Siegfried Wendt
Universität Kaiserslautern

Zeigen, Nennen, Umschreiben – die drei Alternativen der Identifikation

Zur Motivation

Bei der Programmierung geht es in vielfältiger Form um Identifikation von Individuen: Speicherorte, Datentypen, Werte, Klassen, Objekte, Funktionen u.ä. müssen definierend oder selektierend[1)] identifiziert werden.

Die Ausführungen zur Identifikation durch Zeigen oder Nennen sind verhältnismäßig kurz gehalten, wogegen der Identifikation durch Umschreiben sehr viel Raum gewidmet ist. Dies hat seinen Grund darin, daß man zum Zeigen oder Nennen keine strukturierten Sprachformen benötigt, wohl aber zum Umschreiben. Daß die Betrachtungen der unterschiedlichen Formen funktionaler Umschreibungen so ausführlich gehalten sind, geschah im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Begriffswelt der funktionalen Programmierung. Man hätte zwar die Formen funktionaler Umschreibungen auch im Mosaikstein ”Programmzweck versus Programmform” im Kontext des dort dargestellten Konzepts funktionaler Programme behandeln können, aber der Autor meint, daß der vorliegende Aufsatz der angemessenere Platz dafür sei.

Individuen und deren Identifikation

Jeder Mensch wird in ein Reizkontinuum hineingeboren, und über seine Sinnesorgane ist er untrennbar mit diesem Reizkontinuum verbunden. In den ersten Jahren seines Lebens vollzieht sich im Menschen ein Prozeß, der in ihm die Vorstellung einer strukturierten Welt entstehen läßt. Diese Vorstellung kann man auch als Modell bezeichnen. In dieser strukturierten Welt gibt es Zählbares, Meßbares und Entscheidbares. *Das Zählbare* sind die Individuen, *das Meßbare* sind die Eigenschaften von Individuen, und *das Entscheidbare* sind die Beziehungen zwischen den Individuen.

Aus dem Reizkontinuum kann man nur die konkreten Individuen begründen; darüberhinaus schafft sich aber der Mensch eine Welt abstrakter Individuen. Im vorliegenden Aufsatz wird davon ausgegangen, daß der Mensch die Individualisierung seiner Welt vollzogen habe und daß es nun darum gehe, einzelne Individuen zu identifizieren.

> Unter Identifikation wird hier der Vorgang verstanden,
> daß ein Mensch seine eigene Aufmerksamkeit oder die eines Kommunikationspartners
> auf ein bestimmtes Individuum lenkt.

Als einführendes Beispiel sei der Fall betrachtet, daß jemand überfallen wurde und daß nun die Polizei

1) Diese Begriffe werden in den folgenden Abschnitten eingeführt.

hofft, das Opfer könne den Täter identifizieren. Anhand dieses Beispiels können die drei grundsätzlich unterschiedlichen Arten der Identifikation veranschaulicht werden.

Wenn es der Polizei gelingt, einen Kreis von Personen zu versammeln, unter denen sie den Täter vermutet, wird sie das Opfer diesem Personenkreis gegenüberstellen und ihn bitten, auf den Täter zu zeigen, falls er sich unter den aufgestellten Personen befindet. Eine *Identifikation durch Zeigen* ist nur unter zwei Voraussetzungen möglich: Zum einen muß es sich bei dem zu identifizierenden Individuum um ein konkret wahrnehmbares Individuum handeln, und zum anderen müssen der identifizierende Mensch und das zu identifizierende Individuum dicht genug zusammengekommen sein, damit überhaupt eine Wahrnehmung und eine eindeutige Auswahl möglich wird. Diese beiden Voraussetzungen brauchen für die anderen beiden Arten der Identifikation nicht erfüllt zu sein.

Die zweite Art der Identifikation ist das Nennen. Im betrachteten Beispiel könnte es sein, daß das Opfer den Täter als jemanden erkannt hat, den er bereits früher kennengelernt hat und dessen Namen er kennt. Dann kann das Opfer der Polizei den Namen nennen.

