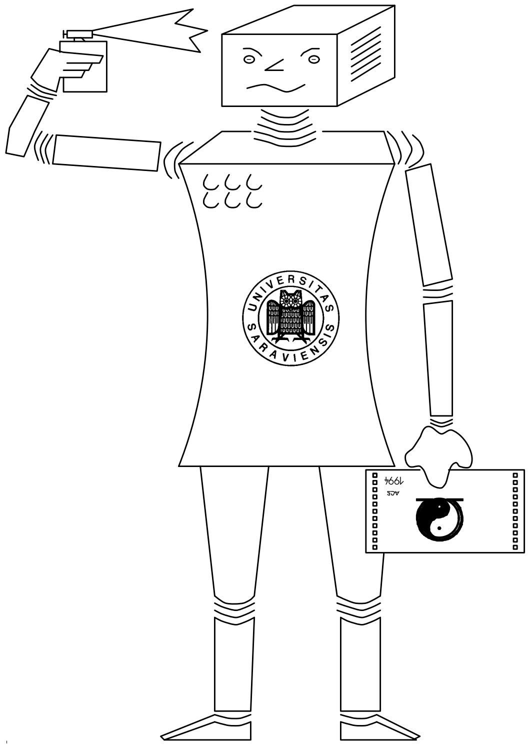
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHBEREICH INFORMATIK
D-66041 SAARBRÜCKEN
GERMANY
WWW: http://js-sfbsun.cs.uni-sb.de/pub/www/



Mehrwertige Logiken in der KI

Manfred Kerber

Published as: Script of a lecture, Winter 1992/93, Fachbereich Informatik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany

Mehrwertige Logiken in der KI

– Skript zur Vorlesung –

Wintersemester 1992/93

Manfred Kerber
Fachbereich Informatik
Universität des Saarlandes

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Übersicht über KI-Logiken

In der Künstlichen Intelligenz gibt es traditionell zwei Hauptrichtungen: eine, die die Logik als die Grundlagenwissenschaft der Künstlichen Intelligenz (KI) ansieht, so wie die Analysis Grundlagenwissenschaft der Physik seit dem 17. Jahrhundert ist [Sie92]. Hauptvertreter dieser Richtung ist John McCarthy. In der anderen Richtung, deren Hauptvertreter Marvin Minsky ist, wird der Einfluß der Logik im Gegenzug für geradezu hemmend gehalten und es werden andere Repräsentationsformen und Schlußweisen vorgezogen. Unbestritten aber scheint, daß ebenso wie die Physik in erheblichem Maße die Entwicklung der Analysis bestimmt hat, seit der Entstehung der KI in den 50er Jahren, diese Wissenschaft starken Einfluß auf die Entwicklung im Bereich Logik ausgeübt hat. Dies liegt vor allem daran, daß die klassische Logik für viele Anwendungen in der Logik nicht geeignet ist.

1.1 Klassische Logik und Nichtstandard-Logiken

Unter klassischer Logik versteht man die Aussagenlogik oder die Prädikatenlogik erster Stufe. Beide Logiken werden im nächsten Abschnitt kurz vorgestellt, da Nichtstandard-Logiken am einfachsten durch den Vergleich zur klassischen Logik erklärt werden können. Man kann wie in [Tur84, S.11] die Nichtstandard-Logiken grob in zwei Gruppen unterteilen:

1. in solche, die die klassische Logik *erweitern* und
2. in solche, die sich als *Alternative* zur klassischen Logik darstellen.

Zur ersten Gruppe gehören Modallogiken, Temporallogiken, Logiken höherer Stufe und Sortenlogiken. In allen diesen Systemen wird die Syntax der zugrundeliegenden Sprache gegenüber der klassischen Logik erweitert.
Zur zweiten Gruppe gehören die mehrwertigen Logiken und die Fuzzylogik, die im weiteren behandelt werden, sowie intuitionistische Logik und konstruktive Logik, die zwar (oft) die gleiche Sprache verwenden, aber einen anderen Tautologiebegriff haben.

Zum Beispiel gilt in klassischer Logik das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten $P \vee \neg P$, in intuitionistischer Logik oder in mehrwertigen Logiken aber nicht mehr.
Eine andere Klassifizierung von nichtklassischen Logiken kann entsprechend dem Abweichen von wichtigen Prinzipien der klassischen Logik erfolgen [Got90, S.19].

1. Ein Prinzip ist die *Zweiwertigkeit*, das heißt in der Semantik wird jeder Formel der Wert $\mathsf{1}$ oder $\mathsf{0}$ zugeordnet, wobei $\mathsf{1}$ für „wahr" und $\mathsf{0}$ für „falsch" steht; dieses Prinzip wird in den mehrwertigen Logiken und der Fuzzylogik aufgehoben.

2. In den Modallogiken gilt das *Extensionalitätsprinzip* nicht mehr, das heißt der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage läßt sich nicht mehr allein aus den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile bestimmen.

3. Klassische Logik ist *explosiv*, das heißt aus einem Widerspruch kann man beliebige Aussagen folgern. Somit muß man sich vor Widersprüchen hüten, da sonst jeder Unsinn hergeleitet werden kann. Will man auch bei Widersprüchen noch sinnvoll schließen, so muß man zu Parakonsistenten Logiken übergehen.

4. Ein weiteres Prinzip klassischer Logik ist die *Monotonie*: Folgt eine Formel φ aus einer Formelmenge Γ, so folgt φ auch aus jeder Obermenge von Γ. Die Abweichung von diesem Prinzip gibt den Nichtmonotonen Logiken ihren Namen.

In den folgenden beiden Abschnitten soll ein knapper Überblick über die in der KI verwendeten Logiken gegeben werden, wobei sowohl die Einteilung als auch die Einzeldarstellungen stark vereinfacht sind.
Entsprechend den beiden klassischen Logiken Aussagenlogik und Prädikatenlogik werden die Logiken auch für den aussagenlogischen und den prädikatenlogischen Fall unterschieden.

1.2 Erweiterungen der klassischen Logik

Gewisse Sachverhalte lassen sich in klassischer Logik Prädikatenlogik nur unzureichend beschreiben und operationalisieren. Statt dessen werden Erweiterungen der klassischen Logik betrachtet. Teilweise sind diese schon sehr alt, teilweise erst in der KI entstanden. Alle haben allerdings durch die KI neue Aktualität erhalten.

1.2.1 Logik höherer Stufe

Diese Logik kommt der mathematischen Fachsprache von allen hier aufgeführten Logiken am nächsten. Sie stellt gegenüber der Prädikatenlogik erster Stufe eine Erweiterung darhingehend dar, daß in ihr auch über Prädikatssymbole und Funktionssymbole quantifiziert werden darf und daß Prädikate über Prädikate erlaubt sind. Ein typisches Beispiel für einen Ausdruck zweiter Stufe ist das Peano-Axiom, das

das Prinzip der vollständigen Induktion beschreibt:

$$\forall P \quad P(0) \wedge (\forall n\ P(n) \Rightarrow P(s(n))) \\ \Rightarrow (\forall n\ P(n))$$

In Worten: Wenn eine *Eigenschaft*, das heißt ein Prädikat, für die Null gezeigt werden kann und wann immer sie für eine natürliche Zahl gilt, dann gilt sie auch für deren Nachfolger, dann gilt sie für alle natürliche Zahlen. Dieses Axiom ist deshalb höherer Stufe, da hier über *alle* Prädikate gesprochen wird. (Quantifizierung: $\forall P$).
Ein wesentlicher Unterschied von Logik höherer Stufe im Vergleich zu Logik erster Stufe ist, daß es bezüglich der üblichen Semantik keine korrekten und vollständigen Kalküle mehr gibt. Die Unterscheidung zwischen Logik erster Stufe und der höherer Stufe hat sich 1915 herausgebildet. In Logik erster Stufe gilt der Satz von Löwenheim-Skolem, in Logik höherer Stufe nicht mehr [Löw15, Sko19]. Wesentlich für die Erarbeitung einer korrekten Logik waren die Arbeiten von Gottlieb Frege, Bertrand Russell und Alonzo Church [Fre79, Rus08, WR10, Chu40]. Für eine Einführung in die Logik höherer Stufe vergleiche auch [And86, Koh92].

1.2.2 Sortenlogiken

Sortenlogiken stellen Erweiterungen der Syntax von entsprechenden unsortierten Logiken dar. Diese Erweiterungen lassen sich im Prinzip zu allen Logiken bilden, am weitesten entwickelt sind sie für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Sie entsprechen dem üblichen Vorgehen von Menschen ihren Diskursraum so zu strukturieren, daß für Objekte verschiedener Art auch verschiedene Symbole verwendet werden. Dadurch kann zum einen eine kompaktere Darstellung gefunden werden, zum anderen ist der Suchraum bei der Suche nach Beweisen erheblich kleiner. Formal stehen in der einfachsten Variante Sorten für bestimmte einstellige Prädikatssymbole. Zum Beispiel schreibt man in sortierter Logik $\forall n{:}\mathbb{N}\quad \mathrm{gerade}(n) \vee \mathrm{ungerade}(n)$. In unsortierter Logik liest sich dies in der sogenannten Relativierung als: $\forall n\quad \mathbb{N}(n) \Rightarrow (\mathrm{gerade}(n) \vee \mathrm{ungerade}(n))$. Sortenlogiken erster Stufe wurden von Arnold Oberschelp, Christoph Walther und Manfred Schmidt-Schauß [Obe62, Wal82, SS89] untersucht.

1.2.3 Modallogik

Modallogiken behandeln die Konzepte „Notwendigkeit" und „Möglichkeit". Zur Beschreibung werden sogenannte Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ verwendet. $\Box\varphi$ steht dabei für „φ ist notwendigerweise wahr" und $\Diamond\varphi$ für „φ ist möglicherweise wahr". Damit ist es möglich, Sachverhalte zu beschreiben, wie „Wenn es möglich ist, daß es regnet, ist es nicht nötig den Garten zu gießen $((\Diamond R) \Rightarrow (\neg\Box G))$."
Modallogiken selbst sind sehr alt und wurden schon von Aristoteles untersucht. Die Semantik von Modallogiken ergibt sich durch die sogenannte mögliche Weltensemantik von Saul Kripke [Kri63]. Um die Semantik genau festzulegen, werden verschiedene Erreichbarkeitsrelationen der Welten betrachtet. Je nach Interpretation der Modaloperatoren erhält man verschiedene Modallogiken und man kann mit ihnen ver-

schiedene Konzepte modellieren: Wissen (Wissen/Glauben) *epistemische Logik*, Zeit (Ereignis ist notwendig/möglich in der Zukunft) *Temporallogik*, normative Aussagen (es ist geboten, es ist erlaubt) *deontische Logik*, aber es sind im Bereich der *dynamischen Logik* auch Aussagen über Computerprogramme möglich.
In der Korrespondenztheorie [Ben84, Ohl88] werden Aussagen der Modallogik in Aussagen der Logik höherer Stufe (und diese wiederum oft in Aussagen der Prädikatenlogik erster Stufe) übersetzt.

1.3 Alternativen zur klassischen Logik

Während im vorigen Abschnitt Logiken untersucht wurden, die die Syntax und Semantik der klassischen Logik erweitern, werden in diesem Abschnitt Logiken vorgestellt, die bei teilweise gleicher Syntax eine andere Semantik (Bedeutung) haben.

1.3.1 Mehrwertige Logiken

Mehrwertige Logiken weichen vom Prinzip der Zweiwertigkeit ab, den logischen Formeln werden nicht mehr nur die Werte $\mathsf{1}$ und $\mathsf{0}$ zugeordnet sondern auch noch mögliche Zwischenwerte wie $\mathsf{1/2}$, mit denen so etwas wie „vielleicht“ modeliert werden kann. Mehrwertige Logiken wurden zuerst von Jan Łukasiewicz und Emil Post 1920 eingeführt, teilweise erst als dreiwertige Logik und später von ihnen und anderen verallgemeinert. Gewisse Sätze die in klassischer Logik allgemeingültig sind, wie zum Beispiel $P \vee \neg P$, sind es in mehrwertiger Logik nicht mehr.
Mehrwertige Logiken lassen sich gut einsetzen, um Partialität zu formalisieren (Partielle Logiken). In klassischer Logik geht man davon aus, daß alle Funktionen *total* sind, das heißt daß sie überall definiert sind. Damit kann man Funktionen wie $x \mapsto \frac{1}{x}$ nur unzureichend modellieren, wenn man von einem Universum ausgeht, das die Null enthält. Mit mehrwertigen Logiken hat man die Möglichkeit, Aussagen neben den Werten „wahr“ und „falsch“ auch noch den Wert „undefiniert“ zukommen zu lassen, so daß es explizit möglich ist in der Logik über Undefiniertheit zu sprechen.
Bei der Fuzzylogik geht man davon aus, daß sich gewisse Begriffe wie „warm“ oder „hat_Fieber“ nur unscharf beantworten lassen. Als Werte sind dabei nicht nur endlich viele, sondern unendlich viele Wahrheitswerte, das ganze Intervall $[0, 1]$, zugelassen.

1.3.2 Intuitionistische Logik

In einem Grundlagenstreit Anfang des Jahrhunderts ging es darum, ob die klassische Logik und die in ihr entwickelte Mengenlehre ein geeignetes Mittel zur Modellierung von Mathematik sein kann. Als ein Hauptunterschied zur klassischen Logik kann man die Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen und eng verwandten konstuktivistischen Logik ansehen. Dieses Prinzip besagt, daß wenn man zeigen kann, daß eine Formel φ falsch ist, so darf man ihr Gegenteil $\neg\varphi$ als

wahr ansehen. In der konstruktivistischen Logik ist für jede Aussage allerdings ein konstruktiver Beweis erforderlich. Will man zum Beispiel zeigen, daß jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung hat, so kann man dies im Prinzip nur dadurch tun, daß man einen Algorithmus dafür angibt. Wenn die konstruktivistische Logik in der Mathematik auch eine Außenseiterrolle spielt, so hat sie durch die Informatik und Fragen der Berechenbarkeit (insbesondere für funktionale Programme) neue Aktualität erhalten.
Zur Formalisierung intuitionistischer Logik kann man sogenannte *Dialoglogiken* verwenden, bei den Beweise als ein Wechselspiel von Behauptungen eines Proponenten, Angriffen der Behauptungen durch einen Opponenten und Erwiderungen des Proponenten betrachtet werden.

1.3.3 Parakonsistente Logiken

Da klassische Logik *explosiv* ist, das heißt aus einem Widerspruch kann man beliebige Aussagen folgern, eignet sie sich nur bedingt für Alltagsschließen, da Menschen meist mit Widersprüchen umgehen müssen und können. Deshalb sind von vielen philosphischen Ansätzen ausgehend seit den 50er Jahren parakonsistenten Logiken entwickelt worden, in den es möglich ist, trotz der Anwesenheit von Widersprüchen noch vernünftige Aussagen zu machen. Sie basieren teilweise auf der Relevanzlogik, in der die Implikation $\Rightarrow$ so definiert wird, daß die Konklusion etwas mit der Prämisse zu tun haben muß.

1.3.4 Nichtmonotone Logiken

Eine ganz andere Alternative zu den bisher erwähnten Logiken stellen die nichtmonotonen Logiken dar, in den die Revision von Wissen beschrieben wird. Das typische Beispiel ist das Schließen über einen Vogel Tweety. Wir wissen, daß Vögel fliegen können, also kann auch der Vogel Tweety fliegen. Erfahren wir aber zusätzlich, daß Tweety ein Pinguin ist, so nehmen wir diese Schlußfolgerung wieder zurück, da wir wissen, daß Pinguine nicht fliegen können. Dieses Vorgehen modelliert ziemlich gut unser Vorgehen im Alltag. Wir gehen meist davon aus, daß sich alles in gewisser Hinsicht *normal* verhält. Erst wenn Fakten uns zwingen, ändern wir unser Verhalten. Nichtmonotones Schließen wurde von John McCarthy und Ray Reiter auch zur Beschreibung des „Schließens mit gesundem Menschenverstand“ eingeführt. Die Untersuchung nichtmonotoner Logiken ist ein sehr aktives Gebiet im Bereich der KI, da bei praktisch allen realistischen Anwendungen man davon ausgehen muß, daß man allgemeine Aussagen im Einzelfall zurücknehmen muß.

1.4 Warum Mehrwertige Logiken? Zum Beispiel Antinomien

Eine *Antinomie* ist definiert als [Bro86][1].

1. allgemein: unvereinbarer Widerspruch
2. mathematische Logik: die Aussage, daß ein Satz φ und seine Negation $\neg\varphi$ gleichzeitig gültig sind (in Zeichen: $\varphi \wedge \neg\varphi$). ...
3. Philosphie: Widerstreit zweier entgegengesetzter Urteile, die mit gleich zwingenden Gründen beweisbar sind, im Unterschied zur Paradoxie[2]. ...
4. Recht: der Widerspruch zwischen zwei Rechtssätzen desselben Gesetzes. ...

Sehr viele Antinomien beruhen auf einer Selbstbezüglichkeit der Aussagen. Sie ergeben sich aber auch aus der Zweiwertigkeit der zugrundeliegenden Logik. Dies soll im folgenden anhand von einigen Beispielen erläutert werden.[3]

1.4.1 Die Antinomie vom Lügner

Diese Antinomie lautet in der einfachsten Form: Dieser Satz ist falsch.[4] Geht man von einer zweiwertigen Logik aus, so hat man zwei Möglichkeiten, entweder ist der Satz wahr oder aber er ist falsch. Ist er wahr, so muß er aufgrund seiner Aussage falsch sein, was einen Widerspruch ergibt, also kann man schließen, daß er falsch sein muß. Dann ist es aber falsch, daß er falsch ist, also muß er wahr sein. Legen wir aber zum Beispiel dreiwertige Logik zugrunde, so haben wir noch die Möglichkeit zu sagen, daß der Satz weder wahr noch falsch ist. Die Antinomie ist damit umgangen.

1.4.2 Die Russelsche Antinomie

Die Mathematik wird im allgemeinen streng auf dem Prinzip der Zweiwertigkeit gegründet, entweder ist ein Satz wahr oder aber er ist fasch.
Beim Versuch die Mathematik logisch zu fundieren hat Gottlieb Frege [Fre79] eine weitgehende Formalisierung der Mathematik erreicht. Allerdings konnte Bertrand Russell am Anfang des Jahrhunderts Widersprüche in dieser Formalisierung entdecken, von denen für einige Jahre nicht klar war, wie man sie beseitigen kann.

[1] Hier und auch bei anderen Zitaten werden die Notationen so angepaßt, daß sie in diesem Skript kohärent verwendet werden.

[2] Paradoxien und Antinomien sind miteinander verwandt und werden des öfteren sprachlich nicht unterschieden. Genau genommen handelt es sich aber bei einer Paradoxie im Gegensatz zur Antinomie nur um einen *scheinbaren* Widerspruch beziehungsweise um eine unerwartete Einsicht.

[3] Wer mehr an Antinomien und Paradoxien interessiert ist, sei auf [HB78] verwiesen.

[4] Es handelt sich hierbei um eine Abwandlung der Antinomie des Eubulides: Epimenides der Kreter sagt, daß alle Kreter Lügner sind.

Er fand die Antinomie von der Menge M aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Man denkt zuerst, daß dies eine klare Definition ist. Fragt man aber, ob M selbst zu M gehört, so gibt es wieder nur zwei Möglichkeiten.

Erster Fall: M gehört zu M. Dann ist M also keine Menge, die sich nicht selbst enthält. Somit darf M – nach der Definition von M – nicht zu M gehören. Also ist per Widerspruch gezeigt, daß dieser Fall nicht zutrifft.

Zweiter Fall: M gehört nicht zu M. Nach der Definition von M muß dann aber M zu M gehören, womit sich wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung ergibt, also auch dieser Fall nicht zutrifft.

Das heißt beide Fälle führen zu einem Widerspruch. Verzichtet man jedoch auf eine zweiwertige Logik, so läßt sich der Widerspruch so nicht mehr bilden. Man kann sagen, daß M „nicht so richtig" zu sich selbst gehört. In der Mathematik will man allerdings auf die Zweiwertigkeit der Logik meist nicht verzichten, da die Aussagen in ihr klar sein sollen. Deshalb ist man dort allgemein der Lösung Russells gefolgt, nämlich solche Konstrukte formal in der Logik auszuschließen. Russell hat dafür die sogenannte Typtheorie entwickelt.

1.4.3 Mehrwertigkeit im Alltagsschließen

Im Alltagsleben hingegen sind die Dinge oft nicht so klar und es ist durchaus nicht immer angemessen, nur klare Aussagen zuzulassen. Wenn man fragt, ob das Wetter schön ist, so ist die Antwart oft nicht klar mit „ja" oder „nein" zu geben, sondern ein „einigermaßen" ist durchaus oft angebrachter. Auch setzt man durchaus Begriffe wie „eisig", „kalt", „lauwarm", „warm" und „heiß" miteinander in Verbindung, während sie in klassischer Logik nichts miteinander zu tun haben. Im weitern werden Logiken für unscharfes Schließen vorgestellt, dabei wird wie bei Logiken üblich auf Syntax und Semantik, aber auch auf die Kalkülisierung, das heißt die Operationalisierung eingegangen. Um einen Ausgangspunkt zu haben, wird im nächsten Kapitel die klassische Logik kurz vorgestellt.

Kapitel 2

Klassische Logik

Unter klassischer Logik versteht man die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe. In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in diese Logiken gegeben, die als Ausgangspunkt für die entsprechenden mehrwertigen Logiken dienen soll. Zum vertieften Studium gibt es eine Vielzahl von einführenden Logikbüchern wie [Ric78, EFT86, Men87]. Einen Überblick über das ganze Gebiet der Logik wird in den Handbüchern [Bar77, GG89] gegeben.
Logik allgemein ist eine Sprache mit Syntax und Semantik. Wir werden im nächsten Abschnitt die Syntax und Semantik der Aussagenlogik vorstellen. Im darauffolgenden Abschnitt werden die entsprechenden Begriffe für die Prädikatenlogik erster Stufe eingeführt.

2.1 Aussagenlogik

Die erlaubten Sprachkonstrukte werden aufgebaut aus *logischen* Symbolen und *außerlogischen* Symbolen, die in der *Signatur*, der Menge aller außerlogischen Symbole zusammengefaßt werden.

2.1.1 Syntax

Die logischen Zeichen der Aussagenlogik sind der einstellige *Junktor* $\neg$ („nicht“), die zweistelligen *Junktoren* $\wedge$ („und“), $\vee$ („oder“), $\Rightarrow$ („impliziert“) und $\Leftrightarrow$ („äquivalent“) sowie die *Hilfssymbole*) und (.
Die Signatur $\mathcal{S}$ ist eine (möglicherweise leere[1]) Menge von Symbolen, die wir in der Regel mit P, Q und R bezeichnen. Benötigen wir mehr als drei, so verwenden wir auch Indizes ($P_{10}, \ldots$).
Das Grundelement einer jeden Logik ist die *Formel*. Formeln werden allgemein induktiv definiert. Für die Aussagenlogik ergibt sich:

[1]Dann ist allerdings auch die Sprache leer, somit ziemlich uninteressant.

2.1 DEFINITION (FORMELN DER AUSSAGENLOGIK): Formeln der Aussagenlogik zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

F1 Jedes Element von $\mathcal{S}$ ist eine Formel. (Diese Formeln heißen *atomar*, da sie sich nicht zerlegen lassen.)

F2 Ist φ eine Formel, so ist $(\neg\varphi)$ eine Formel.

F3 Sind φ und ψ Formeln, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ und $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ Formeln. ■

Wir vereinbaren, daß die Bindungsstärke der Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ in dieser Reihenfolge abnimmt und können somit viele überflüssige Klammern weglassen.

2.2 BEISPIEL: $(P \Rightarrow Q)$, $(P \wedge \neg P)$, $((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$, $((R \wedge P) \Rightarrow Q)$ sind Formeln der Aussagenlogik. Dabei kann P zum Beispiel für „Sokrates ist ein Mensch“, Q für „Sokrates ist sterblich“ und R für „Alle Menschen sind sterblich“ stehen. Die erste Formel liest sich dann „Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich“. ■

2.1.2 Semantik

Die Bedeutung von Formeln wird durch die Zuweisung von Wahrheitswerten erklärt.

2.3 DEFINITION (INTERPRETATION):
Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung, die von den atomaren Formeln in die Menge der Wahrheitswerte $\mathbf{W}_2 = \{0, 1\}$ geht. Auf zusammengesetzten Formeln wird sie erweitert entsprechend von Wahrheitstafeln. Die Wahrheitstafel für $\neg$ versteht sich von selbst, eine Wahrheitstafel für einen zweistelligen Junktor liest sich dabei so: Kennt man $\mathcal{I}(\varphi)$ und $\mathcal{I}(\psi)$, so ergibt sich[2] $\mathcal{I}(\varphi \star \psi)$ durch den Wahrheitswert, der in der Zeile von $\mathcal{I}(\varphi)$ und der Spalte von $\mathcal{I}(\psi)$ steht[3].

$\neg$	
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

■

2.4 BEMERKUNG:
Eine Menge von Junktoren heißt *funktional vollständig*, wenn sich jeder mögliche Junktor[4] durch eine Kombination (Ineinanderschachteln) aus ihnen ausdrücken läßt.

[2] $\star$ steht dabei für einen beliebigen zweistelligen Junktor.
[3] Ist zum Beispiel $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ und $\mathcal{I}(\psi) = 0$, so ist $\mathcal{I}(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$.
[4] Für $\mathbf{W}_2$ gibt es zum Beispiel 16 mögliche zweistellige Junktoren.

Zum Beispiel die Menge $\{\neg, \wedge\}$ ist vollständig. Zum Beispiel läßt sich $\vee$ ausdrücken durch: $(\varphi \vee \psi) \doteq (\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi))$. ∎

Nun führen wir einige Standardbegriffe der Logik ein.

2.5 Definition:

- Eine Formel φ heißt eine *Tautologie*, wenn jede Interpretation $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert **1** liefert ($\mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{1}$).
- Eine Formel φ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, die den Wahrheitswert **1** liefert. Eine solche Interpretation heißt *Modell* von φ. In Symbolen: $\mathcal{I} \models \varphi$. Entsprechend ist $\mathcal{I}$ Modell einer Formelmenge Γ, wenn $\mathcal{I}$ Modell jeder Formel in Γ ist.
- Eine Formel heißt *unerfüllbar*, wenn es keine Interpretation gibt, die den Wahrheitswert **1** liefert.
- Eine Formel φ heißt *Folgerung* einer Formelmenge Γ, wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell von φ ist. In Symbolen: $\Gamma \models \varphi$. ∎

2.6 Beispiel: Betrachten wir die Formeln aus Beispiel 2.2 $(P \Rightarrow Q)$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig. $(P \wedge \neg P)$ ist unerfüllbar. $((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$ ist allgemeingültig. $((R \wedge P) \Rightarrow Q)$ ist ebenfalls erfüllbar, aber nicht allgemeingültig. ∎

Am letzten Beispiel sehen wir die Einschränkungen der Aussagenlogik. Da die Formeln P, Q und R elementar sind, ist (vgl. die oben angenommenen Bedeutung für P, Q und R) die Formel $((R \wedge P) \Rightarrow Q)$ (also die Aussage „Wenn alle Menschen sterblich sind und wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich“) nicht allgemeingültig. Dies ist erst bei einer Darstellung in Prädikatenlogik möglich.

2.2 Prädikatenlogik erster Stufe

Wie im aussagenlogischen Fall führen wir zuerst die Syntax und dann die Semantik ein.

2.2.1 Syntax

Die logischen Zeichen der Prädikatenlogik sind:

- eine unendliche Menge von *Variablen* x, y und z (x_i),
- der einstellige *Junktor* $\neg$ („nicht“), die zweistelligen *Junktoren* $\wedge$ („und“), $\vee$ („oder“), $\Rightarrow$ („impliziert“) und $\Leftrightarrow$ („äquivalent“),
- die *Quantoren* $\forall$ („für alle“) und $\exists$ („es gibt ein“) sowie

– die *Hilfssymbole*), (und ,.

Die Signatur $\mathcal{S}$ besteht für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus einer (möglicherweise leeren) Menge von n-stelligen *Relationssymbolen*[5], die wir in der Regel mit P, Q und R bezeichnen, sowie einer (möglicherweise leeren) Menge von n-stelligen *Funktionssymbolen*, die wir in der Regel mit f, g und h bezeichnen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstante* und werden mit c, d und e bezeichnet.
Bevor wir den Begriff einer Formel definieren können, brauchen wir den Begriff „Term". Terme werden allgemein induktiv definiert.

