Stand: Februar 1998 (1)

Siegfried Wendt
Universität Kaiserslautern

Der Zustandsbegriff in der Systemtheorie

Für die Systemtheorie ist der Begriff *Zustand* ein sehr zentraler Begriff. Das Wort "Zustand" wird umgangssprachlich recht häufig verwendet, aber wenn man die Leute fragen würde, was sie denn meinen, wenn sie das Wort Zustand benützen, dann würde man sicher nicht die präzise Definition bekommen, die man für die Systemtheorie braucht. Die Leute sagen beispielsweise

"Seit er ins Krankenhaus kam, hat sich sein Zustand täglich verschlechtert.", oder

"Fahren Sie dort auf keinen Fall hin, denn dort herrschen chaotische Zustände!".

Zustand kann also alles sein, was in einem bestimmten Weltausschnitt beobachtbar ist und wofür sich der Beobachter interessiert. Diese umgangssprachliche Bedeutung war der Ausgangspunkt der begrifflichen Schärfung, die das Wort Zustand in der Systemtheorie erfahren hat.

In der Systemtheorie geht es um die Möglichkeiten der Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Input und Output, d.h. zwischen Einflußnahme und Reaktion. Für die Systemtheorie ist also ein *System* ein Gebilde, das ein beobachtbares Verhalten zeigt, welches möglicherweise beeinflußt werden kann. Neben dem System muß es also immer noch etwas anderes geben, was Einfluß nimmt und was die Reaktion beobachtet; dieses andere wird die *Umgebung des Systems* genannt.

In der Systemtheorie unterscheidet man zwischen Kontinuumsystemen und diskreten Systemen. Bei den *diskreten Systemen* stellen die Einflußnahmen und die Reaktionen Mengen diskreter Individuen dar. Der Einwurf einer Münze in einen Fahrkarten verkaufenden Apparat oder das Herausfallen einer Fahrkarte aus diesem Apparat sind Beispiele solcher Individuen. Als Beispiel eines *Kontinuumssystems* sei eine Anlage zur akustischen Verstärkung betrachtet. In diesem System wird die Einflußnahme X als zeitlich veränderlicher Luftdruck vor dem Mikrophon erzeugt, und die Systemausgabe Y wird als zeitlich veränderlicher Luftdruck vor dem Lautsprecher festgestellt.

Im Falle diskreter Systeme gerät man bei der Frage, welche Erscheinungen man denn als individuelle Einflußnahmen bzw. als individuelle Systemreaktionen betrachten solle, normalerweise nicht in einen Ermessenskonflikt. So hat man beispielsweise im Falle eines Fahrkarten verkaufenden Apparates gar keine andere Wahl, als das jeweilige Einwerfen einer Münze oder das Drücken einer Taste als Eingabeindividuen zu betrachten. Im Falle der Kontinuumsysteme dagegen liefert die Anschauung keine eindeutige Antwort auf die Frage, was denn als eine bestimmte Einflußnahme zu betrachten sei. Im Falle des Verstärkersystems gibt es vom Zeitpunkt t_{ON} der Inbetriebnahme des Systems bis zum Zeitpunkt t_{OFF} der Abschaltung des Systems einen kontinuierlichen Luftdruckverlauf "X(t)" [1] vor dem Mikrophon, und im gleichen Zeitintervall gibt es einen Luftdruckverlauf "Y(t)" vor dem Lautsprecher. Man könnte nun den gesamten Luftdruckverlauf "X(t)" im Intervall zwischen t_{ON} und t_{OFF} als eine einzige Einflußnahme auf das System betrachten, zu der als Reaktion des Systems der Verlauf "Y(t)" im gleichen Intervall gehört.

---

1) Um einen Funktionswert zu einem bestimmten Zeitpunkt vom Funktionsverlauf über der Zeitachse unterscheiden zu können, wird folgende Schreibweise benutzt:

X(t) symbolisiert der Wert der Eingabe X zum Zeitpunkt t.

"X(t)" symbolisiert den Verlauf der Eingabe über der Zeitachse.

Man kann aber auch, statt den Verlauf "X(t)" als eine einzige Einflußnahme zu betrachten, diesen Verlauf als eine kontinuierliche Folge unendlich vieler Einflußnahmen X(t) ansehen. Man darf sich bei dieser Betrachtungsweise allerdings nicht daran stören, daß durch einen Luftdruckwert X(t) zu einem einzigen Zeitpunkt nicht wirklich Einfluß auf das System genommen werden kann, denn realistischerweise gehört zu einer Einflußnahme der Fluß von Materie oder Energie in das System hinein, und dies erfordert ein Zeitintervall. In der Systemtheorie hat es sich aber durchaus als zweckmäßig erwiesen, im Falle von Kontinuumsystemen den einzelnen Meßwert X(t) als Eingabe in das System zu behandeln.

