

# Spaltströmung mit Wärmeübertragung in Vakuumpumpen

vom Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik

der Universität Kaiserslautern

zur Verleihung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

(Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

D386

von

Dipl.-Ing. Roland Müller

aus Siegburg

2013

Tag der mündlichen Prüfung:	25.9.2013
Dekan:	Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer
Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle
	Prof. Dr.-Ing. Siegfried Ripperger



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner ersten Berufsjahre als Entwicklungsingenieur für Schraubenvakuumpumpen bei der Oerlikon Leybold Vacuum GmbH in Köln.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Martin Böhle für die wissenschaftliche Betreuung und die wertvollen Diskussionen. Ebenso möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Siegfried Ripperger und bei Herrn Prof. Dr. Bernd Sauer für die Übernahme des Koreferats bzw. des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern der Vorvakuumentwicklung der Oerlikon Leybold Vakuum GmbH. Mein tiefer Dank gilt insbesondere Frau Dr. Monika Mattern-Klosson, den Herren Dr. Thomas Dreifert, Dr. Magnus Janicki und Wolfgang Giebmanns für die Ermöglichung und Unterstützung meines Promotionsvorhabens.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für die Ermöglichung und Förderung meines gesamten Werdegangs.

Köln, im Oktober 2013

Roland Müller



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Trocken verdichtende Vakuumpumpen . . . . .	1
1.2 Schraubenspindelvakuumumpen . . . . .	3
1.3 Modellierung von Schraubenvakuumpumpen . . . . .	7
1.4 Einordnung der Gehäusespaltströmung . . . . .	11
1.5 Stand der Wissenschaft . . . . .	18
1.6 Ziele der Arbeit . . . . .	27
1.7 Vorgehensweise . . . . .	29
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>31</b>
2.1 Allgemeine Bilanzgleichung . . . . .	31
2.2 Erhaltungsgleichungen für viskose Strömung . . . . .	32
2.3 Boltzmann Gleichung . . . . .	34
2.4 Dimensionsbetrachtung . . . . .	37
2.5 Turbulenzmodellierung . . . . .	40
<b>3 Numerische Lösungsverfahren</b>	<b>53</b>
3.1 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung . . . . .	53
3.2 Lösungsverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen . . . . .	55
3.3 Lösungsverfahren für die Boltzmann Gleichung . . . . .	56
<b>4 Inkompressible Spaltströmung</b>	<b>59</b>
4.1 Grundlagen . . . . .	59
4.2 Anwendung des Impulssatzes . . . . .	61
4.3 Berechnung des Spaltmassenstromes für inkompressible Strömung . . . . .	66
4.4 Dimensionsanalyse der hydrodynamischen Einlaufströmung . . . . .	66
4.5 Numerische Berechnung der Verlustgrößen . . . . .	69
4.6 Ergebnisse für laminare Strömung . . . . .	74
4.7 Ergebnisse für turbulente Strömung . . . . .	79
4.8 Zuströmverluste . . . . .	84
4.9 Bewertung der Ergebnisse . . . . .	84

---

<b>5</b>	<b>Wärmeübertragung in inkompressibler Strömung</b>	<b>87</b>
5.1	Grundlagen . . . . .	87
5.2	Berechnungsprinzip . . . . .	89
5.3	Dimensionsanalyse der thermischen Einlaufströmung . . . . .	92
5.4	Ergebnisse . . . . .	93
5.5	Thermische Einlaufängen . . . . .	99
5.6	Sonderfall gleicher Wandtemperaturen . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Einfluss der Kompressibilität</b>	<b>101</b>
6.1	Strömungsgrößen . . . . .	101
6.2	Reibung in der kompressiblen Strömung . . . . .	103
6.3	Kompressible Strömung mit Wärmeübertragung . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Modellierung der Gasverdünnung</b>	<b>123</b>
7.1	Bedeutung der Einlauffeffekte für verdünnte Strömungen . . . . .	123
7.2	Modellierung der Reibwerte . . . . .	124
7.3	Modellierung der Wärmeübertragung . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Berechnung von Spaltströmungen</b>	<b>131</b>
8.1	Berechnungskonzept . . . . .	131
8.2	Lösungsverfahren . . . . .	135
8.3	Ergebnisse . . . . .	137
8.4	Sensitivität . . . . .	141
<b>9</b>	<b>Experimentelle Validierung</b>	<b>149</b>
9.1	Versuchsaufbau . . . . .	149
9.2	Aufbau des Konturkörpers . . . . .	151
9.3	Versuchsergebnisse . . . . .	154
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>SST- Transitionsmodell</b>	<b>167</b>
	<b>Literatur</b>	<b>169</b>

# Symbolverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

Zeichen	Bedeutung
A	Fläche, Koeffizient
$A_c$	Wirkungsquerschnitt
b	Spaltbreite
C	Modellkonstante
c	Betrag der molekularen Geschwindigkeit, Konstante
$c_m$	mittlere thermische Molekülgeschwindigkeit
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$c_w$	wahrscheinliche thermische Molekülgeschwindigkeit
D	Destruktionsterm
$D_h$	hydraulischer Durchmesser
E	Produktionsterm
e	spezifische innere Energie
f	Geschwindigkeitsverteilungsfunktion, Reibwert, Drehzahl
$f_\lambda$	Reduktionsfaktor für Wärmeleitfähigkeit
$G_P$	dimensionsloser Volumenstrom
h	Spalthöhe, Störfunktion
I	Impulsfluss
J	allgemeiner Fluss pro Fläche
K	inkrementeller Druckverlust
$K_D$	Impulsflussfaktor
KF	Kontrollfläche
k	turbulente kinetische Energie
$k_B$	Boltzmann Konstante

L	Länge, Spalttiefe
$l_f$	mittlere freie Weglänge
M	Molare Masse, Machzahl
m	Masse
$\dot{m}$	Massenstrom
N	Anzahl Moleküle
n	Teilchendichte
P	Produktionsterm
p	statischer Druck
Pe	Peclet- Zahl
Po	Poiseuille - Zahl
Pr	Prandtl Zahl
$\dot{q}$	Wärmestrom
R	allgemeine Gaskonstante, Recovery-Faktor
Re	Reynolds Zahl
$R_s$	spezifische Gaskonstante $R_s = R/M$
r	Radius
$\vec{r}$	Vektor vom Zellmittelpunkt zur Zelloberfläche
S	allgemeiner Quellterm, Oberfläche, Betrag des Scherungstensors
T	Temperatur
Tu	Turbulenzgrad
t	Zeit
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
V	Volumen
$\vec{V}$	Geschwindigkeitsvektor
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
w	Geschwindigkeitskomponenten in z-Richtung, spezifische Arbeit
x	Koordinate
y	Koordinate, Wandabstandskoordinate
z	Koordinate



## Griechische Buchstaben

### Zeichen Bedeutung

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient
$\alpha^*$	Proportionalitätsfaktor
$\beta$	Modellkonstante
$\Gamma$	allgemeiner Diffusionskoeffizient
$\gamma$	Intermittenz
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta (für $i = j$ gilt $\delta_{ij} = 1$ , sonst $\delta_{ij} = 0$ )
$\delta$	Gasverdünnungsparameter
$\epsilon$	Dissipation der turbulenten kinetischen Energie
$\eta$	dynamische Viskosität
$\theta$	dimensionslose Temperatur, Winkel
$\kappa$	Isentropenexponent
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\nu$	kinematische Viskosität, dimensionsloser Druckgradient
$\xi$	Molekülgeschwindigkeit
$\Pi$	Druckverhältnis $p_{0,2}/p_{0,1}$
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Normalspannung, Akkomodationsfaktor
$\tau$	Schubspannung
$\Phi$	Erhaltungsgröße, Dissipationsfunktion, dimensionsloser Wärmestrom
$\phi$	spezifische Erhaltungsgröße $\phi = \Phi/m$
$\Omega$	Betrag der Wirbelstärke, Volumen
$\omega$	Kollisionfrequenz, turbulente Frequenz, Drehfrequenz
$\omega_k$	Modellkonstante

## Indizes

<b>Zeichen</b>	<b>Bedeutung</b>
0	Ruhegröße
1	Zustand am Spalteintritt
2	Zustand hinter dem Spalt
app	scheinbare Größe ("apparent")
C	Couette-Strömung
ex	Größe am Spaltaustritt
fd	voll entwickelte Größe ("fully developed")
Geh	Gehäuse
hyd	hydrodynamische Größe
i	Kurzform für Koordinatenrichtung, z.B. $i = x, y, z$
in	Größe am Spalteintritt
lam	laminar
m	Mittelwert
P	Poiseuille-Strömung
q	Querschnitt
Rot	Rotor
s	spezifische Größe
t, turb	turbulent
therm	thermische Größe
tot	totale Größe
w	Größe an der Wandoberfläche

# Kurzfassung

Die Auslegung trockenverdichtender Schraubenvakuumpumpen erfordert die genaue Kenntnis der schädlichen Rückströmung über die inneren Maschinenspalte. Eine herausragende Bedeutung kommt aufgrund der großen Querschnittsfläche dem Gehäusespalt zu. Zusätzlich stellt dieser eine relativ große Oberfläche für den Wärmeaustausch mit dem durchströmenden Gas zur Verfügung, was für das thermische Verhalten der Maschine wichtig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird anhand eines vereinfachten Ersatzspaltes ein Modell entwickelt, das die Berechnung des Spaltmassenstroms und der resultierenden Wärmeströme an Rotor- und Gehäuseseite ermöglicht.

Durch die Analyse der in Schraubenvakuumpumpen typischerweise auftretenden Größenverhältnisse und Drücken wird gezeigt, dass die Strömungsform im Spalt von viskoser, schwach turbulenter bis hin zur molekularen Strömung reichen kann. Da der Gehäusespalt von zwei Maschinenteilen gebildet wird, weisen beide Spaltberandungen i.A. deutlich verschiedene Temperaturen auf, was für die Modellierung des Wärmeübergangs berücksichtigt werden muss.

Um das Modell allgemeingültig zu gestalten, wird die Analyse auf der Basis von dimensionslosen Werten für die Wandreibung und die Wärmeströme durchgeführt. Zur Bestimmung werden im Bereich der viskosen Strömung CFD-Methoden eingesetzt, die eine detaillierte Auswertung der Reibwert- und Wärmestromverläufe ermöglichen. Zur Modellierung der turbulenten bzw. transitionellen Strömung kommt in dieser Arbeit das SST-Turbulenzmodell unter Anbindung eines Transitionsmodells zum Einsatz.

Für verdünnte Strömungen sind diese Methoden nicht einsetzbar; es kann jedoch gezeigt werden, dass hier die Einlauf- und Kompressibilitätseffekte nur eine untergeordnete Rolle spielen. Dies erlaubt eine einfache Modellierung durch Anpassung des Reibungsgesetzes und der effektiven Wärmeleitfähigkeit des Gases als Funktion der Gasverdünnung.

Mit den für alle Strömungsbereiche bekannten Reib- und Wärmeübertragungsgesetzen wird ein Berechnungsalgorithmus formuliert, der unter Vorgabe von Gasart, Spaltgeometrie, Druck vor und hinter dem Spalt sowie der Temperaturen eine effektive Berechnung des gesuchten Spaltmassenstroms sowie der Wärmestromverläufe in die Bauteile ermöglicht.

Die Validierung des entwickelten Modells erfolgt anhand von Versuchen mit einem Spaltkonturkörper, der zwischen zwei Rezipienten mit unterschiedlichen Drücken positioniert wird. Die Oberflächen des Konturkörpers sind ungleich temperiert und mit Wärmestromsensoren ausgestattet. Der Abgleich der gemessenen mit den berechneten Werte zeigt für alle Strömungsbereiche gute Übereinstimmung, was die Gültigkeit des vorgestellten Modells belegt.



# Abstract

Precise knowledge of internal clearance flows is crucial for the design of dry screw-type vacuum pumps. The primary clearance is formed by the rotor tip to housing clearance, it offers the largest cross sectional area. Furthermore, it provides large surface area for gas flow heat exchange influencing pump thermal behaviour.

Using simplified clearance geometry this thesis presents a model for calculating the mass flow rate through this clearance and the resulting heat fluxes on both rotor and housing.

Analysis reveals that flow type varies from turbulent to molecular within the clearances of a typical screw pump. As the rotor-housing clearance is formed by two different parts of the pump the wall temperatures of the clearance are unequal and this must be considered in the heat transfer model.

In order to maintain general applicability of the method it is based on dimensionless representations of surface friction and heat fluxes. In the viscous flow regime these are determined with CFD-techniques that allow a detailed evaluation of the friction and heat flux distribution within the clearance. Turbulent and transitional flows are modelled using the SST- model in combination with a correlation-based transition model.

These methods are not valid for rarefied gas flows. However, it can be shown that the entrance and compressibility effects are of minor importance in these flows. Therefore a simple modification of the friction law and effective heat conductivity as a function of the gas rarefaction is sufficient to model rarefied gas flow accurately.

Using the developed friction and heat transfer correlations an algorithm is presented to calculate the mass flow rate and the heat fluxes for a given geometry, gas type, temperatures and up- and downstream pressure.

Experimental validation of the theoretical model is realised by test clearance that is positioned between two recipients with different pressure. The surfaces of the test clearance are set to different temperatures and include heat flux sensors. Comparison of the calculated values for mass flow and heat transfer shows good agreement with the experimental data in all flow regimes.



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Trocken verdichtende Vakuumpumpen

Die Vakuumtechnik ist heute ein wichtiger Bestandteil für viele, unterschiedliche Industrieprozesse. So wird Vakuum in der Metallurgie zur Entgasung von Schmelzen eingesetzt, in der Lebensmittelindustrie für die Gefriertrocknung und Verpackungstechnik, in Beschichtungsanlagen für das Aufdampfen dünner Schichten auf Gläser, PET-Flaschen und Kunststofffolien. Der mit Abstand größte Markt für Vakuumpumpen bildet die Elektronik- und Halbleiterindustrie: hier gibt es eine Fülle unterschiedlicher Prozesse, die Fein- und Hochvakuum benötigen. Als Beispiele seien hier die CD-Metallisierung, das Plasmaätzen und die chemischen Dampfabscheidungsprozesse in der Herstellung von Computerchips und Flachbildschirmen genannt [47]. In jüngerer Vergangenheit sind durch die Fortschritte in der Solartechnik viele neue Beschichtungsprozesse entwickelt worden, von denen eine große Anzahl ebenfalls im Vakuum stattfinden und entsprechende Pumpstände benötigen.

Neben den industriellen Anwendungen findet die Vakuumtechnik weite Verbreitung in der Forschung. Vakuumsysteme werden hier für diverse Analysetechniken wie Massenspektrometer oder Elektronenmikroskope genutzt.

Vakuumpumpen werden allgemein nach ihrem Arbeitsbereich unterschieden: Vorvakuumpumpen erreichen je nach Bauart Drücke bis etwa  $10^{-3}$  mbar, Hochvakuumpumpen können Rezipienten bis  $10^{-12}$  mbar evakuieren. Die meisten dieser Hochvakuumpumpen können jedoch nicht gegen Atmosphärendruck verdichten und benötigen eine Vorvakuumpumpe.

Im Bereich der Vorvakuumpumpen haben sich Verdrängerpumpen etabliert. Die mit Abstand bedeutendste Pumpe dieser Bauart ist die seit etwa 1905 produzierte Drehschieberpumpe. Diese besteht aus einem exzentrisch in einer Bohrung positionierten Rotor, in den zwei oder mehr Schieber eingelassen sind. Diese werden im Betrieb der Pumpe durch die Fliehkraft gegen die Bohrung gedrückt, so dass sich abgeschlossene Kammern bilden, in denen das Gas verdichtet und schließlich gegen den Atmosphärendruck ausgeschoben wird. Um den Verschleiß der Schieber zu minimieren, wird Öl in den Schöpfraum gegeben, das sich mit dem geförderten Gas vermischt und später wieder abgeschieden werden muss. Neben der Schmierung dient das Öl zusätzlich zur Abfuhr der Kompressionswärme aus dem Schöpfraum [90]. Diese Pumpen zeichnen sich durch ihren vergleichsweise einfachen Aufbau aus. Als nachteilig erweist sich jedoch, dass das zu fördernde Gas in Kontakt mit dem Öl kommt. Dies kann bei der Förderung korrosiver Gase schnell altern und muss entsprechend häufig ge-

tauscht und aufwendig entsorgt werden. Weiterhin besteht die Gefahr, dass durch Rückströmung Öl in die Prozesskammer gelangt und dort Schaden anrichten kann. Insbesondere die Prozesse der Halbleiterindustrie sind sehr sensibel gegenüber Verunreinigungen, so dass dort seit Mitte der achtziger Jahre die ersten trocken laufenden Vakuumpumpen eingesetzt werden. Diese weisen einen "trockenen" Schöpfraum auf, der frei von Öl oder anderen Hilfsfluiden ist. Damit ist es zum einen möglich, ein ölfreies Vakuum zu erzeugen [15], zum anderen können auch korrosive Gase und Stäube gefördert werden, ohne dass das Öl kontaminiert wird. Durch den Einsatz dieser Pumpen können wesentlich niedrigere Betriebskosten erreicht werden als mit einer ölgedichteten Pumpe, was den höheren Anschaffungspreis der Trockenläufer schnell amortisiert [19]. Weitere Anwendungsgebiete für Trockenläufer finden sich in der Pharma- und Lebensmittelindustrie, bei denen aufwendige Filteranlagen und lebensmittelverträgliche Öle entfallen können.

Für die Vakuumtechnik werden eine Vielzahl verschiedener Verdichtungsmechanismen für Trockenläufer eingesetzt. Die konstruktiv einfachste Lösung ist die einwellige Scrollpumpe, bei der zwei um  $180^\circ$  versetzte archimedische Spiralen ineinander gestellt werden. Wird eine der beiden Spiralen in orbitierende Bewegungen versetzt, bilden sich zwischen den Spiralen halbmondförmige Kammern aus, die infolge der Bewegung entlang der Spiralwände wandern und so für einen Gastransport sorgen. Bei genügend engen Spalten zwischen den Wänden reicht deren Dichtwirkung aus, so dass die Pumpe ohne zusätzliche Hilfsfluide als trockene Pumpe einsetzbar ist. Obwohl dieses Prinzip auf ein Patent von Leon Creux aus dem Jahre 1905 zurückgeht, wird es aufgrund der hohen Genauigkeitsanforderung an die Bauteile erst ab etwa 1990 als Vakuumpumpe eingesetzt [47]. Diese Pumpen erreichen durch optimierte Gaswege Enddrücke bis  $10^{-3}$  mbar und werden im Bereich kleiner Saugvermögen bis etwa  $30 \text{ m}^3/\text{h}$  eingesetzt.

Unter den zweiwelligen Verdrängern ist die Wälzkolbenpumpe (die auch als Drehkolben- oder Rootspumpe bezeichnet wird) das mit Abstand am weitesten verbreitete Pumpprinzip in der Vakuumtechnik. Sie besteht aus zwei achtförmigen Drehkolben, die berührungsfrei aufeinander abwälzen. Die Rotoren sind dabei über ein Zahnradpaar miteinander synchronisiert. Wie auch die Scrollpumpe ist die Wälzkolbenpumpe spaltgedichtet, was entsprechend enge Spalte (im Bereich einiger  $1/10$  mm) zwischen beiden Verdrängern und zum Gehäuse notwendig macht, um die schädliche Rückströmung auf ein Minimum zu reduzieren. Bauartbedingt kann in Wälzkolbenpumpen jedoch keine innere Verdichtung erreicht werden; der Verdichtungsprozess läuft stets isochor ab. Damit wird eine hohe Leistung benötigt, um das Gas zu verdichten, was neben dem hohen Energieverbrauch auch zu hohen Gas- und Bauteiltemperaturen führt. Aus diesem Grund wird die maximal zulässige Druckdifferenz auf relativ niedrige Werte begrenzt (z.B. 50 mbar), so dass ein Überhitzen der Rotoren und damit ein Anlaufen der Pumpe vermieden wird. Einstufige Wälzkolbenpumpen können somit nicht alleine als Vorvakuumpumpe betrieben werden und finden ihre weite Verbreitung als Saugvermögensverstärker in Kombination mit anderen Vorvakuumpumpen im Bereich von Feinvakuumpumpständen [47].

Bei mehrstufigem Aufbau ist es möglich, eine innere Verdichtung zu realisieren, so dass mehrstufige Rootspumpen auch als Vorvakuumpumpen eingesetzt werden können [24]. Üblicherweise werden dazu die Verdichtungsstufen axial hintereinander auf



der Welle angeordnet und über Umlenkkanäle miteinander verbunden. Mit mehrstufigen Rootspumpen können große innere Verdichtungsverhältnisse und damit eine hohe Energieeffizienz bei niedrigen Ansaugdrücken erzielt werden. Ein prinzipieller Nachteil sind die vergleichsweise hohen Umlenkverluste zwischen den Stufen, die sich vor allem bei höheren Ansaugdrücken bemerkbar machen. Weiterhin erweisen sich diese Kanäle als problematisch bei der Förderung von Stäuben oder Flüssigkeitsanteilen im Gas.

Einen der Rootspumpe ähnlichen Aufbau hat die Klauenpumpe, bei der zwei klauenförmig geformte Rotoren ineinander kämmen. Die Ein- und Ausströmung erfolgt in axialer Richtung über Steuerschlitze. Über die Lage der Steuerschlitze ist dabei die Realisierung einer inneren Verdichtung möglich, was den Einsatzbereich erweitert. Bei mehrstufigen Aufbau können diese als Vorvakuumpumpe eingesetzt werden, wobei üblicherweise drei bis vier Verdichtungsstufen benötigt werden. In einigen Fällen wird die Einlassstufe dabei als Rootspumpe ausgeführt, da die Klauenpumpe aufgrund ihrer Einlassgeometrie ungünstigere Einstromungsverhältnisse aufweist, die das Saugvermögen bei niedrigen Einlassdrücken drosseln [24].

## 1.2 Schraubenspindelvakuumpumpen

Seit etwa 25 Jahren sind neben den oben aufgeführten Pumpmechanismen noch trocken laufende Schraubenvakuumpumpen erhältlich. Diese bestehen aus jeweils einem links- und rechtsgängigen Schraubenrotor mit großem Umschlingungswinkel. Beide Rotoren laufen berührungslos ineinander und bilden durch ihre Profilierung abgeschlossene Volumina aus, die sich aufgrund der Rotordrehung von der Saugseite zur Druckseite der Pumpe bewegen.

Das Funktionsprinzip entspricht somit dem des Schraubenverdichters; jedoch ist aufgrund der hohen zu erzielenden Kompression ein sehr viel größerer Umschlingungswinkel notwendig. Als Profile kommen meist symmetrische Profile zum Einsatz, so dass sich die Arbeitskammern eindeutig zu einem der Rotoren zuordnen lassen. Bei den in Schraubenverdichtern üblichen asymmetrischen Profilen erstreckt sich die Arbeitskammer dagegen auf beide Rotoren [47]. Zur Unterscheidung werden die Pumpen mit eindeutig zu Rotoren zuzuordnenden Arbeitskammern als Schraubenspindelpumpen bezeichnet [50].

Die Schraubenspindeltechnologie weist gegenüber den anderen Trockenläuferprinzipien einige Vorteile auf:

- Die Pumpe besteht aus nur drei Hauptbauteilen (Schraubenrotoren und Gehäuse), was eine kostengünstige Fertigung ermöglicht.
- Es lässt sich durch Wahl eines hohen Umschlingungswinkels eine große Anzahl von Verdichtungsstufen realisieren.
- Gasumleitungskanäle zwischen den Verdichtungsstufen entfallen, es gibt damit keine Verluste bei hohen Volumenströmen.
- Bei entsprechender Auslegung des Schraubenrotors ist eine Verteilung der Wärmebelastung über einen großen Rotorbereich möglich, was die Kühlung vereinfacht.

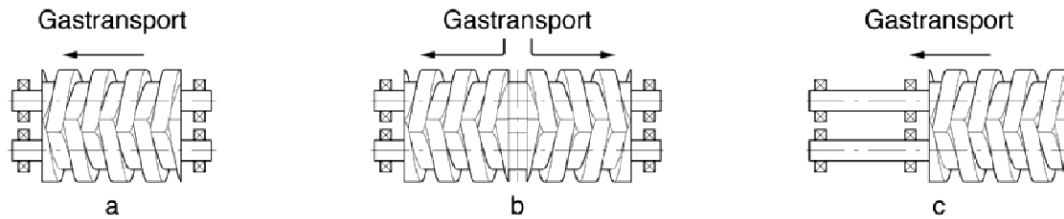


Abb. 1.1: Verschiedene Lageranordnungen für Schraubenvakuumpumpen [26]: a) zweiseitige Lagerung, b) zweiflutige Anordnung, c) fliegende Lagerung

- Aufgrund des Förderprinzips ist eine Schraubenvakuumpumpe in der Lage, auch Stäube oder Flüssigkeitsanteile mitzufördern, was diese für Applikationen wie Kristallziehen oder Sinterprozesse geeignet macht [46].
- Es lässt sich ein niedriger Schallpegel erreichen [26].

Wegen der genannten Vorteile haben sich Schraubenvakuumpumpen in vielen Märkten etabliert und werden inzwischen von allen großen Vakuumpumpenherstellern angeboten. Konstruktiv unterscheiden sich die Pumpen vor allem durch ihr Lagerungskonzept für die Rotoren. Am weitesten verbreitet ist die zweiseitige Lagerung, jedoch werden in Einzelfällen die Rotoren auch fliegend gelagert (siehe Abb. 1.1). Diese Art der Lagerung vermeidet Lagerstellen im Vakuum, so dass sich mit dieser Bauform absolut ölfreies Vakuum erzeugen lässt. Weiterhin kann bei dieser Lagerung das Pumpengehäuse mit geringem Aufwand demontiert werden, was eine einfache Reinigung der Pumpe erlaubt. Als problematisch erweisen sich die Rotorschwingungen an der Saugseite, die zu einem Anstreifen der Rotoren am Gehäuse führen können. Um dies zu vermeiden, müssen die Rotoren sehr steif ausgelegt werden, was die Auslegungsfreiheit der Rotoren stark einschränkt. Ein Lager auf der Saugseite lässt sich auch bei zweiseitiger Lagerung durch einen zweiflutigen Rotor vermeiden, bei dem der Gasstrom im Einlass geteilt wird. Beide Konzepte erfordern einen relativ hohen konstruktiven Aufwand, so dass der Großteil der Schraubenvakuumpumpen einflutig mit beidseitiger Lagerung aufgebaut ist.

In Abb. 1.2 ist eine aufgeschnittene zweiseitig gelagerte Schraubenvakuumpumpe moderner Bauart dargestellt. Die Synchronisation der beiden Rotoren erfolgt über Präzisionszahnräder an der Saugseite, die ölgeschmiert sind. Die Abdichtung des Getrieberaums gegenüber dem Schöpfraum erfolgt hier über ein System aus Kolbenringen und Labyrinthdichtungen, in anderen Ausgestaltungen werden auch berührende Kunststoffdichtungen eingesetzt. Um ein Eindringen von korrosiven Prozessgasen in den Getriebe- bzw. Motorraum zu vermeiden, kann Spülgas an den Lagerstellen eingebracht werden. Der Antrieb erfolgt über einen direkt auf einem der Rotoren sitzenden Motor, der aufgrund der hohen Betriebsdrehzahl mit einem Frequenzumrichter betrieben wird. In älteren Bauarten werden angeflanschte Motoren und Getriebe eingesetzt, die allerdings den Aufbau einer hermetisch dichten Pumpe erschweren. Zur Abfuhr der Kompressionswärme werden die Gehäuse und zum Teil auch die Schraubenrotoren aktiv gekühlt. Am häufigsten werden Wasserkühlungen eingesetzt; reine Luftkühlung ist nur in Ausnahmefällen zu finden. Zur Kühlung der Schraubenrotoren wird neben Wasser auch Öl eingesetzt, das wiederum über einen Wärmetauscher mit Luft oder Wasser zurückgekühlt wird [25]. Aufgrund der großen, schnell

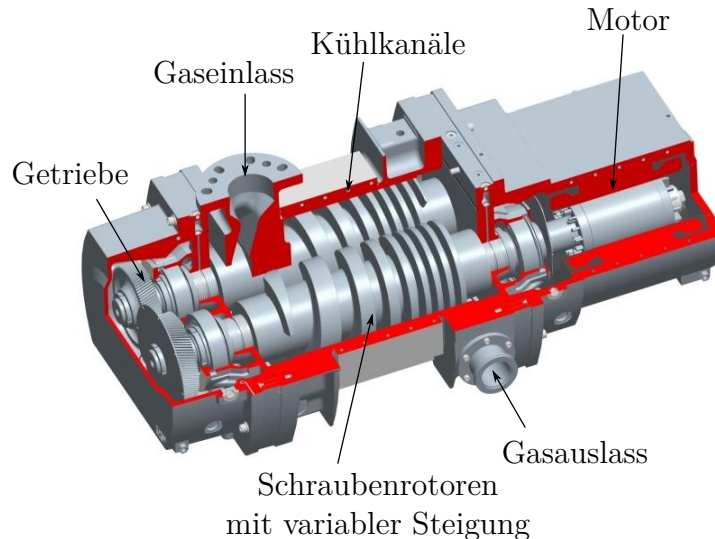


Abb. 1.2: Aufbau einer modernen Schraubenvakuumpumpe.

drehenden Oberfläche des Rotors wird dieser im Betrieb wärmer als das Gehäuse, so dass sich durch Wärmedehnung die Spalte zwischen Rotor und Gehäuse verkleinern. Dies muss bei der Auslegung der Pumpen möglichst genau berücksichtigt werden, um trotz enger Spalte ein Anlaufen des Rotors zu vermeiden.

Die erste Generation der Schraubenspindelpumpen wies aus Fertigungsgründen eine konstante Steigung auf. Eine innere Verdichtung konnte bei diesen Maschinen nur durch eine druckseitige Endplatte mit entsprechender Steueröffnung umgesetzt werden. Durch verbesserte Fertigungsmöglichkeiten wurden diese durch Rotoren mit variabler Steigung abgelöst, was die Effektivität der inneren Verdichtung wesentlich erhöht [26]. Die heutzutage erhältlichen Schraubenvakuumpumpen weisen dabei innere Verdichtungsverhältnisse zwischen 3 bis 8 auf. Mit zunehmendem inneren Verdichtungsverhältnis steigt die Überkompression der Pumpe bei hohen Ansaugdrücken an, was eine hohe Leistungsaufnahme in diesem Bereich bedingt. Dies ist in Abb. 1.3 für die ideal dichte, isotherm arbeitende Pumpe dargestellt. Zum Vergleich ist die ideale Leistungskurve für ein variables inneres Verdichtungsverhältnis eingetragen, das näherungsweise von Drehschieberpumpen erreicht wird [47].

Um trotz hohem inneren Verdichtungsverhältnis keine unnötig großen Antriebsleistungen installieren zu müssen und die Pumpe vor thermischer Überlast zu schützen, werden verschiedene Maßnahmen ergriffen:

- Einbau eines Ventils an einer geeigneten Stelle im Abschnitt der variablen Steigung des Schraubenrotors, das bei Überkompression öffnet und diese damit vermindert. Als problematisch erweist sich diese Lösung bei der Förderung von Partikeln und aggressiver Gase, die zu Undichtigkeiten und Ausfall des Ventils führen können.
- Vergrößerte Spalte an der Saugseite der Pumpe, so dass aufgrund der Spaltflüsse die Größe der Überkompression reduziert wird. Dies führt zu einer Verschlechterung des Saugvermögens bei hohen Ansaugdrücken; das Saugvermögen bei niedrigen Drücken wird jedoch nur geringfügig beeinflusst, da die saugseitigen Spalte durch die vorherrschende Strömungsform verhältnismäßig dicht sind. [55].

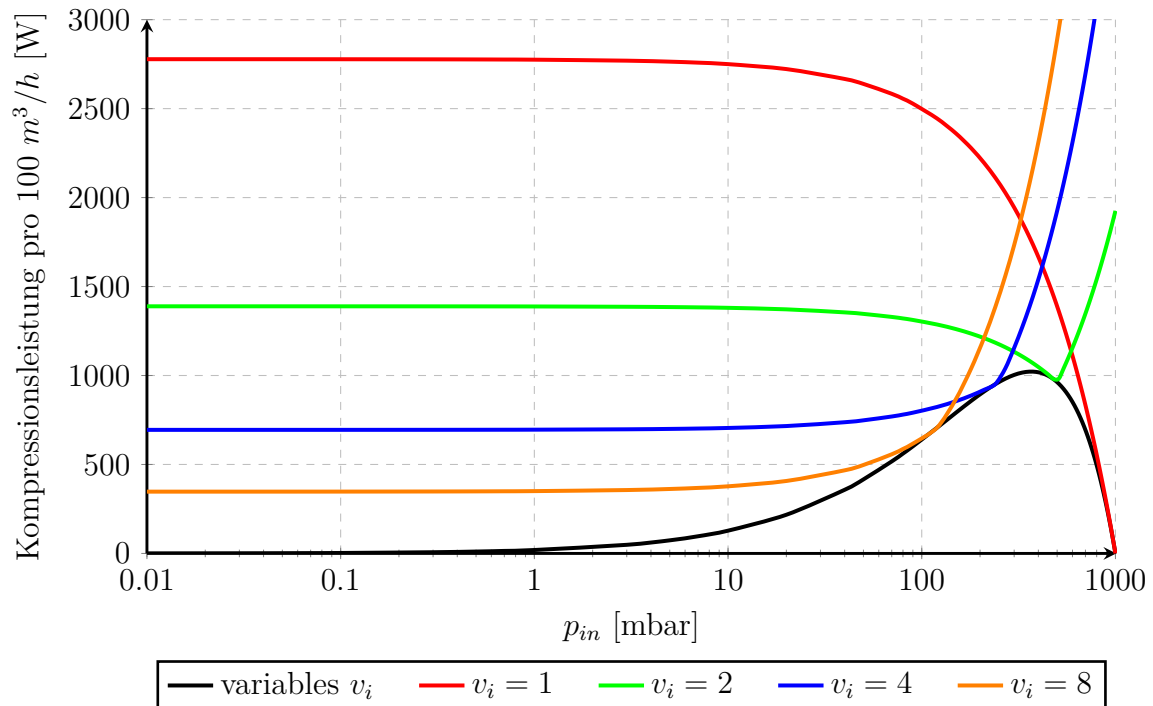


Abb. 1.3: Theoretische spezifische Verdichtungsleistung für eine Verdrängerpumpe mit  $100 \text{ m}^3/\text{h}$  Saugvermögen und unterschiedlichen inneren Volumenverhältnissen  $v_i = \dot{V}_{\text{ein}}/\dot{V}_{\text{aus}}$ . Die Berechnung erfolgt idealisiert für isotherme Prozessführung und ohne Berücksichtigung innerer Leckagen [47].

- Reduzierung der Drehzahl der Pumpe, um eine thermische Überlast zu verhindern. Diese Maßnahme erfordert einen drehzahlvarianten Antrieb und reduziert das Saugvermögen der Pumpe bei hohen Ansaugdrücken. Trotz der Nachteile wird dieses Konzept in der Praxis angewendet, wenn die ersten beiden Maßnahmen nicht möglich bzw. nicht ausreichend sind.

Wie bei den anderen Trockenläufern erfolgt die innere Abdichtung in Schraubepumpen über Spalte, die das Saugvermögen und auch das thermische Verhalten der Pumpe bestimmen. Die schädlichen Spaltströme nehmen mit abnehmendem Druck ab, die Spalte werden verhältnismäßig dichter. Dies hat einen deutlichen Einfluss auf das Saugvermögen von Schraubenvakuumpumpen, die typischerweise zwischen etwa 1 und 10 mbar wegen dieses Effektes ihr höchstes Saugvermögen erreichen (siehe Abb. 1.4). Bei höheren Ansaugdrücken nimmt aufgrund der geänderten Druckverteilung in der Pumpe die Rückströmung zu, was das Saugvermögen verringert. Bei Eintrittsdrücken nahe dem Atmosphärendruck tritt bei Maschinen mit innerer Verdichtung zudem Überkompression auf, die die Rückströmung zusätzlich vergrößert und somit weiter das Saugvermögen reduziert.

Da die Spaltmassenströme sehr stark von den Spalthöhen in der Pumpe abhängen, müssen die Bauteile eng toleriert werden. Insbesondere der Enddruck ist ein Maß für die innere Dichtigkeit und reagiert dementsprechend sensibel auf Spalthöhenänderungen. So kann die Serienstreuung des Enddrucks innerhalb eines Fertigungsloses trotz moderner Fertigungstechnologien mehr als eine Dekade betragen [25]. Auch das maximale Saugvermögen variiert um bis zu  $\pm 10\%$ , was bei der Auslegung von Pumpsystemen berücksichtigt werden muss.

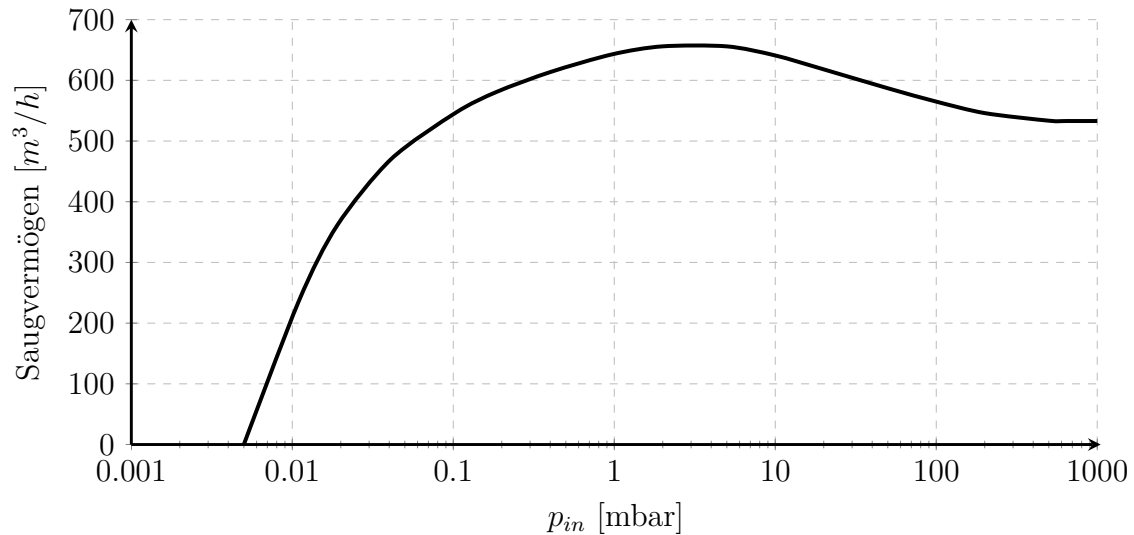


Abb. 1.4: Saugvermögenskurve einer Schraubenvakuumpumpe mit hoher innerer Verdichtung [64].

Neben dem Saugvermögen wird auch das thermische Verhalten der Pumpen entscheidend durch die Spaltmassenströme und das innere Verdichtungsverhältnis bestimmt. Ein hohes inneres Verdichtungsverhältnis sorgt bei niedrigen Ansaugdrücken für eine geringe Leistungsaufnahme (siehe Abb. 1.3), wobei die Verdichtung hauptsächlich in den druckseitigen Kammern stattfindet. Das führt zu einer hohen Wärmebelastung und damit zu hohen Bauteiltemperaturen an der Druckseite. Durch gezielte Vergrößerung der Spalte und folglich der Rückströmung kann die Wärmebelastung über einen größeren Bereich verteilt werden, wobei gleichzeitig der Umschlingungswinkel vergrößert werden muss, um die Dichtigkeit der Pumpe zu erhalten.

### 1.3 Modellierung von Schraubenvakuumpumpen

Zur Analyse von Schraubepumpen ist das Strömungsfeld im Inneren von Interesse, aus dem alle relevanten integralen Größen wie Saugvermögen und Leistungsaufnahme bestimmt werden können. Als besondere Schwierigkeit in der Berechnung der Innenströmung von Vakuumpumpen treten je nach Ansaugdruck Gasverdünnungseffekte auf, die wesentlich das Maschinenverhalten beeinflussen. Dieser Effekt wird durch die Knudsen-Zahl beschrieben, die das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Moleküle zu einer charakteristischen Abmessung des Strömungsfeldes (z.B. des Durchmesser bei einer Rohrgeometrie) angibt:

$$Kn = \frac{l_f}{l_{char}} \quad (1.1)$$

Die mittlere freie Weglänge  $l_f$  ist eine statistische Größe und als solche schwierig messbar. Nach den Gesetzen der kinetischen Gastheorie ist es jedoch möglich, über die Viskosität des Gases die mittlere freie Weglänge zu errechnen, die von der Dichte

und der Temperatur abhängt [47]:

$$l_f = \frac{2 \cdot \eta}{\rho \cdot c_m} \quad (1.2)$$

In Gasen sind Druck und Dichte miteinander gekoppelt; für Gase bei niedrigen Drücken wird der Zusammenhang mit sehr guter Genauigkeit über die ideale Gasgleichung beschrieben:

$$p = \rho \cdot R_s \cdot T \quad (1.3)$$

Eine viskose Strömung ist durch eine hohe Moleküldichte und damit durch eine kurze mittlere freie Weglänge gekennzeichnet. Stöße unter den Molekülen treten sehr viel häufiger auf als Stöße mit den Wänden. Bei niedrigem Druck wird dagegen die mittlere freie Weglänge groß im Vergleich zu den Abmessungen des Strömungsfeldes, so dass Stöße unter den Molekülen selten auftreten und das Strömungsbild durch die Stöße der Moleküle mit den Wänden dominiert wird. Diese Form der Strömung wird molekulare Strömung genannt und ist durch große Knudsen-Zahlen gekennzeichnet. Eine detailliertere Einteilung der Strömungsverhältnisse anhand der Knudsenzahl findet sich in [33]:

Kontinuum	$0 < \text{Kn} < 0.01$
Gleitströmung	$0.01 < \text{Kn} < 0.1$
Übergangströmung	$0.1 < \text{Kn} < 10$
freie Molekularströmung	$10 < \text{Kn}$

Neben den Grenzfällen der Kontinuums- und Molekularströmung existiert noch die Gleit- und Übergangsströmung. In der Gleitströmung sind Stöße unter den Molekülen noch zahlreich, allerdings wird die aus der Kontinuumsmechanik bekannte Haftbedingung an den Wänden nicht eingehalten. Im Übergangsbereich (auch Knudsen-Strömung genannt) sind Stöße unter den Molekülen ähnlich häufig wie Stöße der Moleküle mit den Wänden. Die Berechnung der Kontinuums- und Gleitströmung kann mit geeigneten Randbedingungen durch Lösung der Navier-Stokes Gleichungen erfolgen. Für die Übergangs- und Molekularströmung gelten diese jedoch nicht, das Strömungsfeld in diesen Bereichen kann entweder über die Boltzmann-Gleichung oder durch statistische Verfahren bestimmt werden [17].

Je nach Eintrittsdruck treten in Schraubenvakuumpumpen alle Strömungsbereiche auf, was den Einsatz eines geschlossenen Berechnungsverfahrens erheblich erschwert. Betrachtet man den Kontinuumsbereich alleine, so können prinzipiell die etablierten numerischen Methoden zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen eingesetzt werden. Diese erfordern eine Vernetzung des Strömungsraumes, die aufgrund der komplexen, sich zeitlich ändernden Geometrie äußerst anspruchsvoll ist. Dennoch sind für Schraubenkompressoren bereits erfolgreiche Simulationen auf diese Weise durchgeführt worden [54].

Ein einfacherer Weg zur Modellierung von Schraubepumpen bietet das sog. "Kammermodell". Dabei wird die Schraubepumpe zu einem Netzwerk aus Arbeitskammern und verbindenden Spalten abstrahiert (siehe Abb. 1.5). Die Strömung in den

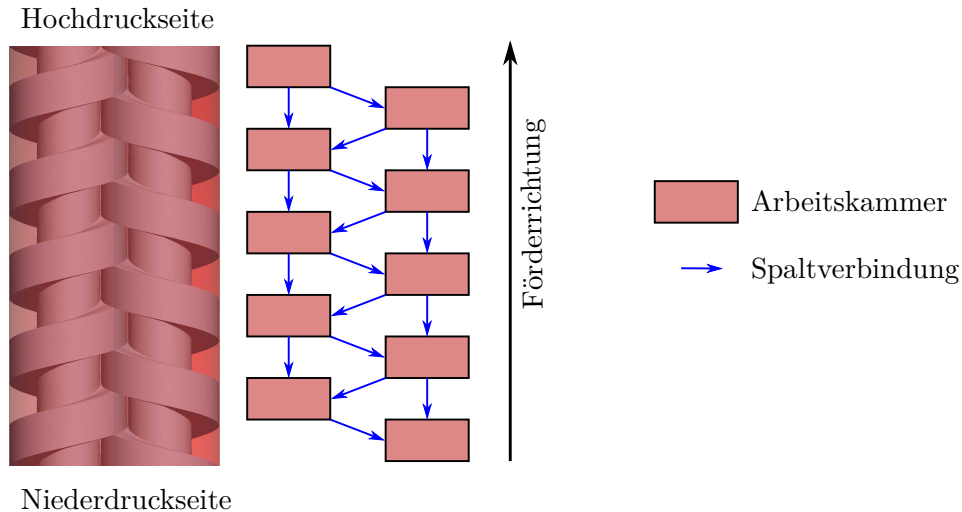


Abb. 1.5: Prinzip der Kammermodellsimulation. Die Schraubenspindel wird dabei durch ein Netzwerk aus Kammern und Spaltverbindungen abgebildet.

Arbeitskammern wird nicht aufgelöst, sie werden als ein Kontrollvolumen mit gemittelten Werten für Druck, Temperatur und Dichte abgebildet. Für die Kammern werden drehwinkelabhängig die Massen- und Energieerhaltungsgleichungen gelöst. Dazu müssen geeignete Modelle für die Spaltströmung und die Wärmeübergänge in den Spalten und Arbeitskammern zur Verfügung gestellt werden. Als Ergebnis erhält man den Druck- und Temperaturverlauf in den Kammern sowie das Saugvermögen und den Leistungsbedarf der Maschine. Ein Beispiel für ein solches Kammermodell ist das von der Universität Dortmund entwickelte Programm “KaSim“, das eine so gestaltete Modellierungsumgebung für beliebige Verdrängerpumpen bereitstellt [43].

Eine herausragende Bedeutung kommt der Spaltströmungsmodellierung zu, da diese das Verhalten der Pumpe entscheidend beeinflusst und dementsprechend genau abgebildet werden muss. Die Anwendung von numerischen Methoden, die auf den Navier-Stokes Gleichungen basieren, kann aufgrund der je nach Betriebspunkt auftretenden Verdünnungseffekte nur eingeschränkt verwendet werden. Ein weitergehender Ansatz für die Modellierung von Maschinenspalten in Vakuumpumpen stammt von Wenderott, der die in Maschinen auftretenden komplexen Spaltgeometrien auf einfache Spaltformen reduziert [92]. Nach Rohe [72] können dabei vier verschiedene Spaltarten für Schraubenspindelpumpen identifiziert werden (siehe Abb. 1.6). Der Radial- und Profileingriffsspalt sowie die Kopfrundungsöffnung beziehen sich auf die Spalte zwischen den Rotoren, der Gehäusespalt hingegen wird vom Zahnkopf und dem Pumpengehäuse gebildet. Da sich der letzte über den gesamten Umfang erstreckt, weist der Gehäusespalt im Allgemeinen die größte Spaltquerschnittsfläche auf und hat daher einen großen Einfluss auf das Verhalten der Pumpe. Das Ersatzmodell für den Gehäusespalt ist ebenfalls in Abb. 1.6 dargestellt. Dieses besteht aus einer ebenen Grundplatte (die das Gehäuse repräsentiert) und dem darüber positionierten Ersatzkonturkörper für den Rotor. Zwischen beiden Körpern bildet sich ein planparalleler Spalt aus, dessen Durchströmverhalten als Modell für die Strömung durch den Gehäusespalt in einer realen Pumpe dient. Für die anderen drei Spaltarten werden je nach Profilgeometrie andere Ersatzmodelle verwendet.

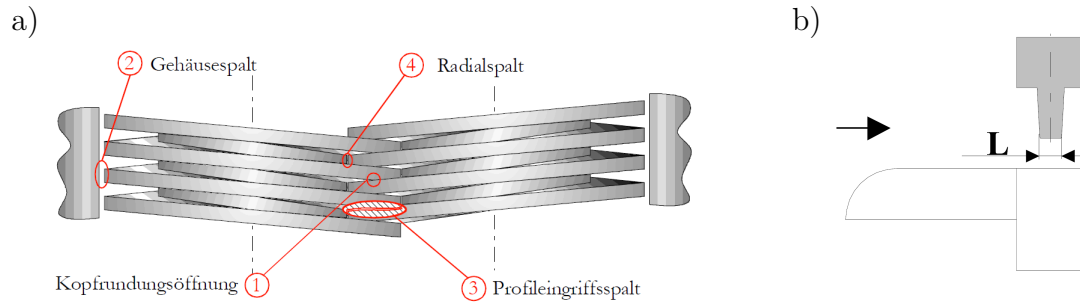


Abb. 1.6: a) Spalte an einer Schraubenspindelpumpe nach [73], b) Ersatzmodell für den Gehäusespalt nach Wenderott [92]. Dieses weist eine Verrundungsradius von 1 mm am Spalteintritt und -austritt des Rotorersatzkörpers auf.

Wenderott [92] bestimmte für diese Ersatzmodelle experimentell Durchflussbeiwerte für alle Strömungsbereiche, so dass eine Datenbasis zur Berechnung der Spaltströme zur Verfügung steht. Neben dem Modell existieren in der Literatur noch weitere Ansätze zur Spaltströmungsberechnung; ein ausführlicher Überblick wird in Abschnitt 1.5 gegeben.

Die Spaltströmungen sind dabei sehr stark von den jeweiligen Spalthöhen abhängig, die sich im Betrieb der Pumpe infolge der Wärmedehnung verändern. Die Wärmedehnung folgt dem Temperaturfeld in der Maschine, das von dem Druckverlauf und damit wieder von den Spalthöhen abhängig ist. Dieser von Wenderott beschriebene Problemkreis kann nur durch gekoppelte Analyse der Thermodynamik und Strukturmechanik aufgelöst werden [51].

