

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK

**Neue Aspekte der
Portfolio-Optimierung
und der
Modellierung von Bondindizes**

Tin-Kwai Man

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium, Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

1. Gutachter: Prof. Dr. Ralf Korn
2. Gutachter: Dr. habil. Jörg Wenzel
Datum der Disputation: 13. Juni 2007

D 386

Vorwort

Zwei zentrale Probleme der modernen Finanzmathematik sind die Portfolio-Optimierung und die Optionsbewertung. Während es bei der Portfolio-Optimierung darum geht, das Vermögen optimal auf verschiedene Anlagemöglichkeiten zu verteilen, versucht die Optionsbewertung faire Preise von derivativen Finanzinstrumenten zu bestimmen. In dieser Arbeit haben wir Fragestellungen aus beiden dieser Themenbereiche bearbeitet.

Der Startpunkt der modernen Portfolio-Optimierung war der 1952 erschienene Artikel „Portfolio Selection“ von Markowitz. Dieser löste das Entscheidungsproblem in einem einperiodigen Modell anhand des Erwartungswert-Varianz-Kriteriums. Dabei trifft ein Investor zu Beginn des Betrachtungszeitraums seine Anlageentscheidung, die danach nicht mehr geändert wird. Obwohl dies eine starke Vereinfachung ist, wird dieser Ansatz auch heutzutage noch häufig in der Praxis eingesetzt. Für seine Arbeiten bekam Markowitz 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Mit Merton (1969, 1971) begann die zeitstetige Portfolio-Optimierung. Er führte die Portfolio-Probleme auf stochastische Kontrollprobleme zurück und löste diese mit den dort vorhandenen Methoden, wie der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung. Allerdings betrachtete er ein einfaches Modell, in dem er u.a. eine konstante Zinsraten annahm. Dieses wurde im Laufe der Jahre von verschiedenen Autoren immer weiter verallgemeinert. Eine weiterführende Übersicht und aktuelle Fragestellungen zur Portfolio-Optimierung findet man bei Korn (1997).

Bachelier entwickelte bereits 1900 in seiner Dissertation „Théorie de la Speculation“ ein Modell zur Bewertung von Aktienoptionen. Dieses hatte jedoch das theoretische Defizit, daß der Aktienkurs durch eine arithmetisch Brownsche Bewegung modelliert wurde. Hierdurch besitzen negative Aktienkurse eine positive Wahrscheinlichkeit. Sprenkle (1961) und Samuelson (1965) behoben dieses Problem, indem sie den Aktienkurs durch eine geometrisch Brownsche Bewegung abbildeten. Allerdings beinhalteten ihre Formeln für einen Europäischen Call präferenzabhängige Parameter, die schwer zu schätzen sind. Erst Black und Scholes (1973) und Merton (1973) gelang es, eine Preisgleichung herzuleiten, die nicht mehr auf den Präferenzen der Marktteilnehmer beruht. Im Gegensatz zu ersteren bewies Merton diese sogenannte Black/Scholes-Formel auch für ein (Gaußsches) Zinsstrukturmodell. Für diese Veröffentlichungen bekamen Merton und Scholes 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Auch hier basierte das Modell auf sehr einfachen Annahmen. So wurden im Laufe der Zeit die geometrisch Brownsche Bewegung durch allgemeinere stochastische Prozesse ersetzt oder statt einfacher Call-Optionen die exotischsten Derivate untersucht. Eine weiterführende Übersicht und aktuelle Fragestellungen zur Optionsbewertung findet man bei Wilmott (1998).

Diese Arbeit beginnt mit einem Kapitel über Grundlagen, in dem u.a. das originale Portfolio-Problem von Merton dargestellt und die Black/Scholes-Formel hergeleitet wird. Des weiteren werden die in den folgenden Kapiteln benötigten Begriffe eingeführt.

Danach betrachten wir neue Aspekte der Portfolio-Optimierung bezüglich der Einführung von Transaktionskosten (Kapitel 2), internationaler Diversifikation (Kapitel 3) und Sprung-Diffusions-Prozessen (Kapitel 4). Im letzten Fall werden wir auch die Einführung von stochastischen Zinsraten behandeln. Einleitungen in die einzelnen Themengebiete finden sich am Anfang des jeweiligen Kapitels.

Im Bereich der Optionsbewertung behandeln wir die Bewertung von Derivaten auf Bondindizes (Kapitel 5). Dieses Kapitel entstand aus einem Projekt von Holger Kraft und mir in Zusammenarbeit mit einem großen deutschen Kreditinstitut, während wir gemeinsam am Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik beschäftigt waren. Das Ziel des Projektes war, Methoden zur Bewertung von Optionen auf den Bondindex eb.rexx zu erforschen, der kurz zuvor von der Deutschen Börse eingeführt worden war. Auch hier befindet sich eine Einführung am Anfang des Kapitels.

Das letzte Kapitel faßt die Arbeit zusammen.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Ralf Korn bedanken, der mir die Möglichkeit gab, bei ihm zu promovieren und mich in dieser Zeit tatkräftig unterstützt hat. Er hat sich immer für mich Zeit genommen und stand jederzeit für Fragen zur Verfügung.

Eine große Hilfe bei der Erstellung dieser Arbeit waren mir auch Holger Kraft, Stefan Lorenz und Jörg Wenzel, denen ich hiermit besonders danken möchte. Mit ihnen konnte ich immer über die in dieser Arbeit dargestellten Probleme diskutieren und bekam dabei viele nützliche Hinweise.

Diese Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Finanzmathematik am Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern. Hiermit möchte ich mich nochmals für die in dieser Zeit erhaltenen Hilfen jeglicher Art bedanken. Dieser Dank gilt auch allen jetzigen und ehemaligen Kollegen, von denen ich Johanna de Kock, Clarissa Himmelsbach, Martin Krekel, Jens Mandavid, Marlene Müller, Michael Primm und Markus Starck namentlich erwähnen möchte. Die Mitglieder der Tischtennis-Mannschaft der Abteilung werde ich natürlich auch nicht vergessen.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Freundin Katrin Schneider bedanken, die in der Zeit, in der ich diese Arbeit verfaßt habe, viel Geduld aufbringen mußte und mit ihrer liebevollen Art jederzeit eine wertvolle Unterstützung war.

Wiesbaden, im März 2007

Tin-Kwai Man

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	I
Inhaltsverzeichnis	V
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XI
Abkürzungsverzeichnis	XIII
Symbolverzeichnis	XV
1 Grundlagen	1
1.1 Mathematische Grundlagen	1
1.1.1 Stochastische Differentialgleichungen	1
1.1.2 Stochastische Steuerung	7

1.2	Finanzwirtschaftliche Grundlagen	12
1.2.1	Portfolio-Optimierung	13
1.2.2	Optionsbewertung	17
2	Optimale Portfolios bei fixen Transaktionskosten	29
2.1	Einleitung	29
2.2	Der Modellrahmen	33
2.2.1	Das Modell von Morton und Pliska	33
2.2.2	Die asymptotische Approximation von Atkinson und Wilmott	39
2.2.3	Die Herleitung der Stillhaltungsmenge und der optimalen Wachstumsrate	41
2.3	Abschätzung der Transaktionskosten und der Wachstumsrate .	44
2.4	Numerische Analyse des Modells	53
2.4.1	Die Stillhaltungsmenge	56
2.4.2	Die asymptotische Wachstumsrate	58
2.4.3	Die erwartete Handelszeit	61
2.4.4	Abschätzung der Transaktionskosten	66
2.4.5	Investition in Optionen	69

Inhaltsverzeichnis	VII
3 Optimale Portfolios bei internationalen Märkten	75
3.1 Einleitung	75
3.2 Der Modellrahmen	76
3.3 Das Portfolio-Problem	82
3.4 Vergleichende statische Analyse	88
4 Optimale Portfolios bei Sprung-Diffusions-Prozessen	101
4.1 Einleitung	101
4.2 Stochastische Steuerung bei Sprung-Diffusions-Prozessen . . .	103
4.3 Der Ein-Aktien-Fall	114
4.3.1 Konstante Zinsrate	117
4.3.2 Stochastische Zinsrate	129
4.4 Internationale Märkte bei Sprung-Diffusions-Prozessen	141
5 Modellierung und Bewertung von Optionen auf Bondindizes	153
5.1 Einleitung	153
5.2 Bondindizes	157
5.2.1 Preisindizes vs. Performanceindizes	157
5.2.2 Bondindizes vs. Bondportfolios	159

5.2.3	Kuponzahlungen	160
5.3	Bewertung von Optionen	162
5.3.1	Eine allgemeine Optionspreisformel für Kupon-Bonds .	162
5.3.2	Das Verfahren von Jamshidian	163
5.3.3	Die „gestörte“ Zinsrate	168
5.3.4	Eine alternative Kalibrierung	171
5.3.5	Korrelationen	177
5.4	Zusammenfassung	180
6	Zusammenfassung	183
	Literaturverzeichnis	187
	Wissenschaftlicher Werdegang	195

Abbildungsverzeichnis

2.1	Stillhaltungsmengen in Szenario 1	56
2.2	Drei Stillhaltungsmengen in Szenario 2	57
2.3	Differenzen der Wachstumsraten	60
2.4	Optimale AW-Raten in Abhängigkeit von k	61
2.5	Handelszeit in Szenario 1	65
2.6	Handelszeit in allen Szenarien	65
2.7	Transaktionsvolumen in allen Szenarien	69
2.8	Wachstumsrate mit Optionen vs. optimale Wachstumsrate	72
2.9	Handelszeit mit Optionen vs. Handelszeit bei Aktien	73
3.1	Erste Bedingung an ρ_3	81
3.2	Zweite Bedingung an ρ_3	81
3.3	Benötigtes Anfangskapital	91

3.4	Benötigtes Anfangskapital für $\rho_3 = -0,5$	92
3.5	Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_1	93
3.6	Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_2	94
3.7	Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_3	95
3.8	Optimaler Anteil am inländischen Aktienindex	96
3.9	Optimaler Anteil am ausländischen Aktienindex	97
4.1	Optimaler Aktienanteil bei konstanter Sprunghöhe	124
4.2	Optimaler Aktienanteil bei lognormalverteilter Sprunghöhe . .	127
4.3	Optimaler Aktienanteil bei diskretverteilter Sprunghöhe	128
5.1	Darstellung der eb.rexx-Indexfamilie	154

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter für die fünf Szenarien	55
2.2	Optimale Wachstumsraten bei Atkinson und Wilmott	59
2.3	Transaktionskosten	68
3.1	Optimaler Anteil am inländischen Aktienindex	98
3.2	Optimaler Anteil am ausländischen Aktienindex	99
3.3	Summe der optimalen Anteile in beiden Indizes	100
5.1	Wiederanlagestrategie der Kupons	161
5.2	Diskontfaktoren für Beispiel 5.5	166
5.3	Fünf Kalibrierungen an Optionen jeweils gleicher Laufzeit . . .	176
5.4	Zwei Kalibrierungen an Optionen unterschiedlicher Laufzeit . .	177
5.5	Zwei Kalibrierungen an Optionen unterschiedlicher Laufzeit II	178
5.6	Schätzer für die Parameter der Returns	179

Abkürzungsverzeichnis

Aufl.	Auflage
BP	Basispunkt
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
EUR	Euro
evtl.	eventuell
f.	folgende
ff.	fortfolgende
f.s.	fast sicher
HARA	hyberbolic absolute risk-aversion
HJB-Gleichung	Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung
Hrsg.	Herausgeber
i.d.R.	in der Regel
JPY	Japanische Yen
MC	Monte Carlo
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
S.	Seite
u.a.	unter anderem
vgl.	vergleiche
vs.	versus
z.B.	zum Beispiel

Symbolverzeichnis

$ \cdot , \ \cdot\ $	geeignete Normen
∂M	Rand der Menge M
M'	Transponierte der Matrix M
x^+	Positivteil von x
f_x	Ableitung der Funktion f nach der Variablen x
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
$C^{1,2}$	Menge der einmal in der ersten Variablen und zweimal in der zweiten Variablen stetig differenzierbaren Funktionen
$\det(M)$	Determinante der Matrix M
$\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$	Diagonalmatrix mit den Einträgen x_1, \dots, x_n
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
e_i	i -ter Einheitsvektor
\exp	Exponentialfunktion
\lim	Limes
\ln	Logarithmus zur Basis e
$\max M, \min M$	Maximum bzw. Minimum der Menge M
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\text{Sp}(M)$	Spur der Matrix M
$\sup M, \inf M$	Supremum bzw. Infimum der Menge M
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsvariablen X

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mathematische Grundlagen

1.1.1 Stochastische Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt formulieren wir einige Sätze über Sprung-Diffusions-Prozesse, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen. Fällt die Sprungkomponente weg, erhalten wir als Spezialfall einen Itô-Prozeß. Deswegen gelten die Sätze auch speziell für Itô-Prozesse. Sei $[t_0, t_1]$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ das betrachtete Zeitintervall¹ und $m, l, n, d \in \mathbb{N}$, die Dimensionen der Prozesse, mit denen wir später arbeiten werden. Weiter sei mit $(\Omega^{\hat{W}}, \mathcal{F}^{\hat{W}}, P^{\hat{W}})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum gegeben, auf dem eine m -dimensionale Brownsche Bewegung \hat{W} definiert ist. Die dazugehörige

¹ In unseren späteren Anwendungen sei o.B.d.A. $t_0 = 0$ und t_1 so groß, daß es hinter dem Betrachtungszeitpunkt T des Endvermögens oder der Optionsfälligkeit liegt. Wir werden dies an den entsprechenden Stellen nicht mehr erwähnen.

kanonische Filterung bezeichnen wir mit $\{\mathcal{F}_t^{\hat{W}}\}_{t \in [t_0, t_1]}$.² Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{\hat{N}}, \mathcal{F}^{\hat{N}}, P^{\hat{N}})$ sei ein l -dimensionaler Poisson-Prozeß \hat{N} mit Intensität $\hat{\lambda}$ und kanonischer Filterung $\{\mathcal{F}_t^{\hat{N}}\}_{t \in [t_0, t_1]}$ definiert. Wir betrachten jetzt den Produktraum

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) := (\Omega^{\hat{W}} \times \Omega^{\hat{N}}, \mathcal{F}^{\hat{W}} \otimes \mathcal{F}^{\hat{N}}, P^{\hat{W}} \otimes P^{\hat{N}})$$

und die dazugehörige Filterung $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$. Für $t \in [t_0, t_1]$ sei $\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$, wobei $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t^{\hat{W}} \otimes \mathcal{F}_t^{\hat{N}}$ ist und \mathcal{N} das System der Teilmengen von Nullmengen bzgl. P bezeichnet. Die auf diesem Produktraum definierten Prozesse W und N definiert durch $W(t, (\omega_1, \omega_2)) := \hat{W}(t, \omega_1)$ und $N(t, (\omega_1, \omega_2)) := \hat{N}(t, \omega_2)$, $t \in [t_0, t_1]$, $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, sind unabhängig³ und nach Konstruktion wieder eine Brownsche Bewegung bzw. ein Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda = \hat{\lambda}$.⁴ Da wir in diesem Abschnitt Sprung-Diffusions-Prozesse betrachten wollen, werden wir an dieser Stelle auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum arbeiten. Betrachten wir nur Itô-Prozesse, wie z.B. in Abschnitt 1.2.2 oder in Kapitel 3, dann genügt auch der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{\hat{W}}, \mathcal{F}^{\hat{W}}, P^{\hat{W}})$.

Die Modellierung von Finanzmärkten durch Sprung-Diffusions-Prozesse wird in der gleichnamigen Dissertation von Volz (2002) behandelt. Für Fragen bzgl. Sprung-Diffusions-Prozessen, die über die hier angegebenen Definitionen und Sätze hinausgehen, verweisen wir auf diese Arbeit.

Wir definieren nun, was die starke Lösung einer stochastischen Differentialgleichung für Sprung-Diffusions-Prozesse ist. In dieser Arbeit befassen wir uns nicht mit schwachen Lösungen, deswegen sagen wir im weiteren Verlauf auch nur Lösung und meinen damit die starke Lösung. Danach werden wir die Exi-

² Zu einem stochastischen Prozeß gehört die Familie von Zufallsvariablen und eine Filterung (siehe z.B. Korn und Korn (2001), S. 15). Falls wir bei stochastischen Prozessen keine Filterung explizit angeben, setzen wir an der Stelle die kanonische Filterung voraus.

³ Siehe z.B. Volz (2002), Lemma 3.1.

⁴ Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir die Abhängigkeit stochastischer Prozesse von $\omega \in \Omega$ der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

stanz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung untersuchen und die Momente abschätzen. Wir formulieren die Itô-Formel für Sprung-Diffusionsprozesse und geben einen Satz an, der uns in einem Spezialfall die Lösung liefert.⁵

Definition 1.1 (Starke Lösung)

Der n -dimensionale stochastische Prozeß X mit⁶

$$\begin{aligned} X(0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ fest,} \\ X_i(t) &= x_i + \int_0^t \mu_i(s, X(s)) ds + \sum_{j=1}^l \int_0^t \delta_{ij}(s, X(s)) dN_j(s) \\ &\quad + \sum_{j=0}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X(s)) dW_j(s), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$, wobei die Koeffizienten $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n,l}$ und $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$ gegebene Funktionen sind und für alle $t \geq 0$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_0^t |\mu_i(s, X(s))| ds &< \infty, \\ \sum_{j=1}^l \int_0^t |\delta_{ij}(s, X(s)) \lambda(s)| ds &< \infty, \\ \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}^2(s, X(s)) ds &< \infty, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$, erfüllen, ist eine **starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung**

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \delta(t, X(t)) dN(t) + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (1.1)$$

mit Anfangswert $X(0) = x$.⁷

⁵ Im Spezialfall, wenn die Prozesse Itô-Prozesse sind, verweisen wir für die folgende Definition und Sätze auf Korn und Korn (2001) oder Karatzas und Shreve (1991).

⁶ Bei stochastischen Prozessen gelten diese und weitere Eigenschaften nur f.s. bzgl. des betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaßes, diese Angabe wird aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

⁷ Wir verwenden in dieser Arbeit die in Literatur übliche symbolische Differentialschreibweise.

Im nächsten Satz geben wir Bedingungen an, unter denen für die stochastische Differentialgleichung (1.1) eine Lösung existiert und für die die Lösung sogar eindeutig ist. Mit $|\cdot|$ bezeichnen wir die Euklidische Norm.

Satz 1.2 (Existenz und Eindeutigkeit)

Falls die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung (1.1) die folgenden drei Bedingungen erfüllen, dann hat sie eine eindeutige, mit Wahrscheinlichkeit 1 rechtsstetige Lösung. Seien $t \geq 0$, $h > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die Bedingungen lauten:

- (i) *Es existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 + |\delta(t, x)\lambda(t)|^2 \leq C(1 + |x|^2).$$

- (ii) *Für alle $R > 0$ existiert eine Konstante C_R , so daß für $|x| \leq R$ und $|y| \leq R$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned} |\mu(t, x) - \mu(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \\ + |(\delta(t, x) - \delta(t, y))\lambda(t)|^2 \leq C_R|x - y|^2 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

- (iii) *Es existiert eine Konstante $C > 0$ und eine Funktion $g(h) \geq 0$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) \rightarrow 0$, so daß*

$$\begin{aligned} |\mu(t + h, x) - \mu(t, x)|^2 + |\sigma(t + h, x) - \sigma(t, x)|^2 \\ + |(\delta(t + h, x) - \delta(t, x))\lambda(t)|^2 \leq C(1 + |x|^2)g(h) \end{aligned}$$

gilt.

Beweis: Siehe Volz (2002), S. 27, der auf Gichman und Skorochod (1971) verweist.⁸ □

⁸ Oft wird der Name des ersten Autors auch mit Gihman übersetzt.

Ist eine weitere Bedingung erfüllt, können sogar die Momente der Lösung abgeschätzt werden.

Satz 1.3 (Abschätzung der Momente)

Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung nun auf dem Intervall $[0, T]$ für $T > 0$. Wenn zu den drei Bedingungen aus Satz 1.2 zusätzlich auch noch

$$|\delta(t, x)\lambda(t)|^p \leq C(1 + |x|^p), \quad p = 2, 3, \dots, 2n,$$

mit einer Konstanten $C > 0$ erfüllt ist, dann hat die Lösung endliche Momente bis einschließlich $2n$ -ter Ordnung und es gilt

$$\mathbb{E} \left(|X(t)|^{2p} \right) \leq C_p(1 + |x|^{2p}), \quad p = 1, \dots, n,$$

wobei C_p von C , p und T abhängt.

Beweis: Siehe wieder Volz (2002), S. 28. Auch in diesem Fall zitiert er das Ergebnis von Gichman und Skorochod (1971). \square

Nun formulieren wir eine Itô-Formel für Sprung-Diffusions-Prozesse.⁹ Ist X speziell ein Itô-Prozeß, so verschwinden die beiden letzten Summanden.

Satz 1.4 (Itô-Formel)

Sei $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und X die Lösung der n -dimensionalen stochastischen Differentialgleichung

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \delta(t, X(t-)) dN(t) + \sigma(t, X(t)) dW(t)$$

mit Anfangswert $X(0) = x$ und progressiv meßbaren Prozessen als Koeffizienten.¹⁰ Dann ist $f(t, X(t))$ ebenfalls wieder ein Sprung-Diffusions-Prozeß

⁹ Siehe auch Volz (2002), S. 25f.

¹⁰Die Bedingungen aus Definition 1.1 seien dann für jedes $\omega \in \Omega$ erfüllt.

und mit der Definition $\sigma^* = \sigma\sigma'$ gilt

$$\begin{aligned}
f(t, X(t)) &= f(0, x) + \int_0^t \left[f_t(s, X(s)) \right. \\
&\quad + 0,5 \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(s, X(s)) \sigma_{ij}^*(s, X(s)) \\
&\quad + \left. \sum_{i=1}^n f_{x_i}(s, X(s)) \mu_i(s, X(s)) \right] ds \\
&\quad + \int_0^t f_x(s, X(s)) \sigma(s, X(s)) dW(s) \\
&\quad + \int_0^t f_x(s, X(s-)) \delta(s, X(s-)) dN(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_S} \left[f(s_i, X(s_i)) - f(s_i, X(s_i-)) \right. \\
&\quad \quad \left. - f_x(s_i, X(s_i-)) (X(s_i) - X(s_i-)) \right].
\end{aligned}$$

Dabei entspricht n_S der Anzahl der Sprünge zwischen 0 und t , die an den Zeitpunkten s_i , $i = 1, \dots, n_S$, stattfinden.

Der nächste Satz ist ein Spezialfall des Satzes über die Variation der Konstanten für Sprung-Diffusions-Prozesse.

Satz 1.5

Seien μ , δ und σ progressiv meßbare Prozesse mit

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\mu(s)| ds &< \infty, \\
\sum_{i=1}^l \int_0^t |\delta_i(s) \lambda_i(s)| ds &< \infty, \\
\sum_{i=1}^m \int_0^t \sigma_i^2(s) ds &< \infty.
\end{aligned}$$

Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = X(t-)[\mu(t) dt + \delta(t) dN(t) + \sigma(t) dW(t)], \quad X(0) = x,$$

die eindeutige Lösung

$$X(t) = x \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu(s) - 0,5 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(s) \right) ds + \sum_{i=1}^l \int_0^t \ln(1 + \delta_i(s)) dN_i(s) + \int_0^t \sigma dW(s) \right\}.$$

Beweis: Dieser Satz wird in Volz (2002), S. 20ff. bewiesen. Den Satz über die Variation der Konstanten für Itô-Prozesse findet man z.B. bei Korn und Korn (2001). \square

1.1.2 Stochastische Steuerung

In diesem Abschnitt stellen wir das Handwerkszeug zur Berechnung optimaler Portfolios zur Verfügung. Dazu präsentieren wir einen Verifikationssatz für Lösungen der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung). Merton (1969, 1971, 1990) verwendete als erster die Theorie der stochastischen Steuerung, um Portfolio-Probleme zu lösen.^{11,12} In dieser Arbeit wird sie benötigt, um die optimale Portfoliostrategie in Kapitel 3 herzuleiten. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt gelten die folgenden Formulierungen nur für Itô-Prozesse. Wir halten diesen Abschnitt bewußt kurz und verweisen für eine Motivation der verwendeten Begriffe auf Abschnitt 4.2, in dem wir eine Version des Verifikationssatz für Spung-Diffusions-Prozesse herleiten. Dieser Abschnitt endet mit einem Algorithmus, mit dem man stochastische Steuerungsprobleme lösen kann. Wir beginnen nun mit der Definition der stochastischen Steuerung und der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung.

¹¹Siehe dazu auch Korn (1997).

¹²Ein weiterer oft verwendeter Ansatz zur Portfolio-Optimierung ist die Martingalmethode, siehe Cox und Huang (1989, 1991), Karatzas, Lehoczky und Shreve (1987) oder wieder Korn (1997).

Definition 1.6 (Steuerung und gesteuerte Differentialgleichung)

Ein d -dimensionaler stochastischer Prozeß u heißt **Steuerung**, falls u progressiv meßbar ist und nur Werte in einer abgeschlossenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^d$ annimmt. Ein n -dimensionaler Itô-Prozeß X heißt **gesteuerte stochastische Differentialgleichung**, falls er folgende Form besitzt:¹³

$$dX^u(t) = \mu(t, X^u(t), u(t)) dt + \sigma(t, X^u(t), u(t)) dW(t), \quad X^u(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Dabei sollen die Koeffizientenfunktionen folgende Voraussetzungen erfüllen.

Voraussetzungen 1.7 (Koeffizientenfunktionen)

Sei $Q_0 := [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Die Koeffizientenfunktionen

$$\mu : \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \sigma : \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$$

seien stetig und es gelte $\mu(\cdot, \cdot, u), \sigma(\cdot, \cdot, u) \in C^1(\bar{Q}_0)$ für alle $u \in U$. Des Weiteren seien mit einer Konstanten $C > 0$ die folgenden Ungleichungen für alle $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in U$ erfüllt:

$$\begin{aligned} |\mu_t| + |\mu_x| &\leq C, \\ |\sigma_t| + |\sigma_x| &\leq C, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\mu(t, x, u)| &\leq C(1 + |x| + |u|), \\ |\sigma(t, x, u)| &\leq C(1 + |x| + |u|). \end{aligned}$$

Mit $|\cdot|$ wird hierbei die Euklidische bzw. die Spektralnorm bezeichnet.

Damit wird die Existenz und Eindeutigkeit gesteuerter stochastischer Differentialgleichungen garantiert. Nun werden wir angeben, welche Steuerungen überhaupt zulässig sind.

¹³In unserer Notation werden wir beim Prozeß X oft die Abhängigkeit von der Steuerung u vernachlässigen.

Definition 1.8 (Zulässige Steuerung)

Eine Steuerung u heißt **zulässig**, falls die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (1.2) für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $X = \{X(t)\}_{t \in [t_0, t_1]}$ besitzt und die beiden Ungleichungen

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} |u(s)|^k ds \right) < \infty$$

und

$$\mathbb{E}^{t_0, x_0} \left(\|X(\cdot)\|^k \right) := \mathbb{E}^{t_0, x_0} \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} |X(s)|^k \right) < \infty \quad (1.3)$$

jeweils für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Mit $\mathcal{A}(t_0, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Steuerungen beim Startwert (t_0, x_0) .

Wie bereits erwähnt betrachten wir in dieser Arbeit nur starke und keine schwachen Lösungen von stochastischen Differentialgleichung, deswegen ist unsere Definition von zulässigen Steuerungen einschränkender als üblich in der Theorie der stochastischen Steuerung (siehe z.B. Fleming und Sonner (1993)). Aus Satz 1.2 folgt die Existenz und Eindeutigkeit von gesteuerten stochastischen Differentialgleichung für beschränkte, progressiv meßbare Prozesse mit stetigen Pfaden.

Sei nun $Q := [t_0, t_1) \times O$ und durch

$$\tau := \inf \{t \in [t_0, t_1] \mid (t, X(t)) \notin Q\}$$

der Austrittzeitpunkt von X aus O gegeben. Mit einer Funktion Ψ , die den Nutzen der gesteuerten Differentialgleichung mißt und die der polynomialen Wachstumsbedingung

$$|\Psi(t, x)| \leq K(1 + |x|^k) \quad (1.4)$$

mit $K > 0$ und einem $k \in \mathbb{N}$ genügt, können wir nun das Steuerungsproblem formulieren.

Definition 1.9 (Stochastisches Steuerungsproblem)

Das stochastische Steuerungsproblem lautet

$$\max_{u \in \mathcal{A}(t_0, x_0)} J(t_0, x_0; u)$$

mit

$$J(t_0, x_0; u) := \mathbb{E}^{t_0, x_0}(\Psi(\tau, X(\tau))).$$

Durch J wird also der erwartete Nutzen angegeben und mit

$$V(t, x) := \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x; u), \quad (t, x) \in Q,$$

sei nun die Wertfunktion definiert, die den Verlauf des maximalen Nutzens in Abhängigkeit der Anfangsparameter (t, x) angibt. Es gelte $\sigma^* := \sigma\sigma'$, $(t, x) \in Q$ und $u \in U$. Wir definieren den Operator A^u für $G \in C^{1,2}(Q)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A^u G(t, x) &:= G_t(t, x) + 0,5 \sum_{i,j=1}^n G_{x_i x_j}(t, x) \sigma_{ij}^*(t, x, u) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n G_{x_i}(t, x) \mu_i(t, x, u). \end{aligned}$$

Mit e_i sei hierbei der i -te n -dimensionale Einheitsvektor bezeichnet. Damit können wir den Verifikationssatz formulieren.

Theorem 1.10 (Verifikationssatz)

Sei $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$ mit $|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k)$ für geeignete Konstanten $K > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Lösung der HJB-Gleichung

$$\sup_{u \in U} A^u G(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (1.5)$$

mit der Randbedingung

$$G(t, x) = \Psi(t, x), \quad (t, x) \in \partial^* Q := ([t_0, t_1] \times \partial O) \cup (\{t_1\} \times \bar{O}).$$

Dann gelten die folgenden Resultate:

- (i) $G(t, x) \geq J(t, x; u)$ für alle $(t, x) \in Q$ und $u \in \mathcal{A}(t, x)$.
- (ii) Falls für alle $(t, x) \in Q$ ein $u^* \in \mathcal{A}(t, x)$ existiert, derart daß für alle $s \in [t, \tau]$ die Beziehung

$$u^*(s) \in \arg \max_{u \in U} (A^u G(s, X^*(s)))$$

gilt, wobei X^* die zu u^* gehörige Lösung der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung ist,¹⁴ dann erhalten wir

$$G(t, x) = V(t, x) = J(t, x; u^*).$$

u^* ist dann die optimale Steuerung.

Beweis: Dieser Verifikationssatz ist ein Spezialfall des in Kapitel 4 formulierten und bewiesenen Verifikationssatzes. \square

Zum Lösen des stochastischen Steuerungsproblems kann man nun nachfolgenden dreischrittigen Algorithmus anwenden.¹⁵

Algorithmus 1.11 (Lösung des Steuerungsproblems)

- (i) Für festes $(t, x) \in Q$ löse die Maximierungsaufgabe (1.5) in der HJB-Gleichung in Abhängigkeit der unbekanntenen Funktion G und ihren partiellen Ableitungen.
- (ii) Sei

$$u^*(s) := u^*(s, x, G(s, x), G_t(s, x), G_x(s, x), G_{xx}(s, x))$$

eine Lösung der Maximierungsaufgabe und damit ein Kandidat für die optimale Steuerung. Löse dann die partielle Differentialgleichung

$$A^{u^*(t)} G(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q,$$

¹⁴Da der Wert von $X^*(s)$ nur von $u^*(r)$ für $r \in [t_0, s)$ abhängt, handelt es sich hier tatsächlich um eine explizite Definition, nicht um eine implizite.

¹⁵Siehe auch Korn und Korn (2001).

mit der Randbedingung $G(t, x) = \Psi(t, x)$, $(t, x) \in \partial^* Q$. Da u^* das Optimierungsproblem aus (i) löst, kann das Supremum weggelassen werden. Die Lösung wiederum eingesetzt in u^* führt zu einem Kandidaten für die optimale Steuerung, der unabhängig von G ist.

- (iii) Jetzt sind noch die benötigten Voraussetzungen und evtl. getroffene Annahmen zu überprüfen! Speziell müssen G die Eigenschaften der Wertfunktion aufweisen und u^* zulässig sein.

1.2 Finanzwirtschaftliche Grundlagen

Der zentrale Untersuchungsgegenstand in diesem Abschnitt ist ein **Finanzmarkt**. Dieser Markt sei vollkommen, d.h. alle Finanztitel seien beliebig teilbar, es gebe keine Transaktionskosten, Steuern oder institutionellen Beschränkungen wie Leerverkaufsverbote. Außerdem seien Soll- und Habenzinsen gleich und bei allen Preisen gebe es keine Geld-Brief-Spanne. Alle Marktteilnehmer seien Preisnehmer und besitzen die gleichen Informationen. Das Ausfallrisiko von Finanztiteln werde vernachlässigt. Handel sei zu jedem Zeitpunkt möglich. Formal wird ein Finanzmarkt durch einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit einer Filterung $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, t_0]}$, $t_0 > 0$, die die üblichen Bedingungen erfüllt, beschrieben.¹⁶ Für den Betrachtungszeitraum $[0, t_0]$ sind auf dieser Basis $M + 1$ positive, progressiv meßbare Itô-Prozesse S^0, S^1, \dots, S^M , gegeben, die jeweils den Preisprozeß eines Finanztitels repräsentieren. Beispiele für solche Finanztitel sind Aktien oder Anleihen. Der Preisprozeß S^0 des 0-ten Finanztitels hat hierbei die ausgezeichnete Aufgabe eines **Numéraires**, d.h. er ist strikt positiv. Bei der Optionsbewertung werden Preise bzgl. dieses Numéraires betrachtet. Ein Numéraire kann jeder

¹⁶Die Filterung ist also rechtsstetig und \mathcal{F}_0 enthält bereits alle P -Nullmengen aus \mathcal{F} . Siehe z.B. Korn und Korn (2001).

Finanztitel mit strikt positivem Preisprozeß werden. Die folgenden Begriffe sind für unsere weiteren Betrachtungen wichtig.

Definition 1.12

- (i) Eine **Handelsstrategie** ist ein lokal beschränkter, vorhersehbarer, stochastischer Prozeß $h = (h^0, \dots, h^M) \in \mathbb{R}^{M+1}$.
- (ii) Der **Vermögensprozeß** bzgl. der Handelsstrategie h wird definiert durch

$$V(h) = \sum_{i=0}^M h^i S^i.$$

- (iii) Eine Handelsstrategie h heißt **selbstfinanzierend**, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$dV(t, h) = \sum_{i=0}^M h^i(t) dS^i(t).$$

Bei einer Handelsstrategie h beschreibt also $h^i(t)$ die Anzahl der Anteile des zur Zeit t gehaltenen i -ten Finanztitels, $i = 0, \dots, M$. Der Vermögensprozeß gibt dann den Wert des Gesamtportfolios an. Bei der Eigenschaft der Selbstfinanzierung ist zu beachten, daß eine instantane Änderung des Vermögensprozesses nur durch eine Wertänderung in den $M + 1$ Finanztiteln zustande kommen darf. Die Zuführung bzw. der Abzug von finanziellen Mitteln ist nicht gestattet.

1.2.1 Portfolio-Optimierung

In diesem Abschnitt wollen wir an einem Beispiel zeigen, wie die Theorie der stochastischen Steuerung auf die Portfolio-Optimierung angewendet werden kann und damit Mertons ursprüngliches Problem lösen. Wie in der ganzen Arbeit werden wir auch hier keinen Konsum betrachten, sondern nur das

erwartete Endvermögen maximieren. Ein Investor, der der daraus resultierenden Portfoliostrategie folgt, wird im weiteren Verlaufs dieser Arbeit und konform mit der bestehenden Literatur Merton-Investor genannt. Der Nutzen des Endvermögens wird anhand einer Nutzenfunktion gemessen, deren Definition wir zuerst angeben möchten.¹⁷

Definition 1.13 (Nutzenfunktion)

Eine stetig differenzierbare, strikt konkave Funktion $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die die Bedingungen

$$U'(0) := \lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = +\infty \quad \text{und} \quad U'(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$$

erfüllt, heißt **Nutzenfunktion**.

Die Konkavität sichert sowohl, daß der Nutzen für größere Vermögen zunimmt als auch den abnehmenden Grenznutzen, d.h. je mehr Geld man besitzt, desto weniger nützlich ist eine zusätzliche Geldeinheit. Es tritt also ein Sättigungseffekt ein. Die Nutzenfunktionen $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, und $U(x) = \ln(x)$, die wir in dieser Arbeit betrachten, gehören zu der sogenannten Klasse der HARA-Nutzenfunktionen und erfüllen die geforderte polynomiale Wachstumsbedingung, vgl. dazu (1.4).

Der Merton-Investor kann sein Geld in eine Aktie und ein Geldmarkkonto anlegen, das risikolos mit der konstanten Rate r verzinst wird (vgl. dazu auch Definition 1.29).¹⁸ Die Aktie habe eine konstante Drift μ und Volatilität σ . Die Vermögensgleichung des Investors lautet nun¹⁹

$$dX(t) = X(t)[(r + u(\mu - r)) dt + u\sigma dW(t)], \quad X(0) = x,$$

¹⁷ Siehe z.B. Korn (1997). Für weitere Eigenschaften von Nutzenfunktionen verweisen wir auch auf Trautmann (2006).

¹⁸ Es ist problemlos möglich, eine beliebige Anzahl von Aktien als Anlagemöglichkeit zuzulassen, wir möchten aber das Beispiel einfach halten und machen deshalb diese Annahme.

Siehe z.B. Korn und Korn (2001) für den allgemeinen Fall.

¹⁹ Anders als in Definition 1.12 nennen wir sie hier nun X .

wobei x seinem Anfangsvermögen entspricht, und kann als gesteuerte stochastische Differentialgleichung aufgefaßt werden. Die Steuerung u entspricht dabei dem prozentualen Anteil des Vermögens, der in die Aktie investiert wird. Der Anlagehorizont sei T und der Investor besitze eine Nutzenfunktion der Form $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$, $0 < \gamma < 1$. Dann lautet das stochastische Steuerungsproblem

$$\max_{u \in [\alpha_1, \alpha_2]} \mathbb{E}^{t,x} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right).$$

Für unbeschränkten Wertebereich für x muß der Wertebereich für die Steuerung u beschränkt sein, damit die Voraussetzungen 1.7 an die Koeffizienten erfüllt sind. Deswegen maximieren wir hier in einem Intervall $[\alpha_1, \alpha_2]$ mit gegebenen Konstanten α_1, α_2 . Wir werden später sehen, daß der optimale Prozeß konstant sein wird und sich diese Bedingung im Nachhinein als nicht einschränkend erweist. Sei G die Wertfunktion des Problems. Dann muß G die HJB-Gleichung erfüllen, die folgendermaßen lautet:

$$0 = \max_{u \in [\alpha_1, \alpha_2]} \left\{ G_t(t, x) + 0,5u^2\sigma^2x^2G_{xx}(t, x) + (r + u(\mu - r))xG_x(t, x) \right\}.$$

Wir führen jetzt Algorithmus 1.11 aus.

- (i) Wir nehmen an, daß G konkav in x ist und der Vermögensprozeß strikt positiv bleibt. Dann liefert die first-order condition den Kandidaten für den optimalen Anteil:

$$u(t) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{G_x(t, x)}{xG_{xx}(t, x)}.$$

- (ii) Rückeinsetzung in die HJB-Gleichung liefert

$$0 = G_t(t, x) - 0,5 \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{G_x^2(t, x)}{G_{xx}(t, x)} + rxG_x(t, x).$$

Mit dem Ansatz $G(t, x) = f(t)\frac{1}{\gamma}x^\gamma$ und der Endbedingung $f(T) = 1$ ist diese Gleichung äquivalent zu folgender gewöhnlicher Differentialgleichung:

$$0 = f'(t) + \left[-0,5 \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1}{1 - \gamma} + r \right] f(t).$$

Nach einer Substitution läßt sich mittels Variation der Konstanten die Form von f berechnen, die wir hier aber nicht angeben wollen. Es reicht zu wissen, daß f strikt positiv ist.²⁰ Mit dem Ansatz für G läßt sich nun auch u darstellen, und wir erhalten als Kandidaten für die optimale Steuerung

$$u(t) = \frac{1}{1 - \gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

- (iii) Jetzt müssen wir noch die getroffenen Annahmen überprüfen. Da f positiv ist, ist $G(t, x) = f(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ konkav in x und eine $C^{1,2}$ -Lösung der HJB-Gleichung, die die polynomiale Wachstumsbedingung erfüllt. Mit den Sätzen aus Abschnitt 1.1.1 gilt: Die mit dem optimalen u eingesetzte Vermögensgleichung hat eine eindeutige, positive Lösung, deren Momente beschränkt sind. Somit ist die Voraussetzung der Positivität der Vermögensgleichung und der Beschränktheit der Momente (1.3) aus der Definition einer zulässigen Steuerung erfüllt. Da die optimale Strategie u konstant ist, können α_1, α_2 so gewählt werden, daß sie keine Einschränkung darstellen.

Somit haben wir das Problem des Merton-Investors für eine Aktie gelöst. Bemerkenswert ist noch, daß der optimale Anteil in der Aktie konstant ist. Somit muß der Investor zeitstetig handeln, damit er jederzeit das optimale Portfolio hält. Bei Existenz von Transaktionskosten, würde das zum sofortigen Ruin führen, vgl. dazu auch Kapitel 2. Hat der Merton-Investor die Nutzenfunktion $U(x) = \ln(x)$, so lautet die optimale Portfoliostrategie²¹

$$u(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

²⁰ Siehe hierfür z.B. Korn und Korn (2001).

²¹ Siehe z.B. Korn (1997), S. 71f.

1.2.2 Optionsbewertung

In diesem Abschnitt möchten wir eine Einführung in die Theorie der Optionsbewertung geben. Der Aufbau dieses Abschnitts folgt Björk (1997) sowie Bingham und Kiesel (1998). Sätze, deren Beweise hier nicht angegeben sind, können dort nachgelesen werden.²² Da wir im weiteren Verlauf eine relative Bewertung bzgl. des jeweiligen Numéraires durchführen, erhalten die diskontierten Preis- bzw. Vermögensprozesse eine eigene Bezeichnung.

Definition 1.14

- (i) Der **diskontierte Preisprozeß** $Z = (Z^0, \dots, Z^M) \in \mathbb{R}^{M+1}$ sei definiert durch

$$Z^i = \frac{S^i}{S^0}, \quad i = 0, \dots, M.$$

- (ii) Der **diskontierte Vermögensprozeß** bzgl. der Handelsstrategie h ist

$$V^Z(h) = \frac{V(h)}{S^0}.$$

Die Selbstfinanzierungseigenschaft hängt nicht von der Wahl des Numéraires ab.

Satz 1.15 (Numéraire-Invarianz)

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie bleibt auch nach einem Numéraire-Wechsel selbstfinanzierend.

Korollar 1.16

Eine Handelsstrategie h ist genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$dV^Z(t, h) = \sum_{i=1}^M h^i(t) dZ^i(t)$$

gilt.

²²Einen guten Einstieg in diese Thematik verschafft auch Protter (2001).

Definition 1.17

Ein **bedingter Anspruch** (in T), $T \in [0, t_0]$, ist eine integrierbare oder nicht-negative, \mathcal{F}_T -meßbare, reellwertige Zufallsvariable.

Von besonderer Bedeutung sind die beiden folgenden bedingten Ansprüche:

Definition 1.18

Eine **Europäische Call-Option** bzw. **Put-Option** mit Basispreis $K \geq 0$ auf den Finanztitel S^i , $i = 1, \dots, M$, liefert zum Zeitpunkt $T \in [0, t_0]$ die Auszahlung $C(T)^e = [S^i(T) - K]^+$ bzw. $P(T)^e = [K - S^i(T)]^+$.

Der Halter einer Call-Option (Put-Option) ist somit berechtigt, aber nicht verpflichtet, im Zeitpunkt T den Finanztitel S^i zum Preis K zu beziehen (zu verkaufen). Unser Hauptziel besteht in der Bewertung von bedingten Ansprüchen mittels Arbitrageüberlegungen. Dafür benötigen wir den Begriff des äquivalenten Martingalmaßes.

Definition 1.19

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt **äquivalentes Martingalmaß** bzgl. des Numéraires S^0 , falls es äquivalent zum Maß P und der diskontierte Preisprozeß Z ein lokales Martingal bzgl. Q ist. Wenn Z sogar ein Martingal bzgl. Q ist, dann heißt Q **starkes äquivalentes Martingalmaß**.

Wir schreiben auch kurz Martingalmaß und meinen damit äquivalentes Martingalmaß bzgl. S^0 . Zur Herleitung von Preisen von bedingten Ansprüchen verwenden wir nur eine bestimmte Klasse von Handelsstrategien.

Definition 1.20

Sei Q ein Martingalmaß und h eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann heißt h **zulässig** bzgl. Q , wenn der diskontierte Vermögensprozeß $V^Z(h)$ ein Martingal bzgl. Q ist.

Wir definieren nun, was Arbitrage in unserem Finanzmarkt bedeutet.

Definition 1.21

- (i) Eine **Arbitrage-Strategie** bzgl. eines Martingalmaßes Q ist eine zulässige, selbstfinanzierende Handelsstrategie, so daß für den dazu korrespondierenden Vermögensprozeß gilt:

$$V(0) = 0 \quad \text{und} \quad V(T) \geq 0 \quad \text{mit} \quad Q(V(T) > 0) > 0, \quad T \in [0, t_0].$$

- (ii) Ein Finanzmarkt heißt **arbitragefrei**, falls für alle $T \in [0, t_0]$ keine Arbitrage-Strategien existieren.

Wir betrachten im folgenden nur arbitragefreie Märkte, da nur in diesen widerspruchsfrei Preise von bedingten Ansprüchen bestimmt werden können. Das Vorliegen von Arbitragefreiheit kann durch die Existenz eines sogenannten Martingalmaßes charakterisiert werden.

Theorem 1.22 (Charakterisierung von Arbitragefreiheit)

Wenn ein Martingalmaß Q existiert, dann ist der Finanzmarkt arbitragefrei.

Beweis: Angenommen, es gebe eine Arbitrage-Strategie h , dann erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$0 = V(0) = V^Z(0) = E_Q(V^Z(T)) > 0.$$

Für alle weiteren Martingalmaße erhalten wir den gleichen Widerspruch. \square

Harrison und Kreps (1979) zeigen, daß für Finanzmärkte in diskreter Zeit und mit nur endlichen Zustandsräumen auch die Umkehrung von Theorem 1.22 gilt. In stetigen Modellierungen bleibt diese Eigenschaft jedoch nicht erhalten.²³ Damit ein bedingter Anspruch durch Arbitrageüberlegungen bewertet werden kann, muß er aus gehandelten Finanztiteln nachgebildet werden können. Diese Eigenschaft wird wie folgt formalisiert.

²³Siehe Delbaen und Schachermayer (1994).

Definition 1.23

- (i) Ein bedingter Anspruch X (bzgl. T) heißt **duplizierbar**, falls es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit der Eigenschaft $V(T, h) = X$ gibt. Diese heißt dann auch **Duplikationsstrategie** für X .
- (ii) Ein Finanzmarkt heißt **vollständig**, falls jeder bedingte Anspruch duplizierbar ist.

Ebenso wie die Arbitragefreiheit läßt sich auch die Vollständigkeit eines Marktes durch Martingalmaße charakterisieren.

Theorem 1.24 (Charakterisierung von Vollständigkeit)

Gegeben sei ein arbitragefreier Finanzmarkt, in dem ein Martingalmaß Q existiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Der Finanzmarkt ist vollständig.
- (ii) Das Martingalmaß ist eindeutig.

Beweis: Dieser Satz findet sich bei Harrison und Pliska (1981, 1983). \square

Wir sind nun in der Lage, den Preis von duplizierbaren bedingten Ansprüchen zu bestimmen.

Theorem 1.25 (Risikoneutrale Bewertung)

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit den Finanztiteln S^0, \dots, S^M , und ein bedingter Anspruch X . Für den Finanzmarkt existiere ein starkes Martingalmaß Q .

- (i) Der Wert $\pi(t, X)$ des bedingten Anspruchs X zur Zeit t läßt sich mit Hilfe der Formel

$$\pi(t, X) = S^0(t) E_Q \left(\frac{X}{S^0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (1.6)$$

berechnen.²⁴

- (ii) Falls X durch die Finanztitel S^0, \dots, S^M , duplizierbar ist, erhalten wir für jedes äquivalente Martingalmaß den gleichen Preis $\pi(t, X)$. Außerdem ist dieser Preis unabhängig von der Wahl der Duplikationsstrategie.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Aussage (ii) nur bei Nicht-Eindeutigkeit des Martingalmaßes bzw. der Duplikationsstrategie Relevanz besitzt.

Beweis: (i) Unter dem starken Martingalmaß Q gilt

$$\frac{\pi(t, X)}{S^0(t)} = E_Q \left(\frac{\pi(T, X)}{S^0(T)} \mid \mathcal{F}_t \right) = E_Q \left(\frac{X}{S^0(T)} \mid \mathcal{F}_t \right),$$

was äquivalent ist zu:

$$\pi(t) = S^0(t) E_Q \left(\frac{X}{S^0(T)} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

- (ii) Sei h eine Duplikationsstrategie zu X . Dann gilt $V(T, h) = X$. Wegen Theorem 1.22 ist unser Markt arbitragefrei. Deswegen muß sogar $V(t, h) = \pi(t, X)$ für alle $t \in [0, T]$ gelten. \square

Ist in einem vollständigen Markt also ein Martingalmaß gegeben, so läßt sich jeder bedingte Anspruch mit Hilfe von Beziehung (1.6) bewerten. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß (1.6) unabhängig von den jeweiligen Risikoeinstellungen der Marktteilnehmer ist. Auch sieht man an der Preisformel (1.6), daß statt des Wahrscheinlichkeitsmaßes P das Martingalmaß Q für die Bewertung von bedingten Ansprüchen herangezogen wird. Insofern betrachten wir in dieser Arbeit Modellierungen bzgl. eines Martingalmaßes Q .