2.7 Definition (Terme): *Terme* zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

T1 Jede Variable ist ein Term.

T2 Jede Konstante ist ein Term.

T3 Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term. ■

2.8 Definition (Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe): Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

F1 Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist P ein n-stelliges Relationsssymbol, dann ist der Ausdruck $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel. So gebildete Formeln heißen *atomar*.

F2 Ist φ eine Formel, so ist $(\neg\varphi)$ eine Formel.

F3 Sind φ und ψ Formeln, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ und $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ Formeln.

F4 Ist φ eine Formel und x eine Variable, so sind auch $(\forall x\varphi)$ und $(\exists x\varphi)$ Formeln. ■

2.9 Beispiel: Außer den Formeln der Aussagenlogik sind nun auch noch Formeln möglich, die Terme enthalten. „$\forall x$Mensch(x) $\Rightarrow$ sterblich(x)", „Mensch(Sokrates)" oder „sterblich(Sokrates)" sind entsprechende Formeln. ■

2.10 Bemerkung: Eine Variable heißt *frei* in einem Vorkommen, wenn sie nicht im Wirkunsbereich eines Quantors steht. Zum Beispiel ist x frei in $(\forall y P(x,y))$, y hingegen ist *gebunden*. Sind alle Variablen in einer Formel gebunden, so nennt man diese Formel einen *Satz*. ■

[5] Diese werden auch Prädikatensymbole genannt.

2.2.2 Semantik

Die Bedeutung von Formeln wird durch die Zuweisung von Wahrheitswerten erklärt. Allerdings ist dies nun schwieriger als im aussagenlogischen Fall.

2.11 DEFINITION (INTERPRETATION):
Eine Interpretation für Formeln der Prädikatenlogik ist ein Paar $\langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$, bestehend aus einer nicht-leeren Menge $\mathcal{U}$, dem *Universum* und einer Abbildung $\mathcal{I}$, die jeder Konstanten aus $\mathcal{S}$ ein Element aus $\mathcal{U}$ zuordnet, jedem n-stelligen Funktionssymbol aus $\mathcal{S}$ eine Funktion von $\mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ und jedem n-stelligen Relationssymbol eine n-stellige Relation über $\mathcal{U}$. Eine Belegung ξ in eine Interpretation ist eine Abbildung, die jeder Variable x ein Element aus $\mathcal{U}$ zuordnet. Eine Interpretation und eine Belegung ergeben zusammen die Bedeutung für Terme durch folgende Abbildungen:

- $\mathcal{I}_\xi(x) = \xi(x)$ für jede Variable x
- $\mathcal{I}_\xi(c) = \mathcal{I}(c)$ für jede Konstante c
- für n-stelliges Funktionssymbol f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ gilt $\mathcal{I}_\xi(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}_\xi(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\xi(t_n))$

Für Formeln wird definiert[6]:

- $\mathcal{I}_\xi \models P(t_1, \ldots, t_n))$ gdw $\mathcal{I}(P)(\mathcal{I}_\xi(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\xi(t_n))$.
- $\mathcal{I}_\xi \models (\neg\varphi)$ gdw nicht $\mathcal{I}_\xi \models \varphi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw $\mathcal{I}_\xi \models \varphi$ und $\mathcal{I}_\xi \models \psi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\varphi \vee \psi)$ gdw $\mathcal{I}_\xi \models \varphi$ oder $\mathcal{I}_\xi \models \psi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ gdw wenn $\mathcal{I}_\xi \models \varphi$ dann $\mathcal{I}_\xi \models \psi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ gdw $\mathcal{I}_\xi \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{I}_\xi \models \psi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\forall x \varphi)$ gdw für alle $a \in \mathcal{U}$ gilt $\mathcal{I}_{\xi[x \leftarrow a]} \models \varphi$
- $\mathcal{I}_\xi \models (\exists x \varphi)$ gdw es gibt ein $a \in \mathcal{U}$ mit $\mathcal{I}_{\xi[x \leftarrow a]} \models \varphi$ ■

2.12 BEMERKUNG: Für Sätze hängt der Wahrheitswert ihrer Interpretation nicht von der Belegung ab. ■

2.13 BEISPIEL: Betrachten wir die Formeln aus Beispiel 2.9. Eine intendierte Interpretation ist die folgende: Das Universum $\mathcal{U}$ ist die Menge aller Lebewesen (lebende oder verstorbene). Das Relationssymbol „Mensch“ wird auf eine Relation abgebildet, die genau für Menschen wahr ist, entsprechend wird das Relationssymbol „sterblich“

[6] gdw steht für „genau dann wenn“. $\xi[x \leftarrow a]$ ist für alle Variablen außer x identisch mit ξ und $\xi[x \leftarrow a](x) = a$.

so interpretiert, daß es genau auf sterblichen Lebewesen zu wahr ausgewertet wird. Das Konstantensymbol „Sokrates" wird auf den Menschen Sokrates abgebildet. Damit ergibt sich für die Formeln „Mensch(Sokrates)" und „sterblich(Sokrates)" als Interpretation jeweils der Wahrheitswert 1. Die Formel „$\forall x \text{Mensch}(x) \Rightarrow \text{sterblich}(x)$" ergibt auch wahr da für jedes einzelne Element $a \in \mathcal{U}$ gilt, wenn a ein Mensch ist, dann ist a auch sterblich.
Eine andere Interpretation – die natürlich nicht intendiert ist – der Formeln ist: Das Universum $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(\text{Sokrates}) = 8$, $\mathcal{I}(\text{Mensch})$ ist die Relation, die angibt, ob eine Zahl durch 4 teilbar ist und $\mathcal{I}(\text{sterblich})$ gibt an, ob eine Zahl gerade ist. Auch in diesem Fall werden alle drei Formeln zu wahr interpretiert. ■

2.3 Wichtige Eigenschaften klassischer Logik

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Eigenschaften der klassischen Logik kurz vorgestellt werden. Dazu benötigen wir noch den Begriff eines Kalküls den wir als erstes einführen.

2.14 Definition (Kalkül): Ein Kalkül ist eine Menge von *Schlußregel* zusammen mit einer Menge von *Axiom*. Ausgehend von den Axiomen kann man mit den Schlußregeln neue Formeln *ableiten*. Eine Formel φ heißt ableitbar, wenn man sie durch endliche Anwendung von Schlußregeln aus den Axiomen herleiten kann. Man schreibt $\vdash \varphi$. ■

Als Beispiel für ein Axiom diene das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten $\varphi \vee \neg\varphi$, das besagt, daß man für jede Aussage φ sie selbst oder aber ihr Gegenteil annehmen kann. Die vielleicht berühmteste Schlußregel ist der Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$$

Nimmt man zu den Axiomen noch eine Formelmenge Γ hinzu und kann dann mit den Schlußregeln aus den Axiomen und Γ eine Formel φ ableiten, so schreibt man $\Gamma \vdash \varphi$.

2.15 Definition (Korrektheit und Vollständigkeit): Ein Kalkül heißt *korrekt*, wenn immer $\Gamma \vdash \varphi$ gilt, dann gilt auch $\Gamma \models \varphi$. Gilt umgekehrt, wann immer $\Gamma \models \varphi$ dann gilt auch $\Gamma \vdash \varphi$, so heißt der Kalkül *vollständig*. ■

2.16 Bemerkung: Hat man einen korrekten und vollständigen Kalkül, so ist es möglich, die Allgemeingültigkeit von Formeln, die Beziehung $\Gamma \models \varphi$ oder die Unerfüllbarkeit von Formeln zu zeigen, ohne daß es nötig ist, konkrete Modelle zu betrachten. ■

Nun können wir wichtige Eigenschaften von Aussagenlogik und Prädikatenlogik erster Stufe formulieren:

2.17 Theorem:

- *Sowohl für die Aussagenlogik als auch für die Prädikatenlogik erster Stufe gibt es korrekte und vollständige Kalküle.*[7] *Das heißt die Semantik läßt sich vollkommen auf die Syntax zurückführen.*

- *Die Aussagenlogik ist* entscheidbar, *das heißt es gibt einen Algorithmus, der für jede aussagenlogische Formel entscheidet, ob es sich um eine Tautologie handelt oder nicht.*

- *Die Prädikatenlogik erster Stufe ist* nicht *entscheidbar, das heißt es gibt keinen Algorithmus, der für jede Formel entscheidet, ob es sich um eine Tautologie handelt oder nicht.*

- *Die Tautologien der Prädikatenlogik erster Stufe sind rekursiv aufzählbar (man sagt auch die Prädikatenlogik erster Stufe ist semi-entscheidbar), das heißt es gibt einen Algorithmus, der für jede Tautologie nach endlicher Zeit erkennt, daß es sich um eine Tautologie handelt, für andere Formeln aber nicht zu terminieren braucht.*

Desweiteren gelten sowohl für die Aussagenlogik, als auch für die Prädikatenlogik erster Stufe die Prinzipien von Seite 2:

1. *Sie sind* zweiwertig, *das heißt für jede Formel φ und jede Interpretationsabbildung $\mathcal{I}$ (und eventuelle Belegung ξ gilt $\mathcal{I}_\xi(\varphi) \in \mathbf{W}_2$ mit $\mathbf{W}_2 = \{0, 1\}$.*

2. *Es gilt das* Extensionalitätsprinzip, *das heißt die Semantik ist rekursiv definiert. (vgl. die Wahrheitstafeln)*

3. *Sie sind* explosiv, *das heißt für alle Formeln φ und ψ gilt $\varphi \wedge \neg\varphi \models \psi$.*

4. *Beide Logiken sind* monoton, *das heißt wann immer $\Gamma \models \varphi$, dann gilt auch $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.* ■

[7] Für die Aussagenlogik ist dies ziemlich trivial, da die Semantik eindeutig ist. Für die Prädikatenlogik erster Stufe handelt es sich hingegen um ein tiefliegendes Theorem, das Kurt Gödel 1930 gezeigt hat [Göd30].

Kapitel 3

Mehrwertige Aussagenlogik

Historisch gesehen findet man für mehrwertige Logiken sehr frühe Anhaltspunkte [BB92, p.23]. So hat schon Aristoteles die Gültigkeit des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten ($\varphi \vee \neg\varphi$) bezweifelt, was ja in klassischer Logik ein zentrales Gesetz darstellt. Im Altertum war dieses Gesetz ein Streitpunkt zwischen den Stoikern, die die Extremposition des Determinismus und der Eindeutigkeit der Begriffe „wahr“ und „falsch“ vertraten, und den Epikuräern, die auch Sätze zuließen, die weder absolut wahr noch absolut falsch sind.
In der Neuzeit wurden dann mehrwertige Systeme vor allem durch G. Boole und Ch. S. Peirce im letzten Jahrhundert diskutiert. Formal wurden mehrwertige aussagenlogische Systeme dann 1920 voneinander unabhängig vom polnischen Logiker Jan Łukasiewicz und dem amerikanischen Logiker Emil Post entwickelt. Wir werden im folgenden erst diese beiden Systeme vorstellen, die für beliebige endlichwertige mehrwertige Logik entwickelt wurden und im Anschluß speziell den dreiwertigen Fall betrachten.

3.1 Allgemeine Syntax mehrwertiger Aussagenlogik

Wenn wir uns ansehen, was für die Definition einer mehrwertigen Aussagelogik nötig ist, so vergleichen wir das mit der zweiwertigen Aussagenlogik. Wir müssen festlegen:

1. die Wahrheitswerte (In der klassischen Aussagenlogik sind dies die Werte aus $\mathbf{W}_2 = \{0, 1\}$.)

2. die Junktoren, die in der Regel eine endliche Menge bilden (In der klassischen Aussagenlogik bilden sie die Menge $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.)

Ganz allgemein wird die Syntax einer mehrwertigen Aussagenlogik dann definiert wie im zweiwertigen Fall, nur daß nun (eventuell) anstatt der dort vorgegebenen Junktoren die neu gewählten Junktoren beim rekursiven Aufbau der Formeln verwendet werden. Damit erhält man also:

3.1 Definition (Syntax mehrwertiger Aussagenlogik):
Die erlaubten Sprachkonstrukte werden wiederum aufgebaut aus den *logischen* Symbolen und den *außerlogischen* Symbolen, die in der *Signatur*, der Menge aller außerlogischen Symbole zusammengefaßt werden.
Die logischen Zeichen der mehrwertigen Aussagenlogik sind die *Junktoren* und die *Hilfssymbole*) und (.
Die *Signatur* $\mathcal{S}$ ist eine Menge von Symbolen, die wir in der Regel mit P, Q und R bezeichnen. Benötigen wir mehr als drei, so verwenden wir auch Indizes ($P_{10}, \ldots$).
Formeln werden allgemein induktiv definiert. Es ergibt sich:
Formeln der mehrwertigen Aussagenlogik zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

F1 Jedes Element von $\mathcal{S}$ ist eine Formel. (Diese Formeln heißen *atomar*, da sie sich nicht zerlegen lassen.)

F2 Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Formeln und ist j ein n-stelliger Junktor, so ist auch der Ausdruck $j(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine Formel.[1] ■

Benötigen wir andere Junktoren für Disjunktion, Implikation und Äquivalenz, so werden wir andere Zeichen verwenden, wie zum Beispiel $|$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Eventuell werden aber auch mehr als eine Negation und eine Konjunktion benötigt, für die wir die Zeichen $\sim$ und $\&$ verwenden.
Da es keine Rolle spielt, wie man bei endlichwertigen Systemen die Wahrheitswerte benennt, wollen wir für das folgende (meist) die folgenden Mengen von Wahrheitswerten betrachten. Die neuen Wahrheitswerte werden mit rationalen Zahlen bezeichnet, die äquidistant zwischen die Wahrheitswerte $\mathsf{0}$ und $\mathsf{1}$ eingefügt werden. Haben wir also insgesamt $n+1$ Wahrheitswerte mit $n \geq 1$,dann sind die Wahrheitswerte $\mathbf{W}_n = \left\{\mathsf{0}, \frac{\mathsf{1}}{\mathsf{n}}, \frac{\mathsf{2}}{\mathsf{n}}, \ldots, \frac{\mathsf{n-2}}{\mathsf{n}}, \frac{\mathsf{n-1}}{\mathsf{n}}, \mathsf{1}\right\}$. Konkret für dreiwertige Logik heißt das zum Beispiel, wir betrachten die Wahrheitswerte $\mathbf{W}_3 = \{\mathsf{0}, \mathsf{1/2}, \mathsf{1}\}$. In Zukunft brauchen wir also nur noch die Zahl der Wahrheitswerte festzulegen, um die Wahrheitswerte selbst zu fixieren.
Da bei den Junktoren die klassischen Junktoren $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ von besonderem Interesse sind und man bei vielen mehrwertigen Logiken diese auch verwenden will, sich aber die Junktoren $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ in der klassischen Logik durch das vollständige System von Junktoren $\{\neg, \wedge\}$ ausdrücken lassen, wollen wir ganz allgemein für das folgende festlegen, was $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ bedeuten.

3.2 Definition ($\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$): Wir definieren die zweistelligen Junktoren $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ als Abkürzungen für entsprechende Formeln mit den Junktoren $\neg$ und $\wedge$. Für alle Formeln φ und ψ gilt:

1. $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

[1] Wie bisher schreiben wir bei einstelligen Junktoren statt $j(\varphi)$ kurz $j\varphi$ und zweistellige Junktoren infix, das heißt statt $j(\varphi, \psi)$ den Ausdruck $\varphi j \psi$.

2. $\varphi \Rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

3. $\varphi \Leftrightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$ ■

3.2 Allgemeine Semantik mehrwertiger Aussagenlogik

3.3 Definition (Interpretation): Eine *Interpretation* $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung, die von den atomaren Formeln in die Menge der Wahrheitswerte $\mathbf{W}_n$ geht. Auf zusammengesetzten Formeln wird sie erweitert entsprechend von festzulegenden *Wahrheitswertfunktionen* für die Junktoren. ■

Ist zum Beispiel $\star$ ein zweistelliger Junktor und sind φ und ψ Formeln, so ergibt sich $\mathcal{I}(\varphi\star\psi)$ aus einer *Wahrheitswertfunktion* $f^\star$ angewandt auf $\mathcal{I}(\varphi)$ und $\mathcal{I}(\psi)$. Das heißt $\mathcal{I}(\varphi \star \psi) = f^\star(\mathcal{I}(\varphi), \mathcal{I}(\psi))$. Da keine Verwechslung zu befürchten ist, schreiben wir für die Wahrheitswertfunktion $f^\star$ im weiteren kurz ebenfalls $\star$. In anderen Worten, um die Semantik von Formeln mehrwertiger Aussagenlogik festzulegen, ist es hinreichend die Wahrheitswertfunktionen für die entsprechenden Junktoren anzugeben. Dies geschieht üblicherweise in Form von *Wahrheitstafeln*. Für eine bestimmte Logik werden wir das im nächsten Abschnitt tun.
Sehr oft ist man daran interessiert, mehrwertige Logiken zu betrachten, die Erweiterungen klassischer Logik sind. Zum Beispiel will man einen Junktor $\wedge$ haben, der eingeschränkt auf klassische Logik genau dem zweiwertigen Junktor $\wedge$ entspricht. Formal führt man deshalb den Begriff der Normalbedingung ein.

3.4 Definition (Normalbedingung): Ein mehrwertiger Junktor $\star$ erfüllt die *Normalbedingung*, wenn die ihm entsprechende Wahrheitswertfunktion bei Einschränkung auf die Wahrheitswerte $\mathsf{0}$ und $\mathsf{1}$ nur Werte aus $\mathbf{W}_2 = \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}$ annimmt. ■

3.5 Definition (Ausgezeichneter Wahrheitswert): In mehrwertiger Logik muß man sich entscheiden, welche Wahrheitswerte den Platz des klassischen Wahrheitswertes $\mathsf{1}$ einnehmen. Diese Wahrheitswerter heißen *ausgezeichet*. Ist man auch daran interessiert, welche Werte an Stelle des klassischen Wahrheitswertes $\mathsf{0}$ treten können, so unterscheidet man *positiv ausgezeichnete* und *negativ ausgezeichnete* Wahrheitswerte. ■

Nun wollen wir die für die klassische Logik zentralen Begriffe „Tautologie“, „Erfüllbarkeit“ und „Unerfüllbarkeit“ auf den mehrwertigen Fall erweitern.

3.6 Definition:

- Eine Formel φ heißt eine *Tautologie*, wenn jede Interpretation $\mathcal{I}$ einen (positiv) ausgezeichneten Wahrheitswert liefert. Wir schreiben $\models \varphi$.

– Eine Formel φ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, die einen ausgezeichneten Wahrheitswert liefert. Eine solche Interpretation heißt *Modell* von φ. In Symbolen: $\mathcal{I} \models \varphi$. Entsprechend ist $\mathcal{I}$ Modell einer Formelmenge Γ ($\mathcal{I} \models \Gamma$), wenn $\mathcal{I}$ Modell jeder Formel in Γ ist.

– Eine Formel heißt *unerfüllbar*, wenn es keine Interpretation gibt, die einen ausgezeichneten Wahrheitswert liefert.

– Eine Formel φ heißt *Folgerung* einer Formelmenge Γ, wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell von φ ist. In Symbolen: $\Gamma \models \varphi$. ■

Im allgemeinen schränkt man die Bedingungen, wie die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ definiert werden können, so ein, daß sie denen der klassischen Logik möglichst gut entsprechen. Zum Beispiel will man nicht, daß eine Interpretation gleichzeitig für eine Formel φ und deren Negation $\neg\varphi$ einen ausgezeichneten Wahrheitswert ergibt. Von daher ist man an Junktoren interessiert, deren Wahrheitswertfunktion einer Standardbedingung genügen.

3.7 Definition (Standardbedingung): Man sagt, eine Wahrheitswertfunktion genügt der *Standardbedingung* genau dann wenn:

– $\neg(\alpha)$ ist genau dann ein ausgezeichneter Wahrheitswert, wenn α kein ausgezeichneter Wahrheitswert ist.

– $\alpha \wedge \beta$ ist genau dann ein ausgezeichneter Wahrheitswert, wenn α und β ausgezeichnete Wahrheitswerte sind. ■

3.3 Mehrwertige Aussagenlogik nach Łukasiewicz

Um eine mehrwertige Aussagenlogik zu definieren, müssen wir festlegen, welches die Wahrheitswerte sind, welche Wahrheitswerte ausgezeichnet sind und welche Junktoren wir verwenden wollen. Die Semantik der Junktoren wird in Form von Wahrheitstafeln festgelegt. Besonderes Interesse besteht natürlich an den klassischen Junktoren, die auf mehrwertige Logik erweitert werden.

3.8 Definition (Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_n$): Bei $\mathbf{L}_n$ handelt es sich um n-wertige Logiken mit dem einzigen ausgezeichneten Wahrheitswert $\mathbf{1}$.Die verwendeten Junktoren sind $\neg$, $\wedge$ und $\rightarrow$. Seien α und β beliebige Wahrheitswerte aus $\mathbf{W}_n$.
Die Semantik von $\neg$ entspricht der Wahrheitswertfunktion:

$$\neg(\alpha) = \mathbf{1} - \alpha$$

(Das heißt hat eine Formel φ in einer Interpretation $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert α, so hat $\neg\varphi$ den Wahrheitswert $\mathbf{1} - \alpha$ unter derselben Interpretation.)

Die Semantik von $\wedge$ wird definiert durch:

$$\wedge(\alpha, \beta) = \min(\alpha, \beta)$$

Die Semantik von $\rightarrow$ wird definiert durch:

$$\rightarrow(\alpha, \beta) = \min(1, 1 - \alpha + \beta)$$

Man unterscheide $\rightarrow$ und $\Rightarrow$.
In Wahrheitstafeln erhält man somit für den Fall $n = 3$:

$\neg$	
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

■

Für den Fall $n = 3$, für den diese Logiken auch zuerst entwickelt wurden, steht der dritte Wahrheitswert 1/2 für weder wahr noch falsch. Die erste Wahrheitstafel liest sich damit: Wenn eine Formel weder wahr noch falsch ist, dann ist ihre Negation auch weder wahr noch falsch. Wie in klassischer Logik ist die Negation von falschen Formeln wahr und die von wahren falsch. Die Semantik der Konjunktion ist so, daß eine Aussage $\varphi \wedge \psi$ dadurch, daß eine Teilformel falsch ist, die ganze Formel falsch wird. Wahr ist eine Konjunktion nur, wenn beide Teilformeln wahr sind – was auch Sinn macht, wenn man bedenkt, daß 1 der einzige ausgezeichnete Wahrheitswert von $\mathbf{L}_3$ ist. Ist hingegen eine Teilformel weder wahr noch falsch, keine aber definitiv falsch, so bedeutet dies, daß auch der Wahrheitswert der Konjunktion mit dem unbestimmten Wert 1/2 belegt wird.

3.9 Bemerkung: Für $\vee$ erhält man damit $\vee(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \beta)$ beziehungsweise die Wahrheitstafel:

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

Beweis: Da $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ erhält man entsprechend für Wahrheitswerte $\vee(\alpha, \beta) = \neg(\wedge(\neg(\alpha), \neg(\beta))) = 1 - \min(1 - \alpha, 1 - \beta) = \max(\alpha, \beta)$. Die letzte Gleichung kann man sich leicht durch Fallunterscheidung überlegen. Die Wahrheitstafel ergibt sich durch ausrechnen (entweder über die entsprechenden Wahrheitstafeln für $\neg$ und $\wedge$ oder noch einfacher über den Ausdruck $\max(\alpha, \beta)$). ■

3.10 Beispiel: Die Formel $\varphi = P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ ist eine Tautologie von $\mathbf{L}_n$ für alle n. Wir müssen dazu zeigen, daß wie auch immer P und Q interpretiert werden, daß die ganze Formel φ zu einem ausgezeichneten Wahrheitswert, das heißt in diesem Fall zu 1 interpretiert wird. Sei also $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation und α der Wahrheitswert von P, β der von Q unter $\mathcal{I}$. Wir betrachten zwei Fälle.

<u>1. Fall</u>: $\alpha \leq \beta$ (also $1 - \beta + \alpha \leq 1$). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\varphi) &= \rightarrow(\alpha, \rightarrow(\beta, \alpha)) \\ &= \min(1, 1 - \alpha + \min(1, 1 - \beta + \alpha)) \\ &= \min(1, 1 - \alpha + (1 - \beta + \alpha)) \\ &= \min(1, 2 - \beta) \\ &= 1\end{aligned}$$

<u>2. Fall</u>: $\alpha > \beta$ (also $1 - \beta + \alpha > 1$). Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\varphi) &= \rightarrow(\alpha, \rightarrow(\beta, \alpha)) \\ &= \min(1, 1 - \alpha + \min(1, 1 - \beta + \alpha)) \\ &= \min(1, 1 - \alpha + 1)) \\ &= \min(1, 2 - \alpha) \\ &= 1\end{aligned}$$

■

3.11 Bemerkung: Die obige Definition für die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\rightarrow$ ist auch auf unendlichwertige mehrwertige Logiken anwendbar. ■

3.12 Lemma: *Ist $\mathcal{L}$ eine mehrwertige Logik und genügen alle Junktoren der Normalbedingung, so sind die Junktoren nicht funktional vollständig.*

Beweis: Da die Wahrheitsfunktionen zu den Junktoren angewandt auf $\mathsf{0}$ und $\mathsf{1}$ immer nur $\mathsf{0}$ oder $\mathsf{1}$ liefern, ist es zum Beispiel nicht möglich mit den gegebenen Junktoren einen einstelligen Junktor auszudrücken, der dem Wahrheitswert $\mathsf{1}$ einen von $\mathsf{0}$ und $\mathsf{1}$ verschiedenen Wert zuordnet, zum Beispiel $\mathsf{1/n}$ bei $n+1$-wertiger Logik. ■

3.13 Bemerkung: Die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\rightarrow$ in $\mathbf{L}_n$ genügen, wie man leicht sieht, der Normalbedingung. Deshalb können sie nicht funktional vollständig sein. ■

3.14 Definition (T-Norm): Eine zweistellige Funktion t heißt *T-Norm*, wenn t auf dem Intervall $[0, 1]$ oder einer nicht-leeren Teilmenge definiert ist und für alle Werte x, y, z und u im Definitionsbereich gilt:

T1 $t(0, x) = 0$ und $t(1, x) = x$

T2 $x \leq u$ und $y \leq z$, dann auch $t(x, y) \leq t(u, z)$

T3 $t(x, y) = t(y, z)$

T4 $t(t(x, y), z) = t(x, t(y, z))$ ■

3.15 Lemma: *Die Wahrheitswertfunktion für den Junktor $\wedge$ in den Logiken $\mathbf{L}_n$ sind T-Normen.*

Beweis: In $\mathbf{L}_n$ errechnet sich $\wedge(\alpha, \beta)$ als $\min(\alpha, \beta)$. Damit erhalten wir:

T1 $\min(0, \alpha) = 0$ und $\min(1, \alpha) = \alpha$, da ja die Wahrheitswerte alle zwischen 0 und 1 (jeweils eingeschlossen) liegen.

T2 $\alpha \leq \alpha'$ und $\beta \leq \beta'$, dann gilt auch $\min(\alpha, \beta) \leq \min(\alpha', \beta')$; denn wenn man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annimmt, daß α kleiner gleich β ist, so gilt $\alpha \leq \beta \leq \beta'$, somit ist $\alpha \leq \beta'$. Da α aber auch kleiner gleich α' ist, ist es auch kleiner als das Minimum von α' und β'.

T3 $\min(\alpha, \beta) = \min(\beta, \alpha)$ ist eine einfache Eigenschaft der Minimumbildung, ebenso wie die nächste Eigenschaft

T4 $\min(\min(\alpha, \beta), \gamma) = \min(\alpha, \min(\beta, \gamma))$, die sich jeweis durch Fallunterscheidungen zeigen lassen. ■

3.3.1 Kalkülisierung der Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_n$

Um einen Kalkül für die Łukasiewicz-Logiken anzugeben, werden wir zuerst weitere Betrachtungen über die verwendeten und definierbaren Junktoren anschließen, dann geben wir einen Kalkül an und zeigen dessen Korrektheit und Vollständigkeit. Da dieser Kalkül ziemlich umständlich ist, stellen wir einen weiteren vor, ohne jedoch dessen Vollständigkeit zu beweisen.