Wenn nun also im folgenden von einer Einflußnahme oder einer Eingabe X gesprochen wird, ist damit im Falle eines Kontinuumsystems ein Wert X(t) zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt gemeint oder ein diskretes Eingabeindividuum im Falle eines diskreten Systems. Entsprechendes gilt für die Reaktionen bzw. Ausgaben Y.

Ein besonders einfacher Zusammenhang zwischen Input und Output liegt vor, wenn dieser Zusammenhang als eine Funktion dargestellt werden kann, bei der der Input X das Argument und der Output Y das Ergebnis sind:

$$Y = f(X)$$

Jedes System mit einem derartigen funktionalen Verhalten wird als *Zuordner* bezeichnet. Man denke beispielsweise an den Zusammenhang zwischen der Stellung eines Lichtschalters und dem Leuchten einer Glühlampe.

Nicht alle Systeme sind Zuordner, d.h. nicht in jedem Fall kann man aus der Kenntnis der Einflußnahme eindeutig auf die Reaktion schließen. Man denke beispielsweise an das Telefonsystem, bei dem die Einflußnahme dadurch geschieht, daß man eine bestimmte Nummer wählt, und wo man aus der Kenntnis der gewählten Nummer nicht eindeutig auf die Reaktion schließen kann. Wenn die gewählte Nummer einem Ehepaar gehört, könnte die Frau oder der Mann den Anruf beantworten; es könnte aber auch sein, daß niemand zuhause ist und daß deshalb überhaupt nicht abgenommen wird. Der Systemtheoretiker sieht sich also vor das Problem gestellt, Systeme beschreiben zu müssen, bei denen der Zusammenhang zwischen der Einflußnahme X und der Reaktion Y nicht durch eine Zuordnungsfunktion erfaßt werden kann. Es liegt nahe, in diesen Fällen anstelle des nichtexistierenden funktionalen Zusammenhangs Y=f(X) nach einem anderen funktionalen Zusammenhang

$$Y = g(X, \text{Kontext})$$

zu suchen, worin *Kontext* all das umfaßt, was man zusätzlich zur Einflußnahme X noch wissen müßte, um eindeutig auf die Reaktion Y schließen zu können. In diesem Gesamtkontext können drei grundsätzlich unterscheidbare Arten von Kontextanteilen enthalten sein:

(1) ein Kontextanteil, der grundsätzlich nicht in Erfahrung zu bringen ist;

(2) ein Kontextanteil, der durch Betrachtung der Umgebung in Erfahrung zu bringen ist;

(3) ein Kontextanteil, der durch Hineinschauen in das System in Erfahrung zu bringen ist.

Diese drei Arten von Kontext sollen nun durch Beispiele veranschaulicht werden.

Im ersten Fall gibt es keine Möglichkeit, sich das Wissen zu besorgen, welches man bräuchte, um eindeutig auf die Systemreaktion schließen zu können. Das Verhalten solcher Systeme kann man nicht beschreiben, ohne dem Zufall einen gewissen Raum zu lassen. Man denke beispielsweise an ein Roulette–System in einer Spielbank, bei dem sich das Nummernrad und die Kugel relativ zueinander be-

wegen können und wo die Einflußnahme des Croupiers darin besteht, das Rad in Drehung zu versetzen und die Kugel in entgegengesetzter Richtung mit Schwung in die Umlaufbahn des Radkessels zu werfen. In welches Nummernfach die Kugel schließlich fallen wird, läßt sich nicht vorhersagen, d.h. ein Kontextwissen, aus dem man eine solche Vorhersage ableiten könnte, existiert nicht. Solche Systeme werden als *indeterministische Systeme* bezeichnet.

Systeme werden als *deterministisch* bezeichnet, wenn zur Vorhersage der Reaktion Y auf eine Einflußnahme X entweder gar kein Kontextwissen erforderlich ist oder das erforderliche Kontextwissen grundsätzlich in Erfahrung gebracht werden kann.