²⁴Der bedingte Erwartungswert bzgl. eines Maßes ist nur f.s. bzgl. dieses Maßes eindeutig, deswegen gelten alle Eigenschaften und Folgerungen auch nur f.s. Im folgenden wird bei der Notation auf diese Angabe verzichtet.

Im folgenden untersuchen wir einen Finanzmarkt, an dem auch Anleihen gehandelt werden.

Definition 1.26

- (i) Eine **Nullkupon-Anleihe** (Bond) mit Fälligkeit $T \in [0, t_0]$ und Nennwert $N \geq 0$ ist ein bedingter Anspruch, aus dem der Inhaber zur Fälligkeit den Nennwert erhält.
- (ii) Eine **Kupon-Anleihe** mit Fälligkeit $T \in [0, t_0]$ und Nennwert $N \geq 0$ ist ein Portefeuille von bedingten Ansprüchen, das dem Inhaber zur Fälligkeit den Nennwert und zusätzlich regelmäßig Kupons auszahlt. Diese Auszahlungen hängen prozentual vom Nennwert ab und sind vorab bekannt.

Insofern können wir Kupon-Anleihen als ein Portefeuille von Bonds auffassen. Solange nicht ausdrücklich etwas anderes vereinbart ist, sei der Nennwert eines Bonds auf 1 normiert. Der Preisprozeß eines Bonds mit Fälligkeit T wird mit $P(\cdot, T)$ bezeichnet.²⁵

Annahmen 1.27

Bzgl. des Bondmarktes werden folgende Annahmen getroffen:

- (i) Für jedes Verfallsdatum $T \in [0, t_0]$ existiert ein Bond.
- (ii) Für ein festes $T \in [0, t_0]$ ist $P(T)$ ein strikt positiver, adaptierter Itô-Prozeß mit $P(T, T) = 1$.
- (iii) Für jedes $t \in [0, T]$ ist $P(t, T)$ in T zweimal stetig differenzierbar.

Bei der letzten Annahme benötigen wir die zweimalige Differenzierbarkeit für Arbitragemodelle wie das Modell von Ho und Lee (1986), das wir in Kapitel 4

²⁵Die gleiche Bezeichnung P für den Wert von Put-Optionen und für Bondpreise sollte keine Verwirrung stiften, da bei Put-Optionen P^e das Superskript „e“ hat.

betrachten. Zur Wahl der Namen und Bezeichnungen in folgender Definition siehe auch Sandmann (2001).

Definition 1.28

Seien $T, T_1, T_2 \in [0, t_0]$ mit $T_1 < T_2$.

- (i) Die **Terminzinsrate**²⁶ $f^e(t, T_1, T_2)$ zur Zeit $t \in [0, T_1]$ für den Zeitraum $[T_1, T_2]$ wird definiert durch

$$f^e(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

- (ii) Die **Kassazinsrate** $r^e(t, T)$ zur Zeit $t \in [0, T]$ für den Zeitraum $[t, T]$ wird definiert durch

$$r^e(t, T) = f^e(t, t, T).$$

- (iii) Die **konforme Terminzinsrate**²⁷ $f(t, T)$ mit Fälligkeit T zur Zeit t wird definiert durch

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T).$$

- (iv) Die **konforme Kassazinsrate**²⁸ $r(t)$ zur Zeit t wird definiert durch

$$r(t) = f(t, t).$$

Die (konforme) Terminzinsrate gibt die Zinsrate für einen Zeitraum in der Zukunft an, während bei der (konformen) Kassazinsrate der Zeitraum sofort beginnt. Anschaulich gelten die konforme Termin- und Kassazinsrate für den infinitesimalen Zeitraum dt . In der Definition 1.29 wird das Geldmarktkonto über die konforme Kassazinsrate definiert.

²⁶Das Superskript „e“ steht hier für „effektiv“.

²⁷In der angelsächsischen Literatur spricht man von der „instantaneous forward rate“.

²⁸Die konforme Kassazinsrate wird „(instantaneous) short rate“ genannt.

Definition 1.29

Sei r der Prozeß der konformen Kassazinsrate. Die Entwicklung des **Geldmarktkontos** B ist durch die Differentialgleichung

$$dB(t) = r(t)B(t) dt \quad \text{mit Anfangswert } B(0) = 1$$

gegeben, daher gilt

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

Üblicherweise wird das Geldmarktkonto als Numéraire S^0 gewählt. Das zugehörige äquivalente Martingalmaß heißt dann auch **risikoneutrales Martingalmaß**. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit bezeichnen wir das risikoneutrale Martingalmaß mit Q .

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung der klassischen Formel von Black und Scholes (1973) und Merton (1973) für Optionen auf beliebige Basiswerte herleiten. Sei S^* ein strikt positiver Preisprozeß, so daß S^*/B ein Martingal bzgl. Q ist. Für einen bedingten Anspruch X in $T \in [0, t_0]$, bezeichnet $\pi(X)$ den dazugehörigen Preisprozeß. Nun wird ein Maß Q^* gesucht, so daß für alle Preisprozesse π der Prozeß π/S^* ein Martingal bzgl. Q^* ist. Wir suchen somit eine Charakterisierung für Q^* . Mit (1.6) gilt für den bedingten Anspruch X einerseits

$$\pi(0, X) = E_Q\left(\frac{X}{B(T)}\right), \quad (1.7)$$

andererseits müßte für Q^* auch

$$\frac{\pi(0, X)}{S^*(0)} = E_{Q^*}\left(\frac{\pi(T, X)}{S^*(T)}\right) = E_{Q^*}\left(\frac{X}{S^*(T)}\right) = E_Q\left(L(T)\frac{X}{S^*(T)}\right) \quad (1.8)$$

gelten, falls die Radon-Nikodym-Dichte $L(t) = \frac{dQ^*}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t}$, $t \in [0, t_0]$, existiert. Äquivalent zu (1.8) ist

$$\pi(0, X) = E_Q\left(L(T)\frac{XS^*(0)}{S^*(T)}\right). \quad (1.9)$$

Ein Vergleich von (1.7) mit (1.9) motiviert die Definition des Maßes Q^* .²⁹

Definition 1.30

Wir definieren das Maß Q^* durch die Radon-Nikodym-Dichte

$$\frac{dQ^*}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_t} = L(t) \quad \text{mit} \quad L(t) = \frac{S^*(t)}{S^*(0)B(t)} \quad \text{für } t \in [0, t_0].$$

Aus der Definition folgt, daß L positiv und ein Martingal bzgl. Q mit $L(0) = 1$ ist, also ist Q^* sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Der nachfolgende Satz besagt, daß die bzgl. S^* relativierten Preisprozesse unter Q^* Martingale sind.

Satz 1.31

Sei π ein Preisprozeß, so daß π/B ein Martingal bzgl. Q ist. Dann ist der Prozeß π/S^* ein Martingal bzgl. Q^* .

Beweis: Für alle $s, t \in [0, t_0]$ mit $s < t$ gilt mit der abstrakten Bayes-Formel:³⁰

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^*} \left(\frac{\pi(t)}{S^*(t)} \Big| \mathcal{F}_s \right) &= \frac{\mathbb{E}_Q \left(\frac{\pi(t)}{S^*(t)} L(t) \Big| \mathcal{F}_s \right)}{\mathbb{E}_Q (L(t) \Big| \mathcal{F}_s)} = \frac{\mathbb{E}_Q \left(\frac{\pi(t)}{B(t)S^*(0)} \Big| \mathcal{F}_s \right)}{L(s)} \\ &= \frac{\pi(s)}{B(s)S^*(0)L(s)} = \frac{\pi(s)}{S^*(s)}. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.32

Für jeden bedingten Anspruch X folgt

$$\pi(t, X) = S^*(t) \mathbb{E}_{Q^*} \left(\frac{X}{S^*(T)} \Big| \mathcal{F}_t \right).$$

In der nächsten Definition betrachten wir den Bond $P(T)$ mit Fälligkeit T als Numéraire.

²⁹Zum Numéraire-Wechsel bei der Optionsbewertung siehe auch Geman, El Karoui und Rochet (1995).

³⁰Siehe z.B. Musiela und Rutkowski (1998), Lemma A.0.4.

Definition 1.33

Das T -Forwardmaß Q^T wird definiert durch

$$\left. \frac{dQ^T}{dQ} \right|_{\mathcal{F}_t} = L^T(t) \quad \text{mit} \quad L^T(t) = \frac{P(t, T)}{P(0, T)B(t)} \quad \text{für } t \in [0, T].$$

Falls die konforme Kassazinsrate r deterministisch ist, stimmen Q und Q^T überein. Dies ergibt sich aus der Definition von

$$L^T(T) = \frac{P(T, T)}{B(T)P(0, T)} = \frac{1}{e^{\int_0^T r(s) ds} \mathbb{E}_Q \left(e^{-\int_0^T r(s) ds} \right)}.$$

Korollar 1.34

Sei X ein bedingter Anspruch. Dann gilt

$$\pi(t, X) = P(t, T) \mathbb{E}_{Q^T}(X \mid \mathcal{F}_t).$$

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus Korollar 1.32 mit $S^*(t) = P(t, T)$ und der Eigenschaft $P(T, T) = 1$. \square

Mit diesen Vorbereitungen werden nun bedingte Ansprüche im dargestellten Finanzmarkt bewertet. Eine Europäische Call-Option auf einen strikt positiven Finanztitel S mit Fälligkeit T und Basispreis K besitzt als Auszahlung³¹

$$X = [S(T) - K]^+ = (S(T) - K)1_{\{S(T) \geq K\}}.$$

Für den Preis der Option in $t = 0$ gilt nun

$$\begin{aligned} C^e(0) &= \pi(0, X) = \mathbb{E}_Q \left(B^{-1}(T)(S(T) - K)1_{\{S(T) \geq K\}} \right) \\ &= \mathbb{E}_Q \left(B^{-1}(T)S(T)1_{\{S(T) \geq K\}} \right) - K \mathbb{E}_Q \left(B^{-1}(T)1_{\{S(T) \geq K\}} \right). \end{aligned}$$

Für den ersten Term wird nun S als Numéraire gewählt, für den zweiten der Bond mit Fälligkeit T . Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus den Korollaren 1.32 und 1.34.

³¹Vgl. Definition 1.18.

Satz 1.35

Mit den obenstehenden Bezeichnungen gilt

$$C^e(0) = S(0)Q^S(S(T) \geq K) - KP(0, T)Q^T(S(T) \geq K),$$

wobei Q^S bzw. Q^T das Maß bzgl. S bzw. $P(T)$ ist.

Um zu konkreteren Resultaten zu gelangen, benötigen wir weitere Annahmen.

Annahmen 1.36

- (i) Auf dem Raum (Ω, \mathcal{F}, Q) sei eine Brownsche Bewegung W definiert, die die Filterung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ erzeugt.
- (ii) Der Prozeß Z definiert durch $Z = S/P(T)$ erfüllt eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dZ(t) = Z(t)\mu_Z(t) dt + Z(t)\sigma_Z(t) dW(t), \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

wobei

$$\int_0^t |\mu_Z(s)| ds < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^t \sigma_Z^2(s) ds < \infty$$

gilt und σ_Z *deterministisch* ist.

Damit erhalten wir die verallgemeinerte Black/Scholes-Formel.

Theorem 1.37

Unter den Annahmen 1.36 lautet damit der Preis einer Europäischen Call-Option auf den Basiswert S mit Basispreis K :

$$C^e(0) = S(0)N(d_1) - KP(0, T)N(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma^2(T) &= \int_0^T \sigma_Z^2(s) ds, \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\sqrt{\Sigma^2(T)}} \quad \text{und} \\ d_1 &= d_2 + \sqrt{\Sigma^2} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\sqrt{\Sigma^2(T)}}.\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis folgt aus Satz 1.35 mit den Darstellungen der beiden Wahrscheinlichkeiten $Q^T(S_T \geq K) = N(d_2)$ und $Q^S(S_T \geq K) = N(d_1)$. Eine Herleitung findet man z.B. bei Björk (1997). \square

Korollar 1.38

Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1.37 gilt für den Preis einer Europäischen Put-Option auf den Basiswert S mit Basispreis K :

$$P^e(0) = KP(0, T)N(-d_2) - S(0)N(-d_1).$$

Beweis: Der Beweis folgt direkt aus der Put-Call-Parität.³² Die Auszahlung einer Put-Option entspricht der Auszahlung einer Call-Option abzüglich des Wertes des Finanztitels und zuzüglich des Basispreises:

$$[K - S(T)]^+ = [S(T) - K]^+ - S(T) + K.$$

Also müssen auch die Preise dieser Finanztitel und der Wert des Basispreises in $t = 0$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned}P^e(0) &= C^e(0) - S(0) + P(0, T)K \\ &= S(0)N(d_1) - KP(0, T)N(d_2) - S(0) + P(0, T)K \\ &= KP(0, T)(1 - N(d_2)) - S(0)(1 - N(d_1)) \\ &= KP(0, T)N(-d_2) - S(0)N(-d_1).\end{aligned}$$

\square

³²Die Put-Call-Parität wurde ursprünglich für Optionen auf Aktien von Stoll (1969) hergeleitet. Sie gilt aber auch für Optionen auf andere Basiswerte.

Kapitel 2

Optimale Portfolios bei fixen Transaktionskosten

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel behandeln wir das Portfolio-Problem von Morton und Pliska. In ihrem 1995 erschienenen Artikel „Optimal Portfolio Management with Fixed Transaction Costs“ stellen sie ein Modell vor, in dem sie den Merton-Modellrahmen für optimale Portfolios um fixe Transaktionskosten erweitern. Dabei wird aber nicht ein konstanter (fixer) Betrag pro Transaktion gezahlt, sondern Morton und Pliska nehmen an, daß bei einer Transaktion Kosten proportional zur Vermögenshöhe des Investors anfallen. Nicht die absoluten Kosten selbst, sondern nur der relative Anteil am aktuellen Vermögen, der gezahlt werden muß, ist hier also fix. Des weiteren gibt es keinen variablen Anteil in den Transaktionskosten, sie hängen also überhaupt nicht von der Größe der Transaktionen ab. Normalerweise können Transaktionskosten in der Praxis aber in eine fixe und eine variable Komponente aufgeteilt werden, wobei erstere unabhängig vom Transaktionsvolumen und dem aktuellen Ver-

mögen ist und die zweite sich nur auf das Transaktionsvolumen bezieht. Die von Morton und Pliska getroffene Annahme ist also nicht sehr realistisch. Trotzdem möchten wir diesen Ansatz hier vorstellen, denn in diesem Modellrahmen können auch zeitstetige Portfolio-Probleme mit 20 bis 30 Wertpapieren numerisch gelöst und geeignete Varianten davon deswegen auch im wirklichen Leben angewendet werden. Außerdem werden wir in Abschnitt 2.3 sehen, wie dieses Modell mit einer realistischeren Transaktionskostenstruktur in Beziehung gesetzt werden kann.

Bevor wir weiter auf den Modellrahmen eingehen, möchten wir zuerst eine kurze Übersicht über zwei weitere Transaktionskostenmodelle geben.¹ Davis und Norman (1990) haben im Merton-Modell proportionale Transaktionskosten eingeführt und betrachten als Zielkriterium den erwarteten Nutzen des Lebenszeitkonsums. Dieser wird maximiert, und im Falle einer Aktie und eines Geldmarktkontos kann die eindeutige Lösung numerisch berechnet werden. Teil der Lösungsstrategie ist eine Menge um das optimale Portfolio herum und die Anweisung zu handeln, wenn das Portfolio an die Grenze dieser Menge stößt. Allerdings werden dann nur kleine Transaktionen durchgeführt, was dazu führen kann, daß man sehr häufig handeln muß, weil man immer wieder an diese Grenze stößt. Darüber hinaus ist es schwierig, dieses Problem im höherdimensionalen Fall zu lösen. Später werden wir eine ähnliche Lösung erhalten, aber da bei Morton und Pliska die Kosten nicht vom Transaktionsvolumen abhängen, werden nicht kleine Mengen gehandelt, sondern es wird wieder zum optimalen Portfolio umgeschichtet. Der Konsum des Investors wird bei Morton und Pliska überhaupt nicht betrachtet. Bei Eastham und Hastings (1988) und bei Korn (1998) wird eine zusätzliche fixe Komponente eingeführt, so daß die Kostenstruktur realistischer modelliert wird. Die Lösungsstrategie ähnelt der von Davis und Norman mit dem Unterschied, daß hier eine größere Transaktion stattfindet und deswegen nicht

¹ Für einen ausführlicheren Überblick über Portfolio-Probleme mit Transaktionskosten siehe z.B. Cadenillas (2000).

so häufig gehandelt werden muß. Allerdings muß für diese Strategie ein System von Quasi-Variationsungleichungen gelöst werden, was approximativ mit einer asymptotischen Analyse für kleine Transaktionskosten getan wird und nur schwerlich auf den mehrdimensionalen Fall erweitert werden kann.²

In dieser Arbeit wollen wir aber eine Transaktionskostenstruktur behandeln, mit der wir das Portfolio-Problem auch für viele Aktien lösen können. Der Investor kann sein Vermögen in eine festgelegte Anzahl von Aktien und zusätzlich in das risikolose Geldmarktkonto anlegen. Hierbei werden die Aktien durch korrelierte geometrisch Brownsche Bewegungen modelliert. Der Investmenthorizont sei unendlich und als Entscheidungskriterium für die Optimalität der Anlagestrategie wird die erwartete Wachstumsrate des Vermögensprozesses X herangezogen.^{3,4} Es wird dabei über alle zulässigen Portfoliostrategien π maximiert, so daß für die optimale Wachstumsrate R gilt:

$$R = \max_{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\ln(X(T)))/T. \quad (2.1)$$

Eine Definition, welche Strategien überhaupt zulässig sind, folgt später.⁵ An der Form des Kriteriums kann man erkennen, daß der optimale Portfolioprozeß dem Prozeß eines Investors mit logarithmischer Nutzenfunktion bei Merton ohne Transaktionskosten und bei einem festem Zeitpunkt ähnlich sein wird. Im einfachen Merton-Fall ist der optimale Lösungsprozeß $\tilde{\pi}$ konstant, d.h. es gilt $\tilde{\pi}(t) \equiv \tilde{\pi}$, $t \geq 0$. Da die Aktienkurse sich in jedem infinitesimalen Zeitraum ändern, bedeutet dies, daß ständig gehandelt werden müßte, um die jeweiligen anfangs berechneten, optimalen relativen Anteile in den Aktien beizubehalten. Bei Kosten gleich welcher Struktur würden fortdauernde Umschichtungen den sofortigen Ruin des Investors bedeuten.

² Siehe Korn und Laue (2002) für den zweidimensionalen Fall.

³ Dabei lassen wir bei der Schreibweise des Vermögens X die Abhängigkeit von der Strategie π weg.

⁴ Dieses Optimalitätskriterium wird in der Literatur oft auch Kelly-Kriterium genannt.

⁵ Vgl. Definition 2.1. Dort werden wir auch sehen, daß wir formal nicht nur über π maximieren und eine Portfoliostrategie in diesem Kapitel anders definiert ist als üblich. An manchen Stellen schreiben wir trotzdem abkürzend nur π .

Morton und Pliska zeigen, daß man das Problem auf ein Stoppzeit-Problem reduzieren kann und lösen es numerisch für eine bzw. zwei Aktien. Die optimale Lösung dieses Problems besteht aus einer *continuation region* um die Merton-Lösung $\tilde{\pi}$ herum.⁶ Solange sich die relativen Vermögensanteile innerhalb dieser Region befinden, wird nicht gehandelt. Erst wenn die Anteile auf den Rand dieser sogenannten Stillhaltungsmenge treffen, findet eine Transaktion statt, und es wird so umgeschichtet, daß die Anteile danach wieder den optimalen entsprechen. Diese Menge bestimmen Morton und Pliska derart, daß es sich innerhalb von ihr nicht lohnt zu handeln, weil die zu zahlenden Transaktionskosten höher sind als der Gewinn durch die optimale Positionierung. Dieses Ergebnis leuchtet sofort ein: Wegen der zu zahlenden Kosten wird nicht kontinuierlich gehandelt. Und wenn gehandelt wird, dann wird so umgeschichtet, daß man nach der Transaktion das optimale Portfolio hält, da die Kosten nicht vom Volumen der Transaktion abhängen. Allerdings ist es numerisch nur möglich, dieses Stopp-Problem für eine kleine Anzahl von Aktien zu lösen.

Atkinson und Wilmott berechnen 1995 in ihrem Artikel „Portfolio Management with Transaction Costs: An Asymptotic Analysis of the Morton and Pliska Model“ die optimale Portfoliostrategie und die Stillhaltungsmenge auch für eine größere Anzahl von risikobehafteten Wertpapieren. Ihre (approximative) Lösung leiten sie mit Hilfe einer asymptotischen Analyse her. Dazu wird die Stillhaltungsmenge um die optimale Lösung $\tilde{\pi}$ im Merton-Fall in Abhängigkeit von den Transaktionskosten ε dargestellt. Um damit eine gute Approximation der Lösung des Originalproblems zu erhalten, sollte ε sehr klein sein.

Im folgenden Abschnitt führen wir die Notation und das Setup für diesen Modellrahmen ein und skizzieren die Herleitung des optimalen Portfolioprozesses und der Stillhaltungsmenge zuerst nach Morton und Pliska und danach nach Atkinson und Wilmott. Letzteres beschreiben wir ausführlicher, denn

⁶ Dabei ist $\tilde{\pi}$ aber nicht unbedingt der Mittelpunkt dieser Menge.

wie eingangs erwähnt ist es in diesem Modell möglich, das Problem mit vielen und nicht nur einem oder zwei Wertpapieren zu lösen. Anschließend setzen wir das Modell mit einer realistischen Transaktionskostenstruktur in Verbindung und geben damit eine Abschätzung der Kosten an. Daraus kann dann auch eine Handelsstrategie abgeleitet werden. Im letzten Abschnitt führen wir mehrere numerische Analysen durch. Wir geben in fünf Szenarien die (approximativ) berechneten optimalen Wachstumsraten an und vergleichen anhand einer Monte Carlo-Simulation die Güte der Approximation. Wenn möglich, veranschaulichen wir die Stillhaltungsmengen und präsentieren die durchschnittliche Zeit, die die Portfoliostrategie in ihr verbleibt. Außerdem testen wir die Abschätzungen der Transaktionskosten in den fünf Szenarien. Abschließend betrachten wir, wie sich die Einführung von Call-Optionen in diesem Modell auswirkt.

2.2 Der Modellrahmen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst das Modell von Morton und Pliska vorstellen, bevor wir auf die asymptotische Approximation dieses Modells nach Atkinson und Wilmott eingehen. Zum Abschluß werden wir zeigen, wie die optimale Handelsstrategie aus den Marktkoeffizienten bestimmt werden kann.

2.2.1 Das Modell von Morton und Pliska

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Finanzmarkt. Wie im einfachen Modell von Merton für optimale Portfolios stehen ein Geldmarktkonto P_0 und n Aktien P_i , $i = 1, \dots, n$, als Anlagemöglichkeiten zur Verfügung. Das risikolose Geldmarktkonto verzinst sich mit der konstanten Zinsrate r und hat am Anfangszeitpunkt $t = 0$

den Wert 1:

$$dP_0(t) = P_0(t)r dt, \quad P_0(0) = 1.$$

Die n Aktien besitzen am Anfang die Kurswerte p_i , $i = 1, \dots, n$, und werden durch korrelierte geometrisch Brownsche Bewegungen simuliert:

$$dP_i(t) = P_i(t) \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j(t) \right), \quad P_i(0) = p_i.$$

Dabei seien μ_i bzw. σ_{ij} die Drift bzw. die Volatilitäten der Aktie i bzgl. der Brownschen Bewegung W_j . Sie werden im Vektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ bzw. in der Matrix σ mit den Einträgen σ_{ij} in der Reihe i und Spalte j zusammengefaßt. Durch den Vektor $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)'$ seien die relativen Anteile am Gesamtvermögen X gegeben, die in die jeweiligen Aktien investiert werden. Wie wir bereits oben erwähnt haben, werden wir eine ganze Region um die Merton-Lösung berechnen, in der nicht gehandelt wird, die Stillhaltmenge. In der nachfolgenden Definition werden die Stoppzeiten t_i diejenigen Zeitpunkte sein, in denen die in den jeweiligen Wertpapieren gehaltenen Anteile π_i auf den Rand dieser Stillhaltmenge treffen. Erst dann ist es wieder optimal zu handeln.

Definition 2.1 (Zulässige Portfoliostrategie)

Eine **zulässige Portfoliostrategie**⁷ ist eine Folge $\{(t_i, \pi(t_i)), i = 1, 2, \dots\}$ mit $t_0 = 0$, $t_i \leq t_{i+1}$, wobei die t_i Stoppzeiten bzgl. der Brownschen Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sind. Zusätzlich muß der n -dimensionale Vektor π zu jedem Zeitpunkt t_i \mathcal{F}_{t_i} -meßbar sein, und es gelte $\pi_j(t_i) > 0$ für alle $j = 1, \dots, n$, und $\sum_{j=1}^n \pi_j(t_i) < 1$. Falls für ein π die letzten beiden Ungleichungen gelten und der Prozeß \mathcal{F}_{t_i} -meßbar ist, schreiben wir für ihn auch $\pi \in \Pi$.

Die beiden Ungleichungen bedeuten, daß in jedes Wertpapier (wegen der zweiten Ungleichung auch in das Geldmarktkonto) investiert wird.⁸ Außer-

⁷ An manchen Stellen sagen wir aber auch (Portfolio-)Strategie und meinen damit nur den Vektor π .

⁸ Üblicherweise ist bei Portfolio-Problemen bei den beiden Ungleichungen auch jeweils die Gleichheit erlaubt, d.h. man kann auch nichts in ein Wertpapier investieren. Morton

dem folgt daraus, daß Leerverkäufe nicht möglich sind. Damit bleibt das Vermögen zu jedem Zeitpunkt positiv und der Logarithmus definiert.

Das Vermögen $X(t_1-)$ des Investors zum Zeitpunkt t_1- , d.h. unmittelbar vor der ersten Transaktion, ist nun durch

$$X(t_1-) = x \left((1 - \pi'(0)\mathbf{1})e^{rt_1} + \sum_{i=1}^n \pi_i(0) \frac{P_i(t_1)}{p_i} \right)$$

gegeben, wobei x das (positive) Anfangsvermögen des Investors in $t_0 = 0$ ist und wir mit $\mathbf{1}$ den n -dimensionalen Vektor mit den Einträgen 1 bezeichnen. Der erste Summand in der Klammer gibt den Wachstumsanteil aus dem Geldmarktkonto an, die Summe den Anteil aus den n Aktien. Sei $0 < \alpha < 1$. Bei einer Transaktion in t_i fallen nun Kosten in Höhe von $1 - \alpha$ des Vermögens vor der Umschichtung an, so daß jedesmal die Relation $X(t_i) = \alpha X(t_i-)$ gilt. Das Vermögen $X(t_k)$ zur Zeit t_k kann also ganz allgemein folgendermaßen dargestellt werden:

$$X(t_k) = \alpha^k x \prod_{i=1}^k \left((1 - \pi'(t_{i-1})\mathbf{1})e^{r(t_i - t_{i-1})} + \sum_{j=1}^n \pi_j(t_{i-1}) \frac{P_j(t_i)}{P_j(t_{i-1})} \right).$$

Morton und Pliska zeigen mit Hilfe der Theorie von Markovprozessen, daß das Optimierungsproblem auf die Lösung des Problems für eine einzige Periode $[t, t + \tau]$ reduziert werden kann, wobei die Strategie π in t gewählt wurde und $t + \tau$ der Zeitpunkt ist, an dem die nächste Umschichtung erfolgt. Sei σ_j die j -te Reihe der Volatilitätsmatrix σ . Bei einem Anfangswert von $X(t)$ kann, nach Abzug der Transaktionskosten, die in $t + \tau$ anfallen, der logarithmierte relative Zuwachs durch

$$\begin{aligned} g(t, \tau) &:= \ln \left(\frac{X(t + \tau)}{X(t)} \right) \\ &= \ln(\alpha) + \ln \left((1 - \pi'(t)\mathbf{1})e^{r\tau} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \pi_j(t) \exp \left\{ (\mu_j - 0,5\|\sigma_j\|^2)\tau + \sigma_j(W(t + \tau) - W(t)) \right\} \right) \end{aligned}$$

und Pliska (1995) nehmen diese härteren Bedingungen an, damit sich ihre Rechnungen vereinfachen, siehe dort S. 340.

dargestellt werden. Mit dieser Bezeichnung ist dann die optimale Wachstumsrate R durch folgendes Supremum gegeben:

$$R = \sup_{\tau, \pi} \frac{\mathbb{E}(g(\tau, \pi))}{\mathbb{E}(\tau)}, \quad (2.2)$$

wobei wir annehmen, daß das Paar (τ^*, π^*) den Quotienten über alle endlichen Stoppzeiten τ und alle $\pi \in \Pi$ maximiert. Insbesondere ist auch τ^* eine endliche Stoppzeit und $\pi^* \in \Pi$. Die optimale Rate R setzt sich dann aus dem erwarteten logarithmierten Vermögenszuwachs bis zur nächsten Transaktion durch die bis dahin vergangene Zeit zusammen. Man betrachtet quasi den logarithmierten Vermögenszuwachs pro Zeiteinheit auf einem Intervall zufälliger Länge. Die optimale Portfoliostrategie ist dann durch $t_{i+1} = t_i + \tau^*$ und $\pi_i = \pi^*$, $i = 1, 2, \dots$, gegeben. Darstellung (2.2) ist äquivalent mit

$$0 = \sup_{\tau, \pi} (\mathbb{E}(g(\tau, \pi)) - R \mathbb{E}(\tau)).$$

Morton und Pliska leiten eine weitere Darstellung für $g(\tau, \pi)$ her, so daß das Lösen von Problem (2.2) äquivalent ist mit dem Lösen von⁹

$$0 = \sup_{\pi \in \Pi} (\ln(\alpha) + \ln(1 - \mathbf{1}'\pi) + f_R(\pi)),$$

wobei

$$f_R(\pi) = \sup_{\tau} (\mathbb{E}^{\pi}(-\ln(1 - \mathbf{1}'\pi(\tau-))) - (R - r) \mathbb{E}^{\pi}(\tau)) \quad (2.3)$$

gilt. Angenommen f_R sei konkav und genügend glatt, dann könnte man den optimalen Portfolioprozeß π^* bereits aus der *first-order condition* berechnen, sofern wieder $\pi^* \in \Pi$ gilt. Für alle $i = 1, \dots, n$, erhalten wir ihn aus

$$0 = \frac{\partial}{\partial \pi_i} (\ln(1 - \mathbf{1}'\pi) + f_R(\pi)),$$

wobei zusätzlich

$$0 = \ln(\alpha) + \ln(1 - \mathbf{1}'\pi^*) + f_R(\pi^*)$$

⁹ Siehe z.B. Korn (1997), S. 209ff., für eine ausführlichere Herleitung.

gilt. Wenn wir nun $f_R(\pi^*)$ als Funktion von R kennen würden, könnte man die optimale Rate auf diese Art bestimmen.

Morton und Pliska identifizieren f_R als die Wertfunktion eines optimalen Stopp-Problems, wobei der zu stoppende Prozeß π im Zeitintervall $[t_i, t_{i+1})$ durch

$$d\pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))(E - \mathbf{1}\pi'(t))((\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma'\pi(t))dt + \sigma dW(t)) \quad (2.4)$$

gegeben ist. Diese Gleichung beschreibt die Dynamik eines zu einer konstanten Handelsstrategie gehörenden Portfolioprozesses π . Mit E bezeichnen wir hierbei die n -dimensionale Einheitsmatrix. Sei e_i der i -te Einheitsvektor. Mit der Theorie vom optimalen Stoppen von Markovprozessen leiten Morton und Pliska den nachfolgenden Satz her. In diesem werden zwei Variationsungleichungen angegeben, die zur Charakterisierung von f_R dienen.

Satz 2.2

Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und h_i die partielle Ableitung nach dem i -ten Parameter. Der Operator \mathcal{A} sei definiert durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}h)(\pi) := & 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}(\pi) \pi_i \pi_j (e'_i - \pi') \sigma \sigma' (e_j - \pi) \\ & + \sum_{i=1}^n h_i(\pi) \pi_i (e'_i - \pi') (\mu - r\mathbf{1} - \sigma \sigma' \pi). \end{aligned}$$

Dann ist f_R , die Wertfunktion aus dem optimalen Stopp-Problem (2.3), die kleinste Funktion, die die Voraussetzungen der Itô-Formel erfüllt und den beiden Variationsungleichungen

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}f)(\pi) &\leq R - r, \\ f(\pi) &\geq -\ln(1 - \mathbf{1}'\pi), \\ 0 &= ((\mathcal{A}f)(\pi) - (R - r))(f(\pi) + \ln(1 - \mathbf{1}'\pi)) \end{aligned}$$

für $\pi \in \Pi$ genügt. Außerdem ist die optimale Stoppzeit durch den ersten Zeitpunkt gegeben, an dem in der zweiten Ungleichung Gleichheit herrscht,

d.h. es gilt

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \mid f_R(\pi(t)) = -\ln(1 - \mathbf{1}'\pi)\}.$$

Der Gewinn verhält sich entsprechend $-\ln(1 - \mathbf{1}'\pi(t))$, während die Kosten $(R - r)t$ mit der Zeit stetig größer werden. Es ist also ein Entscheidungsproblem, ob man weiter wartet und Gebühren dafür zahlt oder nicht. Wie anfangs bereits erwähnt, lösen Morton und Pliska dieses Problem numerisch im Falle von einer und von zwei Aktien. Für die Möglichkeit das höherdimensionale Problem mit 20 bis 30 Aktien zu lösen, haben Morton und Pliska nur „little hope“. Bevor wir nun auf die Approximation von Atkinson und Wilmott (1995) eingehen, noch eine Definition.

Definition 2.3 (Stillhaltungsmenge)

Die **Stillhaltungsmenge** \mathcal{C} wird folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{C} := \{\pi \in \Pi \mid f_R > -\ln(1 - \mathbf{1}'\pi)\}.$$

\mathcal{C} entspricht also der Menge aller Portfolioprozesse π , bei denen nicht gestoppt wird. Aus der dritten Bedingung der Variationsungleichung folgt die Gleichheit $(\mathcal{A}f_R)(\pi) = R - r$ für alle $\pi \in \mathcal{C}$. Auf dem Rand von \mathcal{C} entsprechen dann die Grenzkosten dem Grenznutzen bei einer Umschichtung. Es findet also erst eine Transaktion statt, wenn die Anteile so weit von der optimalen Lösung entfernt sind, daß der (erwartete) Nutzen der Portfolioanpassung nicht kleiner ist als der Verlust durch die Transaktionskosten. Morton und Pliska zeigen außerdem, daß die Menge \mathcal{C} nicht leer ist, solange die Transaktionskosten $1 - \alpha$ echt positiv sind. Außerdem gilt $\tilde{\pi} = (\sigma\sigma')^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \in \mathcal{C}$, d.h. der optimale Portfolioprozess des Merton-Investors bei Abwesenheit von Transaktionskosten liegt in der Stillhaltungsmenge.¹⁰ Anhand ihrer numerischen Beispiele ist zu sehen, daß der optimale Prozess π^* aus 2.2, der die optimale Wachstumsrate bestimmt, nicht mit $\tilde{\pi}$ übereinstimmt, die Punkte allerdings nahe beieinander liegen.

¹⁰Zu $\tilde{\pi}$ vgl. Abschnitt 1.2.1.

2.2.2 Die asymptotische Approximation von Atkinson und Wilmott

Diese Tatsache machen sich Atkinson und Wilmott zunutze und leiten mit Hilfe einer asymptotischen Analyse eine Stillhaltmenge her, die als Mittelpunkt den Merton-Prozeß $\tilde{\pi}$ hat. Auch wenn schon Morton und Pliska in ihren Beispielen beobachten, daß \mathcal{C} nicht symmetrisch um $\tilde{\pi}$ ist, geben Atkinson und Wilmott Beispiele an, in denen diese Menge bei Morton und Pliska auch nicht zu asymmetrisch ist. Damit motivieren sie ihre Lösung, die nachher völlig symmetrisch um $\tilde{\pi}$ sein wird. Als Voraussetzung wird nun angenommen, daß die Transaktionskosten sehr klein, aber dennoch positiv sind. Im folgenden werden wir, auch um konsistent mit der Schreibweise bei Atkinson und Wilmott zu bleiben, den Proportionalitätsfaktor mit $\varepsilon := 1 - \alpha > 0$ bezeichnen.

Zuerst definieren wir die Funktion G in Abhängigkeit von π als Differenz zwischen der Wertfunktion $f_R(\pi)$ und dem Gewinn $-\ln(1 - \mathbf{1}\pi)$:

$$f_R(\pi) = -\ln(1 - \mathbf{1}\pi) + G(\pi).$$

Wenn wir darauf den Operator \mathcal{A} anwenden, folgt

$$(\mathcal{A}f_R)(\pi) = (\mathcal{A}G)(\pi) + 0,5\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi} - 0,5(\pi - \tilde{\pi})'\sigma\sigma'(\pi - \tilde{\pi}).$$

Nun werden die Variablen π und R und die Funktion G reskaliert, indem wir neue Variablen $\bar{\pi}$ und \bar{R} und eine neue Funktion \bar{G} einführen:

$$\pi = \tilde{\pi} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\bar{\pi}, \quad R = \tilde{R} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{R}, \quad G(\pi) = \varepsilon\bar{G}(\bar{\pi}) + o(\varepsilon) \quad (2.5)$$

mit $\tilde{R} = r + 0,5\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi}$. Wegen $(\mathcal{A}f_R)(\pi) = R - r$ für alle $\pi \in \mathcal{C}$ erhalten wir durch Einsetzen der Variablen auf \mathcal{C} das System¹¹

$$0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{G}_{ij} \tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_j (e'_i - \tilde{\pi}') \sigma \sigma' (e_j - \tilde{\pi}) = \bar{R} + 0,5\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi} \quad (2.6)$$

¹¹ Für eine Herleitung im Falle einer Aktie siehe z.B. Korn (1997), S. 212f.

mit den Randbedingungen

$$\bar{G} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \bar{G} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial C,$$

wobei C als Teil des Problems auch noch bestimmt werden muß, und

$$\sup_{\bar{\pi}} \{\bar{G}(\bar{\pi})\} = 1 \tag{2.7}$$

gilt. Das Supremum wird über alle Portfolios $\bar{\pi}$ gebildet, so daß $\tilde{\pi} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\bar{\pi} \in \Pi$ erfüllt ist. Bei den letzten Folgerungen werden alle Terme höherer Ordnung (bzgl. ε) von Atkinson und Wilmott vernachlässigt. Dieses Problem ist nun einfacher zu lösen: Es gilt

$$\bar{G}(\bar{\pi}) = (\bar{\pi}' M \bar{\pi} - 1)^2 \tag{2.8}$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix M . Die Menge C ist dabei durch das Innere des Ellipsoids gegeben, das durch die Gleichung

$$\bar{\pi}' M \bar{\pi} = 1$$

definiert wird, d.h.

$$C = \{\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\pi}' M \bar{\pi} \leq 1\}.$$

Das Supremum in Gleichung (2.7) wird durch $\bar{\pi} = 0$ erreicht, d.h. das optimale Portfolio, auf das nach einer Transaktion umgeschichtet wird, ist wie gewünscht das Merton-Portfolio. Was bleibt, ist die Bestimmung der Matrix M . Denn damit wäre auch die Richtung (gegeben durch die Eigenvektoren) und die Länge (gegeben durch die Eigenwerte) der Halbachsen des Ellipsoids gegeben. Die Stillhaltungsmenge \mathcal{C} des ursprünglichen Problems erhalten wir dann durch:

$$\mathcal{C} = \tilde{\pi} + \varepsilon^{\frac{1}{4}} C. \tag{2.9}$$

Die Größe der Stillhaltungsmenge hängt also maßgeblich von der Höhe der Transaktionskosten ab.¹² Für $\varepsilon = 0$, was nach Definition eigentlich nicht erlaubt ist, würde sie sich auf die Merton-Lösung reduzieren.

¹²Vgl. dazu auch Abschnitt 2.4.4.

2.2.3 Die Herleitung der Stillhaltungsmenge und der optimalen Wachstumsrate

Ab hier werden wir die Herleitung von M etwas ausführlicher darstellen. Denn um das Verfahren von Atkinson und Wilmott anzuwenden, muß diese Matrix numerisch bestimmt werden. Wir definieren nun zuerst die Matrix H durch ihre Einträge

$$H_{ij} = \tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_j (e_i - \tilde{\pi})' \sigma \sigma' (e_j - \tilde{\pi}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Damit ist nun (2.6) äquivalent zu folgender Gleichung:

$$0,5 \nabla' H \nabla \bar{G}(\bar{\pi}) = \bar{R} + 0,5 \bar{\pi}' \sigma \sigma' \bar{\pi}.$$

Hier setzen wir nun die Lösung (2.8) ein, und mit den beiden Relationen

$$\nabla \bar{\pi}' M \bar{\pi} = 2M \bar{\pi} \quad \text{und} \quad \nabla' H M \bar{\pi} = \text{Sp}(HM)$$

können wir einen „Koeffizientenvergleich“ auf beiden Seiten durchführen. $\bar{G}(\bar{\pi})$ aus (2.8) ist also nur genau dann eine Lösung von Problem (2.6), wenn die Matrix M folgende Matrixgleichung erfüllt:

$$8MHM + 4\text{Sp}(HM)M = \sigma\sigma'. \quad (2.10)$$

Dieses M ist eindeutig und positiv definit, was aus den weiteren Ausführungen folgen wird. Insbesondere hängt es nur von den Marktparametern μ und σ ab und nicht von dem Transaktionskostenfaktor ε . Außerdem erhalten wir damit auch \bar{R} :

$$\bar{R} = -2\text{Sp}(HM).$$

Die erwartete asymptotische Wachstumsrate bei Atkinson und Wilmott erhält man also durch:¹³

$$R = r + 0,5 \bar{\pi}' \sigma \sigma' \bar{\pi} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \text{Sp}(HM). \quad (2.11)$$

¹³Vgl. Reskalierung (2.5).

Da H positiv definit ist, existieren nach der Singulärwertzerlegung eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, auf deren Diagonalen die n (positiven) Eigenwerte d_1, \dots, d_n , von H stehen, und eine Matrix P , deren Spalten sich aus den dazugehörigen Eigenvektoren zusammensetzen, so daß die Darstellung $H = PDP^{-1}$ gilt. Die Matrix H ist orthogonal, d.h. in diesem Fall gilt sogar $P^{-1} = P'$. Mit $S := \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ und wegen $S = S'$ können wir die Matrix H schreiben als

$$H = PDP^{-1} = PDP' = PSS'P'. \quad (2.12)$$

Wir definieren nun die Matrix \tilde{M} durch

$$\tilde{M} := S'P'MPS$$

und die Matrix $\tilde{\sigma}$ durch

$$\tilde{\sigma} := S'P'\sigma,$$

so daß $\tilde{\sigma}' = \sigma'PS$ gilt. Jetzt multiplizieren wir von links $S'P'$ und von rechts PS an die Matrixgleichung (2.10) und erhalten mit der Aufspaltung (2.12):

$$8\tilde{M}^2 + 4\text{Sp}(HM)\tilde{M} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'.$$

Wegen der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen gilt

$$\text{Sp}(HM) = \text{Sp}(PSS'P'M) = \text{Sp}(SS'P'MP) = \text{Sp}(S'P'MPS) = \text{Sp}(\tilde{M}).$$

Es genügt also, wenn wir die Matrix \tilde{M} durch die Gleichung

$$8\tilde{M}^2 + 4\text{Sp}(\tilde{M})\tilde{M} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}' \quad (2.13)$$

bestimmen können, denn dann erhalten wir M sofort aus

$$M = PS^{-1}\tilde{M}S^{-1}P'.$$

Wir zeigen, daß auch \tilde{M} positiv definit ist und bestimmen seine Eigenwerte und -vektoren, durch die eine positiv definite Matrix eindeutig bestimmt

ist (wie auch bereits bei der Matrix H), eindeutig mit Hilfe von (2.13). Zu beachten ist noch, daß M dann auch positiv definit ist, denn M geht aus \tilde{M} durch einen Basiswechsel hervor.

Seien v_i und λ_i , $i = 1, \dots, n$, die Eigenvektoren und -werte von \tilde{M} . Wir multiplizieren nun Gleichung (2.13) mit jedem Eigenvektor v_i und erhalten

$$\left(8\lambda_i^2 + 4s\lambda_i\right)v_i = \left(8\tilde{M}^2 + 4s\tilde{M}\right)v_i = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'v_i.$$

Dabei haben wir die Spur von \tilde{M} mit s abgekürzt. Seien δ_i , $i = 1, \dots, n$, die Eigenwerte von $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$. Da die Eigenvektoren von \tilde{M} und $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$ übereinstimmen, muß also folgende Gleichheit gelten:

$$\delta_i = 8\lambda_i^2 + 4s\lambda_i.$$

Die Eigenwerte von $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$ sind alle positiv, deswegen hat jedes λ_i in Abhängigkeit von s folgende Lösung:

$$\lambda_i = \left(-s + \sqrt{s^2 + 2\delta_i}\right)/4.$$

Aus

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \left(-s + \sqrt{s^2 + 2\delta_i}\right)/4$$

folgt eine Gleichung für s :

$$f(s) := (n+4)s - \sum_{i=1}^n \sqrt{s^2 + 2\delta_i} = 0.$$

Wegen $f(0) < 0$ und weil $f'(s)$ strikt positiv ist, können s und somit auch die Eigenwerte λ_i von \tilde{M} eindeutig bestimmt werden. Mit den Eigenwerten λ_i und -vektoren v_i gilt nun die Zerlegung

$$\tilde{M} = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n)'$$

Damit haben wir auch die Konstruktion von M gezeigt. Dabei sind wir auf keine numerischen Schwierigkeiten gestoßen bzw. verwenden keine numerischen Prozeduren, die zeitintensiv sind. Sowohl die Berechnung von Eigenwerten und -vektoren von positiv definiten Matrizen¹⁴ als auch die Nullstellensuche von monotonen Funktionen lassen sich sehr schnell und problemlos durchführen. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie dieses Modell im Zusammenhang mit einer realistischeren Transaktionskostenstruktur und somit auch in der Praxis verwendet werden kann.

2.3 Abschätzung der Transaktionskosten und der Wachstumsrate

Im nächsten Abschnitt wollen wir einige Analysen über das Morton und Pliska-Modell (in der asymptotischen Version von Atkinson und Wilmott) durchführen. Da die Größe ε jedoch in der Praxis nicht vorkommt, sondern die Transaktionskosten in der Regel proportional zum Transaktionsvolumen berechnet werden, stellen wir zuerst eine Art Umrechnungformel vor, mit der wir die Transaktionskosten bei Morton und Pliska mit proportionalen Kosten vergleichen, die wir im folgenden als tatsächliche Transaktionskosten bezeichnen. Dabei gehen wir davon aus, daß bzgl. der Handelszeitpunkte der Atkinson/Wilmott-Strategie gefolgt wird. Diese Abschätzungen werden im nächsten Abschnitt bei der Analyse des Modells sehr wichtig sein, denn damit kann die unrealistische Kostenstruktur des Modells in eine realistische transformiert werden. Außerdem erhalten wir dabei noch Grenzen für die tatsächlichen Transaktionskosten und die optimale Wachstumsrate des Vermögensprozesses.

¹⁴Für einen Algorithmus siehe z.B. Press, Teukolsky, Vetterling und Flannery (2002).

Sei $0 < k < 1$ der Proportionalitätsfaktor, mit dem die Kosten berechnet werden, die vom Volumen abhängig sind. Die tatsächlichen Transaktionskosten¹⁵ $K = X(t-) - X(t)$ entsprechen dann

$$K = \sum_{i=1}^n k |\varphi_i(t) - \varphi_i(t-)| P_i(t),$$

wobei wir mit $\varphi_i(t)$ die absolute Anzahl an Aktien bezeichnen, in die wir zum Zeitpunkt t in Aktie i investiert sind. Zuerst müssen wir also bestimmen, welche Anzahl der jeweiligen Aktien wir nach einer Umschichtung überhaupt in unserem Portfolio halten werden, so daß es dem Merton-Portfolio entspricht. Diese Zahl kann anhand des nachfolgenden linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Die ersten n Gleichungen sorgen dafür, daß der Portfolioprozess nach der Transaktion wieder die Merton-Proportionen aufweist. Sowohl die φ 's als auch $X(t)$, das Vermögen nach Abzug der Transaktionskosten, sind hier die Unbekannten. Die letzte Gleichung fordert obige Bedingung auch für das Geldmarktkonto, von dem die jeweiligen Transaktionskosten sowie die Kosten für die Käufe ($\varphi_i(t) > \varphi_i(t-)$) abgehen und auf das die Erlöse aus den Aktienverkäufen ($\varphi_i(t) < \varphi_i(t-)$) zufließen.¹⁶ Mit $\tilde{\pi}_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \tilde{\pi}_i$ lautet das lineare Gleichungssystem also

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 X(t) &= \varphi_1(t) P_1(t), \\ &\vdots \\ \tilde{\pi}_n X(t) &= \varphi_n(t) P_n(t), \\ \tilde{\pi}_0 X(t) &= \varphi_0(t-) P_0(t) - (1+k) \sum_{\substack{i=1 \\ \varphi_i(t) > \varphi_i(t-)}}^n \left(\varphi_i(t) - \varphi_i(t-) \right) P_i(t) \\ &\quad + (1-k) \sum_{\substack{i=1 \\ \varphi_i(t) < \varphi_i(t-)}}^n \left(\varphi_i(t-) - \varphi_i(t) \right) P_i(t). \end{aligned}$$

¹⁵ Beachte: Bei Atkinson und Wilmott ist $X(t) = (1 - \varepsilon)X(t-)$. Hier wird $X(t)$ im Prinzip erst durch diese Differenz definiert.

