Technische Universität
Kaiserslautern

SCHRIFTEN ZUR

FUNKTIONALANALYSIS
UND GEOMATHEMATIK

I. Ostermann

WÄRMETRANSPORTMODELLIERUNG IN TIEFEN GEOTHERMISCHEN SYSTEMEN

Bericht 45 – September 2009

FACHBEREICH MATHEMATIK

Wärmetransportmodellierung in tiefen geothermischen Systemen

I. Ostermann

Arbeitsgruppe Geomathematik
TU Kaiserslautern
67653 Kaiserslautern
P.O. Box 3049
Germany

phone:	++49 631 205-5051
fax:	++49 631 205-4736
email:	osterma@mathematik.uni-kl.de
www:	http://www.mathematik.uni-kl.de/∼wwwgeo

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Wärmetransportmodells für tiefe geothermische (hydrothermale) Reservoire. Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen bezüglich einer schwachen Lösung des vorgestellten Modells werden getätigt. Weiterhin wird ein Verfahren zur Approximation dieser Lösung basierend auf einem linearen Galerkin-Schema dargelegt, wobei sowohl die Konvergenz nachgewiesen als auch eine Konvergenzrate erarbeitet werden.

Key words. Geothermal Flow, Weak Solution Theory, Galerkin Approximation

AMS classification: 76S05, 76E20, 93C20

1 Einleitung

Geothermie beschreibt die im zugänglichen Teil der Erdkruste gespeicherte Wärme und zählt zu den erneuerbaren Energieträgern. Der Bedarf nach solchen alternativen Energieträgern hat sich in den letzten Jahren bzw. Jahrzehnten immens verstärkt, insbesondere durch steigende Preise fossiler Rohstoffe und deren Knappheit, aber auch auf Grund des Klimawandels. Da Erdwärme einen nahezu unbegrenzten Energievorrat darstellt und im Vergleich zu Solar- bzw. Windkraftanlagen unabhängig von äußeren Einflüssen (insbesondere unabhängig von den Wetterbedingungen) verfügbar ist, kann Geothermie einen wesentlichen Anteil dieses Bedarfs decken. Tiefe geothermische Reservoire, die zur wirtschaftlichen Strom- und Fernwärmeerzeugung eingesetzt werden, kann man auch in Deutschland finden, z.B. im Gebiet des Oberrheingrabens (siehe [27]).

Unterschiedliche, miteinander gekoppelte physikalische Vorgänge müssen bei der Reservoirmodellierung mit einbezogen werden. Dazu gehören z.B. das Spannungsfeld, chemische Prozesse, Stofftransport, Fließwege und -geschwindigkeiten und Wärmetransport. Dies findet man unter anderem in [3], [4], [5], [17], [18], [19], [20], [24] und in den darin genannten Referenzen.

Um die mögliche Produktionsleistung und das Langzeitverhalten eines Geothermiewerkes vorhersagen zu können, muss unter anderem vor Inbetriebnahme die zu erwartende Reservoirtemperatur während des laufenden Betriebs, d.h. die Temperatur des Wassers, das zur Erdoberfläche befördert wird, simuliert werden. Das bedeutet, dass ein mathematisches Modell für den Wärmetransport innerhalb eines tiefen geothermischen Reservoirs, das sich in durchschnittlich 3000m Tiefe befindet, entwickelt werden muss. Verschiedene Wärmetransportmodelle und Ansätze zur numerischen Lösung findet man z.B. in [15] und [23]. Spezielle Ansätze sind unter anderem die Local Discontinuous Galerkin Method (siehe [6], [16]), die Petrov-Galerkin Methode (siehe [2], [21]), Methoden mittels radialer Basisfunktionen (siehe [30]), Multiskalenansätze (siehe [12]), Methoden basierend auf einer Integralgleichung (siehe [11]) und Finite Elemente Methoden mit exakter Zeitdiskretisierung (siehe [13], [14]).

Tiefe Geothermiequellen können in drei Kategorien eingeteilt werden: petrothermale/HDR (Hot Dry Rock) Systeme, Systeme mit tiefen Erdwärmesonden, hydrothermale Systeme. In unserem Modell zum Wärmetransport wollen wir uns auf hydrothermale Systeme konzentrieren. In hydrothermalen Systemen zirkuliert vorhandenes Thermalwasser zwischen zwei tiefen, gebohrten Brunnen über vorhandene, natürliche Grundwasserleiter (genannt Aquifere).

Ausgehend von dieser Situation leiten wir in Kapitel 2 die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung für ein zweiphasiges poröses Medium $\mathcal{B}$ bestehend aus einer festen Phase aus Gestein und einer flüssigen Phase aus Wasser her

$$(c\rho)_{\mathrm{p}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad = \quad \nabla \cdot (k_{\mathrm{p}} \nabla T) - \lambda c_{\mathrm{f}} \rho_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}} \cdot \nabla T + Q.$$

Diese partielle Differentialgleichung (zur Theorie partieller Differentialgleichungen siehe z.B. [8], [26], [29]) stellt die zeitliche Entwicklung der Temperatur im Inneren des geothermischen Reservoirs $\mathcal{B}$ dar, die durch diffusive und advektive Wärmeübertragung und einen Quellterm gekennzeichnet ist.

Basierend auf dieser Gleichung wird in Kapitel 3 ein Anfangs-Randwert-Problem aufgestellt. Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung dieses Problems wird dann mit Hilfe von Theorem 10.3 aus [26] bewiesen. Eine Aussage zur Stetigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz und ist ein Spezialfall von Lemma 10.4 in [26].

Da das zu lösende Problem unendlich dimensional ist, entwickeln wir in Kapitel 4 ein Verfahren zur Approximation, dem das lineare Galerkin Schema zugrunde liegt. Die Konvergenz der Approximation bezüglich bestimmter Funktionenräume wird dann in Theorem 4.1 nachgewiesen. Ähnliche Betrachtungen zur Approximation partieller Differentialgleichungen findet man unter anderem in [7] und [25].

Überlegungen zur Konvergenzrate im $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$-Raum werden in Kapitel 5 getätigt bevor in Kapitel 6 ein Fazit gezogen wird.

2 Herleitung der TADG

Das Anfangs-Randwert-Problem, das wir entwickeln, um den Wärmetransport innerhalb tiefer geothermischer Systeme zu beschreiben, hat als Hauptbaustein die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung (TADG). Sie wird im Folgenden für ein poröses Medium bestehend aus einer festen (Gestein) und einer flüssigen Phase (Wasser) hergeleitet. Diese Vereinfachung auf zwei Phasen basiert auf der Konzentration auf hydrothermale Systeme, in denen, wie in der Einleitung geschildert, vorhandenes Thermalwasser zwischen zwei tiefen Brunnen zirkuliert.

Zunächst möchten wir die auftretenden Größen definieren. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{B}$ ein beliebiges beschränktes Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) in $\mathbb{R}^3$, das das geothermische Reservoir beschreibt. Bekanntlich ist die Wärmeenergie innerhalb von $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$\int_{\mathcal{B}} c(x,t)\rho(x,t)T(x,t)\ dV(x),$$

wobei $c(x,t)$ die Wärmekapazität, $\rho(x,t)$ die Dichte und $T(x,t)$ die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t darstellt. Das Volumenelement wird mit dV bezeichnet. Falls nicht anders erwähnt, sind alle bisher und im weiteren Verlauf eingeführten Größen skalar.

Weiterhin ist die Wärmeenergie, die durch den Rand von $\mathcal{B}$, notiert durch $\partial\mathcal{B}$, fließt, gegeben durch

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \phi(x,t) \cdot n(x)\ dS(x).$$

Hierbei sei $\phi(x,t) \in \mathbb{R}^3$ der Wärmefluss an der Stelle x zur Zeit t und $n(x) \in \mathbb{R}^3$ die äußere Einheitsnormale zu $\partial\mathcal{B}$ im Randpunkt x. Das Flächenelement ist durch dS gegeben.