Eine *Identifikation durch Nennen* setzt voraus, daß ein sogenanntes Symbol als Stellvertreter des zu identifizierenden Individuums vereinbart wurde. Ein *Symbol* ist ein leicht reproduzierbares Muster, das zu einem Individuum durch Vereinbarung als Mittel zur Identifikation assoziiert wird – wie beispielsweise das elementare Symbol ’5’ zum mathematischen Individuum ”natürliche Zahl fünf” oder das zusammengesetzte Symbol ’Beethoven’ zu dem Individuum, das in Bonn geboren wurde und als berühmter Komponist in Wien starb. Die bekanntesten Symbole sind die Elemente natürlicher Sprachen, also die Wörter, für die es neben der gesprochenen auch eine geschriebene Form gibt. Es gibt aber selbstverständlich auch viele rein graphische Symbole wie beispielsweise die Symbole ♀ und ♂ für die Planeten Venus und Mars bzw. – in anderem Kontext – für die Begriffe ”weiblich” und ”männlich”.

Die für die zwischenmenschliche Kommunikation üblicherweise verwendeten Symbole sind optische oder akustische Muster. In technischen Systemen zur Informationsübertragung oder –verarbeitung findet man jedoch auch noch eine Vielfalt anderer Muster.

Es gehört zum Wesen eines Symbols, daß es nur als Ganzes eine Bedeutung hat, d.h. daß man seine Teile nicht getrennt interpretieren kann. So wäre es beispielsweise unsinnig, nach der Bedeutung des Buchstabens t im Namen “Beethoven” zu fragen.

Auf die dritte Möglichkeit der Identifikation, die sogenannte *Umschreibung*, müßte das Opfer des Überfalls im betrachteten Beispiel zurückgreifen, wenn es den Täter weder durch Zeigen noch durch Nennen identifizieren kann. Im Falle des Zeigens oder Nennens ist die Identifikation zwangsläufig eindeutig – wobei für den Fall des Nennens die Bedingung einer eindeutigen Symbolvereinbarung erfüllt sein muß. Im Falle des Umschreibens dagegen ist Mehrdeutigkeit möglich. Im betrachteten Beispiel könnte es sein, daß das Opfer des Überfalls der Polizei erzählt, der Täter habe eine blaue Hose und schwarze Schuhe getragen, er sei mindestens 1,80 m groß gewesen und habe ungefähr 80 kg gewogen. Durch eine solche Umschreibung werden zwar sicher etliche Individuen ausgeschlossen, aber es könnte sehr wohl sein, daß diese Merkmale auf sehr viele Menschen zutreffen. Eine solche Umschreibung ist somit eigentlich nur ein Identifikationsversuch.

Umschreibungen

Umschreibungen lassen sich einteilen in *selektierende Umschreibungen* einerseits und *definierende Umschreibungen* andererseits.

Bei der *selektierenden Umschreibung* wird ein mengenspezifizierendes Prädikat P angegeben in der Absicht, das Element einer einelementigen Menge zu identifizieren. Falls das Prädikat P jedoch eine leere oder eine mehrelementige Menge spezifiziert, d.h. falls die Menge aller Individuen, auf die das Prädikat P zutrifft, nicht einelementig ist, ist der Identifikationsversuch mißlungen. Man kann formal schreiben

$$\textit{Selektierend}\text{\_umschrieben\_durch (P)} = \begin{cases} \text{i} & \text{falls} \quad \text{P(i) UND } (\,|\{ \text{x} \mid \text{P(x)} \}| = 1) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, daß hier das Individuum i identifiziert wird und nicht die Menge { i }.

<u>Beispiele:</u>

(1) $P(x) = (x^2 - 7x + 12 = 0)$

Die durch dieses Prädikat spezifizierte Menge ist { 3, 4 }. Da diese Menge zwei Elemente enthält, kann die selektierende Umschreibung mit diesem Prädikat kein Ergebnis haben.