Um die Schwierigkeiten einer gekoppelten Simulation zu vermeiden, erfolgten erste Validierungsrechnungen und Messungen von Rohe für eine kalte Maschine, d.h. die Pumpe wurde nur kurzzeitig betrieben, so dass aufgrund der thermischen Trägheit der Bauteile keine nennenswerte Wärmedehnung auftrat. Die Validierung erfolgte gegen den Druckverlauf in der Pumpe und gegen das Saugvermögen. Insgesamt konnte dabei eine akzeptable Übereinstimmung aufgezeigt werden, was die Gültigkeit des Kammermodellansatzes nachweist. Abhängig vom Betriebspunkt ergeben sich jedoch Unterschiede zwischen Messung und Rechnung, die zum Teil auf Unsicherheiten in der Spaltströmungsmodellierung zurückzuführen sind [72].

In [73] behandelt Rohe das gekoppelte Problem der Wechselwirkung zwischen thermischer Spaltveränderung und Druck- und Temperaturverlauf in der Maschine. Dazu verwendet er einfache Wärmeübergangsgesetze (Wärmeübergang an einer ebenen Wand und Wärmeübergang im Rohr bzw. ebenen Spalt für gleiche Wandtemperaturen) zur Bestimmung der Wärmeströme in Bauteilen. Die daraus resultierenden Bauteiltemperaturen und Verformungen werden durch ein FEM-Programm bestimmt und über entsprechende Spalthöhenänderung in die Kammermodellsimulation zurückgeführt. Mit dieser Modellierung konnte eine brauchbare Übereinstimmung der gemessenen und simulierten integralen Wärmeströme in die verschiedenen Bauteile erzielt werden, jedoch treten erhebliche Abweichungen für die Gas- und Bauteiltemperaturen auf.

Die Hauptursache dafür dürfte in der Bestimmung der Wärmeübergänge liegen, die durch die eingesetzten Wärmeübergangsmodelle nicht ausreichend genau abgebildet werden. Als weitere mögliche Ursache kommen die Spaltströmungen selbst in Be-



tracht, deren Modellierung nach Wenderott nur für isotherme Verhältnisse gilt. Zur Verbesserung der Abbildungsgüte der Simulation sind daher genauere Modelle für die Spalt- und Kammerströmung notwendig, die anhand von idealisierten Modellen durch geeignete Rechenverfahren und Experimente ermittelt werden müssen.

Aufgrund der Komplexität der auftretenden Phänomene kann die Erarbeitung der Modelle nur schrittweise erfolgen. Ein bedeutender Einfluss kommt dabei dem Gehäusespalt zu, der zum einen wegen seiner großen Querschnittsfläche einen wesentlichen Anteil an der Rückströmung hat. Zum anderen stellt dieser durch die große Spalttiefe eine große Oberfläche zur Wärmeübertragung zur Verfügung. Dem Gehäusespalt kommt also eine wesentliche Bedeutung in der diabaten Berechnung von Schraubenvakuumpumpen zu, weshalb dessen Modellierung unter Berücksichtigung der relevanten Randbedingungen das wissenschaftliche Ziel der vorliegenden Arbeit darstellt.

## 1.4 Einordnung der Gehäusespaltströmung

Zur Analyse werden die in typischen Schraubenvakuumpumpen auftretenden Spaltströmungen anhand der relevanten strömungsmechanischen Kennzahlen eingeordnet. Ziel ist es, die auftretenden Größenordnungen der Kennzahlen zu bestimmen, um anhand derer eine gezielte Untersuchung vornehmen zu können.

Die Gehäusespalte in gängigen Schraubenvakuumpumpen weisen nach Erfahrung des Autors folgende geometrische Verhältnisse auf:

- Die Spalthöhe variiert je nach Baugröße und Betriebspunkt zwischen etwa  $5/100$  und  $3/10$  mm.
- Die Spalttiefe beträgt im Minimum etwa 3 mm (für eine Maschine mit kleinem Saugvermögen und hoher innerer Verdichtung) und kann Werte bis zu 80 mm annehmen (z.B. im Einlassbereich einer Pumpe mit großem Saugvermögen).
- Der Rotordurchmesser liegt etwa zwischen 40 und 250 mm.

Die Spalte sind also verhältnismäßig tief ( $L/h > 10$ ). Ferner ist die Spaltkrümmung sehr gering ( $h/R_{Rot} < 0.01$ ); der Gehäusespalt kann somit in guter Näherung durch einen ebenen Spalt ersetzt werden. Aufgrund der großen Breite des Spaltes können darüberhinaus die Randeffekte vernachlässigt werden, so dass sich das Problem als zweidimensionale Strömung zwischen zwei Platten darstellt. Die Rotordrehung selbst darf allerdings nicht a priori als vernachlässigbar betrachtet werden, da diese das Geschwindigkeitsfeld beeinflusst. Zusätzlich kann diese Taylorwirbel hervorrufen, was später erläutert wird.

Die Spaltströmung in Schraubenvakuumpumpen unterliegt folgenden strömungsmechanischen Randbedingungen:

- Der niedrigste Druck vor dem Spalt liegt bei etwa  $1 \cdot 10^{-4}$  mbar. Der höchste Druck kann aufgrund möglicher Überkompression wesentlich über dem Atmosphärendruck liegen; zur Leistungsreduzierung wird diese über die im Abschnitt 1.2 erläuterten Maßnahmen begrenzt. Als eine sinnvolle, obere Grenze erscheint ein Druck von etwa 2000 mbar.

- Das Druckverhältnis  $\Pi = p_{0,2}/p_{0,1}$  über dem Spalt kann stark variieren: Bei hohen Ansaugdrücken kann dies nahezu bei  $\Pi = 1$  liegen, im Enddruckbetrieb können jedoch auch Druckverhältnisse von  $\Pi < 0.1$  auftreten.
- Die Rotordrehzahl variiert mit der Maschinengröße. Bei kleinen Schraubepumpen werden Drehzahlen bis etwa 250 Hz realisiert, große Pumpen werden im Allgemeinen mit niedrigeren Drehzahlen betrieben. Als Grenze wird hier eine Drehzahl von 150 Hz bei einem Rotordurchmesser von 250 mm angenommen.
- Je nach Kühlungssystem können Gastemperaturen bis 300°C auftreten; die Bauteiloberflächentemperaturen liegen zwischen 20°C und 200°C. Da das Gehäuse in der Regel effizienter als der Rotor gekühlt wird, erwärmt sich dieser im Betrieb stärker. Die Spaltberandungen des Gehäusespaltes weisen demzufolge deutlich verschiedene Temperaturen auf.
- Das in der Praxis am häufigsten geförderte Gas ist Luft; aufgrund der Vielzahl der Prozesse kann jedoch jedes beliebige andere Gas oder Gasgemisch auftreten.
- Die Bauteile erfordern eine hohe Genauigkeit und werden durch feine Bearbeitungsverfahren hergestellt, so dass die Oberflächen als hydraulisch glatt anzusehen sind.

Mit der Abschätzung der Spalthöhen und Drücke können die Knudsenzahlen mit der Spalthöhe als charakteristische Länge bestimmt werden. Diese liegen im Bereich  $10^{-4} < Kn < 1.5 \cdot 10^4$  (berechnet für Luft bei Raumtemperatur <sup>1</sup>), die Spaltströmung durchläuft, wie erwartet, alle in Abschnitt 1.3 aufgeführten Strömungsformen. Weiterhin ist wegen der kleinen, möglichen Druckverhältnisse die Strömung als kompressibel zu betrachten. Die maximale Strömungsgeschwindigkeit im Spalt kann über die Machzahl abgeschätzt werden, die das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit darstellt:

$$M = \frac{u}{\sqrt{\kappa \cdot R_s \cdot T}} \quad (1.4)$$

Es wird zunächst davon ausgegangen, dass die Strömung nicht in den Überschallbereich wechseln kann, so dass die Verblockung mit  $M = 1$  die höchste zu erwartende Strömungsgeschwindigkeit beschreibt.

Neben der Knudsen- und Machzahl wird das Strömungsfeld noch durch die Reynoldszahl charakterisiert, die das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften angibt:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D_h}{\eta} \quad (1.5)$$

Als Bezugsmaßstab für die Reynoldszahl wird in der Literatur der hydraulische Durchmesser für nicht-kreisförmige Querschnitte herangezogen:

$$D_h = \frac{4 \cdot A}{U} \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>Stoffdaten von Luft bei 20°C:  $R_s = 287 \text{ J}/(\text{KgK})$ ,  $\eta = 20.63 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m s})$ ,  $\kappa = 1.4$

Für den unendlich ausgedehnten ebenen Spalt folgt damit  $D_h = 2 \cdot h$ , der in dieser Arbeit (wenn nicht anders angegeben) stets verwendet wird.

Im Gehäusespalt treten primär zwei Strömungsarten auf: erstens die durch die Druckdifferenz getriebene Spaltdurchströmung (als ‐Poiseuille-Strömung‐ bezeichnet) und zweitens die durch die Rotordrehung erzeugte Couette-Strömung. Für beide Strömungsformen kann auf Basis der oben getroffenen Annahmen die Größenordnung der Re-Zahl abgeschätzt werden. Dazu werden die Stoffdaten von Luft bei Raumtemperatur verwendet, das als ideales Gas angesehen wird. Abb. 1.7 zeigt die maximal zu erwartenden Reynoldszahlen der reinen Couette Strömung in Abhängigkeit vom Druck im Spalt, wofür die maximale Spalthöhe von  $h = 0.3$  mm verwendet wurde. Als Bezugsgeschwindigkeit wird die Rotorkopfgeschwindigkeit ( $u_C = R_{rot} \cdot \omega$ ) eingesetzt, für die hier die eingangs abgeschätzten Maximalwerte verwendet werden ( $D_{Rot} = 250$  mm,  $f = 150$  Hz). Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt nach [66] bei  $Re_{C,krit} = 2600$  für den ebenen Spalt (bezogen auf den hydraulischen Durchmesser). Knapp unterhalb des Atmosphärendrucks kann die Gehäusespaltströmung demnach in den transitionellen Bereich umschlagen, insgesamt dominiert jedoch die laminare Strömung über weite Teile des Arbeitsbereiches von Schraubenvakuumpumpen. Bei kleineren Spalthöhen verringern sich die maximal erreichbaren Reynoldszahlen, so dass hier über einen noch weiteren Bereich laminare Strömung im Spalt vorliegt.

Für die gegebene Spalthöhe ist die Strömung ab einem Druck von etwa 20 mbar als viskos zu betrachten; bei Drücken darunter setzt die Schlupfströmung ein. Gemäß der Knudsenähnlichkeit verschiebt sich diese Grenze mit abnehmender Spalthöhe zu höheren Drücken; bei  $h = 0.1$  mm beginnt die Schlupfströmung demnach schon bei 60 mbar. Die Reynoldszahl der Strömung verringert sich ebenso; die Strömung ist stets laminar, bevor Verdünnungseffekte auftreten.

Für die Abschätzung der maximalen Reynoldszahl der reinen Poiseuille-Strömung wird, wie oben erläutert, davon ausgegangen, dass die Strömung trotz möglicher thermischer Einflüsse nicht in den Überschallbereich wechseln kann. Vernachlässigt man ferner alle Reibungseinflüsse und betrachtet die Strömung als isentrop, so liegt der maximale Massenstrom durch den Spalt über die Formel nach Saint-Venant und Wantzel mit  $M = 1$  im Spalt fest [92]:

$$\dot{m}_{max} = A_q \cdot \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cdot \frac{p_{0,1}}{R_s \cdot T_{0,1}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot R_s \cdot T_{0,1}} \quad (1.7)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die Definition der Reynoldszahl (Gl. 1.5) ergibt sich folgender Ausdruck zur druckabhängigen Schätzung der maximalen Reynoldszahl:

$$Re = \frac{2 \cdot \dot{m}}{\eta \cdot b} = \frac{D_h}{\eta} \cdot \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cdot \frac{p_{0,1}}{R_s \cdot T_{0,1}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot R_s \cdot T_{0,1}} \quad (1.8)$$

Die Berechnungsergebnisse sind in Abb. 1.8 dargestellt. Die kritische Reynoldszahl wurde experimentell von Beavers [13] für eine der Anordnung aus Abb. 1.6 ähnliche Einströmgeometrie zu  $Re_{P,krit} = 2600$  bestimmt (im Unterschied zu der Anordnung von Wenderott wies der experimentelle Aufbau von Beavers keine Schräge am Spaltkörper und keinen Verrundungsradius auf). Im Gegensatz zur Couette-Strömung treten hier wesentlich größere Reynoldszahlen auf, der turbulente Strömungsbereich

spielt eine deutlich größere Rolle. Den Ergebnissen nach kann als obere Grenze  $Re_{P,max} \approx 15000$  gesehen werden. Bei niedrigen Drücken können wiederum nur kleine Re-Zahlen auftreten. Das zu untersuchende Strömungsgebiet für die Poiseuille-Strömung umfasst also den laminaren, transitionellen und voll turbulenten Bereich. Weiterhin muss die bei niedrigen Drücken einsetzende Gasverdünnung berücksichtigt werden; hier gelten die gleichen Aussagen wie bei der Couette-Strömung.

Abschließend wird noch die mögliche Ausbildung von Taylorwirbeln im Gehäuse-spalt untersucht. Diese entstehen aus einer strömungsmechanischen Instabilität infolge der Rotordrehung: Die näher am Rotor befindlichen Fluidteilchen werden durch die Fliehkraft nach außen gedrückt, so dass der Druck von innen nach außen abnimmt. Ist die Fliehkraft groß genug, um die Zähigkeitskräfte im Fluid zu überwinden, entsteht eine radiale Strömungskomponente und Wirbel bilden sich aus. Das Stabilitätskriterium hierfür wird durch die Taylorzahl beschrieben:

$$Ta = \frac{\rho \cdot \omega \cdot \sqrt{R_{Rot}} \cdot h^{3/2}}{\eta} = Re_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h}{R_{Rot}}} \quad (1.9)$$

Das Quadrat der Taylorzahl beschreibt das Verhältnis der Zentrifugal- zur Reibungskraft. Wird dabei ein gewisser Grenzwert überschritten, so entstehen durch die oben beschriebene Instabilität die in Abb. 1.9 skizzierten, paarweise gegenseitig drehenden Taylorwirbel. Bei kleinem  $h/R_{rot}$  gilt gemäß der Stabilitätsanalyse  $Ta_{krit} = \sqrt{1708} \approx 41.33$  als kritische Grenze für das Auftreten von Taylorwirbeln [65]. Bei weiterer Erhöhung der Taylorzahl nehmen die Wirbel zunächst eine wellenförmige Gestalt an, die zu höheren Taylorzahlen einen instationären, oszillierenden Charakter aufweisen, bevor sie in turbulente Wirbel umschlagen [6].

Der Einfluss von Taylorwirbeln auf die Spaltdurchströmung ist experimentell von Pfeleiderer nachgewiesen worden, der bei Überschreitung einer kritischen Drehzahl einen deutlichen Abfall des Spaltmassenstroms bei gleicher Druckdifferenz über dem Spalt feststellte [71].

Die in Schraubenvakuumpumpen maximalen Taylorzahlen können mit den oben erläuterten Voraussetzungen abgeschätzt werden ( $h = 0.3$  mm,  $D_{Rot} = 250$  mm,  $f = 150$  Hz, Stoffdaten von Luft bei 20°C). Unter der Annahme, dass die Taylorwirbel zu keiner Änderung der kritischen Reynoldszahl  $Re_{C,krit}$  führen, ergibt sich mit Gl. 1.9 ein Umschlag zur turbulenten Strömung bei  $Ta_{turb} = 63.8$ . Den Ergebnissen in Abb. 1.10 nach wird unter den gegebenen Voraussetzungen bei  $p \approx 480$  mbar die kritische Taylorzahl überschritten, so dass in dem engen Bereich von  $480$  mbar  $< p < 640$  mbar laminare Taylorwirbel im Spalt auftreten. Ab  $p > 640$  mbar wird die Strömung turbulent, so dass hier turbulente Taylorwirbel zu erwarten sind. Für kleinere Rotordurchmesser, Spalthöhen und Drehzahlen verschieben sich diese Grenzen zu höheren Drücken (siehe Gl. 1.9).

Die bisher erläuterten Ergebnisse beziehen sich auf das Taylor-Couette System ohne axiale Durchströmung. Experimente haben jedoch gezeigt, dass diese einen deutlich stabilisierenden Einfluss auf die Couette-Strömung hat und die kritische Taylorzahl in Abhängigkeit der axialen  $Re_P$ -Zahl zu höheren Werten verschiebt. In Abb. 1.11 sind die Ergebnisse von [89] aufgetragen, die bei kleinen Werten von  $Re_P$  ein schnelles Anwachsen von  $Ta_C$  zeigen und gegen den Grenzwert von  $Ta_C \approx 125$  im untersuchten Bereich laufen. Für größere  $Re_P$ -Werte liegen keine Ergebnisse vor.

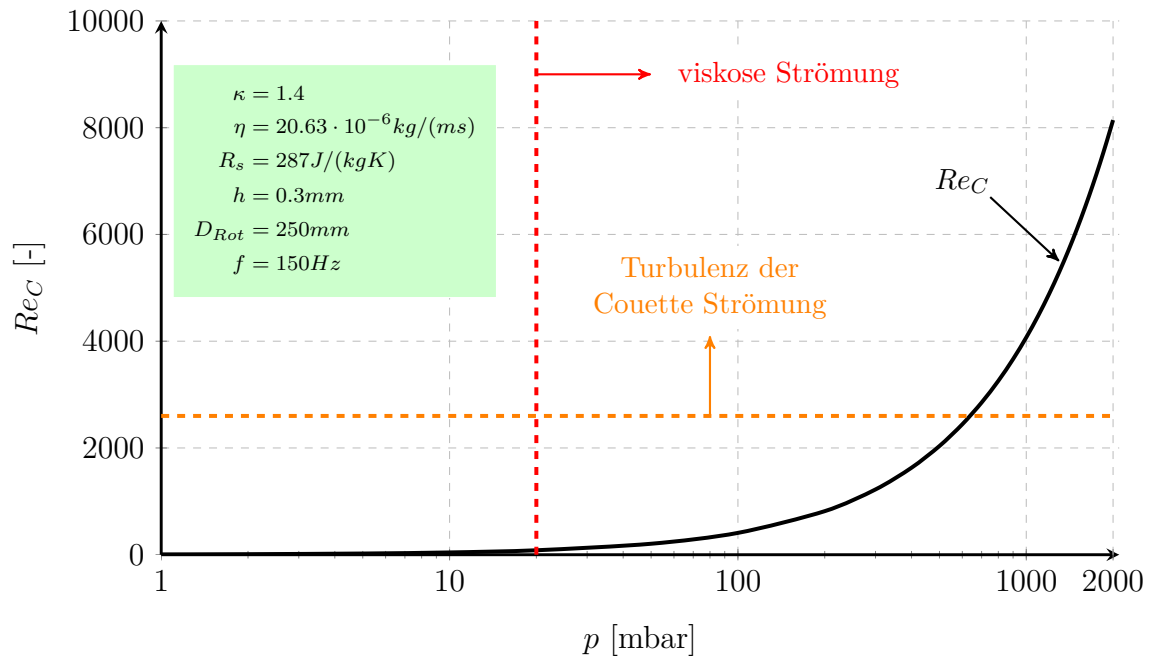


Abb. 1.7: Abschätzung der maximalen Re-Zahl der Couette-Strömung

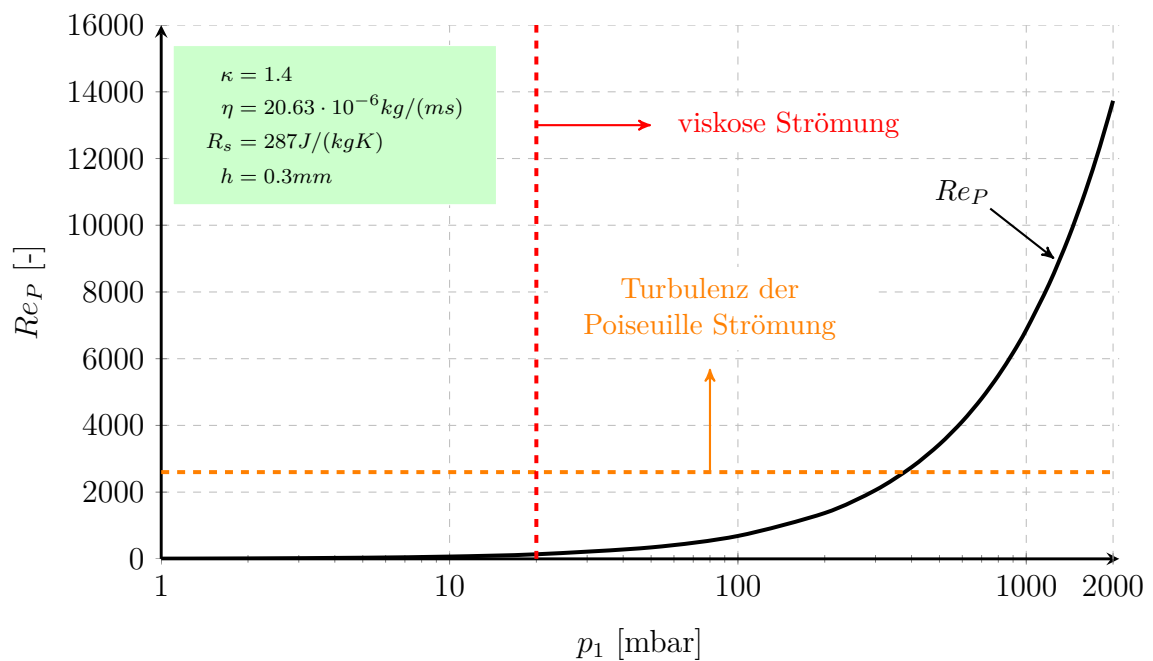


Abb. 1.8: Abschätzung der maximalen Re-Zahl der Poiseuille-Strömung

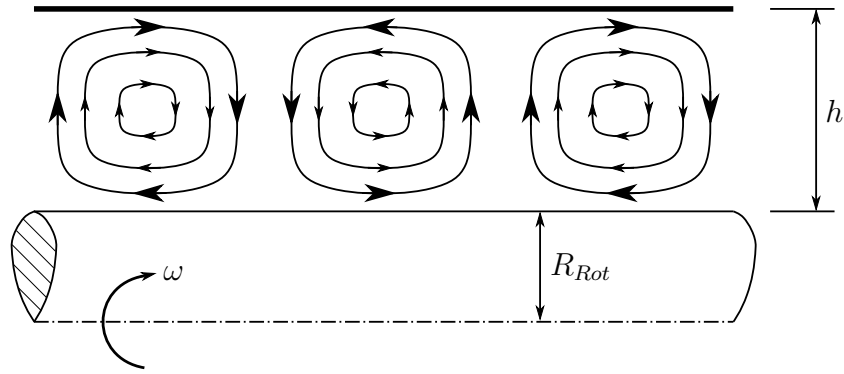


Abb. 1.9: Schematische Darstellung der Taylorwirbel

Diese Beobachtung reduziert die Bedeutung der laminaren und schwach turbulenten Taylorwirbel für die Spaltströmungen in Schraubenvakuumpumpen deutlich. Taylorwirbel können generell nur bei hohem Druck im Spalt entstehen (siehe Abb. 1.10). Tritt hierbei ein nennenswerter Spaltmassenstrom auf, so ergeben sich relativ große  $Re_P$ -Zahlen, die wiederum die Erzeugung von Taylorwirbeln unterdrücken. Nur bei kleinen Druckdifferenzen über dem Spalt (und damit kleinem  $Re_P$ ) können Taylorwirbel auftreten, die den Spaltmassenstrom beeinflussen; allerdings ist in einem solchen Fall der Spaltmassenstrom gering und beeinflusst das Verhalten der Maschine nur unwesentlich.

Taylorwirbel können somit prinzipiell in Schraubenvakuumpumpen entstehen, haben aber nur eine sehr geringe Auswirkung auf die Druckverteilung innerhalb der Maschine. Aus diesem Grund werden sie im Rahmen der Arbeit nicht weiter betrachtet.

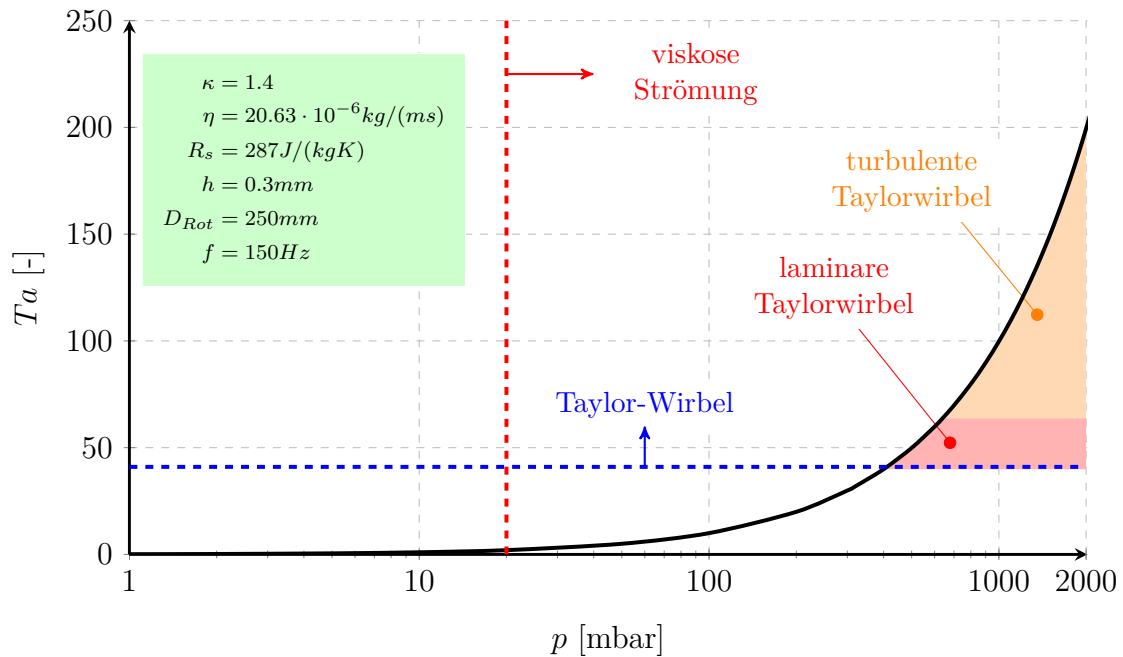


Abb. 1.10: Abschätzung der maximalen Taylor-Zahl im Gehäusespalt. Die eingezeichnete Grenze für das Auftreten von Taylorwirbeln bezieht sich auf das Taylor-Couette System ohne axiale Durchströmung.

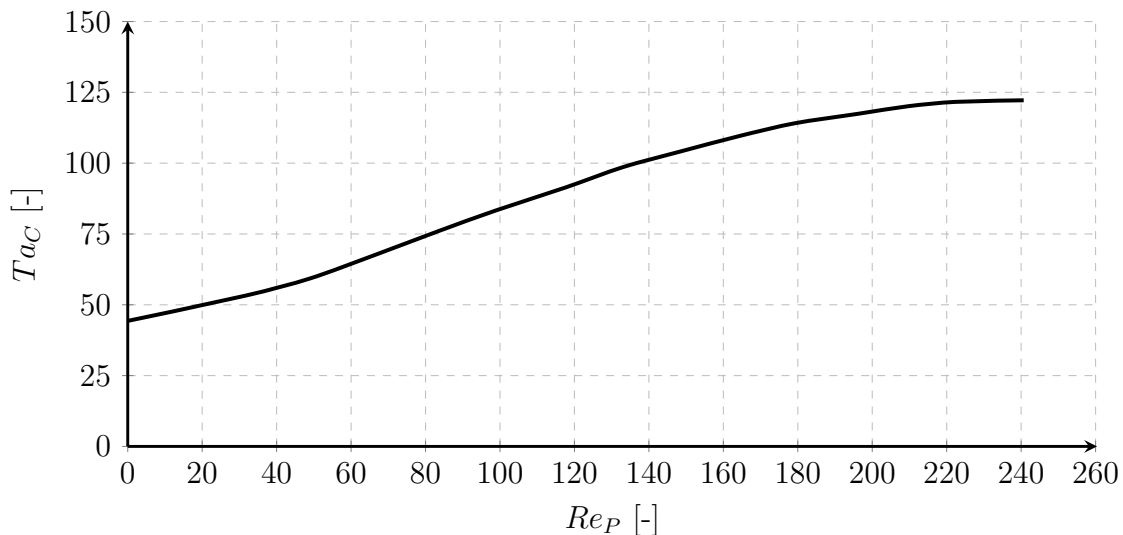


Abb. 1.11: Kritische Taylorzahl bei axialer Durchströmung des Ringspalt. Die Kurve zeigt die experimentellen Daten von [89], die auf die hier verwendeten Definitionen von  $Ta$  und  $Re_P$  umgerechnet wurden.

## 1.5 Stand der Wissenschaft

Die in Schraubenvakuumpumpen auftretenden Spaltströmungen weisen einen hohen Komplexitätsgrad durch die Vielzahl von relevanten Effekten auf. Zur Zeit existiert kein Modell für diese Strömung, das alle Effekte berücksichtigt. In der Literatur werden jedoch Teileffekte behandelt, die in diesem Abschnitt zusammengefasst werden. Der einfachste Fall ist die stationäre, laminare, viskose Strömung eines inkompressiblen Fluides durch den ebenen Spalt mit ruhenden Wänden und ohne Wärmeübertragung. Hierbei bildet sich nach einer gewissen Einlauflänge ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil aus, das sich im Laufe der weiteren Durchströmung nicht mehr ändert. Dieses voll ausgebildete Geschwindigkeitsprofil wurde bereits 1846 von den Physikern Hagen und Poiseuille analytisch bestimmt und wird später in Kap. 4 näher erläutert. Aus diesem folgt das Reibungsgesetz der ausgebildeten laminaren Strömung, das die Wandschubspannung, bezogen auf den mittleren Staudruck der Strömung, angibt:

$$\bar{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\rho/2u_m^2} = \frac{f}{4} \quad (1.10)$$

Für laminare Strömung folgt aus dem parabolischen Geschwindigkeitsprofil [5]:

$$f_{fd} = \frac{96}{Re} \quad (1.11)$$

Unter Vernachlässigung der Einlaufeffekte kann durch Anwendung des Impulssatzes hieraus bereits der Spaltmassenstrom für eine gegebene Druckdifferenz zwischen Spaltein- und -austritt berechnet werden [78]:

$$\dot{m} = \frac{\rho \cdot b \cdot D_h^3}{96 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (1.12)$$

Das Ergebnis zeigt, dass dieser proportional zur Dichte und Druckdifferenz ist, aber sehr stark von der Spalthöhe abhängt ( $\dot{m} \propto D_h^3$ ).

Im Spalteinlauf sind die Strömungsverluste größer und hängen von der Einlaufgeometrie und dem Geschwindigkeitsprofil im Eintritt ab. Ein in der Literatur ausführlich untersuchter Fall ist die sich entwickelnde Strömung mit einem gleichförmigen, rechteckigen Geschwindigkeitsprofil am Spalteintritt. Unmittelbar im Einlass treten hierbei die höchsten lokalen Verluste auf, die im Verlauf der weiteren Durchströmung abnehmen und gegen den Verlust der ausgebildeten Strömung laufen. Zur Beschreibung des Phänomens wird der inkrementelle Druckverlust  $K$  definiert, der die gegenüber der voll ausgebildeten Strömung zusätzlichen Verluste im Eintritt beschreibt:

$$K(x) = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2}u^2} - f_{fd} \cdot \frac{x}{D_h} \quad (1.13)$$

Am Spalteintritt bei  $x = 0$  gilt  $K(0) = 0$ . Im Laufe der Durchströmung steigt der Wert von  $K$  an und erreicht in der voll ausgebildeten Strömung den konstanten Wert  $K(\infty)$ . Nach den Ergebnissen von Chen [22] zeigt dieser eine schwache Abhängigkeit von der Reynoldszahl (für  $Re > 50$ ):

$$K(\infty) = 0.64 + \frac{38}{Re} \quad (1.14)$$



Für kleine Reynoldszahlen wächst  $K(\infty)$  also an. Ferner gibt Chen [22] eine Beziehung für die hydrodynamische Einlaufänge an <sup>2</sup>:

$$\frac{L_{hyd}}{D_h} = 0.011 \cdot Re + \frac{0.315}{1 + 0.0175 \cdot Re} \quad (1.15)$$

Kleine Reynoldszahlen führen demnach zu einer kurzen hydrodynamischen Einlaufänge (bei  $Re = 50$  gilt  $L_{hyd} = 0.72 \cdot D_h$ ), so dass für tiefe Spalte bei kleinen Reynoldszahlen die voll ausgebildete Strömung dominiert.

Für den turbulenten Strömungsbereich existiert keine geschlossene Lösung der Erhaltungsgleichungen der voll ausgebildeten Strömung, so dass man auf von Experimenten abgeleiteten Reibwertformeln angewiesen ist. In der Vergangenheit sind viele solcher Korrelationen hierfür entwickelt worden, die bedeutendsten sind hier kurz zusammengefasst:

- **Prandtl** entwickelte halbempirisch eine Näherungsformel, die durch eine Vielzahl von Experimenten bestätigt wurde. Nachteilig für praktische Rechnungen ist, dass die Gleichung nicht explizit nach  $f$  aufgelöst werden kann und deswegen ein iteratives Verfahren notwendig ist [78]:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{f}) - 0.8 \quad (1.16)$$

- **Blasius** leitete anhand experimenteller Daten eine einfache Potenzformel für turbulent durchströmte glatte Rohre ab, die recht genau die Ergebnisse der Prandtl-Beziehung wiedergibt [81]:

$$f = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad (1.17)$$

- **Beavers** bestimmte aus Experimenten in einem ebenen Kanal eine empirische Korrelation [12]:

$$f = \frac{0.507}{Re^{0.3}} \quad (1.18)$$

Die ersten beiden Gleichungen wurden von ihren Autoren ursprünglich für glatte Rohre entwickelt, gelten unter Verwendung des hydraulischen Durchmesser aber auch für den ebenen Spalt [81]. Im Bereich von  $8000 < Re < 30000$  weichen die Formeln etwa um 5% voneinander ab (siehe Abb. 4.8 in Kap. 4.7). Weitere Korrelationen sind in [81] zusammengefasst.

Das Verhalten der Strömung im laminar-turbulenten Übergangsbereich ist stark von der Einströmgeometrie und dem Turbulenzgrad der Zuströmung selbst abhängig. Karnitz et. al. [49] konnten in Experimenten mit einer nahezu turbulenzfreien Zuströmung zum Spalt ( $Tu = 0.3\%$ ) eine kritische Reynoldszahl von  $Re_{krit} = 13400$  erreichen. Die Strömung wurde dabei durch eine konvergente Düse in den Spalt eingeleitet, so dass durch den Spalteintritt keine Störung entstand. Für die Geometrie der Gehäusespalte nach Bild 1.6 ist allerdings mit einer deutlichen Störung der

<sup>2</sup>Die hydrodynamische Einlaufänge ist hier als diejenige Länge definiert, bei der die Strömung in der Spaltmitte 99% der Strömungsgeschwindigkeit der voll ausgebildeten Strömung erreicht.

Strömung durch den Spalteintritt auszugehen, was den von Beavers experimentell bestimmten Wert von  $Re_{krit} = 2600$  erklärt. Dieser dürfte ferner vom Turbulenzgrad der Zuströmung abhängig sein, Angaben hierzu gibt es nicht.

Das in jüngerer Vergangenheit von Menter et. al. entwickelte Transitionsmodell [59] ermöglicht eine numerische Simulation von transitionellen Strömungen. Ursprünglich wurde dieses Modell für die Strömungsmodellierung in Turbomaschinen eingesetzt [56], jedoch konnten Abraham et. al. [3] durch Anpassung der Modellparameter dieses erfolgreich für die Strömung in Rohren anwenden. Minkowcy [62] untersucht mit diesem Modell die Auswirkung des Geschwindigkeitsprofils und des Turbulenzgrades am Spalteintritt auf die kritische Reynoldszahl und weist einen deutlichen Einfluss beider Größen hierauf nach. Weiterhin zeigt er, dass die Strömung abhängig von der Eintrittsbedingung erst nach einer großen Lauflänge in den voll turbulenten Bereich umschlägt. Für den Fall einer stark turbulenten Einströmung identifiziert er neben der laminaren und turbulenten Strömung noch den Bereich der voll entwickelten transitionellen Strömung. Eine Auswertung der Einströmverluste erfolgt jedoch nicht.

Da Gase kompressibel sind, nimmt aufgrund des Druckverlustes die Dichte im Laufe der Durchströmung ab. Wegen der möglichen kleinen Druckverhältnisse in Schraubenvakuumpumpen kann die Dichteänderung vom Ein- zum Austritt durchaus eine Größenordnung betragen.

Zur Berechnung kompressibler Strömungen muss neben der Impuls- und Massenerhaltung noch die Energieerhaltung und ein Stoffgesetz (üblicherweise die ideale Gasgleichung) betrachtet werden. Für die Sonderfälle einer isothermen bzw. einer adiabaten, reibungsbehafteten Strömung in Kanälen mit konstantem Querschnitt existieren analytische Lösungen für den Verlauf der Strömungsgrößen, die von Shapiro [82] angegeben werden. Hierfür werden Reibwerte zur Beschreibung der Wandschubspannung in kompressibler Strömung benötigt.

Shapiro [83] zeigt auf Basis experimenteller Werte, dass für turbulente Strömungen mit guter Genauigkeit die Reibungsgesetze der inkompressiblen Strömung gelten. Der Bereich der laminaren, kompressiblen Strömung hat aufgrund der Entwicklung von sog. "Micro-electro mechanical systems" (abgekürzt "MEMS") im letzten Jahrzehnt eine große Bedeutung erfahren und damit zahlreiche Forschungsaktivitäten auf diesem Gebiet ausgelöst. Diese Systeme enthalten mit Gas durchströmte Kanäle mit kleinen Abmessungen (Durchmesser 10 - 200  $\mu\text{m}$ ), so dass sich kleine Reynoldszahlen einstellen. Bei sehr kleinen Abmessungen können sich trotz vergleichsweise hohem Drucks Knudsenzahlen im Bereich der Schlupfströmung ergeben, was für diese Systeme berücksichtigt werden muss.

Für viskose, laminare kompressible Strömung in Rohren berechnen Van der Berg et. al. [14] für niedrige Reynolds- und Machzahlen die lokalen Geschwindigkeitsprofile, die sich nur unwesentlich vom dem der inkompressiblen Strömung unterscheiden. Damit entsprechend auch die Reibwerte in sehr guter Näherung den inkompressiblen Werten. Dieses Ergebnis wird durch die Messungen von Celeta [20] und von Harley [39] bestätigt, die aus Messung des Gesamtdruckverlustes über den Spalt den gemittelten Reibwert bestimmten. Numerische Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen von Asako et al. ([9], [41]) zeigen allerdings einen signifikanten Einfluss der Machzahl auf den Reibwert. Asako gibt aus den numerischen Ergebnissen abgeleitete Nähe-

rungeformeln an (in [9] für  $Re < 500$ , in [41] für  $Re < 2300$ ), die auch das Gebiet der Schlupfströmung berücksichtigen. Der Reibwert (nach Definition in Gl. 1.10) steigt demnach mit der Machzahl an und liegt bei  $M = 0.7$  etwa 30% über dem der inkompressiblen Strömung. Der scheinbare Widerspruch zu den vorher zitierten Messungen lässt sich durch den Verlauf der Machzahl über der Strömungslänge erklären. Diese ist auch bei kleinen Druckverhältnissen über weite Teile des Spaltes relativ niedrig und steigt erst zum Spaltaustritt hin stark an (siehe [39]). Im Großteil des Spaltes sind die Reibwerte nur unwesentlich von denen der inkompressiblen Strömung verschieden, so dass in den integralen Messungen dieser Effekt nicht nachgewiesen werden konnte.

Den qualitativen Einfluss der Strömungsform auf den Nachlauf der Spaltströmung untersucht Sachs mit Hilfe der Schlierentechnik [74]. Dieser zeigt, dass bei überkritischen Druckverhältnis am Spaltende ein Überstrahl austritt, der sich in größerer Entfernung zum Spaltende allmählich auflöst. Für abnehmenden Spalteintrittsdruck nimmt die Deutlichkeit des Strahls ab; bei Erreichen der Grenze zur Knudsenströmung bei  $Kn \approx 0.01$  können die für die Kontinuumströmung typischen Strahlzellen im Nachlauf nicht mehr nachgewiesen werden.

In der rein molekularen Strömung finden keine Stöße unter den Molekülen statt; das gesamte Strömungsverhalten ist hier durch das Verhalten der Moleküle an den Wänden bestimmt. Diese werden beim Auftreffen auf die Wand für kurze Zeit absorbiert und dann (unter Annahme einer vollständigen Akkommodation an den Wänden) diffus wieder emittiert. Verbindet man in diesem Strömungsbereich zwei Kessel unterschiedlichen Drucks über eine Leitung miteinander, so treten von beiden Enden ausgehend Moleküle in sie ein. Der resultierende Massenstrom in der Leitung ergibt sich durch Überlagerung der Massenflüsse beider Seiten. Da keine Stöße unter den Molekülen stattfinden, ist es in diesem Strömungsgebiet ausreichend, die Durchlaufwahrscheinlichkeit  $P$  zu betrachten, mit der ein auf der einen Seite der Leitung einfliegendes Molekül auf der anderen Seite austritt. Für die Sonderfälle  $P = 1$  erreichen alle Moleküle die andere Seite (dies gilt für eine ideale, unendlich dünne Blende), für  $P = 0$  erreicht kein Molekül die andere Seite der Leitung. Bei bekannter Durchlaufwahrscheinlichkeit kann der Massenstrom durch die Leitung berechnet werden [47]:

$$\dot{m} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{c_m} \cdot A_q \cdot P \cdot p_2 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{c_m} \cdot A_q \cdot P p_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{c_m} \cdot A_q \cdot P \cdot (p_2 - p_1) \quad (1.19)$$

Die Geschwindigkeit  $c_m$  bezeichnet darin die mittlere Molekülgeschwindigkeit nach Gl. 2.34. Der Massenstrom eines molekular durchströmten Spaltes ist also nur von der Druckdifferenz abhängig; im Gegensatz zur viskosen Strömung spielt die Dichte in den Kesseln keine Rolle (siehe Gl. 1.12). Ferner ist der Spaltmassenstrom direkt proportional zur Spaltfläche und damit auch zur Spalthöhe.

Die Durchlaufwahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der sog. Testpartikelmethode numerisch bestimmt werden [17]. Dabei wird die Durchflugbahn einer großen Anzahl von Testpartikeln simuliert und so die Anzahl derjenigen Moleküle bestimmt, die am anderen Ende der Leitung austreten. So bestimmte Werte für Rechteckkanäle unterschiedlicher Längenverhältnisse ( $L/h$ ) und Streckungen ( $b/h$ ) sind in [76] protokolliert. Bemerkenswert ist, dass mit steigender Streckung die Durchlaufwahrscheinlichkeit weiter ansteigt, der Einfluss der seitlichen Wände bleibt demnach bei

großen  $b/h$  erhalten. Näherungsformeln für die Durchlaufwahrscheinlichkeiten für weite Spalte werden in [47] und [57] angegeben.

Da die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle temperaturabhängig ist, erzeugt im molekularen Strömungsbereich auch ein Temperaturunterschied zwischen beiden Kesseln bei gleichen Drücken einen Massenstrom diesen (“thermische Transpiration“). Die Berechnung erfolgt nach Gl. 1.19 mit unterschiedlichen mittleren Geschwindigkeiten  $c_{m,1}$  und  $c_{m,2}$ .

Der Übergangsbereich zwischen molekularer und viskoser Strömung kann nach [47] in grober Näherung durch die Parallelschaltung einer molekular und einer viskos durchströmten Leitung abgebildet werden. Knudsen gab 1909 für diesen Ansatz eine semi-empirische Korrekturformel an, um eine bessere Übereinstimmung zu seinen Experimenten an Kreisrohren zu erzielen.

Eine genauere Beschreibung der Strömung in Rechteckkanälen im Übergangsbereich zwischen viskoser und molekularer Strömung liefert Sharipov. Dieser berechnete unter Annahme einer lokal voll ausgebildeten Strömung die Geschwindigkeitsprofile als Funktion des Gasverdünnungsparameters  $\delta$ , der umgekehrt proportional zur Knudsenzahl ist (siehe Gl. 2.37). Für den Bereich der Übergangs- und freien Molekularströmung löst Sharipov numerisch die linearisierte Boltzmann-Gleichung mit dem BGK-Modell für den Stoßterm. Für das Gebiet der Gleitströmung gibt er die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit geeigneter Schlupfrandbedingung an. Sharipov präsentiert die Ergebnisse in Form des dimensionslosen Volumenstroms  $G_P(\delta)$  [85]:

$$G_P(\delta) = \frac{2}{A} \cdot \frac{1}{c_w} \cdot \int_A u(x, y) \cdot dA \quad (1.20)$$

Als Referenzgeschwindigkeit dient die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Moleküle nach Gl. 2.36. Wie später in Kap. 7 gezeigt wird, ergibt sich mit dieser Darstellung im viskosen, laminaren Bereich der Massenstrom der inkompressiblen Rechnung nach Gl. 1.12. Für kleine Gasverdünnungsparameter (d.h. stärker verdünnte Strömung) fallen die Werte von  $G_P$  ab und erreichen bei  $\delta \approx 1$  ihr Minimum (siehe Abb. 1.12). Für weiter abnehmende Gasverdünnung steigen diese wieder an und erreichen bei rein molekularer Strömung einen konstanten Wert. Hier ist jedoch ein deutlicher Einfluss des Streckungsverhältnisses und damit der seitlichen Berandungen zu erkennen, der sich schon in den Durchtrittswahrscheinlichkeiten von [76] wiederfindet. Im Sonderfall des ebenen Spaltes konvergiert  $G_P$  selbst für stark verdünnte Strömungen gegen keinen Grenzwert. Bei Strömungen mit  $\delta \ll 1$  muss daher die Idealisierung des Gehäusespaltes als planparalleler Spalt hinterfragt werden, da in diesem Strömungsbereich mit einem Einfluss der Spaltkrümmung zu rechnen ist. Mit bekanntem  $G_P$  berechnet sich der Massenstrom in isothermer Strömung zu:

$$\dot{m} = \frac{A_q \cdot \eta}{L} \int_{\delta_1}^{\delta_2} G_P(\delta) \cdot d\delta \quad (1.21)$$

Da infolge des Druckverlustes der Gasverdünnungsparameter eine Funktion der Längenkoordinate ist, muss  $G_P$  entlang des Strömungsweges integriert werden.

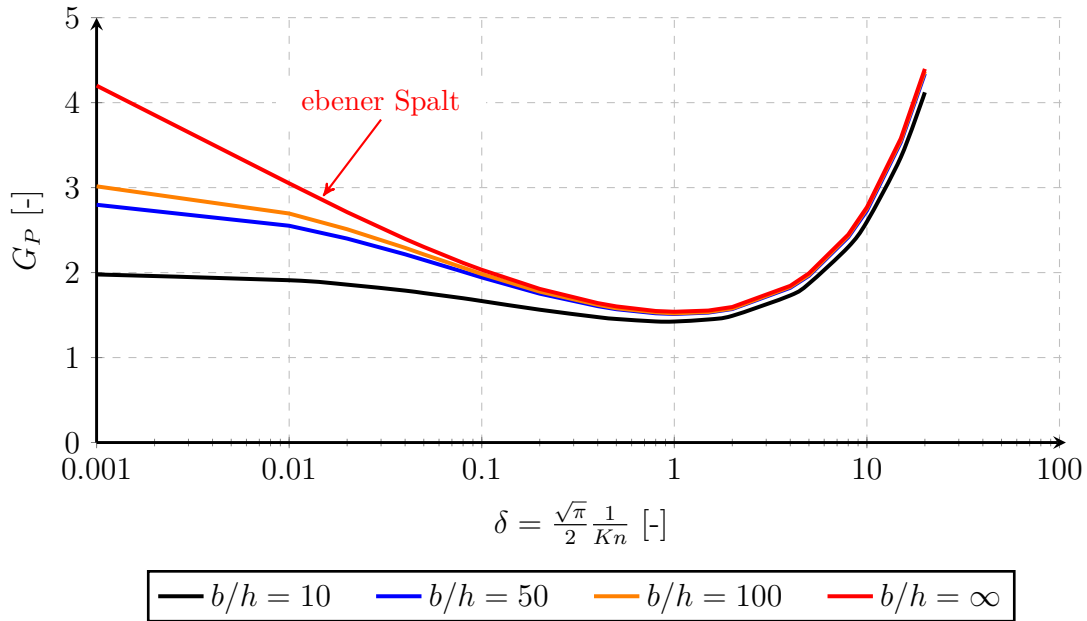


Abb. 1.12: Dimensionslose Volumenströme  $G_P$  als Funktion der Gasverdünnung für verschiedene Streckungsverhältnisse. Gezeigt sind die numerisch bestimmten Ergebnisse der linearisierten Boltzmann-Gleichung von Sharipov [85].

Für Kanäle mit nicht zu großem Streckungsverhältnis kann das Integral dabei in guter Näherung durch den  $G_P$ -Wert bei der mittleren Gasverdünnung ersetzt werden [85]:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} G_P(\delta) \cdot d\delta \approx G_P \left( \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right) \quad (1.22)$$

Ewart et. al. [31] bestimmen experimentell mit verschiedenen Gasen unter Verwendung der obigen Näherung die Werte von  $G_P(\delta)$ , die in guter Übereinstimmung mit den von Sharipov numerisch ermittelten Daten stehen.

In [84] behandelt Sharipov den Fall der nicht-isothermen Strömung und gibt die durch einen Temperaturgradienten hervorgerufenen Volumenströme  $G_T(\delta)$  für einatomige Gase an. Diese treten, wie vorher erläutert, in der freien Molekularströmung auf und verschwinden in viskoser Strömung. Für allgemeine Fälle mit Druck- und Temperaturgradienten muss eine Differentialgleichung gelöst werden, die ebenfalls in [84] angegeben ist.