Die durch die Wärmequelle $Q(x,t)$ in Punkten x zur Zeit t erzeugte Wärmeenergie in $\mathcal{B}$ entspricht

$$\int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ dV(x).$$

Das *Energieerhaltungsgesetz* besagt, dass die zeitliche Änderung der Wärmeenergie in $\mathcal{B}$ identisch ist zur Summe aus der entzogenen Wärmeernergie, die durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ fließt, und der erzeugten Wärmeenergie in $\mathcal{B}$, also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} c(x,t)\rho(x,t)T(x,t)\ dV(x) &= -\int_{\partial\mathcal{B}} \phi(x,t)\cdot n(x)\ dS(x)\\ &\quad + \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ dV(x).\end{aligned}$$

Unter Verwendung des *Satzes von Gauß* (für $\phi(\cdot,t)$ differenzierbar in $\mathcal{B}$ für jeden Zeitpunkt t) gilt somit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} c(x,t)\rho(x,t)T(x,t)\ dV(x) &= -\int_{\mathcal{B}} \nabla_x\cdot\phi(x,t)\ dV(x) \qquad (1)\\ &\quad + \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ dV(x).\end{aligned}$$

Für eine vektorielle Funktion $f:\mathcal{B}\to\mathbb{R}^3$, die in $x\in\mathcal{B}$ differenzierbar ist, definieren wir die *Divergenz* von f in x durch

$$\nabla_x\cdot f(x) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x),$$

wobei "$\cdot$" das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Nehmen wir an, dass die Funktion $c(\cdot,t)\rho(\cdot,t)T(\cdot,t)\in \mathrm{C}^{(1)}(\mathcal{B})$, d.h. einmal stetig differenzierbar auf $\mathcal{B}$, dann können wir auf Gleichung (1) das *Transport Theorem* anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial}{\partial t}(c(x,t)\rho(x,t)T(x,t)) + \nabla_x\cdot(c(x,t)\rho(x,t)T(x,t)v(x,t))\right)dV(x)\\ =\ &-\int_{\mathcal{B}}\nabla_x\cdot\phi(x,t)\ dV(x) + \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ dV(x), \qquad (2)\end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}$ die partielle Ableitung bezüglich der Zeit und $v(x,t)\in\mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit eines Partikels x zum Zeitpunkt t beschreibt.

Da diese Gleichung sehr komplex ist, wollen wir zunächst folgende Vereinfachungen vornehmen. Die Wärmekapazität c und die Dichte ρ werden als räumlich und zeitlich konstant angenommen, d.h. $c = c(x,t) = const$ und $\rho = \rho(x,t) = const$ für alle x und t. Dies hat zur Folge, dass wir Gleichung (2) vereinfachen können zu

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}}\left(c\rho\ \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) + c\rho\ \nabla_x\cdot(T(x,t)v(x,t))\right)dV(x) \qquad (3)\\ =\ &\int_{\mathcal{B}}\left(c\rho\ \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) + c\rho\ (\nabla_x T(x,t)\cdot v(x,t) + T(x,t)\nabla_x\cdot v(x,t))\right)dV(x)\\ =\ &-\int_{\mathcal{B}}\nabla_x\cdot\phi(x,t)\ dV(x) + \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ dV(x).\end{aligned}$$

Ein Modell ohne diese vereinfachenden Annahmen wird in naher Zukunft bearbeitet werden.

Nun betrachten wir Gleichung (3) jeweils für die feste und die flüssige Phase getrennt. Die jeweiligen Größen erhalten als Index ein ‘s’ für die feste und ein ‘f’ für die flüssige Phase.

In der festen Phase nehmen wir an, dass das Gestein ein starres, unbewegliches Skelett ist. Dies bedeutet, dass $v_\mathrm{s} = 0$ und somit keine seismische Aktivität vorliegt. Zum einen ist dies eine idealisierte Annahme, da durch die Nutzung des Systems starke Spannungen innerhalb des Gesteins auftreten können, die sich unter Umständen in kleineren Erdstößen niederschlagen, die wiederum die vohandenen Fließwege des Wassers verschließen und die umliegende Infrastruktur beschädigen können. Zum anderen entspricht es dem Anliegen der hydrothermalen Geothermie, diese unerwünschten Nebeneffekte zu vermeiden. Außerdem treten diese Nebeneffekte bei hydrothermalen Systemen, anders als bei HDR-Systemen, eher selten auf.

Somit reduziert sich Gleichung (3) zu

$$\int_{\mathcal{B}} c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\ \frac{\partial}{\partial t} T_\mathrm{s}(x,t)\ dV(x) = -\int_{\mathcal{B}} \nabla_x \cdot \phi_\mathrm{s}(x,t)\ dV(x) + \int_{\mathcal{B}} Q_\mathrm{s}(x,t)\ dV(x).$$

Da diese Gleichung auch für jede beliebige Teilmenge von $\mathcal{B}$ gültig ist, gilt folglich

$$c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\ \frac{\partial}{\partial t} T_\mathrm{s}(x,t) = -\nabla_x \cdot \phi_\mathrm{s}(x,t) + Q_\mathrm{s}(x,t)$$

für alle $x \in \mathcal{B}, t$.

Das *Fourier-Gesetz* besagt, dass sich der Wärmefluss darstellen lässt als

$$\phi_\mathrm{s}(x,t) = -k_\mathrm{s}(x,t)\nabla_x T_\mathrm{s}(x,t),$$

wobei $k_\mathrm{s}(x,t)$ die skalare Wärmeleitfähigkeit des Gesteins im Punkt x zur Zeit t beschreibt.

Somit erhalten wir die transiente Diffusionsgleichung für die feste Phase

$$c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\ \frac{\partial}{\partial t} T_\mathrm{s}(x,t) = \nabla_x \cdot (k_\mathrm{s}(x,t)\nabla_x T_\mathrm{s}(x,t)) + Q_\mathrm{s}(x,t) \tag{4}$$

für alle $x \in \mathcal{B}, t$.

Unsere flüssige Phase besteht aus Wasser, das bekanntlichermaßen nahezu inkompressibel ist. Deshalb nehmen wir an, dass $\nabla \cdot v_\mathrm{f} = 0$. Setzen wir dies in Gleichung (3) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}} \left(c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\ \frac{\partial}{\partial t} T_\mathrm{f}(x,t) + c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\ v_\mathrm{f}(x,t) \cdot \nabla_x T_\mathrm{f}(x,t) \right) dV(x) \\ = \quad & -\int_{\mathcal{B}} \nabla_x \cdot \phi_\mathrm{f}(x,t)\ dV(x) + \int_{\mathcal{B}} Q_\mathrm{f}(x,t)\ dV(x).\end{aligned}$$

Analoges Vorgehen wie bei der festen Phase liefert die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung für die flüssige Phase, die folgendermaßen aussieht

$$\begin{aligned} c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\,\frac{\partial}{\partial t}T_\mathrm{f}(x,t) &= \nabla_x\cdot(k_\mathrm{f}(x,t)\nabla_x T_\mathrm{f}(x,t)) - c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\; v_\mathrm{f}(x,t)\cdot\nabla_x T_\mathrm{f}(x,t) \\ &\quad +Q_\mathrm{f}(x,t) \end{aligned} \tag{5}$$

für alle $x \in \mathcal{B}, t$.

Die Geschwindigkeit v_f ist hier als die Fließgeschwindigkeit des Wassers zu verstehen. Sie kann über das sogenannte *Darcy-Gesetz* bestimmt werden.

Um zu einer kontinuierlichen Wärmetransportgleichung für das zweiphasige poröse Medium bestehend aus fester und flüssiger Phase zu gelangen, verwenden wir die nachstehende Vorgehensweise.

(i) Im porösen Medium herrscht das *thermodynamische Gleichgewicht*, das besagt, dass die Temperatur des Gesteins der Temperatur des Wassers entspricht, d.h. $T_\mathrm{s} = T_\mathrm{f} = T$.

(ii) Es sind keine Wärmequellen in der festen Phase vorhanden, d.h. $Q_\mathrm{s} = 0$.

(iii) Die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung für das zweiphasige poröse Medium wird durch Addition der phasenbezogenen Gleichungen (4) und (5) gewichtet mit der Porosität $\lambda = \mathit{const} \in \mathbb{R}$ des Mediums gebildet.

Die in (iii) beschriebene Gewichtung setzen wir an als

$$\begin{aligned} (c\rho)_\mathrm{p} &= \lambda c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f} + (1-\lambda)c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}, \\ k_\mathrm{p} &= \lambda k_\mathrm{f} + (1-\lambda)k_\mathrm{s}, \end{aligned}$$

wobei der Index ‘p’ die porösen Materialgrößen bezeichnet (vgl. [19]).