Im Falle des *externen Kontextes* hat man die Vorstellung, daß es zwischen dem System und seiner Umgebung nicht nur die eine Schnittstelle gibt, die zur Einflußnahme X benutzt wird, sondern daß es daneben noch mindestens eine weitere Schnittstelle gibt, so daß neben der Einflußnahme X gleichzeitig noch andere Einflußnahmen der Umgebung auf das System möglich sind. Man denke an einen Ball, auf dessen Flugverhalten durch Krafteinwirkung Einfluß genommen wird. Die Einflußnahme X könnte in diesem Fall darin bestehen, daß ein Sportler diesen Ball mit einer bestimmten Geschwindigkeit in eine bestimmte Richtung wirft, und eine weitere Einflußnahme könnte darin bestehen, daß der Wind die Flugbahn beeinflußt. Wenn man sowohl die Einflußnahme X durch den Werfer als auch den externen Kontext, also die Einflußnahme durch den Wind kennt, kann man die Flugbahn vorhersagen, aus der Kenntnis von X alleine aber nicht.

Der Kontextanteil, den man durch Hineinschauen in das System in Erfahrung bringen kann, wird als *Zustand* des Systems bezeichnet.

In der weiteren Betrachtung wird angenommen, daß neben dem Zustand keine anderen Kontextanteile berücksichtigt werden müssen. In diesem Falle reicht die Kenntnis des aktuellen Systemzustands Z und der Einflußnahme X aus, die Reaktion Y vorherzusagen. Für den Fall der kontinuierlichen Systeme kann man formal schreiben

$$Y(t) = \omega [Z(t), X(t)]$$

Dabei bezeichnet Y nur die an der Beobachtungsschnittstelle zwischen System und Umgebung feststellbare Systemreaktion. Die Einflußnahme X kann aber selbstverständlich auch im Innern des Systems Änderungen bewirken, die an der Schnittstelle zwischen System und Umgebung nicht beobachtbar sind. Solche Veränderungen im Innern des Systems können Kontextänderungen, d.h. Zustandsänderungen sein, wodurch das System bezüglich der folgenden Einflußnahmen X ein anderes Reaktionsverhalten zeigt als vorher.

Als Beispiel sei ein Apparat betrachtet, bei dem man in Flaschen gefülltes Mineralwasser kaufen kann. Es sei der Einfachheit halber angenommen, daß dieser Apparat nur Münzen eines einzigen Wertes annimmt und daß der Preis einer Flasche als dreifacher Münzwert festgelegt sei. Dann wird die Reaktion des Apparates auf den Einwurf einer Münze nicht immer die gleiche sein: Die Reaktion auf den Einwurf der ersten oder der zweiten Münze wird sich an der Schnittstelle zwischen System und Umgebung darin äußern, daß nichts geschieht. Als Reaktion auf den Einwurf der dritten Münze aber wird eine Flasche Mineralwasser in das Ausgabefach poltern. Jeder Münzeinwurf muß in diesem Beispiel den Systemzustand ändern, denn der Apparat muß ja jeweils wissen, welcher Geldbetrag bisher anbezahlt wurde.

Der Unterschied zwischen einem späteren Zustand $Z(t+\Delta t)$ und einem früheren Zustand $Z(t)$ muß sich aus den Einflußnahmen ergeben, denen das System in der Zwischenzeit ausgesetzt war. Für den Fall der kontinuierlichen Systeme kann man formal schreiben

$$Z(t+\Delta t) = \delta\ [\ Z(t),\ \text{"}X(\tau)\text{" im Intervall}\quad t \leq \tau < t+\Delta t\ ]$$

Mit der Zustandsübergangsfunktion δ kann man die Vorstellung der Integralbildung verbinden, denn diese Funktion hat im Argument einen Verlauf und liefert als Ergebnis einen Wert – so wie beim Integrieren ein Verlauf vorgegeben ist, zu dem die Fläche als Wert geliefert wird. Deshalb darf man auch sagen, daß in einem Zustand ein Wissen über Erscheinungen aus der Vergangenheit konzentriert ist.

