußere Automorphismen berücksichtigt werden müssen.

Um diese Aussage auch für die übrigen klassischen Gruppen zu beweisen, ist eine Übertragung der Methode aus Kapitel 6, wie sie in 6.4.5 angedeutet wurde, auf diese Fragestellung nötig.

Symbolverzeichnis

$\mathrm{M}(W)$	Schurmultiplikator von W	47
n	im Kapitel 12: Element aus $\mathsf{B}_{l,sc}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ mit $\Gamma(x) = x^n$	211
$\mathbf{N}$	Normalisator von $\mathbf{T}$ in der Chevalleygruppe $\mathbf{G}$	31
$\widehat{N}$	endliche Gruppe, Definition s. 6.2.2	105
$n_\alpha(t)$	Chevalleyerzeuger	27
$\widehat{N}_C$	endliche Gruppe erzeugt von den $\widehat{N}_r$, Definition s. 6.2.2	105
N_C	$\mathrm{C}_{N_1}(G_2)$	194
n_i	$= n_{\alpha_i}(1)$, Erzeuger von V	35
$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$	$\subseteq \{1, \ldots, j\}$, Menge bei Charakteren in Normalform	121
$\widehat{N}_r$	endliche Gruppe zu R_r, Definition s. 6.2.2	105
$\mathbf{N}_r$	Untergruppe von $\mathbf{N}$ assoziiert zu R_r	105
$\mathbf{N}_{\{r,r'\}}$	Gruppe assoziiert zu den Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ und $\mathcal{B}^{(r')}$ $(r \neq r')$	107
N_S	von p_r $(1 \leq r \leq j-1)$ erzeugte Untergruppe von N_S	107
$N_{S,I}$	von p_i $(i \in I)$ erzeugte Untergruppe von N_S	111
$o(\chi)$	Ordnung eines linearen Charakters	47
ω	Isomorphismus zwischen T^{vF} und Faktorgruppe von Gittern	136
Ω	$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})$	32
$p_{\alpha,\beta}$	$= \max\{ i \in \mathbb{Z} \mid -i\alpha + \beta \in R\}$	25
ϕ	Automorphismus, induziert von F	16
ϕ	weitere von F abgeleitete Automorphismen	38
Φ_d	d-tes zyklotomisches Polynom	19
p_r	tolle Elemente	111
$\mathrm{prod}(n_j, n_i, m_{ij})$	$=\underbrace{n_i n_j n_i \cdots}_{m_{ij}\text{-mal}}$	35
Ψ	tp-zyklotomisches Polynom	19
q	Primzahlpotenz	16
$q_{\alpha,\beta}$	$= \max\{ i \in \mathbb{Z} \mid i\alpha + \beta \in R\}$	25
R'	Unterwurzelsystem von $R^\vee$	65
R	irreduzibles Wurzelsystem	27
$R \subset X$	Wurzeln, meistens von $\mathbf{G}$	16
$R^\vee \subset Y$	Kowurzeln	16
$\mathrm{r} : W \to \mathbf{B}$	Matsumoto-Abbildung mit $\mathrm{r}(s_i) := \mathrm{s}_i$	37
$\mathcal{R}$	Abbildung zwischen Untergruppen und Unterwurzelsystemen	63
$\mathcal{R}(\chi)$	$\mathcal{R}(\ker(\chi))$	63
R_F	Fundamentalsystem von R	32
$R_{F\chi}$	Fundamentalsystem von $\mathcal{R}(\chi)$	70
R_{Fi}	max. abg. Unterwurzelsystem nach Streichung von α_i	66
$R_{Fi,j}$	$(R_{Fi})_j$ maximal abgeschlossenes Unterwurzelsystem in R_{Fi}	66
$\rho : \mathbf{N} \to W$	Epimorphismus von $\mathbf{N}$ auf die Weylgruppe W	31
R_r	Unterwurzelsysteme von R, assoziiert zu $\mathcal{B}^{(r)}$	105
$\overline{R}_r$	Unterwurzelsysteme von $\overline{R}$, assoziiert zu $\mathcal{B}^{(r)}$	105

