<u>Eine transfinite Zahl als Grenzwert</u>

von Thomas Limberg, am 03.04.2010

Ist im Folgenden von reellen Zahlen, Zahlenfolgen, o.Ä. die Rede, so sollen damit stets die nichtnegativen reellen Zahlen, Zahlenfolgen, o.Ä. gemeint sein, es sei denn wir möchten explizit davon abweichen.

Unendlichkeit tritt in der Mathematik an verschiedenen Stellen auf. Die beiden bedeutendsten sind dabei die Analysis und die Mengenlehre. Dort haben sich unabhängig voneinander zwei Erscheinungsformen des Unendlichen entwickelt. Über die anfängliche Situation lässt sich Folgendes sagen: In der Analysis taucht Unendlichkeit bei Grenzwertprozessen auf. So kann eine reelle Zahlenfolge gegen eine reelle Zahl konvergieren oder sie kann "gegen Unendlich divergieren" (wenn man bstimmte Definitionen nutzt - siehe weiter unten - kann man auch sagen: "gegen Unendlich konvergieren"), also über jede Schranke hinaus anwachsen. In der Mengenlehre tritt Unendlichkeit bei der Mächtigkeit von Mengen auf, wie z.B. den natürlichen, rationalen und reellen Zahlen. Zu Beginn hatten die Menschen nur eine vage Vorstellung vom Unendlichen. Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton entwickelten die Grundlagen der Infinitesimalrechnung und damit des mathematischen Fachgebietes der Analysis. Später erfuhr der Grenzwertbegriff noch einige Veränderungen hin zur heutigen Form. Damit existierete erstmals eine präzise mathematische Beschreibung des Unendlichen in dieser Erscheinungsform. So ist der Limes einer reellen Zahlenfolge ist definiert als:

Def. 1: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strebt gegen Unendlich, in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ oder $\lim a_n=\infty$ n.D. g.d.w. $\forall\, x\in\mathbb{R}_+ \exists\, N\in\mathbb{N}\, \forall\, N\le n\in\mathbb{N}: a_n>x$.

Auch in der Mengenlehre gab es eine Präzisierung des Unendlichkeitsbegriffres. Bahnbrechende Entdeckungen machte hier Georg Cantor, der transfinite Kardinalzahlen für die Mächtigkeit von Mengen einführte. Er fand heraus, dass die Menge der reellen Zahlen mächtiger ist als die Menge der natürlichen und rationalen Zahlen. Und dass es ein unendlich großes System unendlich mächtiger Mengen gibt, von denen die eine mächtiger ist als die andere. Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen ist $\aleph_0$, die nächstgrößere Mächtigkeit ist $\aleph_1$, es folgen $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$, u.s.w. Fassen wir zusammen: Vorher gab es nur ein einziges Unendlich, welches durch das Symbol ∞ repräsentiert wurde. Es wurde keine weitere Unterscheidung oder Aufteilung gemacht dahingehend, dass es unterschiedlich große Unendlichs geben könnte. Später hat man in dem einen Zweig der Mathematik, wo Unendlichkeit auftritt, der Mengenlehre, eine feinere Struktur des Unendlichen entdeckt. In dem anderen Zweig der Mathematik, der Analysis, wird jedoch weiterhin nur ein einziges Unendlich verwendet. Daraus ergibt sich aber nun ein Problem. Denn in beiden Fällen liegt ja derselbe Gegenstand, der des Unendlichen, vor, nur halt in unterschiedlichen Erscheinungsformen. Man möchte diese beiden Ausprägungen wieder miteinander in Verbindung setzen, indem die Feinstruktur des Unendlichen aus der Mengenlehre auf die Erscheinungsform in der Analysis, übertragen wird.

Dazu stellt sich die Frage, gegen welches Unendlich (also gegen welche transfinite Kardinalzahl) konvergiert eine Zahlenfolge ? Man kann sich nun mehrere Möglichkeiten vorstellen, wie der Grenwzertbegriff auf transfinite Kardinalzahlen erweitert werden könnte. Dazu zwei Argumentationen:

Argumentation 1: Der Grenzwert von Zahlenfolgen, die ins Unendliche wachsen, sollte dort seine logische Fortsetzung finden, indem stetige Funktionen stetig bleiben, denn dieses Verfahren ist ein häufig angewendetes, wenn man z.B. reelle Funktionen o.Ä. verallgemeinert. So kann man $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}:=(n)$ auf $\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\}$ erweitern, indem man einfach $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\}}:=(n)$ setzt. Analog verhält es sich z.B. bei der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\}}:=(n^2)$. Anders sieht es aber bei einer exponentiellen Folge aus, z.B. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}:=(2^n)$. Hier ist $d_{\aleph_0}:=2^{\aleph_0}=\mathfrak{C}$. Da diese Folgen, als reelle Funktionen betrachtet, bisher überall stetig sind, würde man erwarten, dass dies auch im Unendlichen zutrifft und man würde schreiben:

$\lim b_n=\lim c_n=\aleph_0$ und $\lim d_n=\mathfrak{C}$.