3.16 Lemma: *Wir haben zwischen $\vee$ und $\rightarrow$ den folgenden Zusammenhang:*
$\varphi \vee \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

Beweis: Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation und α der Wahrheitswert von φ unter $\mathcal{I}$ und β der von ψ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) &= \rightarrow(\rightarrow(\alpha, \beta), \beta)\\ &= \min(1, 1 - \min(1, 1 - \alpha + \beta) + \beta)\end{aligned}$$

Um dies weiter umzuformen machen wir eine Fallunterscheidung, nämlich:
1.Fall: $\alpha \geq \beta$ (also $1 - \alpha + \beta \leq 1$). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) &= \min(1, 1 - (1 - \alpha + \beta) + \beta)\ .\\ &= \min(1, \alpha)\\ &= \alpha\\ &= \max(\alpha, \beta)\\ &= \vee(\alpha, \beta)\\ &= \mathcal{I}(\varphi \vee \psi)\end{aligned}$$

2.Fall: $\alpha < \beta$ (also $1 - \alpha + \beta > 1$). In diesem Fall erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) &= \min(1, 1 - 1 + \beta)\ .\\ &= \min(1, \beta)\\ &= \beta\\ &= \max(\alpha, \beta)\\ &= \vee(\alpha, \beta)\\ &= \mathcal{I}(\varphi \vee \psi)\end{aligned}$$

■

Nun wollen wir einen weitere Junktoren J_α definieren, die genau dann $\mathbf{1}$ liefern, wenn der Wahrheits der Formel α ist.

3.17 Definition (J_α): Sei α ein Wahrheitswert aus $\mathbf{W}_n$. Die Wahrheitswertfunktion des einstelligen Junktors J_α wird definiert als:

$$J_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

■

3.18 Beispiel: In $\mathbf{L}_5$ gilt zum Beispiel für $J_{\frac{1}{2}}$:

$J_{\frac{1}{2}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	0	0	1	0	0

■

Es stellt sich nun die Frage, ob man durch diese Definition eine andere Logik erhält oder diese gleich bleibt; in anderen Worten ob sich diese neuen Junktoren in den alten ausdrücken lassen oder nicht. Darüber gibt das nächste Lemma Auskunft.

3.19 LEMMA: *Die Junktoren J_α in $\mathbf{L}_n$ lassen sich in den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\rightarrow$ (und damit in $\neg$ und $\wedge$) definieren.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß für jeden Wahrheitswert $\alpha \in \mathbf{W}_n$ eine Wahrheitswertfunktion I_α definierbar in $\neg$ und $\wedge$ ist mit:

$$I_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dazu definieren wir induktiv:

- $H_{\frac{1}{n-1}}(x) = \neg(x)$
- $H_{\frac{m+1}{n-1}}(x) = \rightarrow (x, H_{\frac{m}{n-1}}(x))$

Durch diese Definition haben wir die Beziehung $H_{\frac{m}{n-1}}(x) = \min(1, m - m \cdot x)$, was man sich induktiv überlegen kann:

- für $m = 1$ gilt $H_{\frac{1}{n-1}}(x) = \neg(x) = 1 - x = \min(1, 1-x)$
- gilt die Behauptung schon für m, so können wir sie für $m+1$ zeigen, vermöge: $H_{\frac{m+1}{n-1}}(x) = \rightarrow (x, H_{\frac{m}{n-1}}(x)) = \min(1, 1 - x + \min(1, m - m \cdot x))$. Der Rest ergibt sich durch Fallunterscheidung. Ist das zweite Minimum gerade 1, so erhält man $\min(1, 1 - x + 1) = 1 = \min(1, (m+1) - (m+1) \cdot x)$. Im anderen Fall ergibt sich $\min(1, 1 - x + m - m \cdot x) = \min(1, (m+1) - (m+1) \cdot x)$.

Damit können wir dann die I_α wie folgt ausdrücken:

- $I_1(x) = \neg H_1(x)$. (Beachte: $H_1(x) = 0$ für $x = 1$ und sonst $H_1(x) = 1$.)
- Seien die Funktionen I_α für alle Wahrheitswerte $\alpha > \frac{k}{n-1}$ definiert. Sei $\frac{r}{n-1}$ der größte Wahrheitswert, so daß $H_{\frac{r}{n-1}}(\frac{k}{n-1}) < 1$. p sei definiert als $H_{\frac{r}{n-1}}(\frac{k}{n-1}) + \frac{1}{n-1}$. Man beachte, daß p größer $\frac{k}{n-1}$, also I_p schon definiert ist. (Nach Definition von r gilt $H_{\frac{r+1}{n-1}}(\frac{k}{n-1}) = 1$, also $r + 1 - (r+1)\frac{k}{n-1} \geq 1$ und somit $rn - r - rk \geq k$, also gilt $p = H_{\frac{r}{n-1}}(\frac{k}{n-1}) + \frac{1}{n-1} = r - r\frac{k}{n-1} + \frac{1}{n-1} > \frac{k}{n-1}$). Nun wird $I_{\frac{k}{n-1}}(x)$ ausgedrückt als $\neg I_p(H_{\frac{r}{n-1}}(x))$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll}
I_{\frac{k}{n-1}}(x) = 1 - I_p(H_{\frac{r}{n-1}}(x)) & = & 0 & \text{gdw} \\
p & \leq & H_{\frac{r}{n-1}}(x) & \text{gdw} \\
H_{\frac{r}{n-1}}(\frac{k}{n-1}) + \frac{1}{n-1} & \leq & \min(1, r - r \cdot x) & \text{gdw} \\
r - r \cdot \frac{k}{n-1} + \frac{1}{n-1} & \leq & r - r \cdot x & \text{gdw} \\
r \cdot x & \leq & r \cdot \frac{k}{n-1} - \frac{1}{n-1} & \text{gdw} \\
x & \leq & \frac{k}{n-1} - \frac{1}{r(n-1)} & \text{gdw} \\
x & < & \frac{k}{n-1} &
\end{array}$$

Nun ist es einfach die Wahrheitswertfunktionen $J_{\frac{k}{n}}$ zu definieren:

- $J_1(x) = I_1(x)$
- $J_{\frac{k}{n}}(x) = \wedge(I_{\frac{k}{n}}(x), \neg(I_{\frac{k+1}{n}}(x)))$ ■

3.20 BEISPIEL: In $\mathbf{L}_5$ gilt:

$H_{\frac{1}{4}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	1	3/4	1/2	1/4	0

$H_{\frac{1}{2}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	1	1	1	1/2	0

$H_{\frac{3}{4}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	1	1	1	3/4	0

H_1	0	1/4	1/2	3/4	1
	1	1	1	1	0

$I_{\frac{1}{2}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	0	0	1	1	1

$\neg I_{\frac{3}{4}}$	0	1/4	1/2	3/4	1
	1	1	1	0	0

Daraus ergibt sich dann $J_{\frac{1}{2}}$ wie in Beispiel 3.18. ■

3.21 DEFINITION (KALKÜL $\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_n}$): Um einen Kalkül auszuzeichnen, müssen wir die *Axiome* und die *Schlußregeln* angeben. Ein Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_n}$ für $\mathbf{L}_n$ sei gegeben durch die folgenden Axiome:

$$\mathbf{A}_1 \quad J_0(P) \vee J_{\frac{1}{n-1}}(P) \vee \ldots \vee J_1(P)$$
$$\mathbf{A}_2 \quad \neg(J_\alpha(P) \wedge J_\beta(P)) \qquad \text{für } \alpha \neq \beta$$

sowie den Regeln:

$$\mathbf{R}_1 \quad \frac{J_\alpha(P)\ J_\beta(Q)}{J_{\rightarrow(\alpha,\beta)}(P \rightarrow Q)} \qquad \mathbf{R}_2 \quad \frac{J_\alpha(P)}{J_{\neg(\alpha)}(\neg P)}$$
$$\mathbf{R}_3 \quad \frac{J_1(P)}{P} \qquad \mathbf{R}_4 \quad \frac{P}{J_1(P)}$$

■

3.22 THEOREM: *Der Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_n}$ ist korrekt und vollständig.*

Beweis:

1.Korrektheit: Die Korrektheit ergibt sich direkt. Die Axiome sind korrekt, da jede Formel genau einen Wahrheitswert annimmt. $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ ergeben sich aus entsprechenden Eigenschaften von J, $\neg$ und $\rightarrow$. $\mathbf{R}_3$ und $\mathbf{R}_4$ geben an, daß eine Formel genau dann gilt, wenn J_1 angewandt auf sie gilt.

2.Vollständigkeit: Dazu nehmen wir an, eine Formel φ sei nicht aus einer Formelmenge Γ ableitbar, aber in jeder Interpration von Γ gültig. Wir definieren für atomare Formel P eine Interpretation $\mathcal{I}(P) = \alpha$ gdw sich $J_\alpha(P)$ aus Γ herleiten läßt. Aus $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ folgt die Wohldefiniertheit von $\mathcal{I}$. Aus $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ folgt, daß eine beliebige Formel ψ bezüglich der Interpretation $\mathcal{I}$ den Wahrheitswert α ergibt (d.h. $\mathcal{I}(\psi) = \alpha$) gdw

$J_\alpha(\psi)$ herleitbar ist. $\mathbf{R}_3$ besagt, daß jede Formel $\psi \in \Gamma$ herleitbar ist. Nach $\mathbf{R}_4$ gilt, wenn $\mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{1}$, so muß auch $J_1(\varphi) = \mathbf{1}$ sein, also auch herleitbar sein. ■

3.23 BEMERKUNG: Der oben angegebene Kalkül ist unangenehm zu handhaben, da die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ erst durch die Junktoren J_α ausgedrückt werden müssen. Deshalb geben wir für $\mathbf{L}_n$ noch einen anderen Kalkül $\widehat{\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_3}}$ an, der für $\mathbf{L}_3$ 1931 von M. Wajsberg entwickelt wurde und später verallgemeinert wurde [RR58, Gri77].
Als Axiome sind gegeben:

$\mathbf{L}_n1$: $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
$\mathbf{L}_n2$: $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$\mathbf{L}_n3$: $(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
$\mathbf{L}_n4$: $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow P)$
$\mathbf{L}_n5n$: $nP \rightarrow (n-1)P$
$\mathbf{L}_n6n$: $(n-1)((\neg P)^i \sqcup (P \sqcap (i-1)P))$ für $1 < i < n-1$ und i teilt $n-1$ nicht.

Dabei wird definiert: $nP = P \sqcup P \sqcup \ldots \sqcup P$ (n P's) und
$P^i = P \sqcap P \sqcap \ldots \sqcap P$ (n P's)
Wobei $\sqcup$ definiert ist durch $\varphi \sqcup \psi := \neg\varphi \rightarrow \psi$ und $\sqcap$ durch $\varphi \sqcap \psi = \neg(\neg\varphi \sqcup \neg\psi)$.

Als Schlußregeln haben wir den Modus Ponens und die Substitutionsregel:

$$\textbf{(MP)} \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \qquad\qquad \textbf{(Subst)} \quad \frac{\varphi}{\varphi[X \leftarrow \psi]}$$

Dabei ist X eine beliebige atomare Teilformel von φ. Die Regel besagt also, daß man in Tautologien atomare Teilformeln durch beliebige Formeln ersetzen darf und daß dabei wieder Tautologien entstehen.
Die Korrektheit der Axiome entspricht gerade Aufgabe 3 von Übungsblatt 2. Die Korrektheit des Modus Ponens sieht man aus der Definition der Implikation $\rightarrow$: Nehmen wir an, wie wissen, daß der Wahrheitswert einer Formel φ unter einer Interpretation $\mathcal{I}$ gerade $\mathbf{1}$ ist, ebenso ergibt sich für $\varphi \rightarrow \psi$ der Wahrheitswert $\mathbf{1}$. Seien α und β die Wahrheitswerte von φ und ψ jeweils. Dann haben wir also $\alpha = \mathbf{1}$ und nach der Definition der Semantik von $\rightarrow$ gilt $\mathbf{1} = \min(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \alpha + \beta)$. Da das Minimum $\mathbf{1}$ ist, muß also der zweite Ausdruck $\mathbf{1} - \alpha + \beta$ auch $\mathbf{1}$ sein. Somit haben wir $\mathbf{1} = \mathbf{1} - \alpha + \beta = \mathbf{1} - \mathbf{1} + \beta = \beta$, also insgesamt $\beta = \mathbf{1}$. Die Korrektheit der Substitutionsregel ergibt sich daraus, daß Beweise dafür, daß eine Formel eine Tautologie ist, nicht davon abhängt, daß die atomaren Formeln in ihr tatsächlich atomar oder beliebige andere Formeln sind.
Für $n = 3$ zum Beispiel fallen die Axiome $\mathbf{L}_36$ weg, und $\mathbf{L}_35$ hat die Gestalt:

$\mathbf{L}_35$: $(\neg P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)) \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$

Daß $\mathbf{L}_35$ eine Tautologie ist, ergibt sich durch Betrachtung aller Fälle:

(	$\neg$	α	$\rightarrow$	$(\neg$	α	$\rightarrow$	$\alpha))$	$\rightarrow$	$(\neg$	α	$\rightarrow$	$\alpha)$
	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2
	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1

■

3.3.2 Der Satz von Lindenbaum

Der Satz von Lindenbaum stellt eine Beziehung zwischen den verschiedenen Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_m$ und $\mathbf{L}_n$ auf.
Um diesen Zusammenhang zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

3.24 Lemma: *Sei die Äquivalenz zwischen φ und ψ definiert als:*
$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. *Dann gilt für die entsprechenden Wahrheitswertfunktionen* $\leftrightarrow (\alpha, \beta) = 1 - |\alpha - \beta|$. ■

Der Satz von Lindenbaum lautet:

3.25 Theorem: *Alle Tautologien von $\mathbf{L}_{m+1}$ sind auch Tautologien von $\mathbf{L}_{n+1}$ genau dann, wenn n teilt m.*
Beweis:
1. Fall: $m < n$
Sei $k > 1$ gegeben und δ_k definiert als $\bigvee_{0 \le i < j \le k} p_i \leftrightarrow p_j$. Zum Beispiel gilt $\delta_2 = (p_0 \leftrightarrow p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)$. Nun gilt nach dem Schubladenprinzip („pigeon-hole" principle), daß δ_k eine Tautologie von $\mathbf{L}_{m+1}$ ist, genau dann wenn $m + 1 \le k$. Gibt es nämlich nur k Wahrheitswerte oder weniger, so müssen in jeder Interpretation mindestens zwei der atomaren Formeln p_i denselben Wert annehmen, also evaluiert die ganze Formel dann zu 1. Gibt es aber mehr als k Wahrheitswerte, so kann man einfach für jede atomare Formel einen anderen Wahrheitswert annehmen. Dann evaluiert keine der Teilformeln $p_i \leftrightarrow p_j$ zu 1, also auch δ_k als das Maximum nicht.
2. Fall: $m \ge n$ und n teilt m
Da n die Zahl m teilt, gibt es also eine Zahl q mit $m = q \cdot n$. Man erhält die Wahrheitswertfunktionen für $\to$ und $\neg$ für $\mathbf{L}_{n+1}$ aus einer Teiltafel von $\mathbf{L}_{m+1}$.
Beispiel: Für $m = 2$ und $n = 4$ ergibt sich:

$\mathbf{L}_3$

$\to$	0	1/2	1	$\neg$
0	1	1	1	1
1/2	1/2	1	1	1/2
1	0	1/2	1	0

$\mathbf{L}_5$

$\to$	0	1/4	1/2	3/4	1	$\neg$
0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1/4	3/4	1	1	1	1	3/4
1/2	$\boxed{1/2}$	3/4	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1/2}$
3/4	1/4	1/2	3/4	1	1	1/4
1	$\boxed{0}$	1/4	$\boxed{1/2}$	3/4	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$

Wenn also φ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{m+1}$ ist, so sind die Ergebnisse bezüglich einer beliebigen Interpretation immer 1. (φ läßt sich äquivalent in $\neg$ und $\to$ ausdrücken.) Da jede Interpretation von φ in $\mathbf{L}_{n+1}$ sich durch Einschränkung einer Interpretation in $\mathbf{L}_{m+1}$ ergibt, diese aber alle zu 1 evaluieren, muß somit φ auch eine Tautologie von $\mathbf{L}_{n+1}$ sein.
3. Fall: $m \ge n$ aber n teilt m nicht
Es gilt also insbesondere $n \ne m$. Wir müssen in diesem Fall zeigen, daß es eine

Tautologie in $\mathbf{L}_{m+1}$ gibt, die keine Tautologie in $\mathbf{L}_{n+1}$ ist. Sei φ die Formel, die dadurch entsteht, daß man die H_α durch $\neg$ und $\rightarrow$ in $H_1(H_{\frac{n-1}{m}}(p) \leftrightarrow p)$ wie in Lemma 3.17 ersetzt. Dann ist φ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{m+1}$, denn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ ist $\mathcal{I}(H_{\frac{n-1}{m}}(p) \leftrightarrow p) < 1$. (Wäre $\mathcal{I}(H_{\frac{n-1}{m}}(p) \leftrightarrow p) = 1$, so müßte mit $\mathcal{I}(p) = \frac{k}{m}$ gelten: $H_{\frac{n-1}{m}}(\frac{k}{m}) = \frac{k}{m}$, also $\min(1, (n-1) - (n-1)\frac{k}{m}) = \frac{k}{m}$. Da k dann aber nicht gleich m sein kann gilt also: $(n-1) = n \cdot \frac{k}{m}$ beziehungsweise $(n-1) \cdot m = n \cdot k$. Das heißt aber, daß n das Produkt und damit m selbst teilen muß, was der Voraussetzung widerspricht.)
Es bleibt also zu zeigen, daß φ keine Tautologie von $\mathbf{L}_{n+1}$ ist. Nach der rekursiven Definition der H_α gilt, daß φ auch gleich $H_{\frac{m}{n}}(H_{\frac{n-1}{n}}(p) \leftrightarrow p)$ in $\mathbf{L}_{n+1}$ ist. Sei $\mathcal{I}(p) = \frac{n-1}{n}$, dann gilt $\mathcal{I}(H_{\frac{n-1}{n}}(p) \leftrightarrow p) = 1 - \left| H_{\frac{n-1}{n}}(\frac{n-1}{n}) - \frac{n-1}{n} \right| = 1$, damit gilt dann aber $H_{\frac{m}{n}}(H_{\frac{n-1}{n}}(p) \leftrightarrow p) = H_{\frac{m}{n}}(1) = 0$. ■

Wie wir in Lemma 3.12 gesehen haben, sind die Logiken $\mathbf{L}_n$ nicht funktional vollständig. Im Prinzip kann man natürlich jedes System von Junktoren dadurch vervollständigen, indem man alle möglichen Junktoren hinzunimmt. Für $\mathbf{L}_3$ reicht jedoch ein weiterer Junktor, wie 1936 von Słupecki gezeigt wurde.

3.26 Bemerkung: Man kann das dreiwertige System von Łukasiewicz $\mathbf{L}_3$ zu einem funktional vollständigen $\mathbf{L}_3^S$ erweitern, indem man einen weiteren einstelligen Junktor $\sim$ definiert, mit der Wahrheitswertfunktion $\sim(\alpha) = 1/2$ für alle Wahrheitswerte α. (Dies wurde 1936 von Słupecki getan.)

$\sim$	0	1/2	1
	1/2	1/2	1/2

■

Für die so erweiterte Logik $\mathbf{L}_3^S$ benötigt man dann natürlich andere Kalküle. Zum Beispiel erhält man einen korrekten und vollständigen Kalkül, wenn man zu $\mathbf{L}_3 1$ bis $\mathbf{L}_3 4$ die Axiome $\mathbf{L}_3^S 5$: $\sim p \rightarrow \neg \sim p$ und $\mathbf{L}_3^S 6$: $\neg \sim p \rightarrow \sim p$ hinzufügt.

3.3.3 Unendlichwertige Łukasiewicz-Logiken

Sei $\mathbf{W}_{[0,1]} := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ und $\mathbf{W}_{\aleph_0} := \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 1\}$ Wir erhalten entsprechende Lukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_{[0,1]}$ und $\mathbf{L}_{\aleph_0}$, wobei die Wahrheitswertfunktionen für $\wedge$, $\neg$ und $\rightarrow$ wie im endlichen Fall definiert sind.
1930 haben Lukasiewicz und Tarski den folgenden Zusammenhang zwischen endlichwertigen Lukasiewicz-Logiken und $\mathbf{L}_{\aleph_0}$ bewiesen.

3.27 Theorem: *Eine Formel φ ist Tautologie von $\mathbf{L}_{\aleph_0}$ genau dann, wenn φ Tautologie in jeder Logik $\mathbf{L}_n$ für $n \geq 3$ ist.* ■

Für die Logik $\mathbf{L}_{\aleph_0}$ ist es nun natürlich nicht länger möglich anhand von Wahrheitstafeln zu überprüfen, ob eine gegebene Formel eine Tautologie ist oder nicht. Umso wichtiger ist der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben:

3.28 THEOREM: *Die Axiome* $\mathbf{L}_{\aleph_0}1$ *bis* $\mathbf{L}_{\aleph_0}4$ *aus Bemerkung 3.23 bilden zusammen mit Modus Ponens und Substitutionsregel einen korrekten und vollständigen Kalkül für* $\mathbf{L}_{\aleph_0}$*.* ■

Zum Abschluß der Betrachtungen über die Lukasiewicz-Logiken diskutieren wir nun noch, inwieweit sich die Logiken $\mathbf{L}_{[0,1]}$ und $\mathbf{L}_{\aleph_0}$ unterscheiden. Ein Unterschied ist natürlich durch die möglichen Wahrheitswerte gegeben. Die entscheidende Frage ist allerdings, ob die Logiken verschiedene oder dieselben Tautologien besitzen.

3.29 LEMMA: *Eine Formel* φ *ist Tautologie in* $\mathbf{L}_{[0,1]}$ *genau dann, wenn* φ *Tautologie in* $\mathbf{L}_{\aleph_0}$ *ist. Das heißt die Logiken haben dieselben Tautologien.*

Beweis:

$\underline{[0,1] \text{ -> } \aleph_0}$: Sei φ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{[0,1]}$, dann ergibt jede Interpretation, die sich ja durch eine Belegung der atomaren Formeln in φ mit Wahrheitswerten aus $[0,1]$ ergibt, den Wahrheitswert 1. Also gilt dies auch insbesondere für alle Belegungen, bei den nur rationale Wahrheitswerte angenommen werden. Somit ist φ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{\aleph_0}$.

$\underline{\aleph_0 \text{ -> } [0,1]}$: Sei φ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{\aleph_0}$, dann läßt sich φ mithilfe des Modus Ponens und der Substitutionsregel aus den Axiomen $\mathbf{L}_{\aleph_0}1$ bis $\mathbf{L}_{\aleph_0}4$ herleiten. Da aber $\mathbf{L}_{\aleph_0}1$ bis $\mathbf{L}_{\aleph_0}4$ auch Tautologien von $\mathbf{L}_{[0,1]}$ sind und die Regeln Modus Ponens und Substitutionsregel in $\mathbf{L}_{[0,1]}$ korrekt sind, folgt, daß φ auch eine Tautologie von $\mathbf{L}_{[0,1]}$ ist. ■

3.4 Mehrwertige Aussagenlogik nach Post

Die n-wertige Logik $\mathbf{P}_n$, von Emil Post 1921 [Pos21] eingeführt, hat die Wahrheitswerte $\mathbf{W}_n$, den einstelligen Junktor $\neg$ und den zweistelligen Junktor $\vee$, die definiert sind durch die Wahrheitswertfunktionen:

$\vee(\alpha,\beta) = \max(\alpha,\beta)$ und $\neg(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = 0 \\ \alpha - \frac{1}{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$.

Je nachdem welche Wahrheitswerte man auszeichnet, erhält man Logiken $\mathbf{P}_n^k$, wenn man alle Wahrheitswerte größer als $\frac{k}{n-1}$ auszeichnet.

3.30 Beispiel: In Wahrheitstafeln erhält man somit für den Fall $n = 3$:

$\neg$	
0	1
1/2	0
1	1/2

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

■

3.31 Bemerkung: Wie man sich leicht überlegen kann, gilt für die k-fache Hintereinanderausführung der Negation in $\mathbf{P}_{n+1}$ ($k \leq n$):

$$\neg^k(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \frac{k}{n} & \text{für } \alpha \geq \frac{k}{n} \\ 1 + \alpha - \frac{k-1}{n} & \text{für } \alpha < \frac{k}{n} \end{cases}$$ ■

Wie man leicht sieht, genügen die Logiken $\mathbf{P}_n$ nicht der Normalbedingung. Von daher ist es möglich, daß sie funktional vollständig sind. Daß sie tatsächlich funktional vollständig sind, soll im folgenden gezeigt werden. Dazu benötigen wir die folgenden Definitionen und das zugehörige Lemma.

3.32 Definition: Sei F eine Menge von Funktionen definiert auf der Menge $\mathbf{W}_n$ (Konstanten gelten als 0-stellige Funktionen). Eine Teilmenge M von $\mathbf{W}_n$ heißt *F-abgeschlossen*, wenn sie unter der Anwendung von Funktionen aus F abgeschlossen ist. Der *F-Abschluß* einer Teilmenge M von $\mathbf{W}_n$ ist die kleinste F-abgeschlossene Menge, die M enthält. ■

3.33 Lemma: *Sei F eine Menge von Funktionen definiert auf der Menge $\mathbf{W}_n$, die die Funktionen* max, min *und J_k für alle $k \in \mathbf{W}_n$ enthält (für die J_k vergleiche Definition 3.17), dann ist eine Funktion $f : \mathbf{W}_n^m \to \mathbf{W}_n$ (dabei ist $\mathbf{W}_n^m$ das m-fache kartesische Produkt von $\mathbf{W}_n$) genau dann F-definierbar, wenn für alle $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbf{W}_n^m$ gilt $f(x_1,\ldots,x_m)$ ist im F-Abschluß von $(x_1,\ldots,x_m)$.*

Beweis: Die Bedingung selbst ist natürlich notwendig. Wir zeigen, daß sie auch hinreichend ist. Sei also $(a_1,\ldots,a_m) \in \mathbf{W}_n^m$ beliebig gegeben, dann läßt sich aufgrund der Bedingung $f(a_1,\ldots,a_m)$ in den Funktionen aus F ausdrücken, also auch $\psi_{(a_1,\ldots,a_m)}(x_1,\ldots,x_m) := \min(J_{a_1}(x_1),\ldots,J_{a_m}(x_m), f(a_1,\ldots,a_m))$. Es gilt:

$$\psi_{(a_1,\ldots,a_m)}(x_1,\ldots,x_m) := \begin{cases} f(a_1,\ldots,a_m) & \text{für } x_i = a_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt $f(x_1,\ldots,x_m) = \max(\left\{\psi_{(a_1,\ldots,a_m)}(x_1,\ldots,x_m) | (a_1,\ldots,a_m) \in \mathbf{W}_n^m\right\})$, wobei die rechte Seite F-definierbar ist. ■

3.34 THEOREM: *Die $n+1$-wertige Logik $\mathbf{P}_{n+1}$ ist funktional vollständig.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß sich jeder einstellige Junktor ausdrücken läßt. Die $\{\neg, \vee\}$-definierbare Funktion[2] $T(x) = \vee(x, \neg(x), \ldots, \neg^{n-1}(x), \neg^{n}(x))$ liefert immer den Wert $\mathsf{1}$, da einer der Werte $\neg^{i}(x)$ den Wert $\mathsf{1}$ ergibt. (Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten.) Somit kann man für jedes $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}} \in \mathbf{W}_{n+1}$ eine Funktion $T_{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}}$ in $\neg$ und $\vee$ definieren, für die gilt: $T_{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}}(x) = \neg^{n}(\vee(\neg^{n}(\vee(\neg(T(x)), x)), \neg^{n-p}(x)))$ nimmt den Wahrheitswert $\mathsf{0}$ an für $x \neq \mathsf{1}$ und $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}$ für $x = \mathsf{1}$.
(Sei nämlich $x = 1$, dann ist $\neg^{n}(\vee(\neg(T(x)), x)) = \mathsf{0}$, somit $T_{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}}(\mathsf{1}) = \neg^{n}\neg^{n+1-p}(\mathsf{1}) = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}$ nach Bemerkung 3.31. Ist aber $x \neq \mathsf{1}$, so evaluiert $\neg^{n}(\vee(\neg(T(x)), x))$ zu $\neg^{n}(\frac{\mathsf{n-1}}{\mathsf{n}})$ und damit zu $\mathsf{1}$ und damit $T_{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{n}}}(x) = \neg^{n}(\mathsf{1}) = \mathsf{0}$.)
Sei nun f eine beliebige einstellige Funktion auf $\mathbf{W}_n$, dann gilt:
$f(x) = \vee(T_{f(\mathsf{0})}(\neg(x)), T_{f(\frac{\mathsf{1}}{\mathsf{n}})}(\neg^{2}(x)), \ldots, T_{f(\frac{\mathsf{k}}{\mathsf{n}})}(\neg^{k+1}(x)), \ldots, T_{f(\mathsf{1})}(x))$.
(Beachte: $\neg^{k+1}(\frac{\mathsf{k}}{\mathsf{n}}) = \mathsf{1}$)
Folglich lassen sich die Funktionen J_k in $\neg$ und $\vee$ definieren. Die Funktion min ist gerade die Wahrheitswertfunktion zu $\vee$ und die Funktion $\max(\alpha, \beta)$ wird definiert als $h(\min(h(\alpha), h(\beta)))$ mit $h(\alpha) = \mathsf{1} - \alpha$. (Da h eine einstellige Funktion ist, ist also h auch definierbar.)
Nun ist Lemma 3.33 anwendbar. Da alle einstelligen Funktionen $\{\neg, \vee\}$-definierbar sind, ist die einzige $\{\neg, \vee\}$-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{W}_{n+1}$ die Menge $\mathbf{W}_{n+1}$ selbst. Also ist nach dem Lemma jede mögliche Funktion definierbar. ■

3.35 BEMERKUNG: Die Logiken $\mathbf{P}_n$ lassen sich nicht nicht direkt auf entsprechende Logiken mit unendlich vielen Wahrheitswerten verallgemeinern. ■

3.5 Mehrwertige Aussagenlogik nach Gödel

Die n-wertige Logik $\mathbf{G}_n$, von Kurt Gödel 1932 eingeführt, hat die Wahrheitswerte $\mathbf{W}_n$, den einstelligen Junktor $\neg$ und die zweistelligen Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$, die definiert sind durch die Wahrheitswertfunktionen:
$\wedge(\alpha, \beta) = \min(\alpha, \beta)$
$\vee(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \beta)$
$$\rightarrow(\alpha, \beta) = \begin{cases} \mathsf{1} & \text{für } \alpha \leq \beta \\ \beta & \text{für } \alpha > \beta \end{cases}$$
$$\neg(\alpha) = \begin{cases} \mathsf{1} & \text{für } \alpha = \mathsf{0} \\ \mathsf{0} & \text{sonst} \end{cases}.$$

[2] Wir schreiben hier der Übersicht halber den zweistelligen Junktor und die zugehörige Wahrheitswertfunktion als beliebigstellige Funktion, die entsprechende Umwandlung in zweistellige Funktionen ist kanonisch.