¹⁶ Wir nehmen an, daß für Umschichtungen auf dem Geldmarktkonto keine Kosten anfallen. Dies ist auch in der Praxis normalerweise nicht der Fall.

Um das Gleichungssystem definitiv aufzustellen, muß also zuerst die Frage geklärt werden, ob Aktien hinzugekauft oder verkauft werden müssen. Aus den beiden Gleichungen für die Anzahl nach und vor einer Transaktion zum Zeitpunkt t , $\varphi_i(t)P_i(t) = \tilde{\pi}_i X(t)$ und $\varphi_i(t-)P_i(t) = \pi_i(t-)X(t-)$, folgt für jedes Wertpapier $i = 1, \dots, n$:

$$\left(\varphi_i(t) - \varphi_i(t-)\right)P_i(t) = \tilde{\pi}_i X(t) - \pi_i(t-)X(t-). \quad (2.14)$$

Es müssen also genau dann Aktien hinzugekauft werden, wenn die Ungleichung $\tilde{\pi}_i X(t) > \pi_i(t-)X(t-)$ erfüllt ist. Es gilt $X(t-) > X(t)$, d.h. der Portfoliowert nach der Transaktion ist wegen der angefallenen Kosten immer kleiner als vorher. Also ist für $\pi_i(t-) \geq \tilde{\pi}_i$ der Term $\varphi_i(t) - \varphi_i(t-)$ immer negativ, und wir müssen auf jeden Fall Aktien dieser Position verkaufen. Allerdings kennen wir den Wert von $X(t)$ nicht von vornherein, da er erst durch Lösen des linearen Gleichungssystems bestimmt wird. Deswegen können wir für den Fall $\pi_i(t-) < \tilde{\pi}_i$ keine generelle Aussage treffen. Es kann passieren, daß wir Aktien verkaufen müssen, obwohl der Anteil kleiner ist als der optimale Anteil. Und zwar dann, wenn der Portfoliowert nach der Transaktion so klein geworden ist, daß die rechte Seite von (2.14) negativ ist. Es wird aber fast immer so sein, daß hier Aktien nachgekauft werden müssen. Da wir dies vor dem Lösen nicht wissen, müssen wir danach noch einmal nachprüfen, ob das Gleichungssystem richtig aufgestellt wurde, d.h. ob bei der ersten Summe wirklich alle Summanden die Annahme $\varphi_i(t) > \varphi_i(t-)$ erfüllen.¹⁷ Wenn man nur die Kosten $K = X(t-) - X(t)$ und nicht noch zusätzlich die absoluten Anteile berechnen möchte, genügt es, den Portfoliowert $X(t)$ nach der Transaktion zu bestimmen. Dafür kann man (2.14) auch direkt in die $n+1$ -te Gleichung einsetzen und erhält dann

$$X(t) = X(t-) \frac{\pi_0(t-) + \sum_{i=1}^n (1 \pm k)\pi_i(t-)}{\tilde{\pi}_0 + \sum_{i=1}^n (1 \pm k)\tilde{\pi}_i}.$$

Wenn die Aktie i nachgekauft werden muß ($\varphi_i(t) > \varphi_i(t-)$), gilt in den Summen jeweils das „+“, ansonsten das „-“. Auch hier muß hinterher noch geprüft

¹⁷In unserer Monte Carlo-Simulation war dies bis auf sehr wenige Ausnahmen immer der Fall. Diese Pfade wurden dann bei den weiteren Berechnungen vernachlässigt.

werden, ob bei der Berechnung das richtige Vorzeichen gewählt wurde. Damit hat man dann die Transaktionskosten in Abhängigkeit des Portfoliowertes vor der Transaktion.

Jetzt können wir die eben hergeleiteten tatsächlichen Transaktionskosten K abschätzen. Wir formulieren dies in einem Satz, der eine veränderte Version von Proposition 1 aus Korn (2004) ist. Mit der Matrix M bezeichnen wir weiterhin den Ellipsoidparameter, der die Stillhaltmenge \mathcal{C} aus dem asymptotischen Ansatz von Atkinson und Wilmott beschreibt.

Satz 2.4 (Grenzen für Transaktionskosten und Wachstumsrate)

Es gelten folgende Abschätzungen:

(i) Sei $y^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des Optimierungsproblems

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |y_i| = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \|y\|_1, \tag{2.15}$$

so daß $y'My = 1$ gilt.¹⁸ Die tatsächlichen Transaktionskosten K sind nach oben beschränkt durch:

$$K \leq \frac{k}{1-k} X(t-) \sum_{i=1}^n |\pi_i(t-) - \tilde{\pi}_i| \leq \frac{k}{1-k} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|y^*\|_1 X(t-) =: \tilde{k} \varepsilon^{\frac{1}{4}} X(t-).$$

Speziell für die Wahl von

$$\varepsilon = \varepsilon^* := \tilde{k}^{\frac{4}{3}} \tag{2.16}$$

sind die tatsächlichen Transaktionskosten immer niedriger (oder gleich) als die Transaktionskosten bei Atkinson und Wilmott.

(ii) Falls für alle $i = 1, \dots, n$, zusätzlich die Ungleichung

$$(M^{-1}\mathbf{1})_i > 0 \tag{2.17}$$

¹⁸In dem durch M beschriebenen Ellipsoid ist y^* also der Punkt, der am weitesten vom Ursprung entfernt ist.

erfüllt ist, gilt sogar die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} K &\leq \frac{k}{1-k} X(t-) \sum_{i=1}^n |\pi_i(t-) - \tilde{\pi}_i| \leq \frac{k}{1-k} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{\mathbf{1}' M^{-1} \mathbf{1}} X(t-) \\ &=: \tilde{k} \varepsilon^{\frac{1}{4}} X(t-). \end{aligned}$$

Wie in (i) gilt bei der Wahl von $\varepsilon = \varepsilon^*$, daß die tatsächlichen Transaktionskosten kleiner sind als die im Modell von Atkinson und Wilmott.

(iii) Wenn wieder $\varepsilon = \varepsilon^*$ gewählt wird, dann ist die erwartete asymptotische Wachstumsrate durch¹⁹

$$r^* := r + 0,5\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi} - 2\sqrt{\varepsilon^*} \text{Sp}(HM)$$

nach unten beschränkt. Speziell gilt: Bei tatsächlichen Transaktionskosten lohnen sich Investitionen in die Aktien nur, wenn für den Proportionalitätsfaktor k die nachfolgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{k}{1-k} < \left(\frac{\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi}}{4\text{Sp}(HM)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|y^*\|_1}. \quad (2.18)$$

Ist dies nicht der Fall, d.h. wenn die Transaktionskosten nicht klein genug sind, dann wird nur in das Geldmarktkonto investiert. Falls die Ungleichung (2.17) in (ii) erfüllt ist, vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$\frac{k}{1-k} < \left(\frac{\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi}}{4\text{Sp}(HM)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}' M^{-1} \mathbf{1}}}. \quad (2.19)$$

Beweis: (i) Wir schätzen zuerst die tatsächlichen Transaktionskosten K ab. Wie oben schon erwähnt, entsprechen sie per Definition k mal dem

¹⁹Vgl. (2.11).

Handelsvolumen. Es gelten also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^n k |\varphi_i(t)P_i(t) - \varphi_i(t-)P_i(t)| \\
&= \sum_{i=1}^n k |\tilde{\pi}_i X(t) - \pi_i(t-)X(t-)| \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ \tilde{\pi}_i X(t) \geq \pi_i(t-)X(t-)}}^n k |\tilde{\pi}_i X(t) - \pi_i(t-)X(t-)| \\
&\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ \tilde{\pi}_i X(t) < \pi_i(t-)X(t-)}}^n k |\tilde{\pi}_i X(t) - \pi_i(t-)X(t-)|.
\end{aligned}$$

In der zweite Summe kann dann jeder Summand mit $0 = -\tilde{\pi}_i X(t-) + \tilde{\pi}_i X(t-)$ erweitert und mit der Dreiecksungleichung durch

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\pi}_i X(t) - \tilde{\pi}_i X(t-) + \tilde{\pi}_i X(t-) - \pi_i(t-)X(t-)| \\
&\leq |\tilde{\pi}_i X(t) - \tilde{\pi}_i X(t-)| + |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| X(t-)
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Wegen $X(t-) > X(t)$ können wir auch die erste Summe einfach abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
K &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ \tilde{\pi}_i X(t) \geq \pi_i(t-)X(t-)}}^n k |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| X(t-) \\
&\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ \tilde{\pi}_i X(t) < \pi_i(t-)X(t-)}}^n k \left(|\tilde{\pi}_i X(t) - \tilde{\pi}_i X(t-)| + |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| X(t-) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n k |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| X(t-) + \sum_{i=1}^n k \tilde{\pi}_i (X(t-) - X(t)) \\
&= kX(t-) \sum_{i=1}^n |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| + k(X(t-) - X(t)) \sum_{i=1}^n \tilde{\pi}_i \\
&\leq kX(t-) \sum_{i=1}^n |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)| + kK.
\end{aligned}$$

Auflösen nach K liefert uns die erste Abschätzung:

$$K \leq \frac{k}{1-k} X(t-) \sum_{i=1}^n |\tilde{\pi}_i - \pi_i(t-)|.$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß die größtmögliche Entfernung vom Rand des Ellipsoids bis zu seinem Mittelpunkt durch $\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|y^*\|_1$ gegeben ist. Mit der Wahl von $\varepsilon = \varepsilon^*$ folgt

$$K \leq \tilde{k} \varepsilon^{*\frac{1}{4}} X(t-) = \tilde{k}^{\frac{4}{3}} X(t-) = \varepsilon^* X(t-).$$

Wenn wir der Handelsstrategie von Atkinson und Wilmott folgen, aber tatsächliche Transaktionskosten betrachten, sind diese also immer kleiner (gleich) als bei Atkinson und Wilmott mit $\varepsilon = \varepsilon^*$.

- (ii) Für den Beweis dieser Behauptung genügt es, y^* aus (i) auszurechnen und dieses dort einzusetzen. Wie im Beweis bei Korn (2004) zu sehen ist, gilt z.B.

$$y^* = \frac{M^{-1}\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}'M^{-1}\mathbf{1}}}.$$

Zu beachten ist, daß wegen der Form des Ellipsoids die Lösung y^* nicht eindeutig ist.

- (iii) Da die tatsächlichen Transaktionskosten immer kleiner (gleich) sind als die bei Atkinson und Wilmott mit $\varepsilon = \varepsilon^*$, wird der tatsächliche Vermögensprozeß und somit auch die erwartete Wachstumsrate immer größer (gleich) sein, und die Rate bei Atkinson und Wilmott ist eine untere Schranke. Die anderen beiden Behauptungen folgen aus der Voraussetzung $r^* > r$ und mit (i) bzw. (ii).

□

Bemerkung 2.5

- (i) Dieser Satz ist äußerst wichtig bei der Anwendung des Transaktionskostenmodells von Atkinson und Wilmott. Erstens können wir nun eine Handelsstrategie angeben, wie man das Modell in der Praxis tatsächlich verwenden kann. (Siehe User Guide weiter unten.) Und zweitens haben wir mit (i) bzw. (ii), falls Bedingung (2.17) erfüllt ist, einen Zusammenhang zwischen den tatsächlichen Transaktionskosten und denen bei

Atkinson und Wilmott erhalten, wenn auch nur in einer Ungleichung. Wir können jetzt aber bei unseren späteren Analysen Werte für k vorgeben und erhalten mit ε^* Ergebnisse in unserem Modell (wenn auch nur als Abschätzung).

- (ii) Die Bedingung (2.17) ist bei unseren Beispielen immer erfüllt gewesen, d.h. wir konnten gleich Aussage (ii) anwenden.
- (iii) In Proposition 1 bei Korn (2004) müssen in den Aussagen (i) und (ii) jeweils k durch $\frac{k}{1-k}$ und $X(t)$ durch $X(t-)$ ersetzt werden, damit die linke Seite jeweils den tatsächlichen Transaktionskosten entspricht und die Aussagen Sinn ergeben. Als Folgerung der beiden ersten Aussagen muß auch in (iii) die Ersetzung von k durch $\frac{k}{1-k}$ erfolgen.

Dort gibt es in (iv) noch zwei weitere Abschätzungen über die tatsächlichen Transaktionskosten. Zu diesen beiden Abschätzungen möchten wir jeweils noch eine Anmerkung machen. Erstens steht dort geschrieben, daß diese im Spezialfall unkorrelierter Aktien gelten. Allerdings stimmt die Obergrenze immer, wenn wieder k und $X(t)$ ersetzt werden, da sie die Eigenwerte beinhaltet, die auch im Falle korrelierter Aktien berechnet werden können. Sie ist aber leider sehr schlecht, insbesondere schlechter als die Obergrenze in (i). Denn es wird um das Ellipsoid ein n -dimensionaler Quader gespannt und der Abstand vom Ursprung zu einer Ecke, der dort in der Abschätzung gewählt wird, ist viel größer als der größtmögliche Abstand $\|y^*\|$ vom Ursprung zum Rand des Ellipsoids. Zweitens stimmen die tatsächlichen Transaktionskosten nicht dem Term in der Mitte überein, so daß die Untergrenze keinen Sinn ergibt. Und wenn wieder k und $X(t)$ ersetzt werden, so daß es die tatsächlichen Transaktionskosten sind, gelten die dort gemachten Abschätzungen nicht mehr.

Mit diesen Abschätzungen können wir nun noch einen User Guide zum Verwenden des Morton/Pliska-Ansatzes (in der Version von Atkinson/Wilmott) angeben.²⁰

User Guide

- Zuerst muß die Matrix M aus Marktkoeffizienten bestimmt werden (vgl. Abschnitt 2.2.3).
- Danach muß geprüft werden, ob der Transaktionskostenproportionalitätsfaktor k klein genug ist, damit die Atkinson/Wilmott-Strategie eine höhere erwartete Wachstumsrate liefert als eine Investition nur in das Geldmarktkonto (vgl. Ungleichung (2.18) bzw. Ungleichung (2.19), falls sogar Bedingung (2.17) erfüllt ist).
- Falls der Check positiv ausgefallen ist, kann die Strategie von Atkinson und Wilmott mit $\varepsilon = \varepsilon^*$ verfolgt werden.

Damit hätten wir eine plausible Handelsstrategie angegeben (erst handeln, wenn wir so weit von der optimalen Vermögensaufteilung entfernt sind, daß sich die Transaktionskosten lohnen – und wenn gehandelt wird, dann nicht nur infinitesimale Größen, sondern es erfolgt eine Umschichtung auf das optimale Portfolio²¹) und dafür eine erwartete Mindestrendite genannt. Zusätzlich haben wir für eine realistische Transaktionskostenstruktur eine Obergrenze für die Kosten angegeben. Dabei kann hier die Matrix M im Gegensatz zu anderen in der Einleitung genannten Modellen effektiv, d.h. in Realtime, aus den gegebenen Marktkoeffizienten berechnet werden.

²⁰Siehe wieder Korn (2004).

²¹Wobei wir in diesem Modellrahmen angenommen haben, daß das Merton-Portfolio $\tilde{\pi}$ das (approximativ) optimale ist.

2.4 Numerische Analyse des Modells

In diesem Abschnitt präsentieren wir die Ergebnisse einer Analyse des Transaktionskostenmodells von Atkinson und Wilmott. Dazu haben wir einige Tests mittels Monte Carlo-Simulation durchgeführt, bei der wir der Anlagestrategie von Atkinson und Wilmott gefolgt sind.²² Bei den Analysen wurden die einzelnen Parameter variiert, wie z.B. die Anzahl der gehandelten Aktien, deren Parameter und die Zinsrate sowie die Höhe der Transaktionskosten. Der Betrachtungszeitraum des Portfolios betrug zehn Jahre, wobei wir handelstäglich überprüft haben, ob eine Transaktion stattfindet, also ob sich der Portfolioprozess noch innerhalb der Ellipse befindet.²³ Wie bei jeder Diskretisierung ist es auch hier nicht möglich, dies zeitstetig zu behandeln. Wie bereits erwähnt, ist eine Transaktionskostenstruktur wie bei Morton und Pliska nicht realitätsnah. Deswegen haben wir bei unseren Analysen auch nicht die von der Vermögenshöhe abhängigen Transaktionskosten ε variiert, sondern die tatsächlichen, vom Transaktionsvolumen abhängigen, die wir in Abschnitt 2.3 eingeführt und mit k bezeichnet haben. Durch (2.16) haben wir diese auf ε umgerechnet. Aus Satz 2.4 wissen wir z.B., wie hoch bei dieser Strategie die Mindestrendite sein muß.

²²Bei der Monte Carlo-Simulation haben wir versucht eine Varianzreduktion herbeizuführen. Wir haben nach jedem Pfad von der Portfoliorendite die Rendite des Portfolios, das der Merton-Strategie $\tilde{\pi} = (\sigma\sigma')^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ folgt, abgezogen und am Ende der Simulation die dazugehörige erwartete Rendite $(1 - \tilde{\pi}'\mathbf{1})r + \tilde{\pi}'\mu - 0,5\tilde{\pi}'\sigma\sigma'\tilde{\pi}$ (siehe z.B. Korn (1997), S. 72) wieder dazu addiert. Leider müßte für eine Konvergenz dieses Verfahrens zeitstetig gehandelt werden, was in einer Simulation nicht möglich ist. Und selbst bei täglichem Handel war der Fehler noch in der Größenordnung der ursprünglichen Standardabweichung, weswegen wir in den Ausführungen darauf verzichtet haben.

²³Obwohl die erwartete Wachstumsrate schon durch die Zeit „normiert“ wurde (vgl. (2.1)), spielt es doch eine Rolle, wie groß der Betrachtungszeitraum ist. Zum Beispiel wird bei manchen Parameterkonstellationen nur alle paar Jahre gehandelt, so daß nicht immer alle Eigenschaften, wie durchschnittliche Handelszeit, betrachtet werden können. Vgl. dazu Abschnitt 2.4.3.

Wir wollen eine kurze Einschätzung darüber geben, welche Werte von k praxisnah sind. Bei Direktbanken liegen die Transaktionskosten zur Zeit bei etwa 0,25% des gehandelten Volumens plus eine fixe Gebühr, die bei jeder Transaktion zusätzlich anfällt. Bei einer Transaktionshöhe von 10.000 EUR entsprechen die Gesamtkosten ca. 0,5% des gesamten Volumens. Wir möchten deswegen an dieser Stelle den Wert $k = 0,5\%$ bei den Beispielen im Hinterkopf behalten.

Im ersten Abschnitt visualisieren wir die Stillhaltmenge im Falle einer und zweier Aktien. Danach betrachten wir die asymptotische Rendite bei Atkinson und Wilmott und vergleichen ihre Güte mit unserer Monte Carlo-Simulation. Da bei ihrer Herleitung die Terme höherer Ordnung von ε vernachlässigt wurden, wollten wir wissen, wie sich diese Approximation auf das Endergebnis auswirkt. Im Anschluß daran analysieren wir den erwarteten Zeitraum zwischen zwei Transaktionen (im folgenden auch Handelszeit genannt) und schätzen die Transaktionskosten ab. Des weiteren betrachten wir die Einführung von Optionen in das Modell. Allerdings erweiterten wir dafür nicht das Modell um neue Wertpapiere, sondern prüfen dies mit einer einfachen Strategie anhand einer weiteren Monte Carlo-Simulation.

Wir präsentieren die Ergebnisse für fünf verschiedene Szenarien: für den Fall einer Aktie, zweier Aktien, fünf Aktien und zehn Aktien. In Tabelle 2.1 geben wir die jeweils verwendeten Parameter an. In Szenario 1 gibt es nur eine Aktie. Dieses Szenario ist unter anderem deswegen interessant, weil es in diesem Fall eine Formel für die erwartete Handelszeit gibt, die wir mit der durchschnittlichen Handelszeit unserer Monte Carlo-Simulation vergleichen können (vgl. Abschnitt 2.4.3). Szenario 2 entspricht einem Beispiel aus Korn (1997), der dort eine Abbildung der Stillhaltmenge um den Merton-Punkt $\tilde{\pi} = (1/3, 1/3)'$ präsentiert (vgl. auch Abbildung 2.2).²⁴ Die nächsten beiden Szenarien betrachten wir, da es in der bestehenden Literatur keine numerischen Analysen mit einer so großen Anzahl von Aktien für dieses Mo-

²⁴Die Volatilität $\sigma_{22} = \sqrt{0,12}$ wird in Tabelle 2.1 nur gerundet angegeben.

	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3	Szenario 4	
Anzahl Aktien	1	2	5	10	
Zinsrate r	5%	5%	7%	7,5%	
Drift μ_i	8%	8%	8%	8%	9,5%
		9%	9%	8,3%	9,8%
			9,2%	8,7%	10%
			9,5%	9%	11%
			10%	9,2%	12%
Volatilität σ_{ii}	30%	30%	30%	30%	45%
		34,6%	34,6%	31%	48%
			40%	33%	50%
			45%	34,6%	60%
			50%	40%	65%
Szenario 5, wie Szenario 3 mit					
	$\sigma_{1j} = 20\%$	$\sigma_{2j} = 50\%$	$\sigma_{3j} = 70\%$		
	$\sigma_{4j} = 80\%$	$\sigma_{5j} = 100\%$	für $j \neq$ erster Index		

Tabelle 2.1: Parameter für die fünf Szenarien

Es gilt $\sigma_{ij} = 0$ für $i \neq j$ in den Szenarien 1 bis 4.

dell gibt. Dabei mußten wir jeweils die Zinsrate erhöhen, da ansonsten die Überrenditen der einzelnen Aktien so groß geworden wären, daß das Merton-Portfolio keine zulässige Portfoliostrategie mehr gewesen wäre.²⁵ Szenario 5 ist eine Verallgemeinerung von Szenario 3. Hier gilt für die Volatilitäten sogar $\sigma_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, 5$, d.h. die Aktien sind positiv korreliert.

²⁵Vgl. dazu Definition 2.1.

2.4.1 Die Stillhaltungemenge

An dieser Stelle möchten wir Darstellungen der Stillhaltungemengen präsentieren. Allerdings ist dies nur in den ersten beiden Szenarien möglich, denn mit jeder Aktie kommt eine Dimension hinzu und fünf- und noch mehr dimensionale Abbildungen sind nicht möglich. Abbildung 2.1 zeigt die obere und untere Grenze, zwischen denen in Szenario 1 nicht gehandelt wird, in Abhängigkeit des Kostenfaktors k . Für ein festes k ist die Stillhaltungemenge das Intervall zwischen diesen beiden Grenzen. Das optimale Portfolio beträgt in diesem Fall $1/3$ und liegt genau in der Mitte des Intervalls.

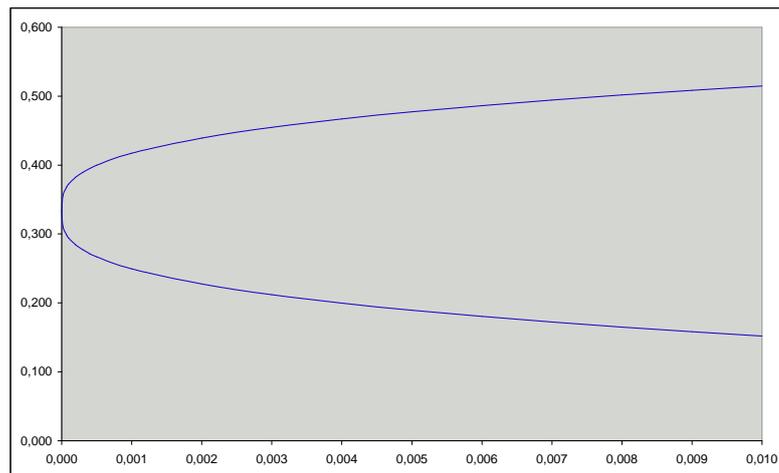


Abbildung 2.1: Stillhaltungemengen in Szenario 1

Wie erwartet, wird das Intervall für höhere Transaktionskosten immer größer. Man kann sehen, daß das Intervall schon für kleine Werte von k schnell wächst. Bereits in diesem Bereich ist es besser, ein nichtoptimales Portfolio zu halten als für eine Umschichtung Transaktionskosten zu zahlen. Für größere k ist der Zuwachs allerdings sehr gering. Atkinson und Wilmott (1995)

bzw. Korn (1997) geben ein Beispiel mit anderen Parametern an, das diese Beobachtung bestätigt. Ab einem bestimmten Wert hängen die Intervallgrenzen kaum noch von k ab. In Abbildung 2.2 sind der Merton-Punkt und die Stillhaltungsmengen (jeweils Ellipsen) in Szenario 2 für drei verschiedene Werte von k dargestellt.²⁶ Der Raum entspricht der Menge aller möglichen Paare

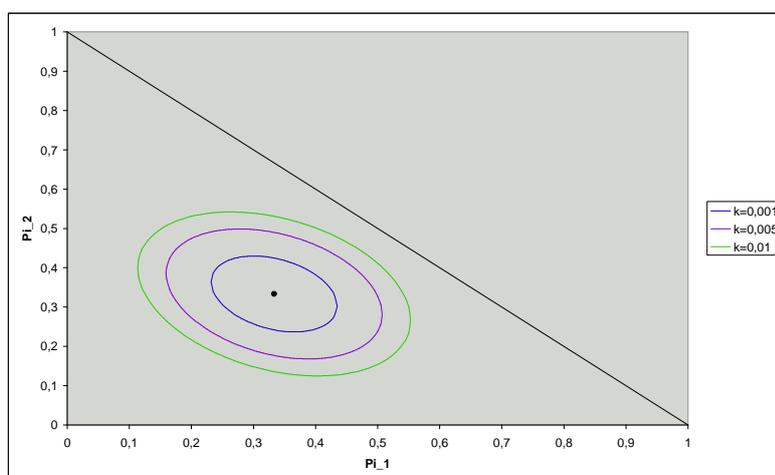


Abbildung 2.2: Drei Stillhaltungsmengen in Szenario 2

(π_1, π_2) . Zusätzlich haben wir eine Diagonale eingezeichnet, die der Bedingung aus Definition 2.1 entspricht, daß die Summe aller Anteile immer kleiner als 1 sein muß. Die Stillhaltungsmengen werden durch Ellipsen dargestellt, die für größer werdende k selbst wieder größer werden. Eingezeichnet sind die Mengen für $k = 0,001$ und $k = 0,01$ (dem kleinsten und dem größten k in unseren weiteren Untersuchungen) sowie $k = 0,005$ (praxisnahes k). Wie in Szenario 1 nimmt der Zuwachs der Stillhaltungsmenge für steigende k ab, wenn

²⁶Die Matrix M besitzt in diesem Fall nicht die Einheitsvektoren als Eigenvektoren. Deswegen kann die Abbildung bei Korn (1997) nicht richtig sein, die für die gleichen Parametern gezeichnet wurde.

er durch die Halbachsen charakterisiert wird. Im Fall $k = 0,005$ liegt sowohl der Anteil von Aktie 1 als auch der Anteil von Aktie 2 jederzeit zwischen 16% und 50%.

2.4.2 Die asymptotische Wachstumsrate

Nun wollen wir zeigen, wie gut die asymptotische Wachstumsrate die tatsächliche approximiert, wobei wir die tatsächliche Wachstumsrate durch Monte Carlo-Simulation bestimmen.²⁷ Wie eingangs schon erwähnt, sind die Ergebnisse von Atkinson und Wilmott nur approximativ richtig, da sie das ursprüngliche Problem durch asymptotische Analyse lösen und dabei die Terme zweiter Ordnung bzgl. ε vernachlässigen. Tabelle 2.2 zeigt die erwarteten Wachstumsraten bei Atkinson und Wilmott (jeweils obere Reihe) und die mit der Monte Carlo-Simulation berechneten Renditen (untere Reihe) in den fünf Szenarien für verschiedene Werte des Transaktionskostenfaktors k .

Wie erwartet werden für höhere Transaktionskosten beide Raten kleiner. Obwohl sie nur Approximationen sind, liegen die optimalen Wachstumsraten von Atkinson und Wilmott (AW) dicht bei den simulierten Monte Carlo-Raten (MC). Im Durchschnitt über alle Szenarien beträgt die Differenz weniger als 1,2 Basispunkte (BP) pro Rate. Je mehr Aktien wir als Investitionsmöglichkeit zulassen, desto größer werden die Abweichungen. Dasselbe gilt für steigende Transaktionskosten, siehe auch Abbildung 2.3. Besonders hervorzuheben ist, daß die Abweichungen in Szenario 5 am kleinsten sind. In Szenario 2 liegen die AW-Raten über den MC-Raten, in den anderen Szenarien

²⁷Die Monte Carlo-Simulationen haben wir jeweils mit 1.000.000 Pfaden durchgeführt, so daß die Standardabweichungen bei den Wachstumsraten (sehr viel) kleiner als 1 Basispunkt sind.

k	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3	Szenario 4	Szenario 5
0,001	5,489%	6,141%	7,657%	8,429%	7,256%
	5,495%	6,128%	7,659%	8,425%	7,258%
0,002	5,483%	6,126%	7,627%	8,361%	7,247%
	5,489%	6,112%	7,631%	8,362%	7,249%
0,003	5,478%	6,113%	7,602%	8,303%	7,240%
	5,483%	6,100%	7,608%	8,309%	7,242%
0,004	5,473%	6,102%	7,580%	8,252%	7,233%
	5,479%	6,088%	7,588%	8,263%	7,236%
0,005	5,469%	6,092%	7,559%	8,205%	7,227%
	5,475%	6,079%	7,570%	8,221%	7,230%
0,006	5,465%	6,082%	7,540%	8,160%	7,221%
	5,471%	6,070%	7,554%	8,184%	7,226%
0,007	5,461%	6,073%	7,521%	8,118%	7,215%
	5,467%	6,061%	7,538%	8,150%	7,221%
0,008	5,457%	6,064%	7,504%	8,078%	7,210%
	5,464%	6,053%	7,525%	8,118%	7,216%
0,009	5,454%	6,055%	7,487%	8,040%	7,205%
	5,461%	6,045%	7,511%	8,085%	7,212%
0,01	5,451%	6,047%	7,471%	8,003%	7,200%
	5,459%	6,039%	7,498%	8,055%	7,209%

Tabelle 2.2: Optimale Wachstumsraten bei Atkinson und Wilmott
 In der jeweiligen Reihe stehen direkt darunter die simulierten Renditen.

ist i.d.R. der umgekehrte Fall zu beobachten. Im allgemeinen kann man keine Aussage darüber machen, ob die AW-Raten höher oder niedriger sind.²⁸

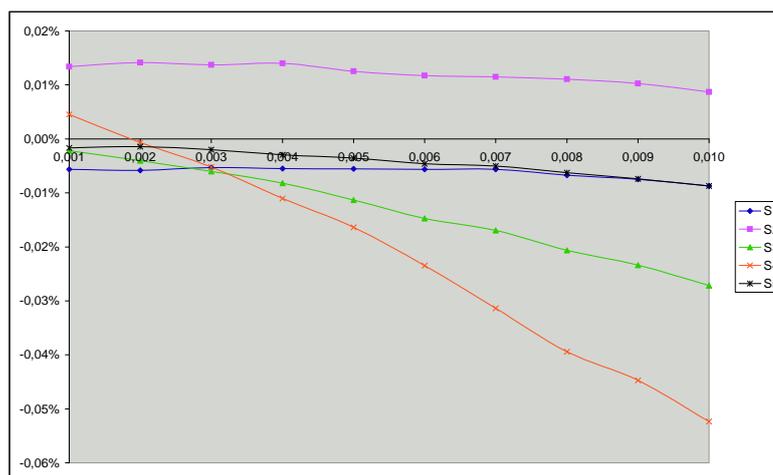


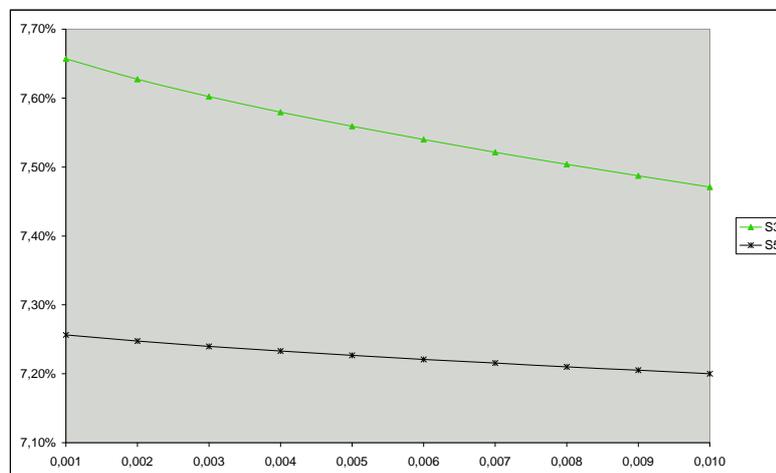
Abbildung 2.3: Differenzen der Wachstumsraten

Abbildung 2.4 zeigt AW-Raten in Abhängigkeit des Kostenfaktors k im Intervall $[0, 001; 0, 01]$ für die Szenarien 3 und 5.²⁹ Die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wert liegt im Szenario 5 bei ca. 5 BP, im Szenario 3 auch nur bei ca. 20 BP.³⁰ Ist die Volatilitätsmatrix nur auf der Diagonalen besetzt (Szenarien 1 bis 4), so steigt die Differenz mit steigender Anzahl an Aktien, ist aber von vergleichbarer Größenordnung. Der Einfluß der Transaktionskosten auf die optimale Wachstumsrate ist also nicht sehr groß.

²⁸ Diese Ergebnisse, insbesondere daß die Abweichungen bei vollbesetzter Matrix am kleinsten sind, konnten wir auch bei anderen Parameterkonstellationen beobachten.

²⁹ Für $k = 0, 001$ ist ε^* , das wir aus Satz 2.4 erhalten, schon sehr klein, weswegen wir in dieser Analyse keine kleineren Werte für k betrachten.

³⁰ Man beachte, daß sich die Differenzen bei den MC-Raten auch in dieser Größenordnung bewegen.

Abbildung 2.4: Optimale AW-Raten in Abhängigkeit von k

2.4.3 Die erwartete Handelszeit

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich die verschiedenen Parameterkonstellationen auf die erwartete Handelszeit τ auswirken, die wir mit Hilfe der Monte Carlo-Simulation berechnen.³¹ Zur Erinnerung: τ ist die Zeit, die der Portfolioprozess benötigt, um von der Merton-Lösung $\tilde{\pi}$ ausgehend an den Rand des Ellipsoids \mathcal{C} zu gelangen. Mit M werden wir weiterhin die symmetrische, positiv definite Matrix bezeichnen, die die Stillhaltmenge $\mathcal{C} = \tilde{\pi} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}C$ mit $C = \{\tilde{\pi} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\pi}'M\tilde{\pi} \leq 1\}$ beschreibt. Bevor wir die numerischen Ergebnisse präsentieren, möchten wir zunächst eine alternative Methode für ihre Berechnung skizzieren. Im Falle einer Aktie kann man damit die erwartete

³¹Die Standardabweichungen der Monte Carlo-Simulationen bei der erwarteten Handelszeit und dem Transaktionsvolumen wirken sich nur auf Nachkommastellen aus, die wir in unseren Beispielen nicht mehr angeben.

Handelszeit auch explizit berechnen. Für höhere Dimensionen müssen wir allerdings auf die Monte Carlo-Simulation zurückgreifen.

Sei τ_{π_0} der erste Zeitpunkt, an dem der Portfolioprozess π bei Startwert π_0 an den Rand der Ellipse \mathcal{C} stößt, d.h. $\tau_{\pi_0} = \inf\{t > 0 \mid \pi'(t)M\pi(t) = 1, \pi(0) = \pi_0\}$ für $\pi_0 \in \mathcal{C}$. Wie in Abschnitt 2.2.1 bereits angegeben, besitzt das Portfolio zwischen zwei Handelszeitpunkten folgende Dynamik:³²

$$d\pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))(E - \mathbf{1}\pi'(t))((\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma'\pi(t)) dt + \sigma dW(t)).$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Auf diesen Portfolioprozess wenden wir nun die Itô-Formel mit f an und erhalten und auf der Menge \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} f(\pi(t)) &= f(\pi_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(\pi(s))\pi_i(s)(e'_i - \pi'(s))(\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma'\pi(s)) ds \\ &\quad + 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t f_{ij}(\pi(s))\pi_i(s)\pi_j(s)(e'_i - \pi'(s))\sigma\sigma'(e_j - \pi(s)) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(\pi(s))\pi_i(s)(e'_i - \pi'(s))\sigma dW(s). \end{aligned}$$

Dabei wird mit f_i die partielle Ableitung von f nach dem i -ten Parameter bezeichnet. Erwartungswertbildung auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\pi_0}(f(\pi(t))) &= f(\pi_0) + \mathbb{E}^{\pi_0} \left(\sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(\pi(s))\pi_i(s)(e'_i - \pi'(s))\sigma dW(s) \right) \\ &\quad + \mathbb{E}^{\pi_0} \left(\int_0^t \sum_{i=1}^n f_i(\pi(s))\pi_i(s)(e'_i - \pi'(s))(\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma'\pi(s)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\pi(s))\pi_i(s)\pi_j(s)(e'_i - \pi'(s))\sigma\sigma'(e_j - \pi(s)) ds \right). \end{aligned}$$

³²Vgl. (2.4).

Wenn nun f die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i(e'_i - x')(\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma'x) \\ \quad + 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x)x_ix_j(e'_i - x')\sigma\sigma'(e_j - x) \\ \quad \text{für } x \in \mathcal{C} \setminus \partial\mathcal{C}, \\ f(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\mathcal{C}. \end{array} \right.$$

wäre, würde sich am ersten Handelszeitpunkt, also wenn $t = \tau_{\pi_0}$ gilt, diese Gleichung zu

$$0 = E^{\pi_0}(f(\pi(\tau))) = f(\pi_0) - E^{\pi_0}(\tau)$$

vereinfachen. Die erste Gleichheit folgt aus der Bedingung an f auf dem Rand von \mathcal{C} . Bei der zweiten Gleichheit ist zu beachten, daß der Erwartungswert über das stochastische Integral wegen der Beschränktheit der Funktion auf einem endlichen Zeitintervall und der Beschränktheit der Parameter verschwindet. Der Integrand beim zweiten Integral ist der konstante Wert -1 , was zum Erwartungswert von $-\tau$ führt. Für die Wahl von $\pi_0 = \tilde{\pi}$ ist die erwartete Handelszeit $E(\tau) = f(\tilde{\pi})$.

Wie bereits erwähnt, kann dieses Randwertproblem bei einer Aktie explizit gelöst werden. In diesem Fall reduziert sich das Ellipsoid zu einem Intervall $[\pi_l, \pi_u]$ um den Wert $\tilde{\pi} = (\mu - r)/\sigma^2$ und wir erhalten folgende Gleichung für die erwartete Handelszeit:^{33,34}

$$E(\tau) = \frac{y \left(\exp(-2\nu z/\sigma^2) - 1 \right) - z \left(\exp(-2\nu y/\sigma^2) - 1 \right)}{\nu \left(\exp(-2\nu z/\sigma^2) - \exp(-2\nu y/\sigma^2) \right)}$$

³³Siehe dazu auch Korn (1997), S. 219.

³⁴Streng genommen muß man sich noch überlegen, daß der Rand des Intervalls (bzw. des Ellipsoids) nach einer endlichen erwarteten Zeit erreicht wird, was aber aus der Beschränktheit der Komponenten des Portfolioprozesses nach oben und unten (von der Null weg!) auf dem Ellipsoid folgt.

mit

$$\begin{aligned} y &= \ln(\pi_u(1 - \tilde{\pi})) - \ln(\tilde{\pi}(1 - \pi_u)), \\ z &= \ln(\pi_l(1 - \tilde{\pi})) - \ln(\tilde{\pi}(1 - \pi_l)), \\ \nu &= \mu - r - 0,5\sigma^2. \end{aligned}$$

In Abbildung 2.5 können wir uns die so berechnete Handelszeit in Abhängigkeit von k ansehen. Zusätzlich ist auch die mit der Monte Carlo-Simulation berechnete Handelszeit eingetragen. Für Werte ab $k = 0,003$ vergrößert sich der Abstand zwischen den beiden Funktionen stetig. Die analytisch berechnete Handelszeit steigt fast linear mit den Transaktionskosten, während die MC-Handelszeit eher abflacht. Die Differenz ist folgendermaßen zu erklären. In unserer Monte Carlo-Simulation betrachten wir den Investor über eine Laufzeit von zehn Jahren. Für $k = 0,01$ fand bis zu dem Zeitpunkt in ca. 68% der Pfade immer noch keine Transaktion statt. Da wir die Handelszeit nur anhand tatsächlich getätigter Transaktionen berechnen, ist diese in der Simulation immer kleiner. Würde man einen längeren Betrachtungszeitraum wählen, so würde auch die simulierte durchschnittliche Handelszeit ansteigen, denn es kämen weitere Pfade hinzu, die allesamt eine längere Handelszeit aufweisen. Allerdings könnte man dann die Monte Carlo-Simulation nicht mehr mit einem vertretbaren Aufwand durchführen. Ist die Volatilitätsmatrix eine Diagonalmatrix (Szenario 1 bis 4), so tritt dieser Effekt nur im Falle einer Aktie auf. Bereits bei zwei Aktien wird selbst für große Werte für k bei fast 100% aller Simulationspfaden mindestens einmal gehandelt. Auch in Szenario 5, müssen die Transaktionskosten sehr hoch sein ($k \geq 0,01$), bis dieser Effekt zu sehen ist. Bemerkenswert ist insbesondere die Tatsache, daß selbst bei niedrigen Transaktionskosten die Handelszeit zwei Jahre beträgt. Das liegt daran, daß das Stillhalteintervall sehr groß ist, was wir bereits in dem entsprechenden Abschnitt sehen konnten.

In Abbildung 2.6 geben wir auch die Handelszeiten in den übrigen Szenarien an. In je mehr Aktien man investieren darf, desto schneller stößt das Port-

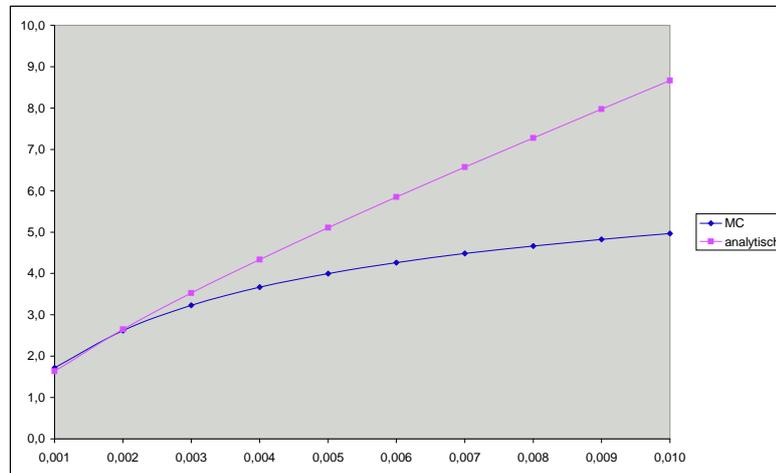


Abbildung 2.5: Handelszeit in Szenario 1

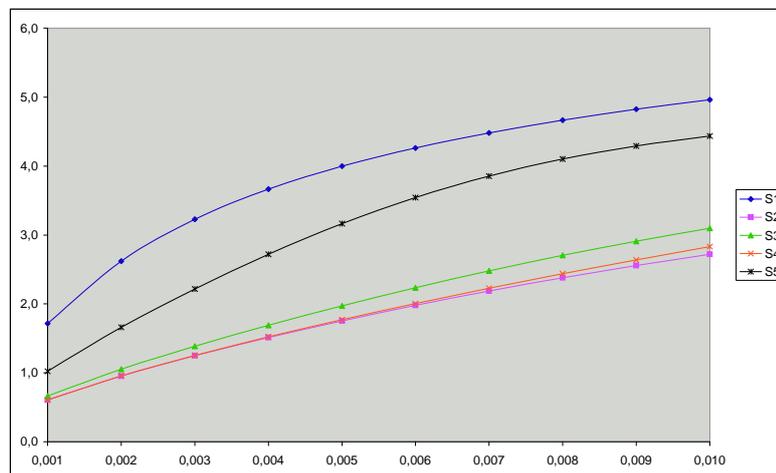


Abbildung 2.6: Handelszeit in allen Szenarien

folio an die Grenze des jeweiligen Ellipsoids. In Szenario 5 wird allerdings weit weniger häufig gehandelt als im vergleichbaren Szenario 3, in dem es auch fünf Aktien gibt. Das liegt aber nicht daran, daß \mathcal{C} hier größer ist, denn die Eigenvektoren der Matrix M sind viel kleiner als in Szenario 3. Sondern das kommt daher, daß man in das optimale Portfolio nur 25% des Gesamtvermögens in Aktien investiert, also viel weniger im Vergleich zu 66%. Aus diesem Grund ist auch die optimale Wachstumsrate bei Szenario 3 kleiner (vgl. Tabelle 2.2). Für praxisnahe Transaktionskosten ($k = 0,005$) beträgt die Handelszeit selbst in den Szenarien 2 und 4, in denen man am häufigsten handelt, mindestens 1,7 Jahre. Diese Ergebnisse sind konform mit einer Untersuchung von Rogers (2001), der Strategien *relaxter* Investoren betrachtet. Ein solcher Investor handelt nicht zeitstetig, sondern nur an vorgegebenen Zeitpunkten. Rogers zeigt, daß die (Effizienz-)Verluste nur sehr gering sind,³⁵ weswegen bei Existenz von Transaktionskosten, wie in diesem Fall, erst recht wenig gehandelt wird.

2.4.4 Abschätzung der Transaktionskosten

Wir haben mit der Monte Carlo-Simulation sowohl die Kosten bei Atkinson und Wilmott (AW) als auch die zum Volumen proportionalen Kosten berechnet. Dabei haben wir ε wie in Satz 2.4 gewählt, damit die Kosten vergleichbar werden. Es sollten also die tatsächlichen Kosten immer niedriger sein als die AW-Kosten. Wir präsentieren nun die Güte dieser Abschätzungen und erklären, warum sie in manchen Fällen verletzt werden.

Tabelle 2.3 zeigt beide Transaktionskosten in Prozent des Vermögens in allen Szenarien für verschiedene Werte von k . Wie erwartet steigen sie für größer werdende k an, da dort auch die Stillhaltmenge größer wird. Zu beachten ist hierbei, daß in dem Fall auch ε größer wird. In den ersten beiden Szenarien

³⁵Diese Ergebnisse ändern sich, wenn man zusätzlichen Konsum des Investors betrachtet.

kommt der anfangs angesprochene Effekt zustande, daß die proportionalen Kosten höher sind als die AW-Kosten. Dies hat numerischen Gründe und wurde am Anfang von Abschnitt 2.4 schon einmal kurz angesprochen. Da wir die Handelszeit diskretisiert haben – wir prüfen einmal pro Tag –, wird nicht immer genau dann gehandelt, wenn das Portfolio an den Rand stößt, sondern manchmal auch erst, wenn es außerhalb der Menge ist. Dadurch sind die proportionalen Kosten leicht höher, als in der Abschätzung in Satz 2.4 angenommen. Bei nur wenigen Aktien macht dies einen großen Teil der Kosten aus. In diesen beiden Szenarien sind die Transaktionskosten also in beiden Fällen fast gleich.³⁶ Sobald wir mehr Aktien zur Auswahl haben, ist die Abschätzung immer erfüllt. Je größer k (und damit auch ε) ist, desto größer werden die Abweichungen und auch die Kosten selbst. Das gleiche gilt auch, wenn in einem Szenario mehr Aktien vorhanden und diese unkorreliert sind. Denn dann steigt eher die Chance, daß eine einzelne Aktie dafür sorgt, daß das ganze Portfolio an den Rand des Ellipsoids stößt. Zahlt man dann immer ε mal das ganze Vermögen an Transaktionskosten, werden diese im Mittel viel höher sein, als wenn man nur für das eigentliche Handelsvolumen Kosten zahlen muß. In Szenario 5 sind die Kosten absolut gesehen wieder viel niedriger als im Vergleichsszenario. Denn durch die positive Korrelation kann der eben genannte Effekt weniger oft auftreten.

Abbildung 2.7 zeigt das durchschnittliche Transaktionsvolumen in den fünf Szenarien in Abhängigkeit von k . In Szenario 5 wird öfters gehandelt, deswegen ist das durchschnittliche Volumen nur sehr gering. Dagegen ist in Szenario 4 das Volumen schon für ein realitätsnahes k über 50%, d.h. bei einer Transaktion wird mehr als die Hälfte des Vermögens umgeschichtet!