Verwenden wir $Q = Q_\mathrm{f}$ erhalten wir somit die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung für das zweiphasige poröse Medium (TADG)

$$\begin{aligned} (c\rho)_\mathrm{p}\,\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) &= \nabla_x\cdot(k_\mathrm{p}(x,t)\nabla_x T(x,t)) - c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\; v_\mathrm{f}(x,t)\cdot\nabla_x T(x,t) \\ &\quad +Q(x,t) \end{aligned} \tag{6}$$

für alle $x \in \mathcal{B}, t$.

Zur Modellierung des Quellterms wird angenommen, dass nur die Injektion und Extraktion des Wassers (Temperatur des Wassers) als Quelle bzw. Senke wirken (vgl. [11]). Wir wählen dazu den Ansatz

$$Q(x,t) = \lambda c_\mathrm{f}\rho_\mathrm{f}\tilde{Q}(T(x_\mathrm{ext},t)\delta(x-x_\mathrm{ext}) - T(x_\mathrm{inj},t)\delta(x-x_\mathrm{inj})), \quad x \in \mathcal{B}, t,$$

Dabei bezeichnet $\tilde{Q}$ den Durchfluss, x_inj bzw. x_ext den Injektions- bzw. Extraktionspunkt ($x_\mathrm{inj}, x_\mathrm{ext} \in \mathcal{B}$, $x_\mathrm{inj} \neq x_\mathrm{ext}$) und δ die Dirac-Funktion. Bei diesem Ansatz wird angenommen, dass der Durchfluss im Injektions- und Extraktionspunkt identisch sowie zeitlich und räumlich konstant ist.

3 Schwache Lösung des ARP

Das übergeordnete Ziel unserer Modellierung ist es, den Wärmetransport innerhalb eines idealisierten geothermischen Reservoirs von Beginn der Produktion zum Zeitpunkt $t = 0$ bis zu einem festen Endzeitpunkt $t = t_{\text{end}} < \infty$ mit der in Kapitel 2 hergeleiteten TADG (Gleichung (6)) zu simulieren. Um dies realisieren zu können, benötigen wir zusätzliche Informationen in Form einer Anfangsbedingung und einer Randbedingung.

Das Anfangs-Randwert-Problem (ARP), das wir betrachten, lautet

$$
\begin{aligned}
(c\rho)_{\text{p}} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (k_{\text{p}} \nabla T) - \lambda c_{\text{f}} \rho_{\text{f}} v_{\text{f}} \cdot \nabla T + Q \quad \text{in } \mathcal{B} \times (0, t_{\text{end}}] & (7)\\
T(\cdot, 0) &= T_0 \quad \text{in } \mathcal{B} & (8)\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= F \quad \text{auf } \partial\mathcal{B} \times (0, t_{\text{end}}]. & (9)
\end{aligned}
$$

Dabei beschreibt die Funktion F die Neumann-Randbedingung, d.h. die Ableitung der Temperatur in Richtung der äußeren Einheitsnormalen zu $\partial\mathcal{B}$.

Auf Grund der Komplexität dieses ARP konzentrieren wir uns auf die schwache Formulierung des Problems und werden zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen eine schwache Lösung existiert und dass sie eindeutig ist. Dazu bilden wir zunächst die schwache Formulierung durch Multiplikation von Gleichung (7) mit einer beliebigen Testfunktion $U : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ und darauffolgender Integration über $\mathcal{B}$.

$$
\begin{aligned}
& (c\rho)_{\text{p}} \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\ U(x)\ dV(x) & (10)\\
= & \int_{\mathcal{B}} k_{\text{p}}(x,t)(\Delta_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) \\
& + \int_{\mathcal{B}} (\nabla_x k_{\text{p}}(x,t) - \lambda c_{\text{f}} \rho_{\text{f}} v_{\text{f}}(x,t)) \cdot (\nabla_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) \\
& + \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ U(x)\ dV(x).
\end{aligned}
$$

Zu diesem Zeitpunkt gehen wir davon aus, dass die jeweiligen Integrale existieren. Die dazu nötigen Funktionenräume werden wir im weiteren Verlauf spezifizieren. In Gleichung (10) wurde ausgenutzt, dass der Laplaceoperator, der definiert ist als

$$
\Delta_x = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},
$$

die nachstehende Beziehung für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen G, H erfüllt

$$
\Delta_x G(x) H(x) = \nabla_x \cdot (G(x) \nabla_x H(x)) - \nabla_x G(x) \cdot \nabla_x H(x).
$$

Unser Ziel ist es nun die Neumann-Randbedingung in diese schwache Formulierung eingehen zu lassen. Dazu benötigen wir den ersten Green'schen Satz (vgl. [10]).

Lemma 3.1. *(Erster Green'scher Satz) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Gamma$. Sind $G \in \mathrm{C}^{(1)}(\overline{\Gamma})$ und $H \in \mathrm{C}^{(2)}(\overline{\Gamma})$, $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$, dann gilt*

$$\int_\Gamma (G(x)\Delta_x H(x) + \nabla_x G(x) \cdot \nabla_x H(x))\ dV(x) = \int_{\partial\Gamma} G(x)\ \frac{\partial}{\partial n} H(x)\ dS(x).$$

Verwenden wir nun Lemma 3.1 in Gleichung (10) so erhalten wir

$$\begin{aligned} & (c\rho)_\mathrm{p} \int_\mathcal{B} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\ U(x)\ dV(x) \\ = \quad & -\int_\mathcal{B} \nabla_x T(x,t) \cdot \nabla_x (k_\mathrm{p}(x,t)\ U(x))\ dV(x) \\ & + \int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial}{\partial n} T(x,t)\right) (k_\mathrm{p}(x,t)\ U(x))\ dV(x) \\ & + \int_\mathcal{B} (\nabla_x k_\mathrm{p}(x,t) - \lambda c_\mathrm{f} \rho_\mathrm{f} v_\mathrm{f}(x,t)) \cdot (\nabla_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) \\ & + \int_\mathcal{B} Q(x,t)\ U(x)\ dV(x). \end{aligned}$$

Die Neumann-Randbedingung (9) liefert letztendlich

$$\begin{aligned} & (c\rho)_\mathrm{p} \int_\mathcal{B} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\ U(x)\ dV(x) \qquad (11) \\ = \quad & -\int_\mathcal{B} k_\mathrm{p}(x,t) \nabla_x T(x,t) \cdot \nabla_x U(x)\ dV(x) + \int_{\partial\mathcal{B}} k_\mathrm{p}(x,t) F(x,t)\ U(x)\ dS(x) \\ & -\lambda c_\mathrm{f} \rho_\mathrm{f} \int_\mathcal{B} v_\mathrm{f}(x,t) \cdot (\nabla_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) + \int_\mathcal{B} Q(x,t)\ U(x)\ dV(x). \end{aligned}$$

Somit bleibt bei der schwachen Formulierung des ARP Gleichung (11) für $t \in (0, t_\mathrm{end}]$ und die Anfangsbedingung (8) in schwacher Form, d.h.

$$\int_\mathcal{B} T(x,0)\ U(x)\ dV(x) = \int_\mathcal{B} T_0(x)\ U(x)\ dV(x)$$

erhalten.

Nun konzentrieren wir uns auf die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage bezüglich der Lösung der schwachen Formulierung des ARP. Dazu tätigen wir folgende Annahmen an die konstanten bzw. variablen Materialparameter:

(A1) $(c\rho)_\mathrm{p}, c_\mathrm{f}, \rho_\mathrm{f}, \lambda > 0$

(A2) (i) $k_\mathrm{p} \in \mathrm{C}^{(1)}(\bar{\mathcal{B}} \times [0, t_\mathrm{end}])$, $k_\mathrm{p}(x,t) > 0$ für alle $x \in \bar{\mathcal{B}}, t \in [0, t_\mathrm{end}]$

(ii) $v_\mathrm{f} \in \mathrm{C}(\bar{\mathcal{B}} \times [0, t_\mathrm{end}], \mathbb{R}^3)$, $v_\mathrm{f}(x,t) \neq 0$ für alle $x \in \bar{\mathcal{B}}, t \in [0, t_\mathrm{end}]$ bis auf eine Nullmenge.