Einziger ausgezeichneter Wahrheitswert in $\mathbf{G}_n$ ist 1.

3.36 Bemerkung: Die Logiken $\mathbf{G}_n$ genügen der Normalbedingung, somit sind sie nicht funktional vollständig. ∎

3.37 Beispiel: Für $n = 3$ erhält man die folgenden Wahrheitstafeln:

$\neg$	
0	1
1/2	0
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

∎

3.38 Bemerkung: Die Definitionen für die Wahrheitswertfunktionen zu den Logiken $\mathbf{G}_n$ kann man auf unendliche Wahrheitswerte verallgemeinern. Man erhält Logiken $\mathbf{G}_{\aleph_0}$ und $\mathbf{G}_{[0,1]}$. Das Axiomatisierungsproblem für all diese Logiken ist positiv gelöst. Man benutzt als Regeln Modus Ponens und Substitutionsregel sowie Axiome, die sich im Falle von $\mathbf{G}_3$ aus denen der intuitionistischen Aussagenlogik und dem Axiom $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (((Q \rightarrow P) \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ ergeben. ∎

Kapitel 4

Spezielle drei- und vierwertige Aussagenlogiken

Im letzten Kapitel haben wir grundlegende Begriffe der mehrwertigen Aussagenlogik kennengelernt. Insbesondere wurden die mehrwertigen Logiken von Łukasiewicz und Post behandelt. Dadurch haben wir als Spezialfall die Logiken $\mathbf{L}_3$ und $\mathbf{P}_3$ kennengelernt. Kurz wurde auch die Gödel-Logik $\mathbf{G}_3$ vorgestellt. In diesem Kapitel soll nun die besondere Semantik des dritten Wahrheitswertes $1/2$ in verschiedenen dreiwertigen Logiken diskutiert werden. Dabei stützen wir uns vor allem auf [BB92]. Am Schluß des Kapitels geben wir eine Anwendung drei- und vierwertiger Logik zur Beschreibung von Parakonsistenz.

4.1 Die dreiwertige Aussagenlogik nach Bočvar

In der Logik von D.A. Bočvar gibt man dem dritten Wahrheitswert (neben „falsch“ und „wahr“) die intendierte Bedeutung „unsinnig“.

4.1 Definition (Bočvar-Logik $\mathbf{B}_3$): Die Wahrheitswerte sind $\mathbf{W}_3$, Junktoren in $\mathbf{B}_3$ sind $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$. Die Junktoren entsprechen der Normalbedingung und die zugehörigen Wahrheitswertfunktionen ergeben den Wahrheitswert $1/2$, sobald einer der Argumente de Wahrheitswert $1/2$ ist. Man erhält also die folgenden Wahrheitstafeln:

$\neg$	
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1/2	1

$\Rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

Einziger ausgezeichneter Wahrheitswert ist 1. ■

4.2 Bemerkung: Da die Logik $\mathbf{B}_3$ keine Tautologien enthält, hat man das System zu einem System $\widehat{\mathbf{B}_3}$ abgewandelt: Die Wahrheitswerte $1/2$ und 1 werden ausgezeichnet und die Wahrheitstafeln sind:

$\neg$	
0	1
1/2	1
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	0	0
1	0	0	1

$\vee$	0	1/2	1
0	0	0	1
1/2	0	0	1
1	1	1	1

$\Rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	0
1/2	1	1	0
1	0	0	1

■

Mit der Logik von Bočvar kann man Probleme mit Antinomien überwinden, dadurch daß man nicht mehr zwei Wahrheitswerte 1 und 0 annimmt, sondern noch einen weiteren für „unsinnig“. Bočvar unterscheidet in seiner Logik zwischen „Sätzen“ und „Aussagen“, währen die ersteren beliebige aussagenlogische Formeln sind, sind „Aussagen“ solche Formeln, die Sinn machen, also entweder den Wahrheitswert 1 oder den Wahrheitswert 0 annehmen.
Betrachten wir zum Beispiel die Antinomie vom Lügner (vergleiche Absatz 1.4.1. Einer Aussage wie „Dieser Satz ist falsch“ würde man weder den Wert 1 noch 0 zuordnen, sondern den Wert „unsinnig“. Das Problem, daß der Satz falsch sein muß, wenn er richtig ist, und daß er richtig sein müßte, wenn er falsch ist, ist somit aufgehoben. Ähnliches gilt für die Russelsche Antinomie (vergleiche Absatz 1.4.2), ob M zu M gehört oder nicht, kann nun als „unsinnig“ eingestuft werden. Das heißt in der Logik $\mathbf{B}_3$ oder besser gesagt in einem prädikatenlogischen Analogon ist es möglich, diese Aussagen zu machen, während Russell zur Auflösung der in der Mathematik natürlich hochgradig unerwünschten Antinomie diese syntaktisch ausschloß.
Allerdings hat Alonzo Church bemerkt, daß in $\widehat{\mathbf{B}}_3$ die Russelsche Antinomie weiterhin besteht.

4.2 Die dreiwertige Aussagenlogik nach Hallden

Verwandt mit der Logik von Bočvar ist die Logik $\mathbf{H}_3$ von S. Halden, in der der dritte Wahrheitswert für „bedeutungslos“ steht. Der Hauptunterschied von $\mathbf{H}_3$ zu $\mathbf{B}_3$ besteht darin, daß es einen Junktor gibt, der den nicht bedeutungslosen Formeln den Wahrheitswert 1 zuordnet.

4.3 Definition (Hallden-Logik $\mathbf{H}_3$):
Die Wahrheitswerte sind $\mathbf{W}_3$, Junktoren in $\mathbf{H}_3$ sind die einstelligen Junktoren $\sim$ und $\neg$ sowie der zweistellige Junktor $\wedge$. Die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ entsprechen denen in $\mathbf{B}_3$. Die Junktoren $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ können in $\neg$ und $\wedge$ wie in der klassischen Logik definiert werden. Die Wahrheitswertfunktion des Junktors $\sim$ ergibt für 1 und 0 den Wahrheitswert 1 und für 1/2 den Wahrheitswert 0. Das heißt man erhält die Wahrheitstafeln:

$\sim$	
0	1
1/2	0
1	1

$\neg$	
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

Einziger ausgezeichneter Wahrheitswert ist 1. ∎

4.4 Bemerkung: Für die Logik $\mathbf{H}_3$ gibt Hallden folgenden Kalkül an. Als Axiome sind gegeben:
$\mathbf{H}_31 : (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$
$\mathbf{H}_32 : P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
$\mathbf{H}_33 : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
$\mathbf{H}_34 : \sim P \Leftrightarrow \sim \neg P$
$\mathbf{H}_35 : \sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$
$\mathbf{H}_36 : P \Rightarrow \sim P$
Als Schlußregeln haben wir den Modus Ponens und die Substitutionsregel. ∎

4.5 Bemerkung: Ausgehend von Halldens Logik hat L. Åquist eine dreiwertige Logik entwickelt, in der er den dritten Wahrheitswert als „normativ“ interpretiert. Außer den Junktoren $\neg$ und $\vee$ betrachtet er einen dritten, einstelligen Junktor, dessen Wahrheitswertfunktion für 1 wieder 1 ergibt und sonst zu 0 evaluiert. Die Wahrheitstafeln sind:

$\sim$	
0	0
1/2	0
1	1

$\neg$	
0	1
1/2	1/2
1	0

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

Außer den Junktoren $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und $\wedge$ werden dann weitere Junktoren F, B und L definiert mit den Wahrheitswertfunktionen:

- $F(\alpha) = \sim (\neg(\alpha))$
- $B(\alpha) = \vee(\sim (\alpha), F(\alpha))$
- $L(\alpha) = \neg(B(\alpha))$

Die zugehörigen Wahrheitstafeln sind:

F	
0	1
1/2	0
1	0

B	
0	1
1/2	0
1	1

L	
0	0
1/2	1
1	0

Das heißt $F(\varphi)$ steht für „φ ist falsch“, $B(\varphi)$ für „φ ist bedeutungstragend“ und $L(\varphi)$ für „φ ist bedeutungslos“. ∎

4.3 Die dreiwertige Aussagenlogiken nach Kleene

Um Partialität logisch zu beschreiben hat Stephen Cole Kleene zwei Logiken eingeführt, mit der „indefinite“ Ausdrücke beschrieben werden können. Es geht dabei um Logiken, in denen zwar gewisse Teilformeln undefiniert sind, deshalb aber nicht wie in $\mathbf{B}_3$ die ganze Formel undefiniert ist.

4.6 Beispiel: Ein typisches Beispiel (allerdings hier ein prädikatenlogisches) ergibt sich aus der Mathematik, wo man Aussagen macht wie:
$x \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$. Der Term $\frac{1}{x}$ ist nur für x ungleich 0 definiert, dennoch macht die ganze Formel auch für x gleich 0 Sinn. Da die Prämisse in der Implikation falsch ist, kann man der ganzen Formel den Wahrheitswert 1 zuordnen. ■

Bei den Logiken nach Kleene handelt es sich um die Logiken $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ und $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$. Einziger ausgezeichneter Wahrheitswert ist jeweils 1. Zuerst stellen wir $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ vor.

4.7 Definition (Die starke Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$): In der starken Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ sind die Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ durch die folgenden Wahrheitstafeln gegeben:

$\neg$	
0	1
1/2	1/2
1	0

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\Rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1
1	0	1/2	1

$\Leftrightarrow$	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

■

4.8 Definition (Die schwache Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$): In der schwachen Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$ sind die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ wie in der starken Logik $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ gegeben, zusätzlich hat man Junktoren $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\equiv$, die durch die folgenden Wahrheitstafeln gegeben sind:

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

$\leftrightarrow$	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
1	0	1/2	1

$\equiv$	0	1/2	1
0	1	0	0
1/2	0	1	0
1	0	0	1

■

Die Junktoren entsprechen der Normalbedingung, das heißt es handelt sich bei den Logiken von Kleene um Erweiterungen der klassischen Logik. Auf den Wahrheitswerten 0 und 1 werden die Junktoren auch wie im klassischen Fall interpretiert. Für den dritten Wahrheitswert 1/2, das heißt „undefiniert“, liest sich der Junktor $\neg$: Wenn eine Formel φ undefiniert ist, so ist auch ihr Negat undefiniert. Für den Junktor $\wedge$ gilt: Ist eine der beiden Teilformel einer Konjunktion falsch, so ist die ganze Formel falsch; ist keine Teilformel falsch, aber eine undefiniert, so ist die ganze Formel undefiniert; wahr ergibt sich nur, wenn beide Teilformeln schon wahr ergeben.
Die beiden Logiken unterscheiden sich in zum einen in der Definition der Implikation. Während in $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ die Implikation von etwas „Undefinierten“ auf etwas „Undefinier-

tes“ selbst wieder „undefiniert“ ist, ist es in $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$ „wahr“. Hinzu kommt in $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$ ein weiterer Junktor für eine zweite Form der Äquivalenz: Zwei Formeln gelten als äquivalent bezüglich $\equiv$, wenn sie bezüglich der Wahrheitswerte übereinstimmen (wie auch $\leftrightarrow$). Ansonsten sind sie falsch (im Gegensatz zu $\leftrightarrow$).

4.4 Drei- und vierwertige Aussagenlogik zur Beschreibung von Parakonsistenz

Während man in den obigen Logiken dem dritten Wahrheitswert stets so etwas wie „weder noch“ als Semantik unterlegt hat, soll ihm in diesem Abschnitt ein „sowohl als auch“ unterlegt werden. Wir werden nun den Begriff der „Parakonsistenz“ definieren und vorstellen, wie man versucht ihn mithilfe von drei- beziehungsweise vierwertigen Logiken zu realisieren.
Wie in Kapitel 1 auf Seite 2 eingeführt, heißt eine Logik *explosiv*, wenn für alle Formeln φ und ψ gilt, aus der Menge $\{\varphi, \neg\varphi\}$ kann man ψ folgern. Klassische Logik ist explosiv, das heißt, wenn man nur einen einzigen Widerspruch in einer Wissensbasis (Formelmenge) hat, kann man beliebigen Unsinn folgern. Dies ist für die Modellierung menschlichen Schließens nur bedingt geeignet. Während man in der Mathematik sorgsam darauf achtet, keine Widersprüche in die Voraussetzungen aufzunehmen – wenn man sich auch nicht sicher sein kann, daß man nicht doch welche aufgenommen hat –, ist es im Alltagsschließen meistens so, daß kleinere Widersprüche ignoriert werden und Menschen sehr gut mit ihnen umgehen können. Das heißt das von Menschen verwendete Schließen ist nicht explosiv.

4.9 Definition (Parakonsistenz): Eine Logik heißt *parakonsistent* genau dann, wenn sie nicht explosiv ist. ■

Nimmt man eine dreiwertige Logik $\mathbf{S}_3$ wie dies A.M. Sette getan hat (vergleiche [Arr89, p.115], so kann man zum Beispiel die folgende Implikation und Negation definieren, so daß die Logik parakonsistent wird, wobei 1/2 und 1 ausgezeichnet sind.[1]:

$\neg$	
0	1
1/2	1
1	0

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1	1

Ein Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{S}_3}$ für $\mathbf{S}_3$ ist gegeben durch Modus Ponens, Substitutionsregel und die Axiome:

[1] Die Verwendung von mehrwertigen Logiken ist eine von mehreren Methoden, Parakonsistenz zu realisieren. Andere Methoden bestehen in der Verwendung von Relevanzlogiken oder Modallogiken.

$\mathbf{S}_3 1 : (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$\mathbf{S}_3 2 : (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to \neg\neg Q) \to P)$
$\mathbf{S}_3 3 : P \to (Q \to P)$
$\mathbf{S}_3 4 : (P \to Q) \to \neg\neg(P \to Q)$
$\mathbf{S}_3 5 : \neg(P \to \neg\neg P) \to P$

Eine Erweiterung dieser Logik besteht in einer vierwertigen Logik, in der die vier Wahrheitswerte außer „wahr“ und „falsch“ bedeuten, daß *keiner* der beiden Werte gegeben ist (wie in den meisten in den vorigen Abschnitten betrachteten Logiken) und das *beide* gleichzeitig gegeben sind (vergleiche auch [Sla91]).
Das heißt, wenn wir die Menge $\mathbf{W}_4 = \left\{\mathsf{0}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \mathsf{1}\right\}$ betrachten, so stehen die Wahrheitswerte intuitiv für die Teilmengen von $\{\top, \bot\}$ (mit $\top$ entspricht „wahr“ und $\bot$ entspricht „falsch“):
$\mathsf{1} = \{\top\}$, $\mathsf{0} = \{\bot\}$, $\frac{1}{3} = \emptyset$ und $\frac{2}{3} = \{\top, \bot\}$. Als Wahrheitstafeln für die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ erhalten wir dann[2]:

$\neg$	
$\{\bot\}$	$\{\top\}$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\top,\bot\}$	$\{\top,\bot\}$
$\{\top\}$	$\{\bot\}$

$\vee$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$
$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\top\}$	$\{\top\}$
$\{\top,\bot\}$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$
$\{\top\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$

$\wedge$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$
$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\bot\}$
$\emptyset$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\bot\}$	$\emptyset$
$\{\top,\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top,\bot\}$
$\{\top\}$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$

Die Implikation kann man so definieren, daß man beim Übergang von einer Formel φ zu einer Formel ψ weder die „Wahrheit“ verliert noch die „Falschheit“ hinzufügt. Es soll wieder gelten, daß man aus was Falschem beliebiges herleiten kann, während man Wahres aus beliebigem folgern darf. $\emptyset$ und $\{\top, \bot\}$ implizieren sich selbst, aber nicht wechselseitig.

$\to$	$\{\bot\}$	$\emptyset$	$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$
$\{\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$
$\emptyset$	$\{\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\bot\}$	$\{\top\}$
$\{\top,\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$
$\{\top\}$	$\{\bot\}$	$\{\bot\}$	$\{\top\}$	$\{\top\}$

[2]Da es in diesem Fall übersichtlicher ist, statt den Wahrheitswerten $\mathbf{W}_4$ die entsprechenden Teilmengen von $\{\top, \bot\}$ zu betrachten, werden wir diese Wahrheitswerte auch für die Wahrheitstafeln verwenden. Die entsprechende Transformation ist trivial.

Kapitel 5

Mehrwertige Prädikatenlogik erster Stufe

Die Verallgemeinerung von mehrwertiger Aussagenlogik auf mehrwertige Prädikatenlogik erster Stufe entspricht dem Übergang von klassischer Aussagenlogik zu klassischer Prädikatenlogik. Wir werden nun zuerst Syntax und Semantik mehrwertiger Prädikatenlogik einführen.
Der Hauptunterschied zwischen Aussagenlogik und Prädikatenlogik besteht im Vorkommen von Variablen und der Möglichkeit über sie zu quantifizieren. Quantoren kann man dabei als Verallgemeinerung von zweistelligen Junktoren ansehen, die assoziativ und kommutativ (sowie idempotent) sind[1]. Das heißt eine Aussage wie $\forall x P(x)$ entspricht (informell gesprochen) einer Aussage $P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots \wedge P(t_i) \wedge \ldots$, wobei man für x der Reihe nach alle möglichen Terme einsetzt. In der formalen Semantik für die Prädikatenlogik wird dies präzis gefaßt. Voraussetzung für diese Verallgemeinerungsmöglichkeit von Junktoren auf Quantoren besteht darin, daß die Junktoren assoziativ und kommutativ sind.
Wir werden nun zuerst allgemein die Syntax einer mehrwertige Prädikatenlogik einführen und danach speziell das prädikatenlogische System betrachten, das auf der aussagenlogischen Łukasiewicz-Logiken aufbaut, näher betrachten. Die Übertragung auf Systeme, die auf anderen aussagenlogischen Systeme beruhen, ergibt sich entsprechend.

5.1 Syntax

Die *logischen Zeichen* der Prädikatenlogik bestehen aus

- einer unendliche Menge von *Variablen* x, y und z (x_i),

[1]Zur Erinnerung, ein Operator $\star$ heißt
assoziativ gdw für alle φ, ψ und χ gilt $\varphi \star (\psi \star \chi) = (\varphi \star \psi) \star \chi$,
kommutativ gdw für alle φ und ψ gilt $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi$ und
idempotent gdw für alle φ gilt $\varphi \star \varphi = \varphi$.

– einer endlichen Menge von *Junktoren*

– einer endlichen Menge von *Quantoren*

– den *Hilfssymbolen*), (und ,

Die *Signatur* $\mathcal{S}$ besteht für jedes $m \in \mathbb{N}$ aus einer (möglicherweise leeren) Menge von m-stelligen *Relationssymbolen*, die wir in der Regel mit P, Q und R bezeichnen, sowie einer (möglicherweise leeren) Menge von m-stelligen *Funktionssymbolen*, die wir in der Regel mit f, g und h bezeichnen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstante* und werden mit c, d und e bezeichnet.
Wie in der klassischen Logik werden Terme induktiv definiert.

5.1 Definition (Term): *Terme* zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

T1 Jede Variable ist ein Term.

T2 Jede Konstante ist ein Term.

T3 Sind $t_1, \ldots, t_m$ Terme und ist f ein m-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_m)$ ein Term. ■

5.2 Definition (Formel der mehrwertigen Prädikatenlogik erster Stufe): *Formeln* der mehrwertigen Prädikatenlogik erster Stufe zu einer Signature $\mathcal{S}$ sind genau die Ausdrücke, die sich durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten lassen:

F1 Sind $t_1, \ldots, t_m$ Terme und ist P ein m-stelliges Relationsssymbol, dann ist der Ausdruck $P(t_1, \ldots, t_m)$ eine Formel. So gebildete Formeln heißen *atomar*.

F2 Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ Formeln und $\star$ ein m-stelliger Junktor, so ist $\star(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ eine Formel.

F3 Ist φ eine Formel, Q ein Quantor[2] und x eine Variable, so ist $(\mathsf{Q}x\varphi)$ eine Formel. ■

5.3 Bemerkung: Für die n-wertigen prädikatenlogischen Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_n^{\mathrm{P}}$ bedeutet dies: Junktoren sind $\neg$, $\wedge$ und $\rightarrow$. Es gibt einen Quantor $\forall$, der eine Verallgemeinerung des Junktors $\wedge$ darstellt. Der Definition des Junktors $\vee$ in $\mathbf{L}_n^{\mathrm{P}}$ als $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ entspricht die Definition eines Quantors $\exists$ als $\exists x\varphi = \neg\forall x\neg\varphi$. ■

[2] Wir betrachten hier nur einstellige Quantoren.

5.2 Semantik

Zur Klärung der Bedeutung von Formeln mehrwertiger Logik wird entsprechend der Semantik klassischer Prädikatenlogik eine formale Semantik eingeführt.

5.4 Definition (Interpretation): Eine *Interpretation* für Formeln der n-wertigen Prädikatenlogik ist ein Paar $\langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$, bestehend aus einer nicht-leeren Menge $\mathcal{U}$, dem *Universum*, und einer Abbildung $\mathcal{I}$, die jeder Konstanten aus $\mathcal{S}$ ein Element aus $\mathcal{U}$ zuordnet, jedem m-stelligen Funktionssymbol aus $\mathcal{S}$ eine Funktion von $\mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ und jedem m-stelligen Relationssymbol eine m-stellige Funktion von $\mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U} \to \mathbf{W}_n$. Eine *Belegung* ξ in eine Interpretation ist eine Abbildung, die jeder Variable x ein Element aus $\mathcal{U}$ zuordnet. Eine Interpretation und eine Belegung ergeben zusammen die Bedeutung für Terme durch folgende Abbildungen:

- $\mathcal{I}_\xi(x) = \xi(x)$ für jede Variable x
- $\mathcal{I}_\xi(c) = \mathcal{I}(c)$ für jede Konstante c
- für m-stellige Funktionssymbole f und Terme $t_1, \ldots, t_m$ gilt $\mathcal{I}_\xi(f(t_1, \ldots, t_m)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}_\xi(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\xi(t_m))$

Für atomare Formeln wird definiert:

- $\mathcal{I}_\xi(P(t_1, \ldots, t_m)) := \mathcal{I}(P)(\mathcal{I}_\xi(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\xi(t_m))$.

Die Definition der Semantik von zusammengesetzten Formeln ergibt sich aus der speziellen Semantik der in der Logik verwendeten Junktoren und Quantoren und kann nicht mehr allgemein angegeben werden. ■

Nun wollen wir die Łukasiewicz-Logik näher betrachten und die oben angegebene Semantik für beliebige n-wertige Prädikatenlogik auf eine Semantik für die Łukasiewicz-Logik ergänzen.

5.5 Definition (Semantik von $\mathbf{L}_n^{\mathrm{P}}$): Die Semantik zusammengesetzter Formeln der n-wertigen Łukasiewicz-Prädikatenlogik ergibt sich, indem man für zusammengesetzte Formeln mit den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\to$ und dem Quantor $\forall$ definiert:

- $\mathcal{I}_\xi(\neg\varphi) := \mathbf{1} - \mathcal{I}_\xi(\varphi)$
- $\mathcal{I}_\xi(\varphi \wedge \psi) := \min(\mathcal{I}_\xi(\varphi), \mathcal{I}_\xi(\psi))$
- $\mathcal{I}_\xi(\varphi \to \psi) := \min(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathcal{I}_\xi(\varphi) + \mathcal{I}_\xi(\psi))$
- $\mathcal{I}_\xi(\forall x \varphi) := \inf(\left\{\mathcal{I}_{\xi[x \leftarrow a]}(\varphi) | a \in \mathcal{U}\right\})$ ■

5.6 BEISPIEL: Betrachten wir die elfwertige Lukasiewicz-Logik $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_{11}$, Signatur bestehe aus der Konstanten 0, der einstelligen Funktion s und dem einstelligen Prädikat G (G wie „groß“). Betrachten wir die folgende Formel φ:
$\forall n G(n) \rightarrow G(s(n))$.
Eine mögliche Interpretation ergibt sich dadurch, daß wir als Universum $\mathcal{U}$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wählen, $\mathcal{I}(s)$ entspricht der Nachfolgerfunktion, die eine natüliche Zahl um eins vergrößert und $\mathcal{I}(G)$ ist die Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbf{W}_{11}$ die wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{I}(G)(n) := \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq 10 \\ \frac{1}{10} & \text{für } 10 < n \leq 20 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{9}{10} & \text{für } 90 < n \leq 100 \\ 1 & \text{für } 100 < n \end{cases}$$

Unter dieser Interpretation evaluiert die Formel φ zu 1. Also ist φ erfüllbar. ■

5.7 BEMERKUNG: Dadurch daß die Interpretation einer allquantifizierten Formel über das Infimum einer Menge von Wahrheitswerten definiert ist, kann die Definition 5.5 auch direkt für die Definition der Semantik der unendlichwertigen Lukasiewicz-Logik $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_{[0,1]}$ verwendet werden. Eine Übertragung auf $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_{\aleph_0}$ ist nicht so ohne weiteres möglich, da auf den rationalen Zahlen das Infimum nicht existieren muß. ■

5.3 Kalkül für $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_n$

Ein Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_n}$ für die Prädikatenlogik $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_n$ erhält man aus einem Kalkül, der die aussagenlogischen Tautologien von $\mathbf{L}_n$ liefert (wie etwa der Kalkül $\widehat{\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_n}}$ aus Bemerkung 3.23), durch die Hinzunahme etwa der folgenden Regeln[3] (vergleiche [Got90, S.56] und [Kon83]):

(Subst) $\dfrac{\varphi}{\varphi[X \leftarrow \psi]}$ Dabei muß φ eine aussagenlogische Tautologie sein, X ist eine beliebige atomare Teilformel von φ, und ψ ist eine beliebige Formel von $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}_n$.