(2) $P(x) = (x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0)$

Die durch dieses Prädikat spezifizierte Menge ist { 5 }. Da diese Menge nur ein Element enthält, hat die selektierende Umschreibung ein definiertes Ergebnis, nämlich 5.

Im Gegensatz zur selektierenden Umschreibung, die als Identifikationsversuch gedeutet werden muß, der mißlingen kann, wird durch eine definierende Umschreibung in jedem Falle eindeutig ein bestimmtes Individuum identifiziert.

Während eine allgemeine Form für selektierende Umschreibungen angegeben werden konnte, welche die Umschreibung auf ein mengenspezifizierendes Prädikat zurückführt, hat der Autor keine allgemeine Form gefunden, mit der alle definierenden Umschreibungen zur Deckung gebracht werden könnten.

<u>Beispiele:</u>

(3) Durch eine Umschreibung der Form $M = \{ x \mid P(x) \}$
wird eine Menge M definiert und gleichzeitig auch identifiziert.

(4) Durch eine Umschreibung der Form $P = P(x)$
wird ein Prädikat P definiert und gleichzeitig auch identifiziert.
So kann beispielsweise das Primzahlprädikat wie folgt definierend umschrieben werden:

$$\text{PRIMZAHL}(x) = [\, \exists\, w \in \mathbb{N}\colon w+1 = x \,] \cdot [\, \neg \exists\, (y, z) \in \mathbb{N}^2\colon (y+1) * (z+1) = x \,]$$

Da man einem Prädikat P(x) nicht ansehen kann, welchem Identifikationszweck es dienen soll, muß stets ein Kontext mitgegeben werden, aus dem hervorgeht, ob eine selektierende oder eine definierende Umschreibung beabsichtigt ist und ob im Definitionsfalle eine Menge oder das Prädikat selbst identifiziert werden soll.

(5) Die Peano'schen Axiome, die man im Mosaikstein ”Die Begriffswelt des Formalen” findet, stellen eine definierende Umschreibung der abstrakten Struktur ”Einseitig begrenzte Kette aus unendlich vielen diskreten Gliedern” dar.

Funktionale Umschreibungen

Die weitere Betrachtung konzentriert sich auf eine wichtige Unterklasse der selektierenden Umschreibungen.

> Ein selektierende Umschreibung wird als *funktionale Umschreibung* bezeichnet, wenn das Prädikat P die Form $x = f$ (Argumenttupel) hat.

In diesem Fall enthält die durch das Prädikat spezifizierte Menge zwangsläufig nur ein einziges Element, weil die Bedingung besteht, daß das in einer funktionalen Umschreibung angegebene Argumenttupel zum Definitionsbereich der Funktion f gehören muß.

Auch ein Symbol kann als funktionale Umschreibung angesehen werden, und zwar auf zwei unterschiedliche Arten: (1) Die Funktion f wird in diesem Fall durch das Symbol selbst identifiziert, und es handelt sich um eine Funktion mit null Argumenten. Deshalb kann in diesem Fall eine explizite Angabe des leeren Argumenttupels entfallen. (2) Die Funktion f ist die Identitätsfunktion, die als Ergebnis stets das Argument liefert. Diese Funktion kann impliziert werden und braucht nicht explizit angegeben zu werden.

Anstelle zu sagen, das Symbol 5 identifiziere das mathematische Individuum “natürliche Zahl 5”, darf man also auch sagen, das Symbol 5 identifiziere eine Funktion, die auf das leere Argumenttupel angewandt als Ergebnis das mathematische Individuum “natürliche Zahl 5” liefert.