Die quadratische Form a, die durch

$$\begin{aligned} a(t;T,U) \quad := \quad & \frac{1}{(c\rho)_\mathrm{p}} \int_\mathcal{B} k_\mathrm{p}(x,t) \nabla_x T(x,t) \cdot \nabla_x U(x)\ dV(x) \\ & + \frac{\lambda c_\mathrm{f} \rho_\mathrm{f}}{(c\rho)_\mathrm{p}} \int_\mathcal{B} v_\mathrm{f}(x,t) \cdot (\nabla_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) \end{aligned}$$

definiert ist, erfüllt unter den Annahmen (A1) und (A2) die Bedingungen

(B1) *Stetigkeit:* Für alle $T, U \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ und $t \in (0, t_{\text{end}}]$ gilt

$$|a(t; T, U)| \leq \alpha \; ||T||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \; ||U||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}, \quad \alpha > 0,$$

(B2) *Koerzivität:* Für alle $T \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ und $t \in (0, t_{\text{end}}]$ gilt

$$a(t, T, T) \geq \gamma \; ||T||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} - \beta \; ||T||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}, \quad \gamma, \beta > 0,$$

wobei α, β, γ Konstanten unabhängig von t sind. Weiterhin bezeichnet $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ den Hilbert-Raum aller quadratintegrablen Funktionen auf $\mathcal{B}$, der mit dem Skalarprodukt $\langle G, H\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} := \int_{\mathcal{B}} G(x)H(x) \; dV(x) < \infty$ und der daraus induzierten Norm $||G||_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \sqrt{\langle G, G\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}}$, $G, H \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B})$, ausgestattet ist. Mit $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ notieren wir den folgenden Sobolev-Raum

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) = \left\{ G \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B}) \;\middle|\; \frac{\partial G}{\partial x_i} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B}) \text{ für alle i} = 1, 2, 3 \right\}$$

versehen mit der Norm $||G||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} = \left(\int_{\mathcal{B}} ((G(x))^2 + |\nabla_x G(x)|^2) \; dV(x)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Die beiden Räume $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ und $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ sind separable Hilbert-Räume, wobei $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ stetig und dicht in $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ eingebettet ist (vgl. [1], [26]).

Wir definieren den Quell-Rand-Term R durch

$$\langle R, U\rangle := \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\mathcal{B}} Q(x, t) \; U(x) \; dV(x) + \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\partial\mathcal{B}} k_{\mathrm{p}}(x, t) F(x, t) \; U(x) \; dS(x),$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Pairing zwischen $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ und dessen Dualraum $(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star$ bezeichnet.

Nehmen wir weiter an, dass die beschränkte, lineare Abbildung $A(t) : \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \to (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star$ erfüllt, dass

$$a(t; T, U) = -\langle A(t)T, U\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}, \quad T, U \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}), \tag{12}$$

können wir die schwache Formulierung des ARP inklusive der Anfangsbedingung als das Anfangswert-Problem (bezüglich einer gewöhnlichen Differentialgleichung in t) darstellen

$$\frac{dT}{dt} = A(t)T + R, \quad T(0) = T_0. \tag{13}$$

Nun möchten wir Theorem 10.3 und Lemma 10.4 aus [26] benutzen, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (13) und somit der schwachen Lösung der TADG zu erhalten. Dazu müssen die Bedingungen

(C1) $R \in \mathrm{L}^2((0, \mathrm{t}_{\text{end}}); (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$

(C2) $T_0 \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B})$

erfüllt sein. Formulieren wir für unseren Fall Theorem 10.3 aus [26], so erhalten wir

Theorem 3.2. *(Existenz und Eindeutigkeit) Genügen R und T_0 der Bedingung (C1) bzw. (C2), so existiert zum Anfangswert-Problem* (13) *eine eindeutige Lösung* $T \in \mathrm{L}^2((0,t_{\mathrm{end}});\mathcal{H}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{H}^1((0,t_{\mathrm{end}});(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$.

Analog zu den Überlegungen in [26] können wir somit wegen des *Sobolev'schen Einbettungssatzes* (vgl. [1]) schließen, dass $T \in \mathrm{C}([0,\mathrm{t}_{\mathrm{end}}],(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$ liegt, und die Anfangsbedingung interpretiert werden kann. Die Reformulierung von Theorem 10.4 aus [26] liefert sogar folgendes Lemma.

Lemma 3.3. *Angenommen* $T \in \mathrm{L}^2((0,t_{\mathrm{end}});\mathcal{H}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{H}^1((0,t_{\mathrm{end}});(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$, *dann gilt* $T \in \mathrm{C}([0,t_{\mathrm{end}}],\mathrm{L}^2(\mathcal{B}))$.

Somit konnten wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der schwachen Formulierung des ARP und deren Stetigkeit unter den Annahmen (A1), (A2), (B1), (B2), (C1) und (C2) nachweisen.

Da $(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star$ kein Raum von Distributionen ist, wollen wir uns näher mit der Interpretation von Gleichung (13) befassen. Falls $\mathcal{B}$ glatt genug ist, dann besitzt jede Funktion in $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ eine Spur in $\partial\mathcal{B}$, die in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{B})$ liegt. Nehmen wir an, dass $G \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ und $H \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{B})$ beliebig, dann befindet sich das Funktional $G \oplus H$ definiert durch

$$\langle G \oplus H, M\rangle = \langle G, M\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \int_{\partial\mathcal{B}} H(x)\ M(x)\ dS(x), \quad M \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}),$$

in $(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star$.

Laut der Definition von R gilt deshalb, dass Bedingung (C1) erfüllt ist, wenn

$$Q \in \mathrm{L}^2((0,t_{\mathrm{end}});\mathrm{L}^2(\mathcal{B})) \quad \text{und} \quad k_pF \in \mathrm{L}^2((0,t_{\mathrm{end}});\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{B})).$$

Formal gilt dann mit dem ersten Green'schen Satz

$$\begin{aligned} & \langle A(t)T, U\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \langle R, U\rangle \\ = \quad & \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\mathcal{B}} k_{\mathrm{p}}(x,t)\ \Delta_x T(x,t)\ U(x)\ dV(x) \\ & + \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\mathcal{B}} (\nabla_x k_{\mathrm{p}}(x,t) - \lambda c_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{f}}\ (v_{\mathrm{f}}(x,t)\cdot\nabla_x T(x,t))\ U(x)\ dV(x) \\ & + \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\mathcal{B}} Q(x,t)\ U(x)\ dV(x) \\ & + \frac{1}{(c\rho)_{\mathrm{p}}} \int_{\partial\mathcal{B}} \left(-k_{\mathrm{p}}(x,t)\ \frac{\partial}{\partial n}T(x,t) + k_{\mathrm{p}}(x,t)\ F(x,t)\right) U(x)\ dS(x) \end{aligned}$$

für alle $U \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Somit ist T formal eine Lösung der TADG

$$(c\rho)_{\mathrm{p}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad = \quad \nabla\cdot(k_{\mathrm{p}}\nabla T) - \lambda c_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}}\cdot\nabla T + Q$$

mit Randbedingung

$$\frac{\partial T}{\partial n} \quad = \quad F.$$

Das Ganze gilt nur formal, da $\frac{\partial T}{\partial n}$ nicht im Sinne der Spur existiert, wenn lediglich $T \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ gilt. Eine stärkere Aussage ist möglich, falls höhere Regularität gefordert wird.

4 Lineares Galerkin Schema

Das in Kapitel 3 eingeführte schwache Problem ist unendlich dimensional. Zur Approximation der Lösung T dieses unendlich dimensionalen Problems durch die Lösung T_J eines eindlich dimensionalen Problems verwenden wir die lineare Galerkin Methode. Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, dass diese endlich dimensionale Lösung im Grenzwert für $J \to \infty$ gegen die unendlich dimensionale Lösung konvergiert. Die Vorgehensweise, die wir verfolgen, stützt sich vor allem auf diejenige in [9] und [26].