Argumentation 2: Betrachten wir das Anwachsen der oben definierten Folgen (b_n) und (d_n) im Bereich der natürlichen Zahlen. Jedes Folgenglied b_N , $N\in\mathbb{N}$, wird von einem Folgenglied von (d_n) , z.B. d_N , überstiegen. Aber auch andersherum gilt: Jedes Folgenglied d_N , $N\in\mathbb{N}$, wird von einem Folgenglied von (b_n) , z.B. b_{2^N+1} , überstiegen. Beide Folgen müssen also gegen denselben unendlichen Wert konvergieren. Für alle reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sollte gelten:

$\forall\, x\in\mathbb{R}_+ \exists\, N\in\mathbb{N}\, \forall\, N\leq n\in\mathbb{N}: a_n>x \;\Leftrightarrow:\; \lim a_n=\aleph_0$.

Dann wäre:

$\lim b_n=\lim c_n=\lim d_n=\aleph_0$

Oder man könnte in diesem Fall schreiben:

$\lim\limits_{x\to\aleph_0} b_n=\lim\limits_{x\to\aleph_0} c_n=\lim\limits_{x\to\aleph_0} d_n=\aleph_0$.

Beide Möglichkeiten haben zunächst ihre Berechtigung, denn es handelt nsich bei ihnen um Definitionen. Die Definition des Grenzwertes einer reellen Zahlenfolge unterscheidet nämlich zwei Fälle.

Def. 2: Fall 1: Der (potentielle) Grenzwert a liegt in $\mathbb{R}_+$. Dann definiert man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, N \geq n \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \quad .$$

Fall 2: Die Folge strebt gegen Unendlich. Hier definiert man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, N \leq n \in \mathbb{N} : a_n > x \quad .$$

Definitionen sind aber (selbst-)gewählte Festlegungen. Man könnte also gemäß Argumentation 2 im Fall 1 statt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, auch $\lim\limits_{n\to\aleph_0} a_n = a$, und, im Fall 2, statt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ auch einfach $\lim\limits_{n\to\aleph_0} a_n = \aleph_0$ schreiben und dies damit so festlegen. Eine solche Verfahresweise wäre aber unbefriedigend, denn Jeder könnte den Grenzwert im Unendlichen so definieren, wie es ihm beliebt. Wenn man es aber genau betrachtet, ist es doch so, dass es sich im Fall 1 und 2 um denselben mathematischen Begriff handelt. Es ist somit wünschenswert, dass seiner Definition ein höheres Konzept zugrunde gelegt wird, das die Fälle 1 und 2 vereint und aus dem somit die Schreibweise im Fall 2 folgen würde. Dem Grenzwertbegriff soll also eine allgemeine Definition zugrundelegt werden.

Eine solche Defintion des Grenzwertes findet man in der Topologie. Sie sieht folgendermanßen aus:

Def. 3: Betrachten wir den topologischen Raum bestehend aus einer Menge M und einer Topologie sowie eine Folge mit Gliedern $a_n \in M$, eine Zahl $a \in M$ und die Umgebungen $\tilde{U}(a)$ bzw. eine Umgebungsbasis $\mathscr{B}(a)$ von a.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, U \in \tilde{U}(a) \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, N \leq n \in \mathbb{N} : a_n \in U$$

$$:\Leftrightarrow \quad \forall\, B \in \mathscr{B}(a) \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, N \leq n \in \mathbb{N} : a_n \in B \quad .$$

Nun kann man den topologischen Raum aus der Menge $\mathbb{R}_+$ und der Ordnungstopologie verwenden und Umgebungsbasen $\mathscr{B}(a)$ folgendermaßen wählen:

$\mathscr{B}(0) := \{[0\,; x[: x \in \mathbb{R}_+^*\}$ und für $a \in \mathbb{R}_+^*$ wählen wir

$\mathscr{B}(a) := \{]a - \varepsilon\,; a + \varepsilon[: \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \varepsilon < a\}$. Die Vereinigung des Grenzwertbegriffes der Fälle 1 und 2 von Def. 2 erhält mann nun, indem man zu den reellen Zahlen noch ein Element, das man mit ∞ bezeichnet, hinzufügt. So entstehen die erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}_+}$. Das Element ∞ wird dabei folgendermaßen definiert:

Def. 4: ∞ steht für ein Element mit der Eigenschaft: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : x < \infty$.