³⁶Diesen Effekt haben wir auch bei anderen Parameterkonstellationen bei einer und zwei Aktien beobachtet.

k	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3	Szenario 4	Szenario 5
0,001	0,009%	0,012%	0,020%	0,041%	0,010%
	0,010%	0,012%	0,017%	0,028%	0,008%
0,002	0,025%	0,031%	0,053%	0,106%	0,026%
	0,025%	0,032%	0,044%	0,072%	0,022%
0,003	0,045%	0,055%	0,094%	0,188%	0,047%
	0,045%	0,055%	0,078%	0,126%	0,040%
0,004	0,068%	0,082%	0,142%	0,283%	0,072%
	0,069%	0,082%	0,117%	0,188%	0,061%
0,005	0,094%	0,113%	0,196%	0,391%	0,100%
	0,095%	0,113%	0,162%	0,259%	0,085%
0,006	0,122%	0,147%	0,256%	0,510%	0,132%
	0,123%	0,146%	0,210%	0,336%	0,111%
0,007	0,153%	0,183%	0,321%	0,640%	0,167%
	0,154%	0,182%	0,263%	0,420%	0,140%
0,008	0,186%	0,223%	0,391%	0,781%	0,204%
	0,188%	0,220%	0,321%	0,511%	0,171%
0,009	0,222%	0,265%	0,467%	0,932%	0,244%
	0,223%	0,261%	0,382%	0,608%	0,203%
0,01	0,260%	0,309%	0,548%	1,093%	0,287%
	0,261%	0,304%	0,447%	0,711%	0,238%

Tabelle 2.3: Transaktionskosten

Oben stehen jeweils die AW- und unten die proportionalen Kosten.

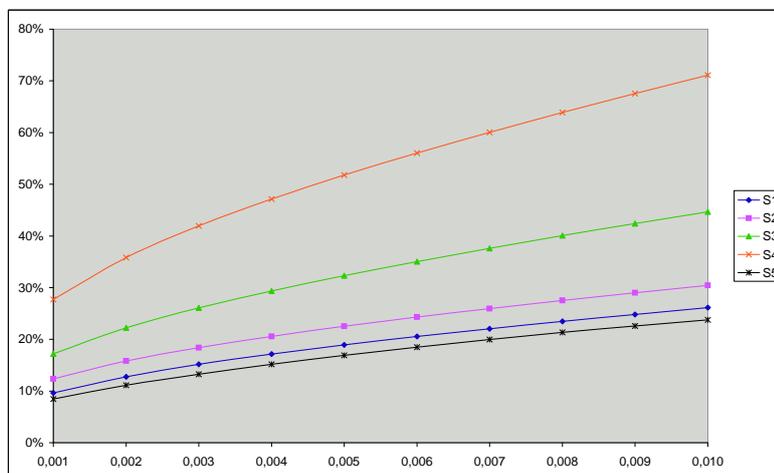


Abbildung 2.7: Transaktionsvolumen in allen Szenarien

2.4.5 Investition in Optionen

Abschließend wollen wir an einem Beispiel den Effekt aufzeigen, wenn statt direkt in die Aktien in Call-Optionen auf diese investiert wird. Wir werden hierfür aber nicht die asymptotische Approximation neu herleiten und dabei die Aktienkursprozesse durch solche von Optionen ersetzen. Vielmehr gehen wir in unseren Beispielen davon aus, daß der relative Vermögensanteil für jede Aktie in Call-Optionen investiert wird. Handel findet wie bisher immer dann statt, wenn sich diese relativen Anteile so verändern, daß sie an den Rand der Stillhaltmenge stoßen, allerdings der Stillhaltmenge \mathcal{C} für Aktien aus Abschnitt 2.2.3. Sind in vollständigen Märkten zusätzlich zu Aktien auch noch Optionen auf diese Aktien zur Investition zugelassen, ändert sich das erwartete Endvermögen nicht.³⁷ Dies folgt aus der Tatsache, daß hier

³⁷Siehe Korn und Trautmann (1999). Dort werden optimale Portfolios mit Optionen berechnet und analysiert.

die Optionen dupliziert werden können, so daß einem Investor im Prinzip keine neuen Wertpapiere zur Verfügung stehen. Trotzdem wollen wir uns anschauen, wie sich zusätzliche Optionen in diesem Modellrahmen verhalten.

Zum besseren Vergleich mit unseren späteren Ergebnissen geben wir zuerst den optimalen Portfolioanteil π_{Option} für Optionen und weitere daraus folgende Eigenschaften eines Merton-Investors an. Wie bereits in diesem ganzen Kapitel habe dieser einen endlichen Zeithorizont und eine logarithmische Nutzenfunktion. Im Falle von einer Aktie P gilt die Beziehung

$$\pi_{\text{Option}}(t) = \pi_{\text{Aktie}}(t) \frac{f(t, P(t))}{f_P(t, P(t))P(t)},$$

wobei $f(t, P(t))$ der Preis der Option zur Zeit t in Abhängigkeit des Aktienkurses $P(t)$ ist und f_P die Ableitung der Preisfunktion nach dem Aktienkurs – also das Optionsdelta – bezeichnet. Da wir die optimalen Anteile hier nicht neu herleiten und Leerverkäufe nicht zulässig sind, ist es nicht sinnvoll, zusätzlich auch Put-Optionen auf diese Aktien zu betrachten. Diese würden für einen völlig neuen Investitionsmix stehen, denn Puts haben ein negatives Delta. Im Spezialfall wenn der Basispreis $K = 0$ ist, mutiert eine Call-Option zu der zugrundeliegenden Aktie, denn es ist immer optimal, die Option am Laufzeitende auszuüben. In diesem Falle wäre der optimale Anteil, der in die Option investiert wird, gleich dem optimalen Aktienanteil, also konstant. Ansonsten ist er es für Calls offensichtlich nicht.³⁸ Trotzdem müßte auch hier zeitstetig gehandelt werden, was bei Transaktionskosten zum sofortigen Ruin führen würde.

Für die Berechnung der Optionspreise haben wir das Standard-Modell von Black, Scholes und Merton verwendet. Für eine Call-Option C , die nach der

³⁸Er ist es nur für Optionen, die bei Fälligkeit genau ein Vielfaches des Aktienkurses ausbezahlen. Dann kürzen sich Zähler und Nenner weg und es gilt die Gleichheit für beide Anteile.

Black/Scholes-Formel bewertet wird³⁹, ist also speziell

$$\pi_{\text{Option}}(t) = \pi_{\text{Aktie}}(t) \frac{C(t, P(t))}{N(d_1)P(t)}.$$

Daraus können wir die Abschätzung $\pi_{\text{Option}}(t) \leq \pi_{\text{Aktie}}(t)$ folgern, d.h. es wird immer weniger Geld in die Option als in die Aktie investiert. Die Güte dieser Abschätzung hängt vom Strike des jeweiligen Calls ab. Wie oben bereits erwähnt, gilt für $K = 0$ die Gleichheit. Je weiter dann die Option am oder sogar aus dem Geld ist, also je riskanter die Option ist, desto kleiner wird der optimal investierte Anteil beim Merton-Investor.

Wir möchten noch kurz erläutern, wie die Calls ausgestattet sind, die wir zum Handeln aufgenommen haben. Im Vergleich zu Aktien haben Optionen zwei zusätzliche Parameter, die wir bei unserer Strategie berücksichtigen müssen: den Strike und die Restlaufzeit. Wie bereits erwähnt, entspricht im Spezialfall Strike gleich 0, der Call der zugrundeliegenden Aktie und wir bekommen die gleichen Outputs wie in den vorherigen Abschnitten. Selbst wenn der Strike 1% des aktuellen Aktienkurses ist, erhalten wir fast genau die gleichen Ergebnisse. Ansonsten haben wir die Untersuchungen sowohl für Calls, die am Geld, im Geld und – die risikoreichsten – aus dem Geld (bis hin zu 200% des Aktienkurses) sind. Bei den Laufzeiten mußten wir immer Optionen nehmen, die erst nach längerer Zeit fällig wurden. Denn bei Kurzläufnern (z.B. Restlaufzeit ein Jahr bei einem Jahr Betrachtungszeitraum) war der Zeitwertverlust so groß, daß sie ausnahmslos eine hohe negative Rendite hatten, bis hin zum Totalverlust, so daß sie sich in diesem Modellrahmen nicht als Investitionsmöglichkeit eigneten. Bei unseren weiteren Untersuchungen haben wir also Optionen mit einer Laufzeit gewählt, die länger war als der Betrachtungszeitraum. Da der Zeitwert bei Kurzläufnern sehr schnell abnimmt, sind wir folgende Strategie gefolgt, um dem entgegenzuwirken: Immer wenn eine Transaktion stattfand, wurden die Optionen zwar wieder in Optionen auf dieselbe Aktie umgeschichtet, allerdings in solche, die eine längere Laufzeit

³⁹Vgl. Satz 1.37.

hatten. Und zwar jedes Mal in die für jede Simulation ursprünglich festgelegte Restlaufzeit. Das Niveau der Strikes und die Laufzeiten wurden in jeder Simulation für alle Optionen gleich gewählt.

Wir wählen Szenario 3, investieren aber statt in die Aktien in fünf Optionen auf diese Aktien. Es gilt $k = 0,005$. Wie bereits erwähnt, investieren wir absolut gesehen genau soviel Geld in die Optionen, wie für den optimalen Aktienanteil vorgesehen. Da wir also nicht optimal investiert sind, ist zu vermuten, daß die erwartete Rendite kleiner ausfällt. In Abbildung 2.8 ist dieser Effekt in Abhängigkeit der Strikes der Optionen zu sehen. Bei Optionen, die am Geld sind, beträgt der erwartete Verlust ungefähr 7,7 BP in der Rendite. Sind wir sehr risikoreich und investieren in die Calls mit einem Strike von 200%, so verdoppelt sich der Verlust auf ca. 15,7 BP.

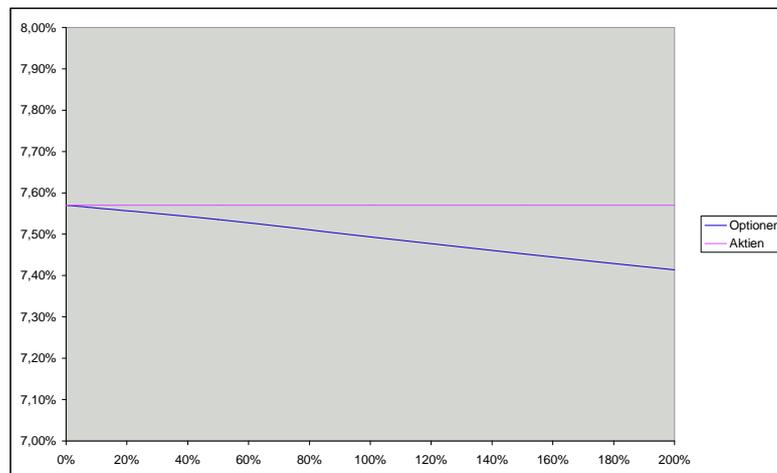


Abbildung 2.8: Wachstumsrate mit Optionen vs. optimale Wachstumsrate

Da eine Call-Option bei Preisschwankungen einen größeren Hebel als die zugrundeliegende Aktie hat, ist zu vermuten, daß die Portfolioprozesse schneller den Rand der Stillhaltungsmenge erreichen. Es müßte also häufiger gehandelt

werden, was sich negativ auf die Rendite auswirkt. Abbildung 2.9 stellt die Handelszeit in Abhängigkeit der Strikes dar. Dieser Effekt verstärkt sich, je weiter die Optionen aus dem Geld sind. Für $K = 200\%$ muß fast doppelt so häufig gehandelt werden.

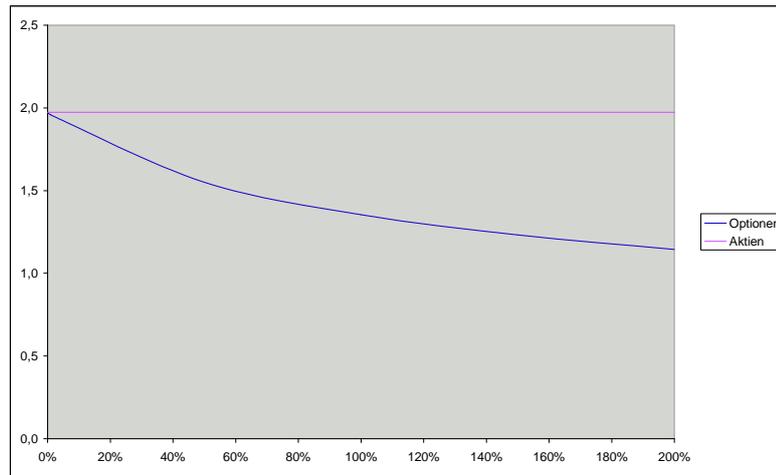


Abbildung 2.9: Handelszeit mit Optionen vs. Handelszeit bei Aktien

Die Transaktionskosten sind bei beiden Berechnungsarten ungefähr so groß, wie im Vergleichsszenario. Auch das durchschnittliche Handelsvolumen bleibt dementsprechend gleich.

Kapitel 3

Optimale Portfolios bei internationalen Märkten

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel betrachten wir einen Investor, der sein Geld nicht nur in einem einzigen Land, normalerweise seinem Heimatmarkt, sondern zusätzlich auch im Ausland anlegt. Zwar wurden in der Literatur bereits viele Modelle behandelt, die Investmententscheidungen in mehreren Ländern oder Währungsregionen untersuchten.¹ Allerdings wird in den Modellrahmen, die unserem ähnlich sind, beispielsweise keine geschlossene Lösung ausgerechnet,² oder es werden weitere makroökonomische Variablen eingeführt, die wir in dieser Arbeit nicht betrachten wollen. Wir halten das Modell an dieser Stelle bewußt einfach und erweitern es erst im nächsten Kapitel um Sprünge.

¹ Siehe z.B. die Übersicht von Adler und Dumas (1983).

² Siehe Lioui und Poncet (2003), die in ihrem Modell mehr Zustandsvariablen zulassen und das Portfolio-Problem mit der Martingalmethode lösen.

Wir betrachten eine Ökonomie bestehend aus zwei Ländern, in denen der Investor jeweils in eine Aktie und in ein Geldmarktkonto investieren kann. In einem der beiden Länder sei er beheimatet, dieses nennen wir im folgenden Inland und das andere Ausland. Es wird angenommen, daß die Kaufkraftparität verletzt ist, so daß wir den Wechselkurs stochastisch als geometrisch Brownsche Bewegung modellieren werden. Auch die beiden Aktien werden wir so modellieren. Wir beschränken uns auf den Fall konstanter Zinsraten, allerdings erwähnt schon Kraft (2004a), daß es auch möglich ist, in das Modell stochastische Zinsraten einzuführen.³ Die Preise der ausländischen Wertpapiere werden die ganze Zeit über in der Heimatwährung berücksichtigt, indem sie vorher mit dem stochastischem Wechselkurs umgerechnet werden. Danach können sie in diesem Modell wie inländische Wertpapiere behandelt werden.⁴ Nach dem formalen Modellaufbau rechnen wir den Kandidaten für die optimale Lösung aus und geben an, unter welchen Bedingungen er tatsächlich optimal ist. Danach präsentieren wir die Diversifikationseffekte, die mit dem Erweitern des Investmenthorizonts auftreten und zeigen den Zusammenhang zwischen verschiedenen Input-Parametern, wie z.B. den eingehenden Korrelationen, Drifts und Volatilitäten, in einer statischen Analyse auf.

3.2 Der Modellrahmen

Wie bereits erwähnt, betrachten wir einen Investor, der sein Geld in zwei verschiedenen Märkten anlegen kann, in seinem Heimatland und im Ausland. Auf beiden Märkten gibt es jeweils ein Geldmarktkonto und eine Aktie, so daß er für seine Vermögensbildung vier verschiedene Wertpapiere zur Verfügung hat. Er hat also die Wahl zwischen einem inländischen Geldmarktkon-

³ Siehe dort Abschnitt 2.5. Allerdings erhöht sich in dem Fall der Notationsaufwand erheblich.

⁴ Siehe auch Amin und Jarrow (1991). Diese stellen dieses Modell auf, um Optionen auf Wechselkurse zu bewerten.

to, einer inländischen Aktie, einem ausländischen Geldmarktkonto und einer ausländischen Aktie. Im weiteren Verlauf denken wir bei den beiden Aktien jeweils an einen Aktienindex, der das jeweilige Land repräsentieren soll. So haben wir für jedes Land einen Repräsentanten für den Rentenmarkt und den Aktienmarkt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall, daß die Zinsrate sowohl im In- als auch im Ausland konstant ist. Obwohl es zwei Geldmarktkonten gibt, die sich mit einer konstanten Rate verzinsen, ist es trotzdem nicht so, daß zwei risikolose Anlagen zur Verfügung stehen. Denn wir werden unterstellen, daß der Anleger seine Investitionen nur in der Heimatwährung tätigt. Da der Wechselkurs zwischen der Heimat- und der Auslandswährung stochastisch ist, ist auch der Wert des ausländischen Geldmarktkontos in seiner Heimatwährung zufällig. Also ist nur die Anlage in das inländische Geldmarktkonto risikolos.

Mit t_0 bezeichnen wir den Beginn und mit T das Ende des Anlagezeitraums, so daß $[t_0, T]$ das relevante Zeitintervall ist, wobei $0 \leq t_0 < T < \infty$ gelte. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Auf diesem Raum sei eine dreidimensionale Brownsche Bewegung $W = (W_S, W_{S,f}, W_F)$ mit kanonischer Filterung $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ definiert, die die folgende Korrelationsmatrix besitze:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, daß für die Korrelationen $\rho_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, 3$, gelte. Mit r und r_f bezeichnen wir die inländische bzw. ausländische Zinsrate, die nach unserer Annahme konstant sind. Der inländische Aktienindex S und das inländische Geldmarktkonto B sollen den stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)[\mu_S dt + \sigma_S dW_S(t)], & S(0) &= s_0, \\ dB(t) &= B(t)r dt, & B(0) &= 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

genügen, wobei die Drift μ_S und die Volatilität σ_S der Aktie gegebene Konstanten sind. Des weiteren sei $\zeta_S := (\mu_S - r)/\sigma_S$ der Marktpreis des Risikos des Aktienindex.⁵ Wie bereits erwähnt, kann der Investor sein Vermögen zusätzlich in einen ausländischen Aktienindex S_f und in ein ausländisches Geldmarktkonto B_f anlegen. Diese Prozesse sollen die folgenden stochastischen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} dS_f(t) &= S_f(t)[\mu_{S,f} dt + \sigma_{S,f} dW_{S,f}(t)], & S_f(0) &= s_{0,f}, \\ dB_f(t) &= B_f(t)r_f dt, & B_f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Auch hier seien wieder die Drift $\mu_{S,f}$ und die Volatilität $\sigma_{S,f}$ konstant und $\zeta_{S,f} := (\mu_{S,f} - r_f)/\sigma_{S,f}$ der Marktpreis des Risikos des ausländischen Aktienindex. Da unser Investor nur in seiner Heimatwährung investiert, werden wir die Preise dieser beiden Wertpapiere durch Multiplikation mit dem Wechselkurs F von der ausländischen in die Heimatwährung umrechnen. Der Wechselkurs sei gegeben durch

$$dF(t) = F(t)[\mu_F dt + \sigma_F dW_F(t)], \quad F(0) = f_0.$$

Unter dem risikoneutralen Maß muß die Drift μ_F des Wechselkurses gleich $r - r_f$ sein.⁶ Denn nur diese Wahl für die Drift schließt Arbitragemöglichkeiten zwischen dem in- und ausländischen Geldmarktkonto aus. Unter dem physischen Maß erhalten wir für die Drift $\mu_F = r - r_f + \zeta_F \sigma_F$, wobei ζ_F den Marktpreis des Risikos bezüglich des Faktors für das Wechselkursrisiko W_F bezeichnet. Durch Anwendung der Produktregel⁷ erhalten wir die stochastischen Differentialgleichungen, denen die Preise der ausländischen Wertpapiere $S_f^* := S_f \cdot F$ und $B_f^* := B_f \cdot F$ in der Heimatwährung genügen:

$$\begin{aligned} dS_f^*(t) &= S_f^*(t)[(r + \lambda_{S,f}) dt + \sigma_{S,f} dW_{S,f}(t) + \sigma_F dW_F(t)], \\ S_f^*(0) &= s_{0,f} \cdot f_0, \\ dB_f^*(t) &= B_f^*(t)[(r + \lambda_{B,f}) dt + \sigma_F dW_F(t)], & B_f^*(0) &= f_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

⁵ Der Begriff des Marktpreises des Risikos wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Manchmal wird er auch durch $\zeta_S := (\mu_S - r)/\sigma_S^2$ definiert.

⁶ Siehe Musiela und Rutkowski (1998), S. 161.

⁷ Siehe z.B. Korn und Korn (2001).

wobei $\lambda_{S,f} = \zeta_{S,f}\sigma_{S,f} + \zeta_F\sigma_F + \sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3$ und $\lambda_{B,f} = \zeta_F\sigma_F$ gilt. Dabei ist zu beachten, daß ρ_1 die Korrelation zwischen den beiden Brownschen Bewegungen der Aktienindizes ist und mit ρ_2 bzw. ρ_3 die Korrelationen zwischen den Brownschen Bewegungen des inländischen bzw. ausländischen Aktienindex und der Brownschen Bewegung des Wechselkurses bezeichnet wird.⁸

Wenn unser Investor zu Beginn seines Anlagehorizonts sein gesamtes Kapital ausschließlich in die beiden inländischen Wertpapiere (3.1) und die beiden ausländischen Wertpapiere (3.2) investiert, kann sein Vermögen im Zeitablauf durch die Gleichung

$$X = \varphi_B \cdot B + \varphi_S \cdot S + \varphi_{S,f} \cdot S_f^* + \varphi_{B,f} \cdot B_f^*$$

beschrieben werden, wobei $\varphi = (\varphi_B, \varphi_S, \varphi_{S,f}, \varphi_{B,f})$ die absolute Anzahl der verschiedenen Wertpapiere angibt, die er hält. Die Portfoliostrategie $\pi = (\pi_S, \pi_{S,f}, \pi_{B,f})$ des Investors wird nun durch

$$\pi_S := \frac{\varphi_S \cdot S}{X}, \quad \pi_{S,f} := \frac{\varphi_{S,f} \cdot S_f^*}{X}, \quad \pi_{B,f} := \frac{\varphi_{B,f} \cdot B_f^*}{X} \quad (3.3)$$

definiert. Das heißt, daß die einzelnen π 's den jeweiligen Anteil des Vermögens angeben, der in die verschiedenen Wertpapiere investiert ist. Im weiteren Verlauf betrachten wir nur selbstfinanzierende Portfoliostrategien, die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllen:

$$dX = \varphi_B dB + \varphi_S dS + \varphi_{S,f} dS_f^* + \varphi_{B,f} dB_f^*.$$

Es wird dem Vermögen im ganzen Zeitablauf weder Geld zugeführt noch Geld aus dem Vermögen herausgenommen. Wertänderungen im Portfolio können nur durch Änderungen in den Wertpapierpreisen entstehen. Einsetzen von (3.1), (3.2) und (3.3) in diese Gleichung liefert folgende Darstellung für die Dynamik des Vermögens (Vermögensgleichung):

$$dX(t) = X(t)[(r + \pi'(t)\lambda) dt + \pi'(t)\sigma dW(t)], \quad X(0) = x_0,$$

⁸ Im weiteren Verlauf sagen wir auch Korrelation zwischen den Aktienindizes bzw. Wechselkurs, meinen damit aber die Korrelation zwischen den Brownschen Bewegungen der Indizes bzw. des Wechselkurses.

wobei x_0 das Anfangsvermögen ist. Mit $\lambda = (\lambda_S, \lambda_{S,f}, \lambda_{B,f})$, wobei $\lambda_S = \zeta_S \sigma_S$ ist, bezeichnen wir die Überschußrendite und mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_S & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{S,f} & \sigma_F \\ 0 & 0 & \sigma_F \end{pmatrix}$$

die Volatilitätsmatrix der Investitionsmöglichkeiten. Wir werden dieses Modell verwenden, um im nächsten Abschnitt die optimale Portfolioentscheidung des Investors herzuleiten.

Bemerkung 3.1

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß W genau dann eine Brownsche Bewegung ist, wenn die Matrix ρ positiv definit ist. Dies ist äquivalent zu der Bedingung

$$1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3 > 0. \quad (3.4)$$

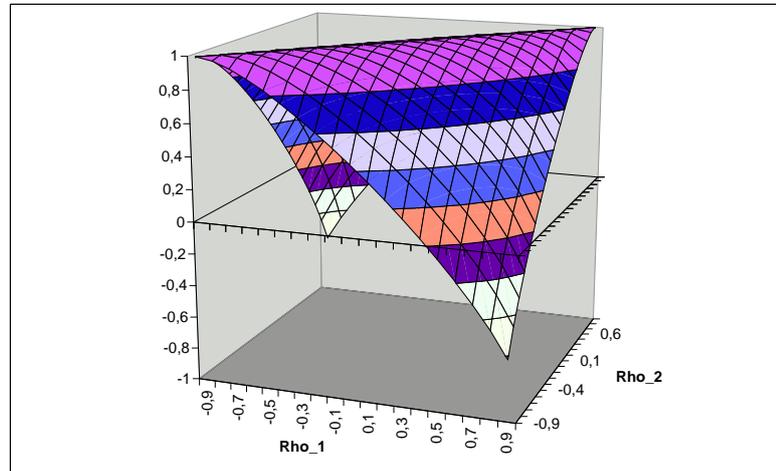
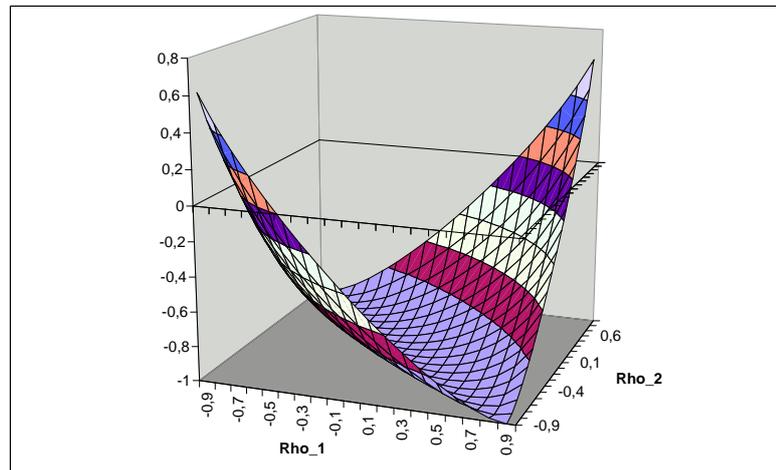
Die folgenden Abbildungen visualisieren diese Bedingung. In beiden Abbildungen werden die Grenzen aufgezeigt, in denen sich ρ_3 bewegen darf, damit W eine Brownsche Bewegung ist. In Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2 muß die Korrelation ρ_3 unter der Fläche in Abbildung 3.1 und über der Fläche in Abbildung 3.2 liegen. Damit sind Extremfälle ausgeschlossen, zum Beispiel daß alle drei Faktoren sehr stark negativ korreliert sind. Denn unter diesen Umständen wäre W keine dreidimensionale Brownsche Bewegung und unser Modell nicht richtig spezifiziert.

Bevor wir die Lösung des Portfolio-Problems angehen, treffen wir zuerst eine Annahme an die Marktparameter.

Annahme 3.2

Die Korrelationen und die Volatilitäten erfüllen die Bedingung

$$\sigma_{S,f}(1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3) + \sigma_F\rho_2(\rho_1 - \rho_2\rho_3) > 0.$$

Abbildung 3.1: Erste Bedingung an ρ_3 Abbildung 3.2: Zweite Bedingung an ρ_3

Wegen (3.4) ist der erste Summand strikt positiv. Wir verwenden diese Annahme, damit unsere später berechneten Kandidaten für die optimale Lösung tatsächlich optimal sind. Dazu ist obige Ungleichung zwar keine notwendige, jedoch eine hinreichende Bedingung. Da sie für realistische Marktparameter so gut wie immer erfüllt ist, stellt sie keine Einschränkung in unserem Modell dar. Zu beachten ist, daß für $\rho_2 = 0$ oder $\rho_1 = \rho_2\rho_3$ diese Annahme automatisch wahr ist.

3.3 Das Portfolio-Problem

Der Anlagehorizont unseres Investor sei T und seine Nutzenfunktion durch

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x > 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

gegeben. Das Portfolio-Problem, das wir lösen möchten, lautet also

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right)$$

mit

$$dX(t) = X(t)[(r + \pi'(t)\lambda) dt + \pi'(t)\sigma dW(t)], \quad X(0) = x_0.$$

Mit Π wird die Menge aller zulässigen Strategien bezeichnet. In diesem Fall reicht es, wenn wir fordern, daß die einzelnen Komponenten von π beschränkt sind. Später werden wir sehen, daß sie sogar konstant sind. Um das Portfolio-Problem zu lösen, werden wir Methoden der stochastischen Steuerung verwenden. Unser Ziel ist die Maximierung des erwarteten Endnutzens, deswegen ist die Wertfunktion durch⁹

$$G(t, x) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbf{E}^{t,x} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right)$$

⁹ Den Erwartungswert eines stochastischen Prozesses X zur Zeit T mit Startwert x zum Startzeitpunkt t bezeichnen wir mit $\mathbf{E}^{t,x}(X(T))$. Eine analoge Schreibweise verwenden wir auch für den Erwartungswert von Funktionen von $X(T)$ wie in diesem Fall.

gegeben. Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung), die diese Funktion G erfüllen muß, lautet

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi G(t, x) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} A^\pi G &= G_t + 0,5G_{xx}x^2\pi'\sigma\rho\sigma'\pi + G_x x(r + \pi'\lambda) \\ &= G_t + 0,5G_{xx}x^2[\pi_S^2\sigma_S^2 + \pi_{S,f}^2(\sigma_{S,f}^2 + \sigma_F^2) + \pi_{B,f}^2\sigma_F^2 \\ &\quad + 2\pi_S\pi_{S,f}\sigma_S\sigma_{S,f}\rho_1 + 2\pi_S\pi_{S,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2 + 2\pi_S\pi_{B,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2 \\ &\quad + 2\pi_{S,f}^2\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + 2\pi_{S,f}\pi_{B,f}\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + 2\pi_{S,f}\pi_{B,f}\sigma_F^2] \\ &\quad + G_x x(r + \pi_S\lambda_S + \pi_{S,f}\lambda_{S,f} + \pi_{B,f}\lambda_{B,f}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wir lösen dieses Problem mit Hilfe des Verifikationssatzes für Lösungen der HJB-Gleichung.¹⁰ Zuerst berechnen wir den Kandidaten für die optimale Portfoliostrategie. Dazu müssen die Bedingungen (first-order condition)

$$\frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_S} = \frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_{S,f}} = \frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_{B,f}} = 0$$

erfüllt sein, wobei die Ableitungen durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_S} &= G_{xx}x^2[\pi_S\sigma_S^2 + \pi_{S,f}\sigma_S\sigma_{S,f}\rho_1 + \pi_{S,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2 + \pi_{B,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2] \\ &\quad + G_x x\lambda_S, \\ \frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_{S,f}} &= G_{xx}x^2[\pi_{S,f}(\sigma_{S,f}^2 + \sigma_F^2) + \pi_S\sigma_S\sigma_{S,f}\rho_1 + \pi_S\sigma_S\sigma_F\rho_2 \\ &\quad + 2\pi_{S,f}\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + \pi_{B,f}\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + \pi_{B,f}\sigma_F^2] + G_x x\lambda_{S,f}, \\ \frac{\partial A^\pi G}{\partial \pi_{B,f}} &= G_{xx}x^2[\pi_{B,f}\sigma_F^2 + \pi_S\sigma_S\sigma_F\rho_2 + \pi_{S,f}\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + \pi_{S,f}\sigma_F^2] + G_x x\lambda_{B,f} \end{aligned}$$

¹⁰Siehe Theorem 1.10.

gegeben sind. Das Lösen dieses linearen Gleichungssystems führt zum Kandidaten

$$\begin{aligned}\pi_S &= -\frac{G_x}{G_{xx}x}\hat{\pi}_S, \\ \pi_{S,f} &= -\frac{G_x}{G_{xx}x}\hat{\pi}_{S,f}, \\ \pi_{B,f} &= -\frac{G_x}{G_{xx}x}\hat{\pi}_{B,f},\end{aligned}$$

wobei wir für $\rho_2\rho_3 \neq \rho_1$ die Faktoren

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_S &= \frac{\zeta_S(1 - \rho_3^2) - (\zeta_{S,f} + \sigma_F\rho_3)(\rho_1 - \rho_2\rho_3) - \zeta_F(\rho_2 - \rho_1\rho_3)}{\sigma_S(1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3)}, \\ \hat{\pi}_{S,f} &= \frac{\zeta_{S,f} - \rho_3(\zeta_F - \sigma_F) - \sigma_S(\rho_1 - \rho_2\rho_3)\hat{\pi}_S}{\sigma_{S,f}(1 - \rho_3^2)}\end{aligned}$$

erhalten. Wegen (3.4) ist der Nenner in $\hat{\pi}_S$ strikt positiv. Für den Fall, daß $\rho_2\rho_3 = \rho_1$ gilt, sind diese durch

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_S &= \frac{\zeta_S - \rho_2\zeta_F}{\sigma_S(1 - \rho_2^2)}, \\ \hat{\pi}_{S,f} &= \frac{\zeta_{S,f} - \rho_3(\zeta_F - \sigma_F)}{\sigma_{S,f}(1 - \rho_3^2)}.\end{aligned}$$

gegeben. In beiden Fällen kann der optimale Anteil, der ins ausländische Geldmarktkonto investiert wird, aus

$$\hat{\pi}_{B,f} = \frac{\zeta_F - \sigma_S\rho_2\hat{\pi}_S - (\sigma_{S,f}\rho_3 + \sigma_F)\hat{\pi}_{S,f}}{\sigma_F}$$

berechnet werden. Durch Einsetzen des optimalen Kandidaten in die HJB-Gleichung erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$0 = G_t + \frac{G_x^2}{G_{xx}}c + G_xxr,$$

mit der Randbedingung $G(T, x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$, wobei

$$\begin{aligned}c := & 0, 5[\hat{\pi}_S^2\sigma_S^2 + \hat{\pi}_{S,f}^2(\sigma_{S,f}^2 + \sigma_F^2) + \hat{\pi}_{B,f}^2\sigma_F^2 + 2\hat{\pi}_S\hat{\pi}_{S,f}\sigma_S\sigma_{S,f}\rho_1 \\ & + 2\hat{\pi}_S\hat{\pi}_{S,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2 + 2\hat{\pi}_S\hat{\pi}_{B,f}\sigma_S\sigma_F\rho_2 + 2\hat{\pi}_{S,f}^2\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 \\ & + 2\hat{\pi}_{S,f}\hat{\pi}_{B,f}\sigma_{S,f}\sigma_F\rho_3 + 2\hat{\pi}_{S,f}\hat{\pi}_{B,f}\sigma_F^2] \\ & - \hat{\pi}_S\lambda_S - \hat{\pi}_{S,f}\lambda_{S,f} - \hat{\pi}_{B,f}\lambda_{B,f}\end{aligned}$$

gilt. Diese zweidimensionale partielle Differentialgleichung kann mit Hilfe des Ansatzes $G(t, x) = f(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ mit der Endbedingung $f(T) = 1$ gelöst werden, und wir erhalten die folgende, durch diesen Ansatz nun eindimensionale Differentialgleichung

$$f'(t) = f(t)\tilde{c}$$

mit $\tilde{c} := -c \frac{\gamma}{\gamma-1} - r\gamma$. Die Lösung dieser zweiten Differentialgleichung ist $f(t) = \exp(\tilde{c}(T-t))$, und die daraus resultierende Darstellung für die Wertfunktion G lautet

$$G(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp(\tilde{c}(T-t)).$$

G ist offensichtlich konkav in x , d.h. es gilt $G_{xx} < 0$. Weiterhin ist G eine $C^{1,2}$ -Lösung der HJB-Gleichung und erfüllt die polynomiale Wachstumsbedingung. Nun können wir die Koeffizienten des optimalen Kandidaten berechnen und erhalten

$$\frac{G_x}{G_{xx}x} = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Damit können wir jetzt die optimalen Portfolios in diesem Modell angeben. Wir fassen das Hauptergebnis dieses Kapitels im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.3 (Optimale Portfoliostrategie)

Wenn ein Investor sowohl im Inland als auch in einem Ausland in jeweils eine Aktie und ein Geldmarktkonto investieren kann, wobei der Wechselkurs durch eine geometrisch Brownsche Bewegung modelliert wird, dann ist die optimale Portfoliostrategie durch

$$\begin{aligned}\pi_S &= \frac{1}{1-\gamma} \hat{\pi}_S, \\ \pi_{S,f} &= \frac{1}{1-\gamma} \hat{\pi}_{S,f}, \\ \pi_{B,f} &= \frac{1}{1-\gamma} \hat{\pi}_{B,f}\end{aligned}$$

gegeben. Das restliche Vermögen wird in das inländische Geldmarktkonto investiert, d.h. für diesen optimalen Anteil gilt $\pi_B = 1 - \pi_S - \pi_{S,f} - \pi_{B,f}$. Falls für die Korrelationen der Aktien und des Wechselkurses die Bedingung $\rho_2\rho_3 \neq \rho_1$ erfüllt ist, erhält man die optimalen Portfolios aus

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_S &= \frac{\zeta_S(1 - \rho_3^2) - (\zeta_{S,f} + \sigma_F\rho_3)(\rho_1 - \rho_2\rho_3) - \zeta_F(\rho_2 - \rho_1\rho_3)}{\sigma_S(1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3)}, \\ \hat{\pi}_{S,f} &= \frac{\zeta_{S,f} - \rho_3(\zeta_F - \sigma_F) - \sigma_S(\rho_1 - \rho_2\rho_3)\hat{\pi}_S}{\sigma_{S,f}(1 - \rho_3^2)}, \\ \hat{\pi}_{B,f} &= \frac{\zeta_F - \sigma_S\rho_2\hat{\pi}_S - (\sigma_{S,f}\rho_3 + \sigma_F)\hat{\pi}_{S,f}}{\sigma_F}.\end{aligned}$$

Ansonsten, also für den Fall, daß $\rho_2\rho_3 = \rho_1$ vorliegt, gilt

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_S &= \frac{\zeta_S - \rho_2\zeta_F}{\sigma_S(1 - \rho_2^2)}, \\ \hat{\pi}_{S,f} &= \frac{\zeta_{S,f} - \rho_3(\zeta_F - \sigma_F)}{\sigma_{S,f}(1 - \rho_3^2)}, \\ \hat{\pi}_{B,f} &= \frac{\zeta_F - \sigma_S\rho_2\hat{\pi}_S - (\sigma_{S,f}\rho_3 + \sigma_F)\hat{\pi}_{S,f}}{\sigma_F}.\end{aligned}$$

Beweis: Die Gestalt der optimalen Kandidaten haben wir bereits im bisherigen Verlauf dieses Abschnitts hergeleitet. Es bleibt zu zeigen, daß die Hesse-Matrix von $A^\pi G$ aus (3.5) negativ definit ist. Die Hesse-Matrix H ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_2 & h_6 \\ h_5 & h_6 & h_3 \end{pmatrix}$$

mit den zweiten partiellen Ableitungen von $A^\pi G$:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_S^2} = G_{xx} x^2 \sigma_S^2, \\ h_2 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_{B,f}^2} = G_{xx} x^2 \sigma_F^2, \\ h_3 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_{S,f}^2} = G_{xx} x^2 \left(\sigma_{S,f}^2 + \sigma_F^2 + 2\sigma_{S,f} \sigma_F \rho_3 \right), \\ h_4 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_{B,f} \partial \pi_S} = G_{xx} x^2 \sigma_S \sigma_F \rho_2, \\ h_5 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_{S,f} \partial \pi_S} = G_{xx} x^2 \left(\sigma_S \sigma_{S,f} \rho_1 + \sigma_S \sigma_F \rho_2 \right), \\ h_6 &= \frac{\partial^2 A^\pi G}{\partial \pi_{S,f} \partial \pi_{B,f}} = G_{xx} x^2 \left(\sigma_{S,f} \sigma_F \rho_3 + \sigma_F^2 \right). \end{aligned}$$

Wir beweisen die negative Definitheit der Matrix, indem wir ihre Unterdeterminanten ausrechnen und zeigen, daß diese alternierende Vorzeichen haben. Wegen $G_{xx} < 0$ ist die erste Unterdeterminante $\det(h_1)$ negativ. Für die zweite Unterdeterminante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} h_1 & h_4 \\ h_4 & h_2 \end{pmatrix} = G_{xx}^2 x^4 \sigma_S^2 \sigma_F^2 (1 - \rho_2^2) > 0.$$

Entwickeln von H nach der dritten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det H &= G_{xx}^3 x^6 \sigma_S^2 \sigma_F^2 \left[\sigma_{S,f}^2 (1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{S,f} \sigma_F \rho_2 (\rho_1 - \rho_2 \rho_3) \right]. \end{aligned}$$

Nach Annahme 3.2 ist die Klammer positiv, weswegen $\det H < 0$ gilt. Damit haben wir gezeigt, daß H negativ definit ist. Wie bereits erwähnt, ist für $\rho_2 = 0$ oder $\rho_1 = \rho_2 \rho_3$ die Annahme unnötig. \square

Im Spezialfall, wenn der inländische Aktienindex sowohl vom ausländischen Aktienindex ($\rho_1 = 0$) als auch von dem Wechselkurs unabhängig ist ($\rho_2 = 0$) entspricht der Anteil des Vermögens im inländischen Aktienindex dem bei Merton, bei dem nur die Investition in inländische Wertpapiere möglich ist.

Wenn zusätzlich auch der ausländische Aktienindex und der Wechselkurs unabhängig sind ($\rho_3 = 0$), ist auch der Betrag, der in diesen Index investiert wird, wie bei Merton. Hierbei wird der Index als inländisches Wertpapier behandelt. Der Anteil im ausländischen Geldmarktkonto wird aus dem Marktpreis des Risikos für den Wechselkurs abzüglich des Anteils in der ausländischen Aktie berechnet. Das bedeutet, daß der Betrag, der im Ausland investiert wird, immer dem Marktpreis des Risikos für den Wechselkurs entspricht.

Im Fall $\rho_1 \neq \rho_2\rho_3$ kann man sehen, daß die optimalen Anteile aus einem myopischen Teil und aus zwei Hedgetermen bestehen. Allerdings hängt der myopische Term bei den beiden Aktien zusätzlich von den Korrelationen ab. Je unabhängiger der ausländische Aktienindex vom Wechselkurs ist ($\rho_3 \approx 0$), desto eher entspricht der myopische Term bei beiden Aktien dem bei Merton. Während er beim inländischen Anteil im Zähler steht ($1 - \rho_3^2$) und damit diesen für eine hohe positive oder negative Korrelation verkleinert, ist er beim ausländischen Anteil im Nenner und vergrößert so diesen Betrag. Der myopische Term beim ausländischen Geldmarktkonto entspricht auch hier dem Marktpreis des Risikos für den Wechselkurs. Alle drei Portfolios haben zwei Hedgeterme, denen man ansehen kann, daß diese hauptsächlich von den jeweils anderen beiden Risikofaktoren abhängen. Unabhängig davon, ob $\rho_1 = \rho_2\rho_3$ gilt oder nicht, hat der optimale Vermögensanteil im ausländischen Geldmarktkonto $\hat{\pi}_{B,f}$ die gleiche Gestalt in Abhängigkeit der beiden Aktienanteile. Im nächsten Abschnitt stellen wir eine statische Analyse dieser Ergebnisse vor.

3.4 Vergleichende statische Analyse

In diesem Abschnitt präsentieren wir die Vorteile eines Investors, der sein Vermögen nicht nur auf seinem Heimatmarkt, sondern zusätzlich noch in

einer anderen Ökonomie investieren kann. Außerdem zeigen wir, wie die optimale Portfoliostrategie von diversen Faktoren wie den Korrelationen ρ_1 , ρ_2 und ρ_3 , den Drifts und den Volatilitäten der Aktienindizes beeinflusst wird. Für diese Analyse wird angenommen, daß die Drifts und die Volatilitäten beider Indizes gleich sind. Diese Annahme treffen wir, damit keiner der beiden Indizes von vornherein bevorzugt wird. Hat der Wechselkurs keine Drift, sollte unter dieser Annahme der inländische gegenüber dem ausländischen Index bevorzugt werden, da letzterer durch das zusätzliche Wechselkursrisiko volatiler ist. Wir zeigen später an einem Beispiel, daß dies nicht immer der Fall ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Faktor $1/(1 - \gamma)$ in den Analysen für unsere Beispiele, Abbildungen und Tabellen gleich 1 gesetzt wird, d.h. wir vernachlässigen ihn.

Wir beginnen unsere Analyse mit einem Vergleich unseres Modells mit dem Modell von Merton. Wir zeigen auf, wieviel Geld ein Anleger weniger investieren muß, um das gleiche erwartete Endvermögen zu bekommen, wenn er statt nur auf dem Heimatmarkt auch im Ausland investieren kann.¹¹ Das Anfangskapital eines Merton-Investors bezeichnen wir hierbei mit x_0^M , das Anfangskapital eines internationalen Investors mit x_0^I . Dann ist das benötigte Anfangskapital unseres Investors in Abhängigkeit des Anfangskapitals des Merton-Investors durch

$$\begin{aligned} x_0^I = x_0^M \exp \left\{ \left[0, 5\zeta_S^2 - \hat{\pi}_S \zeta_S \sigma_S - \hat{\pi}_{S,f} (\zeta_{S,f} \sigma_{S,f} + \zeta_F \sigma_F + \sigma_{S,f} \sigma_F \rho_3) \right. \right. \\ - \hat{\pi}_{B,f} \zeta_F \sigma_F + 0, 5\hat{\pi}_S^2 \sigma_S^2 + 0, 5\hat{\pi}_{S,f}^2 (\sigma_{S,f}^2 + \sigma_F^2) + 0, 5\hat{\pi}_{B,f}^2 \sigma_F^2 \\ + \hat{\pi}_S \hat{\pi}_{S,f} \sigma_S \sigma_{S,f} \rho_1 + \hat{\pi}_S \hat{\pi}_{S,f} \sigma_S \sigma_F \rho_2 + \hat{\pi}_S \hat{\pi}_{B,f} \sigma_S \sigma_F \rho_2 \\ \left. \left. + \hat{\pi}_{S,f}^2 \sigma_{S,f} \sigma_F \rho_3 + \hat{\pi}_{S,f} \hat{\pi}_{B,f} \sigma_{S,f} \sigma_F \rho_3 + \hat{\pi}_{S,f} \hat{\pi}_{B,f} \sigma_F^2 \right] T \right\} \end{aligned}$$

gegeben. Wir illustrieren diese Beziehung an einem Beispiel. Angenommen, die Zinsrate sei in beiden Ländern 2% und die beiden Aktienindizes und der

¹¹Ein Vergleich des jeweiligen erwarteten Nutzens beider Investoren würde keinen Sinn ergeben, da die Niveaus von Nutzenfunktionen keine ökonomische Aussagekraft haben, sondern nur einen qualitativen Vergleich zulassen. Siehe auch Definition 1 in Rogers (2001) für einen ähnlichen Vergleich.

Wechselkurs seien jeweils voneinander unabhängig, d.h. es gilt $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$. Beide Indizes haben eine Drift von 5% und eine Volatilität von 30%, während der Wechselkurs keine Drift und eine Volatilität von 10% besitze. Bei einem Anlagehorizont von fünf Jahren benötigt unser Investor ungefähr 97,5% des Anfangskapitals eines Merton-Investors, um den gleichen erwarteten Nutzen zu bekommen. In beiden Portfolios wäre der in den inländischen Aktienindex investierte Anteil gleich hoch. Aber die Möglichkeit, das Portfolio mit zwei weiteren Wertpapieren zu diversifizieren, führt zu einer Reduktion des benötigten Kapitals. Zusätzlich zu der Merton-Strategie wird der Investor in den ausländischen Aktienindex investieren. Das dazu benötigte Kapital leiht er sich vom ausländischen Geldmarktkonto. Wenn wir nun die Drift und die Volatilität des ausländischen Indexes variieren und alle anderen Parameter festhalten, können wir in Abbildung 3.3 sehen, wieviel Kapital benötigt wird, um den gleichen erwarteten Nutzen zu bekommen wie der Merton-Investor bei einem Anfangskapital von 1. Es scheint, als ob das benötigte Anfangskapital mit größerem Drift und kleinerer Volatilität des Indexes fällt. Aber bei einer Drift von 2% gibt es einen kleinen Buckel mit dem konstanten Wert von 1. Es ist klar, daß unser Investor den Aktienindex weder kaufen noch verkaufen will, wenn dessen Drift der ausländischen Zinsrate entspricht. Deswegen ist das benötigte Kapital genau so hoch wie im Merton-Fall. Man beachte, daß aus unseren Resultaten aus Abschnitt 3.3 folgt, daß der Investor in den Aktienindex investiert, falls dieser eine größere Drift als 2% hat und dort short geht für Drifts, die kleiner sind als 2%.