Zunächst müssen wir bestimmte Teilräume des Sobolv-Raumes $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ definieren. Dazu benötigen wir ein Gitter Y aus $N_J \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkten Punkten

$$\begin{aligned} Y = \{y_1, \ldots, y_{N_J} |\ y_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i = 1, \ldots, N_J \text{ und } y_i \neq y_j \\ \text{für alle } i, j = 1, \ldots, N_J \text{ mit } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Außerdem nehmen wir an, dass die skalaren Kerne $K_J(\cdot, y_i)$, $i = 1, \ldots, N_J$, stetig differenzierbar und linear unabhängig sind. Den Teilraum $\mathcal{H}_J$ definieren wir durch

$$\mathcal{H}_J := \operatorname{span}\{K_J(\cdot, y_1), \ldots, K_J(\cdot, y_{N_J})\}$$

und fordern beim Grenzübergang

$$\bigcup_J^{\infty} \mathcal{H}_J \text{ ist dicht in } \mathcal{H}^1(\mathcal{B}).$$

Für festes $J \in \mathbb{N}$ betrachten wir die durch

$$T_J : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{H}_J, \quad t \mapsto T_J(t) = \sum_{i=1}^{N_J} T_i^J(t) K_J(\cdot, y_i)$$

definierte Approximation der Lösung von (13). Die Funktion T_J ist definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (c\rho)_{\mathrm{p}} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T_J, K \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} &= -\langle k_{\mathrm{p}}, \nabla T_J \cdot \nabla K \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ &\quad -\lambda c_{\mathrm{f}} \rho_{\mathrm{f}} \langle v_{\mathrm{f}} \cdot \nabla T_J, K \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \langle R, K \rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

für alle $K \in \mathcal{H}_J$ und

$$\langle T_J(0), K \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \langle T_0, K \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \quad \forall\, K \in \mathcal{H}_J. \tag{15}$$

Gleichungen (14) und (15) stellen ein *lineares Galerkin-Schema* dar. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung T_J auf einem Intervall $[0, t_J]$ folgt somit mit Standardargumenten für Cauchy-Probleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Mit Hilfe dieses Ansatzes für T_J können wir folgende Konvergenzaussage treffen.

Theorem 4.1. *(Konvergenz) Die Lösung T_J der Gleichungen* (14) *und* (15) *existiert und ist eindeutig bestimmt für $t_J = t_{\text{end}} < \infty$. Weiterhin gilt, dass T_J für $J \to \infty$ gegen die schwache Lösung T der TADG*

$$\frac{dT}{dt} = A(t)T + R$$

mit Anfangsbedingung $T(0) = T_0 \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ konvergiert im Sinne von

$$\begin{aligned} &T_J \to T \text{ stark in } \mathrm{L}^2([0,t_{\text{end}}];\mathcal{H}^1(\mathcal{B})) \text{ und } \mathrm{L}^p([0,t_{\text{end}}];\mathrm{L}^2(\mathcal{B})) \text{ für alle} \\ &\qquad 1 \le p < \infty \\ &T_J \to T \star -\text{schwach in } \mathrm{L}^\infty([0,\mathrm{t}_{\text{end}}];\mathrm{L}^2(\mathcal{B})) \end{aligned}$$

für alle $0 < t_{\text{end}} < \infty$.

Die in Theorem 4.1 erwähnten Banachräume L^p, $1 \le p < \infty$, und L^∞ sind mit den üblichen Normen ausgestattet, d.h.

$$\begin{aligned} ||F||_{\mathrm{L}^p(D,E)} &= \left(\int_D |F(x)|^p \, dV(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \\ ||F||_{\mathrm{L}^\infty(D,E)} &= \operatorname*{esssup}_{x\in D} |F(x)| < \infty, \end{aligned}$$

wobei $F : D \to E$ eine p-messbare bzw. eine messbare, wesentlich beschränkte Funktion ist.

Beweis. (Theorem 4.1) Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung T_J wurde bereits für ein Intervall $[0, t_J]$ nachgewiesen. Nun möchten wir zeigen, dass $t_J = t_{\text{end}} < \infty$ gilt.

Ersetzen wir den in (12) definierten Operator $A(\cdot)$ durch $A(\cdot) + \beta$ Id, dann erfüllt dieser Operator die Koerzivitätsbedingung (B2) mit $\beta = 0$. Wählen wir $T_J = e^{\beta t} T_J$ und $K = T_J$ in (14), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T_J, T_J \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} &= -a(t;T_J,T_J) - \beta\langle T_J, T_J\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ &\quad + e^{-\beta t}\langle R, T_J\rangle. \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise ist an diejenige in [22] angelehnt. Die weitere Beweisführung ist vergleichbar mit der in [9].

Die Relation $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} T_J, T_J \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} ||T_J||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}$ liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||T_J||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} &= -a(t;T_J,T_J) - \beta\langle T_J, T_J\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ &\quad + e^{-\beta t}\langle R, T_J\rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

Integrieren wir Gleichung (16) von 0 bis $\tau \in (0, t_{\text{end}}]$, so gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(||T_J(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - ||T_J(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\right) \\ & + \int_0^\tau a(t; T_J(t), T_J(t))\ dt + \beta \int_0^\tau ||T_J(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\ dt \\ = & \int_0^\tau e^{-\beta t} \langle R(t), T_J(t)\rangle\ dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Mit der Koerzivität von a, $e^{-\beta t} \leq 1$ für $t \in [0, t_{\text{end}}]$ und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(||T_J(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - ||T_J(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\right) + \int_0^\tau \gamma\ ||T_J(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt \\ \leq & \int_0^\tau ||R||_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ ||T_J(t)||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt. \end{aligned} \tag{18}$$

An dieser Stelle ist zu sehen, dass $0 < t_J = t_{\text{end}} < \infty$ gelten muss.

Für $\varepsilon > 0$ fest und beliebige $y, z \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung

$$\frac{\varepsilon}{2}\ y^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\ z^2 - yz = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\ y - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\ z\right)^2 \geq 0.$$

Diese Ungleichung verwenden wir, um die rechte Seite in (18) abzuschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(||T_J(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - ||T_J(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\right) + \int_0^\tau \gamma\ ||T_J(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt \\ \leq & \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau ||R(t)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau ||T_J(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Betrachten wir nun die Anfangsbedingung T_0 so können wir folgendes feststellen. Da laut Gleichung (15) $\langle T_J(0), K\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \langle T_0, K\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}$ für alle $K \in \mathcal{H}_J$ gilt, so ist insbesondere $\langle T_J(0), T_J(0)\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \langle T_0, T_J(0)\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}$ gültig. Wenden wir auf diese Gleichung die Ungleichung von Cauchy-Schwarz an, inklusive der Tatsache, dass $T_J \neq 0$, so bedeutet dies, dass

$$||T_J(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \leq ||T_0||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} < \infty. \tag{20}$$

Wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{\gamma} > 0$ und verwenden wir die Abschätzung (20), so wird Gleichung (19) zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\ ||T_J(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \frac{\gamma}{2} \int_0^\tau ||T_J(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt \\ \leq & C\left(\int_0^\tau ||R(t)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt + ||T_0||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\right) < \infty, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine Konstante unabhängig von τ ist.

Daraus lässt sich schließen, dass T_J für $J \to \infty$ innerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathrm{L}^\infty([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$ bleibt. Ähnliche Überlegungen und Aussagen zur Beschränktheit der Lösung für den Fall der sphärischen Navier-Stokes Gleichung findet man in [9].

Integriert man in der gleichen Weise Gleichung (16) von 0 bis t_{end}, so bleibt T_J für $J \to \infty$ innerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; \mathcal{H}^1(\mathcal{B}))$.

Um die Ergebnisse zur starken Konvergenz nachweisen zu können, benötigen wir außerdem Aussagen über das Verhalten von $A(\cdot)T_J$ und $\frac{\partial T_J}{\partial t}$ für $J \to \infty$. Die Stetigkeit von a laut Bedingung (B1) in Kapitel 3 liefert uns, dass $A(\cdot)T_J$ für $J \to \infty$ innerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$ bleibt. Analog gilt wegen $R \in \mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$ und der TADG (13), dass $\frac{\partial T_J}{\partial t}$ für $J \to \infty$ innerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star)$ bleibt.

Somit existiert ein $\hat{T}$ und eine Teilfolge $(T_{J'}) \subset (T_J)$, die folgende Konvergenzaussagen für jedes $0 < t_{\text{end}} < \infty$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
&T_{J'} \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T} \quad \text{schwach in } \mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; \mathcal{H}^1(\mathcal{B})) \\
&\frac{\partial T_{J'}}{\partial t} \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \quad \text{schwach in } \mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star) \\
&A(\cdot)T_{J'} \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} A(\cdot)\hat{T} \quad \text{schwach in } \mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star) \\
&T_{J'} \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T} \quad \star-\text{schwach in } \mathrm{L}^\infty([0, t_{\text{end}}]; \mathrm{L}^2(\mathcal{B}))
\end{aligned} \tag{21}$$

Mit Hilfe eines Kompaktheitssatzes von Temam in [28], S. 271 ff, können wir aus (21) sogar für jedes $0 < t_{\text{end}} < \infty$ schließen, dass

$$T_{J'} \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T} \quad \text{stark in } \mathrm{L}^2([0, t_{\text{end}}]; \mathrm{L}^2(\mathcal{B})). \tag{22}$$

Ziel ist es, zu zeigen, dass $\hat{T}$ eine schwache Lösung der TADG mit Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ ist. Wegen der Eindeutigkeit der schwachen Lösung muss dann $\hat{T} = T$ gelten und die Folge (T_J) konvergiert selbst gegen T im Sinne von (21).