Als topologischen Raum nehmen wir also die Menge $\overline{\mathbb{R}_+}$ und als Topologie erneut die Ordnungstopologie. Als Umgebungsbasis für ∞ können wir dann

$\mathscr{B}(\infty):=\{]x;\infty]:x\in\mathbb{R}_+^*\}$ wählen. Damit haben wir die Limes-Definition für die erweitrerten reellen Zahlen verallgemeinert.

Nun wollen wir herausfinden, welche Kardinalzahl wir anstelle von ∞ verwenden müssen. Dazu schauen wir uns noch einmal genau an, wie wir die erweiterten reellen Zahlen konstruiert und die Limes-Definition auf sie erweitert heben. Wir haben zunächst die reellen Zahlen genommen und ihnen ein zusätzliches Element mit bestimmten Eigenschaften hinzugefügt. Dann haben wir einen neuen topologischen Raum betrachtet, der aus der erweiterten Menge zusammen mit der Ordnungstopologie bestand. Abschließend haben wir eine Umgebungsbasis für das neue Element gewählt. Auf gleiche Weise müssen wir nun auch mit den Kardinalzahlen verfahren. Wir entfernen ∞ also zunächst wieder aus den erweiterten reellen Zahlen, gehen also von der Menge der reellen Zahlen aus, und fügen zu ihnen die Kardinalzahlen hinzu. Anschließend werden wir untersuchen, welche Kardinalzahl für das Element ∞ steht, wobei das womöglich von der jeweiligen Zahlenfolge, die betrachtet wird, abhängen kann (siehe obige 2 Argumentationen). Aus diesen beiden Argumentationen wird auch deutlich, dass uns vor allem die Kardinalzahlen bis $\mathfrak{C}$ interessieren. Wir erweitern die Menge der reellen Zahlen also erst einmal zu $\mathbb{R}_+\cup[\aleph_0;\mathfrak{C}]$, welches wir zuasmmen mit der Ordnungstopologie als topologischer Raum auffassen. Wie sehen nun die Umgebungen von transfiniten Kardinalzahlen aus? Das ist eine schwierige Frage, denn wir wissen ja nicht einmal, wie genau die Zusammensetzung der Kardinalzahlen zwischen $\aleph_0$ und $\mathfrak{C}$ aussieht. Gilt die Kontinuumshypothese, so besteht das obige Intervall nur aus seinen beiden Grenzen. Gilt sie hingegen nicht, so existieren zwischen diesen beiden Grenzen weitere (mindestens eine) Kardinalzahlen. Schauen wir uns einmal an, wie die Umgebungen einer bestimmten transfiniten Kardinalzahl aussehen. Transfinite Kardinalzahlen, die größer als $\aleph_0$ sind, sind von weiteren transfiniten Kardinalzahlen umgeben. Die Umgebungen von $\aleph_0$ hingegen setzen sich aus zwei verschiedenen Teilen zusammen. Im unteren Teil (also für Zahlen $<\aleph_0$) finden wir reelle Zahlen, im oberen Teil andere transfinite Kardinalzahlen. Aus Argumentation 1 und 2 (oben) geht hervor, dass $\aleph_0$ für uns eine große Rolle spielt. Wir untersuchen also für's Erste seine Umgebungen. Als Umgebungsbasis für $\aleph_0$ finden wir

$\mathscr{B}(\aleph_0):=\{]x;\kappa[:x\in\mathbb{R}_+^*,\kappa\in]\aleph_0;\mathfrak{C}]\}$. Damit können wir nun untersuchen, ob eine Folge reeller Zahlen den Grenzwert $\aleph_0$ hat, nämlich:

$$\begin{aligned}\lim a_n=\aleph_0 \;&\Leftrightarrow\; \forall B\in\mathscr{B}(\aleph_0)\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall N\le n\in\mathbb{N}: a_n\in B\\ &\Leftrightarrow\; \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\kappa\in]\aleph_0;\mathfrak{C}]\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall N\le n\in\mathbb{N}: a_n\in]x;\kappa[\end{aligned}$$

Da $\forall\, n\in\mathbb{N}: a_n\in\mathbb{R}_+$ ist $\forall\, n\in\mathbb{N}: a_n<\aleph_0$, also:

$$\lim a_n=\aleph_0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, x\in\mathbb{R}_+^*\, \exists\, N\in\mathbb{N}\, \forall\, N\leq n\in\mathbb{N}: a_n\in\,]x\,;\aleph_0[$$
$$\Leftrightarrow\; \forall\, x\in\mathbb{R}_+\, \exists\, N\in\mathbb{N}\, \forall\, N\leq n\in\mathbb{N}: a_n>x$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit der Definition des Limes in Def. 2, Fall 2. D.h. also, jede Folge, die im klassischen Sinne gegen Unendlich strebt, hat in der allgemeinen topologischen Grenzwertdefinition den Grenzwert $\aleph_0$. Diese Erkenntnis ist konform zu der Aussage von Bertrand Russell in seiner 1919 erschienenen "Introduction to Mathematical Philosophy", in der es zu deutsch heitßt:

> "Die Kardinalzahl $\aleph_0$ ist der Limes (der Größe nach) der Kardinalzahlen 1, 2, 3, ... n, ... , obwohl der numerische Unterschied zwischen $\aleph_0$ und einer endlichen Kardinalzahl konstant unendlich ist: Vom quantitativen Gesichtspunkt aus streben die endlichen Zahlen nicht gegen $\aleph_0$. Die Zahl $\aleph_0$ ist deshalb der Limes der endlichen Zahlen, weil sie in der Zahlenfolge unmittelbar nach ihnen kommt; dies ist eine Ordnungs- und nicht eine Größenbeziehung."

Wir müssen also oben die Argumentation 1 verwerfen und Argumentation 2 anerkennen. Doch was bedeutet dies für die Exponentialfunktion (zur Basis 2)? Es ist schwer zu glauben, aber es sieht so aus, als dass sie bei $\aleph_0$ eine Unstetigkeitsstelle hat, denn

$$2^{\aleph_0}=\mathfrak{C}\neq\aleph_0=\lim_{n\to\aleph_0} 2^n \quad .$$

Wir haben erkannt, dass es möglich ist, eine der von Georg Cantor entdeckten transfiniten Kardinalzahlen als Grenzwert aufzufassen, und den Grenzwertbegriff auf $\mathbb{R}_+\cup\{\aleph_0\}$ erweitert. Nun wollen wir untrersuchen, welche Auswirkungen dies auf die Rechenregeln für Grenzwerte hat. Sei $x\in\mathbb{R}_+\cup\aleph_0$. Wir finden $n\in\mathbb{N}\cup\aleph_0$ mit $x\leq n$. Es ist $\aleph_0\leq\aleph_0+x\leq\aleph_0+n=\aleph_0$, also $\aleph_0+x=\aleph_0$. Wenn $x\geq 1$, so ist $\aleph_0\leq\aleph_0\cdot x\leq\aleph_0\cdot n=\aleph_0$, also $\aleph_0\cdot x=\aleph_0$. Für $0<x<1$ existiert $n\in\mathbb{N}\cup\aleph_0$ mit $\frac{1}{n}<x$. Dann ist $\aleph_0=\frac{\aleph_0}{n}\leq\aleph_0\cdot x\leq\aleph_0$. Also für alle $x\in\mathbb{R}_+^*\cup\aleph_0$ ist $\aleph_0\cdot x=\aleph_0$.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\aleph_0} a_n=\aleph_0$ und $\lim_{n\to\aleph_0} b_n=x$ und $x\in\mathbb{R}_+\cup\aleph_0$. Dann ist $\lim_{n\to\aleph_0}(a_n+b_n)=\aleph_0$. Für $x\neq 0$ ist zudem $\lim_{n\to\aleph_0}(a_n\cdot b_n)=\aleph_0$.

Es ist also wie gehabt, für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$\lim_{n\to\aleph_0}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\aleph_0}a_n+\lim_{n\to\aleph_0}b_n$ sowie $\lim_{n\to\aleph_0}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\aleph_0}a_n\cdot\lim_{n\to\aleph_0}b_n$ außer im Falle

$\lim_{n\to\aleph_0}a_n=0\wedge\lim_{n\to\aleph_0}b_n=\aleph_0$ und $\lim_{n\to\aleph_0}a_n=0\wedge\lim_{n\to\aleph_0}b_n=\aleph_0$. Hier ist nämlich $\aleph_0\cdot 0=0$,

wohingegen z.B. $\lim_{n\to\aleph_0}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\cdot(n)\right)=1$. Aber es gibt auch Fälle mit Übereinstimmung, z.B.

$\lim_{n\to\aleph_0}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\cdot(1)\right)=0$.

Unser wesentliches Resultat ist also, dass eine Operation mit Unendlich (genauer, einer transfiniten Kardinalzahl) nicht immer über Grenzwertprozesse ausgeführt werden kann. Dass also das Ergebnis einer Operation mit Unendlich nicht mit dem Grenzwert dieser Operation, angewendet auf die als Grenzwertprozess aufgefassten Operanden, übereinstimmen muss. So ist $\aleph_0\cdot 0=0$ während $\lim_{n\to\aleph_0}(a_n\cdot b_n)$ für

$\lim_{n\to\aleph_0}a_n=\aleph_0\wedge\lim_{n\to\aleph_0}b_n=0$ verschiedene Werte zulässt. Außerdem ist $2^{\aleph_0}\neq\lim_{n\to\aleph_0}2^n$.