Bevor wir gleich ein Beispiel geben, in dem nicht alle Korrelationen 0 sind, möchten wir eine heuristische Intuition für die Korrelation ρ_3 zwischen dem Wechselkurs und dem ausländischen Aktienindex geben. Diese Intuition soll aber keineswegs eine rigorose makroökonomische Analyse sein, sondern dem Leser nur ein Gefühl dafür geben, wie ρ_3 interpretiert werden kann. Nehmen wir an, wir haben einen Euro-basierten Investor und der ausländische Markt soll Japan sein. Der Wechselkurs wird also in EUR pro JPY quotiert. Falls

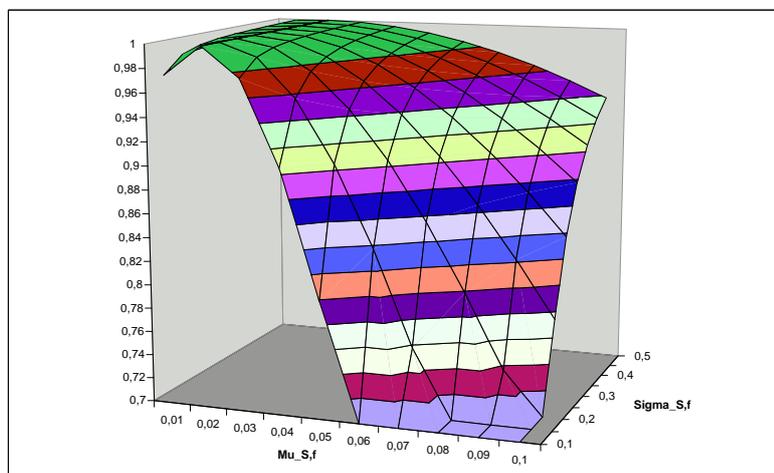


Abbildung 3.3: Benötigtes Anfangskapital

$$T = 5, r = r_f = 2\%, \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0,$$

$$\mu_S = 5\%, \sigma_S = 30\%, \mu_F = 0, \sigma_F = 10\%$$

der Wechselkurs steigt, muß man mehr Euro für einen japanischen Yen zahlen oder äquivalent, man erhält weniger Yen für einen Euro. Dann würde in einem exportorientierten Land, in unserem Beispiel Japan, der Aktienindex eher fallen und die Korrelation negativ sein. Denn die Unternehmen erhalten für ihre Waren umgerechnet weniger Geld. Die Konsequenz für eine negative Korrelation ρ_3 wäre einer von vielen Hinweisen darauf, daß wir es mit einem exportorientierten Auslandsmarkt zu tun hätten. Wir betrachten dieses Szenario detaillierter und nehmen eine negative Korrelation von $\rho_3 = -0,5$ an, während alle anderen Parameter unverändert bleiben. Diese Situation ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Wir vergleichen wieder das benötigte Anfangskapital eines internationalen Investors mit einer Person, die ihr Vermögen nur auf seinem Heimatmarkt anlegt und ein Anfangskapital von 1 hat. In diesem Beispiel ist der Buckel, den wir bereits im ersten Beispiel hatten, größer

geworden. Für die Parameter $\mu_{S,f} = 2\%$ und $\mu_{S,f} = 3\%$ erhalten wir die gleichen Werte. Das benötigte Anfangskapital ist zwar nicht mehr 1, aber es ist konstant bei ca. 99,17% für alle Volatilitäten. Der Hügel bewegt sich hin zu etwas größeren Werten von $\mu_{S,f}$. Zusätzlich fällt die Fläche steiler ab. Wenn wir also nicht mehr unterstellen, daß wir in einem Land investieren, dessen Aktienindex unabhängig von dem Wechselkurs zu diesem Land ist, d.h. $\rho_3 \neq 0$, dann ist der Vorteil gegen einem nur heimatbezogenen Investor noch größer. Zusätzlich gibt es einen Vorteil für alle Kombinationen von Drift und Volatilität.

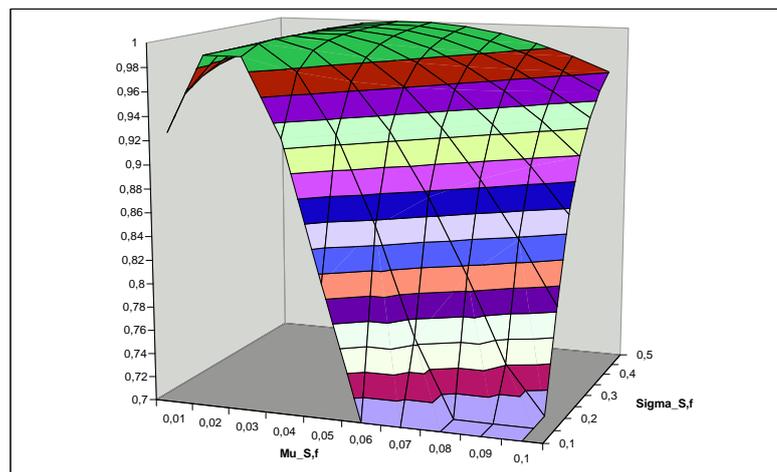


Abbildung 3.4: Benötigtes Anfangskapital für $\rho_3 = -0,5$

In den folgenden Analysen bleiben alle Parameter wie bisher, falls wir dies nicht anders erwähnen. Die nächsten drei Abbildungen zeigen die Abhängigkeit der optimalen Portfoliostrategie π von den Korrelationen. Dabei variieren nicht die Parameter der Indizes, sondern wir nehmen an, daß beide die gleiche Drift und Volatilität haben. In der ersten Abbildung 3.5 sind beide Korrelationen ρ_2 and ρ_3 konstant, nämlich $\rho_2 = \rho_3 = -0,3$, während ρ_1 die laufende

Variable ist. Für negative und kleine positive Werte von ρ_1 können wir sehen, daß der Investor fast den gleichen Betrag in beide Aktienindizes und in das ausländische Geldmarktkonto investiert. Alle drei Wertpapiere werden finanziert, indem er sich das Geld vom inländischen Geldmarktkonto leiht. Dieser Effekt wird für größere Werte von ρ_1 kleiner. Ist die Korrelation ρ_1 zwischen den beiden Aktienindizes negativ, führt der Diversifikationseffekt dazu, daß die Positionen in beiden Indizes (mit den gleichen Parametern) ungefähr gleich sind. Es ist auch optimal, eine hohe Position in den ausländischen Bond zu investieren, denn falls beide Aktienindizes sich nicht positiv entwickeln (also nicht steigen), wird wegen den Werten von ρ_2 und ρ_3 erwartet, daß der Wechselkurs steigt und der Wert des ausländischen Bonds sich dementsprechend auch erhöht.

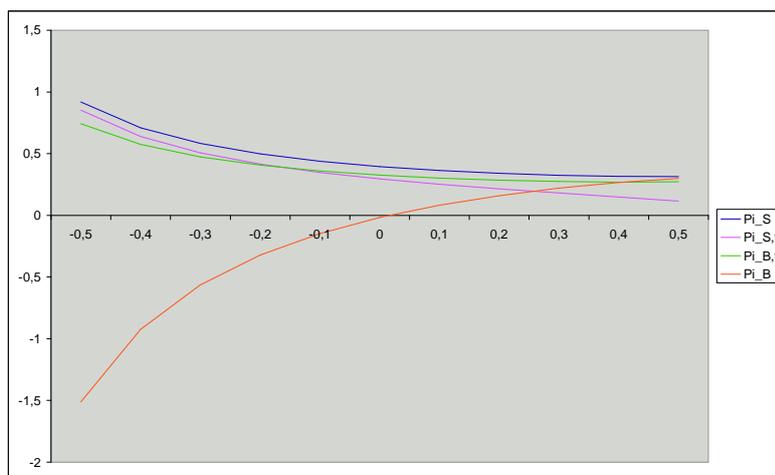


Abbildung 3.5: Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_1

$$\rho_2 = \rho_3 = -0,3$$

In Abbildung 3.6 beschreiben wir die Situation im Fall $\rho_1 = 0,3$ und $\rho_3 = -0,3$. Jetzt ist die ρ_2 die freie Variable. Die Positionen in beiden Aktien-

indizes sind fast konstant, aber die in die beiden Indizes investierte Summe ist viel kleiner als im vorherigen Beispiel. Dies ist der Fall, weil die beiden Aktienindizes hier positiv korreliert sind. Die investierten Beträge auf den beiden Geldmarktkonten ändern sich sehr stark. Ist der inländische Aktienindex negativ mit dem Wechselkurs korreliert ($\rho_2 = -0,5$), dann muß für die beste Diversifikation fast 60% des Anfangskapital in das ausländische Geldmarktkonto investiert werden. Diesen Effekt konnten wir schon im ersten Beispiel beobachten. Er dreht sich aber mit größer werdendem ρ_2 um und der investierte Betrag verkleinert sich sogar so sehr, daß man sich 60% des Anfangskapital vom ausländischen Geldmarktkonto leiht ($\rho_2 = 0,5$). Der Betrag auf dem inländischen Geldmarktkonto vergrößert sich, da er das Residuum des investierten Vermögens ist.

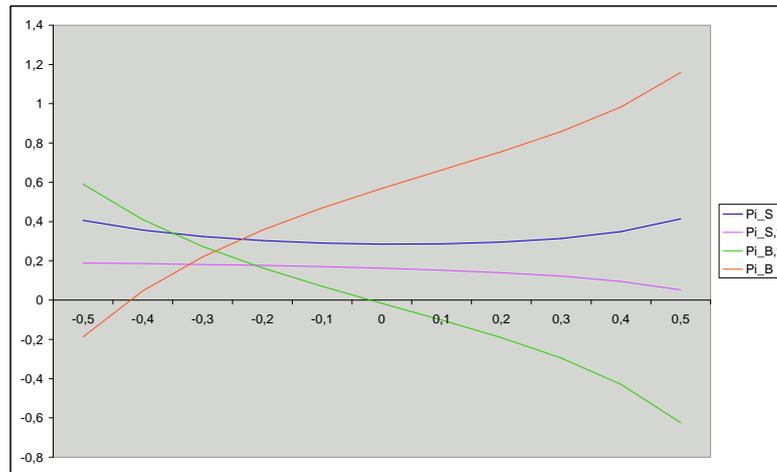


Abbildung 3.6: Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_2

$$\rho_1 = 0,3, \rho_3 = -0,3$$

In Abbildung 3.7 wird die optimale Portfoliostrategie in Abhängigkeit von ρ_3 dargestellt. Statt der Korrelation zwischen dem inländischen Aktienindex

und dem Wechselkurs, ist nun die Korrelation zwischen dem ausländischen Aktienindex und dem Wechselkurs die Variable. Ansonsten haben wir die gleichen Werte verwendet, es gilt also $\rho_1 = 0,3$ und $\rho_2 = -0,3$. Die Situation scheint die gleiche zu sein wie in Abbildung 3.6. Die Positionen in den beiden Aktienindizes sind dem vorherigen Beispiel ähnlich. Aber der Effekt, daß der Investor mit dem ausländischen Bond short gehen muß, ist hier viel größer, wenn sich die Korrelation ρ_3 zwischen dem Wechselkurs und dem ausländischen Aktienindex vergrößert. Denn das in diesem Fall benötigte Kapital für den ausländischen Index leiht sich der Investor vom ausländischen Geldmarktkonto.

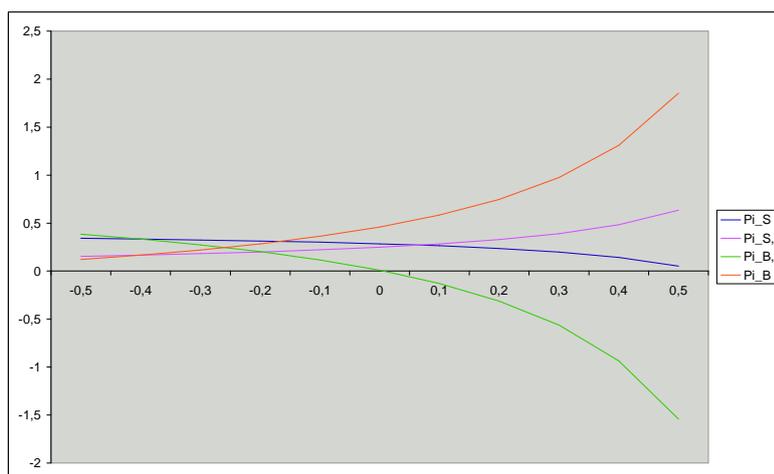


Abbildung 3.7: Optimale Anteile in Abhängigkeit von ρ_3

$$\rho_1 = 0,3, \rho_2 = -0,3$$

Alle drei Abbildungen haben gemeinsam, daß in den ausländischen Aktienindex weniger investiert wird als in den inländischen, solange ρ_3 positiv ist. Dies resultiert aus dem zusätzlichen Risiko, das durch den stochastischen Wechselkurs eingeführt wird.

In den Abbildungen 3.8 bzw. 3.9 präsentieren wir den Betrag, der jeweils in den inländischen bzw. ausländischen Aktienindex investiert wird, wenn sich die Drifts der beiden Indizes ändern. Beide Abbildungen zeigen, daß die Positionen in einem Aktienindex mit der Drift dieses Indexes größer werden und fallen, wenn die Drift des anderen Indexes steigt. Die Spitze in der ersten Abbildung ist höher und die Neigung ist steiler. Auch wenn beide Indizes die gleichen Ausgangsparameter haben, wird wieder mehr in den inländischen als in den ausländischen Aktienindex investiert.

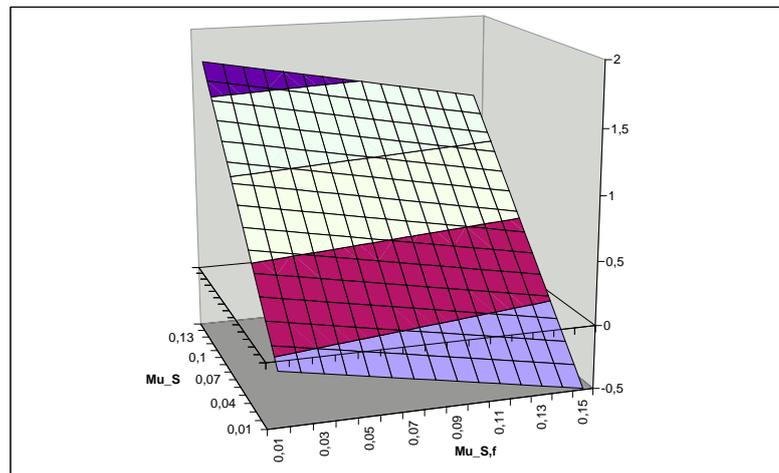


Abbildung 3.8: Optimaler Anteil am inländischen Aktienindex

Wir beenden diese Analyse mit der Darstellung der optimalen Positionen in beiden Aktienindizes, wiederum unter der Annahme, daß beide Indizes die gleiche Drift von 5% und die gleiche Volatilität von 30% besitzen. Hierbei ist zu beachten, daß bei diesen Parametern der Merton-Investor ein Drittel seines Kapitals in den Aktienindex steckt. Der ausländische Aktienindex und der Wechselkurs sollen diesmal unabhängig sein, d.h. es gilt $\rho_3 = 0$. Ansonsten bleiben die anderen Parameter wie in den obigen Beispielen. Tabelle 3.1

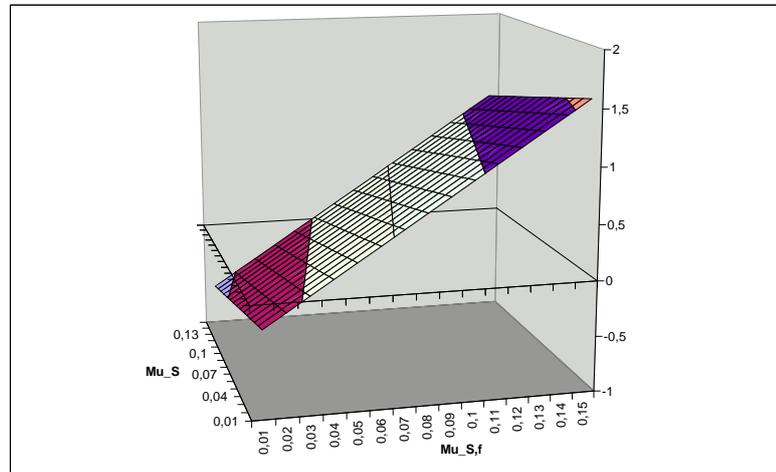


Abbildung 3.9: Optimaler Anteil am ausländischen Aktienindex

zeigt, welcher Betrag in den inländischen Index investiert wird, während Tabelle 3.2 den Anteil im ausländischen Index zeigt. Für negative Werte von ρ_1 hat der Investor hohe Positionen in beiden Indizes, unabhängig von ρ_2 . Dies liegt am Diversifikationseffekt, der bei diesen Werten stark zum Tragen kommt. Dieser Diversifikationseffekt wird kleiner für größer werdendes ρ_1 . Wegen der Risikoaversion des Investors und der Tatsache, daß der Wechselkurs in unserem Beispiel keine Drift besitzt, ist die Position im inländischen Aktienindex immer größer als im ausländischen Index. Nur für $\rho_2 = 0$ stimmen beide Positionen überein. Dieser Effekt ist größer für höhere Werte von ρ_1 . Wenn die beiden Indizes fast perfekt korreliert sind, wird das Investment in den ausländischen Index sehr klein. Bemerkenswert ist außerdem, daß in unserem Fall das optimale Portfolio in beiden Aktienindizes unabhängig vom Vorzeichen von ρ_2 ist. Für (absolut) größere Werte von ρ_2 werden die Positionen in beiden Indizes größer.

ρ_1	ρ_2								
	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
-0,4	0,686	0,622	0,583	0,562	0,556	0,562	0,583	0,622	0,686
-0,3	0,578	0,528	0,498	0,481	0,476	0,481	0,498	0,528	0,578
-0,2	0,500	0,460	0,435	0,421	0,417	0,421	0,435	0,460	0,500
-0,1	0,442	0,407	0,386	0,374	0,370	0,374	0,386	0,407	0,442
0	0,397	0,366	0,347	0,337	0,333	0,337	0,347	0,366	0,397
0,1	0,361	0,333	0,316	0,306	0,303	0,306	0,316	0,333	0,361
0,2	0,333	0,307	0,290	0,281	0,278	0,281	0,290	0,307	0,333
0,3	0,311	0,285	0,268	0,259	0,256	0,259	0,268	0,285	0,311
0,4	0,294	0,267	0,250	0,241	0,238	0,241	0,250	0,267	0,294
0,5	0,282	0,253	0,235	0,225	0,222	0,225	0,235	0,253	0,282
0,6	0,278	0,242	0,222	0,212	0,208	0,212	0,222	0,242	0,278
0,7	0,286	0,238	0,213	0,200	0,196	0,200	0,213	0,238	0,286
0,8	0,333	0,247	0,208	0,190	0,185	0,190	0,208	0,247	0,333

Tabelle 3.1: Optimaler Anteil am inländischen Aktienindex

In Tabelle 3.3 präsentieren wir die Summe von π_S und $\pi_{S,f}$. Für negative ρ_1 können wir sehen, daß mehr als das ganze Anfangskapital in beide Aktienindizes investiert und dafür Geld von den Geldmarktkonten geliehen wird. Selbst wenn beide Indizes unkorreliert sind, beträgt das Investment in beide Indizes immer noch zwei Drittel bis drei Viertel des Anfangskapitals. Aber für hohe Korrelationen tendiert die Summe zu dem Betrag, den der Merton-Investor in seinem Aktienindex hat.

ρ_1	ρ_2								
	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
-0,4	0,608	0,582	0,567	0,558	0,556	0,558	0,567	0,582	0,608
-0,3	0,507	0,492	0,483	0,478	0,476	0,478	0,483	0,492	0,507
-0,2	0,433	0,425	0,420	0,418	0,417	0,418	0,420	0,425	0,433
-0,1	0,378	0,374	0,372	0,371	0,370	0,371	0,372	0,374	0,378
0	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
0,1	0,297	0,300	0,302	0,303	0,303	0,303	0,302	0,300	0,297
0,2	0,267	0,272	0,275	0,277	0,278	0,277	0,275	0,272	0,267
0,3	0,240	0,248	0,253	0,256	0,256	0,256	0,253	0,248	0,240
0,4	0,216	0,227	0,233	0,237	0,238	0,237	0,233	0,227	0,216
0,5	0,192	0,207	0,216	0,221	0,222	0,221	0,216	0,207	0,192
0,6	0,167	0,188	0,200	0,206	0,208	0,206	0,200	0,188	0,167
0,7	0,133	0,167	0,184	0,193	0,196	0,193	0,184	0,167	0,133
0,8	0,067	0,136	0,167	0,181	0,185	0,181	0,167	0,136	0,067

Tabelle 3.2: Optimaler Anteil am ausländischen Aktienindex

ρ_1	ρ_2								
	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
-0,4	1,294	1,204	1,150	1,120	1,111	1,120	1,150	1,204	1,294
-0,3	1,084	1,020	0,981	0,959	0,952	0,959	0,981	1,020	1,084
-0,2	0,933	0,885	0,855	0,839	0,833	0,839	0,855	0,885	0,933
-0,1	0,819	0,781	0,758	0,745	0,741	0,745	0,758	0,781	0,819
0	0,730	0,700	0,681	0,670	0,667	0,670	0,681	0,700	0,730
0,1	0,659	0,633	0,618	0,609	0,606	0,609	0,618	0,633	0,659
0,2	0,600	0,579	0,565	0,558	0,556	0,558	0,565	0,579	0,600
0,3	0,551	0,533	0,521	0,515	0,513	0,515	0,521	0,533	0,551
0,4	0,510	0,493	0,483	0,478	0,476	0,478	0,483	0,493	0,510
0,5	0,475	0,460	0,451	0,446	0,444	0,446	0,451	0,460	0,475
0,6	0,444	0,430	0,422	0,418	0,417	0,418	0,422	0,430	0,444
0,7	0,419	0,405	0,397	0,393	0,392	0,393	0,397	0,405	0,419
0,8	0,400	0,383	0,375	0,371	0,370	0,371	0,375	0,383	0,400

Tabelle 3.3: Summe der optimalen Anteile in beiden Indizes

Kapitel 4

Optimale Portfolios bei Sprung-Diffusions-Prozessen

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel betrachten wir drei Portfolio-Probleme, bei denen die zugrundeliegenden Prozesse keine geometrisch Brownschen Bewegungen sind, sondern Sprünge aufweisen können. Aase (1984) betrachtete als erster ein solches Portfolio-Problem, allerdings beschränkte er sich auf eine diskretverteilte Sprunghöhe. Seit dieser Zeit wurden vielfältige Modelle mit Sprüngen in der Portfolio-Optimierung behandelt, von denen wir einige nennen möchten. Im Modell von Liu, Longstaff und Pan (2003) gibt es neben Sprüngen im Aktienkurs eine stochastische Volatilität, die wiederum auch Sprünge aufweisen kann. Eine Erweiterung davon stammt von Liu und Pan (2003) und Branger, Schlag und Schneider (2006), die für die Volatilität neben möglichen Sprüngen die Dynamik von Heston (1993) annehmen und zusätzlich Derivate in den Markt einführen. Das und Uppal (2004) untersuchen das systematische Risiko eines Investors, wenn sich Sprünge in einem Modell auf alle Wertpapie-

re gleichzeitig auswirken. Die Sprunghöhen der Aktien ist bei ihnen perfekt korreliert. Bei Bäuerle und Rieder (2007) ist die Sprungintensität nicht zu beobachten.

In der Literatur werden aber vielfach nur die optimalen Kandidaten für den Lösungsprozeß angegeben, d.h. es wird die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) des dazugehörigen Problems gelöst, aber die Voraussetzungen nicht nachgeprüft oder nicht angegeben, warum die Lösung die HJB-Gleichung maximiert. Dies ist aber eine notwendige Voraussetzung bei der Anwendung eines Verifikationssatzes. Korn und Kraft (2004) geben Gegenbeispiele an, in denen z.B. die bei Liu, Longstaff und Pan berechneten Kandidaten nicht optimal sind. Deswegen leiten wir einen Verifikationssatz für unsere Anwendungen her und prüfen jeweils die verwendeten Voraussetzungen nach oder geben explizit an, warum dies nicht getan werden kann. Im letzteren Fall haben wir auch nur Kandidaten für die optimale Lösung hergeleitet.

Wir behandeln zuerst den Fall, daß der Investor sein Vermögen in eine Aktie und ein Geldmarktkonto anlegen kann und lösen das Problem bei konstanter Zinsrate. Ist die Sprungintensität konstant, so ist auch der optimale Portfolioprozeß wie bei Merton konstant, kann hier aber nur implizit angegeben werden. Es ist auch in der oben genannten Literatur der Fall, daß es außer in einfachen Spezialfällen, wenn z.B. die Sprunghöhe konstant 0 ist, nur implizite Darstellungen der Lösung gibt. Je nach Annahme an die Verteilung der Sprunghöhe kann die Lösung meist nur numerisch berechnet werden. Wir geben mehrere Beispiele für diese Verteilung an und veranschaulichen die optimale Lösung anhand von Abbildungen.

Das Problem mit einer stochastischen Zinsrate wurde unseres Wissens noch nicht in der Literatur behandelt. Ist die Zinsrate stochastisch, in unserem Fall wird sie modelliert durch das Ho/Lee-Modell, können wir keine Lösung mehr angeben. Wir leiten aber trotzdem einen Kandidaten für den optimalen

Lösungsprozeß her. Diesen erhalten wir, wenn wir die Wertfunktion an einer Stelle anhand einer Taylor-Entwicklung approximieren. Als weitere Anwendung werden wir das Model aus Kapitel 3 verändern und annehmen, daß der Wechselkurs nicht mehr durch eine geometrisch Brownsche Bewegung, sondern durch einen reinen Sprungprozeß modelliert wird.

4.2 Stochastische Steuerung bei Sprung-Diffusions-Prozessen

In diesem Abschnitt werden wir einen Verifikationssatz für Sprung-Diffusions-Prozesse herleiten und dafür die Begriffe aus Abschnitt 1.1.2 verallgemeinern. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) der vollständige Wahrscheinlichkeitsraum aus Kapitel 1. Im Unterschied zur Definition in Abschnitt 1.1.2 hat der zu steuernde Prozeß hier noch eine Sprungkomponente.

Definition 4.1 (Gesteuerte stochastische Differentialgleichung)

Sei u eine d -dimensionale Steuerung.¹ Ein n -dimensionaler Prozeß X heißt **gesteuerte stochastische Differentialgleichung**, falls er folgende Form besitzt:²

$$\begin{aligned} dX^u(t) = & \mu(t, X^u(t), u(t)) dt + \delta(t, X^u(t-), u(t-)) dN(t) \\ & + \sigma(t, X^u(t), u(t)) dW(t), \quad X^u(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zusätzlich zu der Dynamik einer geometrisch Brownschen Bewegung hat dieser Prozeß X noch Poissonverteilte Sprünge der Höhe δ . Diese Sprunghöhe kann wiederum stochastisch sein und auch durch u gesteuert werden. Falls

¹ Das heißt u ist ein progressiv meßbarer Prozeß mit Werten in einer abgeschlossen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^d$, vgl. Definition 1.6.

² In unserer Notation werden wir beim Prozeß X oft die Abhängigkeit von der Steuerung u vernachlässigen.

ersteres der Fall ist, gelten die nachfolgenden Bedingungen für δ in dem Sinne, daß für jedes $\omega \in \Omega$ die Bedingungen für $\delta(\cdot, \cdot, \cdot, \omega)$ erfüllt sein müssen.³ Für den Definitionsbereich der Koeffizienten definieren wir zunächst die Menge $Q_0 := [t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n$. Wir benötigen folgende allgemeine Voraussetzungen an die Koeffizienten von (4.1). Später werden wir sehen, wie diese teilweise abgeschwächt werden können.

Voraussetzungen 4.2 (Koeffizientenfunktionen)

Die Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}\mu &: \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}, \\ \delta &: \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n,l},\end{aligned}$$

seien stetig und ferner gelte $\mu(\cdot, \cdot, u), \sigma(\cdot, \cdot, u), \delta(\cdot, \cdot, u) \in C^1(\bar{Q}_0)$ für alle $u \in U$. Zusätzlich sei die Sprunghöhe δ beschränkt. Des weiteren seien mit einer Konstanten $C > 0$ die folgenden Ungleichungen für alle $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in U$ erfüllt:

$$\begin{aligned}|\mu_t| + |\mu_x| &\leq C, \\ |\sigma_t| + |\sigma_x| &\leq C, \\ |\delta_t \lambda| + |\delta_x \lambda| &\leq C,\end{aligned}\tag{4.2}$$

und

$$\begin{aligned}|\mu(t, x, u)| &\leq C(1 + |x| + |u|), \\ |\sigma(t, x, u)| &\leq C(1 + |x| + |u|), \\ |\delta(t, x, u)\lambda| &\leq C(1 + |x| + |u|).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Mit $|\cdot|$ wird hierbei die Euklidische bzw. die Spektralnorm bezeichnet.

Diese Voraussetzungen garantieren die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung (4.1).⁴ In der nächsten De-

³ Dazu vernachlässigen wir die Abhängigkeit von ω in unserer Notation und betrachten $\delta(\cdot, \cdot, \cdot, \omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ als eine Funktion.

⁴ Vgl. Satz 1.2. Als Funktion g kann dort die Identität gewählt werden.

definition geben wir zur Erinnerung noch einmal an, welche Steuerungen bei unseren Problemen überhaupt zulässig sind.⁵

Definition 4.3 (Zulässige Steuerung)

Eine Steuerung u heißt **zulässig**, falls die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (4.1) für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $X = \{X(t)\}_{t \in [t_0, t_1]}$ besitzt und die beiden Ungleichungen

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} |u(s)|^k ds \right) < \infty \quad (4.4)$$

und

$$\mathbb{E}^{t_0, x_0} \left(\|X(\cdot)\|^k \right) := \mathbb{E}^{t_0, x_0} \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} |X(s)|^k \right) < \infty \quad (4.5)$$

jeweils für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.⁶ Mit $\mathcal{A}(t_0, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Steuerungen beim Startwert (t_0, x_0) .

Wir verallgemeinern nun das bisherige Problem und steuern den Prozeß X nur solange er sich innerhalb einer offenen Teilmenge O von \mathbb{R}^n befindet. In Analogie zu Q_0 definieren wir $Q := [t_0, t_1] \times O$. Außerdem sei durch

$$\tau := \inf\{t \in [t_0, t_1] \mid (t, X(t)) \notin Q\}$$

der erste Zeitpunkt gegeben, an dem der Prozeß X aus der Menge O austritt. Sei δ^{\max} die maximale absolute Sprunghöhe, dann definieren wir durch $\partial\tilde{O} := (O \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(\partial O, x) \leq \delta^{\max}\}) \setminus \text{Int}(O)$ die Menge aller Punkte im \mathbb{R}^n , die vom Rand von O durch einen Sprung erreichbar sind und auf dem Rand oder außerhalb von O liegen. Es gilt also

$$(\tau, X(\tau)) \in \partial^* Q := ([t_0, t_1] \times \partial\tilde{O}) \cup (\{t_1\} \times \bar{O}).$$

Das Nutzenfunktional J sei durch

$$J(t, x; u) := \mathbb{E}^{t, x}(\Psi(\tau, X(\tau)))$$

⁵ Vgl. Definition 1.8.

⁶ Zu beachten ist, daß der Prozeß u zusätzlich progressiv meßbar sein muß, damit er überhaupt eine Steuerung ist, vgl. Definition 1.6.

definiert, wobei Ψ eine stetige Nutzenfunktion ist,⁷ die auf \bar{Q} der polynomialen Wachstumsbedingung

$$|\Psi(t, x)| \leq K(1 + |x|^k)$$

mit $K > 0$ und einem $k \in \mathbb{N}$ genügt. Die Funktion Ψ repräsentiert hierbei den Endnutzen, der aus dem gesteuerten Prozeß resultiert. Wir wollen nun zu einem gegebenen Startwert $(t_0, x_0) \in Q$ den Prozeß X durch eine zulässige Steuerung u so bestimmen, daß das Nutzenfunktional $J(t_0, x_0; u)$ maximal wird.⁸

Definition 4.4 (Stochastisches Steuerungsproblem)

Das stochastische Steuerungsproblem lautet

$$\max_{u \in \mathcal{A}(t_0, x_0)} J(t_0, x_0; u)$$

mit

$$J(t_0, x_0; u) = E^{t_0, x_0}(\Psi(\tau, X(\tau))).$$

Die Wertfunktion V sei durch

$$V(t, x) := \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x; u), \quad (t, x) \in Q,$$

definiert. Sie gibt den Verlauf des maximalen Nutzens in Abhängigkeit der Anfangsparameter (t, x) an. Es ist natürlich auch möglich, das Problem zu betrachten, bei dem das Funktional minimal werden soll. Dazu muß die Nutzenfunktion Ψ durch eine Kostenfunktion und \max bzw. \sup jeweils durch \min bzw. \inf ersetzt werden.

Für die Lösung des stochastischen Steuerungsproblems werden wir nun einen Verifikationssatz für Lösungen der HJB-Gleichung bei Sprung-Diffusions-Prozessen angeben. Dazu modifizieren wir den Verifikationssatz für Lösungen

⁷ Die Funktion Ψ muß an dieser Stelle keine Nutzenfunktion im ökonomischen Sinne sein (vgl. Definition 1.13). In unseren späteren Anwendungen wird sie es aber sein.

⁸ Vgl. die gleichlautende Definition 1.9.

der HJB-Gleichung für Itô-Prozesse aus Korn und Korn (2001) um den entsprechenden Term, der bei Anwendung der Itô-Formel für Sprung-Diffusions-Prozesse zusätzlich anfällt. Da wir bei unseren Portfolio-Problemen keinen Konsum betrachten, haben wir bei den Vorbereitungen und im Satz selbst der Übersichtlichkeit halber den dortigen Term für die laufenden Kosten vernachlässigt. Es ist aber auch in unserem Fall möglich, den Verifikationssatz um diesen Term zu erweitern. Vorher führen wir noch eine Bezeichnung ein, die wir später mehrmals verwenden.⁹

Definition 4.5

Sei $\sigma^* := \sigma\sigma'$, $(t, x) \in Q$ und $u \in U$. Mit e_i bezeichnen wir den i -ten n -dimensionalen Einheitsvektor. Dann sei der Operator A^u für $G \in C^{1,2}(Q)$ folgendermaßen definiert:

$$A^u G(t, x) := G_t(t, x) + 0,5 \sum_{i,j=1}^n G_{x_i x_j}(t, x) \sigma_{ij}^*(t, x, u) + \sum_{i=1}^n G_{x_i}(t, x) \mu_i(t, x, u) + \sum_{i=1}^l \lambda_i(t) \mathbb{E} \left[G(t, x + e'_i \delta_i(t, x, u)) - G(t, x) \right].$$

Mit dieser Definition können wir nun den Hauptsatz dieses Abschnitts formulieren.¹⁰

Theorem 4.6 (Verifikationssatz)

Es seien die Voraussetzungen 4.2 erfüllt. Für geeignete Konstanten $K > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$ mit $|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k)$ eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$\sup_{u \in U} A^u G(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (4.6)$$

mit der Randbedingung

$$G(t, x) = \Psi(t, x), \quad (t, x) \in \partial^* Q.$$

Dann gelten die folgenden Resultate:

⁹ Vgl. die Definition von A^u aus Kapitel 1, bei der der letzte Term fehlt.

¹⁰ Dieser Verifikationssatz unterscheidet sich von dem aus Kapitel 1 nur durch die unterschiedliche Definition des Operators A^u .

- (i) $G(t, x) \geq J(t, x; u)$ für alle $(t, x) \in Q$ und $u \in \mathcal{A}(t, x)$.
- (ii) Falls für alle $(t, x) \in Q$ ein $u^* \in \mathcal{A}(t, x)$ existiert, derart daß für alle $s \in [t, \tau]$ die Beziehung

$$u^*(s) \in \arg \max_{u \in U} (A^u G(s, X^*(s)))$$

gilt, wobei X^* die zu u^* gehörige Lösung der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung ist,¹¹ dann erhalten wir

$$G(t, x) = V(t, x) = J(t, x; u^*).$$

u^* ist dann die optimale Steuerung.

Beweis: (i) Seien $(t, x) \in Q$, u eine zulässige Steuerung und θ eine Stoppzeit mit $t \leq \theta \leq \tau$. Wir zeigen nun, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$G(t, x) \geq E^{t,x}(G(\theta, X(\theta))). \quad (4.7)$$

Da G und Ψ auf dem Rand ∂^*Q übereinstimmen, folgt für die Wahl von $\theta = \tau$ die Behauptung. Ungleichung (4.7) wird in zwei Schritten bewiesen.

- (a) Erster Schritt: Sei zunächst O beschränkt. Wir wenden die Itô-Formel für Sprung-Diffusions-Prozesse¹² auf $G(\theta, X(\theta))$ an und

¹¹Da der Wert von $X^*(s)$ nur von $u^*(r)$ für $r \in [t_0, s]$ abhängt, handelt es sich hier tatsächlich um eine explizite Definition, nicht um eine implizite.

¹²Vgl. Satz 1.4.

erhalten

$$\begin{aligned}
G(\theta, X(\theta)) &= G(t, x) + \int_t^\theta \left[G_t(s, X(s)) \right. \\
&\quad + 0,5 \sum_{i,j=1}^n G_{x_i x_j}(s, X(s)) \sigma_{ij}^*(s, X(s), u(s)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n G_{x_i}(s, X(s)) \mu_i(s, X(s), u(s)) \left. \right] ds \\
&\quad + \int_t^\theta G_x(s, X(s)) \sigma(s, X(s), u(s)) dW(s) \\
&\quad + \int_t^\theta G_x(s, X(s-)) \delta(s, X(s-), u(s-)) dN(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_S} \left[G(s_i, X(s_i)) - G(s_i, X(s_i-)) \right. \\
&\quad \quad \left. - G_x(s_i, X(s_i-)) (X(s_i) - X(s_i-)) \right].
\end{aligned}$$

Dabei entspricht n_S der Anzahl der Sprünge zwischen t und θ , die an den Zeitpunkten s_i , $i = 1, \dots, n_S$, stattfinden. Erwartungswertbildung liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t,x}(G(\theta, X(\theta))) &= G(t, x) + \mathbb{E}^{t,x} \left(\int_t^\theta A^{u(s)} G(s, X(s)) ds \right) \\
&\quad + \mathbb{E}^{t,x} \left(\int_t^\theta G_x(s, X(s)) \sigma(s, X(s), u(s)) dW(s) \right).
\end{aligned}$$

Nach Annahme ist G_x als stetige Funktion auf einer beschränkten Menge O auch beschränkt. Nach der Voraussetzung an die Koeffizientenfunktion ist auch σ stetig. Und da zulässige Steuerungen die Eigenschaft (4.4) aufweisen, erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$\mathbb{E}^{t,x} \left(\int_t^\theta |G_x(s, X(s)) \sigma(s, X(s), u(s))|^2 ds \right) < \infty.$$

Also ist das stochastische Integral ein Martingal, und der Erwartungswert verschwindet. Nach Annahme ist G eine Lösung der

HJB-Gleichung (4.6), so daß für jede zulässige Steuerung die Ungleichung

$$0 \geq A^{u(s)}G(x, X(s)), \quad t \leq s \leq \tau,$$

gilt, so daß wir auch

$$0 \geq \mathbb{E}^{t,x} \left(\int_t^\theta A^{u(s)}G(s, X(s)) ds \right)$$

erhalten. Damit ist (4.7) für ein beschränktes O bewiesen.

- (b) Zweiter Schritt:¹³ Sei nun O nicht notwendigerweise beschränkt. Nun approximieren wir O durch beschränkte Mengen O_p , $p \in \mathbb{N}$:

$$O_p := O \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < p, \text{dist}(x, \partial O) > \frac{1}{p} \right\}.$$

Anstatt der Menge Q , die von O abhängt, betrachten wir nun die Mengen Q_p , die durch

$$Q_p := \left[t_0, t_1 - \frac{1}{p} \right) \times O_p, \quad 0 < \frac{1}{p} < t_1 - t_0$$

gegeben sind. Entsprechend sei τ_p die Austrittszeit von $(s, X(s))$ aus Q_p . Mit der Definition von $\theta_p := \min(\theta, \tau_p)$ und der Beschränktheit von O_p erhalten wir:

$$G(t, x) \geq \mathbb{E}^{t,x}(G(\theta_p, X(\theta_p))). \quad (4.8)$$

Für $p \rightarrow \infty$ konvergiert θ_p gegen θ .¹⁴ Aus der Stetigkeit von G folgt also

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G(\theta_p, X(\theta_p)) = G(\theta, X(\theta)).$$

¹³Dieser Schritt kann ohne Modifikationen aus dem Beweis von Korn und Korn (2001) übernommen werden.

¹⁴Die Konvergenz gilt nur f.s. bzgl. P . Wie im einführenden Kapitel erwähnt, vernachlässigen wir diese Angabe in unserer Notation.

Nach Voraussetzung gilt

$$|G(\theta_p, X(\theta_p))| \leq K(1 + |X(\theta_p)|^k) \leq K(1 + \|X(\cdot)\|^k).$$

Für jede zulässige Steuerung u gilt wegen (4.5) für alle $j \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$E^{t,x}(\|X(\cdot)\|^j) < \infty,$$

so daß für $j > k$ und $p > 1/(t_1 - t_0)$ die Erwartungswerte

$$E^{t,x}(|G(\theta_p, X(\theta_p))|^{\frac{j}{k}})$$

beschränkt sind und somit die Familie $\{G(\theta_p, X(\theta_p))\}_{p \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist. Damit erhalten wir

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E^{t,x}(G(\theta_p, X(\theta_p))) = E^{t,x}(G(\theta, X(\theta))).$$

Mit (4.8) haben wir die gewünschte Ungleichung (4.7) bewiesen.

- (ii) Falls u^* existiert, würde es eingesetzt in (4.7) die Gleichheit ergeben, woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 4.7

Der Verifikationssatz kann auch ohne die Annahme der polynomialen Beschränktheit von G formuliert werden.¹⁵ Diese Eigenschaft wird nur dazu verwendet, um die gleichmäßige Integrierbarkeit der Menge $\{G(\theta_p, X(\theta_p))\}_{p \in \mathbb{N}}$ zu beweisen. Falls die Wertfunktion diese Eigenschaft nicht aufweist, muß stattdessen die gleichmäßige Integrierbarkeit von Fall zu Fall nachgewiesen werden.

Mit Hilfe dieses Verifikationssatzes können wir nun die Portfolio-Probleme in Abschnitt 4.3.1 (Anlagemöglichkeit in eine Aktie und und in das Geldmarktkonto bei konstanter Zinsrate) und in Abschnitt 4.4 (Anlagemöglichkeit auf

¹⁵Siehe dazu auch Bäuerle und Rieder (2007) bzw. Kraft (2004b) im Fall ohne Sprünge.

internationalen Märkten¹⁶) angreifen. Ist die Zinsrate stochastisch, benötigen wir eine allgemeinere Formulierung, denn die Voraussetzungen 4.2 an die Koeffizientenfunktionen sind in diesem Fall nicht alle erfüllt. Die Driftfunktion der Vermögensgleichung besteht u.a. aus dem Produkt rx , also der Zinsrate multipliziert mit dem Vermögen. Da beide Prozesse unbeschränkt sind, gelten die Lipschitz-Bedingungen nicht mehr. Somit benötigen wir andere Voraussetzungen, damit eine Lösung der Vermögensgleichung existiert und diese eindeutig ist. Im nächsten Korollar geben wir eine Alternative für diese Voraussetzung an, so daß die beiden Aussagen des Verifikationssatzes weiterhin Gültigkeit besitzen.¹⁷ Dafür benötigen wir folgenden Satz.

Satz 4.8

Sei $(t_0, x_0) \in Q$, u eine Steuerung mit Eigenschaft 4.4 und seien $A_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$, A_2 , $B_1^{(i,j)}$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, d$, $B_2^{(i)}$, $i = 1, \dots, l$, $C_1^{(i,j)}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, d$, $C_2^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, progressiv meßbare Prozesse mit

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^d |A_1^{(j)}(s)| + |A_2(s)| \right) ds < \infty,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^d |B_1^{(i,j)}(s)\lambda(s)| + \sum_{i=1}^l |B_2^{(i)}(s)\lambda(s)| \right) ds < \infty,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d C_1^{(i,j)}(s)^2 + \sum_{i=1}^m C_2^{(i)}(s)^2 \right) ds < \infty.$$

Zusätzlich gelte

$$B_1^{(i)}(t-)u(t-) + B_2^{(i)}(t-) > -1, \quad i = 1, \dots, l, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (4.9)$$

Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = X(t-)[(A_1'(t)u(t) + A_2(t))dt + (B_1(t-)u(t-) + B_2(t-))'dN(t) \\ (C_1(t)u(t) + C_2(t))'dW(t)], \quad X(t_0) = x_0 \quad (4.10)$$

¹⁶Vgl. dazu auch Kapitel 3.

¹⁷Siehe auch Korn und Kraft (2001) bzw. Kraft (2004a). Unsere Version wird aber nicht so restriktive Voraussetzungen haben.

die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}
X(t) = x_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(A_1'(s)u(s) + A_2(s) \right. \right. \\
\left. \left. - 0,5 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^d C_1^{(i,j)}(s)u_j(s) + C_2^{(i)}(s) \right)^2 \right) ds \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^t \left(\ln(1 + B_1^{(i)}(s)u(s) + B_2^{(i)}(s)) \right) dN_i(s) \right. \\
\left. + \int_{t_0}^t \left(C_1(s)u(s) + C_2(s) \right)' dW(s) \right\}.
\end{aligned}$$

Beweis: Mit der Eigenschaft der Steuerung, den Integrierbarkeitsbedingungen und den Bedingungen, daß der Prozeß nicht negativ werden kann, können wir Satz 1.5 anwenden. Dieser liefert die Behauptung. \square

Gesteuerte stochastische Differentialgleichungen der Form (4.10), die alle Voraussetzungen des Satzes erfüllen, werden wir ab jetzt **linear** nennen. Diesen benötigen weniger Voraussetzungen für die Anwendung des Verifikationssatzes.

Korollar 4.9 (zum Verifikationssatz)

Ist die gesteuerte stochastische Differentialgleichung linear, so kann im Verifikationssatz auf die Voraussetzungen (4.2) und (4.3) an die Koeffizientenfunktionen verzichtet werden.

Beweis: Ist die gesteuerte stochastische Differentialgleichung linear, dann kann wegen der Beschränktheitsbedingungen der Koeffizienten der Satz 4.8 angewendet werden. Somit besitzt sie eine eindeutige Lösung, was ursprünglich die beiden Voraussetzungen (4.2) und (4.3) garantiert haben. \square

Bei unseren Portfolio-Problemen, die wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels betrachten, werden die gesteuerten stochastischen Differentialgleichungen li-

near sein. Somit können wir die Voraussetzungen (4.2) und (4.3) vernachlässigen.

4.3 Der Ein-Aktien-Fall

In diesem Abschnitt wollen wir die Theorie aus dem vorherigen Abschnitt anwenden und betrachten ein Portfolio-Problem, bei dem der Investor sein Vermögen in eine Aktie und in das Geldmarktkonto investieren kann. Allerdings modellieren wir jetzt die Aktie nicht mehr durch eine geometrisch Brownsche Bewegung wie im ursprünglichen Portfolio-Problem bei Merton, sondern durch einen Sprung-Diffusions-Prozeß. Dabei kann der Aktienkurs zusätzlich zu der normalen Dynamik im Modell von Black, Scholes und Merton an zufälligen Zeitpunkten einen Sprung machen, wobei sowohl positive als auch negative Sprünge erlaubt sind. Die Sprunghöhe kann sogar stochastisch sein, allerdings muß sie zu jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung besitzen. Außerdem muß beachtet werden, daß der Aktienkurs nach einem Sprung nicht negativ werden kann. Zuerst werden wir unterstellen, daß die Zinsrate in unserem Modellrahmen konstant ist. Leider gibt es keine geschlossene Lösung für dieses Problem. Wir zeigen aber, wie die optimalen Anteile numerisch berechnet werden können. Danach gehen wir sogar davon aus, daß die Zinsrate stochastisch ist. Auch hier können wir nur zeigen, wie eine Lösung numerisch bestimmt werden kann.