Im Falle diskreter Systeme hat es selbstverständlich keinen Sinn, mit der Variablen t der kontinuierlichen Zeit zu operieren, denn im Falle diskreter Systeme sind die Eingaben und die Ausgaben ja Individuen, die durch Abstraktion bestimmter Erscheinungen gewonnen werden. So ist beispielsweise der Einwurf einer Münze eine Erscheinung, die eine gewisse Zeit dauert. Für die Feststellung, daß ein solches Münz–Einwurfsereignis aufgetreten sei, ist es aber völlig unerheblich, wie lange der Einwurfsprozeß tatsächlich gedauert hat. Die tatsächliche Zeitdauer würde nur dann relevant werden, wenn es möglich wäre, daß sich mehrere diskrete Eingabe– oder Ausgabeerscheinungen zeitlich überlappen. Das ist nur bei Systemen möglich, die mehr als einen Eingabekanal oder mehr als einen Ausgabekanal haben. Man stelle sich beispielsweise vor, ein Apparat zum Verkaufen bestimmter Waren habe mehr als einen Münz–Einwurfschlitz. In diesem Falle könnten zwei Personen unabhängig voneinander Münzen einwerfen, und in diesem Fall wird es für das Verhalten des Apparates sicherlich relevant sein, wie die einzelnen Münz–Einwurfserscheinungen zeitlich zueinander liegen. Man spricht in diesem Fall von *nebenläufigen Erscheinungen* und meint damit ihre kausale Unabhängigkeit. Der Begriff der Nebenläufigkeit ist nur in der Welt der diskreten Systeme definiert. Im Falle der Kontinuumsysteme, bei denen ja die Eingabe X, die Ausgabe Y und der Zustand Z zu jedem Zeitpunkt t des Zeitkontinuums betrachtet werden, gibt es keine Grundlage zur Einführung eines Nebenläufigkeitsbegriffs.

Formeln zur Beschreibung des Verhaltens diskreter Systeme, die strukturell genauso aufgebaut sind wie die Formeln zur Beschreibung des Verhaltens von Kontinuumsystemen, kann es nur für den Fall der *sequentiellen Systeme* geben, bei denen definitionsgemäß nebenläufige Erscheinungen ausgeschlossen sind. Diese Formeln lauten:

$$Y(n) = \omega\ [\ Z(n),\ X(n)\ ]$$

$$Z(n+\Delta n) = \delta\ [\ Z(n),\ \text{"}X(j)\text{" im Intervall}\quad n \leq j < n+\Delta n\ ]$$

Diese Formeln unterscheiden sich nur in einem Punkt von den Formeln für Kontinuumsysteme: Anstelle der Variablen t bzw. τ für die kontinuierliche Zeit stehen die Variablen n bzw. j, die als Index zur Zählung der aufeinanderfolgenden Eingabe–, Ausgabe– bzw. Zustandsindividuen zu deuten sind.

Der diskrete Verlauf "X(j)" im Intervall $n \leq j < n+\Delta n$ ist eine endliche Folge von Eingabeindividuen und kann explizit dargestellt werden:

$$Z(n+\Delta n) = \delta\ [\ Z(n),\ (\ X(n), X(n+1), X(n+2),\ \ldots\ X(n+\Delta n-2), X(n+\Delta n-1)\ )\ ]$$

Während man im kontinuierlichen Falle die Intervallänge Δt als beliebig wählbare Zeitdauer hinnehmen muß, kann man im diskreten Fall die Folgenlänge Δn auf eins beschränken; dann erhält man die folgenden Formeln:

$$Y(n) = \omega [Z(n), X(n)]$$

$$Z(n+1) = \delta [Z(n), (X(n))]$$

Man erkennt hier noch, daß es sich bei dem Auftreten von X(n) im Argument der Ausgabefunktion ω grundsätzlich um einen einzigen Wert handelt, während es sich beim Auftreten von X(n) im Argument der Zustandsübergangsfunktion δ nur deshalb um ein einziges Eingabeelement handelt, weil die dort stehende Folge auf die Länge Eins beschränkt wurde. Üblicherweise werden die beiden Formeln aber derart geschrieben, daß man diesen Unterschied nicht mehr erkennt:

$$Y(n) = \omega [Z(n), X(n)]$$

$$Z(n+1) = \delta [Z(n), X(n)]$$

Diese beiden Formeln bilden das sogenannte *Automatenmodell von Mealy*, das in meinem Aufsatz "Die Modelle von Moore und Mealy – Klärung einer begrifflichen Konfusion" ausführlich behandelt wird.

Man sollte auf keinen Fall dem Trugschluß verfallen, daß die Formeln für das sequentielle System genauso leicht oder gar leichter interpretierbar seien als die Formeln für das kontinuierliche System. Im Falle des kontinuierlichen Systems fallen alle drei Variablen X, Y und Z in die gleiche Kategorie, nämlich in die Kategorie der Meßwerte, und deshalb kann man sich die Verläufe "X(t)", "Y(t)" und "Z(t)" in einheitlicher Weise als Kurven über der Zeitachse vorstellen. Im Gegensatz dazu fallen die Variablen X, Y und Z des diskreten Systems schon bei der einfachsten Interpretation nicht in die gleiche Kategorie: X und Y sind im einfachsten Falle als Variable für Ereignisse und Z ist als Variable für eine Ruhesituation zu interpretieren. Im Zustand Z(n) verweilt das System solange, bis es durch eine Einflußnahme in Form eines Ereignisses X(n) aus seiner Ruhe aufgescheucht wird. Es produziert dann das Ereignis Y(n) und befindet sich anschließend wieder in Ruhe, was wir als den neuen Systemzustand Z(n+1) bezeichnen.