(MP) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$

($\forall$Iv) $\dfrac{\varphi(x) \rightarrow \psi}{\forall x \varphi(x) \rightarrow \psi}$

($\forall$Ih) $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi(x)}{\varphi \rightarrow \forall x \psi(x)}$ In φ darf die Variable x nicht frei vorkommen.

($\exists$Iv) $\dfrac{\varphi(x) \rightarrow \psi}{\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi}$ In ψ darf die Variable x nicht frei vorkommen.

[3] beziehungsweise Erweiterung der Regeln, sofern sie schon vorhanden sind

(∃Ih) $\dfrac{\varphi \to \psi(x)}{\varphi \to \exists x \psi(x)}$

(gebU) $\dfrac{\varphi}{\psi}$ Wobei ψ aus φ durch konfusionsvermeidende Umbenennung gebundener Variablen hervorgeht.

(freiU) $\dfrac{\varphi}{\psi}$ Wobei ψ aus φ durch konfusionsvermeidende Umbenennung freier Variablen hervorgeht.

Damit ist die Kalkülisierungsfrage für die Logiken $\mathbf{L}_n^{\mathrm{p}}$ positiv beantwortet. Was den Zusammenhang zwischen den Logiken $\mathbf{L}_n^{\mathrm{p}}$ und $\mathbf{L}_{[0,1]}^{\mathrm{p}}$ angeht, so läßt sich der mit Lemma 3.29 auf $\mathbf{L}_{[0,1]}$ übertragene Satz 3.27 auch für die unendlichwertige Prädikatenlogik $\mathbf{L}_{[0,1]}^{\mathrm{p}}$ (wie von J. D. Rutledge 1960 getan) zeigen.

5.8 Theorem: *Eine Formel φ ist in $\mathbf{L}_{[0,1]}^{\mathrm{p}}$ genau dann allgemeingültig, wenn sie in allen Logiken $\mathbf{L}_n^{\mathrm{p}}$ für $n \geq 3$ allgemeingültig ist.* ■

Allerdings ist – wie Bruno Scarpellini 1962 gezeigt hat – die Prädikatenlogik $\mathbf{L}_{[0,1]}^{\mathrm{p}}$ selbst nicht mehr kalkülisierbar.

5.4 Die dreiwertige starke Prädikatenlogik nach Kleene

Wir haben im Abschnitt 4.3 die schwache und starke Kleene-Aussagenlogik eingeführt. Richtig interessant werden diese Logiken aber erst beim Übergang zu den entsprechenden Prädikatenlogiken. Wir werden uns bei den folgenden Betrachtungen auf die starke Kleene-Logik beschränken. Wir betrachten dazu ein Beispiel aus [Wag91], wie man es auch üblicherweise in der Mathematik finden kann: Sei das Prädikat P definiert durch eine Formel φ als $\forall x P(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0$ für $x \neq 1$. Dann hätte man gerne logisch, daß sowohl $P(2)$ als auch $\neg P(0)$ gelten, aber weder $P(1)$ noch $\neg P(1)$.
Um dies in einer formalen Logik ausdrücken zu können, erweitern wir die starke Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ um die Quantoren $\exists$ und $\forall$ zu einer Prädikatenlogik $\mathbf{K}_3^{\text{p}}$.
Damit steht die Syntax der starken Kleene-Logik fest. Anstatt des dritten Wahrheitswert $\frac{1}{2}$ schreiben wir im folgenden U, um die Semantik „undefiniert“ zu betonen. Nun wollen wir die Semantik von $\mathbf{K}_3^{\text{p}}$ definieren.

5.9 Definition (Semantik von $\mathbf{K}_3^{\text{p}}$): Zusätzlich zur Standarddefinition von Semantik, geht man in diesem Fall davon aus, daß das Universum sich aus dem üblichen Universum vereinigt mit einem ausgezeichneten Fehlerelement besteht, das heißt das Universum ist $\mathcal{U} \cup \{\bot\}$. Auf das Fehlerelement werden gewisse Terme abgebildet, so daß die folgende Beziehung für alle Interpretationen und Belegungen gilt:

- Ist f ein m-stelliges Funktionssymbol und sind u_1 bis u_m Elemente des Universums, wobei mindestens eines der $u_i = \bot$ ist, dann ist $\mathcal{I}(f)(u_1, \ldots, u_m) = \bot$.

- Ist P ein m-stelliges Prädikatensymbol und sind u_1 bis u_m Elemente des Universums, wobei mindestens eines der $u_i = \bot$ ist, dann ist $\mathcal{I}(P)(u_1, \ldots, u_m) = \mathsf{U}$.

Die Semantik der Junktoren wird direkt aus den Wahrheitstafeln in Definition 4.7 übernommen. Es bleibt also die Semantik der Quantoren $\exists$ und $\forall$ zu klären.

- $\mathcal{I}_\xi(\forall x \varphi) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{I}_{\xi[x\leftarrow a]}(\varphi) = 1 \text{ für alle } a \in \mathcal{U} \\ \mathsf{U} & \text{falls } \mathcal{I}_{\xi[x\leftarrow a]}(\varphi) = \mathsf{U} \text{ für (mindestens) ein } a \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $\mathcal{I}_\xi(\exists x \varphi) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{I}_{\xi[x\leftarrow a]}(\varphi) = 0 \text{ für alle } a \in \mathcal{U} \\ \mathsf{U} & \text{falls } \mathcal{I}_{\xi[x\leftarrow a]}(\varphi) = \mathsf{U} \text{ für (mindestens) ein } a \in \mathcal{U} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

■

5.10 Beispiel: Wir betrachten nun nochmals das Beispiel von oben. Sei also die Formel $\varphi = \forall x P(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0$ gegeben. Betrachten wir eine Interpretation mit $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$. Das heißt das Universum besteht aus $\mathbb{Q} \cup \{\bot\}$. Das binäre Funktionssymbol

„geteilt durch“ und das binäre Prädikatssymbol $\geq$ werden durch eine Interpretation $\mathcal{I}$ wie üblich interpretiert. $\frac{1}{0}$ wird auf $\perp$ abgebildet. Dann erhalten wir für beliebe Belegungen ξ $\mathcal{I}_\xi(\varphi) = \mathsf{U}$, da

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{I}_{\xi[x\leftarrow 1]}(P(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0) & = & \Leftrightarrow(\mathcal{I}(P)(\mathcal{I}(1)), \mathcal{I}(\geq)(\mathcal{I}(\frac{1}{0}), \mathcal{I}(O)) \\ & = & \Leftrightarrow(\mathcal{I}(P)(\mathcal{I}(1)), \mathcal{I}(\geq)(\perp), \mathcal{I}(O)) \\ & = & \Leftrightarrow(cI(P)(\mathcal{I}(1)), \mathsf{U}) \\ & = & \mathsf{U}.\end{array}$$

Unter dieser Interpretation evaluiert wie gewünscht $P(2)$ als auch $\neg P(0)$ zu $\mathsf{1}$ und $P(1)$ als auch $\neg P(1)$ zu U. ■

Kapitel 6

Der Resolutionskalkül

Wir haben in den vorangegangenen Kapiteln verschiedene Kalküle vor allem für mehrwertige *Aussagen*logiken, aber auch einen Kalkül für die mehrwertige Prädikatenlogik $\mathbf{L}_n^{\mathrm{P}}$ kennengelernt. Allen diesen Kalkülen gemeinsam ist, daß die Tautologien ausgehend von Axiomen mit Hilfe von Kalkülregeln erzeugt werden, wobei sich allein durch die Anwendung der Substitutionsregel ein nicht-endlich verzweigender Suchraum ergibt. Deshalb sind diese auch Hilbert-Kalküle genannten Kalküle zwar gut zur Untersuchung von theoretischen Eigenschaften geeignet und auch für das Aufschreiben von gefundenen Beweisen nützlich beziehungsweise modifizierbar, aber eine Automatisierung ist mit ihrer Hilfe nur schwer möglich. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß das zu zeigende Theorem in den Abarbeitungsmechanismus gar nicht eingeht, sondern sich erst am Schluß, wie vom Himmel gefallen, ergibt. Ähnlich ist die Situation für vergleichbare Kalküle der klassischen Logik.
Als den großen Durchbruch im automatischen Beweisen überhaupt kann man die Entwicklung des *Resolutionskalkül* 1965 durch J.A. Robinson ansehen [Rob65], der die oben aufgeführten Probleme überwand. Die Resolution löst zwar bei weitem nicht alle Probleme des automatischen Beweisens, aber viele Sätze können mit dieser Methode vollautomatisch bewiesen werden. Der Kalkül wurde im Laufe der Zeit etwas verfeinert und erweitert und auch heute noch basieren die stärksten existierenden Beweisern auf der Resolution (erweitert um Methoden zur Behandlung von Gleichheitsproblemen).
Das Resolutionsverfahren ist neuerdings auch auf mehrwertige Logiken übertragen worden. In diesem Kapitel wird zuerst das Resolutionsverfahren für die klassische Logik vorgestellt und dann auf (endlichwertige) mehrwertige Logiken übertragen.

6.1 Resolution für klassische Prädikatenlogik

Resolution ist ein negatives Testverfahren, das bei seiner Erfindung einen großen Fortschritt darstellte, da die Instantiierungen nicht geraten werden müssen. Der Resolutionskalkül setzt eine Normalform, die *Klauselnormalform*, voraus, von der ausgehend weitere *Klauseln* hergeleitet werden. Kann man die *leere Klausel*, das einzige

Axiom für eine falsche Formel, herleiten, so war die ursprüngliche Klauselmenge und damit die Ausgangsformelmenge unerfüllbar.
Die Klauselnormalform ist eine Konjunktion von Disjunktionen, das heißt, eine Formel der Gestalt:

$$(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m1} \vee \ldots \vee L_{mn_m})$$

wobei die einzelnen L_{ij}, die sogenannten *Literale*, atomare Formeln oder deren Negation sind. $(L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in_i})$ heißt eine *Klausel*. Üblicherweise notiert man die Klauselnormalform als eine Liste von Klauseln, die implizit mit "$\wedge$" verknüpft sind. Die einzelnen Klauseln werden dabei durchnummeriert. In der Klauselnormalform sind alle Variablen implizit allquantifiziert. Existenzquantoren werden durch die *Skolemisierung* eliminiert, zum Beispiel erhält man aus $\forall x\, \exists y\; P(x, y)$ die Formel $\forall x\; P(x, f(x))$, wobei f ein neues Funktionssymbol ist. Zu jeder Formelmenge kann man eine Klauselnormalform berechnen, die genau dann unerfüllbar ist, wenn es die Ursprungsformelmenge war.
Die Klauselnormalform wird dadurch erzeugt, daß man die Ausgangsformelmenge mit Hilfe der folgenden Äquivalenzen umformt [EO87, S.27f]:

$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\leadsto$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$	
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\leadsto$	$\neg\varphi \vee \psi$	
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\leadsto$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\leadsto$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	
$\neg\forall x\varphi$	$\leadsto$	$\exists x\neg\varphi$	
$\neg\exists x\varphi$	$\leadsto$	$\forall x\neg\varphi$	
$(\forall x\varphi) \wedge \psi$	$\leadsto$	$\forall x(\varphi \wedge \psi)$	sofern x nicht frei in ψ
$(\forall x\varphi) \vee \psi$	$\leadsto$	$\forall x(\varphi \vee \psi)$	sofern x nicht frei in ψ
$(\exists x\varphi) \wedge \psi$	$\leadsto$	$\exists x(\varphi \wedge \psi)$	sofern x nicht frei in ψ
$(\exists x\varphi) \vee \psi$	$\leadsto$	$\exists x(\varphi \vee \psi)$	sofern x nicht frei in ψ
$(\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi)$	$\leadsto$	$\forall x(\varphi \wedge \psi)$	
$(\exists x\varphi) \wedge (\exists x\psi)$	$\leadsto$	$\exists x(\varphi \wedge \psi)$	
$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$\leadsto$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	
$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$\leadsto$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	

Mit Hilfe dieser Transformationen und einer Variablenumbenennungsregel, die es einem erlaubt zu erreichen, daß die Regeln, mit denen man einen Quantor über Disjunktionen und Konjunktionen ziehen kann, anwendbar sind, läßt sich eine Formel in eine äquivalente Pränexform überführen.
Eine Formel $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y \varphi$ wird durch *Skolemizierung*[1] in eine Formel ohne Existenzquantor dadurch übergeführt, daß alle freien Vorkommen von y in φ durch den Term $f_y(x_1, \ldots, x_m)$ ersetzt werden, wobei die *Skolemfunktion* f_y durch ein neues Funktionssymbol dargestellt wird. Nachdem man alle Existenzquantoren durch Skolemisierung beseitigt hat, hat man (wenn man nicht von beliebigen Formeln, sondern

[1] Die Skolemizierung wird nach Thoralf Skolem benannt [Sko19].

von Sätzen ausgeht) nur noch allquantifizierte Variablen in den Formeln, also kann man die Quantoren weglassen und sich merken, daß alle Variablen allquantifiziert sind.
Allerdings sind die Ausgangsformelmenge Γ und die so erhaltene Klauselnormalform $\mathcal{C}_\Gamma$ nicht mehr äquivalent. Es gilt aber der folgende Satz.

6.1 THEOREM: *Eine Formelmenge Γ ist genau dann erfüllbar (unerfüllbar), wenn die zugehörige Klauselnormalform $\mathcal{C}_\Gamma$ erfüllbar (unerfüllbar) ist.* ■

6.2 BEISPIEL: Sei zum die folgende unerfüllbare Formelmenge Γ gegeben:

(1) mensch(max)
(2) $\forall x\,(\text{mensch}(x) \Rightarrow \text{mensch}(\text{vater}(x)))$
(3) $\neg$mensch(vater(max)).

Die zugehörige Klauselnormalform $\mathcal{C}_\Gamma$ ist dann:

(1) mensch(max)
(2) $\neg\text{mensch}(x) \vee \text{mensch}(\text{vater}(x))$
(3) $\neg$mensch(vater(max))

■

Auf der Klauselnormalform kann man nun den Resolutionskalkül anwenden. Mit den beiden Kalkülregeln **Res** und **Fac** werden ausgehend von einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ neue Klauseln erzeugt und zu der aktuellen Klauselmenge hinzugefügt bis das einzige Axiom (für Falschheit), die leere Klausel $\Box$ abgeleitet ist. Hat man dies abgeleitet, so hat man gezeigt, daß die Ausgangsklauselmenge unerfüllbar ist.
Die Resolutionsregel angewendet auf (1)1 und (2)1 – die zweite Zahl soll dabei das entsprechende Literal angeben – liefert im obigen Beispiel die *Resolvente*

(4) mensch(vater(max))

Diese wiederum resolviert mit Klausel (3)1, was die leere Klausel

(5) $\Box$

ergibt. Also war die Ausgangsklauselmenge $\mathcal{C}_\Gamma$ unerfüllbar und damit auch die Formelmenge Γ.
Die allgemeine Resolutionsregel hat die Gestalt:

$$\textbf{Res} \qquad \frac{\begin{array}{ll} L \vee K_1 \vee \ldots \vee K_n & \\ \neg L' \vee M_1 \vee \ldots \vee M_m & \sigma(L) = \sigma(L') \end{array}}{\sigma(K_1) \vee \ldots \vee \sigma(K_n) \vee \sigma(M_1) \vee \ldots \vee \sigma(M_m)}$$

Dabei ist σ die allgemeinste Einsetzung die L und L' gleich macht, der *allgemeinste Unifikator*. Im obigen Beispiel ist σ gleich $(x \leftarrow \text{max})$. Die Faktorisierungsregel ist:

$$\textbf{Fac} \qquad \frac{L \vee L' \vee K_1 \vee \ldots \vee K_n \qquad \sigma(L) = \sigma(L')}{\sigma(L) \vee \sigma(K_1) \vee \ldots \vee \sigma(K_n)}$$

Es gilt der folgende Satz:

6.3 THEOREM: *Der Resolutionskalkül bestehend aus der Resolutionsregel und der Faktorregel zusammen mit der leeren Klausel als Axiom für eine widersprüchliche Formel ergibt einen widerlegungskorrekten und widerlegungsvollständigen Kalkül.* ■

Das bedeutet, man kann die leere Klausel nur ableiten, wenn die Ausgangsklauselmenge unerfüllbar ist (Korrektheit), und umgekehrt, wenn die Ausgangsklauselmenge unerfüllbar ist, so läßt sich auch die leere Klausel ableiten (Vollständigkeit).
Eine wichtige Eigenschaft der Resolution ist, daß weder ganze Formeln geraten werden müssen, die in die Axiome mit der Substitutionsregel eingesetzt werden müssen, noch ist es wegen der Berechnung der allgemeinsten Unifikatoren notwendig, Einsetzungen für universell quantifizierte Variablen zu raten.

6.4 BEMERKUNG: Aus den beiden Sätzen zusammen ergibt sich also das Resolutionsverfahren. Will man zeigen, daß aus einer Formelmenge Γ eine Formel φ folgt (also $\Gamma \models \varphi$), so bedeutet daß (in klassischer Logik) ja gerade, daß $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist. Diese Formelmenge wird in die zugehörige Klauselnormalform übersetzt, die genau dann unerfüllbar ist, wenn es die Ausgangsformelmenge war. Nun werden solange die Resolutions- und die Faktorregel angewandt bis die leere Klausel abgeleitet ist. In diesem Fall ist ein Widerspruch hergeleitet, somit war die Ausgangsklauselmenge unerfüllbar, also folgt φ tatsächlich aus Γ. Ist keine der Regeln mehr anwendbar und die leere Klausel ist nicht abgeleitet (was in praktischen Fällen selten vorkommt), so war die Ausgangsklauselmenge erfüllbar, φ folgt also nicht aus Γ. Sind aber noch Regeln anwendbar und die leere Klausel ist noch nicht abgeleitet, so weiß man nicht, ob sie noch abgeleitet werden kann oder nicht (was der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik entspricht). ■

Im nächsten Abschnitt soll der Resolutionskalkül auf mehrwertige Logiken verallgemeinert werden. Dazu müssen zum einen die Erzeugung der Klauselnormalform und zum anderen die Regeln selbst angepaßt werden.

6.2 Resolution für n-wertige Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden wir einen Resolutionskalkül für mehrwertige Prädikatenlogik vorstellen. Die Darstellung ist eng an [BF92] angelegt, wo die entsprechenden Begriffe entwickelt wurden. Zuerst werden die grundlegenden Begriffe der klassischen Resolution verallgemeinert und die Hauptsätze übertragen. Im weiteren wird behandelt, wie aus einer Formelmenge die entsprechende Normalform erzeugt wird.

6.2.1 Grundlegende Begriffe

Wir setzen jetzt die in Kapitel 5 eingeführte n-wertige Prädikatenlogik $\mathcal{L}_n$ mit der entsprechenden Syntax und Semantik voraus. Die Wahrheitswerte seien wieder in der Menge $\mathbf{W}_n$ zusammengefaßt. Zusätzlich fixieren wir die Semantik der Junktoren $\star_i$ und der Quantoren Q_j durch Wahrheitswertfunktionen (die wir statt $f^{\star_i}$ und f^{Q_j} auch wieder kurz $\star_i$ und Q_j nennen) wie folgt:

- $\star_i : \mathbf{W}_n^{m_i} \to \mathbf{W}_n$, wenn $\star_i$ ein m_i-stelliger Junktor ist
- $\mathsf{Q}_j : \mathcal{P}(\mathbf{W}_n) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbf{W}_n$ für Quantoren Q_j.

Für zusammengesetzte Formeln wird dann definiert:

- $\mathcal{I}_\xi(\star_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_i})) := \star_i(\mathcal{I}_\xi(\varphi_1), \ldots, \mathcal{I}_\xi(\varphi_{m_i}))$
- $\mathcal{I}_\xi(\mathsf{Q}_j x \varphi) := \mathsf{Q}_j(\big\{\alpha \in \mathbf{W}_n \mid \text{es gibt } a \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathcal{I}_{\xi[x \leftarrow a]}(\varphi) = \alpha\big\})$

Die Grundbegriffe der mehrwertigen Logik werden wie folgt erweitert:

6.5 Definition (Erweiterte Formeln): Eine *erweiterte Formel* von $\mathcal{L}_n$ ist ein Paar $\langle \varphi, \alpha \rangle$, wobei φ eine Formel von $\mathcal{L}_n$ ist und α ein Wahrheitswert aus $\mathbf{W}_n$. Wir schreiben kurz φ^α.
Entsprechend definieren wir ein *Literal* einer mehrwertigen Logik als ein Paar $\langle L, \alpha \rangle$ bestehend aus einer atomaren Formel L und einem Wahrheitswert α. Wir schreiben kurz[2] L^α.
Klauseln A sind wie gehabt Disjunktionen von Literalen und werden als endliche Mengen von Literalen geschrieben. ■

Nun führen wir die Begriffe ein, die zum Beweis der grundlegenden Eigenschaften der Resolution erforderlich sind.

6.6 Definition (Herbrand-Universum, Herbrand-Basis): Das *Herbrand-Universum* $H(\mathcal{C})$ einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist die Menge aller variablenfreien Terme, die man aus Konstanten- und Funktionssymbolen bilden kann, die in $\mathcal{C}$ vorkommen. (Kommt keine Konstante in $\mathcal{C}$, so wird eine Konstante c neu eingeführt.)

[2] Dies stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Literalbegriffs dar, wenn man annimmt, daß das Literal L gerade L^1 und $\neg L$ dem Literal L^0 entspricht.

Eine *Grundinstanz* A' einer Klausel A in einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ entsteht aus A durch die Substitution aller freier Variablen durch Elemente des Herbrand-Universums. Entsprechend sprechen wir von Grundatomen, Grundtermen und so weiter.
Die *Herbrand-Basis* $A(\mathcal{C})$ einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist die Menge aller Grundinstanzen von Atomen, die in Klauseln von $\mathcal{C}$ vorkommen.
Eine *vollständige Interpretation* einer Menge von Grundatomen Γ ist eine Menge von Literalen $\left\{L^{\mathcal{I}(L)} | L \in \Gamma\right\}$, wobei die Funktion $\mathcal{I}$ in die Wahrheitswerte $\mathbf{W}_n$ geht.
Eine *Herbrand-Interpretation* oder auch kurz *H-Interpretation* $\mathcal{I}$ einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist eine vollständige Interpretation der Herbrand-Basis $A(\mathcal{C})$. ■

Damit haben wir nun alle Begriffe zusammen, um zu definieren, was es heißt, daß eine Klauselmenge H-unerfüllbar ist.

6.7 Definition (H-unerfüllbar): Eine H-Interpretation $\mathcal{I}$ einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ *erfüllt* diese, wenn für alle Grundinstanzen A' von Klauseln $\mathsf{A} \in \mathcal{C}$ gilt: $\mathsf{A}' \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. $\mathcal{I}$ heißt in diesem Fall[3] ein *H-Modell* von $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ heißt *H-unerfüllbar*, wenn es keine H-Interpretation gibt, die $\mathcal{C}$ erfüllt. ■

6.8 Beispiel: Sei eine dreiwertige Logik gegeben mit den Wahrheitswerten $\mathbf{W}_3 = \{0, 1/2, 1\}$ und $\mathcal{C}$ die aus zwei Klauseln bestehende Klauselmenge
$\mathcal{C} = \left\{\{Q(a)^1\}, \left\{Q(x)^0, Q(x)^{1/2}, Q(s(x))^1\right\}\right\}$
dann ist $H(\mathcal{C}) = \{a, s(a), s(s(a)), s(s(s(a))), \ldots\}$ und
$A(\mathcal{C}) = \{Q(a), Q(s(a)), Q(s(s(a)), Q(s(s(s(a)))), \ldots\}$. Die H-Interpretation $\{Q(a)^1, Q(s(a))^1, Q(s(s(a)))^1, Q(s(s(s(a))))^1, \ldots\}$ erfüllt $\mathcal{C}$, wohingegen die H-Interpretation $\{Q(a)^1, Q(s(a))^0, Q(s(s(a)))^1, Q(s(s(s(a))))^1, \ldots\}$ die Klauselmenge $\mathcal{C}$ nicht erfüllt. ■

Wie in der klassischen Logik gilt nun der Satz von Herbrand, auf dem das Resolutionsverfahren aufbaut:

6.9 Theorem: *Eine Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist unerfüllbar, genau dann wenn sie H-unerfüllbar ist.*

Beweis: Da ein H-Modell insbesondere ein Modell ist, ist klar, daß aus der Unerfüllbarkeit die H-Unerfüllbarkeit folgt. Ist aber umgekehrt eine Interpretation $\mathcal{J}_\xi$ auf einem Universum $\mathcal{U}$ gegeben, so kann man daraus eine H-Interpretation bekommen, indem man definiert:
$\mathcal{I} := \{L^\alpha | \mathcal{J}_\xi(L) = \alpha \text{ für alle } P \in A(\mathcal{C})\}$. ■

6.2.2 Der Resolutionskalkül für $\mathcal{L}_n$

Nun wollen wir den Resolutionskalkül für die mehrwertigen Logiken $\mathcal{L}_n$ einführen:

[3] In anderen Worten: In jeder nur möglichen Grundinstanz einer jeden Klausel gibt es ein Literal, das durch die Interpretation $\mathcal{I}$ richtig interpretiert wird.

6.10 DEFINITION (MEHRWERTIGER RESOLUTIONSKALKÜL $\vdash_{\mathrm{res}}$): Die allgemeine Resolutionsregel hat die Gestalt:

$$\textbf{Res}\qquad \frac{\begin{array}{l}\{L_1^{\alpha}, K_1^{\alpha_1}, \ldots, K_n^{\alpha_n}\}\\ \left\{L_2^{\beta}, M_1^{\beta_1}, \ldots, M_m^{\beta_m}\right\}\end{array}}{\left\{\sigma(K_1^{\alpha_1}), \ldots, \sigma(K_n^{\alpha_n}), \sigma(M_1^{\beta_1}), \ldots, \sigma(M_m^{\beta_m})\right\}}\quad \sigma(L_1) = \sigma(L_2) \text{ und } \alpha \neq \beta$$

Dabei ist σ der allgemeinste Unifikator von L_1 und L_2. Die Faktorisierungsregel lautet:

$$\textbf{Fac}\qquad \frac{\{L_1^{\alpha}, L_2^{\alpha}, K_1^{\alpha_1}, \ldots, K_n^{\alpha_n}\}}{\{\sigma(L_1^{\alpha}), \sigma(K_1^{\alpha_1}), \ldots, \sigma(K_n^{\alpha_n})\}}\quad \sigma(L_1) = \sigma(L_2)$$

wobei σ wiederum der allgemeinste Unifikator von L_1 und L_2 ist.
Eine Klausel A heißt nun ableitbar aus einer Klauselmenge $\mathcal{C}$, das heißt $\mathcal{C}\vdash_{\mathrm{res}}\mathsf{A}$, wenn es eine endliche Sequenz von Klauseln $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_m = \mathsf{A}$ gibt, so daß für jedes A_i mit $1 \leq i \leq m$ gilt:

- A_i ist eine Variante (Umbenennung) einer Klausel in $\mathcal{C}$,
- A_i ist Resolvente von Varianten zweier Klauseln A_j und A_k mit $j, k < i$ oder
- A_i ist Faktor einer Variante einer Klausel A_j mit $j < i$.