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) der vollständige Wahrscheinlichkeitsraum aus Abschnitt 1.1.1. Der Preis der Aktie S genüge der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t-)[(\mu - \bar{\delta}\lambda) dt + \delta dN(t) + \sigma dW(t)], \quad S(0) = s_0. \quad (4.11)$$

Dabei haben die Brownsche Bewegung W und der Poisson-Prozeß N jeweils die Dimension 1, und die Intensität λ von N sei konstant. Die Parameter μ bzw. σ bezeichnen die Drift bzw. die Volatilität der Aktie und seien eben-

falls konstant. Wir benötigen später die Annahme an die Konstanz dieser drei Modellparameter, damit auch der Aktienanteil in unserem Vermögen konstant sein wird. Unser Ansatz funktioniert aber auch, wenn sie nicht konstant, sondern (deterministische) Funktionen in der Zeit sind. Die Sprunghöhe des Poisson-Prozesses wird durch die Zufallsvariable δ charakterisiert, die zu jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung besitzt. Mit $\bar{\delta}$ bezeichnen wir die erwartete Sprunghöhe. Zusätzlich nehmen wir an, daß zu jedem Zeitpunkt $\delta > -1$ gilt und δ beschränkt ist. Damit wird sichergestellt, daß der Aktienkurs weder negativ werden noch explodieren kann. Der Aktienkurs zum Zeitpunkt 0 entspricht s_0 . Das Geldmarktkonto B hat zu Beginn den Wert 1, seine Dynamik modellieren wir durch die Differentialgleichung

$$dB(t) = B(t)r(t) dt, \quad B(0) = 1. \quad (4.12)$$

Für eine konstante Zinsrate r erhalten wir die deterministische Funktion

$$B(t) = e^{rt}$$

als Lösung. Unser Investor kann sein Vermögen ausschließlich in diese beiden Wertpapiere investieren, so daß sein Vermögen durch den Prozeß X mit

$$X = \varphi_B \cdot B + \varphi_S \cdot S,$$

dargestellt werden kann. Hierbei wird durch $\varphi = (\varphi_B, \varphi_S)$ die absolute Anzahl der beiden Wertpapiere angegeben, in die der Investor sein Geld investiert. Die Portfoliostrategie π wird nun durch

$$\pi = \frac{\varphi_S \cdot S}{X} \quad (4.13)$$

definiert, d.h. π stellt den relativen Anteil der Aktienposition am Gesamtvermögen dar.¹⁸ Wir werden nur selbstfinanzierende Portfoliostrategien betrachten, die die stochastische Differentialgleichung

$$dX = \varphi_B dB + \varphi_S dS \quad (4.14)$$

¹⁸ π entspricht der Steuerung u aus dem Abschnitt über stochastische Steuerung und ist in diesem Fall eindimensional.

erfüllen. So wird weder erlaubt, dem Vermögen Geld zuzuführen, noch aus dem Vermögen Geld abzuziehen. Wenn sich das Vermögen unseres Investors verändert, dann muß dies aus Veränderungen des Aktienkurses oder des Geldmarktkontos folgen. Das Einsetzen von (4.11), (4.12) und (4.13) in Gleichung (4.14) liefert uns die Vermögensgleichung für dieses Modell:

$$dX(t) = X(t-)\left[\left(r(t) + \pi(t)(\mu - \bar{\delta}\lambda - r(t))\right) dt + \pi(t-)\delta dN(t) + \pi(t)\sigma dW(t)\right], \quad X(0) = x_0, \quad (4.15)$$

wobei mit x_0 das Anfangsvermögen des Investors bezeichnet wird. Bei einem Sprung im Aktienkurs zum Zeitpunkt t ändert sich das Vermögen des Investors (zusätzlich) um den Betrag $X(t-)\pi(t-)\delta$. Wir haben oben bereits die Bedingung gestellt, daß $\delta > -1$ gelten muß. Wenn wir keines der beiden Wertpapiere leerverkaufen würden, dann würde für den optimalen Aktienanteil $\pi^*(t-) \in [0, 1]$ gelten und diese Bedingung würde ausreichen, daß wir bei einem negativen Sprung nicht mehr als das bisher vorhandene Vermögen verlieren. Allerdings ist es von vornherein nicht ausgeschlossen, daß wir als Lösung der optimalen Anlagestrategie erhalten, daß wir z.B. das Doppelte unseres Vermögens in die Aktie investieren sollen und dies durch Kreditaufnahme auf dem Geldmarktkonto finanzieren. Dann aber wäre $\pi^*(t-) = 2$ und $\delta > -1$ wäre keine hinreichende Bedingung für die strikte Positivität unseres Vermögensprozesses. Deswegen definieren wir nun die Menge aller Portfolios, die der Investor überhaupt eingehen darf.

Definition 4.10 (Zulässige Portfoliostrategie)

Eine **zulässige** Portfoliostrategie π muß zu jeden Zeitpunkt t die Bedingung

$$\pi(t-)\delta > -1$$

erfüllen. Die Menge aller zulässigen Portfoliostrategien werden wir mit Π bezeichnen.

Für eine zulässige Strategie ist also sichergestellt, daß die Vermögensgleichung die ganze Zeit über nicht negativ ist. Da eine Portfoliostrategie über

Gleichung (4.13) definiert wird, ist sie gleichzeitig auch eine zulässige Steuerung nach Definition 4.3.¹⁹ Die Bedingung entspricht der Bedingung (4.9) aus dem Satz 4.8 über die Existenz und Gestalt der Lösung einer linearen gesteuerten stochastischen Differentialgleichung.

Wir wollen das Endvermögen des Investors zur Zeit T bezüglich der Potenz-Nutzenfunktion

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x > 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

maximieren. Das Portfolio-Problem lautet daher

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right), \quad (4.16)$$

wobei das Endvermögen $X(T)$ durch die Vermögensgleichung (4.15) gegeben wird. Wie bereits erwähnt, werden wir im nächsten Abschnitt die optimalen Portfolios unter Annahme einer konstanten Zinsrate herleiten. Später werden wir diese Einschränkung aufheben und das Problem bezüglich einer stochastischen Zinsrate betrachten.

4.3.1 Konstante Zinsrate

Wir möchten nun Portfolio-Problem (4.16) in einer Welt lösen, in der die Zinsrate konstant ist, d.h. es gilt zu jedem Zeitpunkt $r(t) = r$, $t \geq 0$. Bei der Lösung dieses Problems verwenden wir die Theorie der stochastischen Steuerung aus Abschnitt 4.2. Der Kandidat G für die Wertfunktion dieses Problems lautet also

$$G(t, x) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}^{t,x} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right)$$

und muß für die Anwendung des Verifikationssatzes die HJB-Gleichung erfüllen, die die Form

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi G(t, x) = 0 \quad (4.17)$$

¹⁹Zur Beschränktheit der Momente der Vermögensgleichung vgl. auch Satz 1.3.

besitzt. Dabei gilt in unserem Fall

$$A^\pi G = G_t + G_x x \left(r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r) \right) + 0,5G_{xx}x^2\pi^2\sigma^2 + \lambda E[(G - G^-)]$$

mit $(G - G^-)(t, x) = G(t, x(1 + \pi(t-)\delta)) - G(t, x)$. Die Randbedingung lautet $G(T, x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$. Zur Lösung dieses Optimierungsproblems verwenden wir für G den Ansatz²⁰

$$G(t, x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma f^{1-\gamma}(t),$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion ist, die nur von der Zeit abhängt und die zum Endzeitpunkt T die Bedingung $f(T) = 1$ erfüllt. Die partiellen Ableitungen von G lauten somit

$$\begin{aligned} G_t(t, x) &= \frac{1-\gamma}{\gamma}x^\gamma f^{-\gamma}(t)f'(t), \\ G_x(t, x) &= x^{\gamma-1}f^{1-\gamma}(t), \\ G_{xx}(t, x) &= (\gamma-1)x^{\gamma-2}f^{1-\gamma}(t). \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir verifizieren, daß G tatsächlich die gewünschte Form hat. Dazu setzen wir zunächst den obigen Ansatz in die HJB-Gleichung (4.17) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma}x^\gamma f^{-\gamma}f' + x^\gamma f^{1-\gamma}(r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)) \right. \\ \left. + 0,5(\gamma-1)x^\gamma f^{1-\gamma}\pi^2\sigma^2 + \lambda E^{t,x} \left[\frac{1}{\gamma}x^\gamma(1 + \pi\delta)^\gamma f^{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma}x^\gamma f^{1-\gamma} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Division durch x^γ und durch $f^{-\gamma}$ liefert uns

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma}f' + \left[r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r) + 0,5(\gamma-1)\pi^2\sigma^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \frac{1}{\gamma} E^{t,x}[(1 + \pi\delta)^\gamma - 1] \right] f \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Um weiterarbeiten zu können, treffen wir jetzt folgende Annahme. Später müssen wir zeigen, daß sie auch erfüllt ist.

²⁰Diesen Ansatz verwendet z.B. auch Zariphopoulou (1999).

Annahme 4.11

Es existiert ein konstanter optimaler Aktienanteil π^* , der die folgende Bedingung (first-order condition) erfüllt:

$$(\mu - \bar{\delta}\lambda - r) + (\gamma - 1)\pi^*\sigma^2 + \lambda E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta] = 0. \quad (4.19)$$

Durch Umformen dieser Bedingung erhalten wir eine implizite Darstellung für unsere optimale Portfoliostrategie π^* :

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} + \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta]. \quad (4.20)$$

Da die Markt- und der Präferenzparameter nach Modellannahme konstant sind, muß auch der optimale Aktienanteil π^* konstant sein, falls (4.20) lösbar ist. Es gilt nachfolgender Satz.

Satz 4.12

Kann der Kandidat für die optimale Lösung, der die first-order condition erfüllt, aus (4.20) eindeutig bestimmt werden, so löst er das lokale Optimierungsproblem in der HJB-Gleichung.

Beweis: Aus $\gamma - 1 < 0$ folgt, daß die zweite Ableitung²¹ für π^* negativ ist, also daß die hinreichende Bedingung für das Optimum erfüllt ist:

$$(\gamma - 1) \left[\sigma^2 + \lambda E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2] \right] < 0.$$

□

Bemerkung 4.13

Zu beachten ist auch, daß Annahme 4.11 insbesondere impliziert, daß die Erwartungswerte in (4.18) und in (4.20) endlich sind, d.h. für alle Startwerte t und x sind die beiden Ungleichungen

$$E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^\gamma] < \infty$$

²¹Vgl. (4.19).

und

$$\mathbb{E}^{t,x}[(1 + \pi^* \delta)^{\gamma-1} \delta] < \infty$$

erfüllt.

Wir setzen nun die optimale Lösung in die Gleichung (4.18) ein, so daß die dann entstandene partielle Differentialgleichung explizit gelöst werden kann. Dafür definieren wir die Funktion B :

$$B(t) := r + \pi^*(\mu - \bar{\delta}\lambda - r) + 0,5(\gamma - 1)\pi^{*2}\sigma^2 + \frac{1}{\gamma}\lambda \mathbb{E}^{t,x}[(1 + \pi^* \delta)^\gamma - 1].$$

Mit dieser Abkürzung ist die Differentialgleichung (4.18) äquivalent zu

$$0 = f' + \frac{\gamma}{1 - \gamma} Bf.$$

Aus der Endbedingung $f(T) = 1$ erhalten wir

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{\gamma}{1 - \gamma} \int_t^T B(s) ds\right\}.$$

Mit einer weiteren Abkürzung $C(t) := \int_t^T B(s) ds$, so daß

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{\gamma}{1 - \gamma} C(t)\right\}$$

gilt, erhalten wir als Ableitung

$$f'(t) = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} C'(t) \exp\left\{-\frac{\gamma}{1 - \gamma} C(t)\right\}.$$

Nun können wir G schreiben als

$$G(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp\{-\gamma C(t)\}.$$

Diese Wertfunktion G ist die $C^{1,2}$ -Lösung der HJB-Gleichung, falls f wohldefiniert und in C^1 ist. Wir müssen also noch diese beiden Eigenschaften von f zeigen. Da (4.20) eine Gleichung für π^* ist und eine eindeutige Lösung besitzt,

ist Annahme 4.11 erfüllt, falls die auftretenden Erwartungswerte endlich sind. Dann ist auch f wohldefiniert und G , das der polynomialen Wachstumsbedingung genügt, ist die Lösung der HJB-Gleichung. Der optimale Anteil des Vermögens eines Investors kann nun numerisch anhand von Gleichung (4.20) berechnet werden. Wir fassen dies in einem Satz zusammen.

Satz 4.14 (Optimale Portfoliostrategie)

Existiert im Fall konstanter Koeffizienten eine (endliche) Lösung der Gleichung

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} + \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} \mathbb{E}^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta], \quad (4.21)$$

die zusätzlich die beiden Bedingungen

- (i) $\pi^*\delta > -1$ und
- (ii) $\mathbb{E}^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^\gamma] < \infty$

erfüllt, so ist diese Lösung der optimale Portfolioprozess.

Die erste Bedingung impliziert, daß der optimale Aktienanteil π^* eine zulässige Portfoliostrategie ist, die zweite sichert die Wohldefiniertheit der HJB-Gleichung.²²

Bemerkung 4.15

Wir möchten an dieser Stelle noch darauf hinweisen, daß es im Nachhinein unbedingt erforderlich ist, die Bedingung $\pi^*\delta > -1$ zu überprüfen. Liu, Longstaff und Pan (2003) definieren den Nutzen eines negativen Vermögens als $-\infty$ und argumentieren, daß wenn es eine positive Wahrscheinlichkeit für ein negatives Vermögen gibt, man durch die Investition des ganzen Kapitals in das Geldmarktkonto immer bessergestellt ist. Deswegen sei es nicht möglich, daß durch die Sprünge das Vermögen negativ wird. Dazu möchten wir bemerken, daß man durch die optimale Investitionspolitik tatsächlich immer ein

²²Vgl. dazu Definition 4.10 bzw. (4.18).

strikt positives Vermögen haben wird, jedoch muß dazu die HJB-Gleichung (oder ihre Abwandlung (4.18)) wohldefiniert sein. Ist die Bedingung $\pi\delta > -1$ verletzt, ist dies aber nicht der Fall.

Der nächste Satz liefert uns eine hinreichende Bedingung, wann der optimale Portfolioanteil eindeutig lösbar ist.

Satz 4.16

Besitzt die Aktie eine positive Überrendite, dann kann Gleichung (4.21) eindeutig gelöst werden.

Beweis: Wir definieren die Hilfsfunktion g durch²³

$$g(\pi^*) := \pi^* - \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} - \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} \mathbb{E}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta].$$

Es gilt

$$g'(\pi^*) = 1 + \frac{\lambda}{\sigma^2} \mathbb{E}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2] > 0,$$

d.h. g ist streng monoton wachsend. Ist die Überrendite der Aktie positiv, so besitzt g wegen

$$\begin{aligned} g(0) &= -\frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} - \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} \mathbb{E}[\delta] \\ &= -\frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

genau eine Nullstelle. In diesem Fall existiert eine optimale Lösung, die zudem noch eindeutig ist. \square

Wir haben eine Existenzbedingung für die Lösung angegeben und werden nun die Form des optimalen Anteils genauer analysieren. Dieser besteht aus zwei Termen, dem myopischen Term und einem Hedgeterm. In diesem Fall

²³Linke Seite von (4.21) minus die rechte Seite.

kann letzterer aber nur implizit berechnet werden. Wären keine Sprünge möglich, d.h. gelte $\lambda = 0$ oder $\delta \equiv 0$, dann fiel der zweite Summand weg und wir wären wieder im Standard-Modell von Merton angelangt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung hat einen direkten Einfluß auf den Hedgeterm. Diese Abhängigkeit wird im nächsten Satz untersucht.²⁴

Satz 4.17

Ist $E[\delta] \neq 0$, dann verringert eine größere Sprungintensität den absoluten Anteil, der in die Aktie investiert wird. Es gilt also: Ist der optimale Aktienanteil positiv, wird weniger in die Aktie investiert und umgekehrt.

Beweis: Mit der Funktion g aus dem Beweis von Satz 4.16 gilt mit dem Satz von der impliziten Funktion:²⁵

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^*}{\partial \lambda} &= - \frac{\partial g / \partial \lambda}{\partial g / \partial \pi^*} \\ &= - \frac{1}{(1 - \gamma)\sigma^2} \frac{E^{t,x}[\delta] - E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta]}{1 + \frac{\lambda}{\sigma^2} E^{t,x}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2]}. \end{aligned}$$

Für $\pi^* > 0$ ist der Zähler

$$E^{t,x}[\delta - (1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta] = E^{t,x}[\delta(1 - (1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1})]$$

wegen $\gamma - 1 < 0$ positiv, d.h. der gesamte Term ist negativ. Für $\pi^* < 0$ gilt die umgekehrte Relation, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Beispielen, in denen das Problem für verschiedene Verteilungen für die Sprunghöhe δ untersucht wird. Dort werden wir jeweils die Abhängigkeit des optimalen Aktienanteils von der Sprungintensität λ und der Sprunghöhe δ betrachten. Außerdem werden wir eine ökonomische Interpretation für den eben bewiesenen Satz geben, dessen Aussage in Abbildung 4.1 deutlich zu sehen ist.

²⁴Siehe dazu auch Wu (2003).

²⁵Wobei wir nun annehmen, daß g eine Funktion von π^* und λ ist.

Konstante Sprunghöhe

Ist δ konstant, reduziert sich die implizite Gleichung (4.21) für die optimale Portfoliostrategie zu

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \delta\lambda - r}{\sigma^2} + \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} (1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1} \delta.$$

Diese Gleichung kann nun sehr einfach mit einem Verfahren zur Nullstellensuche gelöst werden, falls die Überrendite positiv ist.²⁶ Wir wollen diesen Fall an einem Beispiel veranschaulichen. Abbildung 4.1 illustriert den optimalen Anteil, der in die Aktie investiert wird. Dafür haben wir die Parameter $\gamma = 0,5$, $\mu = 0,08$, $\sigma = 0,3$ und $r = 0,05$ verwendet. Der Merton-Anteil beträgt in diesem Fall $2/3$.

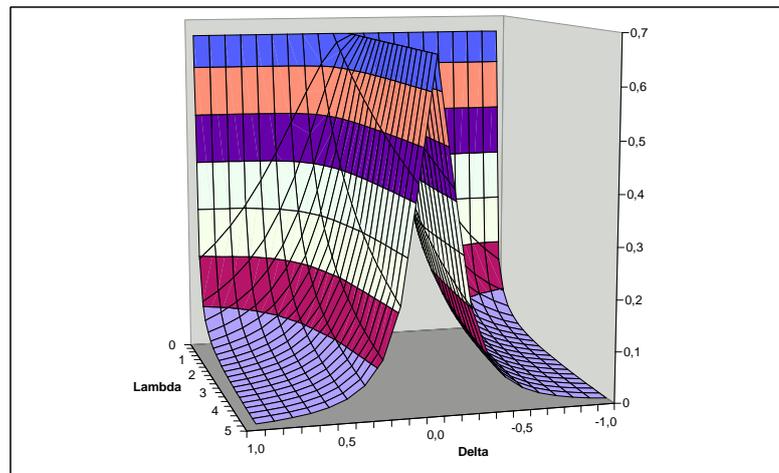


Abbildung 4.1: Optimaler Aktienanteil bei konstanter Sprunghöhe

Die konstante Sprunghöhe haben wir von -1 bis 1 variiert, während die Intensität λ im Intervall $[0,5]$ dargestellt wird. Für alle Werte von δ und λ sind

²⁶Siehe dafür z.B. Press, Teukolsky, Vetterling und Flannery (2002).

die optimalen Anteile positiv und kleiner gleich dem Merton-Portfolio.²⁷ Bedingung (i) aus Satz 4.14 ist somit erfüllt, was bei konstanter Sprunghöhe, auch (ii) impliziert.

Für $\delta = 0$ bzw. $\lambda = 0$ können keine Sprünge stattfinden und die optimale Lösung entspricht der Merton-Lösung. Damit der Vermögensprozeß im Modell mit Sprung-Diffusions-Prozessen das gleiche Wachstum wie der Vermögensprozeß im Merton-Fall aufweist, muß die erwartete Anzahl von Sprüngen auch tatsächlich stattfinden. Andernfalls ist für positive Sprünge ($\delta > 0$) das Endvermögen niedriger als bei Merton.²⁸ In diesem Fall möchte ein risikoaverser Investor trotz der Möglichkeit, daß mehr als die erwartete Anzahl an Sprüngen stattfindet, weniger als ein Merton-Investor in die Aktie anlegen. Er fürchtet sich eher vor dem Risiko wenigerer Sprüngen. Sobald die Intensität – und damit das Sprungrisiko – größer wird, nimmt der optimale Aktienanteil sehr schnell ab. Diesen Effekt kann man aber auch für negative Sprünge ($\delta < 0$) beobachten und neben dem formalen Ergebnis aus Satz 4.17 auch folgendermaßen erklären: Bei gleichbleibender erwarteter Aktienrendite steigt die Gesamtvarianz, so daß ein risikoaverser Investor weniger in das risikoreiche Gut investieren möchte. Würde man die Aktie leerverkaufen, würde man erwarten, daß sich dieser Effekt umdreht, was wieder konform mit Satz 4.17 wäre.

Aber auch die Höhe der Sprünge hat einen entscheidenden Einfluß auf das optimale Portfolio. Schon für (betragsmäßig) kleine Werte für δ wird der Aktienanteil sehr schnell kleiner. Bei durchschnittlich zwei Sprüngen pro Jahr ist dieser für $\delta \pm 0,2$ nur noch halb so groß wie bei $\delta = 0$.

²⁷Dies gilt auch für sehr große Werte von δ und λ , die in diesem Schaubild nicht dargestellt sind. Deswegen genügt es auch, nur diesen Ausschnitt zu betrachten.

²⁸Vgl. (4.15).

Lognormalverteilte Sprunghöhe

Wir nehmen nun an, daß die Sprunghöhe lognormalverteilt mit den Parametern μ_D und σ_D sei. Dann kann der Erwartungswert aus (4.20) folgendermaßen berechnet werden:

$$E^{t,x}[(1 + \pi^* \delta)^{\gamma-1} \delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \int_0^\infty (1 + \pi^* y)^{\gamma-1} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right) dy.$$

Zu beachten ist, daß durch μ_D nicht die erwartete Sprunghöhe gegeben ist, sondern wir diese aus

$$E[\delta] = \exp\left(\mu_D + 0,5\sigma_D^2\right)$$

erhalten. Dieses Integral und damit die Lösung π^* können numerisch berechnet werden. Wir wollen auch diesen Fall veranschaulichen. In Abbildung 4.2 ist der optimale Aktienanteil dargestellt, wobei $\sigma_D = 0,5$ gewählt wird. Das Integral haben wir nur bis zur Grenze 10 ausgewertet. Genauere Rechnungen würden die Ergebnisse nur an Nachkommastellen ändern, die in der Praxis irrelevant sind.²⁹ Die Masse unter der Dichte ist trotzdem nahezu 1. Damit ist auch die Beschränktheitsannahme an die Sprunghöhe erfüllt.

Die übrigen Parameter entsprechen dem letzten Beispiel. Statt der Sprunghöhe selbst wurde der Parameter μ_D von -4 bis 0 variiert, was einer erwarteten Sprunghöhe von 0,008 bis 1,13 entspricht. Wegen der Verteilungsannahme können keine negativen Sprünge auftreten. Auch in diesem Fall ist π^* für alle Kombinationen von λ und μ_D positiv, weswegen die Bedingung (i) und wegen der Beschränktheitsannahme auch (ii) aus Satz 4.14 erfüllt sind. Für $\mu_D = 4$, also wenn die erwartete Sprunghöhe nahe 0 ist, und für $\lambda = 0$ entspricht der optimale Anteil wieder dem Merton-Anteil. Der Ausschnitt entspricht der linken Hälfte aus dem vorherigen Beispiel. Scheinbar fallen die π^* für größere erwartete Sprünge jetzt langsamer als in der anderen Abbildung. Dieser Effekt kommt aber nur durch die andere Skalierung zustande. Beispielsweise

²⁹Z.B. 0,510123607 vs. 0,510123612 für $\lambda = 1$ und $\mu_D = -2$.

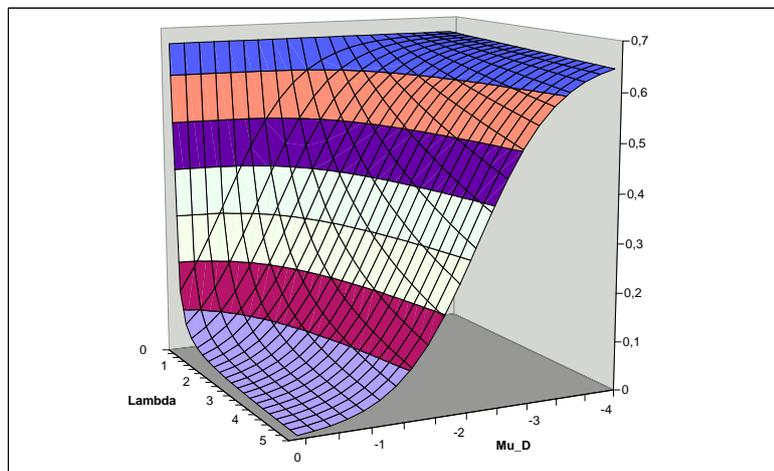


Abbildung 4.2: Optimaler Aktienanteil bei lognormalverteilter Sprunghöhe

ist für $\mu_D = -1,73$, was ungefähr $\delta = 0,2$ im konstanten Fall entspricht, der optimale Anteile nur noch 31,23% statt 36,17%.

Diskrete Verteilung für die Sprunghöhe

Wir geben jetzt ein Beispiel an, bei dem die Sprunghöhe eine diskrete Verteilung besitzt. Es seien wieder die Markt- und der Präferenzparameter aus den letzten beiden Beispielen gegeben. Ist die Sprunghöhe diskretverteilt, dann können wir in der Aktie den Term δdN durch die Summe $\sum_{i=1}^n \delta_i dN_i$ ersetzen, wobei n die Anzahl der möglichen Werte von δ angibt und δ_i die *konstante* Sprunghöhe zum Poisson-Prozeß N_i ist.³⁰ Die N_i sind hierbei unabhängig und haben die Intensität λ_i . Zu beachten ist, daß eine optimale Portfoliostrategie nun die Bedingung $\pi(t-)\delta_i > -1$ für alle $i = 1, \dots, n$,

³⁰Siehe z.B. Aase (1984).

erfüllen muß. Der optimale Aktienanteil sieht nun folgendermaßen aus:

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \sum_{i=1}^n \delta_i \lambda_i - r}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(1-\gamma)\sigma^2} (1 + \pi^* \delta_i)^{\gamma-1} \delta_i.$$

Auch das wollen wir wieder veranschaulichen.

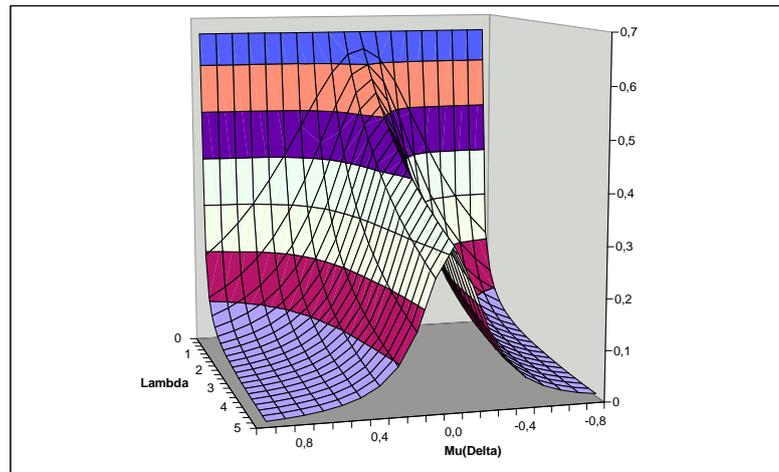


Abbildung 4.3: Optimaler Aktienanteil bei diskretverteilter Sprunghöhe

Für das Beispiel haben wir die fünf möglichen Sprunghöhen $\bar{\delta} - 0,02$, $\bar{\delta} - 0,01$, $\bar{\delta}$, $\bar{\delta} + 0,01$ und $\bar{\delta} + 0,02$ zugelassen. Abbildung 4.3 zeigt die optimalen Anteile, liegt $E[\delta]$ im Intervall $(-0,8; 1]$. Kleinere Werte sind nicht möglich, da sonst der Aktienkurs null oder negativ werden kann. In diesem Bereich sind die π^* wieder alle positiv und kleiner gleich dem Merton-Portfolio, so daß beide Bedingungen aus Satz 4.14 erfüllt sind. Der Wertbereich von λ sei wie bisher 0 bis 5. Damit die Gesamtintensität mit der aus den vorherigen Beispielen vergleichbar ist, haben wir $\lambda_i = \lambda/5$ gewählt. Es ist deutlich zu sehen, daß die Abbildung für gleiche erwartete Sprunghöhen wie im konstantem Beispiel sehr viel flacher geworden ist. Entsprechend dort für $\delta = 0$ auch bei durchschnittlich 5 Sprüngen pro Zeiteinheit der optimale Anteil dem bei Merton, ist er

hier weniger als halb so hoch. Dies liegt daran, daß diese 5 Sprünge nicht mehr unbedingt die Höhe 0 haben. Wie wir oben bereits begründet haben, fürchtet sich aber ein risikoaverser Investor vor Sprüngen, egal ob positiver oder negativer Art. Dieser Effekt ist auch schon bei sehr kleiner Sprungwahrscheinlichkeit zu sehen, wenn auch nicht so deutlich.

4.3.2 Stochastische Zinsrate

In diesem Abschnitt gehen wir nicht mehr von der Einschränkung aus, daß die Zinsrate konstant ist. Vielmehr modellieren wir sie durch einen stochastischen Prozeß und gehen im weiteren Verlauf davon aus, daß für die Zinsrate das Modell von Ho und Lee (1986) gilt.³¹ Unsere Ergebnisse können auch für andere Short Rate-Modelle hergeleitet werden, allerdings erhöht sich damit auch der Notationsaufwand. Da wir keine geschlossene Lösung für den optimalen Aktienanteil π^* herleiten können, sondern nur eine Approximation angeben, wollen wir den Lösungsweg exemplarisch nur an diesem Zinsstrukturmodell aufzeigen. Für weitere Portfolio-Probleme, bei denen die Zinsrate durch das Modell von Ho und Lee modelliert wird, siehe Korn und Kraft (2001) bzw. Kraft (2004a). Im Ho/Lee-Modell wird die Zinsrate r durch

$$dr(t) = a(t) dt + b d\widehat{W}(t), \quad r(0) = r_0, \quad (4.22)$$

modelliert. Hierbei ist \widehat{W} eine weitere Brownsche Bewegung. Deren Korrelation mit der Brownschen Bewegung W der Aktie sei durch ρ gegeben, d.h. es gelte $\langle dW, d\widehat{W} \rangle = \rho dt$. Die Zinsrate zum Zeitpunkt 0 wird mit r_0 und die Volatilität der Zinsrate mit b bezeichnet. Die Drift a der Zinsrate ist eine deterministische Funktion. Sie wird anhand der exogen gegebenen Anfangszinsstrukturkurve so bestimmt, daß die in diesem Modell berechneten Bondpreise mit am Markt beobachteten Bondpreisen übereinstimmen. Sei $f^*(0, \tilde{T})$,

³¹Wir verwenden das zeitstetige Analogon des dort vorgestellten Binomialbaums. Siehe Dybvig (1988) oder Jamshidian (1988) für einen Konvergenzbeweis. Siehe Cox, Ross und Rubinstein (1979) zur Optionsbewertung in Binomialbäumen.

$0 \leq \tilde{T} \leq T$ die aus den Bondpreisen bestimmte konforme Terminzinskurve.³² Unter dem risikoneutralen Maß ist die Drift durch $a(t) = f_T^*(0, t) + b^2 t$, $t \geq 0$, gegeben.³³ Damit gehört dieses Modell zur Klasse der Arbitragemodelle, die in der Praxis eine wichtige Rolle einnehmen. Für weitere Eigenschaften des Modells sowie für Herleitungen von geschlossenen Formeln für Bond- und Optionspreise siehe z.B. Björk (1997) oder Björk (2004).

Auch in diesem Fall werden wir wie bei einer konstanten Zinsrate bei der Lösung des Portfolio-Problems (4.16) die Theorie der stochastischen Steuerung verwenden. Mit der stochastischen Zinsrate haben wir dem Problem eine weitere Dimension hinzugefügt, so daß der Kandidat G für die Wertfunktion in diesem Fall folgendermaßen aussieht:

$$G(t, x, r) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}^{t, x, r} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right),$$

und die Randbedingung lautet $G(T, x, r) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$. Der Kandidat muß die HJB-Gleichung aus dem Verifikationssatz erfüllen, die in diesem Fall folgende Gestalt hat:

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi G(t, x, r) = 0 \quad (4.23)$$

mit

$$\begin{aligned} A^\pi G &= G_t + G_x x (r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)) + G_r a \\ &+ 0,5[G_{xx} x^2 \pi^2 \sigma^2 + G_{rr} b^2 + 2G_{xr} x \pi \sigma b \rho] + \mathbb{E}[\lambda(G - G^-)], \end{aligned}$$

wobei $(G - G^-)(t, x, r) = G(t, x(1 + \pi(t-)\delta(t)), r) - G(t, x, r)$ gilt. Wegen der neu hinzugekommenen Dimension wird der Ansatz für die Wertfunktion im Vergleich zum letzten Abschnitt modifiziert. Als neuen Ansatz wählen wir³⁴

$$G(t, x, r) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma f^k(t, r).$$

³²Vgl. Definition 1.28. Wir erinnern daran, daß die Terminzinskurve nach Annahme stetig differenzierbar ist.

³³Siehe Heath, Jarrow und Morton (1992) für die Herleitung der Driftfunktion in einem allgemeinen Modellrahmen. Siehe dazu auch Brigo und Mercurio (2006).

³⁴Diesen Ansatz verwenden z.B. auch Zariphopoulou (2001) und Kraft und Steffensen (2006).

Diesmal ist f eine in der Variable t stetig differenzierbare Funktion, die sowohl von der Zeit als auch von der Zinsrate r abhängt und die die Bedingung $f(T, r) = 1$ zum Endzeitpunkt T erfüllt. Der Exponent $k \neq 0$ sei zunächst beliebig. Später werden wir sehen, wie k gewählt werden kann, um unser Problem zu vereinfachen. Die partiellen Ableitungen von unserem Ansatz für G sind nun durch

$$\begin{aligned} G_t(t, x, r) &= \frac{1}{\gamma} x^\gamma k f^{k-1}(t, r) f_t(t, r), \\ G_x(t, x, r) &= x^{\gamma-1} f^k(t, r), \\ G_{xx}(t, x, r) &= (\gamma - 1) x^{\gamma-2} f^k(t, r), \\ G_r(t, x, r) &= \frac{1}{\gamma} x^\gamma k f^{k-1}(t, r) f_r(t, r), \\ G_{rr}(t, x, r) &= \frac{1}{\gamma} x^\gamma k \left((k-1) f^{k-2}(t, r) f_r^2(t, r) + f^{k-1}(t, r) f_{rr}(t, r) \right), \\ G_{xr}(t, x, r) &= x^{\gamma-1} k f^{k-1}(t, r) f_r(t, r) \end{aligned}$$

gegeben. Wir setzen diesen Ansatz in die HJB-Gleichung (4.23) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} & \left\{ \frac{1}{\gamma} x^\gamma k f^{k-1} f_t + x^\gamma f^k (r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)) + \frac{1}{\gamma} x^\gamma k f^{k-1} f_r a \right. \\ & + 0,5 \left[(\gamma - 1) x^\gamma f^k \pi^2 \sigma^2 + \frac{1}{\gamma} x^\gamma k \left((k-1) f^{k-2} f_r^2 + f^{k-1} f_{rr} \right) b^2 \right. \\ & \quad \left. \left. + 2x^\gamma k f^{k-1} f_r \pi \sigma b \rho \right] \right. \\ & \left. + \lambda \mathbf{E}^{t,x,r} \left[\frac{1}{\gamma} x^\gamma (1 + \pi\delta)^\gamma f^k - \frac{1}{\gamma} x^\gamma f^k \right] \right\}. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit γ und Division durch x^γ , durch k und durch f^{k-1} ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} & \left\{ f_t + \frac{\gamma}{k} f (r + \pi(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)) + f_r a + 0,5 \frac{\gamma(\gamma-1)}{k} f \pi^2 \sigma^2 \right. \\ & \left. + 0,5 b^2 \left((k-1) \frac{f_r^2}{f} + f_{rr} \right) + \gamma f_r \pi \sigma b \rho + \frac{\lambda}{k} f \mathbf{E}^{t,x,r} \left[(1 + \pi\delta)^\gamma - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Wie bei dem Spezialfall der konstanten Zinsrate treffen wir zunächst eine Annahme über die Existenz der optimalen Lösung π^* .

Annahme 4.18

Es existiert ein optimaler Aktienanteil π^* , der die folgende Bedingung (first-order condition) erfüllt:

$$(\mu - \bar{\delta}\lambda - r) + (\gamma - 1)\sigma^2\pi^* + k\frac{f_r}{f}\sigma b\rho + \lambda E^{t,x,r}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta] = 0.$$

Im Gegensatz zu Annahme 4.11 nehmen wir aber nicht an, daß dieser Anteil im Zeitablauf konstant ist. Da in diesem Problem die Zinsrate stochastisch ist, kann dies auch nicht der Fall sein. Da die Funktion f nicht von x abhängt, hängt auch π^* wieder nicht von x ab. Aus der Annahme erhalten wir eine implizite Darstellung für das optimale Portfolio:

$$\begin{aligned} \pi^* = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} + \frac{1}{1-\gamma} \frac{kb\rho}{\sigma} \frac{f_r}{f} \\ & + \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} E^{t,x,r}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Satz 4.19

Kann der Kandidat für die optimale Lösung, der die first-order condition erfüllt, aus (4.25) eindeutig bestimmt werden, so löst er das lokale Optimierungsproblem in der HJB-Gleichung.

Beweis: Die zweite Ableitung für π^* entspricht der im Falle einer konstanten Zinsrate und ist negativ, weswegen auch hier die Behauptung folgt, vgl. dazu Satz 4.12. □

Bemerkung 4.20

Die Existenz einer optimalen Lösung impliziert, daß beide auftauchende Erwartungswerte endlich sind, es gelten also für alle Startwerte t , x und r die beiden Ungleichungen

$$E^{t,x,r}[(1 + \pi^*\delta)^\gamma] < \infty$$

und

$$\mathbb{E}^{t,x,r} [|(1 + \pi^* \delta)^{\gamma-1} \delta|] < \infty.$$

Zusätzlich zu diesen beiden Bedingungen muß in diesem Problem auch der Quotient $\frac{f_r}{f}$ beschränkt sein.

Wir definieren nun die beiden Abkürzungen M_1 und M_2 , um die Notation für die weiteren Berechnungen zu vereinfachen. Dabei ist zu beachten, daß beide Erwartungswerte sowohl von der Zeit als auch von der Zinsrate, aber nicht mehr von x abhängen. Es seien

$$M_1(t, r) := \mathbb{E}^{t,x,r} [(1 + \pi^* \delta)^\gamma - 1]$$

und

$$M_2(t, r) := \mathbb{E}^{t,x,r} [(1 + \pi^* \delta)^{\gamma-1} \delta].$$

Mit diesen beiden Abkürzungen und durch Einsetzen der impliziten Darstellung (4.25) für π^* in (4.24) müssen wir nun folgende partielle Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} 0 = & f_t + f \frac{1}{k} \left[\gamma r + \lambda M_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{2\sigma^2} [(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)^2 - \lambda^2 M_2^2] \right] \\ & + f_r \left[a + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{b\rho}{\sigma} (\mu - \bar{\delta}\lambda - r) \right] + \frac{f_r^2}{f} \cdot 0,5b^2 \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} k\rho^2 + k - 1 \right] \\ & + 0,5b^2 f_{rr}. \end{aligned}$$

Wie oben bereits erwähnt, ist k ein beliebiger Exponent in unserem Ansatz für die Funktion G . Wir können nun k und damit unseren Ansatz so geschickt wählen, daß diese Differentialgleichung eine möglichst einfache Form hat. Mit der Wahl von³⁵ $k = \frac{1-\gamma}{1-\gamma+\rho^2\gamma}$ verschwindet der Koeffizient zu $\frac{f_r^2}{f}$ und die partielle Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} 0 = & f_t + f \frac{1-\gamma+\rho^2\gamma}{1-\gamma} \left[\gamma r + \lambda M_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{2\sigma^2} [(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)^2 - \lambda^2 M_2^2] \right] \\ & + f_r \left[a + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{b\rho}{\sigma} (\mu - \bar{\delta}\lambda - r) \right] + 0,5b^2 f_{rr}. \end{aligned}$$

³⁵Wegen $\gamma < 1$ ist $k \neq 0$ wie in der Voraussetzung benötigt.

Mit den Definitionen

$$\tilde{r} := -\frac{1-\gamma+\rho^2\gamma}{1-\gamma} \left[\gamma r + \lambda M_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{2\sigma^2} [(\mu - \bar{\delta}\lambda - r)^2 - \lambda^2 M_2^2] \right] \quad (4.26)$$

und

$$\tilde{\alpha} := \left[a + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{b\rho}{\sigma} (\mu - \bar{\delta}\lambda - r) \right] \quad (4.27)$$

besitzt die Differentialgleichung die Form

$$0 = f_t - \tilde{r}f + \tilde{\alpha}f_r + 0,5b^2 f_{rr}$$

mit der Endbedingung $f(T, r) = 1$. Als Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erhalten wir aus der allgemeinen Feynman-Kac-Formel von Heath und Schweizer (2000) die Darstellung

$$f(t, r) = \tilde{\mathbb{E}}^{t,r} \left[\exp \left(- \int_t^T \tilde{r}(s) ds \right) \right],$$

wobei der Erwartungswert unter dem Maß \tilde{P} berechnet werden muß, das durch die Girsanov-Dichte $Z(t) := \frac{d\tilde{P}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}$ definiert ist.³⁶ Es gilt also

$$Z(t) = \exp \left\{ -0,5 \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^t (\mu - \bar{\delta}\lambda - r(s))^2 ds + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\rho}{\sigma} \int_0^t (\mu - \bar{\delta}\lambda - r(s)) dW(s) \right\}.$$

Aus einem Satz von Krylov (1980), S. 85, folgt

$$\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq s \leq t} |r(s)|^p \right) < \infty \text{ für alle } p \in \mathbb{N}.$$

Deswegen ist die Novikov-Bedingung erfüllt und Z tatsächlich eine Dichte.

Sei \tilde{W} eine Brownsche Bewegung unter \tilde{P} , die über

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\rho}{\sigma} (\mu - \bar{\delta}\lambda - r(t)) dt$$

definiert wird. Dann ist die Dynamik der Zinsrate durch

$$dr(t) = \tilde{\alpha}(t) dt + b d\tilde{W}(t) \quad (4.28)$$

gegeben.

³⁶Siehe dazu auch Karatzas und Shreve (1991), S. 190ff.

Bemerkung 4.21

Wir müßten jetzt noch zeigen, daß f endlich und stetig differenzierbar nach t ist. Für die optimale Portfoliostrategie benötigen wir außerdem noch eine Darstellung dieser Funktion und ihrer Ableitung nach r . Leider können wir die Funktion f nicht explizit angeben bzw. ausrechnen. Wir möchten dennoch eine Approximation für f vorstellen und zeigen, wie damit die implizite Darstellung für den optimalen Aktienanteil näherungsweise berechnet werden kann. Zu bemerken wäre dann noch, daß das daraus resultierende G *nicht* die Wertfunktion darstellt, denn es ist auch nur eine Approximation. Der Verifikationssatz kann also nicht angewendet werden und wir wissen daher nicht, ob die Anteile tatsächlich optimal sind. Dies wäre nur der Fall, wenn wir f herleiten und mit ihr die Voraussetzungen des Verifikationssatzes nachweisen könnten. Trotzdem könnte man die errechneten Werte mit dem optimalen Portfolio bei konstanter Zinsrate vergleichen. An der entsprechenden Stelle werden wir noch einmal explizit auf unsere Approximation hinweisen.

Dazu benötigen wir nachfolgenden Satz.

Satz 4.22 (Laplace-Transformation)

Im Ho/Lee-Modell (4.22) ist die Laplace-Transformation

$$\varphi(t, T, r) := E^{t,r} \left[\exp \left(-c_1 r(T) - c_2 r^2(T) - d_1 \int_t^T r(s) ds - d_2 \int_t^T r^2(s) ds \right) \right]$$

von $\left(r(T), r^2(T), \int_t^T r(s) ds, \int_t^T r^2(s) ds \right)$ endlich, falls die Bedingung

$$d_2 \geq 0$$

erfüllt ist. Dann gilt sogar

$$\varphi(t, T, r) = \exp \left(-A(t, T) - B(t, T)r - C(t, T)r^2 \right),$$

wobei die Funktionen A , B und C die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A_t(t, T) &= -a(t)B(t, T) - b^2C(t, T) + 0, 5b^2B(t, T), \\ B_t(t, T) &= 2b^2B(t, T)C(t, T) - 2a(t)C(t, T) - d_1, \\ C_t(t, T) &= 2b^2C^2(t, T) - d_2 \end{aligned}$$

mit den Endbedingungen $A(T, T) = 0$, $B(T, T) = c_1$ und $C(T, T) = c_2$ sind.

Beweis: Wir definieren

$$Y(t) := -A(t, T) - B(t, T)r(t) - C(t, T)r^2(t) - \int_0^t (d_1r(s) + d_2r^2(s)) ds,$$

wobei wir annehmen, daß $A(t, T)$, $B(t, T)$ und $C(t, T)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen in der Variablen t sind. Durch Anwenden der Itô-Formel auf e^Y erhält man

$$de^{Y(t)} = e^{Y(t)}[\alpha_Y(t) dt - b(B(t, T) - 2C(t, T)r(t)) d\widehat{W}(t)]$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_Y(t) &= -A_t(t, T) - a(t)B(t, T) - b^2C(t, T) + 0, 5b^2B(t, T) \\ &\quad + [-B_t(t, T) + 2b^2B(t, T)C(t, T) - 2a(t)C(t, T) - d_1]r(t) \\ &\quad + [-C_t(t, T) + 2b^2C^2(t, T) - d_2]r^2(t). \end{aligned}$$

Wegen der Markov-Eigenschaft der Zinsrate r ist der Prozeß e^Y ein Martingal.³⁷ Also muß für die Drift $\alpha_Y \equiv 0$ gelten und wir erhalten die in der Behauptung aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen. \square

Wir wollen nun die Funktion f anhand der Laplace-Transformation ausrechnen. Da \tilde{r} auch aus Funktionen von r besteht, nämlich $M_1(t, r)$ und $M_2(t, r)$, ist dies jedoch nicht ohne weiteres möglich. Daher machen wir an dieser Stelle

³⁷Siehe dazu auch Kraft (2004a), S. 54f.

eine *Approximation* und führen für die Erwartungswerte $M_1(r)$ und $M_2(r)$ eine Taylor-Entwicklung 1. Ordnung um den Zins an der Stelle r_0 durch.³⁸ Mit dem Satz von der impliziten Funktion gilt³⁹

$$\pi^{*'}(r) = -\frac{1}{(1-\gamma)[\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2]]},$$

so daß wir für die Ableitungen der Erwartungswerte

$$M_1'(r) = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbb{E} \left[\frac{(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2]} \right]$$

und

$$M_2'(r) = \mathbb{E} \left[\frac{(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-2}\delta^2]} \right]$$

erhalten. Mit den Definitionen $\bar{M}_1 := M_1(r_0)$, $\bar{M}_2 := M_2(r_0)$, $\bar{M}_1' := M_1'(r_0)$ und $\bar{M}_2' := M_2'(r_0)$ gilt nun approximativ⁴⁰

$$M_1(r) = \bar{M}_1 + \bar{M}_1'(r - r_0)$$

und

$$M_2(r) = \bar{M}_2 + \bar{M}_2'(r - r_0).$$

Wir können jetzt alle Terme aus (4.26) nach Potenzen von r separieren, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{r} = & r^2 \left[-\frac{\gamma(1-\gamma + \rho^2\gamma)}{2(1-\gamma)^2\sigma^2} (1 - \lambda^2 \bar{M}_2'^2) \right] \\ & + r \left[-\frac{1-\gamma + \rho^2\gamma}{1-\gamma} (\gamma + \lambda \bar{M}_1' \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma}{(1-\gamma)\sigma^2} (-(\mu - \bar{\delta}\lambda) - \lambda^2 \bar{M}_2'(\bar{M}_2 - \bar{M}_2'r_0))) \right] \\ & - \frac{1-\gamma + \rho^2\gamma}{1-\gamma} \left[\lambda(\bar{M}_1 - \bar{M}_1'r_0) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)\sigma^2} ((\mu - \bar{\delta}\lambda)^2 - \lambda^2(\bar{M}_2 - \bar{M}_2'r_0)^2) \right]. \end{aligned}$$

³⁸Wir vernachlässigen an dieser Stelle die Abhängigkeit von der Zeit.

³⁹Für die genaue Anwendung vgl. den Beweis von Satz 4.17.

⁴⁰Da r_0 jetzt ein fester Wert ist, sind auch die Erwartungswerte konstant, vgl. dazu auch den vorherigen Abschnitt 4.3.1, wo dies der Fall ist.

Sei h in dieser Darstellung der Koeffizient zu r^0 , d.h. h ist der letzte Summand und unabhängig von r . Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.22 ist

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 0, \\ d_1 &= \frac{1 - \gamma + \rho^2 \gamma}{1 - \gamma} \left(\gamma + \lambda \bar{M}'_1 + \frac{\gamma}{(1 - \gamma)\sigma^2} (-(\mu - \bar{\delta}\lambda) - \lambda^2 \bar{M}'_2 (\bar{M}_2 - \bar{M}'_2 r_0)) \right), \\ d_2 &= \frac{\gamma(1 - \gamma + \rho^2 \gamma)}{2(1 - \gamma)^2 \sigma^2} (1 - \lambda^2 \bar{M}'_2{}^2). \end{aligned}$$

Um die Laplace-Transformation anzuwenden, muß d_2 positiv sein. Diese Bedingung müssen wir später noch nachprüfen. Wir erhalten nun

$$f(t, r) = \exp(h) \exp \left(-A(t, T) - B(t, T)r - C(t, T)r^2 \right).$$

Die Funktionen A , B und C kann man aus

$$\begin{aligned} A_t(t, T) &= -\tilde{\alpha}(t)B(t, T) - b^2 C(t, T) + 0, 5b^2 B(t, T), & (4.29) \\ B_t(t, T) &= 2b^2 B(t, T)C(t, T) - 2\tilde{\alpha}(t)C(t, T) - d_1, \\ C_t(t, T) &= 2b^2 C^2(t, T) - d_2 \end{aligned}$$

mit den Endbedingungen $A(T, T) = 0$, $B(T, T) = 0$ und $C(T, T) = 0$ berechnen. Zu beachten ist, daß wir a durch $\tilde{\alpha}(t)$ ersetzt haben, denn der Erwartungswert wird unter \tilde{P} und nicht unter P berechnet, unter dem r die Drift $\tilde{\alpha}$ besitzt.⁴¹ Die Ableitung von f nach der Zinsrate ist

$$f_r(t, r) = \exp(h) \exp \left(-A(t, T) - B(t, T)r - C(t, T)r^2 \right) 2B(t, T)C(t, T),$$

so daß

$$\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} = 2B(t, T)C(t, T)$$

gilt. Im nächsten Satz geben wir die Darstellung der beiden benötigten Funktionen B und C an. Die Funktion A benötigen wir nicht zum Ausrechnen des optimalen Portfolios, man erhält sie aber durch Integration von (4.29).