Eine Besonderheit stellt die Strömung von Gasgemischen dar. Im viskosen Bereich können diese einfach als ein Gas mit geeigneten gemittelten Stoffwerten abgebildet werden. Im molekularen Bereich verhalten sich beide unabhängig voneinander und können rechnerisch auf diese Weise behandelt werden [88]. In der Übergangsströmung hingegen beeinflussen sich beide Gase, was die Lösung eines Systems von Boltzmann-Gleichungen erforderlich macht. Dies gestaltet sich sehr aufwendig; an dieser Stelle sei auf die weiterführende Spezialliteratur verwiesen [63], [48].

Neben den Betrachtungen der einzelnen Teilbereiche der Strömung finden sich in der Literatur einige Vorschläge, um die Gasströmung durch Spalte und Rohre über alle Strömungsbereiche hinweg zu berechnen. Für die viskose Strömung unterscheidet Jitschin [44] die gasdynamische, turbulente und laminare Strömung. Die gasdynamische Strömung tritt bei kleinen Druckverhältnissen über den Spalt auf, in denen das Durchflussverhalten durch die Gasbeschleunigung geprägt ist. Für die Berechnung schlägt Jitschin die Formel von Saint-Venant vor; dem Reibungseinfluss wird hier über Blendenbeiwerte Rechnung getragen. Für Strömungen mit geringer Druckdifferenz verwendet Jitschin die inkompressible Rechnung mit den turbulenten Reibwerten nach Gl. 1.17 bzw. den laminaren Reibwert für Kreisrohre. Für die Berechnung der molekularen Strömung verweist Jitschin in [45] auf Gl. 1.19 mit entsprechender Transmissionswahrscheinlichkeit, im Übergangsbereich schlägt er eine einfache Interpolation vor. Ähnliche Berechnungsansätze sind auch in [47] aufgeführt. Da dieses Vorgehen im viskosen Bereich ein Umschalten zwischen den einzelnen Modellen erfordert, ergeben sich hier keine glatten Übergänge zwischen den einzelnen Strömungsbereichen. Aufgrund der groben Abbildungsgüte ist dieses Verfahren lediglich als Abschätzung für den Spaltmassenstrom zu verstehen.

Ein genaueres Verfahren entwickelte Santeler [75]. Dieser modelliert die Rohrströmung als Hintereinanderschaltung eines inkompressibel durchströmten Rohres mit einer kompressiblen Blendenströmung am Austritt. Da in einer realen Strömung der statische Druck aufgrund der Strömungsbeschleunigung zum Spalt hin abnimmt, der Totaldruck bei reibungsfreier Zuströmung allerdings konstant bleibt, betrachtet Santeler für das Rohr zunächst nur den Totaldruckverlust. Die eigentliche Strömungsbeschleunigung findet in seinem Modell am Austritt statt, die er durch eine nachgeschaltete Blendenströmung abbildet. Zur Lösung muss der Übergabedruck zwischen Rohr und Blende iterativ bestimmt werden. Die Berechnung des Totaldruckverlustes des Rohres erfolgt durch das Reibungsgesetz der laminaren, inkompressiblen Strömung für den viskosen Strömungsbereich. Für die Molekularströmung verwendet er ebenfalls die Transmissionswahrscheinlichkeiten; die Berechnung des Übergangsbereichs erfolgt nach der Formel von Knudsen. Wenn auch numerisch aufwendiger als die Berechnungsvorschläge von Jitschin liefert dieses Modell ein physikalisch sinnvolles Verhalten mit glatten Übergängen zwischen den einzelnen Bereichen.

Das Problem der kompressiblen Spaltströmung behandelt ebenfalls Livesey in [57]. Er kann zeigen, dass für sehr tiefe Spalte, in denen die Reibung gegenüber der Gasbeschleunigung dominant ist, die einfache inkompressible Rechnung eine gute Näherung darstellt. Ob ein Spalt als tief anzusehen ist, ist von der Reynoldszahl der Strömung abhängig; bei kleinen Reynoldszahlen wird der Einfluss der Reibung größer und die einfache, inkompressible Rechnung genauer. Bei größeren Reynoldszahlen ist dies nicht der Fall und gasdynamische Effekte müssen berücksichtigt werden (als Zahlenbeispiel gibt er eine Länge von  $L/D_h > 78$  für  $Re = 250$  an, damit die inkompressible Rechnung gilt). Viele in Schraubenvakuumpumpen auftretenden Spalte sind jedoch kürzer, so dass die Gasdynamik berücksichtigt werden muss. Da das resultierende Formel der gasdynamischen Rechnung mit Reibungseinfluss (siehe z.B. Shaprio [82]) eine iterative Berechnung notwendig macht, schlägt Livesey ein Näherungsverfahren zur Berechnung der kompressiblen Spaltströmung vor, das eine direkte Lösung erlaubt. Für den Übergangsbereich zur molekularen Strömung empfiehlt er neben dem Ansatz von Knudsen die Näherungsformeln von Kieser und

Grundner [53], die diese von experimentell ermittelten Blendenströmungen im Übergangsbereich ableiteten.

Einen pragmatischen Ansatz zur Beschreibung des Durchflussverhaltens wählt Wenderott [92], der - wie in Abschnitt 1.3 beschrieben - auf Basis experimenteller Daten ein Modell bereitstellt. Analog zu den Arbeiten von Peveling [70], der die Durchströmung von Modellspalten in Schraubenkompressoren für den Überdruckbereich untersucht, präsentiert Wenderott die Ergebnisse in Form eines normierten Massenstroms:

$$\alpha(p_1, \Pi, h, L) = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{th,max}} \quad (1.23)$$

Als feste Bezugsgröße  $\dot{m}_{th,max}$  über alle Strömungsbereiche hinweg wird der verblockte Massenstrom der Düse nach Gl. 1.7 verwendet. Ein Interpolationsverfahren zwischen den Stützstellen liefert Rohe [73]. Als nachteilig erweist sich, dass die Datenbasis begrenzt ist und bei Überschreitung der Grenzen der untersuchten Geometrieparameter und Drücke extrapoliert werden muss, was entsprechende Unsicherheiten mit sich bringt. Weiterhin sind die Messwerte mit Luft als Gas ermittelt worden, eine Umrechnung für andere Gasarten wird nicht angegeben.

Dreißig [27] untersucht den Einfluss der sich in Schraubenmaschinen zeitlich ändernden Druckrandbedingungen auf den Massenstrom. Er betrachtet den Grenzfall eines Drucksprungs über den Spalt und berechnet für kompressible, reibungsbehaftete Strömung den Massenstrom als Funktion der Zeit. Um den Einfluss der zeitlichen Änderung zu beurteilen, vergleicht Dreißig die in einem gegebenen Zeitintervall durch den Spalt fließende Masse bei instationärer und stationärer Rechnung. Die stationäre Rechnung liefert dabei stets einen zu großen Wert, da im instationären Fall die Strömung zunächst beschleunigt werden muss. Die Abweichungen zwischen beiden Rechnungen nehmen mit sinkendem Druckverhältnis und zunehmender Intervallzeit ab. Für Intervallzeiten von einigen Millisekunden beträgt selbst bei hohem Druckverhältnis die Abweichung zwischen beiden Rechnungen nur wenige Prozent, so dass mit sehr guter Näherung der instationäre Charakter der Spaltströmung vernachlässigt werden darf. Dies gilt auch für Schraubenspindelvakuumpumpen, da hier typischerweise niedrige Druckverhältnisse vorherrschen [92] und aufgrund der großen Windungszahl der Spindel sich der Druck vor und hinter dem Spalt vergleichsweise langsam ändert.

Die Untersuchungen bzgl. der Wärmeübertragung in Spalten lassen sich ähnlich zu denen der reinen Durchströmung gliedern. Der einfachste Fall stellt die inkompressible Strömung dar, in der (unter Annahme konstanter Stoffwerte) die Wärmeübertragung keinen Einfluss auf die Durchströmung hat, so dass diese separat behandelt werden kann. Die Wärmeübergangskoeffizienten werden in der Literatur in Form der dimensionslosen Nußeltzahl dargestellt [10]:

$$Nu = \alpha \cdot \frac{D_h}{\lambda} \quad (1.24)$$

Für thermisch und hydrodynamisch voll ausgebildete laminare Strömung bei gleichen Wandtemperaturen kann die Berechnung der Nußeltzahl mit Hilfe einer Reihentwicklung bestimmt werden, die näher in [10] erläutert ist. Das Ergebnis ist

unabhängig von der Reynolds- und Prandtl- Zahl der Strömung:

$$Nu_{T,lam} = 7.54 \quad (1.25)$$

Das Problem der thermischen Einlaufströmung bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung und das Problem der sich simultan entwickelnden Strömung (thermisch und hydrodynamisch) ist in der Literatur für den Sonderfall gleicher Wandtemperaturen intensiv untersucht worden, Zusammenfassungen und Näherungsformeln finden sich in [38] und [80].

Wie auch schon für die Reibwerte der turbulenten Strömung existiert keine geschlossene Lösung zur Bestimmung der Nußeltzahlen. In der Vergangenheit ist eine Vielzahl verschiedener empirischer Gleichungen für voll ausgebildete Strömungen in Kreisrohren entwickelt worden, die unter Verwendung des hydraulischen Durchmessers in guter Näherung auch für ebene Spalte gelten. Die Formel von Gnielinski gilt dabei als die am besten bestätigte Näherung für  $Re > 10^4$  [37]:

$$Nu_{T,turb} = \frac{f/8 \cdot Re \cdot Pr}{1 + 12.7 \cdot \sqrt{f/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \quad (1.26)$$

Weitere empirische Korrelationen sind in [81] zusammengefasst. Für den Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung  $2600 < Re < 10^4$  schlägt Gnielinski [37] eine einfache lineare Interpolation vor.

Die aufgeführten Formeln für den laminaren und turbulenten Wärmeübergang gelten für den Sonderfall gleicher Wandtemperaturen, der in Schraubenvakuumpumpen nur in Ausnahmefällen auftritt. Im Allgemeinen sind die Rotor- und Gehäusetemperaturen deutlich verschieden, was in der Modellierung berücksichtigt werden muss. Eine Berechnungsmethode hierfür liefert McCuen [58], der das thermische Einlaufproblem mit unterschiedlichen Wandtemperaturen durch eine Superpositionsmethode löst. Diese wird später in Kap. 5 ausführlich beschrieben. McCuen geht dabei von einer inkompressiblen, hydrodynamisch ausgebildeten Strömung aus und vernachlässigt die Effekte der axialen Wärmeleitung und der Dissipationsarbeit im Fluid. Damit wird die Lösung für die laminare Strömung unabhängig von der Reynolds- und Prandtlzahl, die McCuen in Form von dimensionslosen Wärmeströmen über der Lauflänge  $x^* = x/(Re \cdot Pr \cdot D_h)$  angibt. Unter Verwendung eines einfachen algebraischen Turbulenzmodells bestimmt er ferner Lösungen für  $Re = 20000, 30000, 50000$  (jeweils für die Prandtl-Zahl von Luft  $Pr = 0.71$ ). In Experimenten kann er gute Übereinstimmungen mit den theoretisch ermittelten Werten erzielen.

Den Effekt der axialen Wärmeleitung untersuchen Wu et. al [95], die durch Rechnungen zeigen können, dass für  $Pe = Re \cdot Pr < 50$  der Einfluss auf die lokalen Nußeltzahlen bedeutsam wird.

Für große Lauflängen reduzieren sich die Temperaturgradienten in der Strömung, so dass sich in der thermisch voll ausgebildeten laminaren Strömung ein lineares Temperaturprofil zwischen beiden Spaltberandungen einstellt [58]. Dies entspricht dem Wärmeleitungsproblem zwischen zwei Platten unterschiedlicher Temperatur.

Für verdünnte Strömungen sind in der Literatur keine Angaben für Einlaufprobleme mit unterschiedlichen Wandtemperaturen zu finden. Lediglich der Grenzfall der thermisch voll ausgebildeten Strömung ist als Wärmeleitungsproblem in Abhängigkeit der Gasverdünnung behandelt. Frohn gibt in [34] eine Näherungsgleichung zur



Berechnung des Wärmestroms bei kleine Temperaturdifferenzen an. Ein weiteres Modell ist in [47] angegeben, das für die Grenzfälle der viskosen und freien Molekularströmung die Wärmeleitfähigkeit richtig wiedergibt, für den Übergangsbereich jedoch nur eine grobe Abschätzung liefert. Einen genaueren Ansatz hierfür liefert Sharipov, der unter Verwendung des S-Modells für den Stoßterm (siehe Abschnitt. 2.3) die linearisierte Boltzmann-Gleichung löst. Die resultierenden Wärmeströme in Abhängigkeit der Gasverdünnung sind für alle Strömungsbereiche in [86] tabelliert.

Das kombinierte Problem der Wechselwirkung zwischen kompressibler Gasströmung und Wärmeübertragung ist in der Literatur nur spärlich untersucht. Die grundlegende Differentialgleichung für eine eindimensionale Strömung gibt Shapiro in [82] an. Diese ist nicht analytisch lösbar, so dass numerische Verfahren erforderlich werden. Das mögliche Vorgehen hierfür behandelt Shapiro anhand eines vereinfachten Beispielproblems. Es zeigt sich, dass Wärmeübertragung die Spaltströmung beeinflusst und diese deshalb für eine genaue Lösung nicht vernachlässigt werden darf.

## 1.6 Ziele der Arbeit

Der Literaturüberblick zeigt, dass viele der in Abschnitt 1.4 erläuterten Probleme der Spaltströmung in der Vergangenheit untersucht worden sind. Es bleiben jedoch einige Fragen offen, die für eine vollständige Beschreibung zu klären sind. Dies betrifft folgende Bereiche:

- Die Einströmverluste sind in der Literatur nur für den Grenzfall einer laminaren Strömung mit einem Rechteckgeschwindigkeitsprofil am Spalteintritt angegeben. Aufgrund der Zuströmgeometrie (siehe Abb. 1.13) ist in den Gehäusespalten von Schraubenvakuumpumpen von einem deutlich anderen Geschwindigkeitsprofil auszugehen, was zu anderen Verlusten im Einlaufbereich führt. Unklar sind zudem die Einströmverluste für die transitionelle und turbulente Strömung. Weiterhin gelten die in der Literatur aufgeführten Modelle nur für inkompressible Strömung; der Einfluss der Kompressibilität bleibt unberücksichtigt.
- In der Zuströmung zum Spalt wird der Druck infolge der Strömungsbeschleunigung und der inneren Reibung abgesenkt. Ferner ändert sich im Zustrom die Temperatur des Gases durch Beschleunigung und Wärmeübertragung. Beide Effekte müssen für genauere Modellierungen berücksichtigt werden, so dass geeignete Modelle entwickelt werden müssen.
- Die Untersuchungen zum Einfluss der Kompressibilität auf die Reibwerte beschränken sich auf die laminare Strömung; für transitionelle und turbulente Strömung gibt es nur wenige Erkenntnisse.
- Die größte Unsicherheit besteht in der Modellierung des Wärmeübergangs bei unterschiedlichen Wandtemperaturen. Die angegebenen Quellen beziehen sich auf den Sonderfall einer hydrodynamisch voll entwickelten Strömung über die gesamte Spalttiefe; der Einfluss der sich simultan entwickelnden Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschicht bleibt unberücksichtigt. Weiterhin existieren nur wenige Ergebnisse für die laminare Strömung sowie keine gesicherten

Erkenntnisse über den Übergangsbereich und den für Schraubenvakuumpumpen relevanten turbulenten Bereich. Die bekannten Modelle gelten zudem nur für inkompressible Strömung; der Einfluss der Kompressibilität bleibt unklar.

- Der Auswirkung der Rotordrehung auf die Reibwerte und die Wärmeübergänge ist bisher nicht untersucht worden.

Die vorliegende Arbeit soll die oben genannten Aspekte klären. Darüber hinaus soll ein Modell formuliert werden, dass die Berechnung der Spaltströmung in Schraubenvakuumpumpen ermöglicht.

Als Grundlage für die Modellerstellung dient die in Abb. 1.13 dargestellte Ersatzspaltgeometrie, die sich an den von Wenderott untersuchten Spalt anlehnt. Vor und hinter dem Spalt befinden sich große Volumina mit den Ruhedrückerücken  $p_{0,1}$  bzw.  $p_{0,2}$ . Die Wände können unterschiedliche Temperaturen haben, die sich von der Ruhetemperatur  $T_{0,1}$  im Kessel vor dem Spalt unterscheiden. Das Rotorersatzmodell kann mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotieren. Basierend auf den Ergebnissen von Dreißig [27] wird auch hier davon ausgegangen, dass eine stationäre Betrachtung der Spaltströmung ausreichend genau ist.

Das zu erstellende Berechnungsmodell soll folgende Eigenschaften aufweisen:

- Berechnung des Spaltmassenstroms in Abhängigkeit der Drücke  $p_{0,1}$  und  $p_{0,2}$ , der gegebenen Temperaturen und der Rotordrehzahl.
- Bestimmung der Wärmeströme in die Bauteile (Rotor und Gehäuse) und des Wärmestransportstroms des Gases. Den unterschiedlichen Wandtemperaturen ist dabei Rechnung zu tragen.
- Das Modell soll alle Strömungsbereiche abdecken, d.h. die Strömung kann turbulent, transitionell oder laminar sein. Weiterhin sind die Effekte der Gasverdünnung zu berücksichtigen.
- Alle in Abschnitt 1.4 aufgelisteten Spaltgeometrien müssen durch das Modell abgedeckt werden.
- Die Zusatzverluste in der Zuströmung und im Einlaufbereich sollen in geeigneter Form abgebildet werden.
- Die Kompressibilität des Gases ist zu beachten.
- Das Modell muss für den Einsatz in einer Kammermodellsimulation geeignet sein, so dass es mit moderatem Rechenaufwand auskommen sollte. Eine direkte Ankopplung eines Programms zur numerischen Lösung der Navier-Stokes bzw. Boltzmann-Gleichung scheidet deshalb aus.
- Die Formulierung des Modells darf keine Unstetigkeiten aufweisen, die Übergänge zwischen den einzelnen Strömungsbereichen sollten möglichst glatt erfolgen.

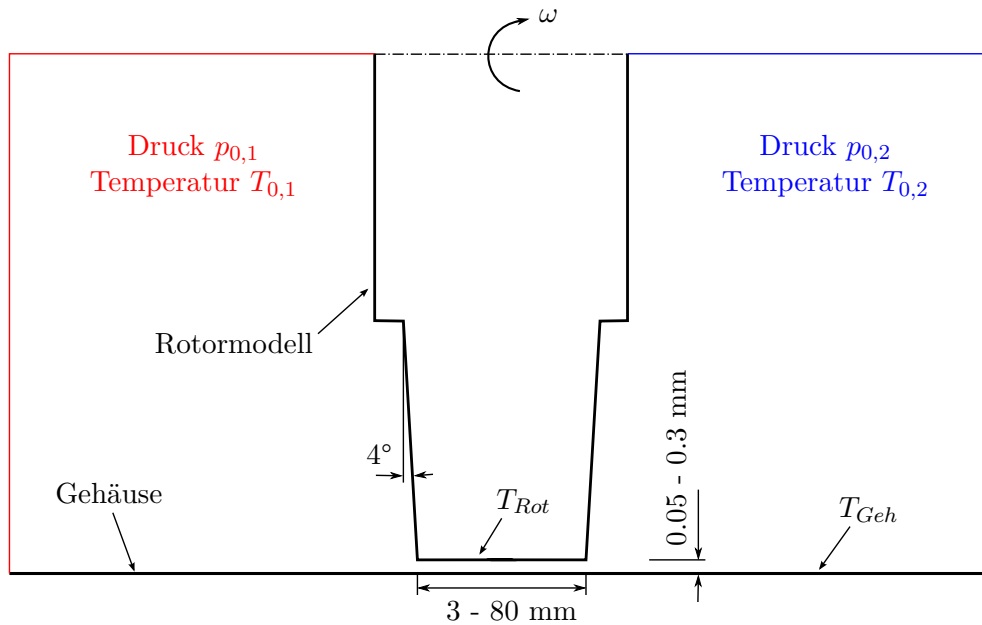


Abb. 1.13: Ersatzmodell für den Gehäusespalt. Die Geometrie lehnt sich dabei an das von Wenderott verwendete Modell an (siehe Abb. 1.6), allerdings wird auf eine Verrundung des “Rotors“ am Spalteintritt verzichtet. Die Kammern vor und hinter dem Spalt sind so groß gewählt, dass deren Abmessungen keinen Einfluss auf die Spaltströmung ausüben.

## 1.7 Vorgehensweise

Für das Aufstellen eines derartigen Modells sind verschiedene Wege denkbar. Zum einen kann durch eine sehr große Anzahl von Versuchen mit systematischer Variation aller Parameter eine entsprechend große Datenbasis geschaffen werden, in der durch Interpolation jeder beliebige Fall innerhalb der untersuchten Grenzen bestimmt werden kann. Als problematisch hierfür erweist sich die große Zahl an Parametern ( $p_{0,1}$ ,  $p_{0,2}$ ,  $T_{Rot}$ ,  $T_{Geh}$ ,  $T_{0,1}$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $u_{Rot}$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$ ,  $M_{mol}$ ), so dass dieses Vorgehen nicht zweckmäßig ist.

Ein sinnvollerer Weg ist die Ausnutzung strömungsmechanischer Ähnlichkeiten um die Anzahl an notwendigen Versuchen zu reduzieren. Dies führt auf das Konzept der lokalen Reibwerte und Nußeltzahlen, was eine detaillierte Auswertung der Versuchsströmungen erfordert. Da dies in Experimenten schwierig zu bewerkstelligen ist, wird hier der Simulation Vorzug gegeben. Wie schon in der Literatur beschrieben, spielen die Einlaufeffekte sowie die Gasdynamik für die verdünnte Strömung nur eine untergeordnete Rolle ([57], [85], [47]), was später nochmal in Kap. 8 gezeigt wird. Die im vorhergehenden Abschnitt erläuterten offenen Fragen beziehen sich demnach hauptsächlich auf den viskosen Strömungsbereich, so dass zur Untersuchung ein CFD-Programm zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen eingesetzt werden kann. Für diese Arbeit stand das kommerzielle Programm *Fluent 12.1* zur Verfügung.

Der Aufbau der Arbeit orientiert sich an der Modellerstellung. In Kap. 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen und Ähnlichkeitsregeln erläutert. Darauf folgend sind die eingesetzten numerischen Lösungsverfahren in Kap. 3 beschrieben. Zur systematischen Untersuchung der Spaltströmung wird diese zunächst als inkompressibel idealisiert. Die sich hierfür ergebenden Reibwerte und Einlaufverluste sind in dimensionsloser Form als Funktion der Reynoldszahl in Kap. 4 dargestellt. Das Problem der Wärmeübertragung bei inkompressibler Strömung wird in Kap. 5 behandelt. Im darauffolgenden Kap. 6 wird der Einfluss der Kompressibilität auf die Reibwerte und Wärmeübergangszahlen untersucht und geeignete Vereinfachungen zur Berechnung vorgeschlagen. Die Modellierung der Gasverdünnungseffekte ist in Kap. 7 beschrieben. Mit den bekannten dimensionslosen Größen für alle Strömungsbereiche wird das resultierende Modell in Kap. 8 aufgestellt und das Verhalten anhand einiger Beispielrechnungen verdeutlicht. Zur Validierung des Modells werden Experimente durchgeführt, die in Kap. 9 beschrieben sind. Abschließend folgt der Abgleich zwischen Modell und Messung.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Allgemeine Bilanzgleichung

In diesem Kapitel werden alle für die Berechnung relevanten Grundgleichungen und dimensionslosen Größen hergeleitet. Für die Ableitung dieser Grundgleichungen ist es zweckmäßig, eine allgemeingültige Erhaltungsgleichung für die beliebige Größe  $\phi$  aufzustellen, die als massenbezogener Wert verstanden wird ( $\phi = \Phi/m$ ). Je nach zu erhaltender physikalischer Größe wird später  $\Phi$  als Masse, Impuls, Energie und Geschwindigkeitsverteilungsfunktion (für die Ableitung der Boltzmann-Gleichung) gesetzt, womit sich die zugehörigen Erhaltungsgleichungen ergeben.

Zur Herleitung der allgemeinen Bilanzgleichung wird zunächst der Fluss pro Flächeneinheit dieser Größe  $J_{x,y,z}$  betrachtet, der durch die Oberflächen des in Abb. 2.1 skizzierten raumfesten Kontrollvolumens ein- und ausströmt. Die Änderung von  $J$  über das Kontrollvolumen kann durch eine Taylorreihenentwicklung bestimmt werden:

$$J_i(x_i + dx_i) = J(x_i) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad (2.1)$$

Die Erhaltung von  $\Phi$  für das Kontrollvolumen fordert, dass die zeitliche Änderung von  $\Phi$  im Kontrollvolumen plus den Flüssen von  $\Phi$  über die Oberflächen des Kontrollvolumens der Wirkung äußerer Quellen für  $\Phi$  entspricht:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left( J_i + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} \cdot dx_i - J_i \right) \cdot dx_j \cdot dx_k = S_\Phi \quad (2.2)$$

Durch Zusammenfassen und Kürzen des Volumens folgt die Bilanzgleichung für  $\phi$ :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S_\phi \quad (2.3)$$

Der Fluss  $J$  wird allgemein in einen konvektiven und diffusiven Anteil aufgeteilt:

$$J_i = \underbrace{\rho \cdot u_i \cdot \phi}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{\left( -\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)}_{\text{Diffusion}} \quad (2.4)$$

Der konvektive Anteil entsteht durch Transport von  $\phi$  infolge der Durchströmung des Kontrollvolumens mit der Strömungsgeschwindigkeit  $u_i$ , der diffusive Anteil beschreibt die durch den Gradienten von  $\phi$  im Strömungsfeld erzeugten Transportstrom. Dabei wird angenommen, dass dieser Transport proportional zum Gradienten  $\partial \phi / \partial x_i$  ist. Der Proportionalitätsfaktor  $\Gamma$  ist vom jeweiligen Problem abhängig

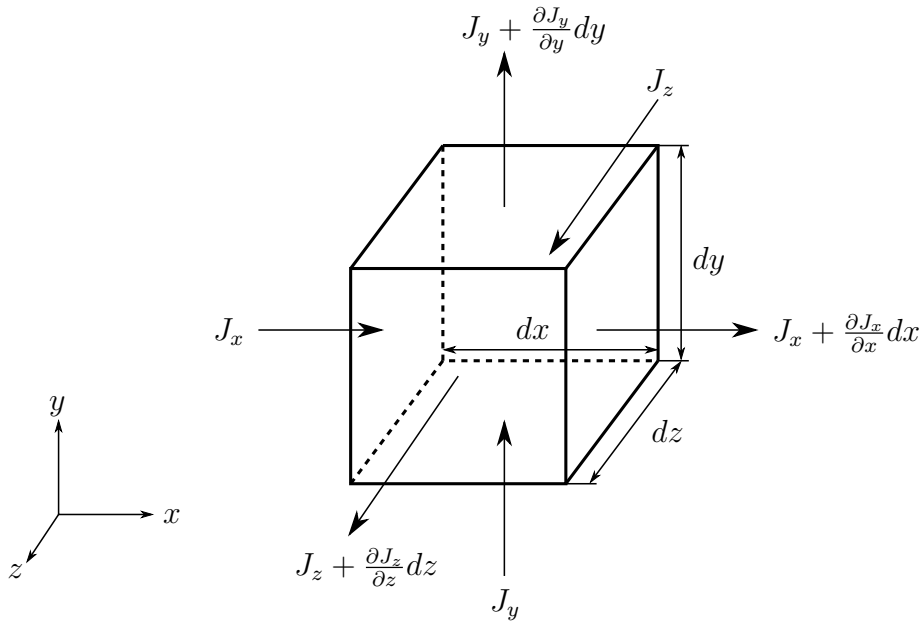


Abb. 2.1: Flussbilanz am allgemeinen Kontrollvolumen

und wird später für jede Grundgleichung angegeben.

Durch Einsetzen dieser Beziehung ergibt sich die allgemeine Erhaltungsgleichung für  $\phi$  in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (2.5)$$

Unter Verwendung der Vektorschreibweise kann die Gleichung in koordinatenfreier Form angegeben werden [68]:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \cdot \text{grad}(\phi)) + S_\phi \quad (2.6)$$

## 2.2 Erhaltungsgleichungen für viskose Strömung

Im Folgenden werden die Transportgleichungen für viskose Strömung hergeleitet, die der Übersichtlichkeit halber für kartesische Koordinaten angegeben werden. Für andere Koordinatensysteme (z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten) können mit Gl. 2.6 und entsprechenden Definitionen der Vektoroperatoren die Transportgleichungen umgeschrieben werden.

### 2.2.1 Massenerhaltung

Die Massenerhaltung für das Kontrollvolumen fordert, dass die zeitliche Änderung der Masse im Kontrollvolumen der Differenz zwischen ein- und ausströmender Masse über dessen Ränder entspricht. Die Erhaltungsgleichung für die Masse folgt damit aus für  $\Phi = m$  (d.h.  $\phi = 1$ ),  $S_\phi = 0$  (Quellenfreiheit) und  $\Gamma = 0$  (kein diffusiver Transport) aus Gl. 2.5:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Impulserhaltung

Aus der Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes auf das Kontrollvolumen folgt, dass die Änderung des Fluidimpulses gleich der Summe aller auf das Fluidelement einwirkenden Kräfte sein muss. Der Impuls ( $\Phi = m \cdot \vec{u}$ ,  $\phi = \vec{u}$ ) ist eine vektorielle Größe, womit sich für jede Raumrichtung eine Erhaltungsgleichung ergibt. Als äußere Kräfte (pro Fläche) wirken der Druck und die durch die innere Zähigkeit des Fluids hervorgerufenen Schub- und Normalspannungen auf das Kontrollvolumen.

Für die Berechnung der inneren Spannungen gilt für Newtonsche Fluide das Gesetz von Stokes (siehe z.B. [93]):

$$\tau_{ij} = \eta \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \cdot \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Das Symbol  $\delta_{ij}$  bezeichnet das Kronecker-Delta (für  $i = j$  gilt  $\delta_{ij} = 1$ , sonst  $\delta_{ij} = 0$ ). Die inneren Spannungen im Fluid werden durch Geschwindigkeitsgradienten verursacht und stellen einen diffusiven Ausdruck im Sinne von Gl. 2.5 dar. Zusammengesetzt ergibt sich die Impulserhaltungsgleichung für die Komponente  $m \cdot u_i$ :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

Die mögliche Einwirkung weiterer äußerer Kräfte wie z.B. Gravitation werden in dieser Arbeit vernachlässigt und sind nicht in der Gleichung berücksichtigt.

### 2.2.3 Energieerhaltung

Gemäß der allgemeinen Transportgleichung ist die Änderung der Energie im Kontrollvolumen plus der durch die Strömung ein- und ausfließenden Energieströme gleich der durch Wärmeleitung transportierten Energieströme sowie der von außen eingebrachten Arbeit. Diese setzt sich aus der durch Druck, Normal- und Schubspannungen verrichteten Arbeit und ggf. weiteren äußeren Energiequellen (z.B. Verbrennung) und der Arbeit durch Volumenkräfte (z.B. Schwerkraft) zusammen, die hier nicht auftreten bzw. vernachlässigt werden können.

Die zu erhaltende Größe ist die innere Energie plus die kinetische Energie:

$$\Phi = \rho \cdot (e + 1/2 \cdot |\vec{V}|^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{bzw.} \quad \phi = e + |\vec{V}|^2/2 \quad (2.10)$$

Der Energietransport infolge der Wärmeleitung im Fluid wird durch die Temperaturgradienten ausgelöst und bestimmt sich nach dem Fourierschen Gesetz ( $\dot{q}_i = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}$ ), stellt also einen diffusiven Fluss nach Gl. 2.5 dar.

Die von den Druck- und Schubspannungen geleistete Arbeit pro Zeit bestimmt sich aus dem Produkt von Geschwindigkeit und der Kraft in Richtung der Geschwindigkeit. Diese Leistungen (pro Fläche) in der Raumrichtung "i" bestimmen sich wie folgt (siehe z.B. [67]):

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial (p \cdot u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ii} \cdot u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} \cdot u_j)}{\partial x_i} + \frac{(\tau_{ik} \cdot u_k)}{\partial x_i} \quad (2.11)$$

Die inneren Spannungen können dabei aus dem Gesetz von Stokes (Gl. 2.8) berechnet werden. Das Einsetzen der Terme in die allgemeine Transportgleichung liefert nach einigen Umformungen die allgemeine Energiegleichung:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \eta \cdot \Phi \quad (2.12)$$

Die Dissipationsfunktion  $\Phi$  enthält die aus der Arbeit der Schubspannungen entstandenen Glieder, welche sich nach Einsetzen von Gl. 2.8 wie folgt schreibt:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \cdot & \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für kalorisch perfekte Gase kann mit  $e = c_p \cdot T - \frac{p}{\rho}$  die Gleichung weiter vereinfacht werden, so dass anstelle der inneren Energie  $e$  direkt die Temperatur  $T$  auftritt:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \eta \cdot \Phi \quad (2.14)$$

### 2.2.4 Stoffmodell

Die Kontinuitätsgleichung, die drei Impulsgleichungen und die Energiegleichung bilden insgesamt fünf Gleichungen für die Bestimmung der Strömungsgrößen  $u_i$ ,  $p$  und  $T$ . Für kompressible Gasströmungen ist zudem die Dichte nicht konstant und verändert sich im gesamten Strömungsfeld, so dass eine weitere Gleichung zur Schließung des Gleichungssystems bereitgestellt werden muss. Für Gase bei niedrigen Drücken wird dazu die ideale Gasgleichung verwendet:

$$p = \rho \cdot R_s \cdot T \quad R_s = R/M \quad (2.15)$$

## 2.3 Boltzmann Gleichung

In den bisherigen Herleitungen der Erhaltungsgleichungen wurde das Fluid als Kontinuum angesehen, dessen Eigenschaften durch die temperaturabhängigen Transportgrößen Viskosität und Wärmeleitfähigkeit beschrieben werden können. Diese Annahmen gelten in guter Näherung für Gasströmungen, solange die mittlere freie Weglänge der Moleküle wesentlich kleiner als die charakteristische Abmessung des Strömungsfeldes ist. Durch die in Vakuumpumpen auftretenden niedrigen Drücke wächst die mittlere freie Weglänge stark an, so dass sich in den Spalten je auch Strömungen einstellen können, in der das Fluid nicht mehr als Kontinuum angesehen werden kann und dementsprechend die oben hergeleiteten Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren (siehe auch Kap. 1.3).

Eine weitergehende mathematische Beschreibung der Strömungen von Gasen liefert die kinetische Gastheorie, die das Fluid nicht als ein Kontinuum betrachtet,



sondern den molekularen Aufbau des Fluids und die Stöße unter den Molekülen berücksichtigt. Dadurch wird es möglich, die makroskopischen Strömungsgrößen (Strömungsgeschwindigkeit, Druck, Temperatur etc.) aus der Bewegung der Moleküle zu berechnen und so das interessierende Strömungsfeld zu beschreiben.

Als Grundlage hierfür dient die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f$  [40]:

$$f(x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z, t) = \frac{dN}{dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\xi_x \cdot d\xi_y \cdot d\xi_z} \quad (2.16)$$

Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion beschreibt die Anzahl der Moleküle  $dN$ , die sich in dem Volumen  $dx \cdot dy \cdot dz$  an der Stelle  $(x, y, z)$  im Raum befinden und deren Geschwindigkeiten im Bereich  $\xi_x + d\xi_x, \xi_y + d\xi_y, \xi_z + d\xi_z$  liegen. Weiterhin kann sich die Verteilungsfunktion zeitlich ändern, so dass diese insgesamt von sieben Variablen abhängig ist. Die differentielle Darstellung impliziert dabei, dass sich die Verteilung der Moleküle durch eine differenzierbare Funktion darstellen lässt. Da sich auch bei niedrigen Drücken eine große Anzahl von Molekülen in einem endlichen Kontrollvolumen befinden, ist diese Annahme auch für Strömungen bis zur freien Molekularströmung mit  $Kn \gg 1$  gerechtfertigt [33].

Analog zu den Erhaltungsgleichungen für die Kontinuumströmung ändert sich die Verteilungsfunktion im Strömungsfeld durch konvektiven Transport und durch äußere Einflüsse. Diese beschränken sich auf die Auswirkungen der Molekülestöße untereinander; mögliche weitere äußere Kräfte wie z.B. Gravitation werden wieder vernachlässigt, zudem tritt kein diffusiver Transportmechanismus auf. Die Stöße der Moleküle werden als Kollisionen harter Kugeln betrachtet, die Effekte intermolekularer Kräfte werden nicht erfasst. Die Ableitung des Stoßterms ist ausführlich in der Literatur beschrieben (z.B. [40]) und wird hier nur angegeben. Die Transportgleichung für  $f$  folgt damit formal aus Gl. 2.5 mit  $\phi = f/\rho, u_i = \xi_i$  und dem Stoßterm als  $S_\phi$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\xi_1} \int_{A_C} (f' f'_1 - f f_1) \cdot |\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}| \cdot dA_C \cdot d\xi_1 \quad (2.17)$$

Diese Transportgleichung wird zu Ehren von Ludwig Boltzmann als Boltzmann-Gleichung bezeichnet. Die mit “'” gekennzeichneten Terme beziehen sich auf die Größen vor dem Stoß, die Terme ohne Index die nach der Kollision. Das Integral über die Geschwindigkeit umfasst alle Raumrichtungen und den gesamten Geschwindigkeitsraum:

$$\int_{\xi} f \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot d\xi_x \cdot d\xi_y \cdot d\xi_z \quad (2.18)$$

Die Lösung der Boltzmann-Gleichung liefert die molekulare Geschwindigkeitsverteilung  $f$ . Mit dieser können die makroskopischen Strömungseigenschaften bestimmt werden, so ergibt sich z.B. die makroskopische Strömungsgeschwindigkeit an einem Punkt  $(x, y, z)$  als Mittelwert aller Molekülgeschwindigkeiten:

$$\vec{u}(x, y, z) = \frac{1}{n} \cdot \int_{\xi} \vec{\xi} \cdot f(x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z) \cdot d\xi \quad (2.19)$$

Analog dazu können mit Kenntnis von  $f$  alle weiteren makroskopischen Strömungsgrößen (Druck, Dichte, Temperatur, Spannungstensor, Wärmeströme) bestimmt werden, die dazu benötigten Momentengleichungen sind in [40] zusammengefasst.

Eine wichtige Lösung der Boltzmann-Gleichung ist die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion für ein (makroskopisch) ruhendes Gas ohne Druck- und Temperaturgradienten. Hier treten keine räumlichen Gradienten der Verteilungsfunktion auf, so dass diese nur von der Molekülgeschwindigkeit abhängt. Die Bestimmungsgleichung für die Gleichgewichtsverteilungsfunktion folgt aus der Boltzmann-Gleichung mit  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  und  $\xi_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  zu:

$$f' f'_1 = f f_1 \quad (2.20)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert die sog. "Maxwell"-Verteilung eines Gases im Gleichgewicht [40], mit  $c$  ist hier der Betrag der molekularen Geschwindigkeit bezeichnet:

$$f_M(c) = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{c^2}{2RT}} \quad (2.21)$$

Sind in einer Gasströmung die Abweichungen von dem oben beschriebenen thermodynamischen Gleichgewichtszustand klein, kann die Verteilungsfunktion durch einen Reihenansatz angenähert werden. Nach der Chapman-Enskog-Methode wird die Verteilungsfunktion  $f$  durch eine Potenzreihe mit der Knudsenzahl als Parameter um ein lokales Gleichgewicht beschrieben:

$$f = f_M + Kn \cdot f + Kn^2 \cdot f^2 + \dots + Kn^n \cdot f^n \quad \text{mit} \quad Kn \ll 1 \quad (2.22)$$

Durch Einsetzen dieser Ansatzfunktion erster Ordnung ( $n = 1$ ) in die Momentengleichungen zur Bestimmung der Spannungen und Wärmeströme ergeben sich der Stokesche Reibungstensor (Gl. 2.8) sowie das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz [40]. Darüber hinaus liefert dieser Ansatz die Bestimmungsgleichungen für die Transportgrößen  $\eta$  und  $\lambda$ , für deren Lösung ein realistisches Molekülwechselwirkungsmodell erforderlich ist. Durch Anwenden des Impulserhaltungs- bzw. Energieerhaltungsprinzips ergeben sich wieder die bekannten Impulserhaltungsgleichungen (Gl. 2.9) und die Energieerhaltungsgleichung (Gl. 2.12). Diese stellen den Sonderfall der Boltzmann-Gleichung für kleine Abweichungen vom Gleichgewicht dar. Für große Abweichungen vom Gleichgewicht (d.h. große Knudsenzahlen) verlieren die Navier-Stokes-Gleichungen also ihre Gültigkeit. Dies ist in der Strömung stark verdünnter Gase (gekennzeichnet durch große Werte für die Knudsen-Zahl) der Fall, weswegen man zur Berechnung solcher Strömungen auf die Boltzmann-Gleichung selbst angewiesen ist.

Für allgemeine Nichtgleichgewichtszustände erweist sich die Lösung der Boltzmann-Gleichung aufgrund der Komplexität des Stoßterms als problematisch. In der Literatur sind deswegen vereinfachte Modellterme für den Stoßterm vorgeschlagen worden, das bekannteste Modell ist das nach Bhatnagar, Gross und Krook (abgekürzt: BGK) [16]. Dieses basiert auf der Beobachtung, dass ein Gas im Nichtgleichgewichtszustand wieder zum Gleichgewichtszustand im Sinne eines Ausgleichsprozesses relaxiert. Die entsprechend modifizierte Boltzmann-Gleichung lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega \cdot (f_M - f) \quad (2.23)$$

Die Kollisionsfrequenz  $\omega$  legt dabei die Zeitskala fest, mit der sich das Gas dem Gleichgewichtszustand annähert. Die Wahl der Kollisionsfrequenz ist nicht eindeutig,

zur Berechnung wird häufig der Ansatz

$$\omega(x, y, z) = \frac{p(x, y, z)}{\eta} \quad (2.24)$$

verwendet. Dieser überführt nach der Chapman- Enskog Entwicklung für kleine Knudsenzahlen das BGK- Modell in die Navier-Stokes Gleichungen mit dem dazugehörigen Ausdruck für den Spannungstensor [40]. Als nachteilig erweist sich jedoch, dass mit dieser Wahl die Prandtl-Zahl  $Pr = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} = 1$  beträgt, während für reale monoatomare Gase die Pr- Zahl  $Pr = 2/3$  ist. Als Konsequenz wird die Wärmeleitfähigkeit für Gase nicht richtig wiedergegeben, so dass sich dieses Modell nicht für Wärmeübergangsberechnungen eignet [88].

Zur korrekten Abbildung der Pr-Zahl hat Shakhov eine Modifikation des BGK- Modells vorgeschlagen, die die korrekte Pr-Zahl wiedergibt und damit Wärmeübergangsberechnungen ermöglicht. Die Boltzmann-Gleichung mit dem S- Modell lautet [88]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega \cdot \left\{ f_M \left[ 1 + \frac{2m}{15n(k_B T)^2} \cdot \vec{q} \cdot \vec{V} \left( \frac{m|\vec{V}|^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) \right] - f \right\} \quad (2.25)$$

Unter der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  wird darin die Relativgeschwindigkeit  $\vec{V} = \vec{\xi} - \vec{u}$  verstanden.

## 2.4 Dimensionsbetrachtung

Durch das Einführen von Bezugsgrößen können die Gleichungen in dimensionsloser Form dargestellt werden, so dass diese neben den dimensionslosen Größen noch die jeweils relevanten Parameter enthalten. So wird es möglich, die für einen bestimmten Fall erhaltene Lösung unter Beachtung von Ähnlichkeitsgesetzen auf andere Fälle zu übertragen, was die Anzahl zu betrachtender Fälle erheblich reduziert. Da dies für die Untersuchung der Spaltströmung, wie in Kap. 1.7 beschrieben, unerlässlich ist, werden die Grundzüge im Folgenden kurz erläutert.

Als Referenzgrößen für die Darstellung der Koordinaten wird die Bezugslänge  $L$  verwendet; die Zeit, Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur werden auf die jeweiligen Referenzgrößen bezogen und für den Druck wird der doppelte Staudruck  $\rho \cdot u_m^2$  als Bezug genommen:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{u_m} \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 \cdot u_m^2} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_{ref}} \quad (2.26)$$

Die Viskosität, Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität werden vereinfachend als konstant angesetzt. Das Einsetzen der Größen in die Kontinuitätsgleichung ergibt diese in dimensionslosen Größen, zusätzliche Parameter treten nicht auf. Für die Impulserhaltungsgleichungen (Gl. 2.9) hingegen ergeben sich zwei neue dimensionslose Größen:

$$St \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) \cdot \delta_{ij} \right) \quad (2.27)$$

Diese enthalten neben der bereits in Gl. 1.5 eingeführten Reynolds-Zahl die Strouhal-Zahl für instationäre Strömung als Parameter:

$$St = \frac{L}{u_m \cdot t_0} \quad (2.28)$$

Die Energiegleichung 2.14 kann in analoger Weise dimensionlos geschrieben werden:

$$St \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} = Ec \cdot \left( St \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} \right) + \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \right] + \frac{Ec}{Re} \cdot \bar{\Phi} \quad (2.29)$$

Die Gleichung enthält neben der Re- Zahl noch die Prandtl- Zahl  $Pr$  und die Eckert-Zahl  $Ec$  als weitere Ähnlichkeitskennzahlen, die folgendermaßen definiert sind:

$$Pr = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} \quad Ec = \frac{u_m^2 \cdot c_p}{T_{ref}} \quad (2.30)$$

Für kompressible Strömungen wird das Stoffmodell des idealen Gases (Gl. 2.15) dimensionslos dargestellt:

$$\kappa \cdot M^2 \cdot \bar{p} = \bar{\rho} \cdot \bar{T} \quad (2.31)$$

Dabei wird die Machzahl  $M$  als weitere dimensionslose Größe eingeführt, die das Verhältnis der Referenzgeschwindigkeit  $u_m$  zu der Schallgeschwindigkeit  $\sqrt{\kappa \cdot R_s \cdot T_{ref}}$  beschreibt:

$$M = \frac{u_m}{\sqrt{\kappa \cdot R_s \cdot T_{ref}}} \quad (2.32)$$

Eine analoge Analyse kann auch für die Boltzmann-Gleichung mit folgenden Bezugsgrößen durchgeführt werden:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{c_m} \quad \bar{f} = \frac{f}{n/c_m^3} \quad \bar{A}_c = A_c \cdot n \cdot l_f \quad (2.33)$$

Zur Normierung der Verteilungsfunktion wird hierbei die Teilchendichte  $n$  und die mittlere thermische Geschwindigkeit der Moleküle  $c_m$  verwendet, die dem Mittelwert des Geschwindigkeitsbetrages der Maxwell-Verteilung entspricht [33]:

$$c_m = \sqrt{\frac{8RT}{M}} \quad (2.34)$$

Für die dimensionslose Darstellung der Stoßfläche wird die mittlere freie Weglänge  $l_f$  der Moleküle verwendet. Daraus ergibt sich die Boltzmann-Gleichung in dimensionsloser Form zu:

$$St \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \bar{\xi}_i \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{1}{Kn} \int \int_{\bar{\xi}_1 \bar{A}_c} (\bar{f}' \bar{f}'_1 - \bar{f} \bar{f}_1) \cdot |\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}| \cdot d\bar{A}_c \cdot d\bar{\xi}_1 \quad (2.35)$$

Neben der Strouhal- Zahl für den instationären Term enthält die Boltzmann-Gleichung die bereits in Abschnitt 1.3 eingeführte Knudsen-Zahl  $Kn$  als Parameter. Alternativ zur mittleren Geschwindigkeit der Moleküle kann auch die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Moleküle als Referenz verwendet werden:

$$c_w = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot c_m \quad (2.36)$$

Wird diese anstelle von  $c_m$  eingesetzt, so erhält man folgenden Ähnlichkeitsparameter vor dem Stoßterm, der in der Literatur als ‘‘Verdünnungsfaktor‘‘ (engl. ‘‘rarefaction parameter‘‘) bekannt ist [88]:

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{L}{l_f} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{Kn} \quad (2.37)$$

Dieselbe Analyse kann auch für die Boltzmann-Gleichung mit den im vorherigen Abschnitt vorgestellten Modellen für den Stoßterm durchgeführt werden, die Kn-Zahl bleibt dabei als Ähnlichkeitsparameter erhalten.

Damit Strömungen zueinander ähnlich, sind müssen sie auf die gleichen dimensionslosen Gleichungen führen, die dann nur eine (dimensionslose) Lösung haben. Dazu müssen zwei Ähnlichkeitsregeln erfüllt sein:

1. Für viskose Strömungen müssen die dimensionlosen Parameter  $Re$ ,  $St$ ,  $Pr$ ,  $Ec$ ,  $M$ ,  $\kappa$  identisch sein. Falls die Boltzmann-Gleichung zur Analyse verwendet wird, gilt entsprechendes für  $Kn$  (bzw.  $\delta$ ) und  $St$ .
2. Die (dimensionslosen) Randbedingungen müssen gleich sein. Das betrifft zum einen die Geometrie des Strömungsraumes, die bezogen auf den Längenmaßstab  $L$  identisch sein muss. Zum anderen erfordert die Eindeutigkeit der Lösung, dass auch die Randwerte für  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$  (für viskose Strömung) bzw. für  $f$  den gleichen Verlauf über der dimensionslosen Zeit  $\bar{t}$  haben.