$R_{\{r,r'\}}$	Unterwurzelsystem von R	107
$\overline{R}_{\{r,r'\}}$	Unterwurzelsystem von $\overline{R}$	107
${}^{R}\mathrm{S}_l$	Permutationsgruppe zum klassischen Wurzelsystem R	105
σ	Automorphismus von R	33
$\mathbb{S}$	generischer Torus von $\mathbb{G}$	18
$\widehat{S}$	Produkt der Tori $\widehat{S}_r$	105
sgn	Vorzeichenabbildung	72
s_i	i-ter Erzeuger der Coxetergruppe W	37
s_i	i-ter Erzeuger der Zopfgruppe	37
$\widehat{S}_r$	endlicher Torus zu $\overline{R}_r$, Definition s. 6.2.2	105
$\mathbf{S}_r$	Torus zu $\overline{R}_r$ in $\overline{\mathbf{G}}$	105
$\mathbf{S}_{\{r,r'\}}$	Torus assoziiert zu den Bahnen $\mathcal{B}^{(r)}$ und $\mathcal{B}^{(r')}$ $(r \neq r')$	107
$\mathbf{T}$	F-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$	16
$\mathbf{T}$	$= \left\langle h_\alpha(t) \,\middle\|\, \alpha \in R, t \in \overline{\mathbb{F}}^\star \right\rangle$, Torus bei universellen Chevalleygruppen	31
$\tau : \mathbf{B} \to V$	Epimorphismus zwischen $\mathbf{B}$ und V	37
$\mathbb{T}$	generischer Torus von $\mathbb{G}$	17
t_1, t_2	Elemente aus $\mathbb{F}$	27
Θ'	Abbildung zwischen Charakteren bei $\widehat{S}_1 \lhd \widehat{N}_1$	114
Θ	Abbildung zwischen Charakteren bei $\widehat{S} \lhd \widehat{N}_C$	116
$T \circ_Z G$	zentrales Produkt der Gruppen T und G mit $Z = T \cap G$	50
U	$= V^{vF}$	44
V	erweiterte Weylgruppe	35
$\mathcal{V}$	Vektorraum, auf dem W operiert	40
$v\phi$	Sylowtwist	22
$W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L})$	relative Weylgruppe von $\mathbb{L}$	19
w_0	längstes Element in W	43
$\mathbf{w}_0$	$\mathrm{r}(w_0)$	43
w_α	Spiegelung entlang α	28
$W_{R'}$	von den Spiegelungen entlang $\alpha \in R'$ erzeugte Gruppe	23
$w_{(r,r+1)}$	Involutionen aus $\mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$	107
W_S	$= \left\langle w_{(r,r+1)} \,\middle\|\, 1 \leq r < j \right\rangle$, zu S_j isomorphe Gruppe in $\mathrm{C}_W(\rho(v)\phi)$	107
X	Charaktergitter	16
$x_\alpha(t)$	Chevalleyerzeuger	27
$\mathbf{X}_\alpha$	Wurzelgruppe zu $\alpha \in R$ bei universellen Chevalleygruppen	31
$\mathbf{X}_\alpha$	Wurzelgruppe zu $\alpha \in R$	31
Y	Kocharaktergitter	16
$\overline{Y}$	$= Y \otimes \mathbb{C}$	23
$Y'^{\perp}$	duales Gitter	17
$\overline{Y}(w\phi, \zeta)$	$= \langle x \in Y \otimes \mathbb{C} \mid w\phi(x) = \zeta x \rangle$	40
Z	$= \bigcap_r \mathbf{S}_r$, endliche zentrale Gruppe in $\overline{\mathbf{G}}$	105

ζ	primitive Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{F}$	40

Index

Literaturverzeichnis

[BC03] Bosma, Wieb ; Cannon, John: *Handbook of MAGMA functions*. Version 2.10. University of Sydney, 2003. `http://magma.maths.usyd.edu.au/` 77, 79

[Bes00] Bessis, David: Groupes des tresses et éléments réguliers. In: *J. Reine Angew. Math.* 518 (2000), S. 1–40. – ISSN 0075–4102 44

[BM92] Broué, Michel ; Malle, Gunter: Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis. In: *Math. Ann.* 292 (1992), Nr. 2, S. 241–262. – ISSN 0025–5831 15, 16, 17, 18, 19, 20, 35, 40, 90

[BM97] Broué, Michel ; Michel, Jean: Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées. In: *Finite reductive groups (Luminy, 1994)* Bd. 141. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1997, S. 73–139 35, 41, 43, 44, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 153, 169, 173

[BM98] Broué, Michel ; Malle, Gunter: Generalized Harish-Chandra theory. In: *Representations of reductive groups*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998 (Publ. Newton Inst.), S. 85–103 19, 20

[Car72] Carter, Roger W.: *Simple groups of Lie type*. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972. – viii+331 S. – Pure and Applied Mathematics, Vol. 28 25, 26, 27, 28, 32, 34, 35, 64, 73, 92, 145, 160, 167, 174, 175, 192, 201, 212, 213, 217

[Car85] Carter, Roger W.: *Finite groups of Lie type*. New York : John Wiley & Sons Inc., 1985 (Pure and Applied Mathematics (New York)). – xii+544 S. – ISBN 0–471–90554–2. – Conjugacy classes and complex characters, A Wiley-Interscience Publication 15, 16, 24, 32, 33, 108, 110, 136, 148, 158, 163, 181, 195, 202, 204

[CMT04] Cohen, Arjeh M. ; Murray, Scott H. ; Taylor, D. E.: Computing in groups of Lie type. In: *Math. Comp.* 73 (2004), Nr. 247, S. 1477–1498. – ISSN 0025–5718 26, 27