⁴¹ Vgl. (4.28).

Satz 4.23

Die Funktion C hat folgende Gestalt:

$$C(t, T) = -\frac{\sqrt{d_2} e^{-2b\sqrt{2d_2}(T-t)} - 1}{\sqrt{2b} e^{-2b\sqrt{2d_2}(T-t)} + 1}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} K(t, T) &= -2\tilde{\alpha}(t)C(t, T) - d_1, \\ L(t, T) &= \exp\left(-\int_t^T 2b^2 C(s, T) ds\right) \end{aligned}$$

gilt

$$B(t, T) = -L(t, T) \int_t^T \frac{K(s, T)}{L(s, T)} ds.$$

Beweis: Wir lösen zuerst die Riccati-Differentialgleichung

$$C_t(t, T) = 2b^2 C^2(t, T) - d_2$$

mit der Endbedingung $C(T, T) = 0$, wobei $d_2 > 0$ und $b > 0$ gilt.⁴² Mit dem Ansatz

$$C(t, T) = -\frac{1}{2b^2} \frac{\Phi_t(t, T)}{\Phi(t, T)} \quad (4.30)$$

folgt

$$\Phi_{tt}(t, T) - 2b^2 d_2 \Phi(t, T) = 0.$$

Die Nullstellen des dazugehörigen Polynoms sind $\pm\sqrt{2b^2 d_2}$, so daß wir für die Funktion Φ den Ansatz

$$\Phi(t, T) = w_1 e^{\sqrt{2b^2 d_2} t} + w_2 e^{-\sqrt{2b^2 d_2} t}$$

⁴²Da es in unserem Fall keinen Koeffizienten zu $C(t, T)$ gibt, erhalten wir eine Lösung ohne weitere Bedingungen an die Parameter im Gegensatz zu Kraft (2004a), S. 55ff. Siehe dort für eine Lösungsmethode für allgemeinere Riccati-Differentialgleichungen.

wählen. Aus der Endbedingung folgt

$$w_2 = w_1 e^{2\sqrt{2b^2 d_2} t}.$$

Die letzten beiden Gleichungen eingesetzt in Ansatz (4.30) liefern die Darstellung für C . Die Darstellung von Funktion B folgt aus dem Satz über die Variation der Konstanten für gewöhnliche Differentialgleichungen.⁴³ Man beachte dabei die Endbedingung $B(T, T) = 0$. \square

Angenommen, wir hätten bis hierher keine Approximation, sondern die tatsächliche Funktion f hergeleitet. Dann wäre die damit berechnete Wertfunktion G eine $C^{1,2}$ -Lösung der HJB-Gleichung und würde die polynomiale Wachstumsbedingung erfüllen. Wie im Fall der konstanten Zinsrate müßte wieder beachtet werden, daß π^* eine zulässige Portfoliostrategie ist und der Erwartungswert aus der HJB-Gleichung endlich ist. So aber haben wir nur einen Kandidaten für das optimale Portfolio.

Satz 4.24 (Kandidat für die optimale Portfoliostrategie)

Existiert im Falle einer stochastischen Zinsrate eine (endliche) Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \pi^* = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - \bar{\delta}\lambda - r}{\sigma^2} + \frac{2b\rho}{(1-\gamma(1-\rho^2))\sigma} B(t, T)C(t, T) \\ & + \frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma^2} \mathbb{E}^{t,x,r}[(1 + \pi^*\delta)^{\gamma-1}\delta], \end{aligned}$$

wobei B und C in Satz 4.23 gegeben sind, die zusätzlich die drei Bedingungen

- (i) $\pi^*\delta > -1$,
- (ii) $\mathbb{E}^{t,x,r}[(1 + \pi^*\delta)^\gamma] < \infty$ und
- (iii) $1 - \lambda^2 \bar{M}'_2 > 0$

erfüllt, so ist diese Lösung ein Kandidat für den optimalen Portfolioprozeß.

⁴³Siehe z.B. Walter (2000).

Zusätzlich zum Fall der konstanten Zinsrate ist hier bei der impliziten Darstellung noch der zweite Summand hinzugekommen. Dieser entspricht einem Hedgeterm gegen das Zinsrisiko. Die letzte Bedingung benötigen wir, um die Laplace-Transformation anwenden zu können.

4.4 Internationale Märkte bei Sprung-Diffusions-Prozessen

Erinnern wir uns an den internationalen Markt aus Kapitel 3. In diesem Abschnitt werden wir eine Modifikation dieses Marktes betrachten und das (implizite) optimale Portfolio ausrechnen. Im Unterschied zum dort aufgestellten Modell soll der Wechselkurs F jetzt nicht mehr einer geometrisch Brownschen Bewegung folgen, sondern ein reiner Sprungprozeß sein. Dies bedeutet, daß er so lange auf einem Niveau verharrt, bis der dazugehörige Poisson-Prozeß einen Sprung macht. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt werden wir dieses Problem nur für konstante und nicht mehr für stochastische Zinsraten r und r_f betrachten.

Wir betrachten wieder den vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) aus Abschnitt 1.1.1. Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum sei ein eindimensionaler Poisson-Prozeß N mit konstanter Intensität λ gegeben, so daß der Wechselkurs folgender Differentialgleichung genüge:

$$dF(t) = F(t-)\delta dN(t), \quad F(0) = f_0.$$

Mit f_0 bezeichnen wir dabei der Wechselkurs zum Startzeitpunkt 0. Die Sprunghöhe δ sei eine Zufallsvariable, die nur Werte größer als -1 annehme und nach oben beschränkt sei. Diese Annahme benötigen wir, damit der Wechselkurs nicht negativ wird bzw. nicht explodiert. Die Zufallsvariable δ besitze zu jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung und ihren Erwartungswert bezeichnen wir mit $\bar{\delta}$.

Es stehen wieder die folgenden vier Wertpapiere als Anlagemöglichkeit zur Verfügung: Je eine Aktie und ein Geldmarktkonto im In- sowie im Ausland. Sei $W = (W_S, W_{S,f})$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung, wobei W_S und $W_{S,f}$ mit dem konstanten Wert $\rho \in (-1, 1)$ korreliert sind.⁴⁴ Wie in Kapitel 3 bezeichnen wir die inländische Aktie mit S und modellieren den Aktienkurs durch eine geometrisch Brownsche Bewegung mit konstanter Drift μ_S und konstanter Volatilität σ_S .⁴⁵ Das inländische Geldmarktkonto B verzinst sich mit konstanter Zinsrate r . Es gilt also:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)[\mu_S dt + \sigma_S dW_S(t)], & S(0) &= s_0, \\ dB(t) &= B(t)r dt, & B(0) &= 1. \end{aligned} \quad (4.31)$$

s_0 sei der Aktienkurs zum Zeitpunkt 0. Auch die ausländische Aktie sei durch eine geometrisch Brownsche Bewegung mit konstanten Koeffizienten gegeben und die ausländische Zinsrate r_f sei ebenfalls konstant. Die Variablen der beiden ausländischen Wertpapiere werden wieder mit dem Zusatz f gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} dS_f(t) &= S_f(t)[\mu_{S,f} dt + \sigma_{S,f} dW_{S,f}(t)], & S_f(0) &= s_{0,f}, \\ dB_f(t) &= B_f(t)r_f dt, & B_f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Mit $s_{0,f}$ wird der Aktienkurs der ausländischen Aktie zum Startzeitpunkt bezeichnet. Wir rechnen nun die Preise der beiden ausländischen Wertpapiere in die Heimatwährung um. Multiplikation der beiden Preise mit dem Wechselkurs F liefert uns

$$\begin{aligned} dS_f^*(t) &= S_f^*(t-)[\mu_{S,f} dt + \sigma_{S,f} dW_{S,f}(t) + \delta dN(t)], & S_f^*(0) &= s_{0,f} \cdot f_0, \\ dB_f^*(t) &= B_f^*(t-)[r_f dt + \delta dN(t)], & B_f^*(0) &= f_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sei $\varphi = (\varphi_B, \varphi_S, \varphi_{S,f}, \varphi_{B,f})'$ die absolute Anzahl der vier Wertpapiere, in die der Investor sein gesamtes Kapital angelegt hat. Dann setzt sich sein

⁴⁴Nach Konstruktion sind W und N unabhängig.

⁴⁵Wie im letzten Abschnitt ist es auch hier möglich, das Problem mit deterministischen Funktionen zu lösen.

Vermögen X folgendermaßen zusammen:

$$X = \varphi_B \cdot B + \varphi_S \cdot S + \varphi_{S,f} \cdot S_f^* + \varphi_{B,f} \cdot B_f^*.$$

Unsere Portfoliostrategie sei durch $\pi = (\pi_S, \pi_{S,f}, \pi_{B,f})'$ definiert:

$$\pi_S = \frac{\varphi_S \cdot S}{X}, \quad \pi_{S,f} = \frac{\varphi_{S,f} \cdot S_f^*}{X}, \quad \pi_{B,f} = \frac{\varphi_{B,f} \cdot B_f^*}{X}, \quad (4.33)$$

wobei das inländische Geldmarktkonto die Residualgröße $1 - \pi_S - \pi_{S,f} - \pi_{B,f}$ ist. Wie immer werden wir nur selbstfinanzierende Portfoliostrategien betrachten, die die Differentialgleichung

$$dX = \varphi_B dB + \varphi_S dS + \varphi_{S,f} dS_f^* + \varphi_{B,f} dB_f^*$$

erfüllen. Die Vermögensgleichung für dieses Problem erhalten wir nun durch Einsetzen der Wertpapierpreise (4.31) und (4.32) sowie durch (4.33) in diese Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} dX(t) = X(t-) & \left[\left(r + \pi_S(t)(\mu_S - r) + \pi_{S,f}(t)(\mu_{S,f} - r) + \pi_{B,f}(t)(r_f - r) \right) dt \right. \\ & + \pi_S(t)\sigma_S dW_S(t) + \pi_{S,f}(t)\sigma_{S,f} dW_{S,f}(t) \\ & \left. + \left(\pi_{S,f}(t-) + \pi_{B,f}(t-) \right) \delta dN(t) \right], \quad X(0) = x_0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Hierbei entspricht x_0 dem Anfangsvermögen des Investors. Damit das Vermögen in diesem Modell nicht negativ wird, definieren wir zuerst, welche Portfoliostrategien überhaupt zulässig sind.

Definition 4.25 (Zulässige Portfoliostrategie)

Eine **zulässige** Portfoliostrategie π muß zu jedem Zeitpunkt t folgende Bedingung erfüllen:

$$(\pi_{S,f}(t-) + \pi_{B,f}(t-))\delta > -1.$$

Π sei die Menge aller zulässigen Portfoliostrategien.

Die Bedingung sichert die Positivität des Vermögensprozesses. Wegen ihrer Definition über (4.33) sind alle $\pi \in \Pi$ somit auch zulässige Steuerungen nach Definition 4.3.⁴⁶

⁴⁶Vgl. Satz 1.3 zur Beschränktheit der Momente.

Wie in den vorangegangenen Portfolio-Problemen werden wir das Endvermögen wieder bzgl. der Potenz-Nutzenfunktion U mit

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x > 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

maximieren. Der Investmenthorizont sei durch T gegeben, damit lautet das zu lösende Portfolio-Problem

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right),$$

wobei das Endvermögen $X(T)$ diesmal durch die Vermögensgleichung (4.34) gegeben ist. Der Kandidat G für Wertfunktion hat die Gestalt

$$G(t, x) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}^{t,x} \left(\frac{1}{\gamma} X^\gamma(T) \right)$$

mit der Randbedingung $G(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$. Damit wir den Verifikationsatz 4.6 anwenden können, muß G die HJB-Gleichung erfüllen:

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi G(t, x) = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} A^\pi G &= G_t + G_x x \left(r + \pi_S (\mu_S - r) + \pi_{S,f} (\mu_{S,f} - r) + \pi_{B,f} (r_f - r) \right) \\ &\quad + 0,5 G_{xx} x^2 \left(\pi_S^2 \sigma_S^2 + \pi_{S,f}^2 \sigma_{S,f}^2 + 2 \pi_S \pi_{S,f} \sigma_S \sigma_{S,f} \rho \right) \\ &\quad + \mathbb{E}[\lambda(G - G^-)] \end{aligned}$$

mit $(G - G^-)(t, x) = G(t, x(1 + (\pi_{S,f}(t-) + \pi_{B,f}(t-))\delta)) - G(t, x)$. Wir verwenden den gleichen Ansatz für die Wertfunktion wie in Abschnitt 4.3.1, also in dem Fall, daß es eine Sprung-Diffusions-Aktie gibt und die Zinsrate konstant ist. Es gelte

$$G(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma f^{1-\gamma}(t).$$

Die stetig differenzierbare Funktion f hängt nur von der Zeit ab und muß die Endbedingung $f(T) = 1$ erfüllen. Die partiellen Ableitungen von G sind

wieder

$$\begin{aligned} G_t(t, x) &= \frac{1-\gamma}{\gamma} x^\gamma f^{-\gamma}(t) f'(t), \\ G_x(t, x) &= x^{\gamma-1} f^{1-\gamma}(t), \\ G_{xx}(t, x) &= (\gamma-1) x^{\gamma-2} f^{1-\gamma}(t). \end{aligned}$$

Diesen Ansatz setzen wir nun in die HJB-Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} & \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma} x^\gamma f^{-\gamma} f' \right. \\ & + x^\gamma f^{1-\gamma} \left(r + \pi_S(\mu_S - r) + \pi_{S,f}(\mu_{S,f} - r) + \pi_{B,f}(r_f - r) \right) \\ & + 0,5(\gamma-1) x^\gamma f^{1-\gamma} \left(\pi_S^2 \sigma_S^2 + \pi_{S,f}^2 \sigma_{S,f}^2 + 2\pi_S \pi_{S,f} \sigma_S \sigma_{S,f} \rho \right) \\ & \left. + \lambda \mathbf{E}^{t,x} \left[\frac{1}{\gamma} x^\gamma (1 + (\pi_{S,f} + \pi_{B,f})\delta)^\gamma f^{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma} x^\gamma f^{1-\gamma} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Durch Divisionen durch x^γ und durch $f^{-\gamma}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\pi \in \Pi} & \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma} f' + \left[r + \pi_S(\mu_S - r) + \pi_{S,f}(\mu_{S,f} - r) + \pi_{B,f}(r_f - r) \right] \right. \\ & + 0,5(\gamma-1) \left(\pi_S^2 \sigma_S^2 + \pi_{S,f}^2 \sigma_{S,f}^2 + 2\pi_S \pi_{S,f} \sigma_S \sigma_{S,f} \rho \right) \\ & \left. + \frac{1}{\gamma} \lambda \mathbf{E}^{t,x} \left[(1 + (\pi_{S,f} + \pi_{B,f})\delta)^\gamma - 1 \right] f \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Wir treffen jetzt die Annahme, daß die optimalen Portfolioanteile existieren und zeigen später, wann diese erfüllt ist.

Annahme 4.26

Es existieren die konstanten optimalen Portfolio-Anteile π_S^* , $\pi_{S,f}^*$ und $\pi_{B,f}^*$, die die folgenden Bedingungen (first-order condition) erfüllen:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_S - r + (\gamma-1)\pi_S^* \sigma_S^2 + (\gamma-1)\pi_{S,f}^* \sigma_S \sigma_{S,f} \rho, \\ 0 &= \mu_{S,f} - r + (\gamma-1)\pi_{S,f}^* \sigma_{S,f}^2 + (\gamma-1)\pi_S^* \sigma_S \sigma_{S,f} \rho \\ & \quad + \lambda \mathbf{E}^{t,x} \left[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1} \delta \right], \\ 0 &= r_f - r + \lambda \mathbf{E}^{t,x} \left[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1} \delta \right]. \end{aligned}$$

Durch Umformen dieser Gleichungen erhalten wir

$$\pi_S^* = \frac{\mu_S - r}{(1 - \gamma)\sigma_S^2} - \pi_{S,f}^* \frac{\sigma_{S,f}}{\sigma_S} \rho, \quad (4.36)$$

$$\pi_{S,f}^* = \frac{\mu_{S,f} - r + \lambda \mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1} \delta]}{(1 - \gamma)\sigma_{S,f}^2} - \pi_S^* \frac{\sigma_S}{\sigma_{S,f}} \rho, \quad (4.37)$$

$$r - r_f = \lambda \mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1} \delta]. \quad (4.38)$$

Da nach Annahme 4.26 optimale Anteile existieren, sind die Erwartungswerte endlich und wir können (4.38) in (4.37) einsetzen. Es folgt

$$\pi_{S,f}^* = \frac{\mu_{S,f} - r_f}{(1 - \gamma)\sigma_{S,f}^2} - \pi_S^* \frac{\sigma_S}{\sigma_{S,f}} \rho. \quad (4.39)$$

Dies können wir wiederum in (4.36) einsetzen und erhalten so den optimalen Anteil der inländischen Aktie:

$$\pi_S^* = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{\mu_S - r}{(1 - \gamma)\sigma_S^2} - \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\mu_{S,f} - r_f}{(1 - \gamma)\sigma_S \sigma_{S,f}}.$$

Mit (4.39) bekommen wir eine völlig symmetrische Gleichung für den optimalen Anteil der ausländischen Aktie:

$$\pi_{S,f}^* = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{\mu_{S,f} - r_f}{(1 - \gamma)\sigma_{S,f}^2} - \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\mu_S - r}{(1 - \gamma)\sigma_S \sigma_{S,f}}.$$

Der optimale Anteil im ausländischen Geldmarktkonto muß dagegen numerisch mit Formel (4.38) ausgerechnet werden. Nach Modellannahme sind sowohl die Marktparameter als auch der Präferenzparameter γ konstant, deswegen gilt dies auch für die optimalen Anteile. Es gilt die folgende Behauptung.

Satz 4.27

Können die Kandidaten π_S^ , $\pi_{S,f}^*$ und $\pi_{B,f}^*$ für die optimale Lösung, die die first-order condition erfüllen, eindeutig bestimmt werden, so lösen sie das lokale Optimierungsproblem in der HJB-Gleichung.*

Beweis: Wir weisen die hinreichende Bedingung für die Behauptung nach, indem wir die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen berechnen. Diese wird

negativ definit sein. Der Erwartungswert $E^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-2}\delta^2]$ wird dabei mit E abgekürzt. Zu beachten ist, daß dieser für zulässige Portfoliostrategien positiv ist, d.h. es gilt $E > 0$. Die Hesse-Matrix H ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_2 & h_6 \\ h_5 & h_6 & h_3 \end{pmatrix}$$

mit den partiellen Ableitungen der Formeln für die first-order condition aus Annahme 4.26:⁴⁷

$$\begin{aligned} h_1 &= (\gamma - 1)\sigma_S^2, \\ h_2 &= (\gamma - 1)\lambda E, \\ h_3 &= (\gamma - 1)(\sigma_{S,f}^2 + \lambda E), \\ h_4 &= 0, \\ h_5 &= (\gamma - 1)\sigma_S\sigma_{S,f}\rho, \\ h_6 &= (\gamma - 1)\lambda E. \end{aligned}$$

Damit rechnen wir jetzt die Unterdeterminanten von H aus. Nach Modellannahme liegt der Parameter γ für die Risikopräferenz im Intervall $(0, 1)$ so daß $\gamma - 1 < 0$ gilt. Daher erhalten wir $\det(h_1) < 0$. Für die zweite Unterdeterminante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} h_1 & h_4 \\ h_4 & h_2 \end{pmatrix} = (\gamma - 1)^2 \sigma_S^2 \lambda E > 0.$$

Für die Determinante von H ergibt sich

$$\det H = (\gamma - 1)^3 \lambda E \sigma_S^2 \sigma_{S,f}^2 (1 - \rho^2) < 0.$$

Somit ist die Hesse-Matrix H negativ definit und wir haben die Behauptung bewiesen. \square

⁴⁷Man beachte hierbei, daß wir die Reihenfolge der beiden letzten Formeln vertauscht haben.

Bemerkung 4.28

Die Annahme an die Existenz der optimalen Anteile impliziert, daß die beiden Erwartungswerte in (4.35) und in (4.37) bzw. in (4.38) für alle Startwerte t und x endlich sind, d.h. es gilt:

$$\mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^\gamma] < \infty$$

und

$$\mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1}\delta] < \infty.$$

Wir setzen jetzt die optimale Portfoliostrategie in (4.35) ein und lösen die entstandene Differentialgleichung. Dafür definieren wir vorher die Funktion B durch

$$\begin{aligned} B(t) := & r + \pi_S^*(\mu_S - r) + \pi_{S,f}^*(\mu_{S,f} - r) + \pi_{B,f}^*(r_f - r) \\ & + 0,5(\gamma - 1) \left(\pi_S^{*2} \sigma_S^2 + \pi_{S,f}^{*2} \sigma_{S,f}^2 + 2\pi_S^* \pi_{S,f}^* \sigma_S \sigma_{S,f} \rho \right) \\ & + \frac{1}{\gamma} \lambda \mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^\gamma - 1]. \end{aligned}$$

Damit können wir Gleichung (4.35) umschreiben zu

$$0 = f' + \frac{\gamma}{1 - \gamma} Bf.$$

Weil die Endbedingung $f(T) = 1$ erfüllt sein muß, folgt

$$f(t) = \exp \left\{ -\frac{\gamma}{1 - \gamma} \int_t^T B(s) ds \right\}.$$

Des weiteren definieren wir die Funktion C , so daß

$$f(t) = \exp \left\{ -\frac{\gamma}{1 - \gamma} C(t) \right\}$$

gilt. Die Wertfunktion G kann man nun schreiben als

$$G(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp \{-\gamma C(t)\}.$$

G ist die $C^{1,2}$ -Lösung der HJB-Gleichung, falls f wohldefiniert und stetig differenzierbar ist. Zusätzlich erfüllt G dann auch die polynomiale Wachstumsbedingung. Gleichung (4.38) ist nicht immer lösbar. Dies hängt von den Marktparametern, insbesondere von den Zinsraten r und r_f , und der Verteilung von δ ab. Bevor wir weiter auf Lösbarkeitsbedingungen eingehen, fassen wir das Ergebnis dieses Abschnitts in einem Satz zusammen.⁴⁸

Satz 4.29 (Optimale Portfoliostrategie)

Existiert für $\pi_{B,f}^*$ eine (endliche) Lösung der Gleichung

$$r - r_f = \lambda \mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1} \delta]$$

mit

$$\pi_{S,f}^* = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{\mu_{S,f} - r_f}{(1 - \gamma)\sigma_{S,f}^2} - \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\mu_S - r}{\sigma_S \sigma_{S,f}}$$

und sind zusätzlich die beiden Bedingungen

- (i) $(\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta > -1$ und
- (ii) $\mathbb{E}^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^\gamma] < \infty$

erfüllt, dann gilt: Wenn ein Investor sowohl im Inland als auch im Ausland in jeweils eine Aktie und ein Geldmarktkonto investieren kann, wobei der Wechselkurs durch einen reinen Sprungprozeß modelliert wird, dann ist die optimale Portfoliostrategie durch $\pi_{B,f}^*$, $\pi_{S,f}^*$ und

$$\pi_S^* = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{\mu_S - r}{(1 - \gamma)\sigma_S^2} - \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\mu_{S,f} - r_f}{\sigma_S \sigma_{S,f}}$$

gegeben. Das restliche Vermögen wird in das inländische Geldmarktkonto investiert.

⁴⁸Vgl. dazu auch Satz 3.3.

Die optimalen Anteile in den beiden Aktien sind völlig symmetrisch und bestehen beide aus zwei Termen, aus dem myopischen Teil, der mit der Korrelation angepaßt wurde, und aus einem Hedgeterm, der die Überrendite der jeweils anderen Aktie enthält. Je größer die Korrelation absolut gesehen ist, desto größer wird der myopische Teil. Sind die beiden Aktien negativ korreliert, so erhöht sich der jeweilige Hedgeterm den optimalen Anteil, andernfalls wird er kleiner. Für $\rho = 0$ entsprechen beide Anteile dem Merton-Anteil. Diese beiden Effekte konnten wir auch schon in Kapitel 3 beobachten, als wir solche Portfolioanteile analysiert haben. In diesem Abschnitt sind in dem Portfolio-Problem die beiden Aktien unabhängig vom Wechselkurs. Setzen wir in Kapitel 3 $\rho_2 = \rho_3 = 0$, so erhalten wir genau die gleichen optimalen Anteile in beiden Modellen. Besonders bemerkenswert ist also die Tatsache, daß das Sprungrisiko nur auf das ausländische Geldmarktkonto Auswirkungen hat, sie beeinflusst nicht die Anlageentscheidung in den Aktien. Je nachdem, wie Sprunghöhe, -intensität und die beiden Zinsraten zueinander stehen, wird mehr oder weniger dort hinein investiert. Im Gegensatz zu dem anderen Modell gibt es hier aber die Einschränkung (i) an die beiden ausländischen Anteile. Sind keine Sprünge möglich, d.h. ist $\lambda = 0$ oder gilt $\delta \equiv 0$, wäre der Wechselkurs konstant und das Modell nicht wohldefiniert.

Im folgenden Satz geben wir eine Bedingung an, unter der der optimale Anteil im ausländischen Geldmarktkonto aus (4.38) berechnet werden kann.

Satz 4.30

Seien $\lambda \neq 0$ und $\bar{\delta} \neq 0$. Erfüllen die Zinsraten, die Sprungintensität und die erwartete Sprunghöhe die Bedingung

$$r - r_f < \lambda \bar{\delta},$$

dann ist die Gleichung für das ausländische Geldmarktkonto eindeutig lösbar.

Beweis: Definiere die Hilfsfunktion g durch

$$g(x) := r - r_f - \lambda E^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + x)\delta)^{\gamma-1}\delta].$$

Gleichung (4.38) ist genau dann lösbar, falls g eine Nullstelle besitzt. Die Ableitung von g ist gegeben durch

$$g'(x) = -(\gamma - 1)\lambda E^{t,x}[(1 + (\pi_{S,f}^* + x)\delta)^{\gamma-2}\delta^2].$$

und (für zulässige Portfoliostrategien) strikt positiv. Es gilt

$$g(-\pi_{S,f}^*) = r - r_f - \lambda\bar{\delta}.$$

Da der Wert $-\pi_{S,f}^*$ für $\pi_{B,f}^*$ eine zulässige Portfoliostrategie ist,⁴⁹ hat die Funktion g genau dann eine Nullstelle, wenn $r - r_f < \lambda\bar{\delta}$ gilt. \square

Wir können also den Anteil im ausländischen Geldmarktkonto ausrechnen, falls die Zinsdifferenz kleiner ist als der erwartete Zuwachs des Wechselkurses (in einer Zeiteinheit). Dies ist aber nur eine hinreichende Bedingung, die nicht immer erfüllt sein muß. Ist beispielsweise δ konstant, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$r - r_f = \lambda(1 + (\pi_{S,f}^* + \pi_{B,f}^*)\delta)^{\gamma-1}\delta,$$

was äquivalent ist mit folgender Gleichung für $\pi_{B,f}^*$:

$$\pi_{B,f}^* = \frac{\left(\frac{r-r_f}{\lambda\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1}{\delta} - \pi_{S,f}^*.$$

Zu beachten ist hierbei, daß der Exponent betragsmäßig größer als 1 ist. Damit kann der optimale Anteil im ausländischen Geldmarktkonto berechnet werden, auch wenn die Bedingung nicht erfüllt ist.

⁴⁹Unabhängig von der Verteilung von δ ist die Bedingung $0 > -1$ erfüllt.

Kapitel 5

Modellierung und Bewertung von Optionen auf Bondindizes

5.1 Einleitung

Dieses Kapitel behandelt die Modellierung von Bondindizes und die Bewertung von darauf basierenden Derivaten. Es entstand im Jahr 2003 infolge eines Projektes am Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, Kaiserslautern, in Zusammenarbeit mit einem großen deutschen Kreditinstitut.¹

Im Jahr 2002 hat die Deutsche Börse die Bondindexfamilie eb.rexx eingeführt. Sie wollte mit dieser Maßnahme weitere Indizes einführen, die als Basiswerte für Derivate und strukturierte Produkte verwendet werden können und sich als Benchmark für aktive Fondsmanager eignen. Grundlegende Neuerung gegenüber bis dahin existierenden Rentenindizes, wie z.B. dem REX, war die Tatsache, daß zu ihrer Berechnung Preise von real existierenden Anleihen ver-

¹ Dieses Projekt war ein Gemeinschaftswerk mit Holger Kraft.

wendet wurden. Vorher gab es nur Indizes, die aus synthetischen Anleihen und Pfandbriefen berechnet wurden. So können zwar bestimmte charakteristische Elemente wie Restlaufzeit und Kuponhöhe konstant gehalten werden, allerdings werden für die Berechnung des Indexstandes keine tatsächlichen Marktpreise verwendet.

Mit der eb.rexx-Indexfamilie soll der Markt für in Euro notierte, festverzinsliche Anleihen abgebildet werden, die von Emittenden mit erstklassiger Bonität begeben wurden und hochliquide sind. Dazu gehören neben Anleihen der Bundesrepublik Deutschland und anderen europäischen Staaten auch Anleihen von Banken wie der KfW Bankengruppe (ehemals Kreditanstalt für Wiederaufbau) oder der Europäischen Investitionsbank. In Abbildung 5.1 sind die bisher berechneten Indizes weiß hinterlegt. Die Deutsche Börse plant die sukzessive Erweiterung der eb.rexx-Indexfamilie auf weitere Segmente, wie z.B. Indizes von Staatsanleihen aus dem europäischen Ausland.

eb.rexx®-Indexfamilie Gesamt- und Laufzeitindizes		
eb.rexx® Overall Gesamt- und Laufzeitindizes		
eb.rexx® Government Gesamt- und Laufzeitindizes	eb.rexx® Non-Government Gesamt- und Laufzeitindizes	
eb.rexx® Government Germany Auswahl-, Gesamt- und Laufzeitindizes	eb.rexx® Collateralized Gesamt- und Laufzeitindizes	eb.rexx® Sub-Sovereigns Gesamt- und Laufzeitindizes
	eb.rexx® Jumbo Pfandbriefe Auswahl-, Gesamt- und Laufzeitindizes	
eb.rexx® Money Market		
eb.rexx® Other Government jeweils Gesamtindizes	eb.rexx® Other Collateralized jeweils Gesamtindizes	

Die weiß hinterlegten Felder zeigen die aktuell berechneten eb.rexx®-Indizes.

Abbildung 5.1: Darstellung der eb.rexx-Indexfamilie

Quelle: Homepage der Deutschen Börse

Stand: März 2007

Zum Zeitpunkt der Bearbeitung des Projektes gab es nur den eb.rexx Government Germany. Deswegen beziehen sich die meisten unserer Annahmen

im weiteren Verlauf dieses Kapitels auf diesen Index. Zu seiner Berechnung werden die liquidesten Staatsanleihen der Bundesrepublik Deutschland herangezogen. Es gibt vier Klassen, in denen die Anleihen nach ihrer Restlaufzeit eingeteilt sind, und zusätzlich den Gesamtindex, der Bonds verschiedener Unterlaufzeitklassen enthält. Auf Basis dieser Klassen werden jeweils Preis- und Performanceindizes berechnet, so daß es insgesamt zehn Indizes gibt. Die Bonds werden dabei nach ihrem ausstehenden Volumen gewichtet, allerdings gibt es eine Höchstgrenze von 30%, die bei einer Indexanpassung greift. Jeder Index enthält mindestens sechs verschiedene Bonds. Neben dieser Untergrenze hat der Gesamtindex zusätzlich noch die Obergrenze von 25 Anleihen.

Allgemein müssen für den eb.rexx in Frage kommende Anleihen folgende Bedingungen erfüllen:

- Es werden nur Kupon-Bonds berücksichtigt, keine Zero-Bonds.
- Die Restlaufzeit der Anleihe muß mindestens 1,5 und darf höchstens 10,5 Jahre betragen.²
- Das ausstehende Volumen der Anleihe muß mindestens 4 Milliarden EUR hoch sein.³
- Das Rating der Anleihe muß mindestens Investment Grade betragen.

Die letzte Bedingung ist nur für Unternehmensanleihen gültig. Durch den Austausch bzw. die Herausnahme von Bonds aus den Indizes wird garantiert, daß diese Bedingungen jederzeit eingehalten werden. Eine Neuanpassung der

² Diese Bedingung gilt nicht für den eb.rexx Money Market Index. Dieser soll den Geldmarktbereich abdecken und enthält Anleihen mit einer Restlaufzeit von einem Monat bis einem Jahr.

³ Bei nichtstaatlichen Emissionen, wie z.B. Pfandbriefen von Hypothekenbanken, beträgt das Mindestvolumen 2 Milliarden EUR.

Indizes wird monatlich geprüft. Zur Berechnung der eb.rexx-Indizes werden Preisquotierungen der Handelsplattform Eurex Bonds verwendet.

Wegen der gestiegenen Bedeutung des eb.rexx emittieren immer mehr Banken Optionen auf ihn. Damit steigt auch die Notwendigkeit, Bondindizes und darauf basierende Derivate zu modellieren und bewerten zu können. In diesem Kapitel stellen wir zwei Möglichkeiten vor, Optionen auf Bondindizes zu bewerten. In Abschnitt 5.2 werden nach einer Einführung über die Berechnungsweise von Bondindizes die Unterschiede zwischen einem Portfolio aus Bonds und einem Bondindex erläutert. Außerdem präsentieren wir eine flexible Strategie, mit der man angefallene Kuponzahlungen zu einem späteren Zeitpunkt berücksichtigen kann.

In Abschnitt 5.3 werden die verschiedenen Bewertungsmethoden vorgestellt. Zuerst leiten wir eine allgemeine Bewertungsformel für Optionen auf Kupon-Anleihen her. Auch wenn man einen Rentenindex als Summe von Bonds auffassen kann, können wir diese Formel nicht verwenden. Denn die Verteilung von Kupon-Bonds ist nicht bekannt. Unser erster Bewertungsansatz setzt voraus, daß wir ein eindimensionales Zinsstrukturmodell verwenden, in dem es geschlossene Lösungen für Optionen auf Zero-Bonds gibt. Diese Annahmen sind nötig, damit wir das Verfahren von Jamshidian zur Bewertung von Optionen auf eine Kupon-Anleihe verwenden können. Wir zeigen, wie ein Bondindex als Portfolio von Kupon-Bonds modelliert werden kann und wenden dann dieses Verfahren darauf an. Bei der Bewertung von Optionen auf Performanceindizes benötigen wir auch die vorher dargestellte Strategie über den Umgang mit den angefallenen Kupons. Dieser Ansatz wird in einem Algorithmus zusammengefaßt und anhand eines Beispiels verdeutlicht. Bei der zweiten Methode wird ein künstliches Wertpapier eingeführt, das den Bondindex simulieren soll. Dieses Wertpapier muß zuerst an Marktpreise kalibriert werden, danach können nicht nur einfache Call- und Put-, sondern sogar exotische Optionen auf Bondindizes bewertet werden. Außerdem stellen wir eine Methode vor, wie das künstliche Wertpapier kalibriert werden

kann, auch wenn es keine oder nur wenige Optionspreise am Markt gibt. Dies ist zur Zeit leider immer noch der Fall. Hierbei verwenden wir, wie im weiteren Verlauf des gesamten Kapitels, den eb.rexx Government Germany als Vorbild für einen Rentenindex. Der letzte Abschnitt faßt die Ergebnisse zusammen.

5.2 Bondindizes

Sei $P(t, T)$ der Preis eines Zero-Bonds zur Zeit t mit Fälligkeit T , wobei $0 \leq t \leq T$ gilt. Den Preis eines Kupon-Bonds bezeichnen wir mit $P^c(t, T)$. Dabei wird mit c die Höhe des Kupons angegeben. Wir stellen zunächst die Unterschiede zwischen einem Preis- und einem Performanceindex dar.

5.2.1 Preisindizes vs. Performanceindizes

Wir gehen davon aus, daß unser Bondindex ein Korbindex aus realen Anleihen ist (wie der eb.rexx). Deswegen kann der Index einfach über die Preise der einzelnen Bonds definiert werden. Wir betrachten einen Index, der anfangs n Kupon-Bonds enthält. Der Preisindex I^{Preis} zum Zeitpunkt t wird nun folgendermaßen berechnet:

$$I^{\text{Preis}}(t) = I^{\text{Preis}}(t-s) \frac{\sum_{i=1}^n \phi_i(t-s) P_i^{c_i}(t, T_i)}{\sum_{i=1}^n \phi_i(t-s) P_i^{c_i}(t-s, T_i)}.$$

Dabei entspricht s der Zeit seit der letzten Anpassung und $\phi_i(t)$ gibt die Anzahl der emittierten Bonds von Bond Nr. i (bzw. die Höhe des ausstehenden Volumens des Bonds i) zur Zeit t an. ϕ sind also die Gewichtungsfaktoren der Bonds. Bei einem Preisindex werden nur die Preisänderungen der Bonds seit dem letzten Anpassungstermin für den neuen Indexstand berücksichtigt. Wie bei einem Aktienindex die Dividenden nicht berücksichtigt werden, fallen hier

die angefallenen Kuponzahlungen heraus. Der folgende Satz liefert uns eine geschlossene Darstellung für den Indexstand seit der ersten Berechnung.

Satz 5.1 (Preisindex als Bondportfolio)

Wenn man annimmt, daß die Gewichte im Zeitablauf konstant sind, d.h. es gilt $\phi(t) = \phi(0)$ für alle t , dann erhalten wir

$$I^{\text{Preis}}(t) = \psi(0) \sum_{i=1}^n \phi_i(0) P_i^{c_i}(t, T_i)$$

mit

$$\psi(0) = \frac{I^{\text{Preis}}(0)}{\sum_{i=1}^n \phi_i(0) P_i^{c_i}(0, T_i)}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Definition des Preisindex. □

In diesem Fall kann man den Bondindex mit einem Portfolio aus Bonds exakt nachbilden. Man kauft sich die im Index enthaltenen Bonds zu den oben angegebenen Teilen und hält diese. Im weiteren Verlauf werden wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Gewichte skaliert sind, d.h. wir verwenden statt den Gewichten ϕ die neuen Gewichte $\psi \cdot \phi$.

Im Unterschied zu Preisindizes, deren Wertänderungen sich nur aus Änderungen der Bondpreise ergeben, werden bei den Performanceindizes auch angefallene Kuponzahlungen und Stückzinsen berücksichtigt. Für einen Performanceindex I gilt:

$$I(t) = I(t-s) \frac{\sum_{i=1}^n \phi_i(t-s) (P_i^{c_i}(t, T_i) + A_i(t) + c_i(t))}{\sum_{i=1}^n \phi_i(t-s) (P_i^{c_i}(t-s, T_i) + A_i(t-s))}.$$

Hierbei entspricht $A_i(t)$ den aufgelaufenen Stückzinsen und $c_i(t)$ dem Wert einer Kuponzahlung in der Periode s des Bonds i zur Zeit t . Gezahlte Kupons werden also behandelt, als ob sie in den jeweiligen Bond reinvestiert werden und erhöhen so den Indexstand. Unter sonst gleichen Bedingungen sind Performanceindizes deswegen immer höher als Preisindizes.

Anders als bei Preisindizes kann man bei Performanceindizes nicht einfach einer selbstfinanzierenden Buy-and-hold-Strategie folgen. Will man einen Performanceindex durch ein Bondportfolio nachbilden, so geht man wie folgt vor: Zu Beginn wird der Index genau nachgebildet, indem man $\phi_i(0)$ Anteile des i -ten Bonds kauft. Bei einer Indexanpassung zum Zeitpunkt t werden jeweils die $\phi_i(t-s)$ Anteile verkauft, wobei s die Zeit seit der letzten Anpassung ist. Mit dem vorhandenen Geld können dann $\phi_i(t)$ Anteile wieder dazugekauft werden.⁴ Bei einer monatlichen Überprüfung des Indexes muß also häufig gehandelt werden, so daß wegen der anfallenden Transaktionskosten ein nicht zu vernachlässigender Tracking Error entstehen kann.

5.2.2 Bondindizes vs. Bondportfolios

In der Praxis können Bondindizes nicht einfach durch Bondportfolios nachgebildet werden. Die Gewichte in einem Bondindex sind in der Regel im Zeitablauf nicht konstant, so daß die in Satz 5.1 gemachte Annahme unrealistisch ist. Dies folgt schon aus der Tatsache, daß Anleihen im Gegensatz zu Aktien eine endliche Laufzeit haben und spätestens bei ihrer Fälligkeit aus dem Index herausgenommen werden müssen. Ein anderer Grund für die Herausnahme eines Bonds ist gegeben, wenn dieser die Mindestanforderungen an das ausstehende Volumen oder an die Liquidität nicht mehr erfüllt. Da der Zeitpunkt einer Herausnahme nicht deterministisch ist, sind auch die Gewichte in einem Index stochastisch. Einen weiteren Unterschied bedingen die Kuponzahlungen. Der Zeitpunkt und die Höhe einer Zahlung (sowie die Höhe der Stückzinsen bei einer Indexanpassung) stehen zwar von vornherein fest, nicht aber die Zinsrate, mit der diese Zahlung wieder reinvestiert werden kann. Deswegen ist auch der Wert eines Kupons zu einem späteren Zeitpunkt zufällig. Der dritte wichtige Unterschied ist die Tracking-Strategie des Port-

⁴ Es reicht natürlich, nur einmal zu handeln und $\phi_i(t) - \phi_i(t-s)$ Anteile zu kaufen (bzw. zu verkaufen, falls dieser Wert negativ ist).

foliomanagers. Selbst wenn es sich um einen Fonds aus Bonds handelt und regelmäßig Reporte über die Zusammensetzung des Portfolios veröffentlicht werden, kennen wir weder die genauen Gewichte noch die Wiederanlagestrategien des Managers.

Aus den oben genannten Gründen kann ein Bondindex nicht exakt durch ein Bondportfolio nachgebildet werden. Im nächsten Abschnitt werden wir trotzdem eine realistische und plausible Strategie für die Wiederanlage der angefallenen Kupons angeben, so daß wir später mit der Methode von Jamshidian eine geschlossene Formel für den Optionspreis herleiten können.

5.2.3 Kuponzahlungen

Um den Wert einer europäischen Option auf einen Performanceindex zu ermitteln, stellen wir ein Portfolio aus Bonds zusammen, das den Index möglichst gut nachahmen soll. Der Wert dieses Bondportfolios wird dann als Approximation für den Bondindex verwendet. Dazu müssen wir nun festlegen, wie Kuponzahlungen berücksichtigt werden, die bis zur Optionsfälligkeit anfallen.

Wir benötigen also den Wert eines gezahlten Kupons zur Optionsfälligkeit. Dazu stellen wir eine einfach zu handhabende und flexible Wiederanlagestrategie vor. Hierbei wird von vornherein ein anfallender Betrag entlang der zur Zeit 0 bestehenden Terminzinskurve auf einen späteren Zeitpunkt diskontiert. Sei T_c der Zeitpunkt, an dem ein Kupon der Höhe c gezahlt wird und T die Optionsfälligkeit mit $T_c < T$. Die Strategie ist nun folgende: Verkaufe c Zero-Bonds mit Fälligkeit T_c im Zeitpunkt 0. Die Forderung aus diesen Bonds kann in T_c mit dem erhaltenen Kupon beglichen werden, so daß zu diesem Zeitpunkt keine weiteren Zahlungen erfolgen müssen. Der Preis dieser Bonds zur Zeit 0 beträgt $cP(0, T_c)$. Damit werden $cP(0, T_c)/P(0, T_W)$ Bonds mit Fälligkeit T_W gekauft, wobei $T_W \geq T$ beliebig gewählt werden kann. Zur

Optionsfälligkeit hat unsere Kuponzahlung nun den Wert $\frac{cP(0,T_c)}{P(0,T_W)}P(T, T_W)$. Die nachfolgende Tabelle 5.1 verdeutlicht unsere Anlagestrategie.

Strategie	$t = 0$	$t = T_c$	$t = T$
Kuponzahlung		c	
Verkaufe c Bonds $P(\cdot, T_c)$	$cP(0, T_c)$	$-c$	
Kaufe $\frac{cP(0,T_c)}{P(0,T_W)}$ Bonds $P(\cdot, T_W)$	$-cP(0, T_c)$		$\frac{cP(0,T_c)}{P(0,T_W)}P(T, T_W)$
Summe	0	0	$\frac{cP(0,T_c)}{P(0,T_W)}P(T, T_W)$

Tabelle 5.1: Wiederanlagestrategie der Kupons

Zur Veranschaulichung nehmen wir der Einfachheit halber an, daß bis zur Optionsfälligkeit nur diese eine Kuponzahlung anfällt. Das Auszahlungsprofil einer europäischen Call-Option mit Strike K auf das Bondportfolio mit der Darstellung

$$I(T) = \sum_{i=1}^n \phi_i(T) P_i^{c_i}(T, T_i)$$

ist unter Berücksichtigung der diskontierten Kuponzahlung:

$$\max \left\{ I(T) + \frac{cP(0, T_c)}{P(0, T_W)} P(T, T_W) - K; 0 \right\}.$$

Mit den Definitionen $\phi_{n+1}(T) = \frac{cP(0,T_c)}{P(0,T_W)}$ und $T_{n+1} = T_W$ kann man dies umschreiben als

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(T) P_i^{c_i}(T, T_i) - K; 0 \right\},$$

so daß wir wieder eine Darstellung als Bondportfolio haben. Dadurch, daß der Zeitpunkt T_W beliebig gewählt werden kann, ist auch die Duration der Wiederanlage beliebig wählbar. Für $T_W = T$ erhalten wir

$$\max \left\{ I(T) - \left(K - \frac{cP(0, T_c)}{P(0, T)} \right); 0 \right\}.$$

In diesem Fall entspricht eine Kuponzahlung einer Korrektur des Strikes, die folgendermaßen interpretiert werden kann: Bei Wiederanlage von Kupons in einem Performanceindex erhöhen diese den Indexwert, was eine Ausübung der Option wahrscheinlicher macht. Dies geschieht hier durch Verkleinerung des Strikes.

5.3 Bewertung von Optionen

5.3.1 Eine allgemeine Optionspreisformel für Kupon-Bonds

Die Auszahlung einer Call-Option $C(T)$ mit Fälligkeit T und Strike K auf eine Kupon-Anleihe mit n verbleibenden Zahlungen ist:

$$C(T) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i) - K; 0 \right\}.$$

Hierbei wird der Kupon-Bond als Summe von Zero-Bonds dargestellt. Seien c die Höhe des Kupons und T_i die Zeitpunkte der Kuponzahlungen. Es gilt $c_i = c$, $i = 1, \dots, n-1$ und $c_n = 1 + c$. Wir bezeichnen mit D das Ereignis, daß die Call-Option im Geld endet, d.h.

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i) > K \right\}.$$

Sei r die konforme Kassazinsrate. Dann ist durch $B(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$ der Wert des Geldmarktkontos zur Zeit t gegeben. Für den Wert der Call-Option

zur Zeit 0 gilt nun

$$\begin{aligned}
 C(0) &= \mathbb{E}_Q \left(\frac{C(T)}{B(T)} \right) \\
 &= \mathbb{E}_Q \left(\frac{(\sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i) - K) 1_D}{B(T)} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}_Q \left(\frac{P(T, T_i) 1_D}{B(T)} \right) - K \mathbb{E}_Q \left(\frac{1_D}{B(T)} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i P(0, T_i) Q^{T_i}(D) - K P(0, T_C) Q^T(D), \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

wobei Q das risikoneutrale Maß, Q^{T_i} das T_i -Forwardmaß und Q^T das T -Forwardmaß bezeichnen. Diese Formel gilt analog für die Bewertung von Optionen auf ein Portfolio von Kupon-Bonds. Dafür müssen nur n , die c_i und die T_i angepaßt werden. In den bekannten Modellen für die Short Rate können die oben benötigten Wahrscheinlichkeiten nicht berechnet werden, so daß es keine geschlossenen Lösung für Optionspreise gibt.⁵ Allerdings könnten wir sie ausrechnen, wenn wir die Verteilung des Bondportfolios kennen würden.

5.3.2 Das Verfahren von Jamshidian

Jamshidian (1989) zeigt, wie man im Modell von Vasicek (1977) eine europäische Call-Option auf einen Kupon-Bond bewerten kann. Dieser Ansatz funktioniert sogar in noch allgemeineren Modellen, allerdings muß dazu die Zinsstrukturkurve durch ein Ein-Faktor-Modell beschrieben werden und Preise von Zero-Bonds müssen streng monoton in diesem Faktor sein.⁶ Wir stellen nun diese Methode vor, wobei der Einfachheit halber die Short Rate diesen einen Faktor beschreiben soll. Da es nicht der Realität entspricht, wenn Bond-

⁵ Für weitere Informationen zu Zinsstrukturmodellen verweisen wir auf Brigo und Mercurio (2006).