Diese Regeln gelten für allgemeine instationäre, kompressible Gasströmungen mit Wärmeübertragung. Für einfachere Fälle reduziert sich die Anzahl der Ähnlichkeitsparameter. So bleibt z.B. für stationäre, viskose, inkompressible Strömung ohne Wärmeübertragung die Reynolds-Zahl als einziger Parameter bestehen. Soll in diesem Fall die Wandschubspannungsverteilung in  $x$ -Richtung ausgewertet werden, so kann dies über den dimensionslosen Reibwert geschehen ( $y$  bezeichnet hier die wandnormale Koordinatenrichtung):

$$c_{f,x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2.38)$$

Mit dem bekannten dimensionslosen Reibwert kann dann unter Berücksichtigung von Gl. 2.26 und des Stokesschen Reibungsgesetzes die dimensionsbehaftete Wandschubspannung bestimmt werden:

$$\tau_w(x, y, z) = \eta \cdot c_{f,x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re) \cdot \frac{u_m}{L} \quad (2.39)$$

Tritt in einer solchen inkompressiblen Strömung Wärmeübertragung auf, so ist die Energiegleichung zusätzlich zu berücksichtigen. Bei Vernachlässigung der Arbeitsanteile der Druckkräfte und der Dissipation tritt nach Gl. 2.29 zusätzlich die Pr-Zahl als Parameter auf. Ist für einen solchen Fall die Wärmeübertragung an den Wänden zu bestimmen, so kann in analoger Weise zu dem Reibwert ein dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient bestimmt werden, der in der Literatur als Nußelt-Zahl  $Nu$  bezeichnet wird:

$$Nu(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re, Pr) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \quad (2.40)$$

Die Berechnung des dimensionsbehafteten Wärmestroms kann wieder durch das Fouriersche Gesetz unter Beachtung von Gl. 2.26 erfolgen.

Auf diese Weise ist es möglich, die Lösungen der dimensionslosen Gleichung auf reale, dimensionsbehaftete Strömungen zu übertragen. Für eine systematische Untersuchung von Strömungen ist es also hinreichend, die relevanten Ähnlichkeitsparameter zu variieren und die interessierenden dimensionslosen Ergebnisse (z.B. Reibwert oder Nußeltzahl) als Funktion dieser Parameter zu bestimmen. Von diesem Vorgehen wird in der Untersuchung der Spaltdurchströmung in den Kap. 4 - 7 Gebrauch gemacht, um diese wie gefordert auf die Vielzahl der in Schraubenvakuumpumpen auftretenden Fälle anwenden zu können.

## 2.5 Turbulenzmodellierung

Wie in Kap. 1.4 erläutert kann die Strömung in den Gehäusespalten bei hohen Drücken turbulent werden. Die im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Erhaltungsgleichungen gelten auch für turbulente Strömungen, die generell instationär und durch starke Wirbelbildung unterschiedlichster Größenordnung gekennzeichnet sind. Eine direkte numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen hierfür ist prinzipiell möglich, wird aber durch die Notwendigkeit einer sehr hohen räumlichen und zeitlichen Auflösung erschwert. Die direkte Simulation der turbulenten Strömungsbewegungen ist deswegen auf einfache Strömungsprobleme, wie z.B. die Strömung entlang einer ebenen Wand, beschränkt.

Eine derart detaillierte Strömungsbeschreibung ist für praktische Anwendungen selten von Nutzen; im Allgemeinen ist es ausreichend, die sich aus der turbulenten Bewegung ergebenden Mittelwerte der Strömungsgrößen zu kennen. Die geeignete Mittelung führt auf die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (engl.: "RANSE - Reynolds-Averaged Navier Stokes Equations"). Sämtliche turbulenten Bewegungen werden dabei durch räumlich angepasste Transportkoeffizienten (Viskosität, Wärmeleitfähigkeit) abgebildet, die Erhaltungsgleichungen können direkt nach den gemittelten Strömungsgrößen gelöst werden. Diese Art der Turbulenzmodellierung mit den dazugehörigen Turbulenzmodellen ist am weitesten entwickelt und liefert bei geeigneter Auswahl des Turbulenzmodells gute Ergebnisse.

Neben der RANSE-Modellierung stellt die in jüngerer Zeit entwickelte Grobstruktursimulation (abgekürzt: "Large Eddy Simulation - LES") eine verfeinerte Modellierung der turbulenten Größen dar. Die Grundidee dieser Methode ist, die größeren turbulenten Wirbel direkt zu simulieren und die kleineren durch geeignete Modelle abzubilden. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen räumlich gefiltert und die Wirbel oberhalb der Filtergrenze werden durch numerische Lösung der instationären, dreidimensionalen Erhaltungsgleichungen berechnet. Die kleineren Wirbel werden durch Modelle wie das Smagorinsky-SGS Modell abgebildet [69]. Dieses Verfahren ist aufgrund der benötigten zeitlichen und räumlichen Auflösung deutlich aufwendiger als die RANSE-Modelle, ist jedoch schon erfolgreich auf technisch relevante Strömungen angewandt worden.

Eine besondere Herausforderung stellen Strömungen dar, in denen laminare, transitionelle und turbulente Strömungsgebiete auftreten. Für das Gehäusespaltmodell trifft dies zu, da  $Re_P$  von sehr kleinen Werten (bei niedrigen Drücken) bis etwa  $Re_P \approx 15000$  variieren kann. Weiterhin kann auch für  $Re_P$ -Zahlen im Bereich der

laminaren Spaltdurchströmung Turbulenz im Nachlauf hinter dem Spaltaustritt auftreten, die Strömung also vom laminaren in den turbulenten Bereich wechseln.

Für die RANSE-Modellierung kann in einem solchen Fall nicht im gesamten Strömungsgebiet mit einem aktivierten Turbulenzmodell gerechnet werden; es muss vielmehr anhand geeigneter Kriterien entschieden werden, wo die Turbulenzproduktion aktiviert ist und in welchen Bereichen laminare Strömung vorliegt. Dazu sind verschiedene Transitionsmodelle entwickelt worden, die aus Experimenten abgeleitete Kriterien für das Übergangverhalten bereitstellen.

Neuere Untersuchungen zeigen, dass mit geeigneten Feinstruktur- Modellen die LES-Modellierung grundsätzlich für transitionelle Strömungen eingesetzt werden kann [77]. Die höhere Abbildungsgüte lässt genauere Ergebnisse als das die RANSE-Methode erwarten, aber auch hier werden halbempirische Modelle benötigt, die für einen Strömungstyp (z.B. Rohrströmung, Strömung in Turbomaschinen etc.) kalibriert sind. Neuere Entwicklungen der RANSE-Modelle (gekoppelt mit einem Transitionsmodell) sind erfolgreich auf Strömungen in Rohren und Kanälen bei niedrigen Re-Zahlen angewendet worden, so dass dieses Modell hier zum Einsatz kommt. Die dazugehörigen Grundlagen und das Modell werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

### 2.5.1 Reynolds gemittelte Navier-Stokes Gleichungen

In einer turbulenten Strömung schwanken die Strömungsgrößen zeitlich um einen Mittelwert, d.h. die allgemeine Strömungsgröße  $\phi$  kann als ein zeitlicher Mittelwert plus eine Fluktuation aufgefasst werden (siehe Abb. 2.2):

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x, t) \quad \text{mit} \quad \bar{\phi}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x, t) dt \quad (2.41)$$

Aus der obigen Definition folgt sofort, dass  $\overline{\phi'} = 0$  gilt. Für instationäre Strömungen muss die Mittelung erweitert werden und über eine genügend große Anzahl  $N$  von Ensembles des Strömungsvorgangs erfolgen, d.h.

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(x, t) \quad (2.42)$$

Im allgemeinen Fall der kompressiblen Strömung erweist es sich als sinnvoll, die massengemittelte oder auch Favre-gemittelte Größe  $\tilde{\phi}$  mit der Schwankungsgröße  $\phi''$  einzuführen ( $\phi = \tilde{\phi} + \phi''$ ):

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho \cdot \phi}}{\bar{\rho}} \quad \frac{\overline{\rho \cdot \phi}}{\bar{\rho}} = \tilde{\phi} + \frac{\overline{\rho \cdot \phi''}}{\bar{\rho}} \quad (2.43)$$

Analog zu  $\bar{\phi'}$  ist die massengemittelte Größe  $\frac{\overline{\rho \cdot \phi''}}{\bar{\rho}} = 0$ ; die zeitlich gemittelte Fluktuation von  $\phi''$  ist jedoch ungleich Null (d.h.  $\overline{\phi''} \neq 0$ ).

Damit können die massengemittelten Werte für Geschwindigkeit und Temperatur eingeführt werden:

$$\vec{V} = \vec{\tilde{V}} + \vec{V}'' \quad T = \tilde{T} + T'' \quad (2.44)$$

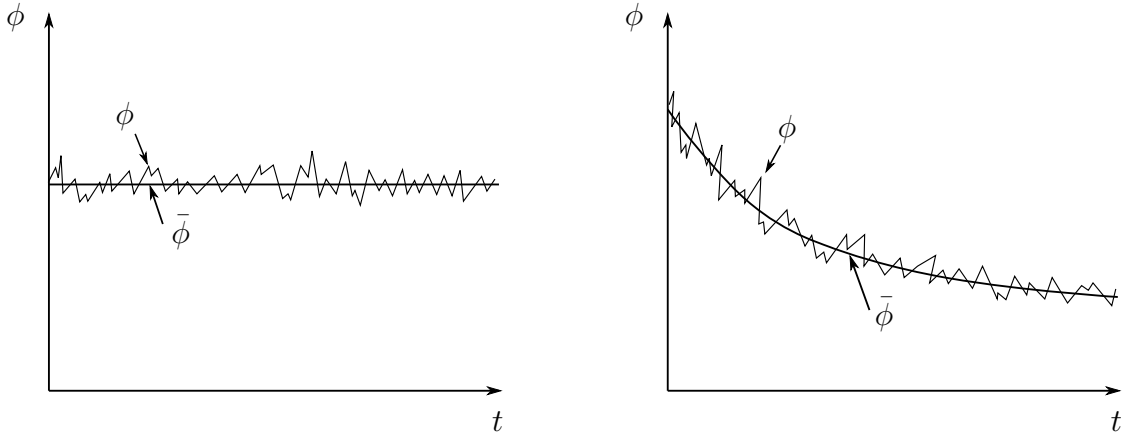


Abb. 2.2: Mittelung der Strömungsgröße  $\phi$  in einer turbulenten Strömung. Für stationäre Strömungen (linkes Bild) wird  $\phi$  über einen hinreichend langen Zeitraum gemittelt, um den Mittelwert  $\bar{\phi}$  zu bestimmen. Für instationäre Strömungen (rechtes Bild) muss über eine ausreichende Anzahl von gleichen Versuchen (Ensembles) gemittelt werden, um  $\bar{\phi}$  zu erhalten.

Die Dichte selbst und der Druck werden nur einfach zeitlich gemittelt nach Gl. 2.41:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad p = \bar{p} + p' \quad (2.45)$$

Führt man nun die Mittelung mit den obigen Definitionen für alle Erhaltungsgleichungen (Gl. 2.7, 2.9, 2.14) durch, so gilt für alle linearen Terme  $\overline{\rho \cdot \phi} = \bar{\rho} \cdot \bar{\phi}$  und die Gleichungen enthalten anstelle von  $\rho \cdot \phi$  die gemittelten Größen  $\bar{\rho} \cdot \bar{\phi}$ . Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.46)$$

Die konvektiven Terme der Impulsgleichungen sind nichtlinear, durch Mittelung dieser Terme entstehen neue Terme auf der linken Seite der Gleichung. Unter Berücksichtigung von  $\overline{\rho \cdot \phi''} = 0$  ergibt sich:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i \cdot \tilde{u}_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''})}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

Da nach der Favre-Mittelung  $\overline{\phi''} \neq 0$  gilt, enthält auch der gemittelte Spannungstensor zusätzliche Größen:

$$\bar{\tau}_{ij} = \eta \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \cdot \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \right) \cdot \delta_{ij} \quad (2.48)$$

Nach [67] sind diese neuen Terme (die letzten beiden Summanden auf der rechten Seite) jedoch klein und können vernachlässigt werden. In der üblichen Darstellung werden die aus der Mittelung der konvektiven Terme entstandenen Glieder auf die rechte Seite geschrieben und werden aufgrund ihrer Dimension als turbulente



Spannungen  $\tau_t$  bezeichnet. Die Impulserhaltungsgleichungen nehmen damit folgende Form an:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{\vec{V}})}{\partial t} + \bar{\rho} \cdot (\tilde{\vec{V}} \cdot \nabla) \tilde{\vec{V}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\tau} + \nabla \cdot \tau_t \quad (2.49)$$

$$\tau_t = \begin{pmatrix} -\overline{\rho \cdot u''^2} & -\overline{\rho \cdot u'' \cdot v''} & -\overline{\rho \cdot u'' \cdot w''} \\ -\overline{\rho \cdot v'' \cdot u''} & -\overline{\rho \cdot v''^2} & -\overline{\rho \cdot v'' \cdot w''} \\ -\overline{\rho \cdot w'' \cdot u''} & -\overline{\rho \cdot w'' \cdot v''} & -\overline{\rho \cdot w''^2} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Der Tensor der turbulenten Spannung  $\tau_t$  ist symmetrisch, da  $-\overline{\rho \cdot u''_i \cdot u''_j} = -\overline{\rho \cdot u''_j \cdot u''_i}$  gilt. Durch die Mittelung sind also sechs neue unbekannte Größen entstanden, für deren Bestimmung keine weiteren Gleichungen zur Verfügung stehen. Um die gemittelten Impulsgleichungen lösen zu können, sind deshalb Turbulenzmodelle für die sechs unbekanntten Spannungen nötig, die im nächsten Abschnitt erläutert werden.

Um die Favre-Mittelung für die Energiegleichung durchführen zu können, werden konvektive Terme auf der linken Seite mit der Kontinuitätsgleichung erweitert, so dass sich folgende Darstellung ergibt [67]:

$$\frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T \cdot u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \eta \cdot \Phi \quad (2.51)$$

Nach Einführen der Favre-Mittelung enthält die nichtlineare linke Seite die Mischterme  $\overline{\rho \cdot T'' \cdot u''_i}$ . Auf der rechten Seite ergeben sich Ausdrücke  $\overline{u''_i \cdot (\partial p / \partial x_i)}$  und  $\overline{\lambda \cdot (\partial T'' / \partial x_i)}$ , die im Vergleich zu den Mischtermen der linken Seite klein sind und vernachlässigt werden.

In der Dissipationsfunktion  $\Phi$  entstehen neue Terme der Form  $\overline{\tau_{ij} \cdot (\partial u''_i / \partial x_j)}$  die jedoch klein gegenüber  $\overline{\tau_{ij} \cdot (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j)}$  sind und ebenso vernachlässigt werden. Die Modellierung der Turbulenz beschränkt sich auf die durch die Mittelung des konvektiven Glieds entstandenen Terme, die in Analogie zu den Impulserhaltungsgleichungen auf die rechte Seite der Gleichung geschrieben werden. Die gemittelte Energiegleichung lautet somit:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u''_i} \right] + \eta \cdot \Phi \quad (2.52)$$

## 2.5.2 Turbulenzmodelle

In Analogie zu den viskosen Spannungen schlug Boussinesq vor, die turbulenten Spannungen als Produkt einer scheinbaren, turbulenten Viskosität mit der der Scherung des Fluidelements zu modellieren:

$$\overline{-\rho \cdot u''_i \cdot u''_j} = \eta_t \cdot \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \delta_{ij} \cdot k \quad (2.53)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist notwendig, damit die Gleichung gültig bleibt, wenn über die drei Normalspannungen aufsummiert wird [91],  $k$  ist die

turbulente kinetische Energie pro Einheitsmasse:

$$k = \frac{1}{2} \cdot \overline{u_i'' \cdot u_i''} = \frac{1}{2} (\overline{u_x'' \cdot u_x''} + \overline{u_y'' \cdot u_y''} + \overline{u_z'' \cdot u_z''}) \quad (2.54)$$

Der Effekt der turbulenten Fluidbewegungen unterschiedlichster Ausprägung und Richtung wird in diesem Ansatz nur als eine turbulente Viskosität  $\eta_t$  modelliert. Es ist wichtig zu bemerken, dass es sich dabei um eine Modellgröße handelt, die keine Stoffeigenschaft des Fluids selbst ist und sich räumlich und zeitlich ändert. Der oben gemachte Ansatz impliziert, dass die turbulente Viskosität in jede Raumrichtung gleich ist, die turbulenten Bewegungen also isotrop sind. In realen Strömungen ist dies jedoch nie der Fall, die isotrope Behandlung durch den Boussinesq-Ansatz stellt eine wesentliche Vereinfachung der tatsächlichen physikalischen Vorgänge dar. Für viele technisch relevante Strömungen konnten trotz dieser Vereinfachung gute Ergebnisse erzielt werden, weshalb der größte Teil der RANSE-Modelle auf dieser Annahme aufbaut. Als problematisch erweisen sich jedoch Strömungen, die durch starke Anisotropie geprägt sind, wie z.B. Strömungen mit ausgeprägtem Drall. Bei der Spaltströmung mit Rotordrehung handelt es sich um eine solche Strömung, was die Verwendung eines isotropen RANSE-Modells in Frage stellt. Für solche Strömungen sind spezielle Turbulenzmodelle entwickelt worden wie z.B. das RNG-  $k - \epsilon$  Modell mit einem entsprechenden Korrekturterm [8]. Der Einsatz dieses Turbulenzmodells gestaltet sich für den vorliegenden Fall jedoch schwierig, da es nur bedingt für niedrige Re-Zahlen geeignet ist und keine Implementierung mit einem Transitionsmodell existiert.

Eine mögliche Alternative zur Berücksichtigung der Rotordrehung ist die Verwendung eines Reynolds-Stress Modells, das nicht auf der Boussinesq-Annahme beruht und jede der sechs zusätzlichen turbulenten Spannungen durch eine geeignete Transportgleichung abbildet. Allerdings erfordert dieser Ansatz Modellvorstellungen für den diffusiven Transport und die Dissipation von  $\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''}$ , für die entsprechende Modellgleichungen entwickelt worden sind. Leider existiert bisher kein Transitionsmodell für die Reynolds-Stress Modelle, so dass der Einsatz im Übergangsbereich zwischen laminarer und voll turbulenter Strömung nicht möglich ist. Für den hier vorliegenden Fall kann die Turbulenz beispielsweise durch die Rotordrehung ausgelöst werden ( $Re_c > Re_{c,krit}$ ), während die Reynoldszahl der Spaltdurchströmung  $Re_P$  noch unter ihrem kritischen Wert liegt (siehe Erläuterungen in Kap. 4.6.1). Die Turbulenz dürfte in diesem Fall von starker Anisotropie geprägt sein und es ist zu erwarten, dass die turbulenten Bewegungen die Spaltdurchströmung signifikant beeinflussen, also eine starke Wechselwirkung zwischen beiden Strömungsformen besteht.

Die Verwendung eines vorhandenen Transitionsmodells in Verbindung mit einem Reynolds-Stress-Modell zur Beschreibung solcher Effekte ist nicht ohne weiteres möglich, da die Vorgabe einer globalen kritischen Impulsverlustdicken-Reynoldszahl zur Aktivierung der Turbulenzproduktion nicht mehr ausreicht (siehe Abschnitt 2.5.4). Vielmehr müssten Kriterien entwickelt werden, die den Einsatz der Turbulenz für jede der sechs Spannungen einzeln beschreiben und zusätzlich noch vorhandene Wechselwirkungen berücksichtigen. Da die Entwicklung derart komplexer Modelle den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit übersteigt, muss die Untersuchung der Strömung im Transitionsbereich auf den Sonderfall mit ruhendem Rotor beschränkt werden.

Moderne Turbulenzmodelle beruhen auf Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und einer weiteren Transportgleichung für eine dissipative Größe, aus der die turbulente Viskosität bestimmt wird. Für die turbulente kinetische Energie  $k$  (siehe Definitionsgleichung 2.54) kann die Transportgleichung aus den gemittelten Impulsgleichungen hergeleitet werden [67]:

$$\rho \cdot \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \cdot u_j \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} = \eta \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' \cdot u'_i}) - \rho \cdot \overline{\frac{\partial k'}{\partial x_j} \cdot u'_j} - \rho \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} - \eta \cdot \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (2.55)$$

Die konvektiven Terme auf der linken Seite und der erste Diffusionsterm auf der rechten Seite enthalten keine Schwankungsgrößen und müssen deswegen nicht weiter modelliert werden. Die restlichen vier Glieder auf der rechten Seite können dagegen nicht exakt berechnet werden und müssen durch geeignete Modellansätze beschrieben werden. Dabei ist es üblich, die ersten drei Terme als Diffusionsterme aufzufassen und diese analog zur Boussinesq-Annahme zu modellieren [8]:

$$\eta \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' \cdot u'_i}) - \rho \cdot \overline{\frac{\partial k'}{\partial x_j} \cdot u'_j} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.56)$$

Der vierte Term auf der rechten Seite beschreibt die Produktion von  $k$  und wird ebenfalls gemäß des Boussinesq-Ansatzes modelliert:

$$P_k = -\rho \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} \approx \eta_t \cdot S^2 \quad (2.57)$$

$S$  ist der Betrag des Scherungstensors, dessen Definition im Anhang A aufgeführt ist. Der fünfte Term der rechten Seite ist die turbulente Dissipation, die die Umwandlung der kinetischen Energie der kleinen Wirbel in innere Energie des Fluids beschreibt. Gewöhnlich wird diese als Produkt aus Dichte und der Dissipation der kinetischen Energie pro Einheitsmasse  $\epsilon$  geschrieben:

$$D_k = \eta \cdot \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} = \rho \cdot \epsilon \quad (2.58)$$

Der Dissipationsterm ist von der gleichen Größenordnung wie der Produktionsterm und hat deswegen einen großen Einfluss auf die Berechnung turbulenter Strömungen. Ähnlich zu der Transportgleichung für  $k$  ist es möglich, eine Transportgleichung für  $\epsilon$  aus den Impulserhaltungsgleichungen abzuleiten. Allerdings enthält diese viele unbekannte Terme, so dass i.A. direkt eine Modellgleichung verwendet wird. Das bekannteste und am meisten verbreitete Modell dieser Art ist das von Launder und Spalding 1974 angegebene  $k - \epsilon$  Modell, mit dem für große Re-Zahlen unter Verwendung von Wandfunktionen zur Beschreibung der laminaren Unterschicht und des Übergangsbereiches gute Ergebnisse erzielt werden können. Bei niedrigen Re-Zahlen können diese Wandfunktionen nicht eingesetzt werden und die Gleichungen müssen bis zur Wand integriert werden. Als problematisch erweist sich die Randbedingung für  $\epsilon$ , da für  $\epsilon = 0$  die turbulente Viskosität gegen unendlich strebt. Um dieses Problem zu umgehen, wurden in der Literatur verschiedene Dämpfungsfunktionen

vorgeschlagen, die sicherstellen, dass in Wandnähe die viskosen Spannungen gegenüber den turbulenten dominieren.

Mit den bekannten Werten für  $k$  und  $\epsilon$  kann die turbulente Viskosität im Strömungsfeld bestimmt werden:

$$\eta_t = C_\mu \cdot \rho \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.59)$$

Ein alternatives Modell wurde von Wilcox entwickelt [94], das statt der Dissipation  $\epsilon$  die turbulente Frequenz  $\omega = \epsilon/k$  verwendet. Die turbulente Frequenz wird wiederum durch eine Transportgleichung bestimmt; für die turbulente Viskosität gilt:

$$\eta_t = \rho \cdot \frac{k}{\omega} \quad (2.60)$$

Im Gegensatz zu  $\epsilon$  strebt  $\omega$  in Wandnähe gegen unendlich, in praktischen Rechnungen wird in Wandnähe eine hyperbolische Verteilung angesetzt. Die Sensitivität der Ergebnisse gegenüber diesem Faktor ist relativ klein, wodurch sich das  $k - \omega$  gegenüber dem  $k - \epsilon$  Modell empfiehlt. Als nachteilig erweist sich jedoch, dass das  $k - \omega$  recht empfindlich auf die Randbedingungen für  $\omega$  am Ein- und Auslass reagiert, während das  $k - \epsilon$  Modell weit weniger sensitiv zur entsprechenden Randbedingung für  $\epsilon$  ist [60].

### 2.5.3 SST- $k - \omega$ Turbulenzmodell

Die Beobachtung bzgl. der Sensitivitäten des  $k - \omega$  und  $k - \epsilon$  Modells verleitete Menter [61], ein hybrides Modell zu entwickeln, das die Vorteile beider Modelle vereint. Dieses Modell verwendet das  $k - \omega$  Modell in Wandnähe, um dort ohne Wandfunktionen eine hohe Abbildungsgüte zu erreichen, während außerhalb der Grenzschicht auf das  $k - \epsilon$  Modell umgeschaltet wird, das weniger empfindlich auf Anströmrandbedingungen reagiert. Das Modell basiert auf einer  $k - \omega$  Formulierung, das  $k - \epsilon$  wird dazu entsprechend  $\epsilon = k \cdot \omega$  umgeformt. Die resultierende Transportgleichung für  $k$  lautet:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_{k,SST} - D_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.61)$$

$$P_{k,SST} = \min(P_k, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega) \quad D_k = \rho \cdot \beta^* \cdot k \cdot \omega \quad (2.62)$$

Der Produktionsterm  $P_{k,SST}$  enthält dabei gegenüber der Formulierung nach Gl. 2.57 einen Begrenzungsterm, der eine übermäßige Erzeugung von turbulenter kinetischer Energie im Bereich von Staupunkten verhindert. Der Übergang zwischen dem  $k - \epsilon$  und dem  $k - \omega$  Modell für den Diffusionsterm erfolgt durch eine Anpassung der Prandtl-Zahl  $\sigma_k$  mit der Übergangsfunktion  $F_1$ :

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1/\sigma_{k,1} + (1 - F_1)/\sigma_{k,2}} \quad (2.63)$$

Die genaue Definition von  $F_1$  ist im Anhang A gegeben. Die zusammengesetzte Transportgleichung für  $\omega$  gibt Menter wie folgt an:

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = P_{\omega,SST} - D_\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.64)$$

Die Produktions- und Destruktionsterme werden folgendermaßen modelliert:

$$P_{\omega,SST} = \alpha \cdot \frac{\omega}{k} \cdot P_{k,SST} \quad D_{\omega} = \rho \cdot \beta^* \cdot k \cdot \omega \quad (2.65)$$

Der Vorfaktor  $\alpha$  enthält in der Implementierung in Fluent 12.0 eine Reihe von Korrekturen, um Effekte bei niedrigen Re-Zahlen genauer zu erfassen. Die Modellkonstante  $\beta_1$  des Destruktionsterms wird wieder durch die Übergangsfunktion  $F_1$  zwischen den Modellen angepasst, die Bestimmungsgleichungen für beide Faktoren sind im Anhang A aufgeführt. Die Berechnung der turbulenten Viskosität folgt Gl. 2.60 mit einem Begrenzungsterm:

$$\eta_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[ \frac{1}{\alpha^*}, \frac{S \cdot F_2}{a_1 \cdot \omega} \right]} \quad (2.66)$$

Dieser Begrenzungsterm wird in Grenzschichten mit positivem Druckgradienten groß und stellt sicher, dass in einem solchen Fall die Schubspannungen innerhalb der Grenzschicht direkt proportional zur turbulenten kinetischen Energie sind [61]. Aufgrund dieser zusätzlichen Eigenschaft wird dieses Modell “Shear-Stress Transport“, abgekürzt SST- $k - \omega$  Modell genannt. Um ein korrektes Erkennen der jeweiligen Strömungsform zu erreichen, wird die Übergangsfunktion  $F_2$  eingeführt, die einen Wert von 1 innerhalb und 0 außerhalb der Grenzschicht annimmt (siehe A).

#### 2.5.4 Transitionsmodellierung

Die vergleichsweise niedrigen Re-Zahlen der Spaltströmungen in Vakuumpumpen machen den Einsatz eines Transitionsmodells nötig, dessen Aufgabe es ist, die turbulente Produktion zu aktivieren bzw. im Falle einer Relaminisation wieder zu deaktivieren. Die dafür benötigten Kriterien werden empirisch aus Experimenten abgeleitet, die üblicherweise die mit der Impulsverlustdicke  $\theta$  gebildete kritische Re-Zahl als Funktion der Strömungsparameter wie Turbulenzgrad, Druckgradient etc. angeben:

$$Re_{\theta t} = f(Tu, dp/ds, \text{etc.}) \quad (2.67)$$

$Re_{\theta t}$  ist dabei diejenige Re-Zahl, bei der die Transition einsetzt. In der Literatur existieren eine Vielzahl verschiedener Gleichungen für  $Re_{\theta t}$ , eine bekannte ist z.B. die von Abu-Ghannam und Shaw [4], die aus systematischen Experimenten entlang einer ebenen Platte eine solche Beziehung ableiteten. Den Ausführungen von Menter [59] zufolge zeigt dieses Modell Ungenauigkeiten in stark beschleunigten Strömungen. Unter Einbeziehungen der Erkenntnisse von Drela [28] über das Transitionsverhalten schlägt Menter in [59] eine neue, verbesserte empirische Gleichung vor.

Eine Implementierung dieser Transitionskriterien in modernen CFD-Codes gestaltet sich schwierig, da zur Bestimmung von  $Re_{\theta}$  über die gesamte Grenzschicht integriert werden muss, was in parallelisierten Codes mit evtl. unstrukturierten Netzen nur schwer umsetzbar ist. Menter entwickelt deswegen in [59] eine neue Methodik zur Umsetzung von Transitionskriterien, die nur auf lokal verfügbaren Informationen basiert und damit gut in allgemeinen CFD-Programmen implementiert werden kann. Als lokales Maß für  $Re_{\theta}$  wird die Wirbel-Reynoldszahl  $Re_{\nu}$  verwendet, deren Maximum in guter Näherung zu  $Re_{\theta}$  steht:

$$Re_{\nu} = \frac{\rho \cdot y^2}{\eta} \cdot \Omega \quad Re_{\theta} \approx \frac{Re_{\nu, \max}}{2.193} \quad (2.68)$$

$\Omega$  ist der Betrag der Wirbelstärke, deren Definition im Anhang A aufgeführt ist. Das eigentliche Transitionsmodell besteht neben der empirischen Korrelation aus einer weiteren Transportgleichung für die turbulente Intermittenz und zusätzlich einer Transportgleichung für die skalare Größe  $\tilde{Re}_{\theta t}$ . Die Intermittenz  $\gamma$  ist 0 für laminare und 1 für voll turbulente Strömung. Allgemein kann  $\gamma$  auch Werte dazwischen annehmen, da es Bereiche geben kann, in denen die Strömung wechselweise laminar bzw. turbulent ist. Menter formuliert für die Intermittenz folgende Transportgleichung:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \gamma)}{\partial x_j} = P_{\gamma 1} - E_{\gamma 1} + P_{\gamma 2} - E_{\gamma 2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (2.69)$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite sind die Quellen für die Intermittenz:

$$P_{\gamma 1} = F_{length} \cdot \rho \cdot S \cdot [\gamma \cdot F_{onset}]^{c_{a1}} \quad E_{\gamma 1} = c_{e1} \cdot P_{\gamma 1} \cdot \gamma \quad (2.70)$$

Die Funktion  $F_{onset}$  dient zum Auslösen der Produktion von  $\gamma$  und ist eine Funktion von  $\tilde{Re}_{\theta t}$ , auf dessen Transportgleichung später eingegangen wird. Die Berechnungsgleichungen lauten:

$$F_{onset1} = \frac{Re_v}{2.193 Re_{\theta c}} \quad F_{onset2} = \min[\max(F_{onset1}, F_{onset1}^4), 2.0] \quad (2.71)$$

$$F_{onset3} = \max \left[ 1 - \left( \frac{R_T}{2.5} \right)^3, 0 \right] \quad \text{mit} \quad R_t = \frac{\rho k}{\eta \omega} \quad (2.72)$$

$$F_{onset} = \max(F_{onset2} - F_{onset3}, 0) \quad (2.73)$$

Die Größe  $Re_{\theta c}$  in Gl. 2.71 ist die kritische Reynoldszahl, bei der die Produktion der Intermittenz in der Grenzschicht eingeleitet wird. Allgemein ist  $Re_{\theta c}$  eine Funktion von  $\tilde{Re}_{\theta t}$ :

$$Re_{\theta c} = f(\tilde{Re}_{\theta t}) \quad (2.74)$$

Die in *Fluent* implementierte Funktion wurde von Menter et. al. [59] empirisch bestimmt und nicht veröffentlicht, so dass sie hier nicht angegeben werden kann. Gleiches gilt für die Funktion  $F_{length}$  in Gl. 2.70, die die Länge des Transitionsbereichs bestimmt.

Die Terme  $P_{\gamma 2}$  und  $E_{\gamma 2}$  stellen die Senken bzw. Relaminationsquellen für die Intermittenz dar:

$$P_{\gamma 2} = c_{a2} \cdot \rho \cdot \Omega \cdot \gamma \cdot F_{turb} \quad E_{\gamma 2} = c_{e2} \cdot P_{\gamma 2} \cdot \gamma \quad (2.75)$$

Die Funktion  $F_{turb}$  wird benötigt, um die Relaminationsquellen außerhalb der Grenzschicht außer Kraft zu setzen:

$$F_{turb} = e^{-(R_T/4)^4} \quad (2.76)$$

Die benötigten Konstanten für die Intermittenzgleichung wurden von Menter wie folgt bestimmt:

$$c_{e1} = 1.0 \quad c_{a1} = 0.5 \quad c_{e2} = 50 \quad c_{a2} = 0.03 \quad \sigma_f = 1.0 \quad (2.77)$$

Zum Auslösen der Produktion der Turbulenz wird die Auswertung des Transitionskriteriums nach Gl. 2.67 benötigt. Um diese für eine lokale Auswertung zur

Verfügung zu stellen, entwickelt Menter eine Transportgleichung für die skalare Größe  $\tilde{R}e_{\theta t}$ , die in der freien Anströmung dem Transitionskriterium  $Re_{\theta t}$  folgt und über einen geeigneten Diffusionsterm in die Grenzschicht transportiert wird. Damit werden die nicht-lokalen Effekte des Transitionsverhaltens im Strömungsfeld transportiert und für eine lokale Auswertung zur Verfügung gestellt. Die entsprechende Transportgleichung für  $\tilde{R}e_{\theta t}$  lautet:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{R}e_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \tilde{R}e_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta t} (\eta + \eta_t) \cdot \frac{\partial \tilde{R}e_{\theta t}}{\partial x_j} \right] \quad (2.78)$$

Der Quellterm  $P_{\theta t}$  auf der rechten Seite der Gleichung ist dabei so definiert, dass  $\tilde{R}e_{\theta t}$  dem Wert von  $Re_{\theta t}$  der verwendeten empirischen Gleichung entspricht:

$$P_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{t} \cdot (Re_{\theta t} - \tilde{R}e_{\theta t}) \cdot (1.0 - F_{\theta t}) \quad \text{mit} \quad t = \frac{500 \cdot \eta}{\rho \cdot U^2} \quad (2.79)$$

Die Funktion  $F_{\theta t}$  wird genutzt, um den Quellterm innerhalb der Grenzschicht abzuschalten, der Transport von  $\tilde{R}e_{\theta t}$  erfolgt dort durch die Diffusionsterme aus der Anströmung in die Grenzschicht hinein.  $F_{\theta t}$  ist so definiert, dass es einen Wert von 0 in der Anströmung und 1 in der Grenzschicht annimmt:

$$F_{\theta t} = \min \left\{ \max \left[ F_{wake} \cdot e^{-(y/\delta)^4}, 1.0 - \left( \frac{\gamma - 1/c_{e2}}{1.0 - 1/c_{e2}} \right)^2 \right], 1.0 \right\} \quad (2.80)$$

$$\theta_{BL} = \frac{\tilde{R}e_{\theta t} \cdot \eta}{\rho \cdot U} \quad \delta_{BL} = \frac{15}{2} \cdot \theta_{BL} \quad \delta = \frac{50 \cdot \Omega \cdot y}{U} \cdot \delta_{BL} \quad (2.81)$$

$$F_{wake} = e^{-[Re_{\omega}/10^5]^2} \quad \text{mit} \quad Re_{\omega} = \frac{\rho \cdot \omega \cdot y^2}{\eta} \quad (2.82)$$

Die Modellkonstanten für die  $\tilde{R}e_{\theta t}$ -Transportgleichung werden von Menter wie folgt angegeben:

$$c_{\theta t} = 0.03 \quad \sigma_{\theta t} = 10 \quad (2.83)$$

Um das Wiederanlegen abgelöster laminarer Strömungen korrekt zu erfassen, führt Menter noch eine Korrektur für die Intermittenz ein:

$$\gamma_{sep} = \min \left\{ s_1 \cdot \max \left[ \left( \frac{Re_v}{2.193 \cdot Re_{\theta c}} \right) - 1, 0 \right] \cdot F_{reattach}, 5 \right\} \cdot F_{\theta t} \quad s_1 = 8 \quad (2.84)$$

$$F_{reattach} = e^{-(R_T/15)^4} \quad (2.85)$$

Die effektive Intermittenz für die weiteren Berechnung bestimmt sich aus:

$$\gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{eff}) \quad (2.86)$$

Die Kopplung zwischen dem Transitionsmodell und dem SST-Turbulenzmodell erfolgt über eine entsprechende Anpassung der Produktions- und Destruktionsterme der Transportgleichung für die turbulente kinetischen Energie  $k$ , Gl. 2.61. Die Modifikation der Terme lautet:

$$\tilde{P}_k = \gamma_{eff} \cdot P_k \quad \tilde{D}_k = \min [\max(\gamma_{eff}, 0.1), 1.0] \cdot D_k \quad (2.87)$$

Die Transportgleichung für  $\omega$  bleibt unverändert und entspricht Gl. 2.64. Weiterhin ist es notwendig, die Funktion  $F_1$  des SST-Modells zu modifizieren, um ein Umschalten zwischen dem  $k - \epsilon$  und dem  $k - \omega$  Modell innerhalb der laminaren Grenzschicht zu vermeiden (siehe Anhang A).

Das Transitionsmodell wurde in der hier vorgestellten Form anhand der Strömung entlang ebener Platten validiert und erfolgreich für die Berechnung von Turbomaschinen verwendet [56]. Abraham et. al. wenden dieses Transitionsmodell auf Strömungen in Rohren und Kanälen an, was eine Anpassung der Modellkonstanten für die Intermittenzgleichung notwendig macht [3], die auch hier verwendet werden:

$$c_{a2} = 0.015 \quad c_{e2} = 70 \quad (2.88)$$

## 2.5.5 Wärmeübertragung in turbulenten Strömungen

Durch die Mittelung der nichtlinearen konvektiven Terme der Energiegleichung entstehen zusätzliche Glieder, die analog zur Boussinesq-Annahme als das Produkt einer turbulenten Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_t$  mit dem Temperaturgradienten modelliert werden [67]:

$$-c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u_i''} = -\lambda_t \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.89)$$

Wie auch die turbulente Viskosität ist die turbulente Wärmeleitfähigkeit keine Stoffgröße, sondern eine Modellgröße, die im gesamten Strömungsfeld variiert. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit folgt der turbulenten Viskosität, die Kopplung erfolgt über die turbulente Prandtl-Zahl:

$$Pr_t = \eta_r \cdot \frac{c_p}{\lambda_t} \quad \lambda_t = \frac{\eta_t \cdot c_p}{Pr_t} \quad (2.90)$$

Gebräuchliche Werte für die turbulente Prandtl-Zahl liegen bei  $Pr_t \approx 0.85 - 0.9$  und werden konstant für das gesamte Strömungsfeld verwendet. Messungen zeigen jedoch, dass insbesondere in Wandnähe wesentlich größere Werte auftreten [52]. Hisida et. al. konnten in Wandnähe eines turbulent mit Luft durchströmten Rohres Werte für  $Pr_t$  bis etwa 2 messen, was den üblichen Ansatz einer konstanten  $Pr_t$ -Zahl in Frage stellt. Diese Beobachtungen haben Abraham et. al. zum Anlass genommen, geeignete  $Pr_t$ -Zahlen durch Abgleich von Simulationsergebnissen mit Literaturkorrelationen zu bestimmen [2]. Diese Anpassung erfolgt auf Basis einer voll ausgebildeten inkompressiblen Rohrströmung mit einem Turbulenzgrad von 5 % und einem ebenen Geschwindigkeitsprofil am Rohreintritt. Wie in [62] gezeigt, beeinflussen diese Effekte entscheidend, ob sich für den Re-Zahl Bereich von  $2300 < Re < 10000$  eine voll ausgebildete turbulente Strömung im Rohr einstellt oder ob nach hinreichender Lauflänge die Strömung relaminarisiert. Mit den so gewählten Randbedingungen wird eine ausgebildete turbulente Strömung erreicht, deren  $Pr_t$ -Zahl Abraham derart angepasst, dass für den Bereich von  $2300 < Re < 3100$  die Korrelation nach Churchill [23] und darüber die Korrelation von Gnielinski [36] möglichst genau durch das Modell wiedergegeben wird. Die damit bestimmten turbulenten Prandtl-Zahlen gelten sowohl für konstante Wandtemperaturen als auch konstanten Wandwärmeströme, sind also unabhängig von den gewählten Randbedingungen.

Die so erhaltenen  $Pr_t$ -Werte sind als Funktion der Re-Zahl in Abb. 2.3 dargestellt.



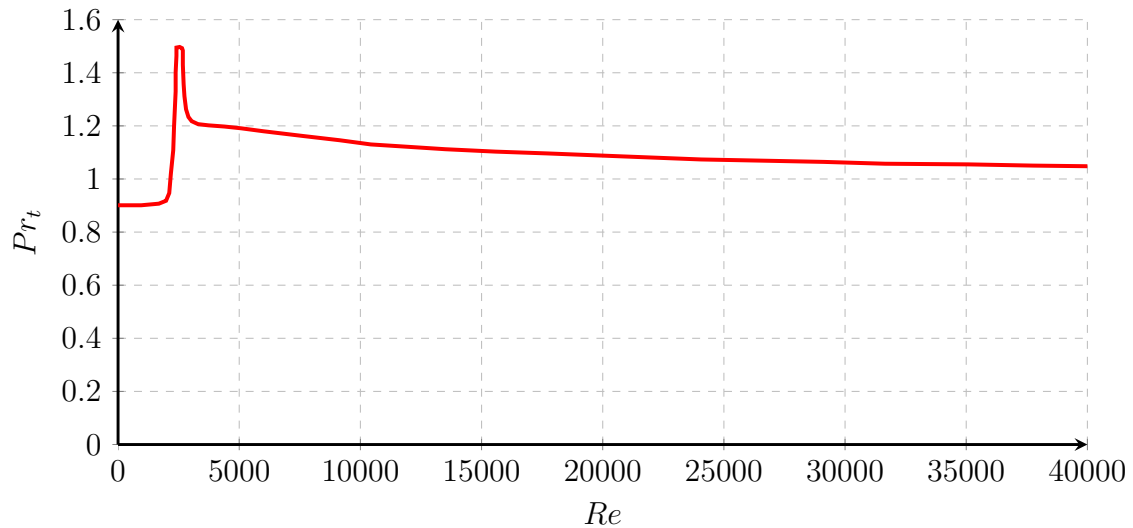


Abb. 2.3: Turbulente Prandtl-Zahl für Strömung in Kanälen. Die Werte (entnommen aus [2]) wurden von Abraham et. al. so bestimmt, dass die Korrelationen aus der Literatur für konstante Wandtemperatur und konstanten Wandwärmestrom möglichst gut erfüllt werden.

Bei  $Re = 2500$  weist diese ein ausgeprägtes Maximum von  $Pr_t = 1.5$  auf, danach fallen die Werte stark ab und laufen für große  $Re$ -Zahlen gegen 1.05.

Auch wenn die  $Pr_t$ -Werte aus Korrelationen für die Rohrströmung abgeleitet wurden, sind diese generell für ähnliche Strömungsprobleme anwendbar. Abraham et. al. haben dieses Modell erfolgreich für einen ebenen Kanal mit gleichen, konstanten Wandtemperaturen eingesetzt [1], weshalb die Werte auch hier verwendet werden.



# Kapitel 3

## Numerische Lösungsverfahren

### 3.1 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

Die im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Transportgleichungen stellen ein gekoppeltes, nichtlineares System partieller Differentialgleichungen zur allgemeinen Beschreibung von Strömungen dar, das i.A. nur numerisch gelöst werden kann. In der Fluidodynamik hat sich dazu das Finite-Volumen-Verfahren etabliert, das (mit geeigneter Diskretisierung der Flussterme) automatisch die Erhaltung aller Größen (Masse, Impuls, Energie und Turbulenzgrößen) im gesamten Strömungsgebiet gewährleistet. Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die allgemeine Transportgleichung in Integralform, die unter Anwendung des Divergenzsatzes von Gauss direkt aus der differentiellen Form nach Gl. 2.5 folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_S \rho \phi \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{n} \cdot dS + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega \quad (3.1)$$

Zur numerischen Lösung der Gleichung müssen die Volumen- und Oberflächenintegrale durch diskrete Ausdrücke für Gitterzellen genähert werden. Die Werte von  $\phi$  werden dabei im Zellmittelpunkt (Index "P") bestimmt (siehe Abb. 3.1), so dass die Volumenintegrale im einfachsten Fall über die Mittelpunktsregel berechnet werden können:

$$\int_{\Omega} f d\Omega \approx f_P \cdot \Omega \quad (3.2)$$

In analoger Weise können auch die Oberflächenintegrale genähert werden, wobei hierfür der Wert des Integranden  $f$  auf der Oberflächenmitte benötigt wird:

$$\int_S f dS \approx \sum_k f_k \cdot S_k \quad (3.3)$$

Das einfachste Interpolationsschema ist die Aufwinddiskretisierung erster Ordnung, bei der der Wert des stromaufliegenden Zellmittelpunkts für die Zelloberflächen angesetzt wird:

$$f_k \approx f_P \quad (3.4)$$

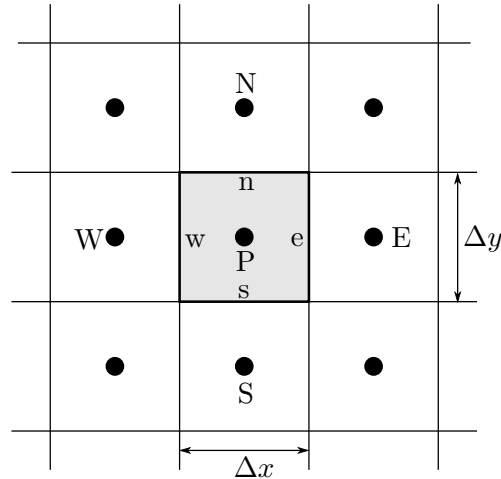


Abb. 3.1: Skizze des Kontrollvolumens um den Zellmittelpunkt P. Für die Ränder gilt im zweidimensionalen Fall  $k = n, e, s, w$

Für die Fläche “e“ wird also bei Strömung von “P“ nach “E“ der Wert  $f_P$  verwendet, bei umgekehrter Strömungsrichtung der Wert  $f_E$ . Dieses Verfahren ist numerisch sehr stabil, allerdings entspricht der Fehlerterm dem eines diffusen Flusses, was zu ungenauen Ergebnissen führt. Genauer (wenn auch numerisch weniger stabil) ist die Diskretisierung zweiter Ordnung [8]:

$$f_k \approx f_P + \nabla f_P \cdot \vec{r} \quad (3.5)$$

Der Vektor  $\vec{r}$  ist dabei der Vektor vom Zellmittelpunkt zur Zelloberfläche,  $f_P$  bezieht sich wiederum auf die stromaufliegende Zelle. Dieses Verfahren erfordert die Bestimmung des Gradienten  $\nabla f_P$ , der auch zur Berechnung der diffusiven Flüsse benötigt wird. Dieser folgt aus dem Green-Gauss Theorem [8]:

$$\nabla f_P = \frac{1}{\Omega_P} \sum_k \overline{f_k} \cdot S_k \quad (3.6)$$

Die Größe  $\overline{f_k}$  ist der Wert von  $f$  in der Mitte der Zelloberfläche, der sich als Mittelwert der aus  $f_P$  und dem Zellmittelpunktswert der benachbarten Zelle darstellt. Für die Zeitableitung in Gl. 3.1 wird das implizite Verfahren nach Euler verwendet, bei dem die zu integrierende Funktion  $G$  zum neuen Zeitpunkt  $n + 1$  ausgewertet wird:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = G(f^{n+1}) \quad (3.7)$$

Angewendet auf die Navier-Stokes Gleichungen führt diese Diskretisierung auf ein nichtlineares Gleichungssystem, was für jeden Zeitschritt gelöst werden muss. Im Gegensatz zum expliziten Euler Verfahren, bei dem der Integrand  $G(f)$  zum bekannten Zeitpunkt  $n$  ausgewertet wird und somit das Lösen großer Gleichungssysteme nicht erforderlich ist, ist das implizite Verfahren auch für große Zeitschrittweiten stabil [7].

## 3.2 Lösungsverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen

Die Nichtlinearität der linken Seite der Impulsgleichungen macht ein iteratives Lösungsverfahren für diese erforderlich. Beim sequentiellen Lösungsverfahren wird dazu jede Impulsgleichung zur Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente verwendet; die anderen Größen werden für diesen Iterationsschritt als gegeben betrachtet. Die diskretisierte Impulsgleichung ergibt sich durch Anwenden der Methoden aus dem vorherigen Abschnitt zu:

$$A_P \cdot u_{i,P} + \sum_k A_k \cdot u_{i,k} = Q_{u_i} - \sum_k p_k^* \cdot S_k \quad (3.8)$$

Der Quellterm  $Q_{u_i}$  fasst hierin alle Terme zusammen, die sich direkt aus  $u_i$  bestimmen lassen. Die Geschwindigkeits- und Druckwerte werden jeweils für den Zellmittelpunkt bestimmt, so dass die Werte für den Druck auf den Zelloberflächen interpoliert werden müssen.

Die Kontinuitätsgleichung kann auf analoge Weise diskretisiert werden:

$$\sum_k \rho \cdot u_k \cdot S_k = 0 \quad (3.9)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird i.A. zur Bestimmung des Drucks verwendet. Dazu wird die diskretisierte Impulsgleichung Gl. 3.8 in die diskrete Massenerhaltungsgleichung eingesetzt, woraus eine neue Bestimmungsgleichung für den Druck folgt. Diese kann aufgrund der notwendigen Interpolation der Geschwindigkeiten auf die Zelloberfläche zu unphysikalischen Schwingungen im Druckfeld führen, weshalb in Fluent eine gewichtete Interpolation für den Massenstrom durch die Zelloberfläche verwendet wird:

$$(\rho u_i)_k = \rho_k \cdot \frac{A_{i,P} u_{i,P} + A_{k,P} u_{k,P}}{A_{i,P} + A_{k,P}} + d_f (p_i - p_k) \quad (3.10)$$

Die Funktion  $d_f$  hängt vom Mittelwert der Koeffizienten  $A_i$  und  $A_k$  ab, die genaue Definition der in Fluent verwendeten Funktion ist nicht offengelegt [8].