Auf die verschiedenen Möglichkeiten der Deutung der Formeln des sequentiellen Systems bin ich in meinem bereits erwähnten Aufsatz "Die Modelle von Moore und Mealy – Klärung einer begrifflichen Konfusion" näher eingegangen. Insbesondere wenn man diese Formeln zur Beschreibung von Schaltwerken verwendet, sind die Beziehungen zwischen den formalen Variablen X, Y und Z einerseits und den beim Betrieb eines Schaltwerks beobachtbaren Erscheinungen andererseits keineswegs trivial.

Aufgrund der einheitlichen Kategorie der drei Variablen X, Y und Z im Falle des Kontinuumsystems gibt es für alle drei Variable in gleicher Weise auch die Möglichkeit, daß es sich um Vektorvariable handeln kann. Man muß ja nicht die Eingabe auf einen einzigen Meßwert beschränken, sondern kann als Eingabe eine endliche Menge von Meßwerten betrachten. Deshalb kann man allgemein schreiben

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ ... \ x_k(t))$$

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \ ... \ y_l(t))$$

$$Z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), \ ... \ z_m(t))$$

Im Falle des diskreten Systems ist die Möglichkeit der Vektorisierung nicht für alle drei Variable X, Y und Z in gleicher Weise gegeben. Die Vektorisierung von Y und Z ist unproblematisch, aber die Vektorisierung von X bringt Probleme mit sich.

Da der Zustand Z ein statischer Sachverhalt ist, kann sich dieser selbstverständlich aus einer endlichen Menge kleinerer Sachverhalte zusammensetzen. Auch darf ein Ausgabeindividuum Y derart zerlegt werden, daß auf verschiedenen Ausgabekanälen jeweils ein kleineres Individuum auftritt.

Eine Zerlegung eines Eingabeindividuums X in einzelne kleinere Individuen, die auf getrennten Kanälen auftreten, kann jedoch nur unter der Voraussetzung zugelassen werden, daß dabei kein Nebenläufigkeitsproblem auftritt, denn sonst wäre das System gar kein sequentielles System mehr, und die angegebenen Formeln zu seiner Beschreibung wären nicht mehr angemessen. Wenn es mehrere Eingabekanäle gibt, dann gibt es nur zwei Möglichkeiten zum Ausschluß von Nebenläufigkeit.

Die eine Möglichkeit besteht darin, daß sich die Umgebung verpflichtet, für jede Eingabe jeweils einen der Eingabekanäle auszuwählen, über den das aktuelle Eingabeindividuum geschickt wird, und gleichzeitig die restlichen Eingabekanäle nicht zu benutzen. In diesem Fall liegt gar keine echte Vektorisierung der Eingabe vor.

Die andere Möglichkeit besteht darin, daß von den Eingabekanälen ein ganz bestimmter ein Anstoßkanal ist und alle übrigen nur als Abtastkanäle verwendet werden. Nur über einen Anstoßkanal kann ein System zu einer Reaktion veranlaßt werden; der Anstoß muß als Ereignis auf dem Anstoßkanal beobachtbar sein. Man denke beispielsweise an den Einwurf einer Münze oder an das Drücken einer Taste. Über einen Abtastkanal dagegen bietet die Umgebung dem System Information an, die das System nicht notwendigerweise zur Kenntnis nehmen muß. Wenn das System über den Anstoßkanal zu einer Reaktion aufgefordert wird, hat es die Möglichkeit, bei seiner Reaktion die auf den Abtastkanälen angebotene Information zu berücksichtigen. Man denke an einen Menschen, der durch einen Tritt ans Schienbein zu einer Reaktion aufgefordert wird und der bei dieser Reaktion das berücksichtigen kann, was er zum Zeitpunkt des Trittes durch Umherschauen sieht. Die sogenannten getakteten Schaltwerke sind typische Vertreter solcher Systeme, bei denen es mehrere Eingangskanäle gibt, von denen aber nur einer ein Anstoßkanal ist.