Gehen wir in (14) zum Grenzwert über, erhält man auf Grund von (21)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}, K \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + a(t; \hat{T}, K) + \beta\langle \hat{T}, K\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \quad = \quad e^{-\beta t}\langle R, K\rangle \tag{23}$$

für alle $K \in \mathcal{H}_{J'}$.

Mit der Stetigkeit von a gilt (23) sogar für alle $K \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$.

Mit (21) können wir folgern, dass

$$T_{J'}(0) \overset{J'\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T}(0) \quad \text{schwach in } \mathcal{H}^1(\mathcal{B}).$$

Außerdem wissen wir, dass $\langle T_{J'}(0), K\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} = \langle T_0, K\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}$ für alle $K \in \mathcal{H}_{J'}$. Dies bedeutet aber, dass

$$\hat{T}(0) = T_0. \tag{24}$$

Bedingungen (23) und (24) zeigen, dass $\hat{T}$ eine schwache Lösung der TADG mit Anfangsbedingung $\hat{T}(0) = T_0$ ist.

Kommen wir nun zu den noch zu beweisenden Ergebnissen zur starken Konvergenz, d.h.

$$T_J \overset{J\to\infty}{\longrightarrow} T \quad \text{stark in } \mathrm{L}^p([0,t_{\mathrm{end}}];\mathrm{L}^2(\mathcal{B})) \text{ für alle } 1 \le p < \infty.$$

Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} X_J(t_{\mathrm{end}}) \quad := \quad & \frac{1}{2}\,||T_J(t_{\mathrm{end}}) - T(t_{\mathrm{end}})||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ & + \int_0^{t_{\mathrm{end}}} a(t; T_J(t) - T(t), T_J(t) - T(t))\; dt \\ & + \beta \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T_J(t) - T(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\; dt. \end{aligned}$$

Mit dieser Definition reicht es aus zu zeigen, dass $X_J(t_{\mathrm{end}}) \overset{J\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Gleichung (16) besagt, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||T_J||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \quad = \quad & -a(t; T_J, T_J) - \beta\langle T_J, T_J\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ & + e^{-\beta t}\langle R, T_J\rangle. \end{aligned}$$

Die Definition von $X_J(t_{\mathrm{end}})$ liefert deshalb

$$\begin{aligned} & X_J(t_{\mathrm{end}}) \\ = \quad & -\langle T_J(t_{\mathrm{end}}), T(t_{\mathrm{end}})\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \frac{1}{2}\,||T(t_{\mathrm{end}})||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \frac{1}{2}\,||T_J(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ & + \int_0^{t_{\mathrm{end}}} (-a(t; T(t), T_J(t)) - a(t; T_J(t), T(t)) + a(t; T(t), T(t)))\; dt \\ & + \int_0^{t_{\mathrm{end}}} e^{-\beta t}\langle R(t), T_J(t)\rangle\; dt + \beta \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T_J(t) - T(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\; dt \\ & - \beta \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T_J(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\; dt. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (21) und (22) für T_J erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{J\to\infty} X_J(t_{\mathrm{end}}) \\ = \quad & -\frac{1}{2}\,||T(t_{\mathrm{end}})||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \frac{1}{2}\,||T_0||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - \int_0^{t_{\mathrm{end}}} a(t; T(t), T(t))\; dt \\ & + \int_0^{t_{\mathrm{end}}} e^{-\beta t}\langle R(t), T(t)\rangle\; dt - \beta \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\; dt. \end{aligned}$$

Um den Grenzwert explizit zu bestimmen, ersetzen wir in (23) $(\hat{T}, K)$ durch (T, T). Dies führt zu

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T, T \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + a(t; T, T) + \beta \, ||T||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ = \; & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} ||T||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + a(t; T, T) + \beta \, ||T||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ = \; & e^{-\beta t} \langle R, T \rangle. \end{aligned}$$

Infolgedessen erreichen wir das gewünschte Resultat

$$\lim_{J \to \infty} X_J(t_{\mathrm{end}}) = 0.$$

Weiterhin wissen wir wegen der Koerzivität von a, dass folgendes erfüllt ist

$$\begin{aligned} 0 \; & \leq \; \gamma \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T_J(t) - T(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \, dt \\ & \leq \; \beta \int_0^{t_{\mathrm{end}}} ||T_J(t) - T(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \, dt \\ & \quad + \int_0^{t_{\mathrm{end}}} a(t; T_J(t) - T(t), T_J(t) - T(t)) \, dt \\ & \leq \; X_J(t_{\mathrm{end}}). \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung in Kombination mit dem Grenzwert von $X_J(t_{\mathrm{end}})$ in (25) ergibt sich

$$T_J \overset{J \to \infty}{\longrightarrow} T \text{ stark in } \mathrm{L}^2([0, t_{\mathrm{end}}]; \mathcal{H}^1(\mathcal{B})) \text{ und stark in } \mathrm{L}^2([0, t_{\mathrm{end}}]; \mathrm{L}^2(\mathcal{B})).$$

Kombiniert man nun diese Ergebnisse mit der Eigenschaft, dass T_J für $J \to \infty$ innerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathrm{L}^2([0, t_{\mathrm{end}}]; \mathcal{H}^1(\mathcal{B}))$ bleibt, so können wir den *Satz der Lebesgue-dominierten Konvergenz* anwenden und erzielen die Konvergenzaussage

$$T_J \overset{J \to \infty}{\longrightarrow} T \text{ stark in } \mathrm{L}^p([0, t_{\mathrm{end}}]; \mathrm{L}^2(\mathcal{B})) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der gewählte Lösungsansatz basierend auf einem linearen Galerkin Schema garantiert somit bei geeigneter Wahl des Gitters Y, der Kerne K_J und der Teilräume $\mathcal{H}_J$ (siehe Beginn dieses Kapitels), dass die approximative Lösung T_J für $J \to \infty$ gegen die schwache Lösung T der TADG konvergiert. Dies ist also ein wichtiger Bestandteil der numerischen Umsetzung, die wir bereits verfolgen und zu der wir in naher Zukunft die ersten Ergebnisse veröffentlichen werden.

5 Konvergenzrate

In diesem Kapitel möchten wir Konvergenzraten für den Fehler in der $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$-Norm herleiten, d.h. wir wollen den Approximationsfehler der Näherung von T durch T_J für ein festes $J \in \mathbb{N}$ in der genannten Norm abschätzen.

Sei $J \in \mathbb{N}$ fest, T_J die Lösung von (14) und (15) und T die schwache Lösung der TADG. Dann definieren wir den Fehler d durch

$$d = T - T_J.$$

Mit der Vorgehensweise, die wir im Beweis zu Theorem 4.1 zur Herleitung von Gleichung (18) verfolgt haben, erhalten wir für jedes $\tau \in (0, t_{\text{end}}]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(||d(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\right) + \int_0^\tau \gamma\ ||d(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt \\ \leq\ & \int_0^\tau ||R(t)||_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ ||d(t)||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} & ||d(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} - ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ \leq\ & -2\gamma \int_0^\tau ||d(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt + 2\int_0^\tau ||R(t)||_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ ||d(t)||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt. \end{aligned} \tag{25}$$

Für $\varepsilon > 0$ fest und beliebige $y, z \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung

$$\varepsilon y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\ z^2 - yz = \left(\sqrt{\varepsilon}\ y - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\ z\right)^2 \geq 0.$$

Mit dieser Ungleichung vereinfacht sich Gleichung (25) zu

$$\begin{aligned} ||d(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \leq\ & -2\gamma \int_0^\tau ||d(t)||^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt + \varepsilon \int_0^\tau ||R||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau ||d(t)||_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\ dt + ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\varepsilon = \frac{1}{2\gamma} > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} ||d(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \leq\ & \frac{1}{2\gamma}\int_0^\tau ||R(t)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt + ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ \leq\ & \frac{1}{2\gamma}\int_0^\tau ||R(t)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt + ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} + \int_0^\tau ||d(t)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})}\ dt. \end{aligned} \tag{26}$$

Die letzte Ungleichung ist gültig, da $||\cdot||_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \geq 0$. Auf diese Abschätzung möchten wir das Lemma von Gronwall anwenden, das folgendes besagt.