Um die Erhaltungsgleichungen sequentiell zu lösen, wird beim "SIMPLE"-Algorithmus der Druck  $p_k^*$ , der zur Lösung der Impulsgleichung eingesetzt wurde, nur als provisorischer Druck betrachtet, zu dem noch eine Korrektur hinzu addiert werden muss, um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen. Ebenso sind Geschwindigkeiten  $u_i$  nur vorübergehende Werte, zu denen ebenfalls eine Korrektur hinzugefügt werden muss [69]:

$$p_P = p_P^* + p'_P \quad \text{mit} \quad u_{i,P} = u_{i,P}^* + u'_{i,P} \quad (3.11)$$

Durch Einsetzen in Gl. 3.9 unter Berücksichtigung von Gl. 3.10 folgt die Bestimmungsgleichung für die Druckkorrektur  $p'_P$ , wobei die noch unbekanntes Geschwindigkeitskorrekturen vernachlässigt werden [8]:

$$a_P \cdot p' = \sum_k a_k \cdot p'_k + \sum_k (\rho \cdot u_i)_k^* \cdot S_k \quad (3.12)$$

Mit bekannter Druckkorrektur folgen die Geschwindigkeitskorrekturen aus der diskretisierten Impulsgleichung 3.8 unter Vernachlässigung des Quellterms  $Q_{u_i}$  und der Flüsse von  $u'_i$  über die Grenzen des Kontrollvolumens:

$$u'_i = -\frac{1}{A_P} \sum_k p'_k \cdot S_k \quad (3.13)$$

Zur korrekten Lösung der Gleichungen müssen die Korrekturen auf ein vernachlässigbares Maß reduziert werden, was durch folgenden Lösungsalgorithmus erreicht werden kann:

1. Lösen der Impulsgleichungen (Gl. 3.8) für jede Geschwindigkeitskomponente  $u_i$ . Der Druck wird aus der vorherigen Iterationsschleife übernommen.
2. Aufstellen und Lösen der Druckkorrekturgleichung 3.12.
3. Korrigieren des Drucks und der Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  (Gl. 3.13, Gl. 3.11).
4. Lösen der Turbulenzgleichungen zur Bestimmung der turbulenten Viskosität und Wärmeleitfähigkeit.
5. Überprüfen der Konvergenz und Wiederholen von Schritt 1 bis 4, falls die Korrekturen den vorgegeben Grenzwert noch nicht unterschritten haben.

Ein analoges Verfahren ist auch für instationäre Strömungen möglich, wobei für jeden Zeitschritt der Algorithmus durchlaufen werden muss.

### 3.3 Lösungsverfahren für die Boltzmann Gleichung

Eine numerische Lösung der Boltzmanngleichung kann grundsätzlich nach den selben Prinzipien erfolgen, wobei für praktische Rechnungen nahezu ausschließlich die in Kap. 2.3 erläuterten Modelle für den Stoßterm verwendet werden. Eine effiziente Art die resultierende Gleichung zu lösen stellt die Methode der diskreten Geschwindigkeiten dar, die auch für große Gasverdünnungen anwendbar ist [21].

Hierfür wird der molekulare Geschwindigkeitsraum  $\xi_i$  durch die Wahl geeigneter Geschwindigkeitspunkte diskretisiert. Damit ergibt sich für jeden diskreten Geschwindigkeitsvektor  $\vec{\xi}_i = (\xi_{xi}, \xi_{yi}, \xi_{zi})^T$  aus Gl. 2.23 eine partielle Differentialgleichung, die mit den oben erläuterten Methoden numerisch gelöst werden kann. Mit den bekannten, diskreten Werten von  $f(\vec{x}, \vec{\xi}_i)$  können die Momentengleichungen gelöst werden, um die makroskopischen Strömungsgrößen zu bestimmen. Da die Modelle im Allgemeinen nichtlinear sind, ist wiederum ein iteratives Vorgehen notwendig [86].

Die Wahl der Geschwindigkeitsstützstellen ist prinzipiell beliebig. Zur Lösung der Momentengleichungen muss die Verteilungsfunktion jedoch über den gesamten Geschwindigkeitsraum von  $[-\infty, +\infty]$  integriert werden, was die Verwendung des Gauss-Hermite Integrationsschemas nahelegt. Die molekularen Geschwindigkeitsstützstellen sind hierin über die festen Stützstellen des Integrationschemas festgelegt. Eine zusätzliche Herausforderung stellen Diskontinuitäten in der Verteilungsfunktion an den Wänden dar, die für die Lösung der Momentengleichungen berücksichtigt

werden müssen. Ein effizienter Weg zur Lösung dieses Problems ist die Aufteilung des Geschwindigkeitsraumes in  $[-\infty, 0)$  und  $[0, +\infty]$  mit entsprechender Gauss-Hermite Integration [32].





# Kapitel 4

## Inkompressible Spaltströmung

### 4.1 Grundlagen

Wie in Kapitel 1.7 beschrieben wird zur systematischen Untersuchung zuerst die inkompressible Durchströmung des in Abb. 1.13 dargestellten Spaltes untersucht. Bei der hier gegebenen Problemstellung wird das Fluid aus dem Ruhezustand zum Spalteintritt hin beschleunigt und tritt mit dem in Abb. 4.1 qualitativ skizzierten Geschwindigkeitsprofil in den Spalt ein. Infolge der Reibung an der Wand und innerhalb des Fluids werden bei der weiteren Durchströmung die wandnahen Fluidschichten abgebremst, während die Strömung in der Nähe der Mittellinie zur Wahrung der Kontinuität beschleunigt wird. Nach einer bestimmten Lauflänge  $L_{hyd}$  hat das Geschwindigkeitsprofil die in Abb. 4.1 dargestellte Form und ändert sich im weiteren Verlauf der Durchströmung nicht mehr. Dieser Zustand, der durch das Gleichgewicht zwischen Reibungskräften an den Wänden und Druckkräften gekennzeichnet ist, wird in der Literatur als "voll ausgebildete Strömung" bezeichnet. Für die Berechnung des voll ausgebildeten Geschwindigkeitsprofils werden die Impulsgleichung in x- und y-Richtung für inkompressible, laminare Strömung herangezogen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

Für die voll ausgebildete Strömung ändern sich die Strömungsgeschwindigkeiten nicht mehr mit der Laufkoordinate  $x$ , d.h.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  und  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ . Zusätzlich ist die Strömung parallel zu den Wänden gerichtet; für die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten gilt also  $v = 0$ . Damit vereinfachen sich die Impulsgleichungen zu:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

Aus der y-Impulsgleichung folgt sofort, dass der Druck über der Spalthöhe konstant ist. Um das Geschwindigkeitsprofil zu bestimmen, muss noch die x-Impulsgleichung

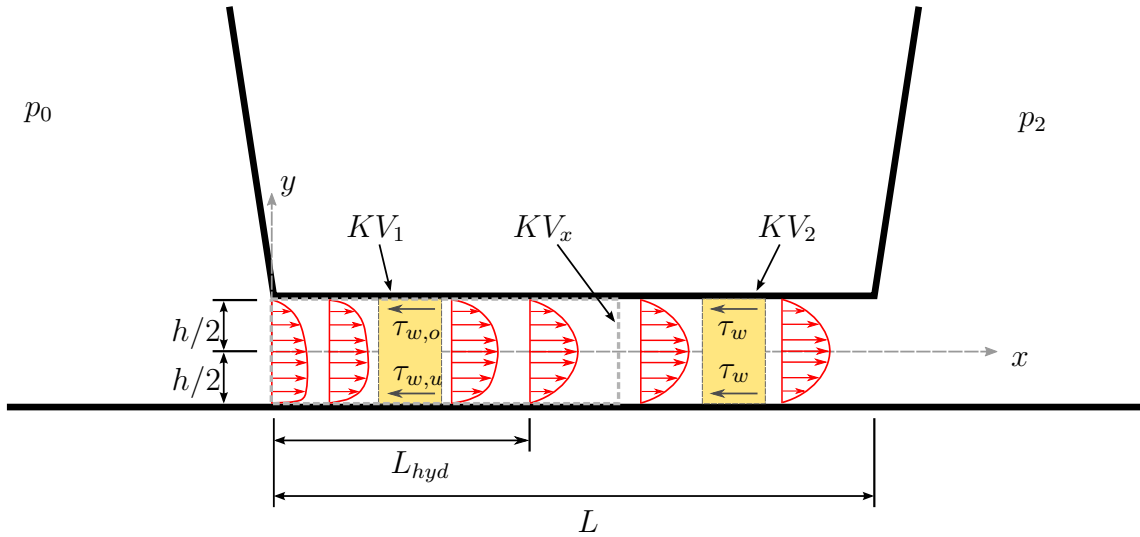


Abb. 4.1: Schematische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils in einer inkompressiblen, laminaren Spaltströmung. Bis zur Lauflänge  $L_{hyd}$  ändert sich das Profil mit der Lauflänge, danach ist die Strömung voll ausgebildet. Das Kontrollvolumen  $KV_1$  liegt im Einlaufbereich, das Kontrollvolumen  $KV_2$  in der voll ausgebildeten Strömung. Für die Bestimmung der Gesamtverluste wird das Kontrollvolumen  $KV_x$  verwendet, das sich von  $x = 0$  bis zur Stelle  $x$  erstreckt.

unter Berücksichtigung der Haftbedingung an den Wänden zweimal integriert werden:

$$u_{fd}(y) = -\frac{h^2}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{y^2}{h/2} \right) \right] \quad (4.5)$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist folglich eine Parabel und wurde von G. Hagen und J. Poiseuille erstmals im Jahr 1846 angegeben. Aus der obigen Gleichung kann die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $u_m$  berechnet werden, die sich für inkompressible Strömung als flächengemittelter Wert der Geschwindigkeitsverteilung darstellt:

$$u_m = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u(y) dy = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.6)$$

Unter Berücksichtigung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $u_m$  kann die Geschwindigkeitsverteilung Gl. 4.5 umgeschrieben werden:

$$u_{fd}(y) = \frac{3}{2} \cdot u_m \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

Die maximale Geschwindigkeit tritt also in der Spaltmitte auf und beträgt das 1.5-fache der mittleren Strömungsgeschwindigkeit.

## 4.2 Anwendung des Impulssatzes

Zur Quantifizierung des Spaltmassenstroms wird der Impulssatz angewendet, der sich für stationäre Strömungen allgemein wie folgt darstellt [78]:

$$\int_{KF} \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dA = \sum F_A \quad (4.8)$$

Der Vektor  $\vec{n}$  bezeichnet dabei die nach außen gerichtete Flächennormale,  $F_A$  die von außen auf das Kontrollvolumen wirkenden Kräfte. Auf das in Abb. 4.1 dargestellte Kontrollvolumen  $KV_1$  wirken neben dem Impulsfluss über die Ein- und Austrittsfläche noch die Druckkräfte an den beiden vertikalen Seiten sowie die Wandschubspannungen als äußere Kräfte. Die Anwendung des Impulssatzes auf dieses Kontrollvolumen liefert folgende Beziehung:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot u^2(x+dx, y) \cdot dy - \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot u^2(x, y) \cdot dy = -(\tau_o + \tau_u) \cdot dx + \int_{-h/2}^{h/2} [p(x, y) - p(x+dx, y)] \cdot dy \quad (4.9)$$

Zu beachten ist, dass in einer dichtebeständigen Strömung zwar die mittlere Geschwindigkeit nach Gl. 4.6 konstant ist, sich jedoch, wie in Abb. 4.1 skizziert, die Form des Geschwindigkeitsprofils im Einflaubereich des Spaltes ändert. Die linke Seite der Gleichung ist in diesem Bereich also ungleich Null. Für das Kontrollvolumen  $KV_2$ , das im Bereich der voll ausgebildeten Strömung liegt, heben sich die beiden konvektiven Terme auf, d.h. in diesem Bereich stehen die Wandschubspannungen mit den Druckkräften im Gleichgewicht.

Zur Vereinfachung werden zunächst einige zweckmäßige Größen eingeführt, bevor in Abschnitt 4.2.4 die Impulsgleichung weitergehend analysiert wird.

### 4.2.1 Flächengemittelter Druck

Zur Berechnung der Integrale über den Druck (zweiter Term auf der rechten Seite der Gl. 4.9) wird vereinfachend der flächengemittelte Druck  $p_m$  definiert:

$$p_m(x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} p(x, y) dy \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Dimensionsanalyse der Wandschubspannung

Allgemein gilt für eine Strömung längs einer Wand folgender Zusammenhang zwischen Wandschubspannung und Geschwindigkeitsgradient:

$$\tau_w = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w \quad (4.11)$$

Zur dimensionslosen Darstellung der Wandschubspannung wird  $u_m$  nach Gl.4.6 als Bezugsgeschwindigkeit, der mit  $u_m$  gebildete Staudruck  $\rho/2 \cdot u_m^2$  als Referenzdruck

und der hydraulische Durchmesser  $D_h$  als Längenmaßstab verwendet. Damit ergibt sich:

$$\bar{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\rho/2 \cdot u_m^2} = \eta \frac{1}{\rho/2 \cdot u_m^2} \frac{u_m}{D_h} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_w = \frac{2\eta}{\rho u_m D_h} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_w \quad (4.12)$$

Unter Berücksichtigung der Reynoldsschen Zahl (Gl. 1.5) vereinfacht sich die obige Gleichung zu:

$$\bar{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\rho/2 u_m^2} = \frac{2}{Re} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_w = \frac{c}{Re} = f/4 \quad (4.13)$$

Die dimensionslose Wandschubspannung  $f$  einer viskosen Strömung mit konstanten Stoffwerten ist also nur von der Re-Zahl des Problems abhängig (siehe auch Kap. 2.4). Für die voll ausgebildete laminare Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil unabhängig von der Re-Zahl, der dimensionslose Geschwindigkeitsgradient  $\frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_w$  und damit  $c$  ist also eine Konstante. Für voll ausgebildete turbulente Strömungen hingegen ist das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil von der Re-Zahl der Strömung abhängig,  $c$  ist demnach ebenfalls eine Funktion der Re-Zahl. Analoges gilt für sich mit der Lauflängsachse ändernde Geschwindigkeitsprofile wie im Einlaufbereich des Kanals.

Das Vierfache der dimensionslosen Wandschubspannung  $\bar{\tau}_w$  ist in der Literatur als Reibwert oder Darcy-Weisbach-Reibwert  $f$  bekannt<sup>1</sup>, das Produkt aus Reynoldszahl und Wandschubspannung wird als "Poiseuille-Zahl" bezeichnet:

$$Po = f \cdot Re = 4 \cdot c \quad (4.14)$$

Für die voll ausgebildete laminare Strömung ist die Poiseuille-Zahl konstant und kann aus dem Geschwindigkeitsprofil Gl. 4.7 analytisch bestimmt werden. Die Rechnung liefert einen Poiseuille-Wert von  $Po = 96$ , d.h. das Widerstandsgesetz für die laminare Spaltströmung lautet:

$$f_{fd} = \frac{96}{Re} \quad (4.15)$$

Für andere Kanalquerschnittformen ergeben sich andere Werte für die voll ausgebildete Poiseuille-Zahl, für den bekannten Fall der laminaren Rohrströmung ist  $Po = 64$  (siehe z.B. [78]).

### 4.2.3 Impulsflussfaktor

Die beiden Terme auf der linken Seite der Impulsgleichung Gl. 4.9 stellen den konvektiv über das Kontrollvolumen transportierten Impulsfluss dar. Zur Beschreibung hierfür wird der Impulsflussfaktor definiert:

$$K_D = \frac{1}{h} \frac{1}{\rho_m \cdot u_m^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot u^2 \cdot dy \quad (4.16)$$

<sup>1</sup>Hinweis: In der Literatur wird neben dem Reibwert nach Darcy auch der Reibwert nach Fanning verwendet, der auf den hydraulischen Radius von  $r_h = D_h/4$  bezogen ist. Der Reibwert nach Fanning ist also 1/4 des Reibwertes nach Darcy. Siehe auch [80].

Der Impulsflussfaktor beschreibt den auf die mittlere Dichte  $\rho_m$  und mittlere Geschwindigkeit  $u_m$  bezogenen Impulsfluss über den Ein- bzw. Ausströmrand des Kontrollvolumens. Im Gegensatz zu der in der Literatur [80] vorgeschlagenen Definition bezieht dieser die Dichte mit in den Impulsfluss ein. Für inkompressible Strömung ist das unerheblich, da die Dichte konstant ist und damit aus der Definition herausgekürzt werden kann. Für kompressible Strömungen, die später in Kap. 6 behandelt werden, muss die Dichteänderung über der Spalthöhe berücksichtigt werden, weshalb an dieser Stelle bereits die allgemeine Definition eingeführt wird. Für die voll ausgebildete, laminare Strömung kann mit dem Geschwindigkeitsprofil nach Gl. 4.7 die Integration ausgeführt werden, das Ergebnis lautet:

$$K_{D,fd} = \frac{5}{6} = 1.2 \quad (4.17)$$

#### 4.2.4 Scheinbarer Reibwert

Durch Einsetzen der in den drei vorherigen Abschnitten beschriebenen Größen in die Impulsgleichung folgt:

$$-\rho u_m^2 \cdot h \cdot K_D(x) + \rho u_m^2 \cdot h \cdot K_D(x+dx) = -\frac{\rho}{2} u_m^2 \cdot \frac{f}{2} \cdot dx + (p(x) - p(x+dx)) \cdot h \quad (4.18)$$

Im Folgenden werden alle Größen als die entsprechenden Mittelwerte über der Spalthöhe verstanden, der Index m wird der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Nach Einführen des hydraulischen Durchmessers und der Größen

$$dp = p(x+dx) - p(x) \quad dK_d = K_D(x+dx) - K_D(x) \quad (4.19)$$

ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$2 \cdot dK_D = -f \cdot \frac{dx}{D_h} - \frac{dp}{\rho/2 \cdot u^2} \quad (4.20)$$

Für den Druckverlust der Strömung folgt:

$$\frac{dp}{\rho/2 \cdot u^2} = - \left( 2 \cdot dK_D + f \cdot \frac{dx}{D_h} \right) \quad (4.21)$$

Die Wandreibung und die Änderung des Geschwindigkeitsprofils führen also zu einer Druckabnahme entlang des Strömungsweges. Beide Effekte werden in der Literatur häufig zu einem scheinbaren Reibwert  $f_{app}$  zusammengefasst [80]:

$$\frac{dp}{\rho/2 \cdot u^2} = -f_{app} \cdot \frac{dx}{D_h} \quad (4.22)$$

Der scheinbare Reibwert berechnet sich zu:

$$f_{app} = 2 \cdot \frac{D_h}{dx} \cdot dK_D + f \quad (4.23)$$

Für die voll ausgebildete Strömung entspricht der scheinbare Reibwert dem Reibwert nach Gl. 4.15 und damit der Wandschubspannung. Im Einlaufbereich ist die tatsächliche Wandreibung aufgrund des sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofils größer, d.h.  $f > f_{fd}$ . Für den scheinbaren Reibwert wird die Änderung der Form des Geschwindigkeitsprofils als zusätzliche, scheinbare Wandschubspannung interpretiert, auch wenn diese eine andere physikalische Ursache hat. Der scheinbare Reibwert erfasst also alle auftretenden Verluste, wobei die Beziehung  $f_{app} > f > f_{fd}$  gilt.

## 4.2.5 Inkrementeller Druckverlust

Um den Gesamtdruckverlust vom Spalteintritt bis zur Stelle  $x$  im Spalt zu bestimmen, muss Gl. 4.22 von  $x = 0$  bis  $x$  integriert werden:

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2} u^2 \frac{1}{D_h} \cdot \int_0^x f_{app} \cdot dx \quad (4.24)$$

Der scheinbare Reibwert ist nur im Bereich des Spalteinlaufes größer als der voll ausgebildete Reibwert nach Gl. 4.15, es ist daher zweckmäßig, das Integral auf der rechten Seite in zwei Teile aufzuspalten:

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2} u^2 \left( f_{fd} \cdot \frac{x}{D_h} + K(x) \right) \quad (4.25)$$

Der erste Term auf der rechten Seite repräsentiert den Druckverlust, hervorgerufen durch die ausgebildete Strömung; der zweite Term  $K(x)$  beschreibt integral die über den Druckverlust der ausgebildeten Strömung entstehenden Zusatzverluste der Einlaufströmung und ist in der Literatur als "inkrementeller Druckverlustfaktor" bekannt [80]. Durch Vergleich von Gl. 4.24 und 4.25 folgt die Bestimmungsgleichung für  $K(x)$ :

$$K(x) = \frac{-\Delta p}{\frac{\rho}{2} u^2} - f_{fd} \cdot \frac{x}{D_h} = \frac{1}{D_h} \int_0^x f_{app} \cdot dx - f_{fd} \cdot \frac{x}{D_h} \quad (4.26)$$

Der Druckverlust entlang der Strömungslänge ist im Vorgriff auf die Ergebnisse aus Abschnitt 4.6 qualitativ in Abb. 4.2 skizziert. Die Wandreibung und die Form des Geschwindigkeitsprofils ändert sich ab dem Punkt  $x = L_{hyd}$  nicht mehr. Ab dort verschwinden demnach die Zusatzverluste, der tatsächliche Druckverlust verläuft parallel zum dem über die voll ausgebildete Strömung berechneten Druckverlust nach Gl. 4.15. Der inkrementelle Druckverlust  $K$  ist in der ausgebildeten Strömung eine Konstante, die integral alle Zusatzverluste bis  $x = L_{hyd}$  zusammenfasst.

Der Verlauf und die Größe von  $K$  hängt wesentlich von der Art der Einströmung in den Spalt ab. Für den in der Literatur häufig untersuchten Fall eines rechteckigen Geschwindigkeitsprofils am Spalteintritt steigt  $K$  von Null monoton auf den konstanten Wert  $K(L_{hyd})$  an (siehe Erläuterungen in Kap. 1.5). In dem hier untersuchten Fall tritt die Strömung ungerichtet in den Spalt ein; unmittelbar hinter der scharfen Einlasskante an der oberen Spaltberandung bildet sich eine Ablöseblase aus, die relativ große vertikale Geschwindigkeitskomponenten erzeugt. Mit dem Anlegen der Strömung an die Wände werden diese vertikalen Geschwindigkeitskomponenten wesentlich reduziert. In der Ablöseblase ist der Betrag der Geschwindigkeit relativ hoch, was zu einem verhältnismäßig großen statischen Druckabfall führt. Nach Abbau der vertikalen Geschwindigkeitskomponenten wird die kinetische Energie der Strömung reduziert; der statische Druck steigt wieder an, was zu dem in Abb. 4.2 qualitativ dargestellten Verlauf von  $K$  über der Strömungslänge führt.

## 4.2.6 Verluste in der Zuströmung

Zur Bestimmung des Spaltmassenstroms wird zur Lösung von Gl. 4.22 noch der Druck  $p_{in}$  am Spalteintritt benötigt. Dieser ist vom Ruhedruck  $p_{0,1}$  in großer Entfer-

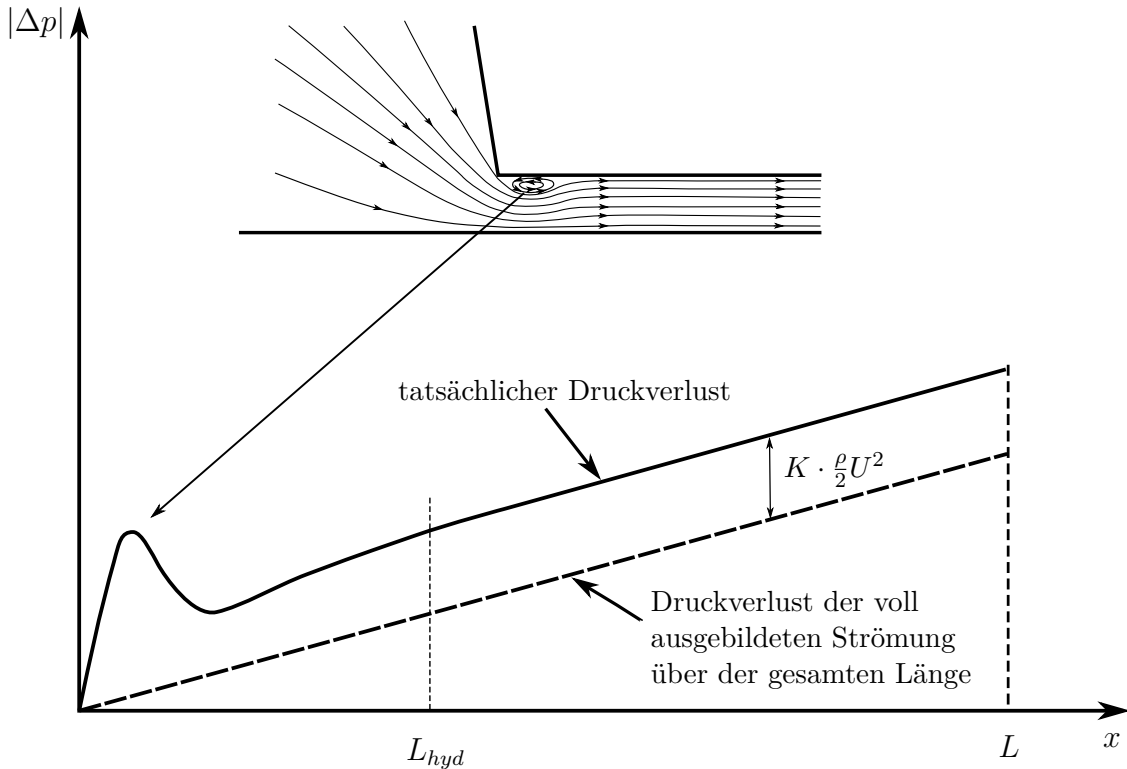


Abb. 4.2: Qualitative Darstellung des Druckverlustes in einer inkompressiblen Spaltströmung.

nung vom Spalt verschieden, da die Strömung beschleunigt werden muss, was einen Abfall des statischen Drucks zur Folge hat. Für den Idealfall einer reibungsfreien, gerichteten Strömung kann der Satz von Bernoulli angewendet werden:

$$p_{in,ideal} = p_{0,1} - \frac{\rho}{2} u^2 \quad (4.27)$$

Für eine reale Strömung ist der Druck am Spalteintritt jedoch geringer, da zwei zusätzliche Verlustmechanismen auftreten:

1. Die Strömung ist im Spalteintritt nicht parallel zu den Wänden gerichtet und enthält vertikale Strömungskomponenten (siehe Abb. 4.2) die eine weitere Absenkung des statischen Druckes notwendig machen.
2. Die Zuströmung ist reibungsbehaftet; die dadurch entstehenden Verluste bewirken ebenfalls einen Abfall des statischen Drucks.

Zur Beschreibung beider Effekte wird der Einströmdruckverlustkoeffizient definiert, der die auf den mittleren Staudruck bezogene Druckdifferenz zwischen dem idealen und realem Eintrittsdruck beschreibt:

$$K_e = \frac{p_{in,ideal} - p_{in,real}}{\frac{\rho}{2} u^2} \quad (4.28)$$

### 4.3 Berechnung des Spaltmassenstromes für inkompressible Strömung

Mit Kenntnis aller für die inkompressible Spaltströmung relevanten Verlustgrößen kann für gegebene Ruhedrucke  $p_{0,1}$  und  $p_{0,2}$  der Spaltmassenstrom berechnet werden. Dazu wird angenommen, dass der Druck am Spaltaustritt dem Ruhedruck  $p_{0,2}$  hinter dem Spalt entspricht. Der statische Ruhedruckverlust über den Spalt folgt direkt aus Gl. 4.25:

$$p_{in} - p_{0,2} = \frac{\rho}{2} u^2 \left( f_{fd} \cdot \frac{L}{D_h} + K(L) \right) \quad (4.29)$$

Der Druck  $p_{in}$  wird aus dem Einströmdruckverlust bestimmt:

$$p_{in} = p_{0,1} - \frac{\rho}{2} u^2 (1 + K_e) \quad (4.30)$$

Durch Einsetzen ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Ruhedrücken  $p_{0,1}$ ,  $p_{0,2}$  und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit:

$$p_{0,1} - p_{0,2} = \frac{\rho}{2} u^2 \left( f_{fd} \frac{L}{D_h} + K(L) + K_e + 1 \right) \quad (4.31)$$

Mit Bestimmung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit aus der obigen Gleichung kann der Massenstrom berechnet werden:

$$\dot{m} = b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho \cdot (p_{0,1} - p_{0,2})}{f_{fd} \frac{L}{D_h} + 1 + K(L) + K_e}} \quad (4.32)$$

### 4.4 Dimensionsanalyse der hydrodynamischen Einlaufströmung

Bevor auf die Berechnung der benötigten Verlustgrößen eingegangen wird, werden zur Vereinfachung die Erhaltungsgleichungen für die hydrodynamische Einlaufströmung analysiert. Bei den hier untersuchten Spalten zwischen zwei konzentrischen Zylindern ist es sinnvoll, die Gleichungen dimensionslos in Zylinderkoordinaten  $(\bar{r}, \theta, \bar{z})$  zu schreiben, wobei die  $\bar{z}$ -Koordinate in Durchströmungsrichtung orientiert ist. Als Bezugsgrößen dient wieder der hydraulische Durchmesser  $D_h$  als Längenmaßstab, die mittlere Geschwindigkeit  $u$  als Bezugsgeschwindigkeit und der doppelte Staudruck  $\rho \cdot u^2$  als Referenz für den Druck. Die dimensionslosen Impulsgleichungen lauten [81]:

- Impulsgleichung radial:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_\theta}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta^2}{\bar{r}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} = \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \cdot \bar{u}_r)}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$



- Impulsgleichung tangential:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_\theta}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r \bar{u}_\theta}{\bar{r}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{z}} = \\ - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \cdot \bar{u}_\theta)}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

- Impulsgleichung axial:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_\theta}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Impulsgleichungen können für die in Abb. 4.1 skizzierten Strömungsverhältnisse vereinfacht werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Strömung ist symmetrisch bezüglich der Rotationsachse (z-Achse):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0$$

- Das in Abb. 4.1 skizzierte Strömungsbild lässt erwarten, dass auch im Einlassbereich die horizontalen Strömungskomponenten wesentlich größer als die vertikalen Strömungskomponenten sind, d.h.  $\bar{u}_r \ll \bar{u}_z$ . Zur Vereinfachung wird daher die vertikale Strömungskomponente  $\bar{u}_r$  vernachlässigt:

$$\bar{u}_r \approx 0$$

- Ferner legt das Strömungsbild nahe, dass die Reibung in radialer Richtung dominant ist, die Beiträge der Reibung in axialer Richtung sind dem gegenüber unbedeutend und können vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \bar{z}^2} \right] \ll \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \cdot \bar{u}_\theta)}{\partial \bar{r}} \right) \right] \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{z}^2} \right] \ll \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) \right] \end{aligned}$$

Mit den obigen Annahmen lauten die vereinfachten Impulsgleichungen:

$$\frac{\bar{u}_\theta^2}{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \quad (4.36)$$

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \cdot \bar{u}_\theta)}{\partial \bar{r}} \right) \right] \quad (4.37)$$

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) \right] \quad (4.38)$$

Die resultierende Impulsgleichung in radialer Richtung ist mit den getroffenen Vereinfachungen von den beiden anderen Impulsgleichungen entkoppelt. Der Druck über der Spalthöhe wird nur von der tangentialen Geschwindigkeitskomponente und damit durch die Zentripetalkraft bestimmt. Für den Sonderfall des ruhenden Rotors ist der Druck über der Spalthöhe folglich konstant.

Die Impulsgleichungen in tangentialer und radialer Richtung sind über die Geschwindigkeitskomponente  $\bar{u}_z$  miteinander gekoppelt, was grundsätzlich einen Einfluss der Rotordrehung auf die Spaltdurchströmung erwarten lässt. Die Gleichungen lassen sich durch Einführung der hydrodynamischen Laufkoordinate  $z^+$  noch weiter vereinfachen, die wie folgt definiert ist:

$$z^+ = \frac{\bar{z}}{Re} = \frac{z}{D_h \cdot Re} \quad (4.39)$$

Damit lautet die vereinfachte Impulsgleichung in tangentialer und axialer Richtung:

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial z^+} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \cdot \bar{u}_\theta)}{\partial \bar{r}} \right) \quad (4.40)$$

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z^+} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z^+} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) \quad (4.41)$$

Mit der so definierten Laufkoordinate  $z^+$  enthalten die Gleichungen nicht mehr die Reynoldszahl als Parameter. Die einzig verbleibenden Parameter der vereinfachten Erhaltungsgleichungen sind die dimensionslose Wandgeschwindigkeitsrandbedingung der Rotordrehung und der dimensionslose Rotorradius:

$$\bar{u}_{\theta, Rot} = \frac{\omega_{rot} \cdot r_{Rot}}{u} \Big|_{r=r_{rot}} \quad \bar{r}_{Rot} = \frac{r_{Rot}}{D_h} \quad (4.42)$$

Es ist daher zu erwarten, dass die Größen  $K$  und  $f_{app}$  unabhängig von der Re-Zahl des Problems sind und sich lediglich als Funktion von  $z^+$  (bzw.  $x^+$  für den ebenen Fall) und den dimensionslosen Rotorrandbedingungen darstellen. Die vorgenommenen vereinfachenden Annahmen sind jedoch für den hier vorliegenden Fall kritisch zu prüfen, in Abschnitt 4.6 wird dazu die Größe  $K(x^+)$  der ebenen Spaltströmung für einen weiten Bereich von Re-Zahlen untersucht. Der Einfluss der Rotordrehung auf  $K(z^+, \bar{u}_{\theta, Rot}, \bar{r}_{Rot})$  erfolgt später in Abschnitt 4.6.1.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die parameterfreie Darstellung der Erhaltungsgleichungen nur für laminare Strömung möglich ist. Für turbulente Strömungen tritt zusätzlich die turbulente Viskosität  $\eta_t$  in den Impulsgleichungen auf, die sich allgemein als Funktion der Reynoldszahl darstellt (siehe Kap. 2.5). Aus Gründen der Vergleichbarkeit werden die Ergebnisse der turbulenten Strömung dennoch über  $x^+$  dargestellt, es ist im Gegensatz zur laminaren Strömung allerdings ein deutlicher Einfluss der Re-Zahl zu erwarten.

Für die voll ausgebildete Strömung gelten die zur Vereinfachung der Gleichungen gemachten Annahmen exakt (siehe Absch. 4.1), darüber hinaus ändert sich die Strömung nicht mehr mit der Laufkoordinate  $z^+$ , es gilt  $\frac{\partial}{\partial z^+} = 0$ . Die Impulsgleichungen Gl. 4.40 und 4.41 sind unter diesen Bedingungen voneinander entkoppelt. Das voll ausgebildete Geschwindigkeitsprofil in axialer Richtung entspricht dem der ebenen

Spaltströmung nach Gl. 4.5, das Geschwindigkeitsprofil in tangentialer Richtung kann durch Integration aus Gl. 4.40 bestimmt werden, was die bekannte Couette-Strömung zwischen zwei coaxialen Zylindern ergibt:

$$\bar{u}_{\theta,fd} = \bar{u}_{\theta,Rot} (1 + 2\bar{r}_{Rot} - 2\bar{r}) \quad \text{für} \quad \bar{r}_{Rot} \leq \bar{r} \leq \bar{r}_{Rot} + 1/2 \quad (4.43)$$

In der voll ausgebildeten laminaren Strömung überlagern sich beide Strömungsvorgänge ungestört. Für die turbulente Strömung ist dies nicht der Fall, da wie in Kap. 4.6.1 beschrieben, durch Überschreiten einer der kritischen Re-Zahlen Turbulenz erzeugt wird, die beide Strömungsvorgänge beeinflusst.

## 4.5 Numerische Berechnung der Verlustgrößen

Für die Bestimmung der Verlustgrößen  $K$  und  $K_e$  werden die vollständigen Impulserhaltungsgleichungen Gl. 4.33 - 4.35, die Kontinuitätsgleichung und die Turbulenzgleichungen gelöst, was nur numerisch mit den in Kap. 3 beschriebenen Methoden ausgeführt werden kann. Als Strömungsraum wird die in Abb. 1.13 skizzierte Geometrie verwendet. Die Abmessungen des Strömungsraumes sind dabei so groß gewählt, dass dessen Ausdehnung keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. An den Rändern des Strömungsraumes werden entsprechend Einlass-, Auslass- und Wandrandbedingungen vorgegeben, die im Folgenden erläutert werden.

### Einlassrandbedingung

Für die Impulsgleichungen wird der Totaldruck und die Richtung des Geschwindigkeitsvektors am Rand vorgeben. Der resultierende statische Druck wird unter Annahme einer verlustfreien Strömung berechnet, im inkompressiblen Fall also nach der Bernoulli-Beziehung ( $p_{tot} = p + \rho/2 \cdot V^2$ ). Da aufgrund der gewählten Domaingröße die Strömungsgeschwindigkeit an den Rändern sehr gering ist, entspricht der Totaldruck praktisch dem statischen Druck. Die Berechnung des Betrages der Geschwindigkeit erfolgt durch Extrapolation aus dem Inneren des Strömungsraumes, als Strömungsrichtung wird die Normale zum Rand verwendet.

Für die Turbulenzmodellierung müssen weitere Annahmen über den Strömungszustand an den Rändern getroffen werden, um geeignete Randbedingungen für die vier turbulenten Größen  $k$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $Re_\theta$  vorgeben zu können. Eine übliche Angabe zur Bestimmung geeigneter turbulenter Randbedingungen ist die eines Turbulenzgrades, der wie folgt definiert ist [67]:

$$Tu = \frac{1}{|\vec{V}|} \sqrt{\frac{1}{3} \left( \overline{(u'')^2} + \overline{(v'')^2} + \overline{(w'')^2} \right)} \quad (4.44)$$

Der Turbulenzgrad beschreibt das Verhältnis der Quadratwurzeln der gemittelten turbulenten Schwankungen zur Hauptströmungsgeschwindigkeit  $|\vec{V}|$ . Generelle Empfehlungen für den Turbulenzgrad an Einlassflächen geben einen Wert von 1% für sehr turbulenzarme Einströmung und bis zu 10% für stark turbulente Strömung vor. Da in den Experimenten die Einströmung aus einem in Relation zum Spalt gesehen großen Rezipienten erfolgt und dementsprechend das Gas an den Einlassflächen nahezu in Ruhe ist, wird für die hier durchgeführten Rechnungen ein Turbulenzgrad von 1% angesetzt.

Aus der Definition der turbulenten kinetischen Energie  $k$  (siehe Gl. 2.54) ergibt sich direkt die Relation zum Turbulenzgrad:

$$k = \frac{3}{2} \left( |\vec{V}| \cdot Tu \right)^2 \quad (4.45)$$

Zur Bestimmung geeigneter Randbedingungen für die turbulente Dissipationsrate kann aus der Bestimmungsgleichung für die turbulente Viskosität des  $k - \omega$  Modells (Gl. 2.60) ein Zusammenhang zwischen  $\omega$  und dem Verhältnis der turbulenten zur molekularen Viskosität hergeleitet werden:

$$\omega = \rho \frac{k}{\eta_t} = \rho \frac{k}{\eta} \left( \frac{\eta_t}{\eta} \right)^{-1} \quad (4.46)$$

Um  $\omega$  zu bestimmen, muss noch eine geeignete Annahme für das turbulente Viskositätsverhältnis  $\eta_t/\eta$  angegeben werden. Geringe Werte für  $\eta_t/\eta$  führen nach obiger Gleichung zu einer großen Dissipationsrate und damit zu einem schnellen Abklingen der turbulenten Energie von den Einströmrändern. Allgemeinen Empfehlungen geben Werte zwischen 1 und 10 für  $\eta_t/\eta$  an [8], für die hier simulierte Einströmung nahe des Ruhezustandes können noch wesentlich kleinere Werte verwendet werden. Die Randwerte für die Intermittenz  $\gamma$  werden am Einlass direkt angegeben. Der Empfehlung von Menter [59] zufolge sollte  $\gamma = 1$  als Vorgabe am Einlass gemacht werden. Diese Angabe bezieht sich auf eine ausgeprägte Anströmung, wie sie üblicherweise in der Berechnung von Turbomaschinen zu finden ist. In dem hier vorliegenden Fall ist das Gas am Einströmrand nahezu in Ruhe, die Vorgabe einer aktiven Turbulenzproduktion mit  $\gamma = 1$  erscheint deswegen fragwürdig. Der Einfluss der Intermittenzrandbedingung auf die Ergebnisse wird aufgrund dieser Unsicherheit später in Abschnitt 4.7.1 untersucht. Dabei wird eine praktisch laminare Einströmung mit  $\gamma = 0$  und  $\eta_t/\eta = 0.1$  im Vergleich zu einer schwach turbulenten Einströmrandbedingung mit  $\gamma = 1$  und  $\eta_t/\eta = 1$  untersucht. Das im zweiten Fall erhöhte Viskositätsverhältnis soll ein übermäßig schnelles Abklingen der turbulenten Einströmgrößen verhindern.

Die Randbedingung für die Impulsverlust-Reynoldszahl  $Re_{\theta t}$  kann aus dem Turbulenzgrad unter Berücksichtigung des empirischen Transitionsmodells abgeleitet werden [59].

## Auslassrandbedingung

An den Ausströmrändern wird der statische Druck vorgeschrieben, die Geschwindigkeiten werden aus dem Inneren des Strömungsfelds extrapoliert, wobei der Gradient zur Randnormalen gleich Null gesetzt wird ( $\frac{\partial}{\partial y} |_n = 0$ ). Die Bestimmung der turbulenten Größen auf den Ausströmrändern erfolgt in analoger Weise.

Sollte sich am Druckauslass lokal eine Strömung in den Strömungsraum hinein einstellen, so wird der vorgeschriebene Druck als Totaldruck interpretiert und ferner angenommen, dass die Einströmung normal zum Rand erfolgt (siehe Einlassrandbedingung). Die Randbedingungen für die turbulenten Größen werden in einem solchen Fall identisch zu denen der Einströmung gesetzt.

## Wandrandbedingung

An allen Wänden wird für die Geschwindigkeitskomponenten die Haftbedingung ( $\vec{V} = \vec{V}_{wand}$ ) verwendet. Für die Gehäuseberandung ist die Geschwindigkeit in jedem Fall Null, für den Rotor entspricht diese der sich aus der Rotordrehung ergebenden Oberflächengeschwindigkeit ( $u_\theta = r \cdot \omega_{Rot}$ ). Die Bestimmung des Drucks an der Wand erfolgt durch Extrapolation aus dem Strömungsfeld.

Da wie in Kap. 2.5.2 erläutert keine Wandfunktion eingesetzt wird, müssen für alle vier turbulenten Größen die Randbedingungen explizit vorgeben werden. An der Wand verschwinden die turbulenten Bewegungen; für die turbulente kinetische Energie gilt daher  $k = 0$ . Die turbulente Frequenz  $\omega = \epsilon/k$  läuft gegen unendlich an der Wand, für den wandnächsten Kontrollpunkt wird eine hyperbolische Verteilung angesetzt [8]:

$$\omega_w = \frac{\rho \cdot (u^*)^2}{\eta} \cdot \omega^+ \quad \text{mit} \quad \omega^+ = \min \left( 2500, \frac{6}{\beta_i \cdot (y^+)^2} \right), u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.47)$$

Für die Intermittenz und die Impulsverlust-Reynoldszahl wird ein verschwindender Fluss an der Wand angegeben, d.h.  $\frac{\partial}{\partial y} |_{n=0} = 0$  [59].

Um die laminare Unterschicht ausreichend genau aufzulösen, wird für den wandnächsten Kontrollpunkt ein Wert von  $y^+ = \frac{y \cdot \rho \cdot u^*}{\eta} \approx 1$  eingehalten.

## Bestimmung geeigneter Randbedingungen

Da das eingesetzte CFD-Programm Fluent die Eingabe dimensionsbehafteter Randbedingungen erfordert, müssen diese so abgeschätzt werden, dass sich im Spalt die gewünschte Re-Zahl einstellt. Geeignete Randbedingungen können unter vereinfachenden Annahmen aus dem Impulssatz Gl. 4.31 abgeschätzt werden. Dazu wird der Ausdruck  $K(L) + K_e = \xi_e$  nach Angabe in [78] pauschal mit  $\xi_e = 1.12$  abgeschätzt. Für gegebene Geometrie, Viskosität des Fluids und Druckdifferenz kann die Re-Zahl über die Vorgabe der Dichte eingestellt werden:

$$\rho = \frac{Re^2 \cdot \eta^2}{2 \cdot (p_{0,1} - p_{0,2}) \cdot D_h^2} \left[ f_{fd} \cdot \frac{L}{D_h} + \xi_e + 1 \right] \quad (4.48)$$

Die Werte für Viskosität, hydraulischem Durchmesser und Druckdifferenz können beliebig gewählt werden, weil für inkompressible Strömungen die Reynolds-Ähnlichkeit gilt und die Ergebnisse nur in dimensionsloser Form ausgewertet werden. Da die korrekten Werte für  $K(L)$  und  $K_e$  im Vorfeld nicht bekannt sind und sich erst aus der Lösung ergeben, werden mit der Abschätzung die gewünschten Re-Zahlen nicht genau getroffen. Die Ergebnisse zeigen, dass die Abweichung im laminaren bzw. turbulenten Bereich etwa 2-10% beträgt, im laminar-turbulenten Übergangsbereich können die Abweichungen wesentlich größer werden, da das Transitionsverhalten nur schwer abgeschätzt werden kann.

Die Spalttiefe wird dabei so gewählt, dass die Einlaufänge sich etwa über die halbe Spalttiefe erstreckt. Dadurch wird sichergestellt, dass die Einlaufverluste einen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis haben und durch ausreichend viele Gitterzellen aufgelöst werden. Erste Rechnungen ergaben eine hydrodynamische Einlaufänge für laminare Strömung von  $L_{hyd}^+ \approx 0.015$ , so dass Spalttiefen von ca.  $L^+ \approx 0.03$

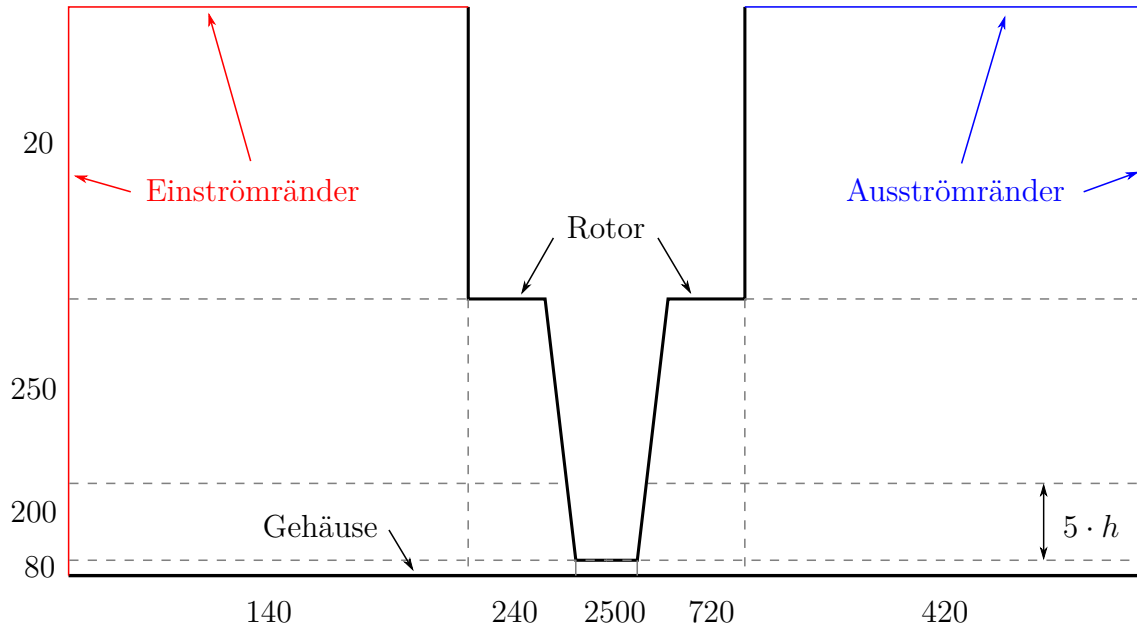


Abb. 4.3: Randbedingungen und Netztopologie. Die Zahlen an den Rändern geben die Anzahl der Gitterpunkte an, die Gesamtzellenzahl für das skizzierte Netz beträgt 1006955.

eingesetzt wurden. Für die Spalte bedeutet, das gemäß der Definition von  $x^+$  für niedrige  $Re$ -Zahlen kurze Spalte (kleines  $L/h$ ) und für große  $Re$ -Zahlen tiefe Spalte verwendet werden. Im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung kann die Einlaufänge sehr viel größer werden (bis ca.  $L_{hyd}^+ \approx 0.04$ ), weshalb sehr tiefe Spalte untersucht werden. Für den turbulenten Strömungsbereich wird die Einlaufänge infolge der turbulenten Fluidbewegung sehr kurz, was entsprechend kurze Spalte notwendig macht.

## Netz- und Modelleinfluss

Um den Einfluss des Netzes auf die Lösung zu testen, wurden die Netzauflösung und -struktur systematisch für  $Re \approx 1000$  variiert. Als Diskretisierungsschema wurde für alle Variablen das Verfahren zweiter Ordnung verwendet, um den Diskretisierungsfehler klein zu halten. In der Netzstudie zeigte sich, dass die Auflösung unmittelbar oberhalb des Spaltes einen deutlichen Einfluss auf die Nachlaufströmung am Spaltaustritt hat, weswegen die in Abb. 4.3 skizzierte Netztopologie verwendet wird. Für die korrekte Erfassung der Einlaufverluste wurde die Auflösung im Spaltbereich erhöht, bis eine weitere Verfeinerung praktisch keinen Einfluss mehr auf  $K$  hat (Änderung  $< 1\%$ ). Das Ergebnis der Netzstudie ist in Abb. 4.3 dargestellt, die Zellen werden innerhalb ihrer Bereiche zum Spalt hin kleiner.