<u>Beispiele:</u>

(6)
$$P(x) = (x = 3 \cdot SQRT(2) \cdot COS(\pi/4))$$
Die selektierende Umschreibung mit diesem Prädikat ist funktional und identifiziert die Zahl 3 . Die Funktion f lautet
$$f (a, b, c, d) = a \cdot SQRT(b) \cdot COS(c/d) ,$$
und das Argumenttupel ist
$$(a, b, c, d) = (3, 2, \pi, 4).$$

(7) Die Darstellung einer natürlichen Zahl in Dezimalschreibweise stellt eine funktionale Umschreibung dar, worin explizit nur ein Argumenttupel enthalten ist. Die dazu zu assoziierende Funktion f lautet

$$f (d_m, d_{m-1}, \ \ldots \ d_2, d_1, d_0) = \sum_{i=0}^{m} d_i * 10^i$$

(8)
$$P(x_1, x_2) = ((x_1 + x_2 = 7) \text{ UND } (2x_1 - x_2 = 2))$$
Die selektierende Umschreibung mit diesem Prädikat identifiziert den zweidimensionalen Vektor (3, 4).
Obwohl diese Umschreibung eindeutig ein Individuum identifiziert, muß sie nicht notwendigerweise als funktionale Umschreibung angesehen werden, denn es wird ja keine Funktion f angegeben – zumindest nicht explizit.

Es gibt aber auch in diesem Fall eine Funktion f, die zu der Umschreibung assoziiert werden kann. Denn man kann ja das Prädikat auch in der folgenden Form schreiben:

$$P(x_1, x_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Darin sind die Funktion

$$f(a, b, c, d, e, f, g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{e} \bullet \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

und das Argumenttupel $(a, b, c, d, e, f, g) = (1, 1, 2, -1, -1, 7, 2)$ enthalten.

Wer zu der ursprünglichen Form des Prädikats die Matrizeninversion als berechenbare Funktion assoziiert, darf die Umschreibung als funktional ansehen. Aber wer keine Funktion f sieht, muß die Umschreibung als nicht funktional klassifizieren.

Funktionale Umschreibungen lassen sich klassifizieren in *primitiv funktionale Umschreibungen* einerseits und *komponiert funktionale Umschreibungen* andererseits.

> Eine funktionale Umschreibung ist *primitiv funktional*, wenn alle darin vorkommenden Funktionsidentifikationen primitiv, d.h. symbolisch sind.

Zu jedem Funktionssymbol gehört implizit das Wissen um die Anzahl der Argumente und die mit der jeweiligen Position eines Arguments im Tupel verbundene Rolle. Nur bei sehr wenigen Funktionen ist die Ordnung der Argumente im Tupel für die Auswertung irrelevant. So liefert beispielsweise die Umschreibung ADDITION(8, 5) das gleiche Ergebnis 13 wie die Umschreibung ADDITION(5, 8). Im Falle der Subtraktion gilt dies schon nicht mehr, d.h. dort muß man wissen, an welcher Stelle im Argumenttupel der Minuend und an welcher Stelle der Subtrahend steht.

In Bild 1 ist ein Beispiel einer primitiv funktionalen Umschreibung gezeigt; der Aufbau dieser Umschreibung aus einzelnen Teilen ist in Form eines Baumes dargestellt.

Wenn eine funktionale Umschreibung nicht primitiv funktional, sondern komponiert funktional ist, kommt darin mindestens eine Funktion vor, die auf andere Art identifiziert wird als durch Angabe eines Funktionssymbols. Wenn eine Funktion nicht durch ihr Funktionssymbol identifiziert wird, ist es auch nicht möglich, die Anzahl ihrer Argumente und die Rollen der verschiedenen Positionen im Argumenttupel zu implizieren. Dieses Wissen muß in solchen Fällen explizit durch die Umschreibung vermittelt werden. Es kann sich deshalb bei der Umschreibung dieser Funktion nur um eine definierende Umschreibung handeln.