⁶ Siehe auch Brigo und Mercurio (2006), S. 112f.

preise bei steigenden Zinsen auch steigen, machen wir folgende Annahme. Diese wird in allen affinen Zinsstrukturmodellen erfüllt sein.⁷

Annahme 5.2

Die Bondpreisfunktion ist streng monoton fallend in der Short Rate:⁸

$$\frac{\partial P(t, T, r)}{\partial r} < 0.$$

Damit erhalten wir folgenden Ansatz, mit dem man eine Option auf einen Kupon-Bond durch mehrere Optionen auf Zero-Bonds bewerten kann. Gibt es für Optionen auf Zero-Bonds geschlossene Formeln, so kann die Option auf Kupons-Bonds schnell berechnet werden.

Satz 5.3 (Jamshidian)

Das Auszahlungsprofil einer Call-Option auf einen Kupon-Bond mit Fälligkeit T und Strike K kann eindeutig zerlegt werden in das Auszahlungsprofil von Call-Optionen auf Zero-Bonds mit gleicher Fälligkeit:

$$\begin{aligned} C(T) &= \max \left\{ \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r(T)) - K; 0 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \max \{ P(T, T_i, r(T)) - K_i; 0 \}, \end{aligned}$$

wobei $K_i = P(T, T_i, r^*)$ gilt. r^* ist hierbei die Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r^*) = K. \quad (5.2)$$

Aus Annahme 5.2 folgt die Eindeutigkeit von r^* . Analog erhalten wir für eine Put-Option:

$$\begin{aligned} Put(T) &= \max \left\{ K - \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r(T)); 0 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \max \{ K_i - P(T, T_i, r(T)); 0 \}. \end{aligned}$$

⁷ Zu affinen Zinsstrukturmodellen siehe auch Cox, Ingersoll und Ross (1985) oder Duffie und Kan (1996).

⁸ Wir bezeichnen sowohl den Bondpreisprozeß als auch die Bondpreisfunktion mit P .

Beweis: Nach Annahme 5.2 ist die Call-Option auf den Kupon-Bond genau dann im Geld, wenn $r(T) < r^*$ gilt. Dies ist aber auch äquivalent zu $P(T, T_i, r(T)) > P(T, T_i, r^*) = K_i$, d.h. genau dann werden auch die Call-Optionen auf die Zero-Bonds ausgeübt. Gleichung (5.2) sichert bei Ausübung zu, daß die Auszahlung in beiden Fällen gleich hoch ist. Der Beweis für die Put-Option kann analog geführt werden. \square

Wenn wir annehmen, daß die Gewichte in einem Bondindex im Zeitablauf konstant sind, dann können wir wegen Satz 5.1 mit diesem Ansatz sofort Optionen auf den dazugehörigen Preisindex bewerten. Zur Bewertung von Optionen auf den Performanceindex müssen noch die Kuponzahlungen und Stückzinsen berücksichtigt werden. Der folgende Algorithmus zeigt uns die nötigen Schritte.

Algorithmus 5.4

- (i) Definiere ein Bondportfolio mit konstanten Gewichten, das den Index I nachbilden soll. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß man alle im Index befindlichen Bonds zu den dortigen Anteilen im Portfolio aufnimmt. Dabei müssen die Gewichte richtig skaliert werden.
- (ii) Transferiere mit der in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Methode alle noch ausstehenden Kuponzahlungen auf die Optionsfälligkeit.
- (iii) Verkleinere den Strike um den Betrag der bei Optionsfälligkeit angefallenen Stückzinsen.
- (iv) Wende den Ansatz von Jamshidian auf das resultierende Auszahlungsprofil

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{\tilde{n}} c_i P(T, T_i) - \tilde{K} \right\}$$

an. Hierbei ist wegen der Stückzinsen $\tilde{K} \leq K$ und wegen der Kupons $\tilde{n} \geq n$.

Das Auszahlungsprofil einer Put-Option kann analog modifiziert werden. Im 2. Schritt kann die Fälligkeit T_W der Wiederanlage der Kupons so gewählt werden, daß die Duration des Portfolios erhalten bleibt. Falls $T_W \geq T$ gewählt wird, so ergibt sich \tilde{n} aus n plus die Anzahl der ausstehenden Kuponzahlungen. Für $T_W = T$ gilt $\tilde{n} = n$, dafür muß aber der Strike zusätzlich modifiziert werden. Bei dieser Vorgehensweise ist zu beachten, daß die Modifikation des Auszahlungsprofils unabhängig vom gewählten Zinsstrukturmodell durchgeführt werden kann. Erst bei der Anwendung von Jamshidians Methode muß ein Ein-Faktor-Modell vorausgesetzt werden.

Beispiel 5.5 (Anwendung von Algorithmus 5.4)

Wir wollen eine Call-Option auf einen Performanceindex bewerten. Die Option hat eine Fälligkeit von einem halben Jahr und der Strike beträgt 107. Der heutige Indexstand $I(0)$ ist 105. Der Index besteht aus drei Kupon-Bonds mit den Fälligkeiten von 2,25, 3,25 und 4,25 Jahren, den ausstehenden Volumen⁹ von $\phi_1 = 159,726$ Mio., $\phi_2 = 172,332$ Mio. und $\phi_3 = 129,217$ Mio. und Kupons von 5%, 6% und 5,5%. Die Kupons werden jährlich gezahlt, so daß der nächste Zahlungstermin in 0,25 Jahren ansteht. Die benötigten Diskontfaktoren sind in Tabelle 5.2 angegeben.

Jahre	0,25	0,5	1,25	2,25	3,25	4,25
Diskontfaktor	0,9925	0,98	0,97	0,95	0,93	0,90

Tabelle 5.2: Diskontfaktoren für Beispiel 5.5

Die daraus resultieren Bondpreise lauten nun $P_1^{0,05}(0; 2, 25) = 1,095625$, $P_2^{0,06}(0; 3, 25) = 1,16055$ und $P_3^{0,055}(0; 4, 25) = 1,1608375$. Mit diesen Daten wenden wir den Algorithmus an:

- (i) Wir definieren uns ein Bondportfolio bestehend aus den obigen Bonds und gewichten sie nach ihrem ausstehenden Volumen. Der Reskaliere

⁹ Die Werte sind stark gerundet und so gewählt, daß wir später auf einfach handzuhabende reskalierte Gewichte kommen.

rungsfaktor¹⁰ ist also

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{105}{159,726 \cdot 1,095625 + 172,332 \cdot 1,16055 + 129,217 \cdot 1,1608375} \\ &= \frac{105}{175 + 200 + 150} \\ &= 0,2.\end{aligned}$$

Die modifizierten Gewichte sind nun $\phi_1 = 35$ Mio., $\phi_2 = 40$ Mio. und $\phi_3 = 30$ Mio.

- (ii) Alle drei zu berücksichtigende Kuponzahlungen fallen in 0,25 Jahren an. Die Reskalierte Zahlung beträgt

$$0,05 \cdot 35 + 0,06 \cdot 40 + 0,055 \cdot 30 = 5,8.$$

Als Wiederanlagezeitpunkt wählen wir die Optionsfälligkeit, d.h. $T_W = 0,5$. Wir müssen den Strike also um den Betrag von $5,8 \cdot 0,9925/0,98 = 5,87398$ verkleinern, so daß vorläufig $\tilde{K} = 101,12602$ gilt.

- (iii) Die Stückzinsen zur Optionsfälligkeit entsprechen $0,25 \cdot 5,8 = 1,45$. Der endgültig modifizierte Strike ist also $\tilde{K} = 99,67602$.
- (iv) Wegen der Kuponzahlungen zur Zeit $t = 1,25$ entspricht die Call-Option auf den Performanceindex einer Call-Option auf einen Kupon-Bond mit den vier Zahlungsterminen $T_1 = 1,25$, $T_2 = 2,25$, $T_3 = 3,25$ und $T_4 = 4,25$. Die Nennwerte dieser Zahlungen sind

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,05 \cdot 35 + 0,06 \cdot 40 + 0,055 \cdot 30 = 5,8; \\ c_2 &= 1,05 \cdot 35 + 0,06 \cdot 40 + 0,055 \cdot 30 = 40,8; \\ c_3 &= 1,06 \cdot 40 + 0,055 \cdot 30 = 44,05; \\ c_4 &= 1,055 \cdot 30 = 31,65.\end{aligned}$$

Diese Call-Option kann nun mit dem Ansatz von Jamshidian bewertet werden.

¹⁰Vgl. Satz 5.1.

Ein Nachteil bei der Anwendung von Jamshidian ist die Annahme, daß die Gewichte des Indexes über den Zeitablauf konstant sein müssen. Sobald wir eine Option mit einer längeren Laufzeit bewerten wollen, müssen wir aber davon ausgehen, daß Bonds aus dem Index herausfallen. Selbst wenn sie durch eine ähnlich ausgestattete Anleihe ersetzt werden, verschieben sich höchstwahrscheinlich die Gewichte. Im nächsten Abschnitt stellen wir deswegen ein Modell vor, das ohne diese sehr einschränkende Annahme auskommt und realitätsnäher ist. Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist, daß sich sehr kleine Volatilitäten für den Index ergeben, d.h. die Entwicklung des Indexes ist fast deterministisch.

5.3.3 Die „gestörte“ Zinsrate

Die uns von dem Kreditinstitut zur Verfügung gestellten historischen Daten für den `eb.rexx` deuteten darauf hin, daß dieser nahezu lognormalverteilt ist. Auch wenn diese Verteilung unter dem physischen Maß gilt, werden wir dies als Grundlage nehmen und ein Modell konstruieren, das auf dieser Tatsache basiert. Allerdings reicht auch eine Lognormalverteilung unter dem risikoneutralen Maß nicht aus, um die allgemeine Optionspreisformel (5.1) auszurechnen. Denn es bliebe die Frage offen, wie die Verteilung des Bondindexes unter dem T -Forwardmaß aussähe. Um dieses Problem zu umgehen, führen wir ein künstliches Wertpapier ein, das im weiteren Verlauf als Basiswert für die Optionen verwendet wird. Dieses Wertpapier soll die folgenden drei Eigenschaften besitzen:

- Das Wertpapier soll unter dem risikoneutralen Maß lognormalverteilt sein.
- Das Wertpapier soll eine konstante Volatilität besitzen.

- Die Drift des Wertpapiers soll die Form „ $r - y$ “ haben. Hierbei steht r für die Short Rate und y für Rendite (yield).

Die Idee hierbei ist die Einführung eines zusätzlichen Freiheitsgrades durch die Rendite y . Auch wenn ein Bondindex in keinem bekannten Zinsstrukturmodell lognormal verteilt ist, machen wir trotzdem diese Annahme und „stören“ damit unser Zinsmodell. Dabei ist zu beachten, daß wir uns über eine eventuell anfallende Dividendenrate d keine Gedanken machen müssen, denn diese ist bereits ein Teil der Störungsrate y . Wichtig ist auch die Tatsache, daß selbst bei einem Performanceindex $y \neq 0$ sein kann. Denn y stellt nicht die Dividendenrate dar, sondern ist nur eine zusätzlich Variable, um die Short Rate anzupassen. Trotzdem möchten wir hervorheben, daß ein künstliches Wertpapier mit einer Drift von $r - y$ (und nicht $r - d$) keine Arbitragemöglichkeiten in das Modell bringt, denn dieses Wertpapier kann nicht gehandelt werden. Es wurde nur eingeführt, um eine Verteilung des Indexes zu simulieren. Ohne diese Anpassung würde zwar die Verteilung des Bondindex korrekt approximiert werden, allerdings würde wir einen Fehler bei der Diskontierung machen.

Wir betrachten den Finanzmarkt aus Kapitel 1. Wir nehmen zuerst an, das die Störungsrate y konstant ist. Das künstliche Wertpapier S erfüllt also die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)[(r(t) - y) dt + \sigma dW(t)]$$

mit $S(0) = I(0)$ und wobei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist. Die Anfangsbedingung sichert uns zu, daß das Wertpapier in $t = 0$ den gleichen Wert wie der Bondindex annimmt. Mit den gemachten Annahmen können wir nun eine europäische Call-Option mit Strike K und Fälligkeit T auf dieses Wertpapier bewerten. Mit N bezeichnen wir die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Dann beträgt der Wert dieser Option:

$$C(0) = P(0, T) \left(F(T)N(d_1) - KN(d_2) \right), \quad (5.3)$$

wobei

$$F(T) = \frac{S(0) \exp(-yT)}{P(0, T)} \quad (5.4)$$

einem Forward auf unser Wertpapier entspricht und

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{F(T)}{K}\right) \pm 0,5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

ist. Wie wir in unserem Beispiel im nächsten Abschnitt sehen werden, reicht es nicht, wenn die Störungsrate y konstant ist. Wollen wir Optionen mit verschiedenen Restlaufzeiten bewerten, benötigen wir manchmal weitere Freiheitsgrade. Sei Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz v^2 , so daß e^Y die gleiche Verteilung wie S besitze. Es gilt also

$$v^2 = \text{Var} \left(\int_0^T r(s) ds + \sigma_S dW(T) \right). \quad (5.5)$$

Diese Varianz hängt also von der Zeit ab. Daran kann man sehen, daß zwei Freiheitsgrade unter Umständen nicht ausreichend sind, falls man Optionen mit unterschiedlichen Laufzeiten betrachtet. In diesem Falle schlagen wir für y folgenden deterministischen Verlauf vor:¹¹

$$dy(t) = k(a - y(t)) dt, \quad y(0) = y_0. \quad (5.6)$$

Mit k , a und y_0 haben wir nun zwei weitere Variablen. Wir müssen die Berechnung des Forwards aus (5.4) folgendermaßen modifizieren:

$$F(T) = \frac{S(0) \exp \left(- (y_0 - a)(1 - e^{-kT})/k - aT \right)}{P(0, T)},$$

damit die Optionspreisformel (5.3) weiterhin gültig ist.

Diese Bewertungsformeln kann man nun verwenden, um die Modellparameter y (bzw. k , a und y_0) und σ aus Marktpreisen zu kalibrieren. Das Standardverfahren hierfür ist das Least-Square-Verfahren. Dabei sucht man mit Hilfe

¹¹Die Störungsrate y kann sogar stochastisch in der Zeit gewählt werden. Dies würde einen weiteren Freiheitsgrad mehr bedeuten, allerdings auch einen größeren Aufwand bei der Kalibrierung. Unsere empirischen Untersuchungen haben gezeigt, daß dies nicht notwendig ist.

eines Optimierungsalgorithmus¹² diejenigen Werte für die beiden Parameter, bei denen die quadrierte Differenz zwischen den Markt- und den mit diesen Parametern berechneten Modellpreisen minimal ist. Diese Kalibrierungsmethode ist inzwischen sowohl in der Theorie als auch in der Praxis gängig, so daß wir auf die genaue Ausführung nicht näher eingehen wollen.¹³ Nach der Optimierung nimmt man an, daß die gefundenen Werte die „wahren“ Modellparameter sind. Möchte man dann eine weitere Option bewerten, die z.B. eine andere Restlaufzeit und einen anderen Strike besitzt, setzt man y und σ in die Optionspreisformel (5.3) ein und verwendet sie, um diesen Kontrakt zu bewerten. Wir können nun also Optionen auf Bondindizes unter Annahme der Existenz eines solchen Wertpapiers bewerten. Das einzige, was wir dazu benötigen, sind (viele) Marktpreise für schon gehandelte Optionen zur Kalibrierung. Nachdem wir die Parameter kalibriert haben, können wir diese auch dazu verwenden, exotischere Optionen zu bewerten, für die es schon Bewertungsalgorithmen für lognormalverteilte Underlyings gibt und die als Input nur die Volatilität und die Dividendenrendite benötigen.¹⁴ Wir möchten betonen, daß dieser Ansatz für alle Basiswerte funktioniert, die (annähernd) lognormalverteilt sind.

5.3.4 Eine alternative Kalibrierung

Leider gab es 2003 nur wenige Marktpreise bzw. öffentlich zugängliche Quoten von Optionen auf Bondindizes. Man benötigt aber eine gewisse Mindestanzahl von Preisen für eine brauchbare Kalibrierung. Deswegen zeigen wir in diesem Abschnitt, wie man sich in einem solchen Fall mit der Generierung von „eigenen“ Preisen behelfen kann. Eine Kalibrierung an Modellpreise und nicht an Marktpreise nennt man auch *marking to model*. Eine Möglichkeit ist, die mit dem Jamshidian-Verfahren berechneten Preise zu verwenden und das

¹²Siehe hierfür z.B. Press, Teukolsky, Vetterling und Flannery (2002).

¹³Siehe dazu z.B. Hull (2003) oder Brigo und Mercurio (2006).

¹⁴Siehe zu diesem Thema auch Zhang (1998).

Modell an ihnen zu kalibrieren. Jedoch haben wir an entsprechender Stelle schon auf die Nachteile der Jamshidian-Methode hingewiesen. Im folgenden geben wir eine Möglichkeit an, wie ein Rentenindex realitätsnah simuliert werden kann und berechnen dann mit einer Monte Carlo-Simulation Optionspreise auf diesen Index. An diese Optionspreise können wir dann die Bewertungsformel (5.3) kalibrieren und erhalten so die benötigten Parameter y und σ .

Wir möchten aber nochmals betonen, daß man das künstliche Wertpapier unbedingt an Marktpreise kalibrieren sollte, falls diese vorhanden sind. Denn damit liefert das Modell Preise, die wieder nahe an den Marktpreisen sind. Da in unserem Fall keine Preise zur Verfügung standen, haben wir eine alternative Methode verwendet, um an die benötigten Parameter zu kommen.

Zuerst müssen wir uns überlegen, welche Eigenschaften der zu simulierende Index haben soll und wie diese umgesetzt werden können. Da wir Optionen auf den eb.rexx bewerten wollen, soll unser Index die bereits in der Einleitung genannten Charakteristiken aufweisen. Wir verwenden also nur Kupon-Anleihen mit einer Restlaufzeit von mindestens 1,5 Jahren. Zudem wird jeden Monat überprüft, ob die Bonds noch diese Mindestrestlaufzeit haben. Bei einem Performanceindex müssen Kuponzahlungen und Stückzinsen berücksichtigt werden, bei einem Preisindex sind diese Größen zu vernachlässigen. Außerdem müssen wir ein Zinsstrukturmodell spezifizieren, in dem wir die zukünftigen Bondpreise berechnen. Hierbei ist es vorteilhaft, ein affines Modell für die Short Rate zu nehmen, da es in dieser Modellklasse geschlossene Formeln für Bondpreise gibt. Vor Beginn der Simulation geben wir uns ein Portfolio aus denjenigen Kupon-Bonds vor, aus denen auch der zu simulierende Index besteht. Auch die Gewichtungen werden zu Beginn gleich gewählt. Allerdings müssen wir uns Gedanken machen, wie wir die Punkte aus Abschnitt 5.2.2 berücksichtigen, da wir den Index durch ein Portfolio approximieren. Wir müssen also festlegen, wie wir das Ersetzen von Anleihen

simulieren und die Kuponzahlungen reinvestieren. Der folgende Algorithmus verdeutlicht die Simulation des gewünschten Bondindexes.

Algorithmus 5.6 (Simulation eines Bondindexes)

Zu Beginn werden die relativen Gewichte der einzelnen Anleihen berechnet. Bei unserer Simulation nehmen wir an, daß diese Gewichte an den Anpassungszeitpunkten immer gleich sein sollen. Wenn ein Bond ersetzt wird, bekommt der neue Bond dasselbe relative Gewicht, das der vorherige Bond ursprünglich hatte. Diese Annahme machen wir, da wir keine generellen Aussagen über die Ersetzungsstrategie machen können. Außerdem werden alle Kuponzahlungen in den Bond reinvestiert, aus dem sie stammen. Der absolute Anteil dieser Anleihe wird also stetig erhöht.¹⁵

Wie schon erwähnt, halten wir uns an den `eb.rexx` und schauen jeden Monat bis zum Simulationsende (also der Optionsfälligkeit) nach, ob der Index angepaßt werden muß und ob Kuponzahlungen zu berücksichtigen sind. Dazu werden jedes Mal die folgenden Schritte durchgeführt.

- Berechnung der neuen Bondpreise. In einem affinen Zinsmodell genügt es, dafür die Short Rate zu simulieren.
- Berechnung des neuen Portfoliowertes (bei Performanceindizes: Berücksichtigung aller angefallenen Kupons).
- Prüfung, ob ein Bond aus dem Index fällt (alle mit weniger als 1,5 Jahre Restlaufzeit).
- Eventuell: Ersetzen der Bonds durch neue Bonds mit einer (zufälligen) Restlaufzeit zwischen 3 und 10 Jahren. Der Kupon wird so gewählt, daß der Bondpreis seinem Nennwert entspricht. Die neuen Bonds werden mit den (relativen) Gewichten berücksichtigt, die die alten Anleihen in $t = 0$ hatten.

¹⁵Der relative Anteil muß sich nicht immer erhöhen, da alle Bonds Kuponzahlungen aufweisen.

Bei einem Austausch von Anleihen erhält die neue Anleihe eine Restlaufzeit von höchstens 10 Jahren, da für den Gesamtindex des eb.rexx Government Germany auch nur Anleihen mit höchstens dieser Restlaufzeit berücksichtigt werden. Da wir bei einem realen Austausch auch nicht vorhersehen können, welche Fälligkeit der neue Bond hat, haben wir uns bei der Simulation entschieden, daß diese zufällig sein soll und zwar gleichverteilt auf den Jahren 3 bis 10.

Nach den Simulationen wird die durchschnittliche Auszahlung diskontiert, um den Optionspreis zu erhalten. Dabei muß man beachten, daß man nur das Geldmarktkonto zur Diskontierung verwenden darf, wenn man die Short Rate unter dem risikoneutralen Maß simuliert hat. Wenn man dagegen das T -Forwardmaß verwendet hat, muß man zur Diskontierung den Bond mit der Fälligkeit T benutzen.

Wir geben jetzt noch zwei Gründe an, warum wir gerade diese Anpassungsstrategie verfolgen. Würde man alle Bonds nach einem gewissen Zeitraum durch Bonds mit der Ursprungsrestlaufzeit ersetzen, käme zu viel Unruhe in den Index. Die Charakteristik würde sich an einem Anpassungszeitpunkt grundlegend ändern. Als zweite Strategie hatten wir uns überlegt, Bonds nur zu ersetzen, wenn ihre Restlaufzeit kleiner als 1,5 Jahre ist. Und zwar durch eine Anleihe mit der Ursprungsrestlaufzeit. Allerdings bestünde hier das Problem, daß sich dann im Index Bonds mit kurzen Laufzeiten konzentrieren würden. Denn im Zeitablauf nimmt die durchschnittliche Restlaufzeit immer mehr ab: Kurzlaufende Anleihen werden regelmäßig ersetzt, langlaufende Anleihen haben dann aber eine kürzere Restlaufzeit. Deswegen halten wir unsere vorgestellte Strategie für optimal. Wenn ein kurzlaufender Bond ersetzt wird, kann es sein, daß dafür eine langlaufender Bonds hineingenommen wird. Möchte man andere Indizes simulieren, empfehlen wir, die Charakteristik dieses anderen Indexes nachzuahmen.

Wir haben dieses Verfahren angewendet und möchten nun beispielhafte Kalibrierungsergebnisse präsentieren. Als Index haben wir den eb.rexx Government Germany in der Zusammensetzung von Juli 2003 verwendet. Unsere Zinskurve stammt aus der gleichen Zeit. Das der Monte Carlo-Simulation zugrundeliegende Zinsstrukturmodell ist das Modell von Hull und White (1990), in dem die Zinsrate folgende Dynamik besitzt:

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t)) dt + b d\widehat{W}(t).$$

In unserem Beispiel seien $a = 0,07$ und die Volatilität $b = 0,01$.¹⁶ Die deterministische Funktion θ wird wie im Modell von Ho und Lee dazu verwendet, daß Modellbondpreise mit am Markt gehandelten Bondpreisen übereinstimmen und wird an dieser Stelle nicht weiter spezifiziert.^{17,18} Wir nehmen an, daß die Brownsche Bewegung \widehat{W} nicht mit der Brownschen Bewegung W des künstlichen Wertpapiers korreliert sei.

Der Indexstand wurde für die Berechnungen o.B.d.A. auf 100 normiert. Verwenden wir Optionen gleicher Laufzeit, so können wir in Tabelle 5.3 sehen, daß die an y kalibrierten Optionspreise sehr gut an die Monte Carlo-Optionspreise angepaßt werden können. Wir haben fünf einzelne Kalibrierungen für eine konstante Störungsrate durchgeführt.¹⁹

Kalibrieren wir an Optionen unterschiedlicher Laufzeit, so verschlechtern sich die Ergebnisse für die konstante Störungsrate. Die Abweichungen werden größer. Wählen wir y dagegen wie in (5.6), so sind die Abweichungen auch weiterhin sehr gering. In Tabelle 5.4 präsentieren wir diese Kalibrierung an zehn Optionen, fünf mit der Restlaufzeit drei Jahre und fünf mit der Rest-

¹⁶Bei der ersten Formulierung des Modells waren a und b deterministische Funktionen. Hull und White (1995) bemerken aber, daß für nichtkonstante a und b unrealistische zukünftige Volatilitätsstrukturen auftreten können.

¹⁷Vgl. auch das Modell von Ho und Lee aus Kapitel 4, das ein Spezialfall des Hull/White-Modells ist, wobei die Funktion θ der dortigen Drift a entspricht.

¹⁸Für weitere Informationen zu dem Modell siehe Brigo und Mercurio (2006), S. 71ff.

¹⁹Selbst wenn y als deterministische Funktion wählen, ändern sich die Preise nicht.

									Strike																	
80			85			90			95			100			105			110			115			120		
$T = 1$									$y = -0,0011$									$\sigma = 0,0333$								
21,919			17,039			12,159			7,286			2,826			0,458			0,014			0,000			0,000		
21,926			17,039			12,153			7,280			2,834			0,450			0,020			0,000			0,000		
$T = 3$									$y = 0,0007$									$\sigma = 0,0229$								
26,695			22,133			17,572			13,010			8,468			4,191			1,253			0,195			0,021		
26,707			22,139			17,572			13,004			8,454			4,193			1,258			0,185			0,012		
$T = 5$									$y = 0,0020$									$\sigma = 0,0167$								
32,055			27,878			23,701			19,524			15,347			11,170			7,031			3,237			0,899		
32,071			27,888			23,706			19,523			15,340			11,159			7,009			3,255			0,889		
$T = 7$									$y = 0,0050$									$\sigma = 0,0150$								
35,913			32,129			28,346			24,562			20,778			16,995			13,211			9,433			5,749		
35,932			32,143			28,355			24,566			20,778			16,989			13,200			9,417			5,730		
$T = 10$									$y = 0,0032$									$\sigma = 0,0265$								
45,131			41,904			38,677			35,450			32,223			28,996			25,769			22,542			19,318		
45,147			41,915			38,684			35,453			32,221			28,990			25,759			22,529			19,305		

Tabelle 5.3: Fünf Kalibrierungen an Optionen jeweils gleicher Laufzeit

In der ersten Zeile stehen jeweils die Monte Carlo-,
in der zweiten die kalibrierten Preise.

laufzeit fünf Jahre. Wie in Tabelle 5.3 stehen auch hier in der oberen der beiden Zeilen die Monte Carlo-Preise. Zur besseren Vergleichbarkeit werden diese bei beiden Kalibrierungen angezeigt.

Zum Schluß möchten wir noch ein Beispiel angeben, in dem die Kalibrierung mit einer konstanten Störungsrate sehr schlecht ist, siehe Tabelle 5.5. Für ein deterministisches y ist die Abweichung bei der Kalibrierung trotz der großen Spanne bei der Laufzeit und den Strikes weiterhin gering.

	Strike				
	80	85	90	95	100
$T = 3$	26,695	22,133	17,572	13,010	8,468
	26,387	21,820	17,258	12,741	8,457
$T = 5$	32,055	27,878	23,701	19,524	15,347
	32,192	28,009	23,829	19,660	15,548
$T = 3$	26,695	22,133	17,572	13,010	8,468
	26,703	22,136	17,568	13,002	8,470
$T = 5$	32,055	27,878	23,701	19,524	15,347
	32,066	27,883	23,700	19,518	15,338

Tabelle 5.4: Zwei Kalibrierungen an Optionen unterschiedlicher Laufzeit

Die obige Kalibrierung wurde mit konstantem y ($y = 0,0018$, $\sigma = 0,0397$)

durchgeführt, die untere mit deterministischen y ($y_0 = -0,0001$,

$k = -0,4821$, $a = -0,0008$, $\sigma = 0,0256$).

Mit diesem Verfahren können nun nicht nur einfache Call- und Put-Optionen, sondern sogar exotischere Optionen, wie z.B. Digital- oder Barriere-Optionen, bewertet werden. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, wie wir mit diesem Modell sogar Optionen mit mehreren Basiswerten bewerten können.

5.3.5 Korrelationen

Im letzten Abschnitt haben wir ein künstliches Wertpapier eingeführt, im folgenden S_1 , das wir als alternativen Basiswert bei der Optionsbewertung verwendet haben. Unter dem risikoneutralen Maß erfüllt S_1 die stochastische Differentialgleichung

$$dS_1(t) = S_1(t)[(r(t) - y) dt + \sigma_1 dW_1(t)].$$

	Strike			
	80	90	100	110
$T = 3$	26,695	17,572	8,468	1,253
	25,757	16,623	7,706	1,567
$T = 5$	32,055	23,701	15,347	7,031
	31,148	22,783	14,457	6,826
$T = 7$	35,913	28,346	20,778	13,211
	36,687	29,110	21,538	14,083
$T = 3$	26,695	17,572	8,468	1,253
	26,713	17,578	8,457	1,224
$T = 5$	32,055	23,701	15,347	7,031
	32,044	23,679	15,314	7,102
$T = 7$	35,913	28,346	20,778	13,211
	35,925	28,348	20,771	13,204

Tabelle 5.5: Zwei Kalibrierungen an Optionen unterschiedlicher Laufzeit II

Die obige Kalibrierung wurde mit konstantem y ($y = 0,0039$, $\sigma = 0,0334$)

durchgeführt, die untere mit deterministischen y ($y_0 = -0,0002$,

$$k = -0,4828, a = -0,0009, \sigma = 0,0223)$$

Dagegen ist die Dynamik unter dem physischen Maß durch

$$dS_1(t) = S_1(t)[\alpha_1 dt + \sigma_1 dW_1(t)]$$

gegeben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß α_1 konstant ist. Wir betrachten nun ein strukturiertes Produkt, dessen Auszahlung nicht nur vom dem Bondindex, sondern auch von einem anderen Wertpapier, z.B. einem Aktienindex abhängt. Sei

$$dS_2(t) = S_2(t)[\alpha_2 dt + \sigma_2 dW_2(t)]$$

die Dynamik des Aktienindex, wobei α_2 und σ_2 konstant sind. Mit $m + 1$ Beobachtungen für jeden Index bezeichnen wir die logarithmierten Returns mit $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m}$, und $r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2m}$. Schätzer der Parameter dieser Returns finden sich nun in Tabelle 5.6.

Parameter	Schätzer
Mittelwert α_i	$\hat{R}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_{ik}$
Varianz σ_i^2	$\hat{V}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (r_{ik} - \hat{R}_i)^2$
Kovarianz σ_{12}	$\hat{V}_{12} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (r_{1k} - \hat{R}_1)(r_{2k} - \hat{R}_2)$
Korrelation ρ	$\hat{\rho} = \frac{\hat{V}_{12}}{\sqrt{\hat{V}_1 \hat{V}_2}}$

Tabelle 5.6: Schätzer für die Parameter der Returns

Dieses Vorgehen liefert uns einen Schätzer für die Korrelation zwischen den beiden Brownschen Bewegungen W_1 und W_2 . Hierbei ist zu beachten, daß der Maßwechsel vom risikoneutralen auf das physische Maß keinen Einfluß auf die Korrelation hat. Dies folgt aus der Tatsache, daß Volatilitäten nicht von Maßwechseln betroffen sind und die Korrelation als ein Teil der Volatilität gesehen werden kann. Das wird offensichtlich, wenn man die obigen stochastischen Differentialgleichungen mit unabhängigen Brownschen Bewegungen \bar{W}_1 und \bar{W}_2 schreibt:

$$dS_1(t) = S_1(t)[\alpha_1 dt + \sigma_1 d\bar{W}_1(t)],$$

$$dS_2(t) = S_2(t)[\alpha_2 dt + \sigma_2(\rho d\bar{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_2(t))].$$

Mit der so geschätzten Korrelation und den Parameter y und σ aus Abschnitt 5.3.3 können wir sogar exotische Derivate auf mehrere Basiswerte bewerten, wenn es von ihnen Bewertungsverfahren gibt, die zusätzlich beispielsweise die Korrelation als Input-Parameter benötigen.

5.4 Zusammenfassung

An dieser Stelle möchten wir die wichtigsten Erkenntnisse noch einmal zusammenfassen. In diesem Kapitel haben wir einen Ansatz zur Bewertung von Optionen vorgestellt, deren Basiswert annähernd lognormalverteilt ist. In unserem Ansatz nehmen wir dann an, daß dieser Basiswert tatsächlich lognormalverteilt ist, eine konstante Volatilität hat und fügen seiner Drift einen Parameter y hinzu, so daß diese $r - y$ ist. Damit „stören“ wir die Zinsrate und haben mehrere Freiheitsgrade zur Verfügung, um das Wertpapier an Marktpreise zu kalibrieren.

Je nach Art des zu bewertenden Derivates, genügt es y als Konstante zu wählen oder der Störungsrate einen zeitabhängigen Verlauf (5.6) vorzugeben. Wollen wir Plain-Vanilla-Optionen bewerten, reicht ersteres (vgl. Tabelle 5.3).

Haben wir die Parameter kalibriert, kann mit Optionspreisformel (5.3) der Callpreis anhand einer geschlossenen Formel berechnet werden. Wir können aber auch andere Derivate mit bereits existierenden Bewertungsformeln oder -algorithmen bewerten, wenn für deren Basiswert eine Lognormalverteilung vorausgesetzt wird und eine (konstante) Volatilität und eine „Dividendenrendite“ y benötigt werden.

Des weiteren haben wir gezeigt, wie dieser Ansatz zur Bewertung von Optionen auf Bondindizes verwendet werden kann und wie die Modellparameter geschätzt werden können, auch wenn keine Marktpreise zur Verfügung stehen. Dazu haben wir den Bondindex (in unserem Fall der `eb.rexx`) simuliert und mit Hilfe einer Monte Carlo-Simulation künstliche Optionspreise generiert. In Algorithmus 5.6 haben wir beschrieben, wie er möglichst realitätsnah simuliert werden kann. Diese Preise können dann statt Marktpreisen für eine Kalibrierung verwendet werden.

Mit den sich ergebenden Parametern können auch Derivate in schon bestehenden Modellen bewertet werden, wenn sich die Derivate nicht nur auf ein, sondern auf mehrere Underlyings beziehen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

An dieser Stelle möchten wir die Arbeit noch einmal zusammenfassen. Im ersten Kapitel haben wir die grundlegenden mathematischen und finanzwirtschaftlichen Begriffe eingeführt, die wir für die Portfolio-Optimierung und die Optionsbewertung im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigten.

In Kapitel 2 haben wir das Portfolio-Problem von Morton und Pliska betrachtet, die in das Merton-Modell fixe Transaktionskosten eingeführt haben. Dabei muß der Investor bei jeder Transaktion einen fixen Anteil vom derzeitigen Vermögen als Kosten abführen. Wir haben die asymptotische Approximation dieses Modells von Atkinson und Wilmott vorgestellt und die optimale Portfoliostrategie aus den Marktparametern hergeleitet. Danach haben wir die tatsächlichen Transaktionskosten abgeschätzt und einen User Guide zur Anwendung dieses Transaktionskostenmodells angegeben. Zum Schluß haben wir das Modell numerisch analysiert, indem wir u.a. die erwartete Handelszeit und die Güte der Abschätzung der tatsächlichen Transaktionskosten berechnet haben. Des weiteren haben wir untersucht, wie sich die Einführung von Optionen auf das Modell auswirkt.

Ein Portfolio-Problem mit internationalen Märkten haben wir in Kapitel 3 vorgestellt. Dabei stand dem Investor zusätzlich zu seinem Heimatland noch ein weiteres Land für seine Vermögensanlagen zur Verfügung. Die Preisprozesse für die ausländischen Wertpapiere wurden mit einem stochastischen Wechselkurs in die Heimatwährung umgerechnet. In einer statischen Analyse wurde u.a. berechnet, wieviel weniger Vermögen der Investor benötigt, um das gleiche erwartete Endvermögen zu erhalten wie in dem Fall, wenn ihm keine Auslandsanlagen zur Verfügung stehen.

Kapitel 4 behandelt drei verschiedene Portfolio-Probleme mit Sprung-Diffusions-Prozessen. Nach einer Herleitung eines Verifikationssatzes für diesen Fall haben wir das Problem bei Anlagemöglichkeit in eine Aktie und in ein Geldmarktkonto jeweils für eine konstante und eine stochastische Zinsrate untersucht. Im ersten Fall konnten wir eine implizite Darstellung für den optimalen Portfolioprozeß angeben und haben eine Bedingung angegeben, unter der diese Darstellung eindeutig lösbar ist. Außerdem wurde der optimale Portfolioprozeß für verschiedene Verteilungen für die Sprunghöhe untersucht. Im Falle einer stochastischen Zinsrate konnten wir nur einen Kandidaten für den optimalen Lösungsprozeß angeben. Dieser hatte wieder eine implizite Darstellung. Das letzte Portfolio-Problem war eine Abwandlung des Modells aus Kapitel 3. Wurde dort der Wechselkurs durch eine geometrisch Brownsche Bewegung modelliert, war er hier ein reiner Sprungprozeß. Wir haben wieder den optimalen Portfolioprozeß hergeleitet, wobei ein Anteil davon unter Umständen nur numerisch lösbar ist. Eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit wurde angegeben.

In Kapitel 5 haben wir dargestellt, auf was bei der Bewertung von Optionen auf Bondindizes zu achten ist und verschiedene Bewertungsansätze vorgestellt. Für den Fall, daß der Basiswert annähernd lognormalverteilt ist, haben wir eine Methode angegeben, wie Optionen auf ihn anhand von Marktpreisen sehr gut bewertet werden können. Wir haben angenommen, daß dieser eine konstante Volatilität besitzt und der Drift einen Parameter hinzugefügt, mit

dem wir das Modell kalibrieren können. Diese Parameter können in die dort angegebene oder in für andere Derivate geltende Optionspreisformeln eingesetzt werden. Damit ist es auch möglich Derivate zu bewerten, denen mehrere Basiswerte zugrundeliegen. Für den Fall, daß es nicht genug Marktpreise für Optionen gibt, haben wir ein Verfahren angegeben, um den Bondindex realitätsnah zu simulieren und künstliche Marktpreise zu erzeugen. Diese Preise können dann für eine Kalibrierung verwendet werden.

Literaturverzeichnis

1. Aase, K. K. (1984): Optimum Portfolio Diversification in a General Continuous-Time Model, *Stochastic Processes and their Applications*, 18, S. 81-98.
2. Adler, M. und B. Dumas (1983): International Portfolio Choice and Corporation Finance: A Synthesis, *The Journal of Finance*, 38, S. 925-984.
3. Amin, K. I. und R. A. Jarrow (1991): Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates, *Journal of International Money and Finance*, 10, S. 310-329.
4. Atkinson, C. und P. Wilmott (1995): Portfolio Management with Transaction Costs: An Asymptotic Analysis of the Morton and Pliska Model, *Mathematical Finance*, 5, S. 357-367.
5. Bachelier, L. (1900): Théorie de la Speculation, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, S. 21-86.
6. Bäuerle, N. und U. Rieder (2007): Portfolio Optimization with Jumps and Unobservable Intensity Process, erscheint in *Mathematical Finance*.
7. Bingham, N. H. und R. Kiesel (1998): *Risk-Neutral Valuation*, Springer, Berlin.

8. Björk, T. (1997): Interest Rate Theory, in W. J. Runggaldier (Hrsg.): Financial Mathematics, Lecture Notes in Mathematics, 1656, Springer, Berlin, S. 53-122.
9. Björk, T. (2004): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford.
10. Black, F. und M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, S. 637-654.
11. Branger, N., C. Schlag und E. Schneider (2006): Optimal Portfolios when Volatility can Jump, *Arbeitspapier*, Universität Frankfurt am Main.
12. Brigo, D. und F. Mercurio (2006): *Interest Rate Models: Theory and Practice*, 2. Aufl., Springer, Berlin.
13. Cadenillas, A. (2000): Consumption-Investment Problems with Transaction Costs: Survey and Open Problems, *Mathematical Methods of Operations Research*, 51, S. 43-68.
14. Cox, J. C. und C. F. Huang (1989): Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices follow a Diffusion Process, *Journal of Economic Theory*, 49, S. 33-83.
15. Cox, J. C. und C. F. Huang (1991): A Variational Problem arising in Financial Economics, *Journal of Mathematical Economics*, 20, S. 465-487.
16. Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. und S. A. Ross (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, S. 385-407.
17. Cox, J. C., S. A. Ross und M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, S. 229-263.
18. Das, S. und R. Uppal (2004): Systemic Risk and International Portfolio Choice, *Journal of Finance*, 59, S. 2809-2834.

19. Davis, M. H. A. und A. R. Norman (1990): Portfolio Selection with Transaction Costs, *Mathematics of Operation Research*, 15, S. 676-713.
20. Delbaen, F. und W. Schachermayer (1994): A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, *Mathematische Annalen*, 300, S. 463-520.
21. Duffie, D. und R. Kan (1996): A Yield-Factor Model of Interest Rates, *Mathematical Finance*, 6, S. 379-406.
22. Dybvig, P. H. (1988): Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure, *Arbeitspapier*, Washington University.
23. Eastham, J. E. und K. J. Hastings (1988): Optimal Impulse Control of Portfolios, *Mathematics of Operation Research*, 13, S. 588-605.
24. Fleming, W. H. und H. M. Soner (1993): *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer, New York.
25. Geman, H., N. El Karoui und J. C. Rochet (1995): Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing, *Journal of Applied Probability*, 32, S. 443-458.
26. Gichman, I. I. und A. W. Skorochod (1971): *Stochastische Differentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin.
27. Harrison, J. M. und D. M. Kreps (1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory*, 20, S. 381-408.
28. Harrison, J. M. und S. R. Pliska (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and their Applications*, 11, S. 215-260.
29. Harrison, J. M. und S. R. Pliska (1983): A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets, *Stochastic Processes and their Applications*, 15, S. 313-316.

30. Heath, D., R. A. Jarrow und A. J. Morton (1992): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica*, 60, S. 77-105.
31. Heath, D. und M. Schweizer (2000): Martingales versus PDEs in Finance: An Equivalence Result with Examples, *Journal of Applied Probability*, 37, S. 947-957.
32. Heston, S. L. (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies*, 6, S. 327-343.
33. Ho, T. S. Y. und S. B. Lee (1986): Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, 41, S. 1011-1029.
34. Hull, J. C. (2003): *Options, Futures and Other Derivatives*, 5. Aufl., Pearson Education, Upper Saddle River.
35. Hull, J. C. und A. White (1990): Pricing Interest Rate Derivatives, *The Review of Financial Studies*, 3, S. 573-592.
36. Hull, J. C. und A. White (1995): A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response, *The Journal of Fixed Income*, 5, S. 97-102.
37. Jamshidian, F. (1988): The One-Factor Gaussian Interest Rate Model: Theory and Implementation, *Arbeitspapier*, Merrill Lynch Capital Markets.
38. Jamshidian, F. (1989): An Exact Bond Option Formula, *The Journal of Finance*, 44, S. 205-209.
39. Karatzas, I., J. P. Lehoczky und S. E. Shreve (1987): Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a Small Investor on a Finite Horizon, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27, S. 1157-1186.

40. Karatzas, I. und S. E. Shreve (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2. Aufl., Springer, New York.
41. Korn, R. (1997): *Optimal Portfolios*, World Scientific, Singapur.
42. Korn, R. (1998): Portfolio Optimization with Strictly Positive Transaction Costs, *Finance and Stochastics*, 2, S. 85-114.
43. Korn, R. (2004): Realism and Practicality of Transaction Cost Approaches in Continuous-Time Portfolio Optimisation: the Scope of the Morton-Pliska Approach, *Mathematical Methods of Operations Research*, 60, S. 165-174.
44. Korn, R. und E. Korn (2001): *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*, 2. Aufl., Vieweg, Wiesbaden.
45. Korn, R. und H. Kraft (2001): A Stochastic Control Approach to Portfolio Problems with stochastic Interest Rates, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40, S. 1250-1269.
46. Korn, R. und H. Kraft (2004): On the Stability of Continuous-Time Portfolio Problems with Stochastic Opportunity Set, *Mathematical Finance*, 14, S. 403-414.
47. Korn, R. und S. Laue (2002): Portfolio optimisation with Transaction Costs and Exponential Utility, in R. Buckdahn, H. J. Engelbert und M. Yor (Hrsg.): *Stochastic Processes and Related Topics*.
48. Korn, R. und S. Trautmann (1999): Optimal Control of Option Portfolios, *OR-Spektrum*, 21, S. 123-146.
49. Kraft, H. (2004a): *Optimal Portfolios with Stochastic Short Rates and Defaultable Assets*, Springer, Heidelberg.
50. Kraft, H. (2004b): Optimal Portfolios with Stochastic Short Rate: Pitfalls when the Short Rate is Non-Gaussian or the Market Price of Risk is Unbounded, *Arbeitspapier*, Universität Kaiserslautern.

51. Kraft, H. und M. Steffensen (2006): Portfolio Problems Stopping at First Hitting Time with Application to Default Risk, *Mathematical Methods of Operations Research*, 63, S. 123-150.
52. Krylov, N. V. (1980): *Controlled Diffusion Processes*, Springer, New York.
53. Lioui, A. und P. Poncet (2003): International Asset Allocation: A New Perspective, *Journal of Banking & Finance*, 27, S. 2203-2230.
54. Liu, J., F. A. Longstaff und J. Pan (2003): Dynamic Asset Allocation with Event Risk, *Journal of Finance*, 58, S. 231-259.
55. Liu, J. und J. Pan (2003): Dynamic Derivative Strategies, *Journal of Financial Economics*, 69, S. 401-430.
56. Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7, S. 77-91.
57. Merton, R. C. (1969): Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous Case, *Reviews of Economical Statistics*, 51, S. 247-257.
58. Merton, R. C. (1971): Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, 3, S. 373-413.
59. Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, S. 141-183.
60. Merton, R. C. (1990): *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Cambridge.
61. Morton, A. J. und S. R. Pliska (1995): Optimal Portfolio Management with Fixed Transaction Costs, *Mathematical Finance*, 5, S. 337-356.
62. Musiela, M. und M. Rutkowski (1998): *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2. Aufl., Springer, Berlin.

63. Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery (2002): *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, 2. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge.
64. Protter, P. (2001): A Partial Introduction to Financial Asset Pricing Theory, *Stochastic Processes and their Applications*, 91, S. 169-203.
65. Rogers, L. C. G. (2001): The Relaxed Investor and Parameter Uncertainty, *Finance and Stochastics*, 5, S. 131-154.
66. Samuelson, P. A. (1965): Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review*, 6, S. 13-31.
67. Sandmann, K. (2001): *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*, 2. Aufl., Springer, Berlin.
68. Sprenkle, C. M. (1961): Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences, *Yale Economic Essays*, 1, S. 172-231.
69. Stoll, H. R. (1969): The Relationship between Put and Call Option, *The Journal of Finance*, 14, S. 801-824.
70. Trautmann, S. (2006): *Investitionen: Bewertung, Auswahl und Risikomanagement*, Springer, Berlin.
71. Vasicek, O. A. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, S. 177-188.
72. Volz, T. (2002): *Modellierung von Finanzmärkten durch Sprung-Diffusions-Prozesse*, Logos Verlag, Berlin.
73. Walter, W. (2000): *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Aufl., Springer, Berlin.
74. Wilmott, P. (1998): *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester.

75. Wu, L. (2003): Jumps and Dynamic Asset Allocation, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 20, S. 207-243.
76. Zariphopoulou, T. (1999): Optimal Investment and Consumption Models with Non-Linear Stock Dynamics, *Mathematical Methods of Operations Research*, 50, S. 271-296.
77. Zariphopoulou, T. (2001): A Solution Approach to Valuation with Unhedgeable Risks, *Finance and Stochastics*, 5, S. 61-82.
78. Zhang, P. G. (1998): *Exotic Options*, 2. Aufl., World Scientific, Singapur.

Wissenschaftlicher Werdegang

1982 bis 1986	Grundschulen in Groß-Gerau, Hong Kong und Rüsselsheim
1986 bis 1988	Gesamtschule Martin-Buber-Schule in Groß-Gerau
1988 bis 1995	Gymnasium Prälat-Diehl-Schule in Groß-Gerau Abschluß: Abitur
10/1995 bis 3/2002	Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz Abschluß: Diplom (Dipl.-Math.)
04/2002 bis 07/2003	Mitglied im Graduiertenkolleg „Mathematik und Praxis“ des Fachbereichs Mathematik an der Technischen Universität Kaiserslautern

- seit 04/2002 Doktorand bei Prof. Dr. Ralf Korn,
Arbeitsgruppe Stochastische Steuerung und
Finanzmathematik des Fachbereichs
Mathematik an der Technischen Universität
Kaiserslautern
- seit 05/2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Fraunhofer-Institut für Techno- und
Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern,
Abteilung Finanzmathematik