In turbulenten Strömungen muss die laminare Unterschicht mit einem Wandabstand von  $y^+ \approx 1$  aufgelöst werden, was eine erhöhte Auflösung in vertikaler Richtung im Spalt nötig macht. Für die transitionelle Strömung wird das Netz aufgrund der großen Spalttiefe zusätzlich in horizontaler Richtung verfeinert, so dass  $K$  stets mit einer hohen numerischen Genauigkeit ermittelt wird.

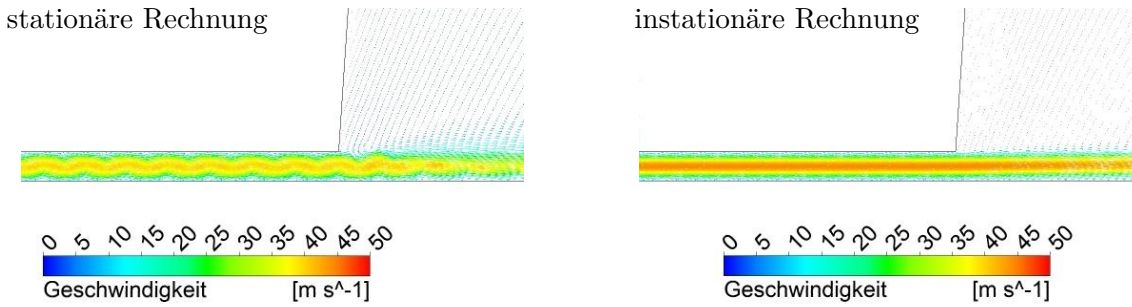


Abb. 4.4: Geschwindigkeitsfeld der Spaltauströmung bei  $Re = 1500$  im Bereich der Spaltauströmung.

In den durchgeführten Rechnungen für  $Re > 1500$  ergaben sich oszillierende Geschwindigkeitsprofile (siehe Abb. 4.4), die auch bei weiterer Netzverfeinerung erhalten blieben. Da die berechneten Reibwerte dieser Strömung deutlich über der analytischen Lösung (Gl. 4.15) liegen, die bis  $Re \approx 2600$  gut durch Experimente bestätigt ist, liegt die Vermutung einer unzureichenden Modellbildung nahe. An dieser Stelle ist insbesondere die Annahme einer stationären Strömung in Frage zu stellen, weil die starke Wirbelbildung im Nachlauf zu einem instationären Strömungsverhalten führen kann. Die durchgeführten instationären Rechnungen bestätigen diese Vermutung, da für einen hinreichend kleinen Zeitschritt ( $\Delta t = 5 \cdot 10^{-8} s$ ) und wenigstens fünf Iterationen pro Zeitschritt (nach Kap. 3.2) die ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile der analytischen Lösung entsprechen. Die Strömung im Spalt selbst ist stationär, die instationären Vorgänge beschränken sich auf den Nachlauf. Diese Beobachtung wird durch die experimentellen Ergebnisse von Hsiao [42] gestützt, der die Ausströmung einer Rechteckdüse entlang einer ebenen Platte untersuchte. Wenn auch nicht exakt vergleichbar (kein ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil am Düsenaustritt in den Experimenten), so fand Hsiao, dass sich im Nachlauf oberhalb einer Re-Zahl von 1104 instabile Wirbel bilden, was im hier untersuchten Fall offenbar ähnlich ist. Die weiteren Rechnungen zeigten, dass die instationäre Betrachtung für den gesamten weiteren laminaren und transitionellen Bereich notwendig ist, um oszillierende Geschwindigkeitsprofile zu vermeiden. Für die voll turbulente Strömung ist hingegen eine stationäre Rechnung ausreichend, hier treten keine oszillierenden Geschwindigkeitsprofile im Spalt auf. Die turbulente Strömung ist offenbar unempfindlicher gegenüber Störungen aus dem Spaltnachlauf. Es ist dennoch zu erwarten, dass dieser instationär ist, was jedoch nicht Gegenstand der Untersuchungen ist, so dass auf eine detaillierte Analyse verzichtet wird.

Die Rechnungen mit Rotordrehung können unter der Annahme einer achsensymmetrischen Strömung (d.h.  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ) vereinfachend durchgeführt werden. Die Annahme der Achsensymmetrie ist kritisch zu prüfen, da eine Wirbelbildung in Achsrichtung nicht prinzipiell ausgeschlossen werden kann. Dazu wurden Vergleichsrechnungen mit einem dreidimensionalen Modell ausgeführt, die jedoch das gleiche Ergebnis wie die achsensymmetrische Rechnung lieferten (siehe Abschnitt 4.6.1).

## 4.6 Ergebnisse für laminare Strömung

Mit den in den vorherigen Abschnitten erläuterten Methoden wird zunächst der laminare Strömungsbereich bis  $Re \approx 2600$  analysiert. Alle dafür notwendigen Integrale zur Auswertung der Verlustgrößen (Gl. 4.10, 4.16, 4.26) werden durch die Trapezregel genähert und haben damit einen Abbruchfehler zweiter Ordnung [18]. Die so numerisch bestimmten Reibwerte der voll ausgebildeten Strömung entsprechen mit hoher Genauigkeit der analytischen Lösung nach Gl. 4.15, die maximale Abweichung ist kleiner 1%. Die Ergebnisse für den inkrementellen Druckverlust  $K$  sind in Abb. 4.5 über der hydrodynamischen Lauflänge  $x^+$  dargestellt. Unmittelbar hinter dem Spalteintritt bildet sich eine Ablöseblase aus, die eine relativ große Absenkung des statischen Drucks bewirkt, was sich in einem hohen Wert für  $K$  widerspiegelt. Mit dem Wiederanlegen der Strömung reduzieren sich die vertikalen Strömungskomponenten stark, was zu einem Anstieg des statischen Drucks und damit zu einer Verringerung von  $K$  führt (siehe auch Abb. 4.2). Die durch die Ablösung verursachte Spitze von  $K$  ist den Ergebnissen nach deutlich von der Re-Zahl der Strömung abhängig. Bei niedrigen Re-Zahlen hat die innere Reibung (Viskosität) einen großen Einfluss in der Strömung und dämpft die Ausbildung einer Ablöseblase. Bei hinreichend niedrigen Re-Zahlen ( $Re < 50$ ) tritt diese nahezu nicht mehr auf, so dass  $K$  nur noch eine geringe Überhöhung aufweist. Für große Re-Zahlen nimmt die Bedeutung der inneren Reibung ab und die Trägheitskräfte spielen eine größere Rolle, was zu einer ausgeprägteren Ablöseblase und damit zu einem höheren Maximum von  $K$  führt. Nach dem Wiederanlegen bei  $x^+ \approx 0.003$  ist der Einfluss der Re-Zahl für  $Re > 500$  auf  $K$  sehr gering. Außerhalb des Ablösegebietes sind die in Abschnitt 4.4 getroffenen Vereinfachungen sehr gut gültig, die einen von der Re-Zahl unabhängigen Verlauf von  $K$  über  $x^+$  erwarten lassen. Für niedrigere Re-Zahlen ist ein Einfluss der Re-Zahl zu erkennen. Hierfür dürfte insbesondere die in der Dimensionsanalyse getroffene Annahme der vernachlässigbaren Reibung in axialer Richtung verantwortlich sein, die bei einem reibungsdominierten Strömungsfeld offenbar so nicht zutrifft.

Nach einer Lauflänge von  $x^+ \approx 0.015$  ist der inkrementelle Druckverlust praktisch konstant, was im Folgenden als Wert für die hydrodynamische Einlauflänge genommen wird. Weiterhin zeigen die Ergebnisse, dass die Änderung von  $K$  am Spaltaustritt sehr gering ist; zusätzliche Ausströmverluste treten nicht auf.



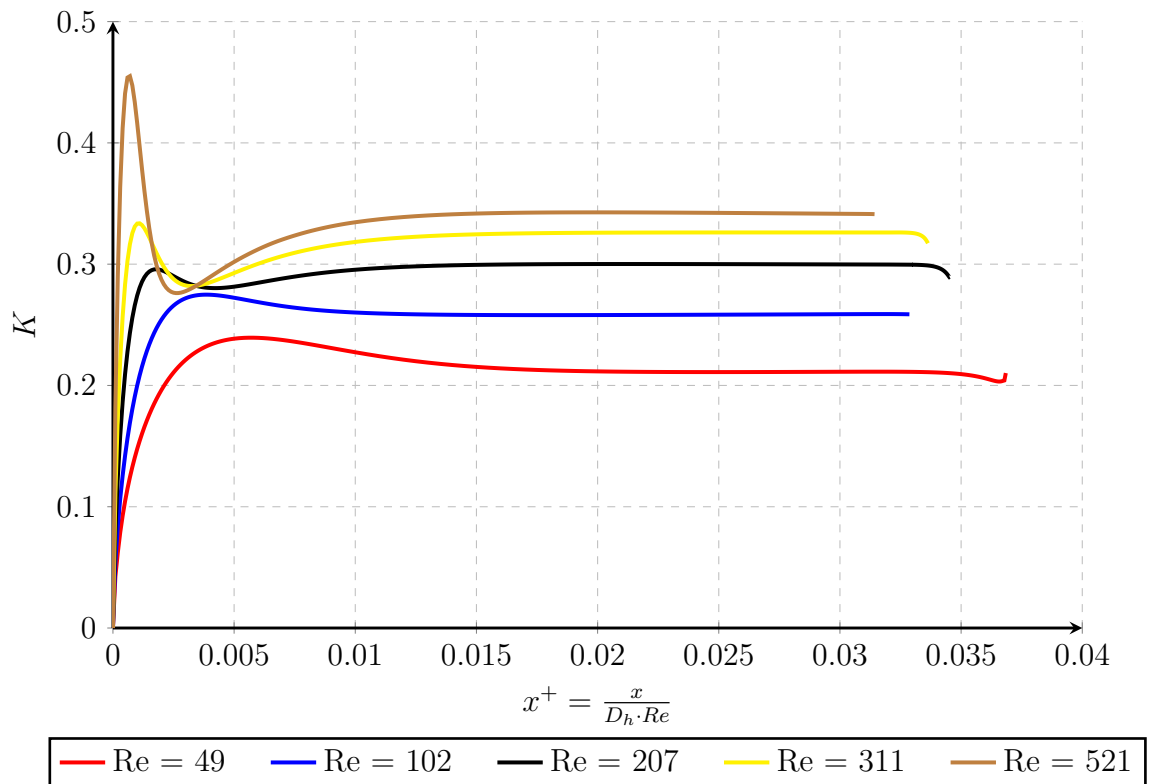
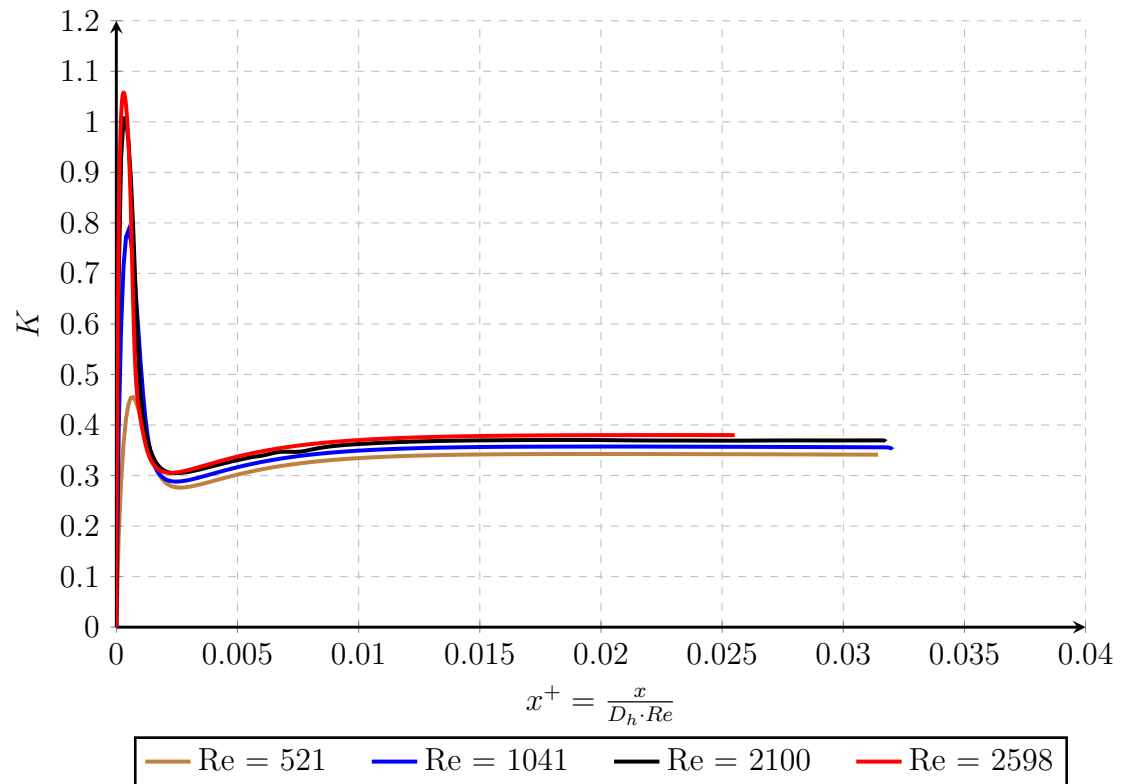


Abb. 4.5: Inkrementeller Druckverlust der laminaren Strömung mit ruhendem Rotor.

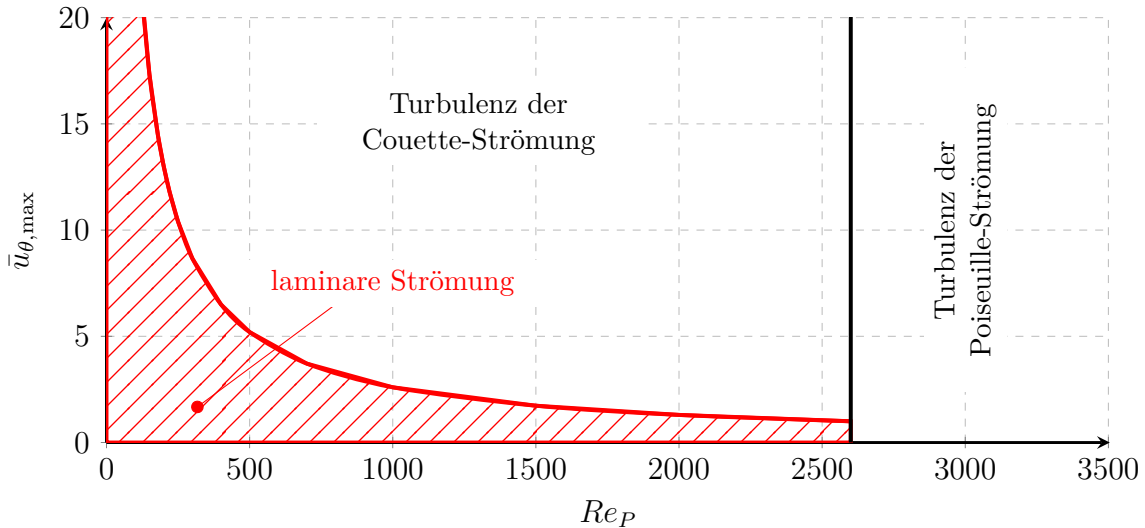


Abb. 4.6: Darstellung der maximal zulässigen Rotorgeschwindigkeit, um Turbulenz im Spalt zu vermeiden. In dem rot schraffierten Gebiet ist keine Turbulenz im Spalt zu erwarten, da beide kritischen Re-Zahlen unterschritten werden.

#### 4.6.1 Einfluss der Rotordrehung

Damit die Strömung in Gehäusespalt laminar bleibt, müssen die Reynoldszahl der Poiseuille-Strömung und der durch die Rotordrehung hervorgerufenen Couette-Strömung unter ihren kritischen Werten liegen, siehe Kap. 1.4. Mit dem eingeführten Geschwindigkeitsverhältnis  $\bar{u}_{\theta, Rot}$  (Gl. 4.42) ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen beiden Re-Zahlen:

$$Re_C = Re_P \cdot \bar{u}_{\theta, Rot} \quad (4.49)$$

Setzt man  $Re_c$  auf den kritischen Wert von 2600, so kann die maximale dimensionslose Geschwindigkeit als Funktion von  $Re_P$  bestimmt werden, bis zu der die Strömung im Spalt laminar bleibt:

$$\bar{u}_{\theta, \max} = \frac{Re_C = 2600}{Re_P} \quad (4.50)$$

Bei hohen Reynoldszahlen kann die Wandgeschwindigkeit demnach nur geringe Werte annehmen, um im laminaren Bereich zu bleiben; für niedrige Re-Zahlen sind wesentlich größere Werte möglich. Dieser Zusammenhang ist zur Verdeutlichung in Abb. 4.6 darstellt. Grundsätzlich sind hohe Werte für  $\bar{u}_{\theta, Rot}$  in Vakuumpumpen durchaus erreichbar, da im Fall kleiner Druckdifferenz zwischen zwei Kammern die Spaltdurchströmungsgeschwindigkeit  $u$  sehr klein werden kann.

Als weiterer Parameter tritt der dimensionslose Rotorradius  $\bar{r}_{Rot} = r_{Rot}/D_h$  in den Erhaltungsgleichungen auf, der invers zur Spaltkrümmung ist. Weil diese, wie in Kap. 1.4 beschrieben, sehr klein ist, kann der Gehäusespalt in guter Näherung durch einen ebenen Spalt ersetzt werden; der Parameter  $\bar{r}_{Rot}$  entfällt somit.

Zur Beurteilung des Einflusses der Rotordrehung sind die inkrementellen Druckverlustwerte für  $Re \approx 100$  und  $Re \approx 2600$  mit verschiedenen möglichen Werten für  $\bar{u}_{\theta, Rot}$  in Abb. 4.7 dargestellt. Den Ergebnissen nach ist der Einfluss auf  $K$  gering, erst für hohe Werte zeichnet sich ein leichter Anstieg ab (siehe  $Re = 102$ ,  $\bar{u}_{\theta, Rot} = 8$  und  $\bar{u}_{\theta, Rot} = 26$ ).

Die Rotordrehung übt für laminare Strömung demnach nur einen sehr geringen Einfluss auf die Durchströmung aus. Ein deutlicherer Einfluss ist bei turbulenter Couette Strömung zu erwarten, da diese den Spaltfluss deutlich drosseln dürfte. Eine theoretische Untersuchung ist aber mit den zur Verfügung stehenden Turbulenzmodellen nicht ohne weiteres möglich (siehe Kap. 2.5.2), weshalb hierauf verzichtet wird.

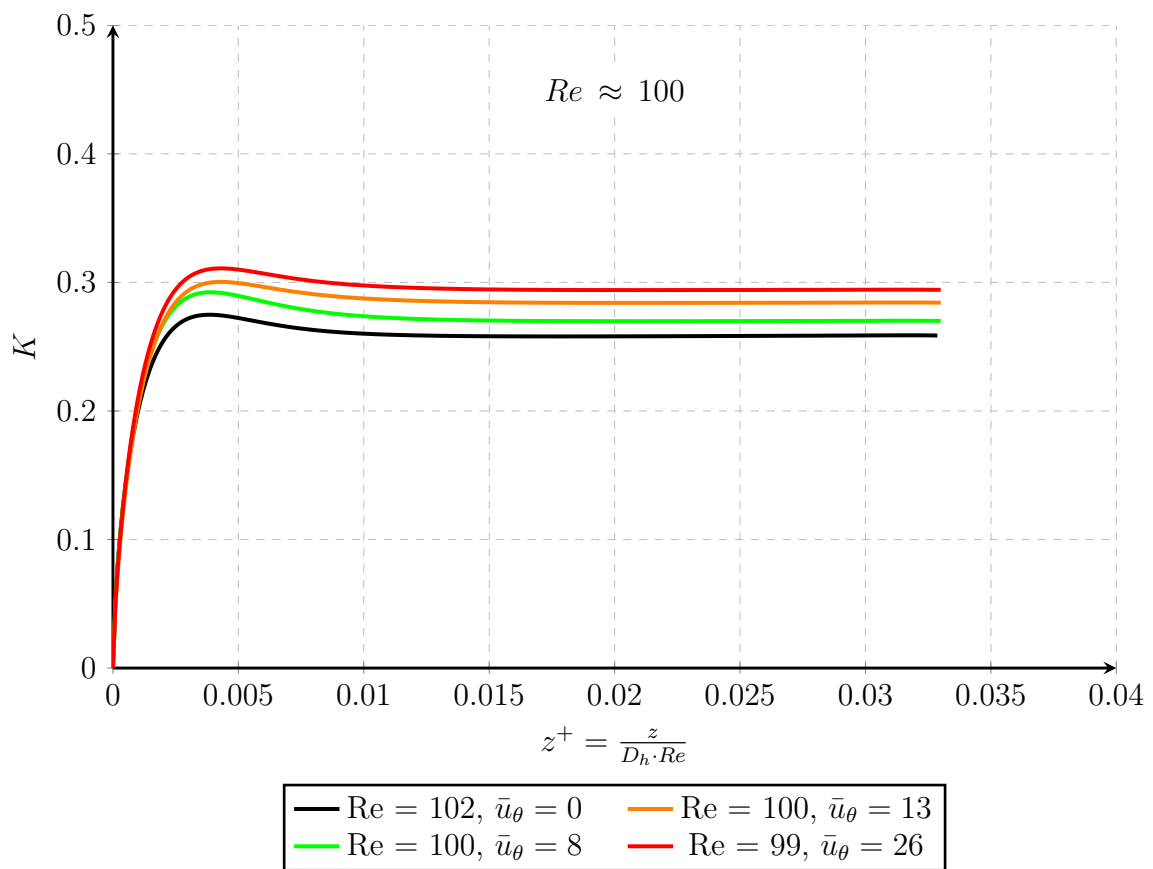
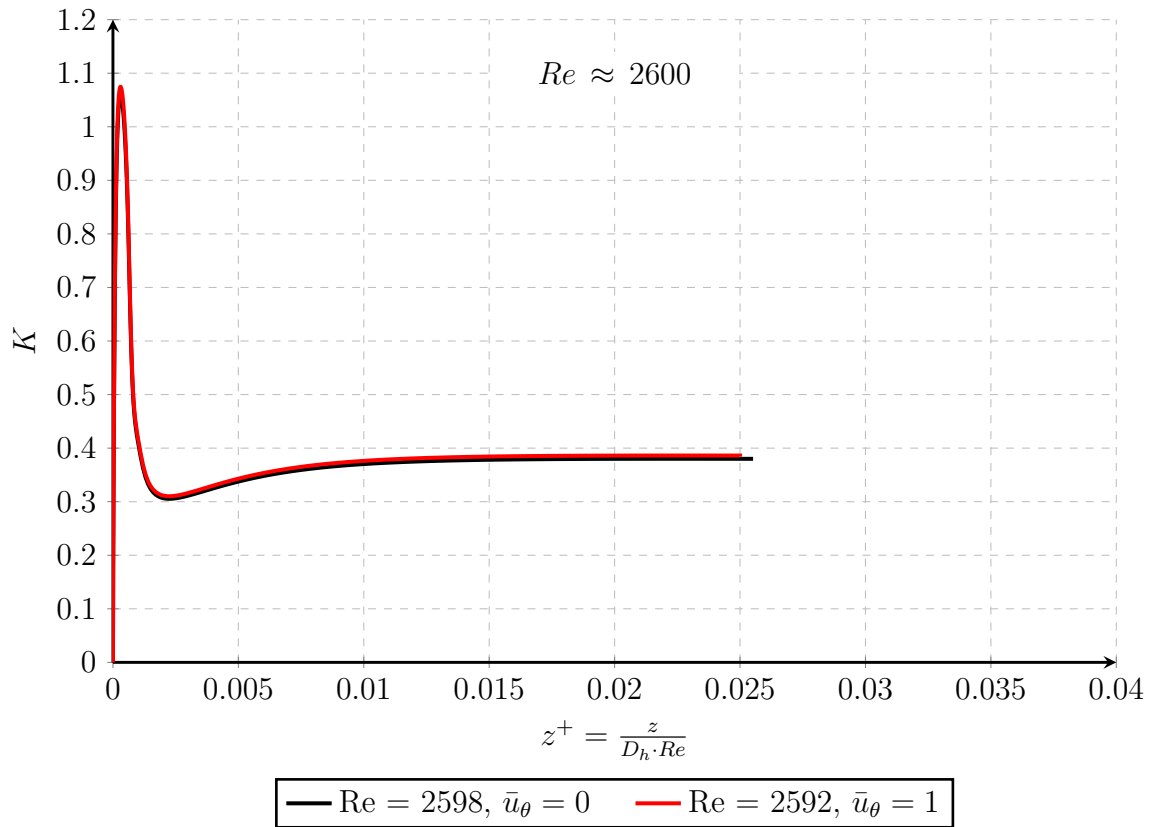


Abb. 4.7: Einfluss der Rotordrehung auf den inkrementellen Druckverlust

## 4.7 Ergebnisse für turbulente Strömung

### Voll ausgebildete Strömung

Die Beurteilung, ob die Strömung im Spalt turbulent oder laminar ist, erfolgt anhand des Reibwertes der voll ausgebildeten Strömung. Allgemein ist zu erwarten, dass die Reibwerte bei der kritischen Re-Zahl stark ansteigen, da durch die turbulenten Bewegungen das Geschwindigkeitsprofil völliger und dadurch die Wandreibung vergrößert wird. Weiterhin spielt die Wandrauigkeit bei der turbulenten Strömung eine gewichtigere Rolle als bei der laminaren Strömung. Ein Rohr bzw. ein Spalt darf nach [78] dann als glatt betrachtet werden, wenn die Rauigkeitsspitzen von der laminaren Unterschicht bedeckt werden. Da aufgrund der geforderten Genauigkeit die Oberflächen in Schraubenvakuumpumpen in der Regel sehr fein bearbeitet werden müssen, können diese als hydraulisch glatt betrachtet werden.

Im Gegensatz zur laminaren Strömung ist es für die turbulente Strömung nicht möglich, eine analytische Lösung aus den Erhaltungsgleichungen abzuleiten. Für die Bestimmung der Reibwerte ist man auf halbempirische Korrelationen angewiesen; die bedeutsamsten sind bereits in Kap. 1.5 zusammengefasst. Eine untere Gültigkeitsgrenze dieser Beziehung kann nicht allgemein angegeben werden, weil im Transitionsbereich die voll ausgebildeten Reibwerte stark vom Turbulenzgrad der Zuströmung und von der Einlaufgeometrie abhängen.

In der Literatur werden die Reibwerte häufig in einem doppelt-logarithmischen Diagramm über der Re-Zahl dargestellt, das unter dem Namen "Moody" oder auch "Colebrook"-Diagramm bekannt ist. Dieses ist in Abb. 4.8 mit den Werten der Korrelationen aus Kap. 1.5 und mit dem SST-Transitionsmodell bestimmten Ergebnissen dargestellt. Wie bereits diskutiert, gibt die Simulation die analytische Lösung für den laminaren Strömungsbereich sehr gut mit einer maximalen Abweichung  $< 1\%$  wieder. Im voll turbulenten Bereich für  $Re > 8000$  beträgt die Differenz zwischen Simulation und Korrelation von Beavers maximal  $5\%$  bei  $Re \approx 20000$ , für kleinere Re-Zahlen sind die Abweichung geringer. Weiterhin zeigen die Ergebnisse, dass bis  $Re \approx 6000$  die Strömung im Sinne der voll entwickelten Reibwerte laminar bleibt. Im Bereich zwischen  $Re \approx 6000$  und  $Re \approx 8000$  konnte keine stabile numerische Lösung erzielt werden, der Spaltmassenstrom (und damit die Re-Zahl) pendelt bis zu  $\pm 15\%$  um seinen Mittelwert.

Die hohe kritische Re-Zahl von  $Re \approx 6000$  steht scheinbar im Widerspruch zu den experimentellen Daten [13], es sei jedoch nochmal betont, dass sich diese auf die voll entwickelte Strömung bezieht. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, hat die Turbulenz schon bei sehr viel kleineren Re-Zahlen einen deutlichen Gesamteinfluss auf die Spaltströmung.

### Einlaufverluste

Die Auswertung der Einlaufverluste erfolgt analog zur laminaren Strömung über den inkrementellen Druckverlust  $K$  im Spalteintritt und ist in den Abb. 4.10 und 4.11 dargestellt. Die Ergebnisse für niedrige Re-Zahlen zeigen, dass bis  $Re \approx 3000$  der Verlauf von  $K$  nur unwesentlich über den Werten der laminaren Strömung liegt. Bis zu dieser Re-Zahl spielen turbulente Effekte im Spalteintritt offensicht-

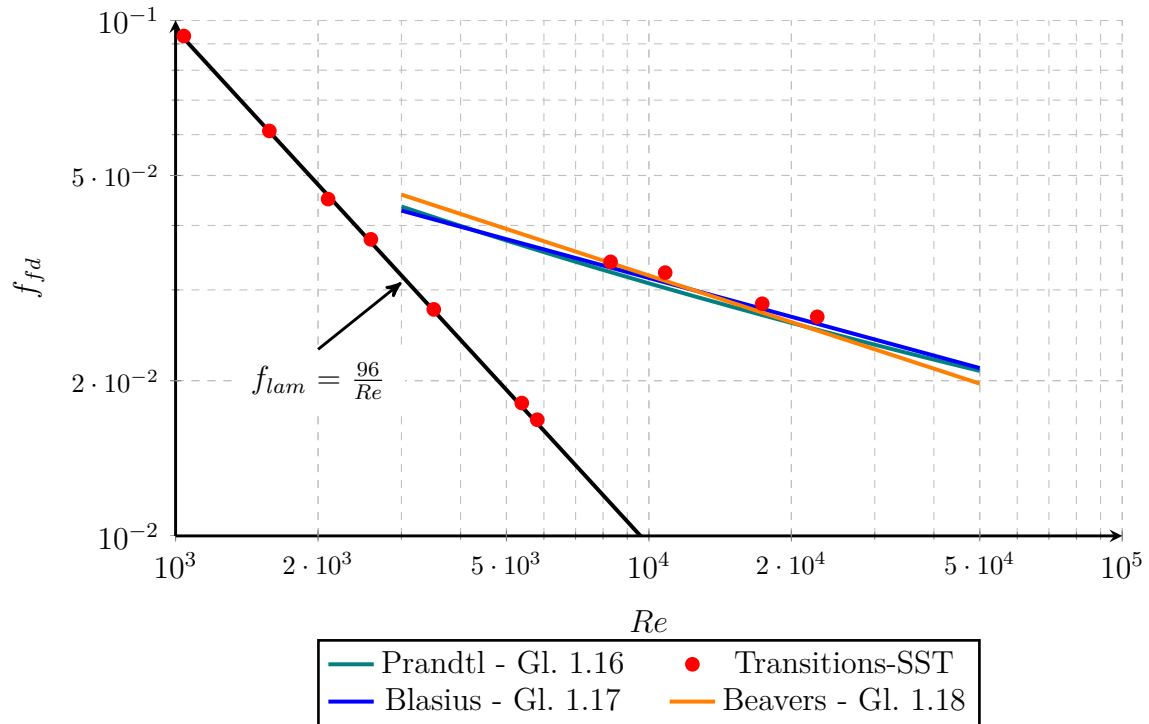


Abb. 4.8: Reibwerte der voll ausgebildeten Strömung über der  $Re$ -Zahl

lich nur eine untergeordnete Rolle. Für größere  $Re$ -Zahlen ( $Re > 3000$ ) ändert sich das Verhalten signifikant: die Spalteinlaufänge wächst stark an und beträgt etwa  $L_{hyd} \approx 0.04$ ; ebenso ergeben sich sehr viel höhere, voll ausgebildete Werte von bis zu  $K(\infty) = 1.24$ . Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, ist in diesem  $Re$ -Zahl Bereich die voll ausgebildete Strömung laminar; die im Eintritt entstehende Turbulenz wird nach hinreichend langer Lauflänge durch den Wandeinfluss gedämpft, so dass die Strömung vollständig relaminarisiert. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch Minkowycz et. al. [62] bei der numerischen Untersuchung verschiedener Einlaufbedingungen für Spalte, die (abhängig von der Art der Zuströmung und dem Turbulenzgrad) ähnlich lange Einlaufbereiche fanden. Aufgrund der unterschiedlich gewählten Einlaufkonfiguration sind die Ergebnisse jedoch nicht direkt miteinander vergleichbar.

Die Ergebnisse für die voll turbulente Strömung mit  $Re \approx 8000$  (im Sinne der ausgebildeten Reibwerte) in Abb. 4.11 zeigen gänzlich anderes Verhalten: Nach dem durch die Ablöseblase erzeugten scharfen Maximum unmittelbar hinter dem Spalteintritt fallen auf kurzer Lauflänge die Werte für  $K$  schnell ab und erreichen ihren negativen Endwert. Bei der Beurteilung dieses Ergebnisses ist zu beachten, dass  $K$  sich stets auf den Reibwert der voll ausgebildeten Strömung bezieht (siehe Abb. 4.2), in dem betrachteten Bereich also auf die dazugehörigen turbulenten Reibwerte. Im Spalteintritt ist die Strömung aber nicht über der gesamten Spalthöhe turbulent, so dass im Einlaufbereich der gemittelte scheinbare Reibwert kleiner ist als der voll ausgebildete Reibwert, was negative Werte von  $K$  zur Folge hat. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs ist in Abb. 4.9 das turbulente Viskositätsverhältnis im Spalteintritt für  $Re = 5388$  und  $Re = 11197$  dargestellt. Im ersten Fall relaminarisiert die Strömung, was einen hohen Wert von  $K$  bedingt. Im zweiten Fall entwickelt sich

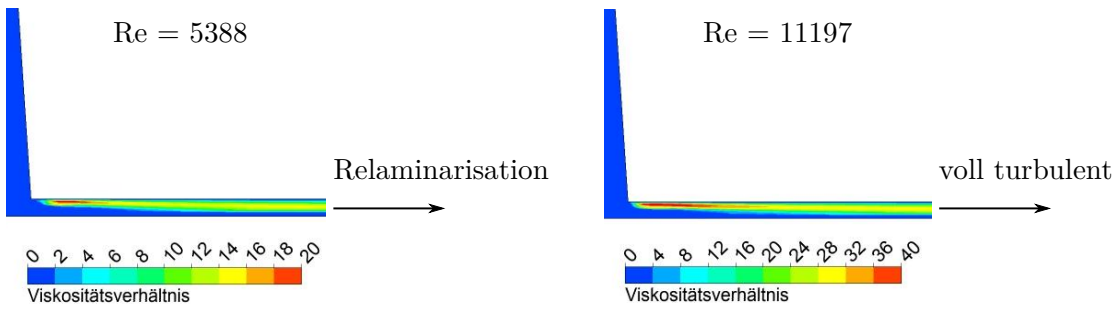


Abb. 4.9: Turbulentes Viskositätsverhältnis im Spalteintritt für transitionelle (links) und voll turbulente Strömung (rechts)

eine voll turbulente Strömung, bei der im Einlauf aufgrund des laminaren Bereiches an der unteren Berandung die Reibungswerte relativ gering sind.

Mit zunehmender  $Re$ -Zahl wird dieser laminare Bereich am Spalteintritt kürzer, was zu insgesamt kürzeren Einlaufängen und betragsmäßig kleineren Werten von  $K(\infty)$  führt.

Zusammengefasst zeigen die numerischen Ergebnisse, dass sich die Spaltströmung in vier Bereiche unterteilen lässt:

1. **Laminare Strömung:** In dieser treten keine turbulenten Effekte auf; als Obergrenze gilt etwa  $Re \approx 3000$ .
2. **Transitionelle Strömung:** Sie tritt in dem Bereich zwischen  $3000 < Re < 6000$  auf. Im Spalteinlauf beeinflusst die Turbulenz signifikant die Strömung, die nach sehr großer Lauflänge allerdings relaminarisiert.
3. **Intermittente Strömung:** Im Bereich  $6000 < Re < 8000$  hat die Strömung einen oszillierenden, instationären Charakter.
4. **Turbulente Strömung:** Für  $Re > 8000$  entwickelt sich nach kurzer Lauflänge eine voll turbulente, stationäre Strömung im Spalt.

Nach [49] kann als kritische  $Re$ -Zahl derjenige Wert gesehen werden, ab der Turbulenz im Spalt auftritt. Den vorangegangenen Untersuchungen nach gilt  $Re_{krit} \approx 3000$ , wenn auch der Umschlag zur voll turbulenten Strömung erst bei ca.  $Re \approx 8000$  auftritt. Tatsächlich beeinflusst die Turbulenz im Transitionsgebiet die Spaltströmung erheblich, da die Einlaufängen extrem groß werden. So ist nach den Ergebnissen erst mit einer voll ausgebildeten (laminaren) Strömung bei  $Re = 3000$  nach etwa  $L/h \approx 240$  zu rechnen, für  $Re = 6000$  erst nach  $L/h \approx 480$ . Die turbulente Einlaufströmung nimmt selbst für tiefe Spalte also einen großen Anteil ein, bei kurzen Spalten wird die voll ausgebildete Strömung nicht erreicht. Es ist somit bei überschreiten von  $Re_{krit} \approx 3000$  mit einem deutlich geänderten Durchströmungsverhalten zu rechnen, obgleich die Strömung im Sinne der voll ausgebildeten Reibwerte laminar bleibt.

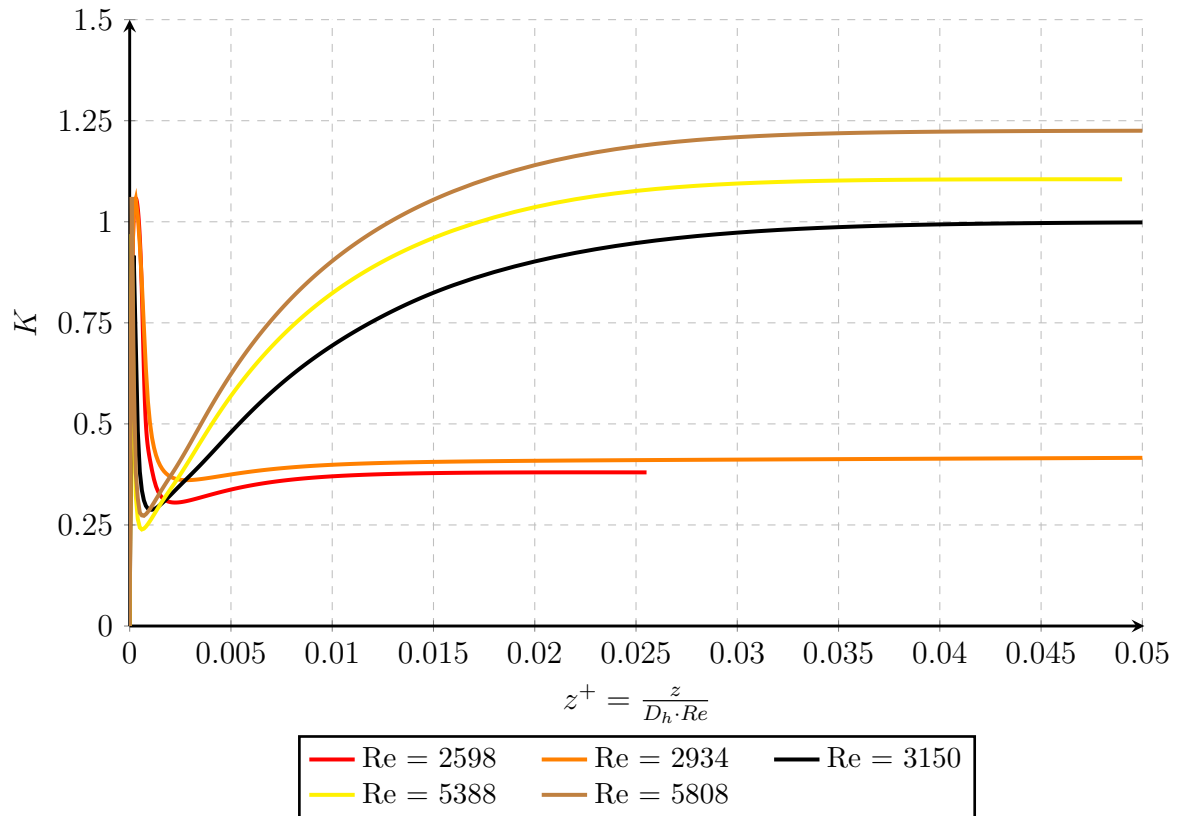


Abb. 4.10: Einlaufverluste im Transitionsbereich für  $2600 < Re < 6000$ .

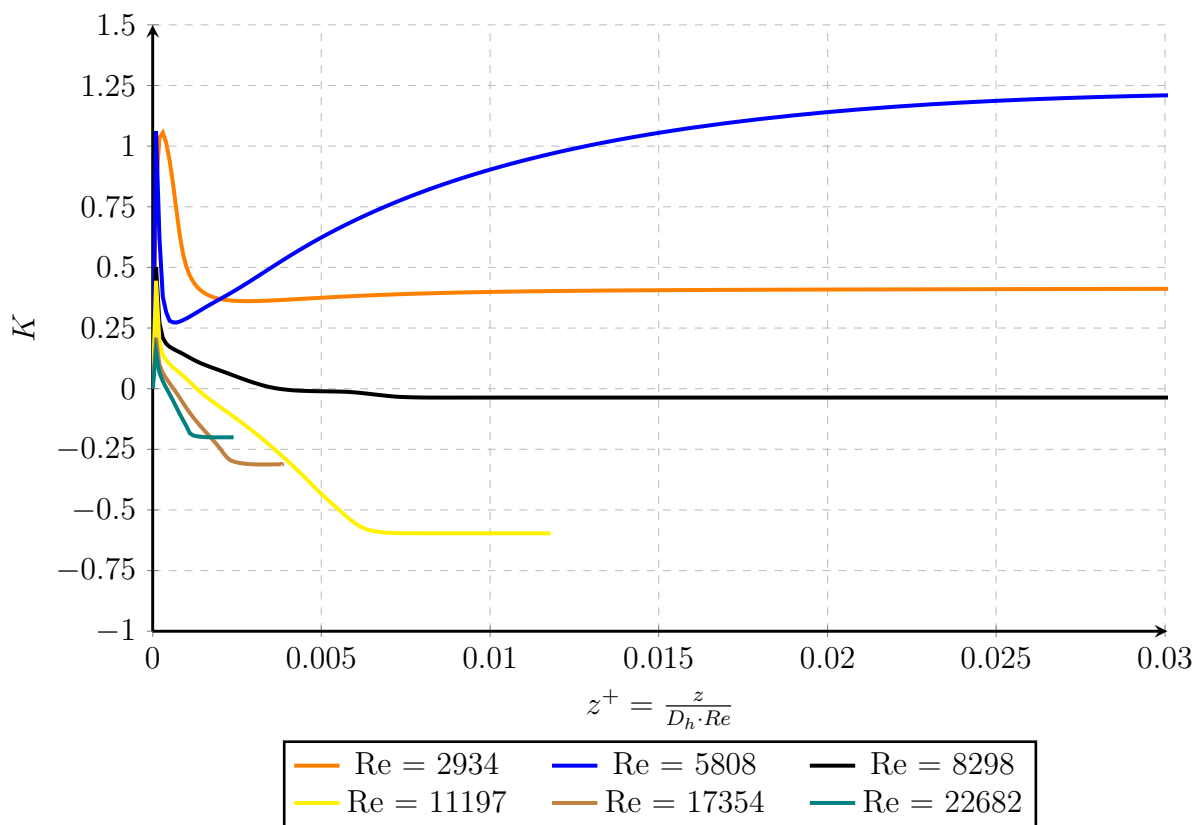


Abb. 4.11: Einlaufverluste für  $Re > 2900$ .



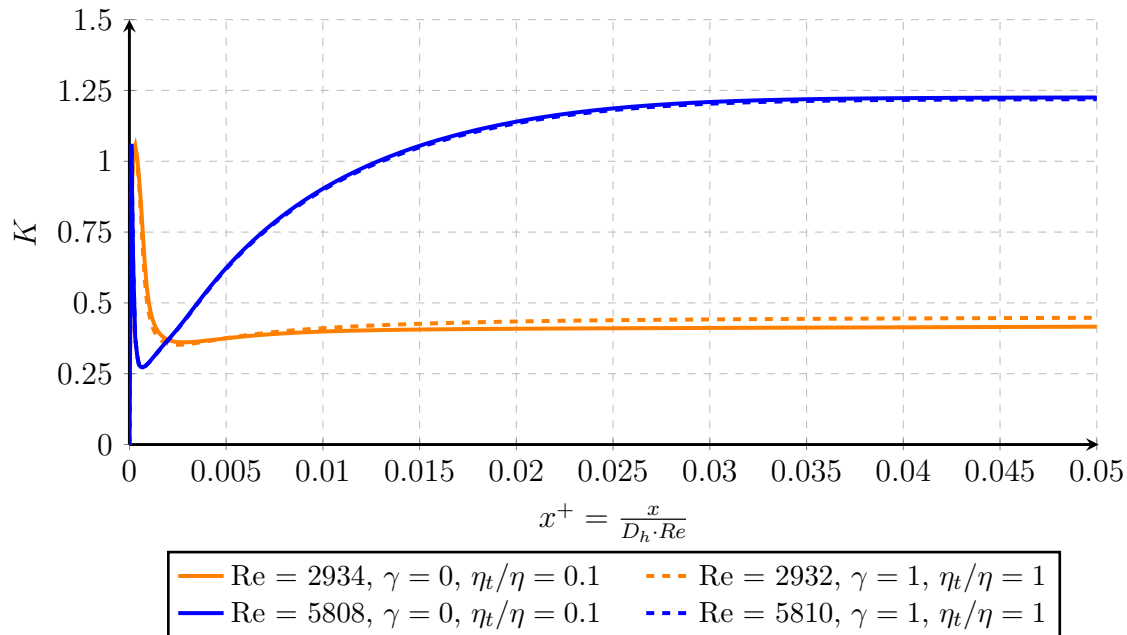


Abb. 4.12: Einfluss der Turbulenz-Randbedingung auf den inkrementellen Druckverlust.

#### 4.7.1 Einfluss der Turbulenzrandbedingungen

Die exakten Turbulenzbedingungen an den Einströmrandern für den Referenzversuch sind nicht bekannt, deshalb wird neben der bisher eingesetzten praktisch laminaren Randbedingung mit  $\gamma = 0$  und  $\eta_t/\eta = 0.1$  noch der Fall einer leicht turbulenten Einströmung mit  $\gamma = 1$ ,  $\eta_t/\eta = 1$  untersucht. Als Turbulenzintensität wird 1% in beiden Fällen angenommen. Geprüft wird hier, ob die schwach turbulente Einströmung bereits zu einem vorzeitigen Umschlagen der Strömung vom laminaren in den transitionellen bzw. vom transitionellen in den intermittenten Bereich führen kann. Die hierfür untersuchten inkrementellen Druckverluste für  $Re \approx 3000$  und  $Re \approx 5800$  sind in Abb. 4.12 dargestellt. Für den laminaren Fall mit  $Re \approx 3000$  führt die Änderung der Turbulenzrandbedingung zu einem leichten Ansteigen des Druckverlustes der Einlaufströmung; ein Wechsel der Strömung in den transitionellen Bereich tritt nicht auf. Gleiches gilt für  $Re \approx 5800$ , wobei hier der Einfluss auf den inkrementellen Druckverlust noch geringer ausfällt.

Die Untersuchungen zeigen somit, dass eine leichte Änderung der Turbulenzbedingungen nicht unmittelbar zu einem anderen Strömungsverhalten führt. Für größere Änderungen der Turbulenzrandbedingungen (insbesondere des Turbulenzgrades) tritt ein Umschlagen der Strömung bei niedrigeren Reynoldszahlen auf, was unter Verwendung des hier ebenfalls eingesetzten Korrelations-Transitionsmodells von Minkowycz [62] nachgewiesen wurde.

Diese könnte auch die Ursache für die Abweichung der kritischen Re-Zahl zwischen dem hier bestimmten Wert von  $Re_{krit} \approx 3000$  und dem experimentell ermittelten Wert von Beavers [13] ( $Re_{krit} = 2600$ ) sein, der keine Angabe über den Turbulenzgrad der Zuströmung macht.

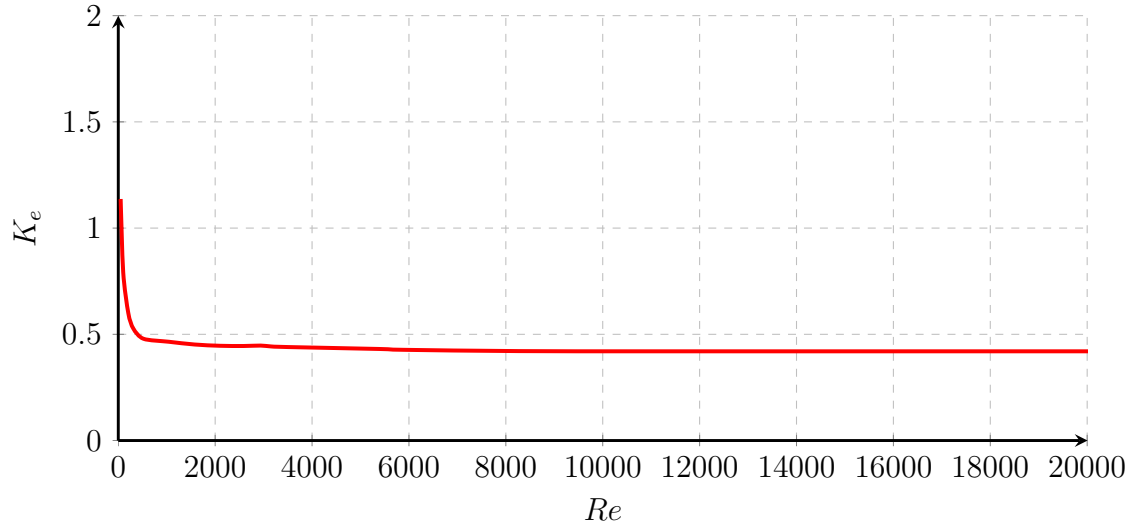


Abb. 4.13: Verlust in der Zuströmung zum Spalt

## 4.8 Zuströmverluste

Weitere Verluste treten in der Zuströmung zum Spalt auf, da diese reibungsbehaftet ist und mit einer wesentlichen vertikalen Strömungskomponente in den Spalt eintritt. Der in Gl. 4.28 definierte Verlustbeiwert  $K_e$  beschreibt integral beide Verlustmechanismen, die Ergebnisse sind in Abb. 4.13 als Funktion der Re-Zahl dargestellt. Bei niedrigen Re-Zahlen hat die innere Reibung einen deutlichen Einfluss auf das Strömungsverhalten, was sich in verhältnismäßig hohen Werten von  $K_e$  niederschlägt. Bei größeren Re-Zahlen dominiert die Trägheit zusehends die Strömung, was ein Abfallen der Reibungsverluste in der Zuströmung bewirkt. Andererseits vergrößert sich die Ablöseblase mit zunehmender Re-Zahl, die dafür benötigten vertikalen Strömungsanteile müssen durch eine zusätzliche Druckabsenkung vor dem Spalt bereitgestellt werden, was wiederum ein vergrößenden Einfluss auf  $K_e$  hat. Im Bereich  $500 < Re < 20000$  kompensieren sich beide Effekte offensichtlich, was ein nahezu konstantes  $K_e$  zur Folge hat. Bemerkenswert ist die Größe der Zuströmverluste, die im laminaren Bereich vergleichbar zum inkrementellen Druckverlust  $K$  ist, bei niedrigen Re-Zahlen sogar deutlich darüber liegt. Hier entstehen wesentliche Zusatzverluste bereits in der Zuströmung zum Spalt.