Lemma 5.1. *(Lemma von Gronwall) Sei* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *mit* $-\infty < a < b < \infty$. *Seien* φ, ψ *und* w *reelle Funktionen auf dem Intervall* I. *Wenn der negative Teil von* φ *auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von* I *integrierbar ist,* $\psi \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R}_0^+)$ *und* $w \in \mathrm{C}(I)$ *die Integralgleichung*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) w(s)\, ds$$

für jedes $t \in I$ *erfüllt, so gilt*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) e^{\left(\int_s^t \psi(r)\, dr\right)} ds$$

für jedes $t \in I$.

Vergleichen wir nun Lemma 5.1 mit (26) so können wir folgendes schließen

Theorem 5.2. *(Abschätzung des* L^2*-Fehlers) Sei* $J \in \mathbb{N}$, *so kann der Fehler* d *zwischen der approximativen Lösung* T_J *und der Lösung* T *der TADG für jedes* $\tau \in (0, t_{\mathrm{end}}]$ *abgeschätzt werden durch*

$$\begin{aligned} ||d(\tau)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \quad \leq \quad & \frac{1}{2\gamma} \int_0^\tau ||R(t)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ dt + ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \\ & + \int_0^\tau \left(\frac{1}{2\gamma} \int_0^t ||R(s)||^2_{(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^\star}\ ds + ||d(0)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{B})} \right) e^{(\tau - t)} dt. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3. Der Fehler hängt erwartungsgemäß vom Fehler zum Zeitpunkt 0 ab. Überraschenderweise hängt der Fehler aber auch vom Quell-Rand-Term R und der Koerzivitätskonstanten γ ab. Deshalb ist es möglich, dass der Fehler mit der Zeit stark anwächst.

Natürlich ist es interessant Konvergenzraten auch in anderen Räumen zu betrachten. Deshalb wird zur Zeit an einer Fehlerabschätzung in der $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$-Norm gearbeitet.

6 Fazit

Zur Modellierung des Wärmetransports in tiefen geothermischen Reservoiren haben wir in Kapitel 2 unter bestimmten vereinfachenden Annahmen an die Materialparameter Dichte, Wärmekapazität, Wärmeleitfähigkeit und Geschwindigkeit die transiente Advektions-Diffusions-Gleichung für ein zweiphasiges poröses Medium $\mathcal{B}$ bestehend aus einer festen (Gestein) und einer flüssigen (Wasser) Phase hergeleitet. Dabei haben wir den nötigen Injektions- und Extraktionspunkt in Form eines Quellterms modelliert.

Diese Gleichung ist der Grundbaustein des Anfangs-Randwert-Problems, das in der Folge (Kapitel 3) betrachtet wurde. Die Untersuchungen zur Existenz und

Eindeutigkeit einer schwachen Lösung dieses Anfangs-Randwert-Problems haben zu Spezifikationen der Funktionenräume geführt, in denen sich die Wärmeleitfähigkeit, die Fließgeschwindigkeit des Wassers, die Randwert-Funktion und der Quellterm befinden. Im weiteren Verlauf unserer Arbeit möchten wir versuchen diese Restriktionen zu verringern, um noch näher an der Realität des eigentlichen Problems der geothermischen Wärmetransportmodellierung zu bleiben. Außerdem wurde gezeigt, dass die schwache Lösung stetig ist.

Da das in Kapitel 3 entwickelte schwache Problem zur späteren numerischen Umsetzung auf Grund seiner Dimensionalität (unendlich) nicht geeignet ist, haben wir ein Verfahren zur Approximation entwickelt. Dies haben wir mit Hilfe eines linearen Galerkin Schemas basierend auf einem geeigneten Punktegitter, skalaren Kernen und Teilräumen des Sobolev-Raumes $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ getan. Konvergenzaussagen bezüglich schwacher und starker Konvergenz wurden in Theorem 4.1 in Kapitel 4 bewiesen.

Um die Güte der eingeführten Approximation abschätzen zu können, haben wir in Kapitel 5 eine Konvergenzrate in der $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$-Norm hergeleitet. Diese Fehlerabschätzung zeigt, dass der Fehler vom anfänglichen Fehler, d.h. dem Fehler zum Zeitpunkt $t = 0$, abhängt, aber auch unter anderem von dem Quell-Rand-Wert. Dies hat zur Folge, dass sich der Fehler zwischen Approximation und eigentlicher Lösung über die Zeit stark vergrößern kann. An weiteren Fehlerabschätzungen wird momentan gearbeitet.

Über die numerische Umsetzung des in dieser Arbeit entwickelten Konzepts werden wir in naher Zukunft berichten.

Dank: Diese Arbeit wurde unterstützt vom Ministerium für Umwelt, Forsten und Verbraucherschutz, Rheinland-Pfalz im Rahmen des Projekts MathGeotherm (Kapitel 14 02, Titel 686 72) und von dem vom Land Rheinland-Pfalz geförderten Exzellenzcluster Center for Mathematical and Computational Modelling ($(\mathrm{CM})^2$) der TU Kaiserslautern im Rahmen des Projekts EGMS (Projektleitung in beiden Projekten: Prof. Dr. W. Freeden (TU Kaiserslautern)).

Literatur

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975

[2] A. Arefmanesh, M. Najafi, H. Abdi, A Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Fluid Dynamics and Heat Transfer Applications, Journal of Fluids Engineering, 127:647-655, 2005

[3] J. Bartels, M. Kuhn, H. Pape, C. Clauser, A new aquifer simulation tool for coupled flow, heat transfer, multi-species transport and chemical water-rock interactions, Proceedings World Geothermal Congress, Kyushu-Tohuku, Japan, Mai 28 - June 10, 3997-4002, 2000

[4] H.-P. Cheng, G.-T. Yeh, Development and demonstrative application of a 3-D numerical model of subsurface flow, heat transfer, and reactive chemical transport: 3DHYDROGEOCHEM, Journal of Contaminant Hydrology, 34:47-83, 1998

[5] C. Clauser, J. Bartels, Numerical Simulation of Reactive Flow in Hot Aquifers: SHEMAT and Processing SHEMAT, Springer, 2003

[6] B. Cockburn, C.-W. Shu, The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems, NASA Contractor Report 201711, ICASE Report No. 97-32, 1997

[7] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, Computational Differential Equations, Cambridge University Press, 1996

[8] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 11, AMS, 1998

[9] M.J. Fengler, Vector Spherical Harmonic and Vector Wavelet Based Non-Linear Galerkin Schemes for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equation on the Sphere, Dissertation, TU Kaiserslautern, 2005

[10] W. Freeden, M. Schreiner, Spherical Functions of Mathematical Geosciences: A Scalar, Vectorial and Tensorial Setup, Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics, Springer, 2009

[11] A. Ghassemi, S. Tasarovs, A.H.-D. Cheng, An integral equation solution for three-dimensional heat extraction from planar fracture in hot dry rock, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 27:989-1004, 2003

[12] G. Houzeaux, B. Eguzkitzka, M. Vázquez, A variational multiscale model for the adection-diffusion-reaction equation, Commun. Numer. Meth. Engng., 25:787-809, 2009

[13] A. Huerta, J. Donea, Time-accurate solution of stabilized convection-diffusion-raction equations: I. Time and space discretization, Commun. Numer. Meth. Engng., 18:1-8, 2002

[14] A. Huerta, B. Roig, J. Donea, Time-accurate solution of stabilized convection-diffusion-reaction equations: II. Accuracy analysis and examples, Commun. Numer. Meth. Engng., 18:1-10, 2002

[15] W. Hundsdorfer, J.G. Verwer, Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, Springer Series in Computational Mathematics 33, Springer, 2003

[16] J.-B.A. Kamga, B. Després, CFL Condition and Boundary Conditions for DGM Approximation of Convection-Diffusion, SIAM J. Numer. Anal., 44:2245-2269, 2006

[17] T. Kohl, Modellsimulation gekoppelter Vorgänge beim Wärmeentzug aus heißem Tiefengestein, Dissertation, ETH Zürich, 1992

[18] M. Kohlmeier, Coupling of thermal, hydraulic and mechanical processes for geotechnical simulations of partially saturated porous media, Dissertation, Hannover, 2006