Die leere Klausel $\Box$ ist das einzige Axiom und steht für einen Widerspruch. ■

Nun gilt der folgende Korrektheitssatz:

6.11 THEOREM: *Für jede Klauselmenge $\mathcal{C}$ gilt, wenn $\mathcal{C}\vdash_{\mathrm{res}}\Box$, dann ist $\mathcal{C}$ H-unerfüllbar.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß aus der Erfüllbarkeit zweier resolvierbaren Klauseln auch die Erfüllbarkeit der Resolvente folgt. Sei also $\mathcal{I}$ eine H-Interpretation, die $\{L_1^{\alpha}, K_1^{\alpha_1}, \ldots, K_n^{\alpha_n}\}$ und $\left\{L_2^{\beta}, M_1^{\beta_1}, \ldots, M_m^{\beta_m}\right\}$ erfüllt, also alle Grundinstanzen dieser Klauseln erfüllt, so muß es zu jeder Grundinstantiierung in jeder Klausel mindestens ein Literal geben, dessen Grundinstanz von $\mathcal{I}$ erfüllt wird. Da $\alpha \neq \beta$ und L_1 und L_2 unifizierbar sind, können dies nicht gleichzeitig Grundinstanzen von L_1 und L_2 sein, also ist es eins der $K_i^{\alpha_i}$ oder der $M_i^{\beta_i}$. Da die Grundinstanzen von $\sigma(K_i^{\alpha_i})$ und $\sigma(M_i^{\beta_i})$ aber alle auch Grundinstanzen von $K_i^{\alpha_i}$ und $M_i^{\beta_i}$ sind, wird also in der Resolvente die Grundinstanz mindestens eines Literals von $\mathcal{I}$ erfüllt. Das Argument für die Faktorisierung geht entsprechend.
Gelte also $\mathcal{C}\vdash_{\mathrm{res}}\Box$. Nehmen wir an, die Ausgangsklauselmenge sei erfüllbar, dann müßte in der Ableitung der leeren Klausel jede Klausel selbst wieder erfüllbar sein, insbesondere auch die leere Klausel selbst. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß die leere Klausel von keiner H-Interpretation erfüllt wird, also war die Annahme falsch und die Ausgangsklauselmenge muß unerfüllbar sein. ■

6.2.3 Vollständigkeit der mehrwertigen Resolution

Um die Vollständigkeit der mehrwertigen Resolution zeigen zu können, sind wie im klassischen Fall einige Vorarbeiten erforderlich. Insbesondere muß der Begriff eines semantischen Baumes eingeführt werden. Bei Bäumen nehmen wir an, daß die Wurzel oben sitzt, ein Zweig ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt und entweder unendlich lang ist oder aber in einem Blatt endet.

6.12 Definition (Semantischer Baum):
Sei $\mathbf{W}_n$ eine Menge von Wahrheitswerten und Γ eine Menge von Grundatomen. Δ_Γ ist dann die Menge aller bezüglich $\mathbf{W}_n$ möglichen Literale, die aus Atomen in Γ bestehen. Ein endlich-verzweigender Baum B ist ein semantischer Baum für Γ, wenn die Kanten von B durch endliche Teilmengen von Δ_Γ in der folgenden Weise markiert sind:

- Die Menge aller Literalmengen, die Kanten markieren, die von einem Knoten ausgehen, ist H-unerfüllbar.
- Die Vereinigung der Literalmengen der Kanten eines jeden Zweigs von B enthält wenigstens eine vollständige Interpretation für Γ.
- Für jede vollständige Interpretation $\mathcal{I}_\Gamma$ von Γ gibt es einen Zweig von B, so daß $\mathcal{I}_\Gamma$ Teilmenge der Vereinigung der Literalmengen ist, die die Kanten dieses Zweiges markieren.

Die Vereinigung aller Literalmengen, die die Kanten des Pfades von der Wurzel zu einem Knoten k markieren, bilden die *Widerlegungsmenge* für k. ∎

Für eine Klauselmenge $\mathcal{C}$ bildet jeder semantische Baum B für $A(\mathcal{C})$ eine erschöpfenden Übersicht über alle möglichen H-Interpretationen von $\mathcal{C}$.

6.13 Definition (Fehlerknoten): Eine Klausel A wird in einem Knoten k eines semantischen Baumes B widerlegt, wenn es eine Grundinstanz A' von A gibt, so daß jedes Literal $L \in \mathsf{A}'$ in der Widerlegungsmenge dieses Knoten ist.
Ein Knoten k heißt ein *Fehlerknoten* für eine Klauselmenge $\mathcal{C}$, wenn es eine Klausel von $\mathcal{C}$ gibt, die in k widerlegt wird, aber keine Klausel aus $\mathcal{C}$ wird an einem Knoten oberhalb von k widerlegt.
Ein Knoten heißt *Inferenzknoten*, wenn alle Kinder Fehlerknoten sind. B heißt *$\mathcal{C}$-abgeschlossen* wenn es auf jedem Zweig von B einen Fehlerknoten für $\mathcal{C}$ gibt. ∎

6.14 Lemma: *Eine Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist H-unerfüllbar, genau dann wenn es eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq A(\mathcal{C})$ gibt, so daß jeder semantische Baum für Γ $\mathcal{C}$-abgeschlossen ist.*

Beweis:
1.Teil: Sei B ein semantischer Baum für die Herberand-Basis von $\mathcal{C}$, also von $A(\mathcal{C})$. Nach der Definition eines semantischen Baumes enthält jeder Zweig z von B mindestens eine vollständige Interpretation von $A(\mathcal{C})$. Wenn $\mathcal{C}$ aber H-unerfüllbar ist, kann

keine vollständige Interpretation alle Klauseln von $\mathcal{C}$ erfüllen. Also gibt es eine Grundinstanz einer Klausel in $\mathcal{C}$, so daß deren Literale in der Widerlegungsmenge eines Knotens von z enthalten sind. Also enthält jeder Zweig von B einen Fehlerknoten für eine Klausel von $\mathcal{C}$. Folglich ist B $\mathcal{C}$-abgeschlossen. Die Zahl der Knoten in B, die nicht unterhalb eines Fehlerknotens sind, ist endlich, da wir anderenfalls einen Zweig ohne Fehlerknoten finden könnten und dieser damit ein H-Model von $\mathcal{C}$ liefern würde. Folglich reicht es also eine endliche Teilmenge von $A(\mathcal{C})$ zu betrachten.
2.Teil: Sei B umgekehrt ein $\mathcal{C}$-abgeschlossener semantischer Baum für eine endliche Teilmenge Γ von $A(\mathcal{C})$. Nehmen wir an, daß $\mathcal{I}$ ein H-Modell von $\mathcal{C}$ sei. Für jeden Fehlerknoten k in B zu einer Klausel aus $\mathcal{C}$ und für jede vollständige Interpretation $\mathcal{I}_\Gamma$ von Γ, die die Widerlegungsmenge von k enthält, gilt $\mathcal{I}_\Gamma \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Nach der Definition eines semantischen Baumes, ist jede mögliche Interpretation in der Vereinigung der Widerlegungsmengen eines Zweiges von B. Wählen wir Interpretationen $\mathcal{I}_\Gamma^1$ und $\mathcal{I}_\Gamma^2$ mit $\mathcal{I}_\Gamma^1 \cap \mathcal{I}_\Gamma^2 = \emptyset$. Da B $\mathcal{C}$-abgeschlossen ist, haben wir $\mathcal{I}_\Gamma^1 \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ und $\mathcal{I}_\Gamma^2 \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Dies widerspricht jedoch der Eindeutigkeit des Wahrheitswertes, der $\mathcal{I}$ den einzelnen Atomen in Γ zuordnen muß. Folglich ist $\mathcal{C}$ H-unerfüllbar. ■

Mit diesem Lemma ist es nun möglich den Vollständigkeitssatz für die mehrwertige Resolution zu zeigen.

6.15 THEOREM: *Für jede Klauselmenge $\mathcal{C}$ gilt, wenn $\mathcal{C}$ H-unerfüllbar ist, dann gilt* $\mathcal{C} \vdash_{\mathrm{res}} \square$.
Beweis: Nach dem Lemma wissen wir, daß es zu jeder unerfüllbaren Klauselmenge $\mathcal{C}$ eine endliche Teilmenge Γ von $A(\mathcal{C})$ gibt, so daß alle semantischen Bäume für Γ $\mathcal{C}$-geschlossen sind. Wir wählen als semantischen Baum einen Binärbaum aus, dessen Markierungen einelementig sind. Seien A_1 und A_2 Klauseln aus $\mathcal{C}$, die unmittelbar unter einem Inferenzknoten k von B widerlegt werden. Seien $\{P^\alpha\}$ und $\left\{P^\beta\right\}$ die Mengen, die die Kanten markieren, die k verlassen. Nach der Definition eines semantischen Baumes gilt $\alpha \neq \beta$. Andererseits gibt es eine Grundsubstitution σ, so daß $\sigma(L_1) = P^\alpha$ und $\sigma(L_2) = P^\beta$ für $L_1 \in \mathsf{A}_1$ und $L_2 \in \mathsf{A}_2$ (oder umgekehrt). Folglich ist $\sigma(\mathsf{A}_1 \setminus \{L_1\}) \cup \sigma(\mathsf{A}_2 \setminus \{L_2\})$ eine Teilmenge der Widerlegungsmenge von k. Dies bedeutet, daß eine Resolvente von A_1 und A_2 schon im Knoten k widerlegt wird. (Analoges gilt für Faktoren.) Also gilt die Bedingung:

(1) Für zwei Klauseln A_1 und A_2, die unmittelbar unterhalb eines Inferenzknotens von B widerlegt werden, gibt es eine Resolvente A_3 von A_1 und A_2 (einen Faktor A_3 von A_1), die (der) an diesem Knoten widerlegt wird.

Da B aber $\mathcal{C}$-abgeschlossen ist, muß es mindestens einen Inferenzknoten für $\mathcal{C}$ in B geben. Aber dann findet man nach Bedingung (1) einen Fehlerknoten $\mathcal{C} \cup \{\mathsf{A}_3\}$ oberhalb von mindestens zwei Fehlerknoten von $\mathcal{C}$. Das bedeutet, daß die Anzahl der Fehlerknoten abnimmt, wenn wir sukzessive alle Resolventen von $\mathcal{C}$ hinzufügen. Folglich kommen wir letztendlich zu einer Klausel, die an der Wurzel von B widerlegt wird. Da dies aber nur für die leere Klausel möglich ist, können wir mit den entsprechenden Resolutionsschritten die leere Klausel ableiten. ■

6.2.4 Erzeugung der Normalformen

Damit der Resolutionskalkül für mehrwertige Logiken angewendet werden kann, muß angeben werden, wie man aus einer Formelmenge die entsprechende Klauselnormalform erzeugt. Dazu werden Transformationsregeln beschrieben, die den Regeln zur Herstellung der Klauselnormalform im Falle zweiwertiger Logik entsprechen. Dieser Teil ist wie der vorherige aus [BF92] übernommen worden.

6.16 Definition (Transformationsregel für Junktor): Eine *Transformationsregel* zu einem k-stelligen Junktor $\star$ und einem Wahrheitswert $\alpha \in \mathbf{W}_n$ ist eine Regel

$$(\star_k, \alpha) : \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{\star_i(L_1, \ldots, L_k)^\alpha\}\} \ \rightsquigarrow\ \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \Delta_1, \ldots, \mathsf{A} \cup \Delta_r\}$$

so daß $\Delta_i \subseteq \left\{L_j^\beta | 1 \leq j \leq k, \beta \in \mathbf{W}_n\right\}$ und für beliebige Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:
$\mathcal{I}$ erfüllt $\{\{\star_i(L_1, \ldots, L_k)^\alpha\}\}$ gdw $\mathcal{I}$ erfüllt $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$. ∎

Während diese Definition den allgemeinen Begriff einer Transformationsregel für einen Junktor festlegt, ist dadurch noch keine gegeben. Im folgenden Beispiel für eine Transformationsregel ist $r = 1$. Diese Regel kann für alle Junktoren verwendet werden.

$$\begin{aligned}(\star_k, \alpha) :\ & \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{\star_i(L_1, \ldots, L_k)^\alpha\}\} \ \rightsquigarrow \\ & \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{L_1^{\alpha_1} | \alpha_1 \in \mathbf{W}_n \setminus \{\beta_1\}\} \cup \ldots \cup \{L_k^{\alpha_k} | \alpha_k \in \mathbf{W}_n \setminus \{\beta_k\}\} \\ & \qquad | \star_k (\beta_1, \ldots, \beta_k) \neq \alpha\}\end{aligned}$$

Die Bedingung ist offensichtlich erfüllt, also handelt es sich hierbei um eine Transformationsregel. Die Konstruktion verallgemeinert die Regeln zur Erzeugung der Klauselnormalform in klassischer Logik: Es wird analysiert bei welchen Wahrheitswertbelegungen der Komponenten einer Formel die ganze Formel den gewünschten Wahrheitswert annimmt. Entsprechend zu den Transformationsregeln für Junktoren, werden auch solche für die Quantoren benötigt. Wie im Falle der Junktoren werden sie erst allgemein definiert und dann ein überdeckender Spezialfall angegeben. Dabei wird die Methode der Skolemisierung verallgemeinert.

6.17 Definition (Transformationsregel für Quantor): Sei A eine (verallgemeinerte) Klausel und sei $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ eine Indexmenge. Dann wird mit $f_{i_1,\Gamma}, \ldots, f_{i_k,\Gamma}$ eine Folge von Termen $f_{i_1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_{i_k}(y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnet, wobei die $f_{i_1} \ldots, f_{i_k}$ neue Funktionssymbole und die $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in A sind. $x_{i_1,\mathsf{A}}$ bis $x_{i_k,\mathsf{A}}$ sind Variablen, die nicht in A vorkommen.
Eine *Transformationsregel* zu einem Quantor Q_i und einem Wahrheitswert $\alpha \in \mathbf{W}_n$ ist eine Regel

$$(\mathsf{Q}_i, \alpha) : \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{(\mathsf{Q}_i x L(x))^\alpha\}\} \ \rightsquigarrow\ \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \Delta_1, \ldots, \mathsf{A} \cup \Delta_r\}$$

so daß $\Delta_i \subseteq \left\{L(x_{c,\Gamma})^\beta, L(f_{c,\Gamma})^\beta | \beta \in \mathbf{W}_n \text{ und } c \in I\right\}$ mit $\Gamma := \mathsf{A} \cup \{(\mathsf{Q}_i x\ A(x))^\alpha\}$ und für beliebige Interpretationen $\mathcal{I}$ und beliebige Γ gilt:

zu $\mathcal{I}$ gibt es eine Erweiterung $\mathcal{I}^*$ auf $f_{c,\Gamma}$ für alle $c \in I$, so daß
$\mathcal{I}$ erfüllt $\{\mathsf{A} \cup \{(\mathsf{Q}_i x\ A(x))^\alpha\}\}$ gdw $\mathcal{I}^*$ erfüllt $\{\mathsf{A} \cup \Delta_1, \ldots, \mathsf{A} \cup \Delta_r\}$. ∎

Ein allgemeines Beispiel für eine Transformationsregel wird gegeben durch:

$$\begin{aligned}(\mathsf{Q}_k, \alpha): \quad & \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{(\mathsf{Q}_i x\ L(x))^\alpha\}\} \rightsquigarrow \\ & \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \mathrm{LIT}(\mathbf{W}) | \mathsf{Q}(\mathbf{W}) \neq \alpha\} \\ & \text{mit } \mathrm{LIT}(\mathbf{W}) = \bigcup_{\beta \in \mathbf{W}} \left\{L(x_{\beta,\mathsf{A}})^\gamma | \gamma \neq \beta\right\} \cup \{L(f_{\mathbf{W},\mathbf{W}_n}) | u \in \mathbf{W}_n \setminus \mathbf{W}\}\end{aligned}$$

6.18 Bemerkung: Sind Übersetzungsregeln für alle Junktoren und Quantoren gegeben, so kann man mit Hilfe dieser Regeln aus einer Menge von Formeln eine Klauselform erzeugen. ∎

6.19 Beispiel: Die Klauselnormalform für klassische Prädikatenlogik kann man mit Übersetzungregeln der folgenden Gestalt erzeugen (wenn man L^0 mit $\neg L$ und L^1 mit L identifiziert):

$(\neg, 0):\quad \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{\neg\neg L\}\} \rightsquigarrow \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{L\}\}$
$(\neg, 1):\quad$ Identität
$(\wedge, 0):\quad \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{\neg(L \wedge K)\}\} \rightsquigarrow \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{\neg L, \neg K\}\}$
$(\wedge, 1):\quad \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{L \wedge K\}\} \rightsquigarrow \mathcal{C} \cup \{\mathsf{A} \cup \{L\}, \mathsf{A} \cup \{K\}\}$
$(\forall, 0):\quad \mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \{\mathsf{A} \cup \{\neg(\forall x\ L(x))\}\} \rightsquigarrow \mathcal{C}' \cup \{\mathsf{A} \cup \{\neg(L(f(\bar{y})))\}\}$
f kommt nicht in $\mathcal{C}$ vor und $\bar{y}$ sind die freien Variablen von
$\mathsf{A} \cup \{\neg(\forall x\ L(x))\}$
$(\forall, 1):\quad \mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \{\mathsf{A} \cup \{\forall x\ L(x)\}\} \rightsquigarrow \mathcal{C}' \cup \{\mathsf{A} \cup \{L(z)\}\}$ mit neuer Variable z

Für die anderen Junktoren beziehungsweise den Existenzquantor gibt es entsprechende Regeln. ∎

6.20 Theorem: *Sei φ eine abgeschlossene Formel, das heißt eine Formel ohne freie Variablen, und sei $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_n$ die Menge der augezeichneten Wahrheitswerte. Ferner sei $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$ eine Klauselmenge, die durch Transformation aus der erweiterten Formelmenge $\{\varphi^\alpha | \alpha \in \mathbf{W}_n \setminus \mathbf{W}\}$ entsteht. Dann gilt: φ ist Tautologie genau dann, wenn $\mathcal{C}[\mathbf{W}] \vdash_{\mathrm{res}} \Box$.*

Beweis:

φ ist Tautologie gdw $\mathcal{I}(\varphi) \in \mathbf{W}$ für alle Interpretationen $\mathcal{I}$
gdw $\{\varphi^\alpha | \alpha \in \mathbf{W}_n \setminus \mathbf{W}\}$ unerfüllbar
gdw $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$ ist unerfüllbar (Eigenschaft der Transformation)
gdw $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$ ist H-unerfüllbar (Satz von Herbrand, 6.9)
gdw $\mathcal{C}[\mathbf{W}] \vdash_{\mathrm{res}} \Box$ (Korrektheit & Vollständigkeit der Resolution 6.11, 6.15) ∎

6.2.4.1 Transformationsregeln für $\mathbf{L}_n$ und $\mathbf{G}_n$

Wir geben nun einen Satz von Regeln zur Erzeugung der Klauselnormalform für die Logiken $\mathbf{L}_n$ und $\mathbf{G}_n$ an. Die erste Gruppe von Regeln ist für beide Logikfamilien gleich.

$$
\begin{array}{rl}
(\wedge,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\wedge K)^\alpha\}\}\\
\rightsquigarrow & \mathcal{C}\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\beta|\beta\leq\alpha\right\},\mathsf{A}\cup\left\{K^\beta|\beta\leq\alpha\right\},\mathsf{A}\cup\{L^\alpha,K^\alpha\}\right\}\\
(\vee,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\vee K)^\alpha\}\}\\
\rightsquigarrow & \mathcal{C}\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\beta|\beta\geq\alpha\right\},\mathsf{A}\cup\left\{K^\beta|\beta\geq\alpha\right\},\mathsf{A}\cup\{L^\alpha,K^\alpha\}\right\}\\
(\rightarrow,1): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\rightarrow K)^1\}\}\\
\rightsquigarrow & \mathcal{C}\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\alpha,K^\beta|\alpha<\gamma\leq\beta\right\}|0<\gamma\leq 1\right\}\\
(\forall,1): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\forall x\ L(x))^1\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L(z)^1\}\}\\
& \text{mit einer neuen Variablen } z\\
(\forall,0): & \mathcal{C}=\mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\forall x\ L(x))^0\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L(f(\bar{y})))^0\}\}\\
& f \text{ kommt nicht in } \mathcal{C} \text{ vor und}\\
& \bar{y} \text{ sind die freien Variablen von } \mathsf{A}\cup\{\forall x\ L(x)\}\\
(\forall,\alpha): & \mathcal{C}=\mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\forall x\ L(x))^\alpha\}\}\\
(\alpha\neq 0,1)\ \ \rightsquigarrow & \mathcal{C}'\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L(z)^\beta|\alpha\leq\beta\right\},\mathsf{A}\cup\{L(f(\bar{y}))^\alpha\}\right\}\\
& \text{mit einer neuen Variablen } z, f \text{ nicht in } \mathcal{C} \text{ und } \bar{y}\\
& \text{sind die freienVariablen von } \mathsf{A}\cup\{(\forall x\ L(x))^\alpha\}\\
(\exists,1): & \mathcal{C}=\mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\exists x\ L(x))^1\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L(f(\bar{y})))^1\}\}\\
& f \text{ kommt nicht in } \mathcal{C} \text{ vor und } \bar{y} \text{ sind die freien Variablen von}\\
& \mathsf{A}\cup\{\exists x\ L(x)\}\\
(\exists,0): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\exists x\ L(x))^0\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L(z)^0\}\}\\
& \text{mit einer neuen Variablen } z\\
(\exists,\alpha): & \mathcal{C}=\mathcal{C}'\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\exists x\ L(x))^\alpha\}\}\\
(\alpha\neq 0,1)\ \ \rightsquigarrow & \mathcal{C}'\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L(z)^\beta|\alpha\geq\beta\right\},\mathsf{A}\cup\{L(f(\bar{y}))^\alpha\}\right\}\\
& \text{mit einer neuen Variablen } z, f \text{ nicht in } \mathcal{C} \text{ und}\\
& \bar{y} \text{ sind die freienVariablen von } \mathsf{A}\cup\{(\exists x\ L(x))^\alpha\}
\end{array}
$$

Für die Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_n$ kommen dann noch die folgenden Regeln hinzu:

$$
\begin{array}{rl}
(\neg,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\neg L)^\alpha\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L^{1-\alpha}\}\}\\
(\rightarrow,0): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\rightarrow K)^0\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L^1\},\mathsf{A}\cup\{K^0\}\}\\
(\rightarrow,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\rightarrow K)^\alpha\}\}\\
(\alpha\neq 0,1)\ \rightsquigarrow & \mathcal{C}\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\beta|\beta\leq 1-(\alpha-\gamma)\right\}\cup\left\{K^\beta|\beta>\gamma\right\}|\gamma<\alpha\right\}\cup\\
& \left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\beta|1-(\alpha-\gamma)\leq\beta\right\}\cup\left\{K^\beta|\beta\neq\gamma\right\}|\gamma\leq\alpha\right\}
\end{array}
$$

Für die Gödel-Logiken $\mathbf{G}_n$ werden die folgenden Regeln hinzugenommen:

$$
\begin{array}{rl}
(\neg,1): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\neg L)^1\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L^0\}\}\\
(\neg,0): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\neg L)^0\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{L^\alpha|\alpha\neq 0\}\}\\
(\neg,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(\neg L)^\alpha\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\}\\
(\alpha\neq 0,1) & \\
(\rightarrow,\alpha): & \mathcal{C}\cup\{\mathsf{A}\cup\{(L\rightarrow K)^\alpha\}\}\ \rightsquigarrow\ \mathcal{C}\cup\left\{\mathsf{A}\cup\left\{L^\beta|\beta>\alpha\right\},\mathsf{A}\cup\{K^\alpha\}\right\}\\
(\alpha\neq 1) &
\end{array}
$$

6.21 BEMERKUNG: Die durch diese Regeln erzeugten Normalformen können recht umfangreich werden. Deshalb werden, wie auch in der klassischen Logik ausgefeilte Verfahren entwickelt wurden und auch noch werden, um die entstehende Klauselmenge einfach zu halten, entsprechende Verfahren auch für die mehrwertige Logiken entwickelt, vergleiche zum Beispiel [Häh92]. ■

Zum Abschluß folgt nun noch ein Beispiel.

6.22 BEISPIEL: Es soll gezeigt werden, daß die Formel $\varphi = \neg\neg(\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ \neg\neg P(x))$ in $\mathbf{G}_3$ allgemeingültig ist. Einziger ausgezeichneter Wahrheitswert in $\mathbf{G}_3$ ist $\mathsf{1}$, also beginnen wir mit einer erweiterten Formelmenge $\left\{\left\{\varphi^{\mathsf{0}}, \varphi^{\mathsf{1/2}}\right\}\right\}$. Aus dieser Menge wird sukzessive die Klauselnormalform erzeugt (um die Klauselmenge einfach zu halten, werden erweiterte Klauseln, die eine Obermenge zu einer bestehenden darstellen, eliminiert):

$\left\{(\neg\neg(\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ \neg\neg P(x)))^{\mathsf{0}}, (\neg\neg(\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ \neg\neg P(x)))^{\mathsf{1/2}}\right\}$

$\Downarrow$ (mit $(\to,\mathsf{0})$ und $(\to,\mathsf{1/2})$).

1 $\left\{(\neg\neg(\forall x\ P(x)))^{\mathsf{1}}, (\neg\neg(\forall x\ P(x)))^{\mathsf{1/2}}\right\}$

2 $\{(\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{0}}, (\neg\neg(\forall x\ P(x)))^{\mathsf{1}}\}$

3 $\left\{(\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{0}}, (\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{1/2}}\right\}$

$\Downarrow$ (mit $(\to,\mathsf{0})$ und $(\to,\mathsf{1/2})$).

4 $\{(\neg\neg\forall x\ P(x))^{\mathsf{1}}\}$ mit $(\neg,\mathsf{1/2})$, ersetzt 1, subsumiert 2

5 $\left\{(\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{0}}, (\neg\neg P(c))^{\mathsf{1/2}}\right\}$ mit $(\forall,\mathsf{1/2})$ aus 3

6 $\left\{(\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{0}}, (\neg\neg P(y))^{\mathsf{1/2}}, (\neg\neg P(y))^{\mathsf{1}}\right\}$ mit $(\forall,\mathsf{1/2})$ aus 3

7 $\{(\forall x\ \neg\neg P(x))^{\mathsf{0}}\}$ aus 5 mit $(\neg,\mathsf{1/2})$, subsumiert 6

8 $\left\{(\forall x\ P(x))^{\mathsf{1}}, (\forall x\ P(x))^{\mathsf{1/2}}\right\}$ aus 4 mit $(\neg,\mathsf{1})$ und $(\neg,\mathsf{0})$

9 $\left\{(\forall x\ P(x))^{\mathsf{1}}, (P(d))^{\mathsf{1/2}}\right\}$ aus 8 mit $(\forall,\mathsf{1/2})$

10 $\left\{(\forall x\ P(x))^{\mathsf{1}}, (P(y))^{\mathsf{1/2}}, (P(y))^{\mathsf{1}}\right\}$ aus 8 mit $(\forall,\mathsf{1/2})$

11 $\left\{(P(z))^{\mathsf{1}}, (P(d))^{\mathsf{1/2}}\right\}$ aus 9 mit $(\forall,\mathsf{1})$

12 $\left\{(P(z))^{\mathsf{1}}, (P(y))^{\mathsf{1/2}}, (P(y))^{\mathsf{1}}\right\}$ aus 10 mit $(\forall,\mathsf{1})$

13 $\{(\neg\neg P(e))^{\mathsf{0}}\}$ aus 7 mit $(\forall,\mathsf{0})$

14 $\{P(e)^{\mathsf{0}}\}$ aus 13 mit $(\neg,\mathsf{0})$, $(\neg,\mathsf{1/2})$ und $(\neg,\mathsf{1})$.

Es bleibt die folgende einfache Klauselmenge:
$\mathcal{C}_\varphi = \left\{\left\{P(z)^{\mathsf{1}}, P(y)^{\mathsf{1/2}}, P(y)^{\mathsf{1}}\right\}, \left\{P(z)^{\mathsf{1}}, P(d)^{\mathsf{1/2}}\right\}, \{P(e)^{\mathsf{0}}\}\right\}$.
Deren Unerfüllbarkeit wird in Aufgabe 1 von Übungsblatt 9 gezeigt. ■

Kapitel 7

Methoden zur Behandlung ungenauen Wissens

Mehrwertige Logiken sind unter anderem zur Beschreibung und Behandlung ungenauen Wissens entwickelt wurden. Allerdings sind unabhängig davon andere Verfahren entwickelt worden und in KI-Systemen eingesetzt worden. Wir wollen im wesentlichen zwei verschiedene Aspekte betrachten, die zwar miteinander verwandt sind, aber die man wohl unterscheiden kann, nämlich die Beschreibung und Behandlung von Wahrscheinlichtkeitsaussagen und die von Unschärfe.