## 4.9 Bewertung der Ergebnisse

Abschließend wird der Gesamteinfluss der Zuström- und Einlaufverluste auf die Spaltströmung bewertet. Dazu wird der tatsächliche Spaltmassenstrom (mit den zuvor bestimmten Zusatzverlusten) im Vergleich zu dem Massenstrom gesetzt, der sich ergäbe, wenn die Strömung über die gesamte Spalttiefe voll ausgebildet wäre und keine Zuströmverluste aufträten. Aus Gl. 4.32 folgt mit  $\dot{m}_{fd} = \dot{m}(K = 0, K_e = 0)$ :

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{fd}} = \sqrt{\frac{f_{fd} \cdot \frac{L}{D_h} + 1}{f_{fd} \cdot \frac{L}{D_h} + 1 + K(L) + K_e}} \quad (4.51)$$

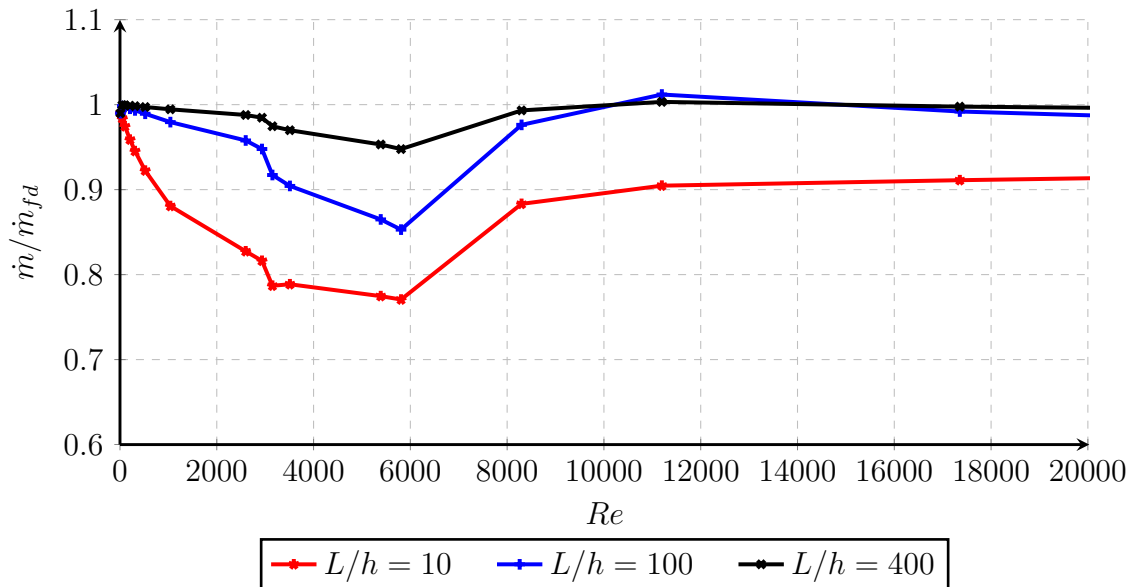


Abb. 4.14: Einfluss der Zuström- und Einlaufverluste auf den Massenstrom für inkompressible Strömung

Es ist zu beachten, dass  $K$  an der Stelle  $L$  ausgewertet wird, je nach Spalttiefe also nicht die voll entwickelten Werte von  $K$  verwendet werden. Die Ergebnisse für einen kurzen ( $L/h = 10$ ), einen mittleren ( $L/h = 100$ ) und einen sehr tiefen Spalt ( $L/h = 400$ ) sind in Abb. 4.14 als Funktion der Re-Zahl gezeigt. Da mit zunehmender Spalttiefe die ausgebildete Strömung einen größeren Anteil am Gesamtdruckverlust ausmacht, haben die Zusatzverluste erwartungsgemäß den höchsten Einfluss beim kürzesten Spalt. Weiterhin zeigen die Ergebnisse, dass die Beeinflussung des Massenstroms stark von der Re-Zahl der Strömung abhängig ist. Für niedrige Re-Zahlen wird der Reibwert verhältnismäßig groß (Gl. 4.15), so dass dieser dominiert. Für den kurzen Spalt ist z.B. für  $Re = 50$  der Einfluss der Zusatzverluste auf den Massenstrom kleiner als 2%, für kleinere Re-Zahlen und tiefere Spalte wird dieser noch geringer.

Mit zunehmender Re-Zahl steigt die Einlauflänge an (siehe Definition von  $x^+$ , Gl. 4.39), während die ausgebildeten Reibwerte kleiner werden, so dass die Zusatzverluste einen nennenswerten Einfluss auf den Spaltstrom ausüben. Der größte Einfluss tritt beim Übergang zwischen transitioneller und intermittenter Strömung auf (bei  $Re \approx 6000$ ), da dort die Einströmverluste am größten sind. Für den kürzesten Spalt führen die Zusatzverluste zu einer Massenstromverringerung von 23%, selbst für den tiefsten Spalt beträgt die Reduktion noch 4%, ist also ein nicht zu vernachlässigender Effekt. Für die voll turbulente Strömung nimmt die Bedeutung der Zusatzverluste aufgrund der verringerten Werte von  $K$  wieder ab. Interessanterweise können in dem Bereich diese sogar eine Vergrößerung des Massenstroms bewirken, da die Strömung im Spalteintritt noch nicht ganz turbulent ist und so die Reibwerte kleiner sind als für die ausgebildete Strömung (siehe Ergebnis mit mittlerer Spalttiefe bei  $Re \approx 11000$ ).



# Kapitel 5

## Wärmeübertragung in inkompressibler Strömung

### 5.1 Grundlagen

Aufbauend auf den hydrodynamischen Ergebnissen für die inkompressible Spaltdurchströmung wird im nächsten Schritt die Wärmeübertragung in einer solchen Strömung analysiert. Wie in der Einleitung erläutert, ist in den Gehäusespalten von verschiedenen Temperaturen für den Rotor und das Gehäuse auszugehen, da diese unterschiedlichen Wärmelasten ausgesetzt sind. Zur Vereinfachung wird davon ausgegangen, dass die Wandtemperaturänderung in Spalttiefe gering ist, so dass das Problem als Wärmeübertragung zwischen zwei ebenen Platten mit konstanter, aber unterschiedlicher Temperatur idealisiert werden kann.

Im Spalt bildet sich analog zum Geschwindigkeitsprofil der hydrodynamischen Strömung ein Temperaturprofil aus, das sich im Laufe der Durchströmung durch Wärmeaustausch mit den Wänden verändert. Nach hinreichend langer Lauflänge  $L_{therm}$  wird das Temperaturprofil invariant mit der Lauflänge, was als thermisch voll ausgebildete Strömung bezeichnet wird. Die Form des Temperaturprofils im Einlaufbereich und in der thermisch voll ausgebildeten Strömung ist von den Randbedingungen (Gaseintritts-, Rotor- und Gehäusetemperatur) abhängig.

In Schraubenvakuumpumpen ist typischerweise das durch Kompression erhitzte Gas wärmer als der Rotor, dessen Temperatur wiederum über dem gut gekühlten Gehäuse liegt, d.h.  $T_{gas,in} > T_{Rot} > T_{Geh}$ . Der Verlauf des Temperaturprofils für eine laminare Strömung mit diesen Randbedingungen ist in Abb. 5.1 skizziert. Im Eintritt wird hier vereinfachend ein Rechteckprofil für die Gastemperaturverteilung angenommen. Unmittelbar hinter dem Spalteintritt kühlt das Gas an den Wänden auf die jeweilige Wandtemperatur ab. Im weiteren Durchlauf der Strömung wird Wärme aus den weiter innenliegenden Schichten durch Wärmeleitung im Gas in Richtung Wand transportiert, so dass sich das Gas in der Spaltmitte langsam abkühlt. Im hier skizzierten Fall ist die Abkühlung an der Gehäuseseite aufgrund des höheren Temperaturgradienten stärker, was ein asymmetrisches Temperaturprofil zur Folge hat. Nach einer gewissen Lauflänge kehrt sich dadurch der Temperaturgradient an der Rotorwand um; ab diesem Punkt wird dem Rotor Wärme entzogen, die in das Gas eingeleitet wird. Aufgrund des immer noch vorhandenen Temperaturgradienten von der Spaltmitte zur Gehäusewand wird das Gas dort im weiteren Verlauf ab-

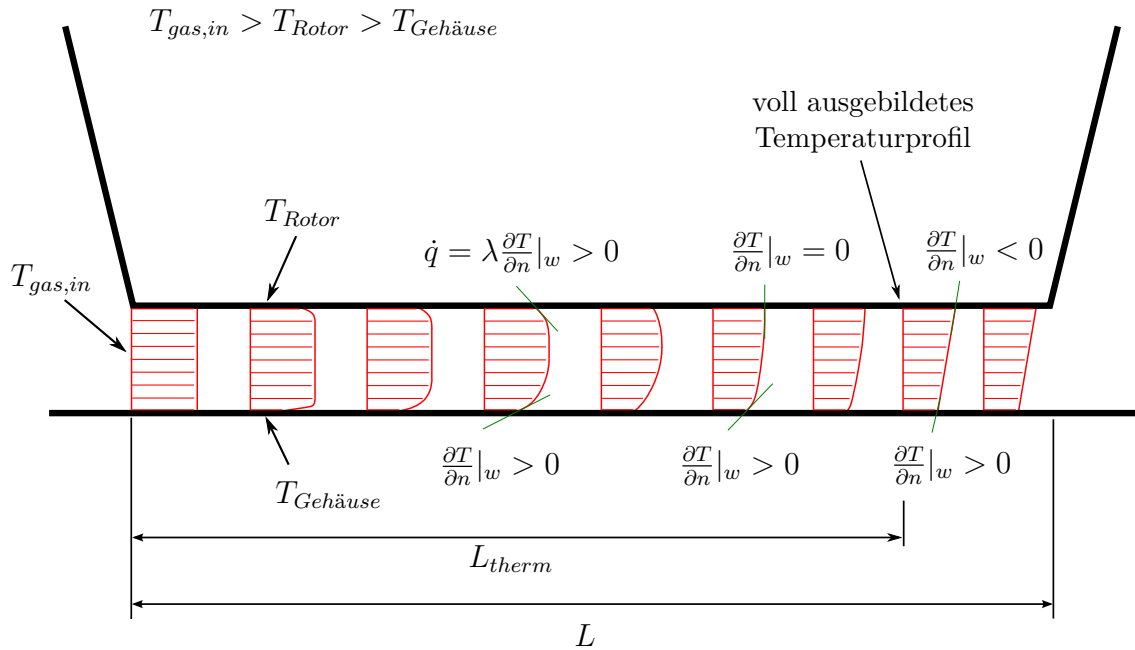


Abb. 5.1: Temperaturprofile im Einlaufbereich für laminare Strömung, für den hier skizzierten Fall wird  $T_{gas,in} > T_{Rotor} > T_{Gehäuse}$  angenommen.

gekühlt, bis nach großer Lauflänge die vom Rotor in das Gas eingebrachte Wärme der aus dem Gas in das Gehäuse eingebrachten Wärme entspricht. Das Temperaturprofil nimmt für voll ausgebildete, laminare Strömung also eine lineare Form an, die der reinen Wärmeleitung zwischen zwei ebenen Platten konstanter Temperatur entspricht.

Für das voll entwickelte, turbulente Temperaturprofil mit gleichen thermischen Randbedingungen ergibt sich ein ähnliches Bild; allerdings ist aufgrund der turbulenten Fluidbewegung die Wärmeleitfähigkeit in der Spaltmitte scheinbar erhöht, siehe Abb. 5.2. Die Temperaturgradienten an der Wand sind deutlich größer als im laminaren Fall, was einen erhöhten Wärmeaustausch zwischen beiden Bauteilen zur Folge hat. Für die turbulente Einlaufströmung können analoge Überlegungen wie bei der laminaren Strömung angestellt werden, die turbulente Wärmeleitfähigkeit in Spaltmitte sorgt hier ebenso für einen schnelleren Abbau von Temperaturgradienten, was die thermische Einlaufstrecke verkürzt.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass (ausreichende Spalttiefe vorausgesetzt) die ab dem Punkt  $\frac{\partial T}{\partial n}|_w = 0$  dem Rotor entzogene Wärme größer sein kann als die bis dort vom Gas an den Rotor abgegebene Wärme. In einem solchen Fall wird dem Rotor also insgesamt Wärme entzogen. Dieser Effekt stellt in Schraubenvakuumpumpen eine wesentliche Wärmesenke für den Rotor dar.

Neben den oben diskutierten Randbedingungen können noch andere Temperaturkonstellationen auftreten (z.B. Gastemperatur im Eintritt kleiner als Rotor- bzw. Gehäusetemperatur), für die ähnliche Überlegungen angestellt werden können. Zur Berechnung ist daher ein Modellansatz notwendig, der für alle denkbaren thermischen Randbedingungen gültig ist.

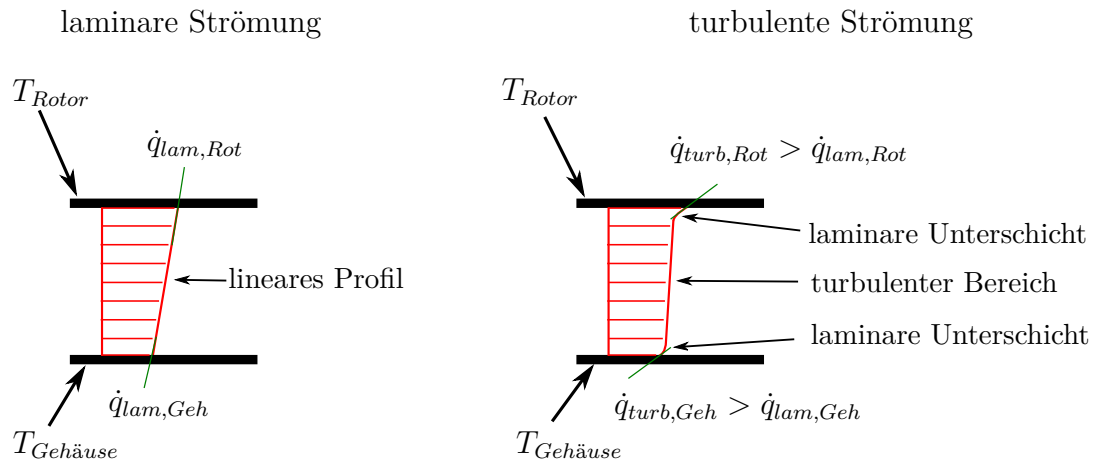


Abb. 5.2: Vergleich der voll entwickelten Temperaturprofile. Für die laminare Strömung entspricht dies dem linearen Wärmeleitungsprofil; in turbulenter Strömung ist die Wärmeleitfähigkeit in Spaltmitte scheinbar erhöht, die größten Temperaturgradienten treten in den laminaren Unterschichten auf.

## 5.2 Berechnungsprinzip

Unter der Voraussetzung einer inkompressiblen Strömung mit vernachlässigbarer Dissipation ist die Energiegleichung 2.14 von den Impulserhaltungsgleichungen entkoppelt und zusätzlich linear. Dadurch wird das Superpositionsprinzip anwendbar, was für die Berechnung des Eingangs geschilderten Problems ausgenutzt werden kann [58].

Dazu werden zwei ausgesuchte Sonderfälle betrachtet, deren Randbedingungen so gewählt sind, dass durch Überlagerung für jede beliebige Konstellation von Eintrittstemperatur und Wandtemperaturen die Randbedingungen korrekt erfüllt sind. Hierfür wird auf die dimensionslose Temperatur  $\bar{T}$  zurückgegriffen, die allgemein die Differenz zwischen Fluidtemperatur und Referenztemperatur in Bezug zu einer Referenztemperaturdifferenz setzt:

$$\bar{T} = \frac{T - T_{ref}}{T_1 - T_{ref}} \quad (5.1)$$

Für beide zu überlagernde Sonderfälle wird die Gaseintrittstemperatur in den Strömungsraum  $T_{0,1}$  als Referenztemperatur genommen, d.h.  $T_{ref} = T_{0,1}$ . Zur Anwendung des Superpositionsprinzips werden folgende Fälle untersucht:

1. Als Temperatur  $T_1$  wird die Rotortemperatur  $T_{Rot}$  gesetzt:  $T_1 = T_{Rot}$ . Die Definition der dimensionslosen Temperatur lautet:

$$\bar{T}_{R1} = \frac{T - T_{0,1}}{T_{Rot} - T_{0,1}} \quad (5.2)$$

Als Gehäusetemperatur  $T_G$  wird die Gaseinlasstemperatur  $T_{0,1}$  gewählt,  $T_G = T_{0,1}$ .

Die dimensionslosen Randbedingungen in  $\bar{T}_{R1}$  lauten also:

- Gaseinlasstemperatur  $\bar{T}_{0,R1} = 0$
- Rotortemperatur  $\bar{T}_{R1,Rot} = 1$
- Gehäusetemperatur  $\bar{T}_{R1,Geh} = 0$

Die einzige Randbedingung ungleich Null hat der Rotor, was die Nomenklatur mit dem Index  $R1$  begründet.

2. Die Temperatur  $T_1$  wird gleich der Gehäusetemperatur gesetzt; die dimensionslose Temperatur stellt sich wie folgt dar:

$$\bar{T}_{G1} = \frac{T - T_{0,1}}{T_{Geh} - T_{0,1}} \quad (5.3)$$

Als Gaseinlasstemperatur wird die Rotortemperatur gewählt. Die Randbedingungen in  $\bar{T}_{G1}$  lauten:

- Gaseinlasstemperatur  $\bar{T}_{0,G1} = 0$
- Rotortemperatur  $\bar{T}_{G1,Rot} = 0$
- Gehäusetemperatur  $\bar{T}_{G1,Geh} = 1$

Zur Bezeichnung dieses Falls wird der Index  $G1$  verwendet.

Beide Fälle sind zur Verdeutlichung in Abb. 5.3 skizziert. Die (dimensionsbehaftete) Temperatur  $T$  im Strömungsfeld ergibt sich mit den obigen Definitionen durch Anwendung des Superpositionsprinzips:

$$T(x, y) = T_{0,1} + \bar{T}_{R1} \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + \bar{T}_{G1} \cdot (T_{Geh} - T_{0,1}) \quad (5.4)$$

Durch Anwendung dieser Beziehung auf die Ränder des Strömungsgebietes können die Randbedingungen überprüft werden:

- Gaseinlasstemperatur:  $T(0, y) = T_{0,1} + 0 \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + 0 \cdot (T_{Geh} - T_{0,1}) = T_{0,1}$
- Rotortemperatur:  $T(x_{Rot}, y_{Rot}) = T_{0,1} + 1 \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + 0 \cdot (T_{Geh} - T_{0,1}) = T_{Rot}$
- Gehäusetemperatur:  $T(x, 0) = T_{0,1} + 0 \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + 1 \cdot (T_{Geh} - T_{0,1}) = T_{Geh}$

Die Randbedingungen sind korrekt erfüllt, so dass die Betrachtung dieser beiden Sonderfälle ausreichend ist. Für Wärmeübertragungsrechnungen ist allerdings nicht das gesamte Temperaturfeld von Interesse; es ist vielmehr ausreichend, die Wärmeströme in die Wände und eine mittlere Fluidtemperatur für einen gegebenen Spaltquerschnitt auszuwerten. Als sinnvolles Maß für die Fluidtemperatur in einem Querschnitt wird die adiabate Mischungstemperatur verwendet. Diese ist als diejenige Temperatur definiert, die entsteht, wenn der durch den Spaltquerschnitt tretende Fluidstrom mit der Geschwindigkeitsverteilung  $u(y)$  und der Temperaturverteilung  $T(y)$  adiabat vermischt wird [10]:

$$T_m = \frac{1}{\dot{m}/b} \int_h \rho \cdot u(y) \cdot T(y) \cdot dy \quad (5.5)$$



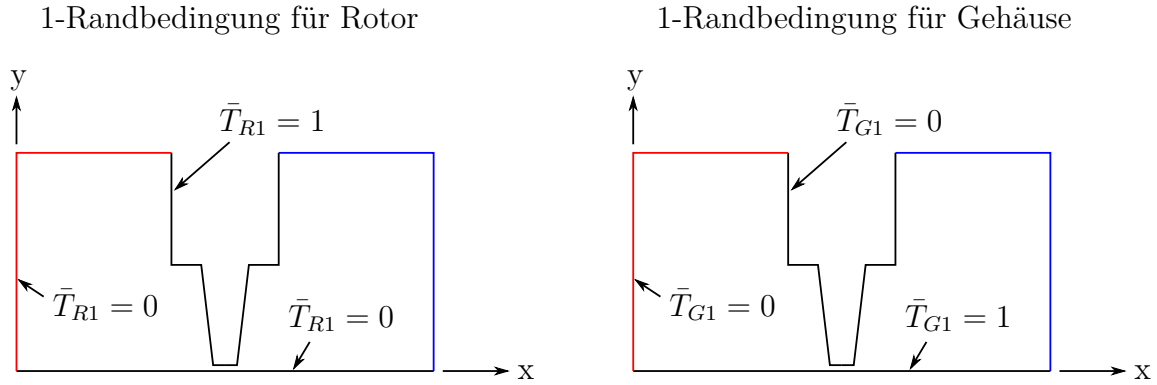


Abb. 5.3: Randbedingungen für die Berechnung des Temperaturfeldes. Auf der linken Seite befinden sich die Einström-, auf der rechten die Ausströmränder.

Diese ist ein direktes Maß für die durch den Spaltquerschnitt transportierte thermische Energie. Für das voll ausgebildete Temperaturprofil entsprechen die adiabaten Mischungstemperaturen jeweils dem Mittelwert der Rotor- und Gehäusetemperatur, d.h.  $\bar{T}_{G1,m} = 0.5$ ,  $\bar{T}_{R1,m} = 0.5$  und  $T_m = (T_R + T_G)/2$ .

Die Wärmeströme an den Wänden bestimmen sich aus der Steigung des Temperaturprofils an der Wand. Die beiden zu untersuchenden Fälle ergeben vier dimensionslose Wärmeströme. Diese entsprechen formal einer Nußelt-Zahl, werden in Anlehnung an die Literatur aber nicht also solche bezeichnet:

$$\Phi_{R1,Rot} = \frac{\partial \bar{T}_{R1}}{\partial \bar{n}_r} \Big|_{Rot} \quad \Phi_{R1,Geh} = \frac{\partial \bar{T}_{R1,g}}{\partial \bar{n}_g} \Big|_{Geh} \quad (5.6)$$

$$\Phi_{G1,Rot} = \frac{\partial \bar{T}_{G1}}{\partial \bar{n}_r} \Big|_{Rot} \quad \Phi_{G1,Geh} = \frac{\partial \bar{T}_{G1}}{\partial \bar{n}_g} \Big|_{Geh} \quad (5.7)$$

Der Normalenvektor ist auf den hydraulischen Durchmesser als Längenmaßstab bezogen, die Richtung der Normalen ist jeweils von der Wand weg zum Spalt hin gewählt. Damit ergeben positive Werte von  $\Phi$  einen Wärmestrom aus dem Gas in die Wand, negative Werte beschreiben einen Wärmestrom aus der Wand in das Gas. Für das laminare, voll ausgebildete, lineare Temperaturprofil können die Werte für  $\Phi$  direkt bestimmt werden; diese betragen für die Wand mit der "0"-Randbedingung  $\Phi_{Rot/Geh=0} = 2$  und mit der "1"-Randbedingung  $\Phi_{Rot/Geh=1} = -2$ .

Mit dem Superpositionsprinzip bestimmen sich die dimensionsbehafteten Gesamtwärmeströme in den Rotor und in das Gehäuse:

$$q_{Rot}(x) = \frac{\lambda}{D_h} [\Phi_{R1,Rot}(x) \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + \Phi_{G1,Rot}(x) \cdot (T_{Geh} - T_{0,1})] \quad (5.8)$$

$$q_{Geh}(x) = \frac{\lambda}{D_h} [\Phi_{R1,Geh}(x) \cdot (T_{Rot} - T_{0,1}) + \Phi_{G1,Geh}(x) \cdot (T_{Geh} - T_{0,1})] \quad (5.9)$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass bei einer symmetrischen Einströmung in den Spalt beide Fälle identisch sind, so dass nur einer betrachtet werden muss ([58], [80]). Für die hier untersuchte Geometrie ist die Strömung am Spalteintritt jedoch stark unsymmetrisch, was die Untersuchung beider Fälle notwendig macht.

### 5.3 Dimensionsanalyse der thermischen Einlaufströmung

Bevor auf die Ergebnisse für die dimensionslosen Temperaturen und Wärmeströme eingegangen wird, soll in analoger Weise zur laminaren, hydrodynamischen Einlaufströmung eine sinnvolle Laufkoordinate für die thermische Einlaufströmung abgeleitet werden. Dazu wird die Energiegleichung in dimensionsloser Form für inkompressible Fluide betrachtet, wobei die Beiträge der Druckarbeit und der Dissipation vernachlässigt werden. In Zylinderkoordinaten schreibt diese sich folgendermaßen [81]:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_\theta}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (5.10)$$

Die Gleichung kann mit folgenden Annahmen für die Einlaufströmung in einen Spalt vereinfacht werden:

- Bezüglich der Strömung werden die gleichen Annahmen wie bei der Analyse der hydrodynamischen Einlaufströmung getroffen (siehe Abschnitt 4.4). Die Strömungskomponente in radialer Richtung wird als klein gegenüber der axialen Komponente betrachtet und kann vernachlässigt werden:

$$\bar{u}_r \approx 0 \quad (5.11)$$

Ferner wird die Strömung und auch das Temperaturprofil als achsensymmetrisch angenommen, die Differentiale in Umfangsrichtung verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.12)$$

Die Ergebnisse für die hydrodynamische Einlaufströmung zeigen, dass diese Annahme gerechtfertigt ist, eine nochmalige Prüfung für das Temperaturfeld kann entfallen.

- Das in Abb. 5.1 skizzierte Temperaturfeld legt nahe, dass die größten Temperaturgradienten in radialer Richtung auftreten und folglich Wärmeleitungseffekte in dieser Richtung dominant sind. Wärmeleitungseffekte in axialer Richtung sind sehr viel kleiner und werden vernachlässigt:

$$\frac{1}{Re \cdot Pr} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx 0 \quad (5.13)$$

Mit den getroffenen Vereinfachungen lautet die modifizierte Energiegleichung:

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right] \quad (5.14)$$

Analog zur hydrodynamischen Laufkoordinate  $z^+$  wird die thermische Laufkoordinate  $z^*$  eingeführt:

$$z^* = \frac{z}{D_h \cdot Re \cdot Pr} \quad \text{bzw.} \quad z^* = \frac{z^+}{Pr} \quad (5.15)$$

Damit wird Gl. 5.14 parameterfrei:

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z^*} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (5.16)$$

Mit den getroffenen Annahmen wird die thermische Einlaufströmung (beschrieben durch  $z^*$ ) unabhängig von der Re- und Pr-Zahl des Problems. Die Ergebnisse des hydrodynamischen Einlaufes in Kap. 4.6 zeigten jedoch einen Einfluss der Re-Zahl, was darauf zurückzuführen ist, dass die getroffenen Annahmen nur näherungsweise gelten. Weiterhin gilt die parameterfreie Darstellung nur für laminare Strömung, im Falle von Turbulenz im Spalt kann keine Lauflänge mehr gewählt werden, bei der die resultierende Energiegleichung parameterfrei wird.

Aus diesen Gründen wird im nächsten Abschnitt die thermische Einlaufströmung für einen weiten Re-Zahl Bereich untersucht, wobei zwecks vergleichbarer Darstellung alle Ergebnisse über der thermischen Lauflänge  $z^*$  (bzw.  $x^*$  für den ebenen Fall) aufgetragen werden.

## 5.4 Ergebnisse

Neben der Re-Zahl tritt als weiterer Ähnlichkeitsparameter die Pr-Zahl in der Energiegleichung auf, die im Allgemeinen eine temperaturabhängige Stoffeigenschaft ist. Die Ergebnisse der kinetischen Gastheorie zeigen jedoch, dass für einatomige Gase  $Pr = 2/3 \approx 0.667$  gilt, für zweiatomige Gase (nach der Korrektur von Eucken)  $Pr = 28/38 \approx 0.737$  [40]. Weiterhin sind diese Werte temperaturunabhängig. Der Vergleich mit gemessenen Stoffwerten zeigt, dass diese Angaben sehr gut für eine Vielzahl von Gasen zutreffen, so dass der Wertebereich der Prandtl-Zahl stark eingeschränkt werden kann. Da in praktischen Anwendungen zweiatomige Gase häufiger anzutreffen sind, wird diese Untersuchung auf  $Pr = 0.71$  beschränkt, was der Prandtl-Zahl von Luft über dem interessanten Temperaturbereich von 20 – 300 °C entspricht. In guter Näherung gelten die so berechneten Werte auch für andere zweiatomige Gase.

Zur numerischen Berechnung werden die gleichen Randbedingungen wie zur Analyse der hydrodynamischen Strömung verwendet, als Temperaturdifferenz wird willkürlich ein Wert von 100K angesetzt. Weil die Energiegleichung von den Impulsgleichungen entkoppelt ist, kann diese im Anschluss gelöst werden. Im Unterschied zur Lösung der Impulsgleichungen kann diese Rechnung für den gesamten Re-Zahl Bereich stationär erfolgen.

Da die Ergebnisse für die Rotordrehung im untersuchten Bereich nur zu geringfügigen Änderungen des axialen Strömungsfeldes führen (siehe Abschnitt 4.6.1), hat diese auch auf die Wärmeübertragung einen vernachlässigbaren Einfluss. Die Untersuchungen beschränken sich daher auf den Fall ohne Rotordrehung.

Die Ergebnisse für laminare und transitionelle Strömung bis  $Re \approx 6000$  sind in den Abb. 5.4 - 5.5 für die R1-Randbedingung und in den Abb. 5.6 - 5.7 für die G1-Randbedingung dargestellt. Diese zeigen, dass die Wärmeströme in beiden Fällen nach hinreichend großer Lauflänge gegen die erwarteten Grenzwerte von 2 bzw. -2 für Wand mit der 0 bzw. 1 Randbedingung laufen, die adiabate Mischungstemperatur entsprechend gegen  $\bar{T}_m = 0.5$ . Die thermische Einlaufstrecke erweist sich als

nahezu Re-Zahl unabhängig und beträgt  $L_{therm}^* = 0.1$ . Verglichen mit der hydrodynamischen Einlaufänge ( $L_{hyd}^+ = 0.015$ ) ist diese bedeutend länger, umgerechnet mit der Pr-Zahl ergibt sich das Längenverhältnis  $L_{therm}/L_{hyd} \approx 4.7$ . Der wesentliche Grund für die große thermische Einlauftiefe liegt in der Definition des ausgebildeten Temperaturprofils, das durch den Abbau von Temperaturdifferenz infolge Wärmeleitung erreicht wird. Wegen der Abhängigkeit der Wärmeleitung von Temperaturdifferenzen ist dies ein asymptotischer Prozess, der theoretisch nie seinen Endwert erreicht.

Die Fluideintrittstemperaturen bei  $x^* = 0$  zeigen, dass es bereits in der Zuströmung zum Spalt zu einer Aufheizung des Gases durch Kontakt mit der beheizten Wand (1-Randbedingung) kommt. Bei niedrigen Re-Zahlen ( $Re < 500$ ) fällt diese besonders deutlich aus, da kleine Re-Zahlen gleichbedeutend mit kleinen Massenströmen sind ( $\rho \cdot u \cdot D_h = \dot{m}/b = Re \cdot \eta$ ) und der Spaltstrom eine verhältnismäßig kleine Wärmekapazität ( $\dot{m} \cdot c_p$ ) hat. Da diese Aufheizung vor dem eigentlichen Spalt stattfindet, ist zu vermuten, dass diese durch die gewählten Strömungsraumabmessungen beeinflusst wird. Zur Untersuchung dieses Effekts wird die "1"-Randbedingung nur für eine gewisse Strecke vor dem Spalt vorgegeben. Dabei zeigt sich, dass auch bei  $Re \approx 100$  die Änderung des Aufheizgrades unter 5% bleibt, solange für die Strecke mit der 1-Randbedingung  $L_{1RB}/h > 100$  gilt. Dies muss für die spätere Auslegung des Versuchsstandes in Kap. 9 berücksichtigt werden.

Für den Bereich  $500 < Re < 3000$  zeigen die Ergebnisse eine geringe Abhängigkeit von der Re-Zahl; offenbar sind hier die getroffenen Voraussetzungen für die thermische Lauflänge  $x^*$  gut erfüllt. Im transitionellen Bereich entstehen hinter dem Spalteintritt Zonen mit turbulenter Fluidbewegung, die durch die turbulente Wärmeleitfähigkeit ein deutliches Anwachsen der Wärmeströme und ein gleichsam schnelles Aufheizen des Gases bewirken. Interessanterweise bleibt die thermische Einlaufänge  $L_{therm}^*$  unverändert; scheinbar bewirkt nach Relaminisation der Strömung die geringere Temperaturdifferenz zwischen Gas und beheizter Wand ein langsames Aufheizen, was den schnellen Temperaturanstieg im turbulenten Bereich wieder kompensiert.

Im voll turbulenten Bereich werden die thermischen Einlaufängen erwartungsgemäß wesentlich verkürzt und betragen Re-Zahl abhängig zwischen  $L_{therm}^* = 0.035$  (für  $Re = 8928$ ) und  $L_{therm}^* = 0.024$  (für  $Re = 15273$ ). Ebenso sind die Wärmeströme im Einlauf und im voll ausgebildeten Bereich wesentlich höher. Der Vergleich der ausgebildeten Wärmeströme zeigt, dass bereits bei  $Re = 8928$  der fünffache Wärmestrom (verglichen mit der laminaren Strömung) zwischen beiden Bauteilen bei gleicher Temperaturdifferenz übertragen wird. Im turbulenten Bereich ist mit einer deutlich verbesserten thermischen Kopplung zwischen Rotor und Gehäuse durch das Gas zu rechnen.

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Randbedingungen miteinander, so zeigen sich gerade im Spalteintritt deutliche Unterschiede zwischen beiden Fällen. Insbesondere die 1-Randbedingung für den Rotor führt zu ausgeprägten Wärmestromspitzen am Rotor selbst, was eine Folge der Strömungsablösung in diesem Bereich ist. Mit der 1-Randbedingung für das Gehäuse fällt diese geringer aus, da am Gehäuse die Strömung nie ablöst.

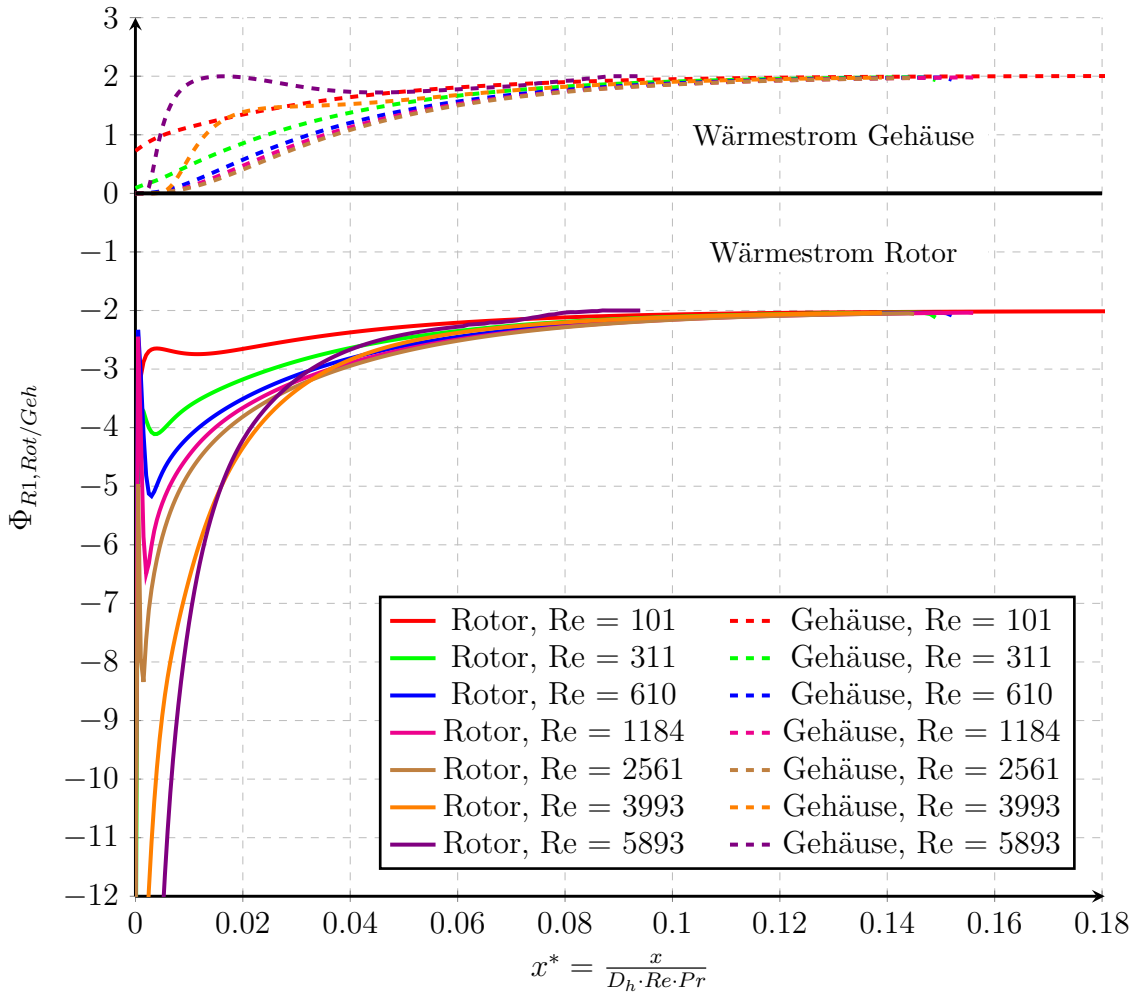


Abb. 5.4: Wärmeströme mit der 1-Randbedingung für den Rotor

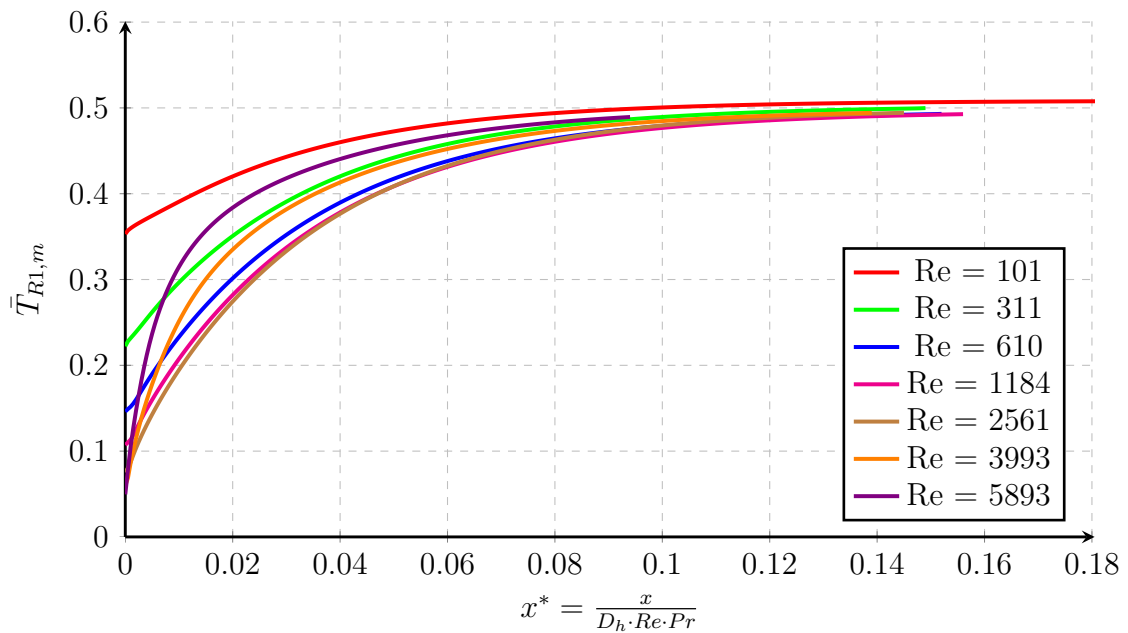


Abb. 5.5: Adiabate Mischungstemperatur mit der 1-Randbedingung für den Rotor

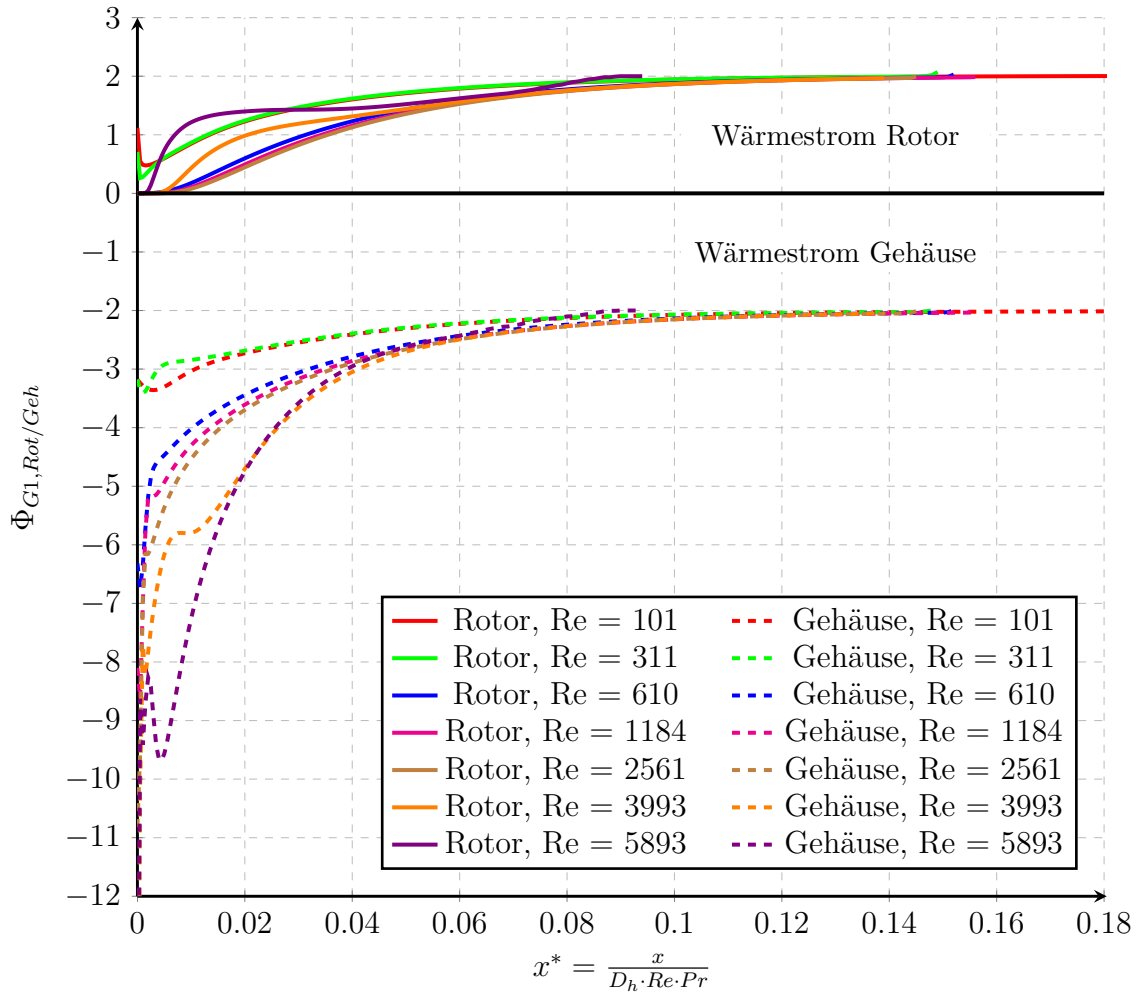


Abb. 5.6: Wärmeströme mit der 1-Randbedingung für das Gehäuse

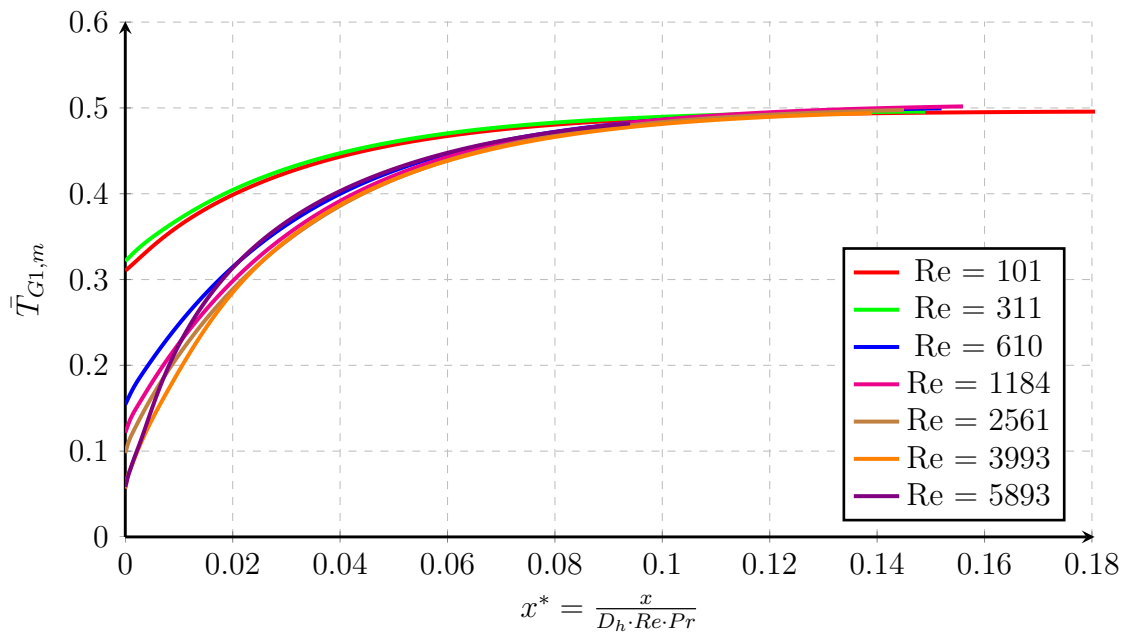
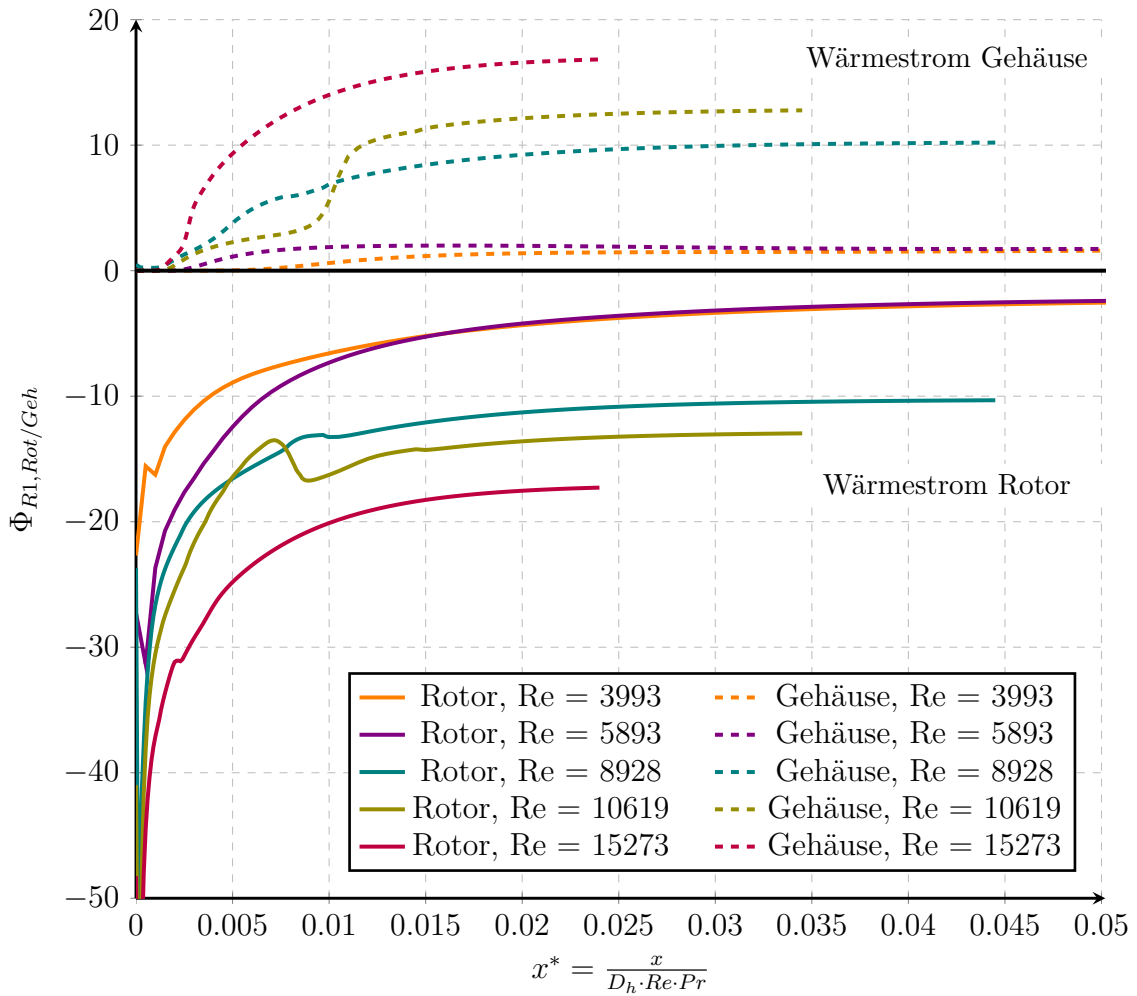
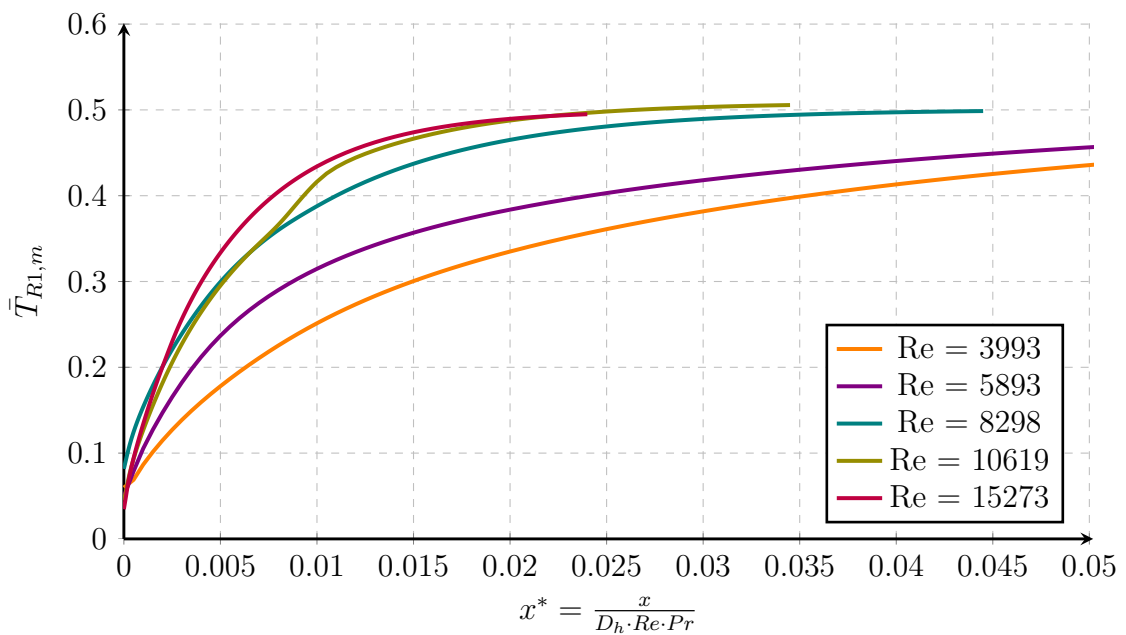