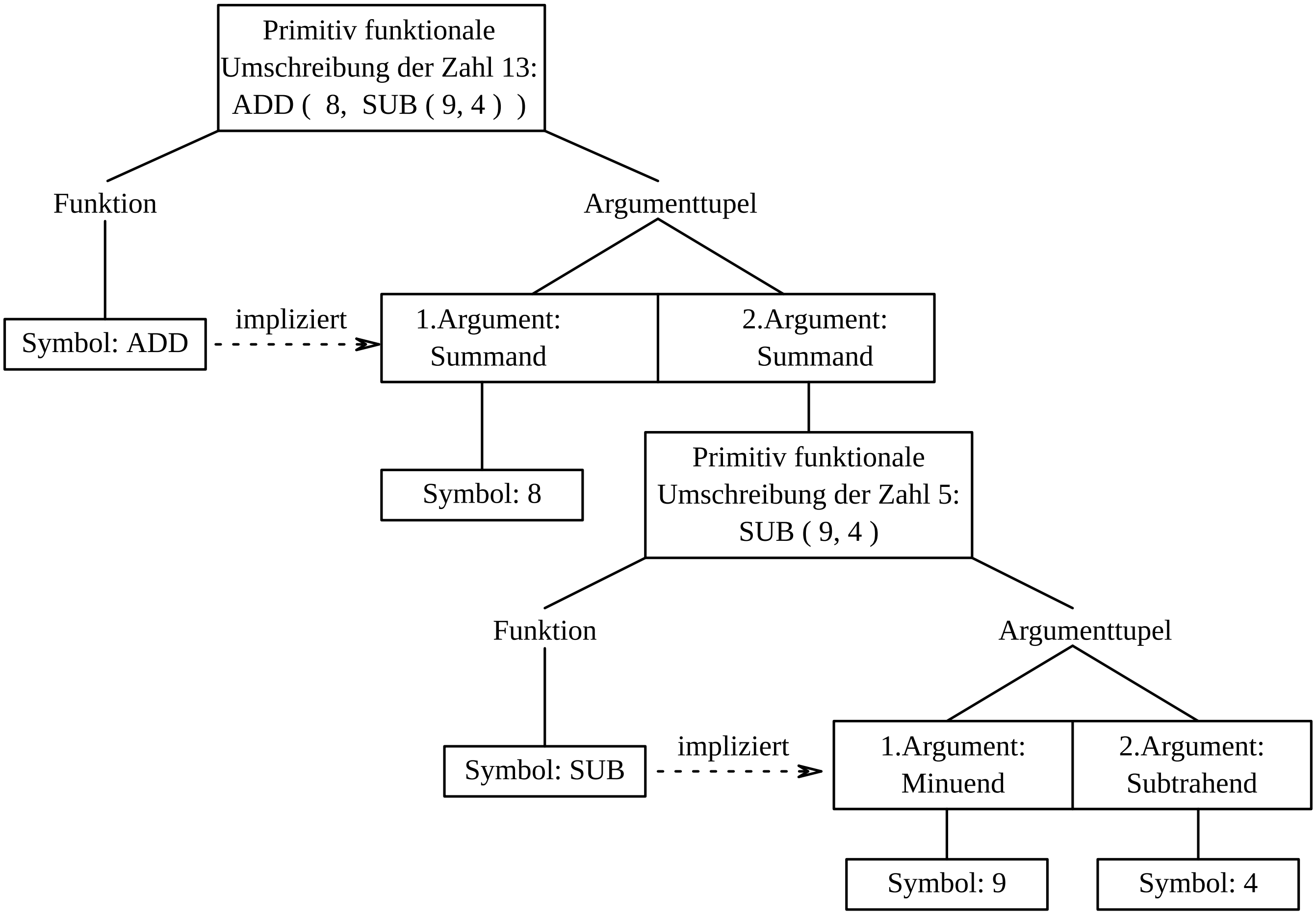

Bild 1 Beispiel einer primitiv funktionalen Umschreibung, dargestellt als Baumstruktur

Bild 2 zeigt ein Beispiel einer komponiert funktionalen Umschreibung. Auch diese Umschreibung ist als Baumstruktur dargestellt in der gleichen Symbolik, die bereits in Bild 1 verwendet wurde.