[19] O. Kolditz, Strömung, Stoff- und Wärmetransport im Kluftgestein: mit 72 Tabellen, Gebr. Borntraeger, Berlin-Stuttgart, 1997

[20] M. Kühn, J. Bartels, J. Iffland, Predicting reservoir property trends under heat exploitation: interaction between flow, heat transfer, transport, and chemical reactions in a deep aquifer at Stralsund, Germany, Geothermics, 31:725-749, 2002

[21] H. Lin, S.N. Atluri, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Convection-Diffusion Problems, Comp. Modeling Eng. Sci., 1:45-60, 2000

[22] J.L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 181, Springer-Verlag, 1972

[23] K.W. Morton, Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems, Applied Mathematics and Mathematical Computation 12, Chapman & Hall, 1996

[24] M.J. O'Sullivan, K. Pruess, M.J. Lippmann, State of the art of geothermal reservoir simulation, Geothermics, 30:395-429, 2001

[25] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics 23, Springer Berlin-Heidelberg, 1994

[26] M. Renardy, R.C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Texts in Applied Mathematics 13, Springer-Verlag, 1993

[27] R. Schellschmidt, B. Sanner, R. Jung, R. Schulz, Geothermal Energy Use in Germany, Proceedings World Geothermal Congress, Antalya, Turkey, April 24-29, 2005

[28] R. Temam, Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979

[29] J. Wloka, Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1987

[30] M. Zerroukat, H. Power, C.S. Chen, A Numerical Method for Heat Transfer Problems Using Collocation and Radial Basis Functions, Int. J. Numer. Meth. Engng., 42:1263-1278, 1998

Folgende Berichte sind erschienen:

2003

Nr. 1 S. Pereverzev, E. Schock.
On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems

Nr. 2 W. Freeden, M. Schreiner.
Multiresolution Analysis by Spherical Up Functions

Nr. 3 F. Bauer, W. Freeden, M. Schreiner.
A Tree Algorithm for Isotropic Finite Elements on the Sphere

Nr. 4 W. Freeden, V. Michel (eds.)
Multiscale Modeling of CHAMP-Data

Nr. 5 C. Mayer
Wavelet Modelling of the Spherical Inverse Source Problem with Application to Geomagnetism

2004

Nr. 6 M.J. Fengler, W. Freeden, M. Gutting
Darstellung des Gravitationsfeldes und seiner Funktionale mit Multiskalentechniken

Nr. 7 T. Maier
Wavelet-Mie-Representations for Soleniodal Vector Fields with Applications to Ionospheric Geomagnetic Data

Nr. 8 V. Michel
Regularized Multiresolution Recovery of the Mass Density Distribution From Satellite Data of the Earth's Gravitational Field

Nr. 9 W. Freeden, V. Michel
Wavelet Deformation Analysis for Spherical Bodies

Nr. 10 M. Gutting, D. Michel (eds.)
Contributions of the Geomathematics Group, TU Kaiserlautern, to the 2nd International GOCE User Workshop at ESA-ESRIN Frascati, Italy

Nr. 11 M.J. Fengler, W. Freeden
A Nonlinear Galerkin Scheme Involving Vector and Tensor Spherical Harmonics for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equation on the Sphere

Nr. 12 W. Freeden, M. Schreiner
Spaceborne Gravitational Field Determination by Means of Locally Supported Wavelets

Nr. 13 F. Bauer, S. Pereverzev
Regularization without Preliminary Knowledge of Smoothness and Error Behavior

Nr. 14 W. Freeden, C. Mayer
Multiscale Solution for the Molodensky Problem on Regular Telluroidal Surfaces

Nr. 15 W. Freeden, K. Hesse
Spline modelling of geostrophic flow: theoretical and algorithmic aspects

2005

Nr. 16 M.J. Fengler, D. Michel, V. Michel
Harmonic Spline-Wavelets on the 3-dimensional Ball and their Application to the Reconstruction of the Earth's Density Distribution from Gravitational Data at Arbitrarily Shape Satellite Orbits

Nr. 17 F. Bauer
Split Operators for Oblique Boundary Value Problems

Nr. 18 W. Freeden, M. Schreiner
Local Multiscale Modelling of Geoidal Undulations from Deflections of the Vertical

Nr. 19 W. Freeden, D. Michel, V. Michel
Local Multiscale Approximations of Geostrophic Flow: Theoretical Background and Aspects of Scientific Computing

Nr. 20 M.J. Fengler, W. Freeden, M. Gutting
The Spherical Bernstein Wavelet

Nr. 21 M.J. Fengler, W. Freeden,
A. Kohlhaas, V. Michel, T. Peters
Wavelet Modelling of Regional and Temporal Variations of the Earth's Gravitational Potential Observed by GRACE

Nr. 22 W. Freeden, C. Mayer
A Wavelet Approach to Time-Harmonic Maxwell's Equations

Nr. 23 M.J. Fengler, D. Michel, V. Michel
Contributions of the Geomathematics Group to the GAMM 76th Annual Meeting

Nr. 24 F. Bauer
Easy Differentiation and Integration of Homogeneous Harmonic Polynomials

Nr. 25 T. Raskop, M. Grothaus
On the Oblique Boundary Problem with a Stochastic Inhomogeneity

2006

Nr. 26 P. Kammann, V. Michel
Time-Dependent Cauchy-Navier Splines and their Application to Seismic Wave Front Propagation

Nr. 27 W. Freeden, M. Schreiner
Biorthogonal Locally Supported Wavelets on the Sphere Based on Zonal Kernel Functions

Nr. 28 V. Michel, K. Wolf
Numerical Aspects of a Spline-Based Multiresolution Recovery of the Harmonic Mass Density out of Gravity Functionals

Nr. 29 V. Michel
Fast Approximation on the 2-Sphere by Optimally Localizing Approximate Identities

Nr. 30 M. Akram, V. Michel
Locally Supported Approximate Identities on the Unit Ball

2007

Nr. 31 T. Fehlinger, W. Freeden, S. Gramsch, C. Mayer, D. Michel, and M. Schreiner
Local Modelling of Sea Surface Topography from (Geostrophic) Ocean Flow

Nr. 32 T. Fehlinger, W. Freeden, C. Mayer, and M. Schreiner
On the Local Multiscale Determination of the Earth's Disturbing Potential From Discrete Deflections of the Vertical

Nr. 33 A. Amirbekyan, V. Michel
Splines on the 3-dimensional Ball and their Application to Seismic Body Wave Tomography

Nr. 34 W. Freeden, D. Michel, V. Michel
Product Framelet Based Operator Decomposition

Nr. 35 M. Schreiner
The Role of Tensor Fields for Satellite Gravity Gradiometry

Nr. 36 H. Nutz, K. Wolf
Time-Space Multiscale Analysis by Use of Tensor Product Wavelets and its Application to Hydrology and GRACE Data

2008

Nr. 37 W. Freeden, M. Gutting
On the Completeness and Closure of Vector and Tensor Spherical Harmonics

Nr. 38 W. Freeden, K. Wolf
Klassische Erdschwerefeld-bestimmung aus der Sicht moderner Geomathematik

Nr. 39 W. Freeden, T. Fehlinger, M. Klug, D. Mathar, K. Wolf
Classical Globally Reflected Gravity Field Determination in Modern Locally Oriented Multiscale Framework

Nr. 40 G. Hebinger, V. Michel, M. Richter, A. Simon
Speech Recognition Support of Assisted Living

Nr. 41 P. Berkel, V. Michel
On Mathematical Aspects of a Combined Inversion of Gravity and Normal Mode Variations by a Spline Method

2009

Nr. 42 W. Freeden, C. Gerhards
Poloidal and Toroidal Field Modeling in Terms of Locally Supported Vector Wavelets

Nr. 43 M. Grothaus, T. Raskop
The Outer Oblique Boundary Problem of Potential Theory

Nr. 44 F. Bauer, M. Gutting
Locally Compact Orthogonal Wavelets on the Sphere

Nr. 45 I. Ostermann
Wärmetransportmodellierung in tiefen geothermischen Systemen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Informationen:

Prof. Dr. W. Freeden
Prof. Dr. M. Grothaus
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Kaiserslautern
Postfach 3049
D-67653 Kaiserslautern
E-Mail: freeden@mathematik.uni-kl.de
grothaus@mathematik.uni-kl.de