7.1 Wahrscheinlichkeitslogik

In diesem Abschnitt werden wir uns kurz mit zwei weiteren Schlußarten beschäftigen, für die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen eine wichtige Rolle spielen. Die logischen Inferenzmethoden wurden Ende des letzten Jahrhunderts von Ch. S. Peirce in die Modi „Deduktion", „Induktion" und „Abduktion" eingeteilt. Während die bislang von uns betrachteten Logiken, klassische Logik und mehrwertige Logik *deduktiv* waren, ist die Carnapsche Wahrscheinlichkeitslogik *induktiv*.
R. Carnap [Car50] hat die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Logik übertragen, um induktive Schlüsse zu formalisieren. Daß induktives Schließen sowohl im wissenschaftlichen Schließen als auch im Alltagsschließen von immenser Bedeutung ist, hat schon Aristoteles (um 330 vor Chr.) festgestellt:

> Wissenschaftliche Erkenntnis durch Beweis (Deduktion) ist unmöglich, außer man weiß die „ersten" primären Prämissen ... Diese Prämissen müssen wir durch *Induktion* erhalten; denn die Methode, durch die selbst Sinneswahrnehmungen das Universelle ergeben ist *induktiv*.

Nach G. Pólya ist Induktion die Methode, allgemeine Gesetze durch Beobachtung

und Kombination besonderer Fälle zu entdecken[1]. Sind zum Beispiel die Prädikate G und K wie folgt definiert:
$G(x) :=$ x wird von einer Geraden in höchstens 2 Punkten geschnitten
$K(x) :=$ x ist Kegelschnitt
Dann hat man:

$$\begin{array}{lcl} K(\text{Ellipse}) & \wedge & G(\text{Ellipse}) \\ K(\text{Parabel}) & \wedge & G(\text{Parabel}) \\ K(\text{Hyperbel}) & \wedge & G(\text{Hyperbel}), \end{array}$$

woraus man induktiv schließt: $\forall x K(x) \Rightarrow G(x)$.
Anhand eines weiteren Beispiels von Carnap sollen die beiden Schlußarten, Deduktion und Induktion, miteinander verglichen werden.

Prämisse P: Alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist sterblich	**Prämisse** P: Wien hat 1,8 Millionen Einwohner, 1,2 Millionen davon haben schwarze Haare, b ist Einwohner Wiens
Schluß H: Sokrates ist sterblich	**Schluß** H: b hat scharze Haare
$\mathbf{D_1}$: $P \Rightarrow H$	$\mathbf{I_1}$: $c(H,P) = \frac{2}{3}$
$\mathbf{D_2}$: Zu D_1 kann man durch logische Analyse der Bedeutung von P und H gelangen, wenn $\Rightarrow$ definiert.	$\mathbf{I_2}$: Zu I_1 kann man durch logische Analyse der Bedeutung von P und H gelangen, wenn der Bestätigungsgrad c definiert.
$\mathbf{D_3}$: D_1 ist eine vollständige Aussage, keine zusätzliche Regel (wie modus ponens) ist nötig.	$\mathbf{I_3}$: I_1 ist eine vollständige Aussage, keine zusätzliche Regel (wie Regel des direkten Induktionsschlusses) ist nötig.
$\mathbf{D_4}$: Frage, ob Prämisse P bekannt, ist für D_1 irrelevant	$\mathbf{I_4}$: Frage, ob Prämisse P bekannt, ist für I_1 irrelevant
$\mathbf{D_5}$: P wahr, dann H wahr.	—
$\mathbf{D_6}$: weiß x P zur Zeit t, dann weiß x auch H zur Zeit t.	$\mathbf{I_6}$: weiß x P zur Zeit t und sonst nichts Relevantes, dann ist für x H zur Zeit t zum Grad $c(H,P) = \frac{2}{3}$ bestätigt.

Carnap hat den Bestätigungsgrad c wie folgt formalisiert:
Wenn eine Person x weiß, daß $c(H,P) = r$ und für alles weitere Wissen P' gilt $c(H, P \wedge P') = c(H,P)$ und P ist bekannt, dann ist der Bestätigungsgrad von H gleich r. Im einzelnen werden axiomatisch die folgenden Gesetze gefordert:

$$K_1: \quad P \Leftrightarrow P' \quad \rightsquigarrow \quad c(H,P) = c(H,P')$$

$$K_2: \quad H \Leftrightarrow H' \quad \rightsquigarrow \quad c(H,P) = c(H',P)$$

[1]Den verschiedenen Schlußweisen liegen auch verschiedene philosophische erkenntnistheoretische Modelle zugrunde: der Deduktion der philosophische Deduktionismus von K. Popper, der den Begriff der Falsifizierung in den Mittelpunkt rückt, und der Induktion der philosophische Induktivismus von R. Carnap, der auf einer Wahrscheinlichkeitslogik beruht. Th. Kuhn stellt diesen ein drittes Modell gegenüber, die wissenschaftliche Revolution, in diesem Modell stehen Paradigmenwechsel im Vordergrund.

K_3: $c(H_1 \wedge H_2, P) = c(H_1, P) \cdot c(H_2, H_1 \wedge P)$

K_4: $P_1 \wedge P_2 \wedge H$ falsch $\leadsto$ $c(H, P_1 \vee P_2) = c(H, P_1) + c(H, P_2)$

K_5: $c(H, \text{wahr}) = 1$ für jedes nicht-falsche H

K_6: Eine endliche Zustandsbeschreibung erfolgt mit Ausdrücken $c(Z_i, \text{wahr}) > 0$.

Es gelten dann eine Reihe von Sätzen wie etwa:

- $c(\neg\text{wahr}, P) = 0$
- $c(H_1 \wedge H_2, \text{wahr}) = c(H_1, \text{wahr}) \cdot c(H_2, \text{wahr})$

Solche Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen spielen aber nicht nur bei der Behandlung von Induktion, sondern in verschiedenen Formen auch in regelbasierten Expertensystemen eine Rolle. Das Wissen, das in Expertensystemen verarbeitet werden muß, ist zum einen oftmals nicht exakt und zum anderen wird es nicht *deduktiv* sondern *abduktiv* verwendet.
Den Unterschied zwischen deduktivem und abduktivem Schließen wollen wir an einem Beispiel erläutern, wie es in medizinischen Expertensystemen vorkommen könnte. Betrachten wir folgende Anwendung des modus ponens:

$$\begin{array}{l} \text{hat\_Hepatitis}(x) \\ \text{hat\_Hepatitis}(x) \Rightarrow \text{Hautfarbe\_gelb}(x) \\ \hline \text{Hautfarbe\_gelb}(x) \end{array}$$

Deduktiv schließen heißt: man weiß von einer Person x, daß sie Hepatitis hat, also kann man mit der allgemeinen Regel „hat_Hepatitis(x) $\Rightarrow$ Hautfarbe_gelb(x)“ schließen, daß x auch gelbe Haut hat. Das ist aber nicht der Regelfall des Schließens, wie er zum Beispiel von einem Arzt durchgeführt werden muß. Der Arzt kennt zwar die Regel, aber er muß die Krankheit erst diagnostizieren. Er sieht, daß der Patient gelbe Haut hat und schließt aus dieser Tatsache auf Hepatitis. Diese Art von Schlußfolgerung wird *Abduktion* genannt, man schließt aus dem Ergebnis auf die Vorbedingungen. Rein logisch betrachtet handelt es sich dabei um einen Fehlschluß, da die Regel nicht ausschließt, daß eine gelbe Hautfarbe auch aufgrund anderer Erkrankungen gegeben sein könnte. Deshalb ist unkontrolliertes abduktives Schließen mit Vorsicht zu genießen, es muß vielmehr *plausibel* sein. Man hat daher in solche Schlüsse Zuverlässigkeitswerte angeführt, die man auch wieder als Wahrscheinlichkeiten interpretieren kann, was im folgenden ausgeführt werden soll. Wir lehnen uns dabei an die Darstellung in [CM85, Kapitel 8] an.
Die *Wahrscheinlichkeit* $\wp$ für ein Ereignis ist die Anzahl der *günstigen Fälle* zu allen *möglichen Fällen*. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, ob eine Person x Hepatitis hat – wenn kein weiteres Wissen über x gegeben ist – gleich der Anzahl aller Menschen mit Hepatitis (unter Umständen nur einer Gruppe) geteilt durch die Anzahl aller Menschen (dieser Gruppe) überhaupt.

Zum Beispiel gilt

$$\wp(\text{hat\_Hepatitis}) := \frac{|\text{hat\_Hepatitis}|}{|\text{Mensch}|}$$

wobei wir mit $|Q|$ die Anzahl der Elemente bezeichnen, für die Q erfüllt ist, das heißt $|Q| = \text{card}(\{x|Q(x)\})$. Damit die Wahrscheinlichkeitsdefinitionen so Sinn machen, setzen wir für das folgende voraus, daß die betrachteten Mengen alle endlich sind[2].
Durch die obige Festlegung hat man den Begriff der Wahrscheinlichkeit absolut gefaßt, das heißt man hat kein zusätzliches Wissen über ein entsprechendes x. Ein Arzt zum Beispiel hat aber zusätzliches Wissen und er will dieses natürlich auch ausnutzen. So weiß er zum Beispiel, daß sein Patient gelbe Haut hat. Um nun die Wahrscheinlichkeit angeben zu können, mit der der Patient Hepatitis hat, darf er nicht die absolute Wahrscheinlichkeit für Hepatitis zugrundelegen, sondern er muß sich auf die *bedingte Wahrscheinlichkeit* beziehen, das heißt auf die Wahrscheinlichkeit, Hepatitis zu haben unter der Voraussetzung, daß die Haut gelb ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\wp(Q|R)$ wird definiert als das Verhältnis der x für die Q *und* R gelten zu denen für die R gilt. Zum Beispiel ist

$$\wp(\text{hat\_Hepatitis}|\text{Hautfarbe\_gelb}) := \frac{|\text{hat\_Hepatitis} \cap \text{Hautfarbe\_gelb}|}{|\text{Hautfarbe\_gelb}|},$$

wobei wir mit $|Q \cap R|$ wieder die Kardinalität der entsprechenden Mengen bezeichnen.
Es gelten dann folgende Beziehungen:

7.1 Bemerkung: Sei $\wp$ die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis Q, dann gilt:
$\wp(\neg Q) = 1 - \wp(Q)$, entsprechend für die bedingten Wahrscheinlichkeiten
$\wp(\neg Q|R) = 1 - \wp(Q|R)$. ■

Der folgende Satz, das sogenannte Bayessche Theorem, stellt absolute und relative Wahrscheinlichkeiten zueinander in Beziehung.

7.2 Theorem:

$$\wp(Q|R) = \frac{\wp(Q) \cdot \wp(R|Q)}{\wp(R)}$$

■

Komplizierter wird die Sache allerdings, wenn man nicht nur ein Symptom mit einer Krankheit assoziieren will, sondern wenn man zum Beispiel noch zusätzlich weiß, daß x Alkoholiker ist. Will man nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß jemand Hepatitis hat, wenn weiß, daß er Alkoholiker ist *und* daß er gelbe Haut hat, so kann man mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\wp(\text{hat\_Hepatitis}|\text{Hautfarbe\_gelb})$ und $\wp(\text{hat\_Hepatitis}|\text{ist\_Alkoholiker})$ nicht viel anfangen, da man für die Anwendung

[2] In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird dies in einem strengen Sinn auf unendliche Mengen verallgemeinert. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich dann aber nicht mehr so einfach über die Kardinalitäten, das heißt die Anzahl der Elemente in einer Menge, definieren.

der Bayesschen Formel wissen müßte, wie die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Konjunktion der Bedingungen Hautfarbe_gelb(x) *und* ist_Alkoholiker(x) ist. Da sich diese im allgemeinen nicht mehr aus den Einzelwahrscheinlichkeiten errechnen läßt, müßte man sie einzeln abspeichern.

$$\wp(Q|R_1 \wedge R_2) = \frac{\wp(Q) \cdot \wp(R_1 \wedge R_2|Q)}{\wp(R_1 \wedge R_2)}$$

Ist eine solche Abspeicherung bei zwei Symptomen noch denkbar, so geht daß bei 20 oder 30 nicht mehr. Abgesehen vom Speicheraufwand, stellt sich natürlich die Frage, wie man an all diese Informationen kommen kann. Man ist von daher daran interessiert, *unabhängige* Ereignisse zu betrachten. Zwei Ereignisse Q und R heißen *unabhängig*, wenn gilt $\wp(Q|R) = \wp(Q)$. Sind zwei Ereignisse unabhängig, so kann man die Wahrscheinlichkeit für die Konjunktion einfach errechnen als $\wp(Q_1 \wedge Q_2) = \wp(Q_1) \cdot \wp(Q_2)$, so daß man in diesem Fall die Gleichung entkoppeln kann und erhält:

$$\wp(Q|R_1 \wedge R_2) = \wp(Q) \cdot \left[\frac{\wp(R_1|Q)}{\wp(R_1)}\right] \cdot \left[\frac{\wp(R_2|Q)}{\wp(R_2)}\right]$$

Da aber verschiedene Symptome im allgemeinen nicht unabhängig sind, weicht man den Wahrscheinlichkeitsansatz oft auf, oder verwendet Ansätze, die sich an den Wahrscheinlichkeitsansatz anlehnen, ihn aber nicht direkt benutzen.
Allerdings versucht man auch in diesem Falle, zum Beispiel in Form von Abhängigkeitsgraphen zu vermeiden, daß gewisse Symptome über Gebühr in eine Diagnose einfließen. Zum Beispiel will man nicht, daß ein System von Alkoholismus auf gelbe Haut schließt und dann von den zwei Symptomen Alkoholismus und gelbe Haut auf Hepatitis, da das zweite Symptom nur durch das erste gerechtfertigt ist.

7.2 Fuzzymengen

Während im vorigen Absatz Ungenauigkeiten, die aufgrund von nicht exaktem *Wissen* entstehen, mit Hilfe von statistischen Verfahren beschrieben werden sollten, wird in diesem Abschnitt die *begriffliche Unschärfe* behandelt. Der Unterschied wird deutlich an Aussagen wie „Die Person x hat mit großer Wahrscheinlichkeit Hepatitis“ einerseits und „Die Person x wird mit einer Größe von 175 cm als einigermaßen groß bezeichnet.“ andererseits. Während es im ersten Fall vollkommen klar ist, was es heißt, ob eine Person Hepatitis hat, es aber von der Person x nicht mit Sicherheit feststeht, sondern nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht wird, steht im zweiten Fall die Größe mit Sicherheit fest, aber es ist nicht so klar, inwieweit man eine Person dieser Größe als groß bezeichnen sollte, das heißt der Begriff ist in gewisser Hinsicht nicht falsch, aber auch nicht vollkommen passend.
Der grundlegenden Begriff einer „Fuzzymenge“ ist von L. A. Zadeh 1965 in [Zad65] eingeführt worden. Zadeh gibt weitere Beispiele wie die Menge der Zahlen die *viel größer* als 1 sind. Auch in diesem Fall ist für die Beantwortung der Frage, ob 10 in dieser Menge enthalten ist oder nicht, ein einfaches Ja/Nein nicht angemessen. Vielmehr schlägt Zadeh vor, daß es sich bei den Zahlen, die viel größer als 1 sind, nicht um eine Menge, sondern um eine Fuzzymenge[3] handelt.

7.3 Definition (Fuzzymenge): Sei X eine Menge. Eine *Fuzzymenge* A über X wird durch eine *charakteristische Funktion* $f_A(x)$ von A nach dem Intervall $[0,1]$ von reellen Zahlen charakterisiert, die jedem $x \in X$, den Grad des Enthaltenseins von x in A zuordnet. Klassische Teilmengen von X erhält man durch charakteristische Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. ■

7.4 Beispiel: Sei A die Fuzzymenge der natürlichen Zahlen, die viel größer als 1 sind. In diesem Fall ist $X = \mathbb{N}$, f_A könnte zum Beispiel definiert werden durch

$$f_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq 1 \\ \frac{n}{500} & \text{für } 1 < n < 500 \\ 1 & \text{für } n \geq 500 \end{cases}$$ ■

Nun kann man die üblichen Definitionen der Mengenlehre wie Gleichheit, Teilmenge, Komplement, Durchschnitt und Vereinigung auf Fuzzymengen übertragen.

7.5 Definition:

- Eine Fuzzymenge heißt *leer*, wenn die charakteristische Funktion identisch 0 ist.
- Zwei Fuzzymengen A und B heißen *gleich*, $A = B$, genau dann wenn $f_A(x) = f_B(x)$ für alle x in X. (Statt $f_A(x) = f_B(x)$ und vergleichbaren Ausdrücken verwenden wir auch eine Kurzschreibweise wie $f_A = f_B$).

[3] fuzzy *engl., adj.*: unscharf, verschwommen

– Eine Fuzzymenge A heißt *Teilmenge* einer Fuzzymenge B, $A \subseteq B$, wenn gilt $f_A \leq f_B$. (Wie in einfacher Mengenlehre gilt dann: $A = B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.)

– Das *Komplement* einer Fuzzymenge A, bezeichnet mit $\overline{A}$, wird durch die charakteristische Funktion $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$ definiert.

– Der *Durchschnitt* C zweier Fuzzymengen A und B wird durch die charakteristische Funktion $f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$ für alle $x \in X$ definiert.

– Die *Vereinigung* C zweier Fuzzymengen A und B wird durch die charakteristische Funktion $f_C(x) = \max(f_A(x), f_B(x))$ für alle $x \in X$ definiert.

– Zwei Fuzzymengen heißen *disjunkt*, wenn ihr Schnitt leer ist. ■

7.6 Bemerkung: Wie in klassischer Mengenlehre gilt: Der Durchschnitt zweier Fuzzymengen ist die größte Fuzzymenge, die in beiden enthalten ist. Die Vereinigung zweier Fuzzymengen ist die kleinste Fuzzymenge, die beide umfaßt. ■

Zadeh hat in seinem Papier dann die Gesetze der klassischen Mengenlehre auf die der Fuzzymengen übertragen.

7.7 Bemerkung: Es gelten die Gesetze von de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

sowie die Distributivgesetze

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$
$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$$

■

7.8 Bemerkung: Der Begriff des Enthaltenseins eines Elementes x in einer Fuzzymenge A spielt nicht die Rolle wie im klassischen Fall, außer daß man sagen kann, x ist in A, wenn die charakteristische Funktion f_A an der Stelle x gerade eins ist. Zadeh hat von daher vorgeschlagen, zwei Level α und β einzuführen, mit $0 < \beta < \alpha < 1$, so daß ein x zu A gehört, wenn $f_A(x) \geq \alpha$ und x nicht zu A gehört, wenn $f_A(x) \leq \beta$. Für $\beta < f_A(x) < \alpha$ ist die Aussage undefiniert. Zadeh stellt fest, daß dies zu einer dreiwertigen Logik führt, wie sie Kleene untersucht hat. Im Lichte unserer allgemeinen Betrachtungen können wir allerdings einen direkteren Bezug zu mehrwertigen Logiken aufzeichnen. Betrachten wir die Logik Lukasiewicz-Logik $\mathbf{L}_{[0,1]}$, zeichnen allerdings nicht nur den Wahrheitswert 1, sondern die Wahrheitswerte größer oder gleich α *positiv* aus und die Wahrheitswerte kleiner gleich β *negativ* aus. Weiterhin identifizieren wir Fuzzymengen A mit Prädikaten P_A, so daß in Interpretationen gilt $P_A(x) = \gamma$ genau dann, wenn $f_A(x) = \gamma$. Wir können dann die Begriffe Gleichheit, Teilmenge, Komplement, Durchschnitt und Vereinigung wie folgt mit Junktoren der Lukasiewicz-Logik gleichsetzen:

- $A = B$ entspricht: $P_A \leftrightarrow P_B$ ist $\mathbf{1}$ (das heißt $P_A \rightarrow P_B$ und $P_B \rightarrow P_A$ sind beide $\mathbf{1}$).
- $A \subseteq B$ entspricht: $P_A \rightarrow P_B$ ist $\mathbf{1}$. (Während in den Łukasiewicz-Logiken auch ausgedrückt werden kann „zu welchem Grad" ein Prädikat ein anderes impliziert, werden bei Zadehs Fuzzymengen allerdings nur die beiden Fälle entweder $A \subseteq B$ oder nicht $A \subseteq B$ unterschieden.)
- Dem Komplement einer Fuzzymenge $\overline{A}$ entspricht die Negation $\neg$ (beachte: Es entsprechen sich die Beziehungen $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$ und $\neg(\gamma) = \mathbf{1} - \gamma$).
- Dem Durchschnitt zweier Fuzzymengen A und B entspricht die Konjunktion $P_A \wedge P_B$ (Beides über das Minimum definiert).
- Der Vereinigung zweier Fuzzymengen A und B entspricht die Disjunktion $P_A \vee P_B$ (Beides über das Maximum definiert). ■

7.9 Beispiel: Nun noch ein Beispiel von Zadeh, wie er sich das Schließen mit unscharfen Begriffen vorstellt. Was soll ein Satz wie „Üblicherweise ist Schnee weiß." bedeuten?
Man geht von einer Datenbasis von Schneeproben aus und faßt auch den Begriff „üblicherweise" durch eine entsprechende Tafel:

Schneeprobe	Grad zu dem die Probe weiß ist
S_1	0,7
S_2	0,8
$\vdots$	$\vdots$

Fuzzywert	Grad zu dem ein Fuzzywert „üblicherweise" repräsentiert
0,1	0,0
0,2	0,0
0,3	0,0
0,4	0,1
0,5	0,1
0,6	0,2
$\vdots$	$\vdots$
1,0	1,0

Seien nun die Schneeproben S_i gegeben und t_i die entsprechenden Fuzzywerte, die besagen wie die Eigenschaft „weiß" auf die Probe paßt. Aus diesen t_i wird der Durchschnitt berechnet $\alpha = (t_1 + \cdots + t_n)/n$. Der Wert von „Schnee ist üblicherweise weiß" wird nun als der zu α gehörende Wert aus der Tabelle von „üblicherweise" bestimmt. (Zum Beispiel 0,2 für α gleich 0,6). ■

7.10 Bemerkung: Eine Hauptkritik, die an den Fuzzymengen und der entsprechenden Fuzzylogik geübt werden kann und auch wurde, lautet: „Wo kommen all diese Zahlen her?" ■

7.3 Approximatives Schließen mit Fuzzylogik

Wie in Beispiel 7.9 eingeführt, wird die Bedeutung eines linguistischen Satzes dadurch bestimmt, daß man an jedem Knoten des Syntaxbaumes die Bedeutung berechnet. Dabei werden unscharfe Begriffe wie „sehr“ und „äußerst“ aus den bis dahin errechneten Fuzzywerten weiterberechnet. Dies hat Zadeh in [Zad79, Zad83] näher ausgeführt und wird im folgenden konkretisiert.

7.11 Beispiel: Wenn zum Beispiel A eine Fuzzymenge mit charakteristischer Funktion f_A über der Menge X ist, dann ist ja für ein $x \in X$ der Grad des Enthaltenseins in A durch $f_A(x)$ gegeben. Der Grad dafür, daß x *sehr* in A enthalten ist, wird dann durch $(f_A(x))^2$ gegeben. Ist also A die Fuzzymenge der natürlichen Zahlen, die viel größer sind als 1 wie in Beispiel 7.4, so berechnet sich die Aussage, ob eine Zahl *sehr viel größer* als 1 ist aus $f_A^2(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq 1 \\ \frac{n}{500^2} & \text{für } 1 < n < 500 \\ 1 & \text{für } n \geq 500 \end{cases}$

■

Wir geben nun eine Möglichkeit an, wie man einen *glatten* Übergang von 0 zu 1 bei Fuzzymengen erzielen kann. Erweitert man in Beispiel 7.4 die Grundmenge X von den natürlichen Zahlen auf die reelle Zahlen, so sieht man, daß die angegebene Funktion im analytischen Sinne zwar *stetig* – das heißt vereinfacht gesprochen, daß sie ohne abzusetzen in einem Zug geszeichnet werden kann –, aber daß sie nicht *differenzierbar* an den Übergangsstellen ist – das heißt sie ist nicht glatt, sondern enthält zwei Knicke. Um eine Fuzzymenge mit differenzierbarer charakteristischer Funktion zu erhalten, definiert man eine S-Funktion.

7.12 Definition (S-Funktion): Seien a, b und c Werte aus X, so daß die charakteristische Funktion bis a den Wert 0, ab c den Wert 1 haben soll und für $b = \frac{a+c}{2}$ den Wert 1/2 annimmt. Die S-Funktion ist dann gegeben durch:

$$S(a,b,c)(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \leq a \\ 2\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^2 & \text{für } a \leq u \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{u-c}{c-a}\right)^2 & \text{für } b \leq u \leq c \\ 1 & \text{für } u \geq c \end{cases}$$

■

Als Beispiel gibt Zadeh die Begriffe „alt“ und „jung“. Man definiert f_{jung} als $1 - S(20,30,40)$ und f_{alt} als $S(40,55,70)$. Das heißt Leute bis einschließlich 20 gelten nach dieser Definition als uneingeschränkt jung. Leute ab 40 gelten uneingeschränkt nicht mehr als jung. Dazwischen ist der Graubereich, wobei bei Leuten mit 30 das Attribut jung zu 1/2 paßt. Für Fritz im Alter von 25 gilt dann $f_{\text{jung}}(\text{Fritz}) = 1 - S(20,30,40)(25) = 1-2\left(\frac{25-20}{40-20}\right)^2 = 1-2\cdot\left(\frac{5}{20}\right)^2 = 1-2\cdot\frac{1}{16} = \frac{7}{8} = 0,875$. Entsprechend hat die Aussage „Fritz ist sehr jung“ den Wert $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = 0.765...$

Fuzzylogik ist eine Logik um approximatives Schließen zu ermöglichen. Sie ist eng verwandt mit der Lukasiewicz-Logik $\mathbf{L}_{[0,1]}$. Allerdings wird durch sogenannte *Übersetzungsregeln* angegeben, wie man aus linguistischen Ausdrücken entsprechende logische Ausdrücke erhält, *Valuationsregeln* geben an, wie man den Fuzzywert (Wahrheitswert) einer Aussage aus elementaren errechnet. Dann gibt es noch *Inferenzregeln* wie Modus ponens. Im folgenden wollen wir vor allem die Übersetzungsregeln näher betrachten.

Übersetzungsregeln

Es werden im wesentlichen vier Gruppen von Übersetzungsregeln unterschieden

1. Regeln zur Modifikation
2. Regeln zur Komposition
3. Regeln zur Quantifizierung
4. Regeln zur Bewertung

Wir geben nun für jede Gruppe Beispiele.

1. Moritz ist sehr klein.
   Therese ist hochintelligent.
2. Max ist groß und Moritz ist klein.
   Wenn Man groß ist, dann ist Moritz klein.
3. Die meisten Schweden sind groß.
   Viele Leute sind größer als die meisten Leute.
4. Es ist sehr wahr, daß Fritz groß ist.
   Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß Fritz groß ist.

Durch die Kombination solcher Regeln ist es möglich komplizierte Sätze zu behandeln, zum Beispiel:

> „Wenn ((Max ist klein und Moritz ist groß) ist sehr wahrscheinlich) dann ((Fritz ist sehr groß) ist nicht sehr wahrscheinlich)."
> „((Viele Leute sind größer als die meisten Leute) ist sehr wahr) ist ziemlich wahrscheinlich."

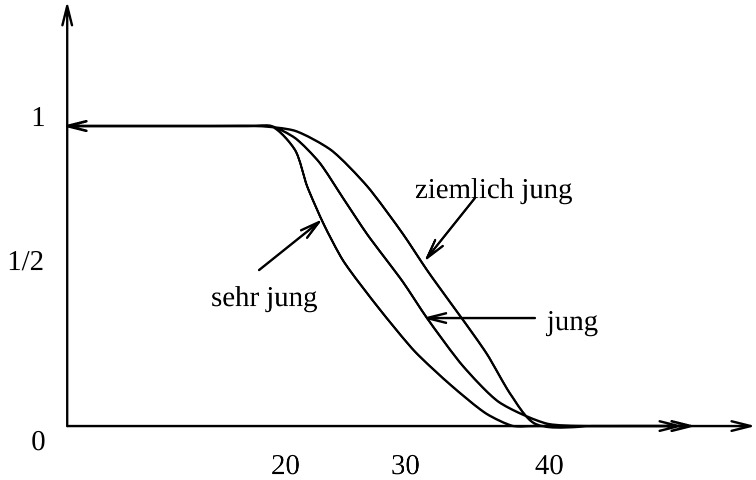


Abbildung 7.1: Verteilungen

Modifikationsregeln

Modifikationsregeln werden durch Funktionen über der entsprechenden charakteristischen Funktion dargestellt, zum Beispiel durch „nicht“ durch $1-f_A(x)$ dargestellt. Im allgemeinen gibt man das über eine Wahrheitsvariable T über $[0,1]$ an. Für „nicht“ hat T die Gestalt $T(x) = 1 - x$, für „sehr“ $T(x) = x^2$, für „ziemlich“ $T(x) = \sqrt{x}$. Weitere Funktionen sind gegeben durch (vergleiche [Yag80]):

„wahr“: $T(x) = x$

„absolut wahr“: $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

„unmöglich“: $T(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Für die Darstellung von Modifikationsregeln sind auch Gewichtsfunktionen angebracht, das heißt ein Modifikator wird durch die Multiplikation eines Gewichtes dargestellt, $\mu(x) \cdot f_A(x)$.