In diesem Beispiel wird die Zahl 13 durch den Ausdruck $3 + 2{\cdot}5$ umschrieben. Man hätte diese Umschreibung selbstverständlich als primitiv funktionale Umschreibung formulieren können. Dann hätte sich ein Baum ergeben, der strukturell identisch gewesen wäre mit dem Baum in Bild 1, denn die beiden Umschreibungen ADD(8, SUB(9, 4)) und ADD(3, MULT(2, 5)) sind ja strukturell gleich und unterscheiden sich nur in den Symbolen.

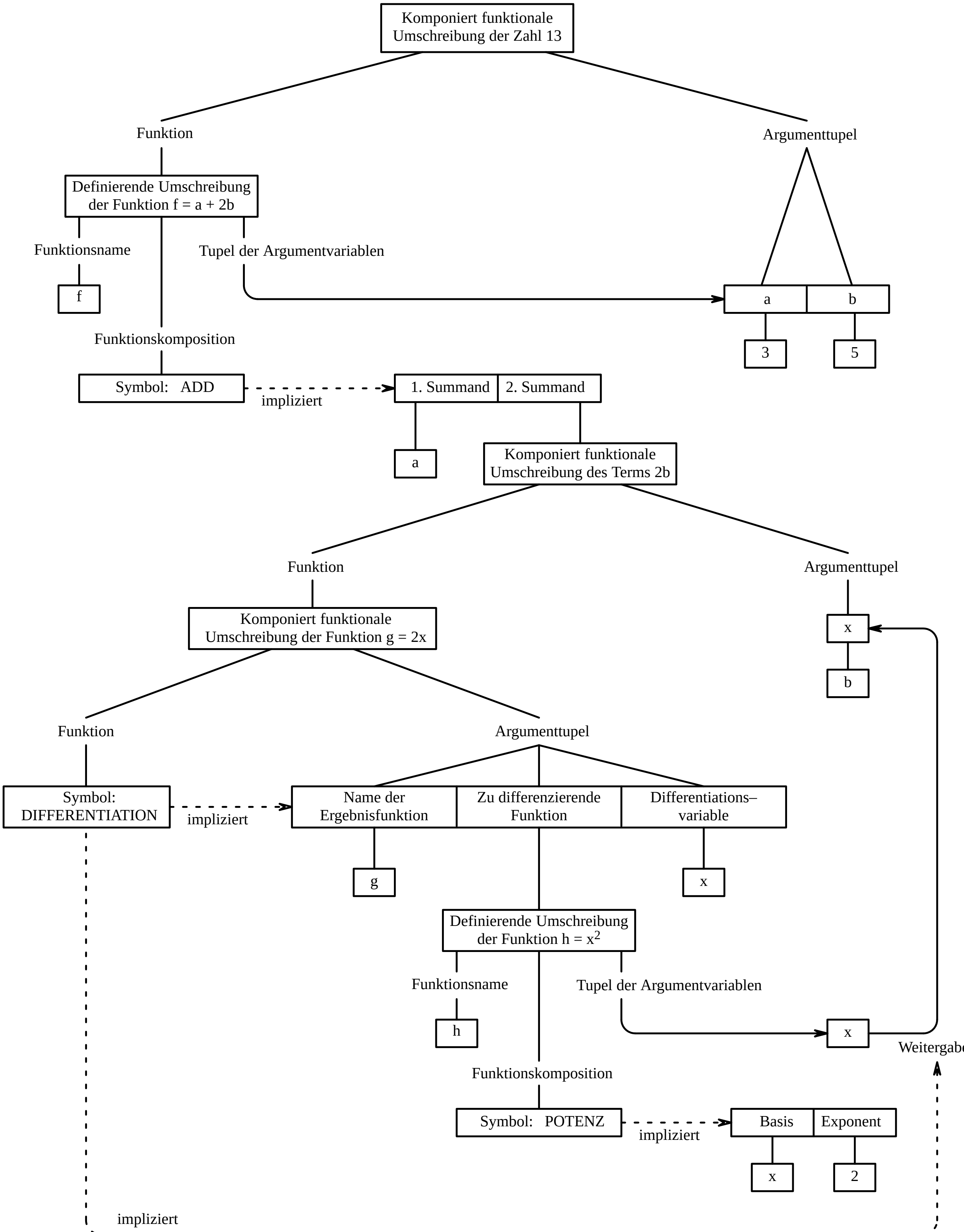

Bild 2 Beispiel einer komponiert funktionalen Umschreibung, dargestellt als Baumstruktur