[DM91] DIGNE, François ; MICHEL, Jean: *London Mathematical Society Student Texts*. Bd. 21: *Representations of finite groups of Lie type*. Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – iv+159 S. – ISBN 0–521–40117–8; 0–521–40648–X 18, 24

[Gec03] GECK, Meinolf: *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 10: *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*. Oxford : Oxford University Press, 2003. – xii+307 S. – ISBN 0–19–852831–0 21

[GLS98] GORENSTEIN, Daniel ; LYONS, Richard ; SOLOMON, Ronald: *Mathematical Surveys and Monographs*. Bd. 40: *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1998. – xvi+419 S. – ISBN 0–8218–0391–3. – Almost simple K-groups 28, 32, 73

[GP00] GECK, Meinolf ; PFEIFFER, Götz: *London Mathematical Society Monographs. New Series*. Bd. 21: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 2000. – xvi+446 S. – ISBN 0–19–850250–8 36, 38, 84, 141

[Hup98] HUPPERT, Bertram: *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Bd. 25: *Character theory of finite groups*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1998. – vi+618 S. – ISBN 3–11–015421–8 55, 58, 82

[IMN05] ISAACS, I. M. ; MALLE, Gunter ; NAVARRO, Gabriel: *A reduction theorem for the McKay conjecture*. 2005. – eingereicht 8

[Isa73] ISAACS, I. M.: Characters of solvable and symplectic groups. In: *Amer. J. Math.* 95 (1973), S. 594–635. – ISSN 0002–9327 8

[Isa76] ISAACS, I. M.: *Character theory of finite groups*. New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1976. – xii+303 S. – Pure and Applied Mathematics, No. 69 48, 49, 50, 74, 75, 76

[Kan01] KANE, Richard: *Reflection groups and invariant theory*. New York : Springer-Verlag, 2001 (CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 5). – x+379 S. – ISBN 0–387–98979–X 31, 63, 66, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75

[LS99] LEHRER, G. I. ; SPRINGER, T. A.: Reflection subquotients of unitary reflection groups. In: *Canad. J. Math.* 51 (1999), Nr. 6, S. 1175–1193. – ISSN 0008–414X. – Dedicated to H. S. M. Coxeter on the occasion of his 90th birthday 41

[Mal06] MALLE, Gunter: *Height 0 characters of finite groups of lie type.* 2006. – eingereicht 8

[Spr74] SPRINGER, T. A.: Regular elements of finite reflection groups. In: *Invent. Math.* 25 (1974), S. 159–198. – ISSN 0020–9910 40, 41, 141, 158, 161

[Spr98] SPRINGER, T. A.: *Progress in Mathematics.* Bd. 9: *Linear algebraic groups*. Second. Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc., 1998. – xiv+334 S. – ISBN 0–8176–4021–5 11, 33

[ST54] SHEPHARD, Geoffrey C. ; TODD, J.A.: Finite unitary reflection groups. In: *Can. J. Math.* 6 (1954), S. 274–304 91

[Ste64] STEINBERG, Robert: Differential equations invariant ander finite reflection groups. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 112 (1964), S. 392–400. – ISSN 0002–9947 18, 41, 43

[Ste68a] STEINBERG, Robert: *Endomorphisms of linear algebraic groups.* Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1968 (Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80). – 108 S. 33

[Ste68b] STEINBERG, Robert: *Lectures on Chevalley groups.* Yale University, New Haven, Conn., 1968. – iii+277 S. – Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson 25, 30, 32, 96

[Tit66] TITS, J.: Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus. In: *J. Algebra* 4 (1966), S. 96–116. – ISSN 0021–8693 11, 37, 45

Wissenschaftlicher Werdegang Britta Späth

10/1999 - 03/2002	Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Bayreuth Abschluss: Vordiplom
11/2000 - 10/2003	Förderung durch die Studienstiftung des deutschen Volkes
11/2000 - 11/2003	Studium der Mathematik an der Universität Bayreuth mit Nebenfach Informatik, Abschluss: Diplom
05/2004-12/2004	Stipendium zur Förderung von Frauen in Naturwissenschaft und Technik
Seit 12/2004	Wissenschaftliche Angestellte beim DFG-Projekt „Die Alperin-McKayVermutung“

Curriculum Vitae

Qualification/Educational Backround

November 2003	Diploma in mathematics with a minor in Computer Sciences, at Universität Bayreuth Advisor: Professor Wolfgang Müller Dissertation title (German): *Teilerfremde Gruppenoperationen und die Glauberman-Isaacs-Characterkorrespondenz*

Grants:

2004	Grant from Universität Kassel „Frauen in Naturwissenschaft und Technik“
2000 - 2003	Studienstiftung des deutschen Volkes

Employment:

Since 2004	Research assistant in the DFG-project 'Die Alperin-McKay-Vermutung für endliche Gruppen'