Kompositionsregeln

Kompositionsregeln entsprechen im wesentlichen der Behandlung binärer Junktoren in den Łukasiewicz-Logiken. Insbesondere werden Konjunktion und Disjunktion durch Minimumbildung beziehungsweise Maximumbildung der Fuzzywerte (Wahrheitswerte) behandelt. Für die Implikation verwendet Zadeh auch die Łukasiewicz-Defintion, das heißt $\rightarrow(\alpha,\beta) := \max(1, 1-\alpha+\beta)$. Wie in der mehrwertigen Logik ist die Festlegung der Bedeutung der Implikation die, die in der Regel am ausgiebigsten diskutiert wurde.

In [Yag80] werden die folgenden möglichen Kompositionsregeln für die Implikation aufgelistet:

1. $\to(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \neq 1 \text{ oder } \beta = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. $\to(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. $\to(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \leq \beta \\ \beta & \text{sonst} \end{cases}$

4. $\to(\alpha,\beta) = \min(1, \beta/\alpha)$

5. $\to(\alpha,\beta) = \min(1, 1-\alpha+\beta)$

6. $\to(\alpha,\beta) = \max(1-\alpha, \beta)$

7. $\to(\alpha,\beta) = \max(1-\alpha, \min(\alpha,\beta))$

8. $\to(\alpha,\beta) = 1-\alpha+\alpha\cdot\beta$

9. $\to(\alpha,\beta) = \beta^\alpha$

Quantorregeln

Sei eine Aussage der Gestalt $\mathsf{Q}x$ sind A, wobei Q ein Fuzzyquantor ist und etwa für „die meisten“, für „viele“, „wenige“ oder für „einige“ steht. Wir wollen uns die Behandlung von Quantoren an einem Beispiel verdeutlichen. Sei die Grundmenge X gerade die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Fuzzymenge der „großen Leute“ sei definiert durch die S-Funktion $S(160, 170, 180)$ und die Verteilung der Größe von Menschen durch eine Funktion μ. Die Anzahl der Menschen, die eine Größe zwischen 161 und 163 haben, ergibt sich dann über das Integral $\int\limits_{161}^{163} \mu(x)\mathrm{d}x$. Will man nun wissen, wieviele großen Leute es gibt, so errechnet man die Kardinalität der Fuzzymenge „groß“ durch $\int\limits_{0}^{\infty} \mu(x) f_{\text{groß}}(x)\mathrm{d}x$. Der Anteil der „großen“ Leute an allen ergibt sich aus dem Verhältnis der Kardinalität der Fuzzymenge „groß“ zur Menge aller Leute, die sich als $|\text{Leute}| = \int\limits_{0}^{\infty} \mu(x)\mathrm{d}x$ ergibt.
Der Fuzzyquantor „die meisten“ wird durch die S-Funktion $S(0.5, 0.7, 0.9)$ definiert. Will man nun die Aussage „Die meisten Leute sind groß“ auswerten, so berechnet man den Wert von

$$S(0.5, 0.7, 0.9)\left(\frac{1}{|\text{Leute}|}\int_0^\infty \mu(x) S(160, 170, 180)(x)\mathrm{d}x\right)$$

Für eine bestimmte Verteilungsfunktion μ wird dies in den Übungen ausgewertet. Der allgemeine Fall ergibt sich dann analog.

Bewertungsregeln

Entsprechend zu den Quantorenregeln werden die Bewertungsregeln behandelt. Betrachten wir die Aussage „Daß Anna sehr jung ist, ist sehr wahr“. Wenn Anna ein Alter von 21 Jahren hat, die Fuzzymenge „jung“ wieder durch die S-Funktion $1 - S(20, 30, 40)$ definiert ist und die Fuzzymenge „sehr jung“ durch $(1 - S(20, 30, 40))^2$, so ergibt sich für „Anna ist sehr jung“ der Fuzzywert
$f_{\text{sehr jung}}(\text{Anna}) = S^2(20, 30, 40)(21) = \left(1 - 2\left(\frac{21-20}{40-20}\right)^2\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{400}\right)^2 = \frac{199^2}{200^2} = 0,990025$.
Die Bewertung „ist sehr wahr“ ergibt sich aus der Bewertung für „ist wahr“, die durch die S-Funktion $S(0.6, 0.8, 1.0)$ definiert wird, als $S^2(0.6, 0.8, 1.0)$. Somit evaluiert die Gesamtaussage „Daß Anna sehr jung ist, ist sehr wahr“ zu
$S^2(0.6, 0.8, 1.0)(0.990025) \approx 0.9975$.
Für viele Anwendungen sind allerdings die präzisen Daten überhaupt nicht gegeben, sondern nur die unscharfen Aussagen wie „Anna ist sehr jung“ und man will *nicht* wissen, zu welchem Grad die Aussage auf Anna paßt, wenn sie ein bestimmtes Alter hat, sondern es steht nur diese Aussage zur Verfügung und man will nun wissen, zu welchem Grad man daraus schließen kann, daß sie gern in die Disko geht, wenn man weiß, daß sehr junge Leute ziemlich gerne in die Disko gehen.

Literaturverzeichnis

[And86] Peter B. Andrews. *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof.* Academic Press, Orlando, Florida, USA, 1986.

[Arr89] A. I. Arruda. Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In Graham Priest, Richard Routley und Jean Norman, Herausgeber, *Paraconsistent Logic – Essay on the Inconsistent*, Kapitel III, Seiten 99–130. Philosophia Verlag, München, 1989.

[Bar77] Jon Barwise (Herausgeber). *Handbook of Mathematical Logic*, Band 90 in *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Niederlande, 1977.

[BB92] Leonard Bolc und Piotr Borowik. *Many-Valued Logics – Theoretical foundations, Automated reasoning, Practical applications (Volume 1).* Springer Verlag, Berlin, 1992.

[Ben84] Johan van Benthem. Correspondence theory. In D. Gabbay und F. Guenthner, Herausgeber, *Handbook of Philosophical Logic*, Kapitel II.4, Seiten 167–247. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Niederlande, 1984. Volume I: Elements of Classical Logic.

[BF92] Matthias Baaz und Christian G. Fermüller. Resolution for many-valued logics. In A. Voronkov, Herausgeber, *Proceedings of LPAR*, Seiten 107–118, St. Petersburg, Rußland, 1992. Springer Verlag, Berlin. LNAI 624.

[Bro86] Brockhaus Enzyklopädie. 19.Auflage. F.A. Brockhaus, Mannheim, 1986.

[Car50] Rudolf Carnap. *Logical Foundations of Probability.* University of Chicago Press, Chicago, USA, 1950.

[Chu40] Alonzo Church. A formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, **5**:56–68, 1940.

[CM85] Eugene Charniak und Drew McDermott. *Introduction to Artificial Intelligence.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1985.

[EFT86] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt; zweite Auflage, 1986.

[EO87] Norbert Eisinger und Hans Jürgen Ohlbach. Deduktionssysteme – Grundlagen und Beispiele. In Karl Hans Bläsius und Hans-Jürgen Bürckert, Herausgeber, *Dedukionssysteme – Automatisierung des logischen Denkens*, Kapitel II. Oldenbourg, München, 1987.

[Fre79] Gottlieb Frege. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879. reprint in: Begriffsschrift und andere Aufsätze, J. Angelelli, Herausgeber, Hildesheim. Siehe auch in Logiktexte, Karel Berka, Lothar Kreiser, Herausgeber, Seiten 82–112.

[GG89] Dov M. Gabbay und Franz Guenthner. *Handbook of Philosophical Logic*, Band 164–167 in *Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Niederlande, 1983-1989.

[Göd30] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37**:349–360, 1930.

[Got90] Siegfried Gottwald. Mehrwertige Logik. In Lothar Kreiser, Siegfried Gottwald und Werner Stelzner, Herausgeber, *Nichtklassische Logik*, Kapitel 2, Seiten 19–85. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.

[Gri77] R. Grigolia. Algebraic analysis of Lukasiewicz-Tarski's n-valued logical systems. In R. Wójcicki und G. Malinowski, Herausgeber, *Selected Papers on Lukasiewicz Sentential Calculi*, Seiten 81–92. Ossolineum, Wrocław, 1977.

[Häh92] Reiner Hähnle. Short normal forms for arbitrary finitely-valued logics. Preprint, Universität Karlsruhe, 1992.

[HB75] Patrick Hughes und George Brecht. *Vicious Circles and Infinity – An Anthology of Paradoxes.* Doubleday & Co, USA, 1975. Erschienen als Penguin Books 1978.

[HB78] Patrick Hughes und George Brecht. *Die Scheinwelt des Paradoxons.* Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1978. Übersetzung von [HB75].

[Koh92] Michael Kohlhase. Beweissysteme mit Logiken höherer Stufe. In Karl Hans Bläsius und Hans-Jürgen Bürckert, Herausgeber, *Dedukionssysteme – Automatisierung des logischen Denkens*, Kapitel VI, Seiten 213–238. Oldenbourg, München, 1992. 2. Auflage.

[Kon83] N.I. Kondakow. *Wörterbuch der Logik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig; deutsche Ausgabe, Erhard Albrecht, Günter Asser, Herausgeber, 1983.

[Kri63] S.A. Kripke. Semantical analysis of modal logic I. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **9**:67–96, 1963.

[Löw15] Leopold Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, **76**:447–470, 1915.

[Men87] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Kalifornien, USA; dritte Auflage, 1987.

[Obe62] Arnold Oberschelp. Untersuchungen zur mehrsortigen Quantorenlogik. *Mathematische Annalen*, **145**:297–333, 1962.

[Ohl88] Hans Jürgen Ohlbach. A resolution calculus for modal logics. SEKI Report SR-88-08, Fachbereich Informatik, Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern, 1988.

[Pos21] Emil Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, **43**:163–185, 1921.

[Res69] N. Rescher. *Many-valued Logic.* McGraw-Hill, New York, USA, 1969.

[Ric78] Michael M. Richter. *Logikkalküle.* Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM. Teubner, Stuttgart, 1978.

[Rob65] John Alan Robinson. A machine oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, **12**:23–41, 1965.

[RR58] A. Rose und J.B. Rosser. Fragments of many-valued statement calculi. *Transactions of the American Mathematical Society*, **87**:1–53, 1958.

[Rus08] Bertrand Russell. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, XXX:222–262, 1908.

[Sie92] Jörg H. Siekmann. KI und Logik. *KI*, 3/92:5–6, September 1992.

[Sko19] Albert Thoralf Skolem. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze. *Skrifter-Vidensk*, **I**:1–36, 1919.

[Sla91] John Slaney. The implications of paraconsistency. In John Mylopoulos und Ray Reiter, Herausgeber, *Proceedings of the 12th IJCAI*, Seiten 1052–1057, Sydney, 1991. Morgan Kaufmann, San Mateo, Kalifornien, USA.

[SS89] Manfred Schmidt-Schauß. *Computational Aspects of an Order-Sorted Logic with Term Declarations.* LNAI 395. Springer Verlag, Berlin, 1989.

[Tur84] Raymond Turner. *Logics for Artificial Intelligence.* Ellis Horwood Limited, Chichester, Great Britain, 1984.

[Wag91] Gerd Wagner. Logic programming with strong negation and inexact predicates. *Journal of Logic and Computation*, **1**(6):835–859, 1991.

[Wal82] Christoph Walther. The Markgraf Karl Refutation Procedure. PLL – a first-order language for an automated theorem prover. Interner Bericht 35/82, Fakultät für Informatik, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1982.

[WR10] Alfred North Whitehead und Bertrand Russell. *Principia Mathematica*, Band I. Cambridge University Press, Cambridge, Großbritannien; zweite Auflage, 1910.

[Yag80] Ronald R. Yager. An approach to inference in approximate reasoning. *International Journal of Man-Machine Studies*, **13**:323–338, 1980.

[Zad65] Lofti A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**:338–353, 1965.

[Zad79] Lofti A. Zadeh. A theory of approxiamate reasoning. *Machine Intelligence*, **9**:149–194, 1979.

[Zad83] Lofti A. Zadeh. Commonsense knowledge representation based on fuzzy logic. *Computer*, Seiten 61–65, October 1983.

Index

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 26.10.1992

Übungsblatt 1

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Stelle die Junktoren $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ durch $\neg$ und $\wedge$ dar und zeige die Gültigkeit dieser Darstellung.

Aufgabe 2: Man zeige für die zweiwertige Aussagenlogik die folgenden Behauptungen:

- $(P \Rightarrow Q)$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.
- $(P \wedge \neg P)$ ist unerfüllbar.
- $((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$ ist allgemeingültig.
- $((R \wedge P) \Rightarrow Q)$ ist ebenfalls erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

Verwende dafür Wahrheitstafeln und betrachte die möglichen Belegungen für P, Q und R.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Interpretation $\langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$, wobei $\mathcal{I}(e) = 0$, $\mathcal{I}(s) = \{n \mapsto n+1\}$ und $\mathcal{I}(P)$ die Relation ist, die für gerade Zahlen erfüllt ist. ξ sei eine Belegung, die der Variablen x die 7 und der Variablen y die 1 zuordnet. Berechne für die folgenden Formeln φ jeweils $\mathcal{I}_\xi(\varphi)$:

- $P(e)$
- $P(s(x))$
- $\exists x P(s(x))$
- $\forall x(P(x) \wedge P(y))$

Aufgabe 4: Gib eine Interpretation an, die die Formel Mensch(Sokrates) zu $\mathsf{0}$ auswertet.
Gibt es eine Interpretation, die sowohl die Formel „$\forall x$Mensch$(x) \Rightarrow$ sterblich(x)“ als auch die Formel „Mensch(Sokrates)“ zu $\mathsf{1}$ auswertet, die Formel „sterblich(Sokrates)“ jedoch zu $\mathsf{0}$ auswertet? (Begründe die Antwort)

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 2.11.1992

Übungsblatt 2

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Sind die folgenden Formeln Tautologien von $\mathbf{L}_3$? Sind es Tautologien klassischer Logik?

- $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
- $((\varphi \to \psi) \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Aufgabe 2: Ist die Formel $\varphi \wedge \neg\varphi$ in $\mathbf{L}_3$ unerfüllbar? Gebe gegebenenfalls ein Modell an.

Aufgabe 3: Man zeige, daß die folgenden Formeln Tautologien der n-wertigen Łukasiewicz-Logik $\mathbf{L}_n$ (für $n > 3$) sind.

$\mathbf{L}_n 1$: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$\mathbf{L}_n 2$: $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \rho) \to (\varphi \to \rho))$

$\mathbf{L}_n 3$: $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

$\mathbf{L}_n 4$: $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

$\mathbf{L}_n 5n$: $n\varphi \to (n-1)\varphi$

$\mathbf{L}_n 6n$: $(n-1)((\neg\varphi)^i \vee (\varphi \wedge (i-1)\varphi))$ für $1 < i < n-1$ und i teilt $n-1$ nicht.

Dabei wird definiert: $i\varphi = \varphi \vee \varphi \vee \ldots \vee \varphi$ (mit i φ's) und
$\varphi^i = \varphi \wedge \varphi \wedge \ldots \wedge \varphi$ (mit i φ's)

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 9.11.1992

Übungsblatt 3

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Zeige: In zweiwertiger Aussagenlogik sind die Formeln $\neg\varphi \to \psi$ und $(\varphi \to \psi) \to \psi$ äquivalent (wenn man $\to$ durch $\Rightarrow$ ersetzt), nicht jedoch in $\mathbf{L}_n$.
(Bemerkung: Die erste Formel stellt eine Definition von $\vee$ in klassischer Aussagenlogik in den Junktoren $\neg$ und $\Rightarrow$ dar, die zweite Formel eine Definition von $\vee$ in $\mathbf{L}_n$ in den Junktoren $\neg$ und $\to$.)

Aufgabe 2: Wie muß die Definition der Łukasiewicz-Logik $\mathbf{L}_n$ bei Beibehaltung der Definitionen für die Wahrheitswertfunktionen geändert werden, so daß sie der Standardbedingung genügt. Für welche n ist das möglich?

Aufgabe 3: Man zeige im Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_3}$, daß $P \to (Q \to P)$ eine Tautologie von $\mathbf{L}_3$ ist.
Führe den Beweis im Kalkül $\widehat{\mathfrak{K}_{\mathbf{L}_3}}$.

Aufgabe 4: Man drücke für die Logik $\mathbf{L}_5$ die Junktoren H_α, I_α und J_α in den Junktoren $\neg$ und $\to$ aus.

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 16.11.1992

Übungsblatt 4

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Sei die Äquivalenz zwischen φ und ψ definiert als:
$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Zeige, dann gilt für die entsprechenden Wahrheitswertfunktionen $\leftrightarrow (\alpha, \beta) = 1 - |\alpha - \beta|$.

Aufgabe 2: In Bemerkung 3.23 haben wir gesehen, daß $(\neg P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)) \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$ eine Tautologie von $\mathbf{L}_3$ ist. Zeige, daß es keine Tautologie von $\mathbf{L}_4$ ist.

Aufgabe 3: Ist $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ eine Tautologie von $\mathbf{L}_{100}$?

Aufgabe 4: Man zeige, daß die Formeln $\mathbf{L}_n 5n$ und $\mathbf{L}_n 6n$ aus der Bermerkung 3.23 Tautologien sind.

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 23.11.1992

Übungsblatt 5

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Man stelle in $\mathbf{P}_3$ den Junktor $\sim$ in den Junktoren $\neg$ und $\vee$ dar, der der Wahrheitswertfunktion $\sim(\alpha) = \frac{1}{2}$ entspricht. (Hinweis: Suche eine Tautologie in $\mathbf{P}_3$.)

Aufgabe 2: Man zeige, daß in $\mathbf{P}_{n+1}$ für die k-fache Hintereinanderausführung der Negation ($k \leq n$) gilt:

$$\neg^k(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \frac{k}{n} & \text{für } \alpha \geq \frac{k}{n} \\ 1 + \alpha - \frac{k-1}{n} & \text{für } \alpha < \frac{k}{n} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Man zeige, daß $(\neg P \to Q) \to (((Q \to P) \to Q) \to Q)$ Tautologie von $\mathbf{G}_3$ ist.
Handelt es sich dabei auch um eine Tautologie von $\mathbf{G}_{[0,1]}$?

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber

Ausgabe: 30.11.1992

Übungsblatt 6

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Welche Beziehung hat $\widehat{\mathbf{B}}_3$ zur klassischer Aussagenlogik?

Aufgabe 2: Gibt es in $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ beziehungsweise in $\mathbf{K}_3^{\text{schwach}}$ Tautologien? Begründe die Antworten.

Aufgabe 3: Welche Beziehung hat $\mathbf{K}_3^{\text{stark}}$ zur klassischen Aussagenlogik, wenn man statt nur $\mathbf{1}$ auszuzeichnen die beiden Wahrheitswerte $\mathbf{1/2}$ und $\mathbf{1}$ auszeichnet?

Aufgabe 4: Man zeige, daß der Kalkül $\mathfrak{K}_{\mathbf{S}_3}$ korrekt ist.
Wieso ist $\mathbf{S}_3$ parakonsistent?

Aufgabe 5: Man berechne in der vierwertigen parakonsistenten Logik die Wahrheitstafel für den Junktor $\Rightarrow$, der definiert ist durch $\varphi \Rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$. Inwieweit unterscheidet sich $\Rightarrow$ von $\rightarrow$?

Übungsblatt 7

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Zeige, daß der Junktor $\wedge$ in den Łukasiewicz-Logiken $\mathbf{L}_n$ assoziativ, kommutativ und idempotent ist. Wie überträgt sich der Beweis auf den definierten Junktor $\vee$? Welche dieser Eigenschaften gelten für den Junktor $\rightarrow$.

Aufgabe 2: Zeige, daß die Formel $\varphi = \forall n G(n) \rightarrow G(s(n))$ aus Beispiel 5.6 keine Tautologie von $\mathbf{L}_{11}^{\mathrm{P}}$ ist.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Formel $\varphi = \forall x G(x) \vee \neg G(x)$. Man berechne den Wahrheitswert von φ unter der Interpretation von Beispiel 5.6 in $\mathbf{L}_{11}^{\mathrm{P}}$.
Welches ist der Wahrheitswert von $\psi = \neg(\forall x G(x))$?

Aufgabe 4: In $\mathbf{L}_3^{\mathrm{P}}$ seien die Formeln $\varphi = \forall x F(x) \vee M(x)$ und $\psi = \forall x F(x) \leftrightarrow \neg M(x)$ gegeben. Man betrachte ein Universum $\mathcal{U} = \{\text{Anna}, \text{Fritz}, \text{Karl}, \text{Maria}\}$. Gib eine Interpretation für F und M an, so daß $\Gamma = \{\varphi, \psi\}$ in diesem Universum erfüllt ist. Erweitere das Universum um ein Element „Buch“, so daß Γ nicht mehr erfüllt ist.

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 14.12.1992

Übungsblatt 8

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Gegeben sei die Formel $\varphi = \forall x\ x \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 0$. Zeige, daß unter der Interpretation $\mathcal{I}$ aus Beispiel 5.10 φ in der Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\mathrm{p}}$ zu wahr evaluiert. Wie unterscheidet sich diese Interpretation von einer Interpretation in klassicher Prädikatenlogik.

Aufgabe 2: Gilt die Beziehung der klassischen Prädikatenlogik $\exists x \varphi = \neg \forall x \neg \varphi$ auch in der Kleene-Logik $\mathbf{K}_3^{\mathrm{p}}$?

Aufgabe 3: Man bringe die Formel
$\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall x \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| > \varepsilon)))$ in Klauselnormalform.

Aufgabe 4:

a) Übersetze das folgende Problem in klassische Prädikatenlogik:
Wölfe, Füchse, Vögel, Raupen und Schnecken sind Tiere, und es gibt Individuen von jeder dieser Arten. Außerdem gibt es Körner, und Körner sind Pflanzen. Jedes Tier frißt alle Pflanzen oder alle wesentlich kleineren Tiere, die irgendwelche Pflanzen fressen. Raupen und Schnecken sind wesentlich kleiner als Vögel, diese sind wesentlich kleiner als Füchse, die ihrerseits wesentlich kleiner als Wölfe sind. Wölfe fressen weder Füchse noch Körner, während Vögel zwar Raupen fressen, aber keine Schnecken. Raupen und Schnecken fressen gewisse Pflanzen.

Theorem: Es gibt ein Tier, das ein körnerfressendes Tier frißt.

b) Bilde die zugehörige Klauselmenge.

c) Beweise das Theorem mit Hilfe des Resolutionskalküls.

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 21.12.1992

Übungsblatt 9

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Gegeben sei die Klauselmenge

$$\mathcal{C} = \left\{ \left\{ P(z)^1, P(y)^{1/2}, P(y)^1 \right\}, \left\{ P(z)^1, P(d)^{1/2} \right\}, \left\{ P(e)^0 \right\} \right\}$$

Zeige mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß die Klauselmenge unerfüllbar ist.

Aufgabe 2: Bestimmen das Herbrand-Universum und die Herbrand-Basis der Klauselmenge $\mathcal{C}$ aus Aufgabe 1. Gib einen dazugehörigen semantischen Baum an.

Aufgabe 3: Gegeben sei die modifizierte Klauselmenge

$$\mathcal{C}' = \left\{ \left\{ P(f(z))^1, P(f(y))^{1/2}, P(f(y))^1 \right\}, \left\{ P(f(z))^1, P(f(d))^{1/2} \right\}, \left\{ P(f(e))^0 \right\} \right\}$$

Zeige mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß die Klauselmenge unerfüllbar ist. Wie sehen nun Herbrand-Universum und Herbrand-Basis aus?

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 18.1.1993

Übungsblatt 10

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Man zeige mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß die folgenden Formeln Tautologien von $\mathbf{L}_3$ sind. Erstelle dazu erst die Klauselnormalform und führe dann den Beweis im Kalkül:

$\mathbf{L}_3 1$ $P \to (Q \to P)$

$\mathbf{L}_3 2$ $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$

$\mathbf{L}_3 3$ $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$

$\mathbf{L}_3 4$ $((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P)$

Aufgabe 2: Zeige entsprechend, daß die erste Formel $\mathbf{L}_5 1$ Tautologie in $\mathbf{L}_5$ ist.

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 25.1.1993

Übungsblatt 11

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Zeige die Beziehungen $\wp(\neg Q) = 1 - \wp(Q)$ und $\wp(\neg Q|R) = 1 - \wp(Q|R)$.

Aufgabe 2: Zeige das Bayessche Theorem

$$\wp(Q|R) = \frac{\wp(Q) \cdot \wp(R|Q)}{\wp(R)}$$

Aufgabe 3: Zeige, daß die folgende Formel gilt, falls die Ereignisse R_1 und R_2 uabhängig sind:

$$\wp(Q|R_1 \wedge R_2) = \wp(Q) \cdot \left[\frac{\wp(R_1|Q)}{\wp(R_1)}\right] \cdot \left[\frac{\wp(R_2|Q)}{\wp(R_2)}\right]$$

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 1.2.1993

Übungsblatt 12

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Zeige die folgenden Beziehungen zwischen beliebigen Fuzzymengen A, B und C:

- $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist äquivalent zu $A = B$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ und $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$

Aufgabe 2: Zeige: Der Durchschnitt zweier Fuzzymengen ist die größte Fuzzymenge, die in beiden enthalten ist. Die Vereinigung zweier Fuzzymengen ist die kleinste Fuzzymenge, die beide umfaßt.

Aufgabe 3: Man bestimme den Fuzzywert des Satzes „Üblicherweise ist Schnee ziemlich weiß.“, wenn die folgenden Tabellen gegeben sind:

Fuzzywert	Grad zu dem ein Fuzzywert „üblicherweise“ repräsentiert
0,0	0,0
0,1	0,0
0,2	0,0
0,3	0,0
0,4	0,1
0,5	0,1
0,6	0,2
0,7	0,5
0,8	0,8
0,9	1,0
1,0	1,0

Fuzzywert	Grad zu dem ein Fuzzywert „ziemlich“ repräsentiert
0,0	0,0
0,1	0,0
0,2	0,0
0,3	0,0
0,4	0,1
0,5	0,1
0,6	0,2
0,7	0,6
0,8	1,0
0,9	0,9
1,0	0,8

Schneeprobe	Grad zu dem die Probe weiß ist
S_1	0,7
S_2	0,8
S_3	0,6
S_4	0.9
S_5	1.0

Wintersemester 1992/93 FB Informatik, Manfred Kerber
Ausgabe: 8.2.1993

Übungsblatt 13

Mehrwertige Logiken in der KI

Aufgabe 1: Sei die Fuzzymenge der „großen Leute“ definiert durch die S-Funktion $S(160, 170, 180)$ und die Verteilung der Größe von Menschen durch eine Funktion μ mit

$$\mu(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 150 \text{ oder } x \geq 200 \\ m \cdot (25^2 - (x - 175)^2) & \text{für } 150 \leq x \leq 200 \end{cases}$$

Berechne den Fuzzywert der Aussage „Die meisten Leute sind groß“ durch die Bestimmung von

$$S(0.5, 0.7, 0.9)\left(\frac{1}{|\text{Leute}|}\int_0^\infty \mu(x) S(160, 170, 180)(x) \mathrm{d}x\right).$$

Aufgabe 2: Man bestimme den Fuzzywert der Aussage „Es ist ziemlich wahr, daß die meisten Leute groß sind.“. Die Bewertung „Es ist wahr“ werde dabei wieder durch die S-Funktion $S(0.6, 0.8, 1.0)$ ausgedrückt und die Modifikation „ziemlich“ durch die Wurzelfunktion $T(x) = \sqrt{x}$, also insgesamt „Es ist ziemlich wahr“ durch $\sqrt{S(0.6, 0.8, 1.0)}$.