Der Vergleich der beiden Bilder 1 und 2, die zwei sehr unterschiedliche Umschreibungen der Zahl 13 darstellen, macht deutlich, daß das zu umschreibende Individuum nicht die Form der Umschreibung einschränkt. Der Umschreibende hat in jedem Fall die Freiheit, sich für irgendeine Umschreibungsform zu entscheiden. Im Fall des Beispiels in Bild 2 wurden die folgenden willkürlichen Entscheidungen gefällt:

Es wurde entschieden, eine Funktion f(a, b) = a + 2b zu definieren und hierfür das Argumenttupel (a, b) = (3, 5) vorzugeben. Weiterhin wurde entschieden, den Term 2b dadurch zu gewinnen, daß eine Funktion g(x) = 2x definiert wird, zu der das Argumenttupel (x) = (b) vorgegeben wird. Schließlich wurde noch entschieden, die Funktion g durch Differentiation der Funktion h(x) = x^2 zu gewinnen.

Die beiden Funktionen f und h werden definierend umschrieben, d.h. es wird für sie jeweils das Tupel der Argumentvariablen und die Funktionskomposition angegeben. Die Funktion g dagegen wird funktional umschrieben, denn sie wird als Ergebnis der Differentiation der Funktion h umschrieben. Daß es sich bei der Umschreibung der Funktion g um eine komponiert funktionale Umschreibung handelt, liegt daran, daß die zu differenzierende Funktion h definierend umschrieben wird. Da es sich bei der Beschreibung der Funktion g nicht um eine definierende Umschreibung handelt, wird das Tupel der Argumentvariablen der Funktion g – also das Tupel (x) – nicht per Definition festgelegt, sondern es ergibt sich als Ergebnis der Anwendung der Differentiation auf das für diese Differentiationsfunktion vorgegebene Argumenttupel. In diesem Argumenttupel ist die zu differenzierende Funktion h enthalten, und bei deren Definition wird (x) als ihr Tupel der Argumentvariablen festgelegt. Die Differentiationsfunktion impliziert die Weitergabe des Tupels der Argumentvariablen von der zu differenzierenden Funktion an die Funktion, die sich aus der Differentiation ergibt – in unserem Fall also eine Weitergabe des Argumenttupels (x) von der Funktion h an die Funktion g.

Im betrachteten Beispiel gibt es eigentlich keine Notwendigkeit, Namen für die drei eingeführten Funktionen a + 2b, 2x und x^2 festzulegen. Daß sie dennoch festgelegt wurden, hat seinen Grund darin, daß es grundsätzlich auch die Möglichkeit gibt, Funktionen rekursiv zu definieren. Eine rekursive Funktionsdefinition liegt vor, wenn in der Funktionskomposition der Name der zu definierenden Funktion als Funktionssymbol verwendet wird. In diesem Fall ist also die Festlegung eines Funktionsnamens notwendig. Der Einheitlichkeit wegen ist es zweckmäßig, grundsätzlich in Funktionsdefinitionen einen Namen festzulegen, auch wenn die Funktion nicht rekursiv definiert wird.

Schlußbemerkung

Zum Abschluß dieser Betrachtung über die alternativen Möglichkeiten der Identifikation soll darauf hingewiesen werden, daß es bei jeder Form des Umschreibens immer nur darum gehen kann, Unbekanntes auf Bekanntes zurückzuführen. Es kann keine Umschreibungen geben, in denen keine Symbole verwendet werden, und die Verwendung von Symbolen bringt zwangsläufig die Notwendigkeit des Implizierens mit sich. Ohne die Kenntnis der Vereinbarungen über das zu den Symbolen zu Implizierende kann man eine Umschreibung nicht verstehen.