Abb. 5.7: Adiabate Mischungstemperatur mit der 1-Randbedingung für das Gehäuse

Abb. 5.8: Wärmeströme mit der 1-Randbedingung für den Rotor,  $Re > 3900$ Abb. 5.9: Adiabate Mischungstemperatur mit der 1-Randbedingung für den Rotor,  $Re > 3900$

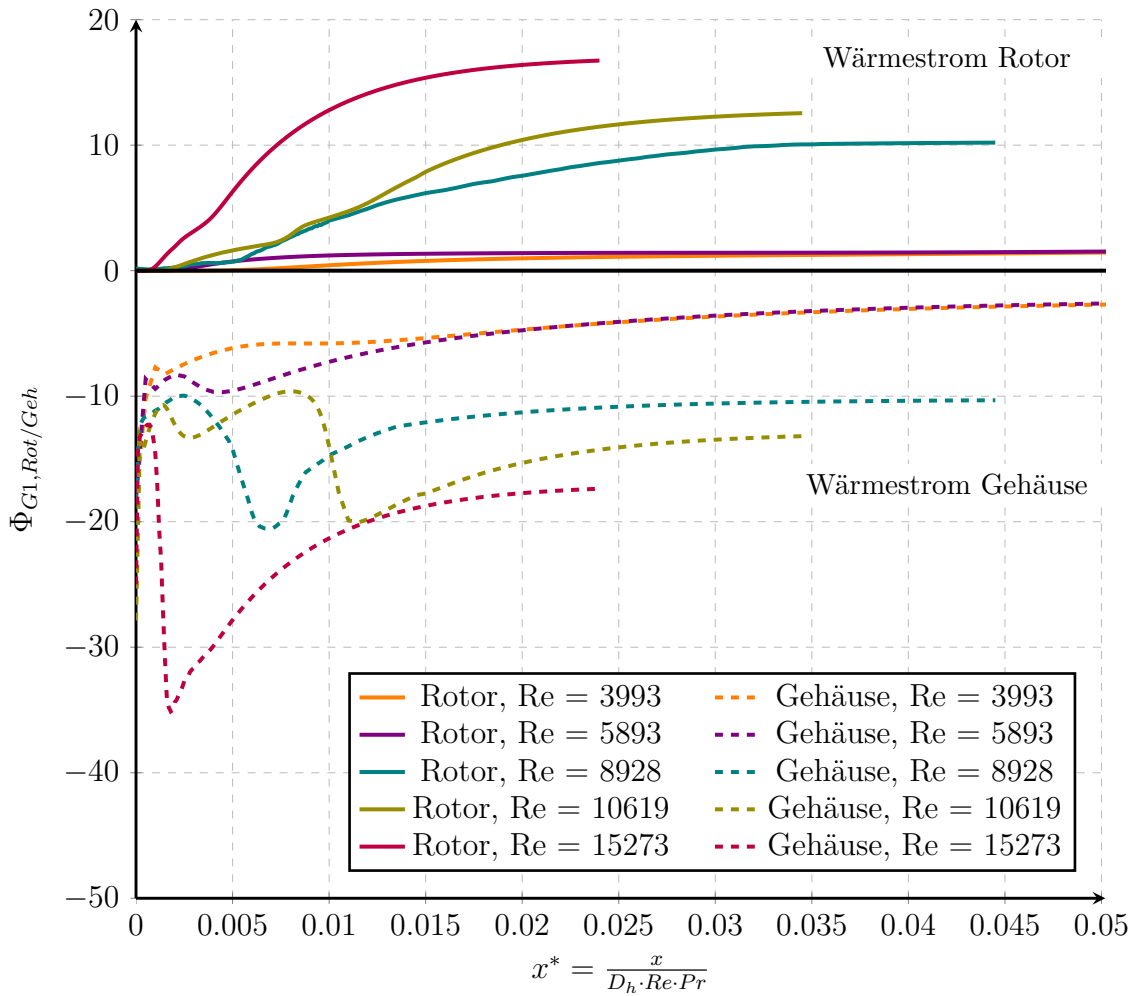


Abb. 5.10: Wärmeströme mit der 1-Randbedingung für das Gehäuse,  $Re > 3900$

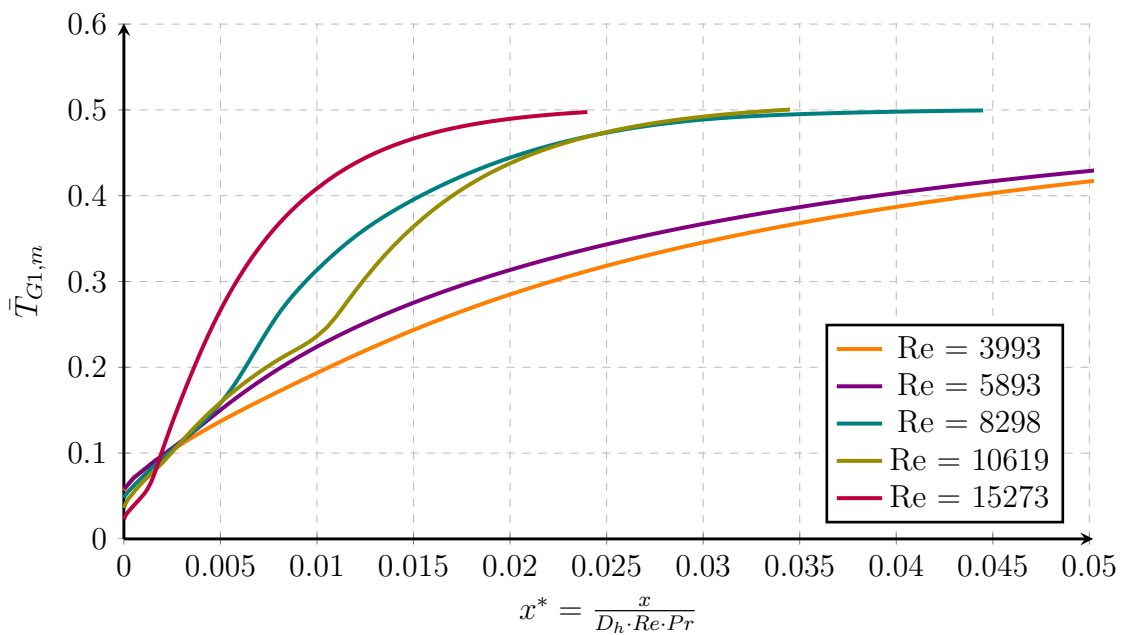


Abb. 5.11: Adiabate Mischungstemperatur mit der 1-Randbedingung für das Gehäuse,  $Re > 3900$



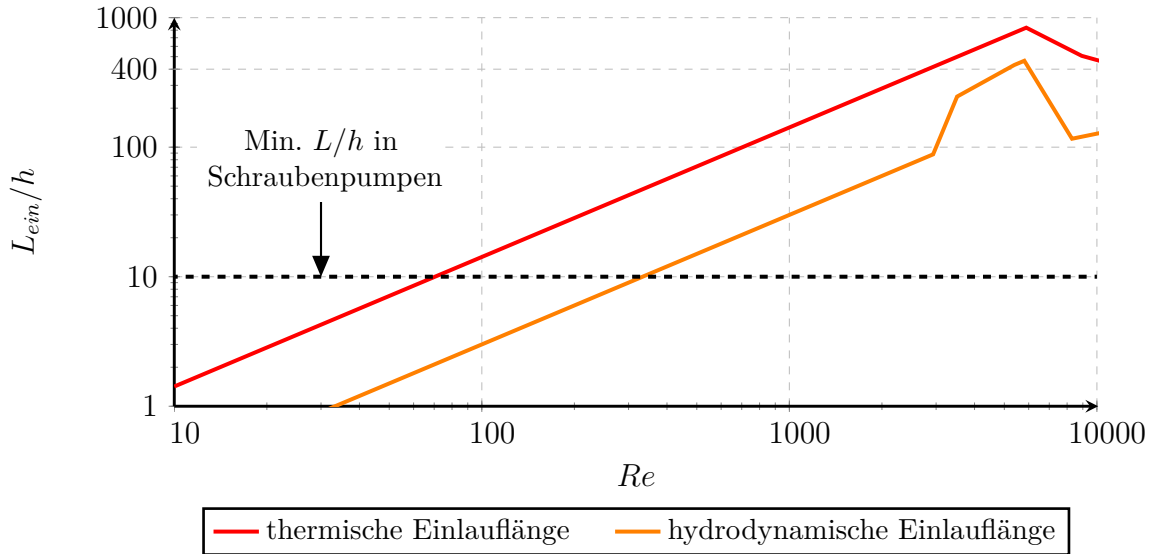


Abb. 5.12: Vergleich der hydrodynamischen und thermischen Einlaufängen.

## 5.5 Thermische Einlaufängen

Zur Bewertung der thermischen Einlaufeffekte kann im Gegensatz zur hydrodynamischen Einlaufströmung keine generelle Aussage über deren Einfluss auf die Gesamtwärmebilanz der Bauteile gegeben werden, da diese neben der Spaltgeometrie  $h/L$  und der Re-Zahl zusätzlich noch von den jeweiligen Temperaturverhältnissen abhängt. Zur Einordnung kann lediglich die auf die Spalthöhe bezogene thermische Einlaufänge  $L_{therm}/h = 2 \cdot L_{therm}^* \cdot Re \cdot Pr$  betrachtet werden, die im Vergleich zur hydrodynamischen Einlaufänge  $L_{hyd}/h = 2 \cdot L_{hyd}^+ \cdot Re$  in Abb. 5.12 aufgetragen ist. Die thermischen Einlaufängen sind wesentlich größer und selbst für tiefe Spalte mit  $L/h = 400$  wird oberhalb von  $Re = 3000$  keine ausgebildete thermische Strömung erreicht. Es ist daher zu erwarten, dass die thermische Einlaufänge auf die Wärmeübertragung generell einen größeren Einfluss hat als die hydrodynamische Einlaufstrecke auf die Durchströmung. Bei niedrigen Re-Zahl wird die Einlaufänge jedoch kurz und das voll ausgebildete Temperaturprofil dominiert.

## 5.6 Sonderfall gleicher Wandtemperaturen

Das oben erläuterte Superpositionsprinzip enthält als Sonderfall die Wärmeströme bei gleichen Wandtemperaturen (d.h.  $T_{Rot} = T_{Geh} = T_w$ ). Dieser ist in der Literatur umfangreich untersucht worden (siehe Abschnitt 1.5) und wird hier zum Vergleich herangezogen. Die Nußeltzahlen hierfür werden üblicherweise auf die Differenz zwischen der adiabaten Mischungstemperatur und der Wandtemperatur bezogen [10]:

$$\bar{T} = \frac{T - T_m}{T_w - T_m} \quad Nu_T = \frac{\bar{T}}{\bar{n}}|_w \quad (5.17)$$

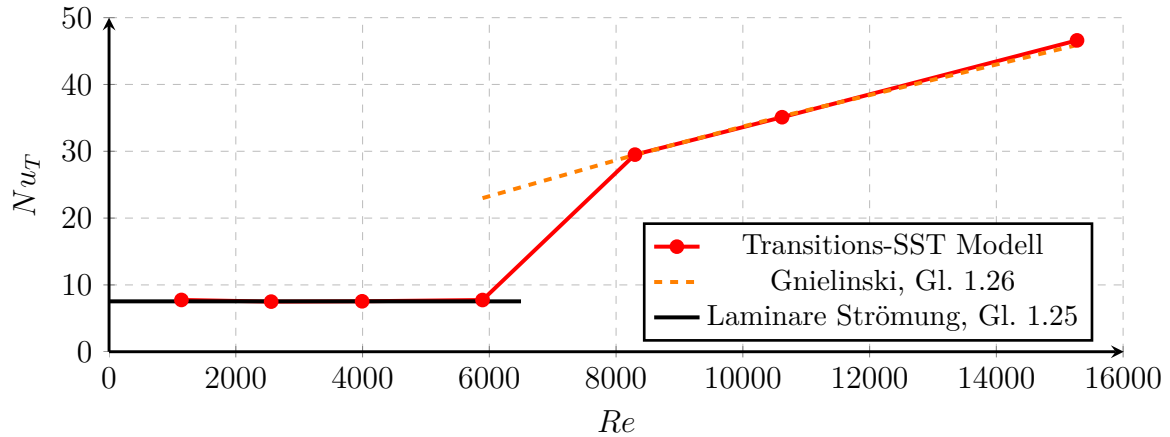


Abb. 5.13:  $Nu_T$ -Werte für den Sonderfall gleicher Wandtemperaturen bei voll ausgebildeter Strömung.

Durch Gleichsetzen der Wärmeströme kann die Nußeltzahl  $Nu_T$  für gleiche Wandtemperaturen bestimmt werden:

$$q_w = \frac{\lambda}{D_h} [\Phi_{R1, Rot/Geh} \cdot (T_w - T_{0,1}) + \Phi_{G1, Rot/Geh} \cdot (T_w - T_{0,1})] = \frac{\lambda}{D_h} \cdot Nu_T \cdot (T_m - T_w) \quad (5.18)$$

Auflösen nach  $Nu_T$  liefert:

$$Nu_T = \frac{1}{T_m - T_w} [\Phi_{R1, Rot/Geh} \cdot (T_w - T_{0,1}) + \Phi_{G1, Rot/Geh} \cdot (T_w - T_{0,1})] \quad (5.19)$$

Die adiabate Mischungstemperatur  $T_m$  berechnet sich nach Gl. 5.5. Die Rechnung kann für beide Wände (Rotor bzw. Gehäuse) ausgeführt werden, wobei sich für die voll ausgebildete Strömung identische Werte an beiden Wänden ergeben. Zu beachten ist, dass in diesem Fall die voll ausgebildete Strömung dann erreicht ist, wenn  $Nu_T$  und damit  $\bar{T}$  nach Gl. 5.17 invariant mit der Strömungslänge wird.

Das voll ausgebildete Temperaturprofil im Sinne von Gl. 5.7 entspräche bei gleichen Wandtemperaturen einem Rechteckprofil mit der Wandtemperatur, das erst nach dem Abbau aller Temperaturdifferenzen und damit einer sehr großen Lauflänge erreicht wird. Das voll ausgebildete Temperaturprofil nach Gl. 5.17 fordert dagegen, dass sich die Fluidtemperatur in gleicher Weise ändert wie der Wärmestrom vom Fluid an die Wand. Ein voll ausgebildetes Temperaturprofil in Sinne von  $Nu_T$  wird damit nach einer sehr viel kürzeren Einlaufänge im Vergleich zu dem Temperaturprofil nach Gl. 5.7 erreicht.

Als Referenz für die Nußeltzahlen bei hydrodynamisch und thermisch voll entwickelter Strömung gilt im laminaren Fall Gl. 1.25, die aus den Erhaltungsgleichungen über eine Reihenentwicklung bestimmt ist. Für die turbulente Strömung wird die Formel von Gnielinski Gl. 1.26 herangezogen, die ein anerkannter Standard für die Wärmeübertragung in Kanälen ist.

Die mit dem Superpositionsprinzip berechneten  $Nu_T$ -Werte für die hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildete Strömung (nach Gl. 5.17) sind in Abb. 5.13 aufgetragen. Die Ergebnisse stehen im sehr guten Einklang mit den Literaturwerten, was die Gültigkeit der im vorherigen Abschnitt bestimmten Wärmeströme unterstreicht.

# Kapitel 6

## Einfluss der Kompressibilität

### 6.1 Strömungsgrößen

Da Gase ein kompressibles Medium sind, gilt die in den beiden vorherigen Kapiteln durchgeführte Analyse lediglich für den Sonderfall kleiner Druckdifferenzen über dem Spalt. Für große Druckgefälle ändert sich die Dichte des Gases signifikant im Strömungsfeld, was einen erheblichen Einfluss auf die Durchströmung und die Wärmeübertragung erwarten lässt. Die Berechnung der Dichteverteilung im Strömungsfeld macht ein gekoppeltes Lösen der Impuls- und Energiegleichung notwendig. Die Analyse der Strömung erfolgt in ähnlicher Weise zur inkompressiblen Strömung, wobei zunächst geeignete Mittelgrößen für Druck, Temperatur, Dichte und Geschwindigkeit über der Spalthöhe eingeführt werden:

- Im Hinblick auf die Anwendung des Impulssatzes wird unter dem **Druck** wie bei der inkompressiblen Strömung der flächengemittelte Wert nach Gl. 4.10 verwendet.
- Die statische **Temperatur**  $T_m$  wird so gewählt, dass die Energiegleichung der Gasdynamik erfüllt ist. Diese beschreibt die Umwandlung von thermischer in kinetische Energie und lautet für adiabate Strömungen:

$$T_{0,m} = T_m + \frac{1}{2 \cdot c_p} \cdot u^2 = T_m \cdot \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right) \quad (6.1)$$

Die Temperatur  $T_{0,m}$  wird darin als Ruhetemperatur bezeichnet, da diese diejenige Temperatur ist, die bei Verzögern des Gases auf die Geschwindigkeit Null erreicht wird.

- Die gemittelten Größen sollen ebenfalls die ideale Gasgleichung erfüllen, die mittlere **Dichte** bestimmt sich demnach zu:

$$\rho_m = \frac{p_m}{T_m \cdot R_s} \quad (6.2)$$

- Das Produkt aus mittlerer Dichte, mittlerer Geschwindigkeit und der Spaltquerschnittfläche soll dem Spaltmassenstrom entsprechen, daraus folgt die Berechnungsgleichung für die mittlere **Geschwindigkeit**:

$$u_m(x, y) = \frac{1}{\rho_m \cdot h} \int_h \rho(x, y) \cdot u(x, y) \cdot dy \quad (6.3)$$

- Unter der lokalen **Machzahl** wird das Verhältnis von lokaler gemittelter Strömungsgeschwindigkeit zur lokalen Schallgeschwindigkeit (basierend auf der gemittelten Temperatur) verstanden:

$$M = \frac{u_m}{\sqrt{\kappa \cdot R_s \cdot T_m}} \quad (6.4)$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Temperatur und die Strömungsgeschwindigkeit sind miteinander gekoppelt; durch Einsetzen ergibt sich eine quadratische Gleichung zur Berechnung der Temperatur.

Die Darstellung der Ergebnisse folgt diesen Definitionen, der Index “m“ wird zwecks Übersichtlichkeit weggelassen. Durch die sich ändernde Dichte im Spalt bildet sich im Gegensatz zur inkompressiblen Strömung kein voll ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil aus. Durch den Druckverlust in der Spaltdurchströmung sinkt die mittlere Dichte ab, was zu einer Geschwindigkeitssteigerung führt, um die Kontinuität zu gewährleisten. Die Form des Geschwindigkeitsprofils ändert sich stetig im Verlauf der Durchströmung; wie später gezeigt wird, entspricht dieses (nach einer ausreichenden Lauflänge) jedoch nahezu der Poiseuille-Parabel mit dem lokalen Wert der mittleren Dichte.

Zur Ableitung einer geeigneten Definition des scheinbaren Reibwertes wird auf den Impulssatz Gl. 4.9 zurückgegriffen, der auch für kompressible Strömung mit  $\rho = \rho(x, y)$  gültig ist:

$$\underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \rho(x+dx, y) \cdot u^2(x+dx, y) \cdot dy}_{I(x+dx)} - \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y) \cdot u^2(x, y) \cdot dy}_{I(x)} = -(\tau_o + \tau_u) \cdot dx + \int_{-h/2}^{h/2} [p(x, y) - p(x+dx, y)] \cdot dy \quad (6.5)$$

Die Terme auf der rechten Seite können analog zur inkompressiblen Strömung mit der Definition des Reibwertes (Gl. 4.13) und des mittleren Drucks (Gl. 4.10) umgeformt werden. Bei dem Reibwert ist zu beachten, dass sich dieser auf den lokalen Staudruck  $\rho(x)/2 \cdot u(x)^2$  bezieht, der durch die Strömungsbeschleunigung im Spaltverlauf ansteigt. Der Reibwert ist damit nicht mehr auf eine feste Referenzgröße, sondern auf eine lokale Größe bezogen.

Der Impulsfluss auf der linken Seite bedarf aufgrund der sich ändernden Dichte einer genaueren Betrachtung, wozu die Terme zunächst unter Berücksichtigung des Impulsflussfaktors (siehe Gl. 4.16) umgeformt werden:

$$I(x+dx) = \rho(x+dx) \cdot u^2(x+dx) \cdot h \cdot K_D(x+dx) \quad I(x) = \rho(x) \cdot u(x)^2 \cdot h \cdot K_D(x) \quad (6.6)$$

Gemäß der Kontinuitätsbeziehung gilt ferner:

$$\rho(x+dx) \cdot u(x+dx) = \rho(x) \cdot u(x) \quad (6.7)$$

Für das betrachtete infinitesimal breite Kontrollvolumen (“KV1“ in Abb. 4.1) können die relevanten Größen mit einer Taylorreihe um die Position  $x$  entwickelt werden:

$$u(x + dx) = u(x) + du \quad K_D(x + dx) = K_D(x) + dK_D \quad (6.8)$$

Durch Einsetzen und die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung ergibt sich die Impulsflussänderung:

$$I(x + dx) - I(x) = \rho(x) \cdot u(x) \cdot h (u \cdot dK_D + du \cdot K_D) \quad (6.9)$$

Der erste Term in der Klammer beschreibt die Formänderung des Geschwindigkeitsprofils und ist identisch zum inkompressiblen Fall (siehe Gl. 4.20). Der zweite Term stellt die Impulsflussänderung durch die ansteigende mittlere Strömungsgeschwindigkeit dar. Zur Vergleichbarkeit mit der inkompressiblen Strömung wird die Definition des scheinbaren Reibwertes (Gl. 4.23) übernommen, der Impulssatz lautet nach einigen Umformungen:

$$\frac{dp}{\rho/2 \cdot u^2} + 2 \cdot K_D \cdot \frac{du}{u} = - \left( 2 \cdot dK_D + f \cdot \frac{dx}{D_h} \right) = -f_{app} \cdot \frac{dx}{D_h} \quad (6.10)$$

Der scheinbare Reibwert beinhaltet wieder die tatsächliche Wandschubspannung und die Änderung der Form des Geschwindigkeitsprofils, nicht jedoch den Effekt der Strömungsbeschleunigung infolge der Kompressibilität. Wie auch der Reibwert ist dieser auf den lokalen Staudruck an der Stelle  $x$  bezogen, der sich entlang des Strömungsweges ändert.

## 6.2 Reibung in der kompressiblen Strömung

Die Analyse des Kompressibilitätseinflusses auf die Reibwerte erfolgt zunächst unter der Voraussetzung einer adiabaten Strömung, d.h. der Wärmestrom und damit der Temperaturgradient normal zur Wand verschwindet. Der Einfluss der Wärmeübertragung durch beheizte bzw. gekühlte Wände wird im nächsten Abschnitt untersucht.

Das Vorgehen folgt dabei dem aus Kap. 4, wobei die dimensionslosen Reibwerte aufgrund der Kompressibilität keine reine Funktion der Reynoldszahl sind. Diese ist auch in einer kompressiblen Spaltströmung in erster Näherung eine Konstante entlang des Spaltes, da das Produkt von Dichte, Strömungsgeschwindigkeit und hydraulischem Durchmesser (der Zähler der Re-Zahl) den doppelten Massenstrom pro Einheitsbreite beschreibt, der gemäß der Massenerhaltung konstant ist. In einer kompressiblen Strömung ändert sich jedoch die Temperatur des Gases, was zu einer leicht veränderten Viskosität und folglich zu einer Reynoldszahländerung im Strömungsverlauf führt. Dieser Effekt ist für die praktische Anwendung jedoch gering und wird hier vernachlässigt, die Reynoldszahl wird damit zu einer Konstanten.

Neben der Reynoldszahl beeinflusst noch der Verlauf der Machzahl das Ergebnis, so dass für verschiedene Reynoldszahlen der Machzahlverlauf über den Spalt variiert wird. Für die Abschätzung geeigneter Druckrandbedingungen zum Einstellen der gewünschten Re- und Machzahlen wird das in Kap. 8 beschriebene Programm

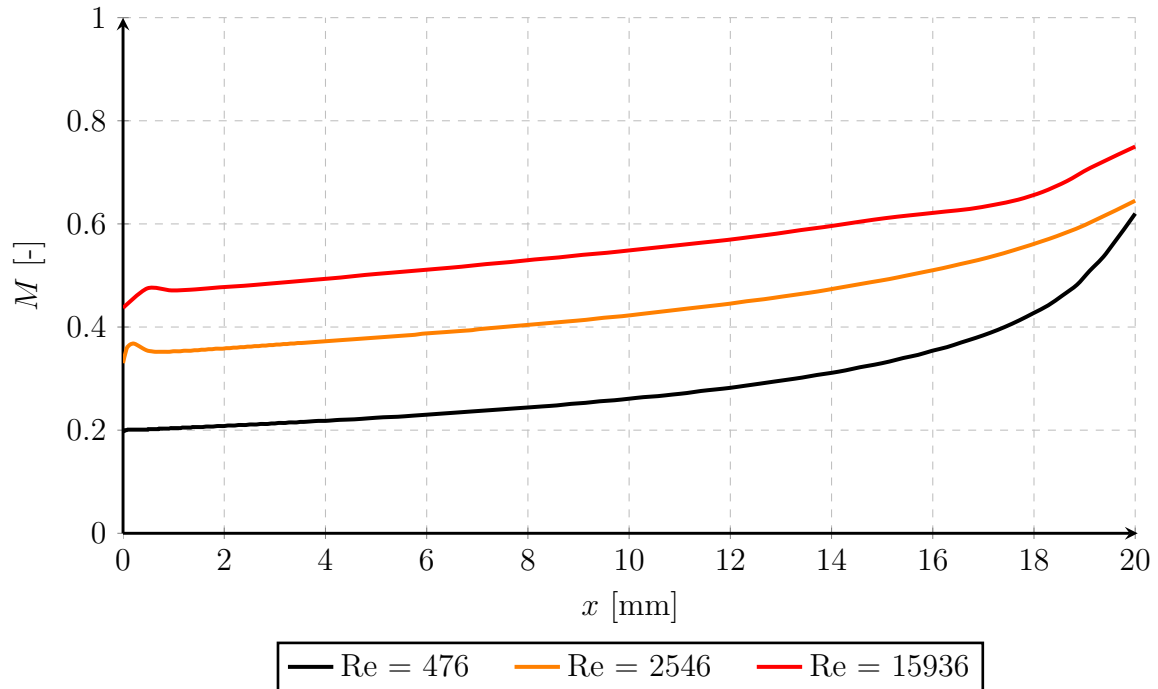


Abb. 6.1: Verlauf der Machzahl in einem Spalt mit  $h = 0.15$  mm,  $L = 20$  mm. Als Machzahl am Spaltaustritt wurde ein Wert von  $M_2 \approx 0.7$  angestrebt.

verwendet, wobei zunächst nur die inkompressiblen Reibwerte eingesetzt werden können. Hierbei ist zu beachten, dass die gewünschten Re-Zahlen nicht exakt getroffen werden; in den später gezeigten Vergleichen können die Re-Zahlen bis zu  $\pm 7\%$  voneinander abweichen. Die numerische Auswertung der Strömungsgrößen erfolgt analog zum inkompressiblen Fall.

Grundsätzlich ist die Machzahl am Spalteintritt stets relativ gering, erst im Laufe der Durchströmung wird das Gas infolge des Druckverlustes beschleunigt, was zu einem Anstieg der Machzahl führt. Der Verlauf der Machzahl in Durchströmungsrichtung ist für verschiedene Reynoldszahlen in Abb. 6.1 dargestellt. Da bei kleinen Reynoldszahlen die Reibung einen verhältnismäßig großen, drosselnden Effekt auf die Strömung ausübt, ist hier über einen großen Bereich der Spalttiefe die Machzahl niedrig. Erst zum Spaltaustritt hin findet eine starke Strömungsbeschleunigung statt. Bei großen Reynoldszahlen verringert sich der Einfluss der Reibung, was eine hohe Machzahl am Spalteintritt und einen flachen Anstieg derselben zur Folge hat. Zur systematischen Untersuchung des Reibwertverlaufs wird für jede Reynoldszahl die Machzahl am Spaltaustritt von  $M_2 \approx 0.3$  bis etwa  $M_2 \approx 0.7$  variiert, was nah an der verblockten Strömung liegt (siehe Kap. 8.1). Zusätzlich werden unterschiedliche Spalttiefen untersucht, so dass die Auswirkung der Strömungsbeschleunigung im Spalt bewertet werden kann. Die Bezeichnung der Berechnungsfälle in den folgenden Abbildungen erfolgt dabei nach der erreichten Machzahl  $M_2$  am Spaltaustritt. Die Ergebnisse werden im laminaren und transitionellen Bereich durch das Produkt aus Reibwert und Reynoldszahl ( $Po = f_{app} \cdot Re$ ) angegeben, deren Verlauf über  $x^+$  in den Abb. 6.2 - 6.3 dargestellt ist. Für eine inkompressible, voll ausgebildete Strömung gilt nach Gl. 4.15  $Po = 96$ , was als Referenz in die Diagramme eingetragen ist. Für die turbulente Strömung erfolgt die Darstellung direkt als Reibwert  $f_{app}(x^+)$ ,

zum Vergleich sind hier die Ergebnisse der inkompressiblen Strömung aus Kap. 4 eingezeichnet.

Bei den Ergebnissen des laminaren Falls sind mit Ausnahme des Einlaufbereiches die Reibwerte grundsätzlich höher als im inkompressiblen Vergleichsfall. Wie erwartet entwickelt sich keine voll ausgebildete Strömung mit  $df_{app}/dx^+ = 0$ ; die Reibwerte steigen in allen Fällen nach dem Einlaufbereich in Strömungsrichtung leicht an. Dieser Anstieg fällt mit max. 10% allerdings bemerkenswert gering aus, so dass nach Abklingen der Einlaufstörungen die Strömung mit guter Näherung als quasi-ausgebildet angesehen werden darf.

Die Rechnungen mit kürzeren Spalttiefen ergeben für laminare Strömung generell größere Reibwerte als die mit größeren Spalttiefen, so dass die Reibwerte in der quasi-ausgebildeten Strömung keine Funktion der Machzahl alleine sind. Den Ergebnissen zufolge scheinen diese vielmehr von der Strömungsbeschleunigung  $dM/dx^+$  abzuhängen, die bei kurzen Spalten entsprechend höher ist. Eine Auswertung der Poiseuille-Zahl über diesem Kennwert ist in Abb. 6.4 für verschiedene Reynoldszahlen aufgetragen, wodurch diese Vermutung bestätigt wird. So kann die Abhängigkeit der Reibwerte von der Strömungsbeschleunigung mit guter Näherung durch die folgende Funktion erfasst werden, die ebenfalls in Abb. 6.4 eingezeichnet ist:

$$f_{fd,komp} = f_{fd,inkomp} + \frac{1}{Re} \left[ 2.5 \left( \frac{dM}{dx^+} \right)^{0.6} - 0.35 \left( \frac{dM}{dx^+} \right) \right] \quad (6.11)$$

Das Ergebnis entspricht damit scheinbar nicht den Erkenntnissen von Asako et. al [9], [41], die eine deutliche Abhängigkeit des Reibwertes von der lokalen Machzahl feststellten. Hauptursache hierfür dürfte die Definition des Reibwertes sein, die anders, als hier vorgeschlagen, den Reibwert rein auf die Wandschubspannung (d.h.  $f$ ) bezieht.

In der voll turbulenten Strömung mit  $Re > 8000$  ist in der Abb. 6.3 praktisch kein Unterschied zwischen den Reibwerten der inkompressiblen und der kompressiblen Reibwertverläufe in der ausgebildeten Strömung zu erkennen. Auch die Variation der Spalttiefe und damit der Strömungsbeschleunigung hat nahezu keine Auswirkung auf die Reibwerte, so dass für turbulente Strömungen mit sehr guter Näherung die Werte der inkompressiblen Strömung gelten.

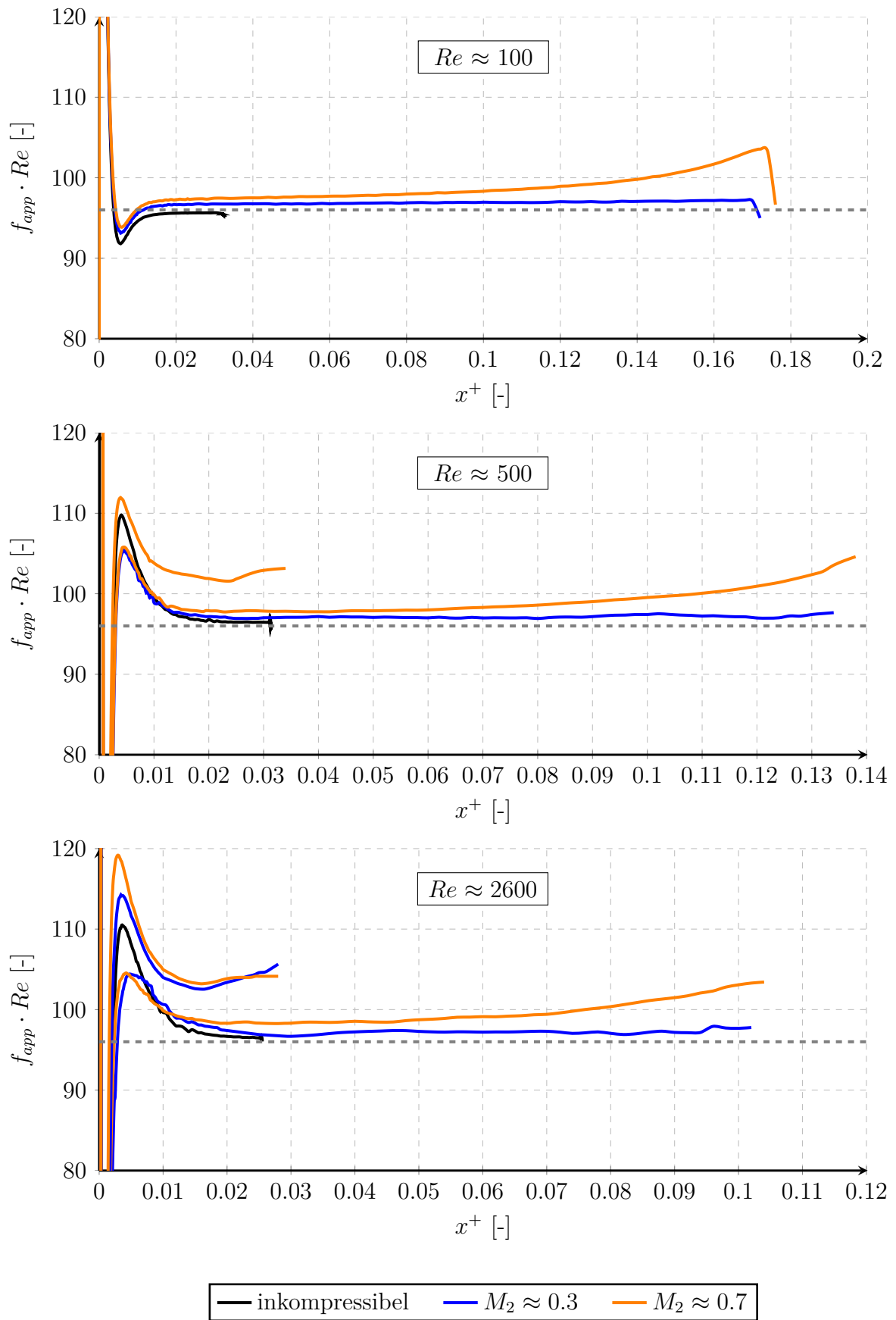


Abb. 6.2: Einfluss der Kompressibilität auf die Reibwerte in laminarer Strömung



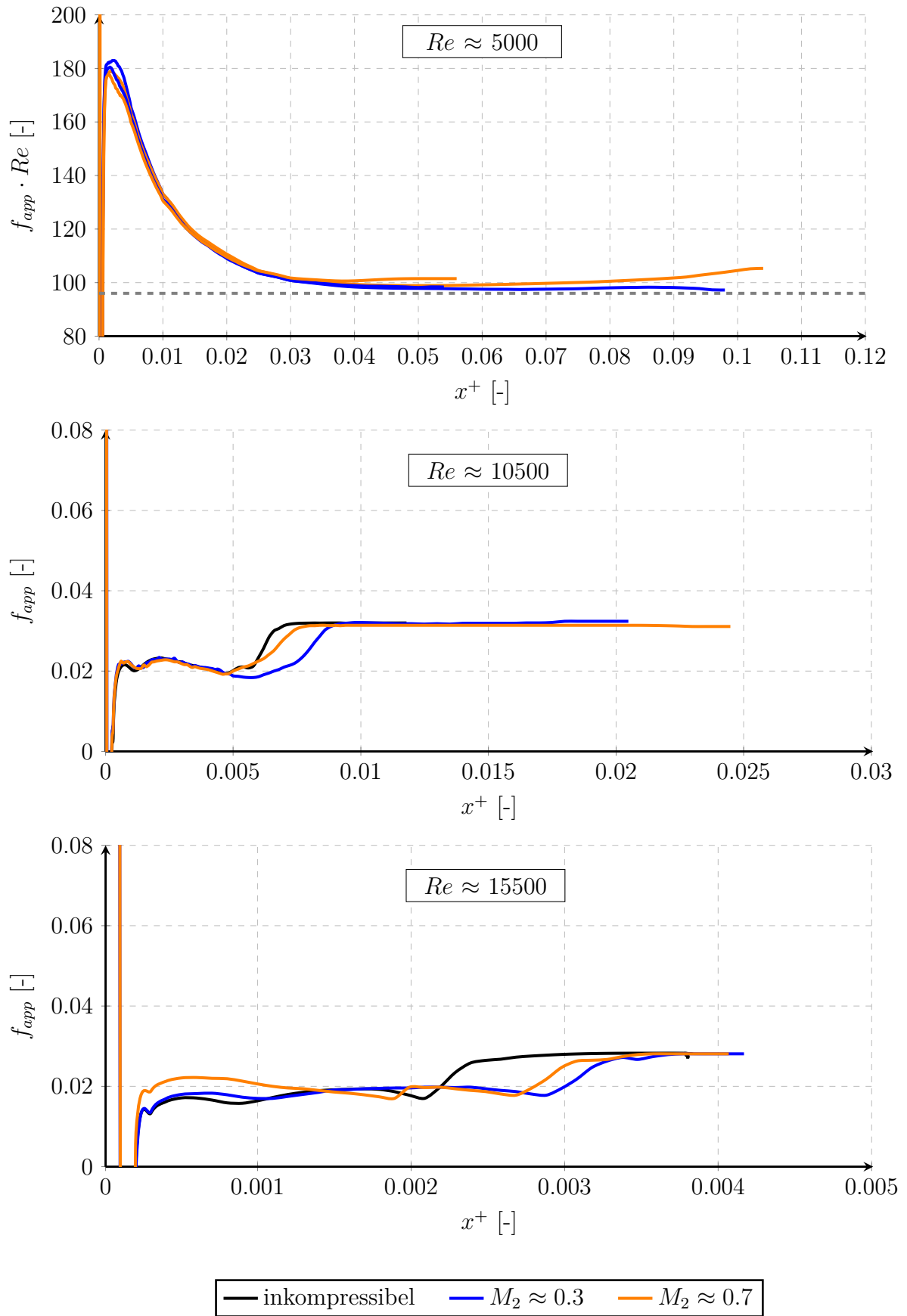


Abb. 6.3: Einfluss der Kompressibilität auf die Reibwerte in transitioneller und turbulenter Strömung

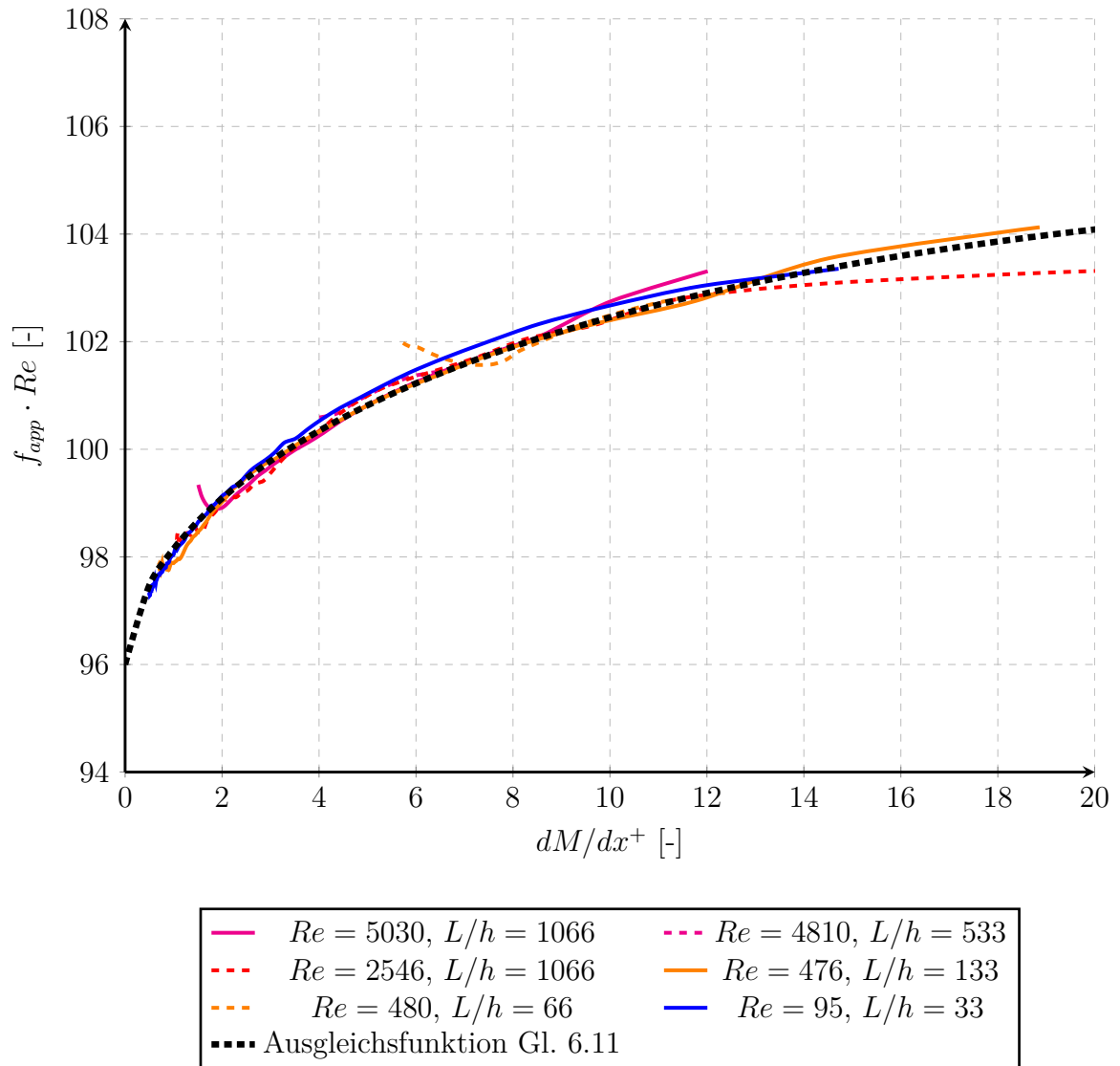


Abb. 6.4: Poiseuille-Zahl als Funktion der Strömungsbeschleunigung in der quasi ausgebildeten Strömung. Die Ergebnisse beinhalten unterschiedliche Reynoldszahlen und Ergebnisse aus Rechnungen mit unterschiedlichen Spalttiefen.

### 6.2.1 Einlaufverluste in kompressibler Strömung

Analog zur inkompressiblen Strömung ergeben sich hinter dem Spalteintritt größere Reibwerte, da hier das Geschwindigkeitsprofil noch nicht entwickelt ist. Zur Quantifizierung dieser Einlaufverluste wurde für die inkompressible Strömung der inkrementelle Druckverlust eingeführt, der die zusätzlichen Verluste gegenüber der voll ausgebildeten Strömung erfasst (siehe Abschnitt 4.2.5).

Für die kompressible Strömung kann diese Beschreibung nicht verwendet werden, da zum einen keine tatsächlich voll ausgebildete Strömung als Referenzwert zur Verfügung steht und zum anderen der mittlere Staudruck der kompressiblen Strömung nicht konstant ist. Dieser steigt im Laufe der Spaltdurchströmung an, was bei der Integration der Impulsgleichung (Gl. 6.10) berücksichtigt werden muss. Damit ist die Form nach Gl. 4.26 für kompressible Strömungen nicht mehr gültig, so dass eine einfache Bewertung der Einlaufverluste nicht möglich ist.

Lediglich für den Sonderfall der schwach kompressiblen Strömung mit geringer Änderung des Staudrucks und den vorher beschriebenen, quasi ausgebildeten Reibwerten kann der inkrementelle Druckverlust näherungsweise in kompressibler Strömung bestimmt werden. Die Ergebnisse hierfür mit  $M_1 \approx 0.2$ ,  $M_2 \approx 0.3$  sind in der Abb. 6.5 dargestellt, die zum Vergleich auch die inkompressiblen Verläufe enthalten. Die Einlaufängen entsprechen den Ergebnissen der inkompressiblen Strömung, die sich dann einstellenden Werte von  $K$  sind im laminaren und transitionellen Bereich allerdings deutlich niedriger als im inkompressiblen Fall. Durch die Kompressibilität reduziert sich die Bedeutung der Einlaufeffekte auf den Spaltmassenstrom.

In der turbulenten Strömung (mit  $Re > 8000$ ) sind die Werte aufgrund der sich erst im Spalteinlauf entwickelnden Turbulenz negativ, wie in Kap. 4.7 erläutert. Für eine kompressible Strömung fällt dieser laminare Einlaufbereich offenbar stärker ins Gewicht; die entwickelten inkrementellen Druckverluste sind deutlich kleiner als im inkompressiblen Vergleichsfall.

Für stärker kompressible Strömungen müssen die lokalen Reibwertverläufe zur Lösung der Impulsgleichung eingesetzt werden. Im Einlaufbereich sind diese bei hoher Strömungsbeschleunigung (d.h. geringer Spalttiefe) größer; vereinfachend werden die Werte der schwach kompressiblen Strömung mit der Korrektur nach Gl. 6.11 verwendet. Hierbei ist zu bedenken, dass (unter Berücksichtigung der Kontinuität  $\rho \cdot u = const.$ ) der Staudruck proportional mit der Machzahl in der Spaltdurchströmung ansteigt ( $\rho/2 \cdot u^2 \propto M$ ). Durch diese Staudruckerhöhung ist die Wandschubspannung am Spaltaustritt entsprechend höher und nimmt damit einen wesentlich größeren Anteil an der Gesamtreibung ein als die Einlaufeffekte, was deren Bedeutung für stark kompressible Strömungen weiter schmälert.

Die Ergebnisse für die voll turbulente Strömung zeigen, dass die Strömungsbeschleunigung nur einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Reibwertverteilung ausübt, so dass hier die Werte der schwach kompressiblen Strömung ohne Korrektur verwendet werden.

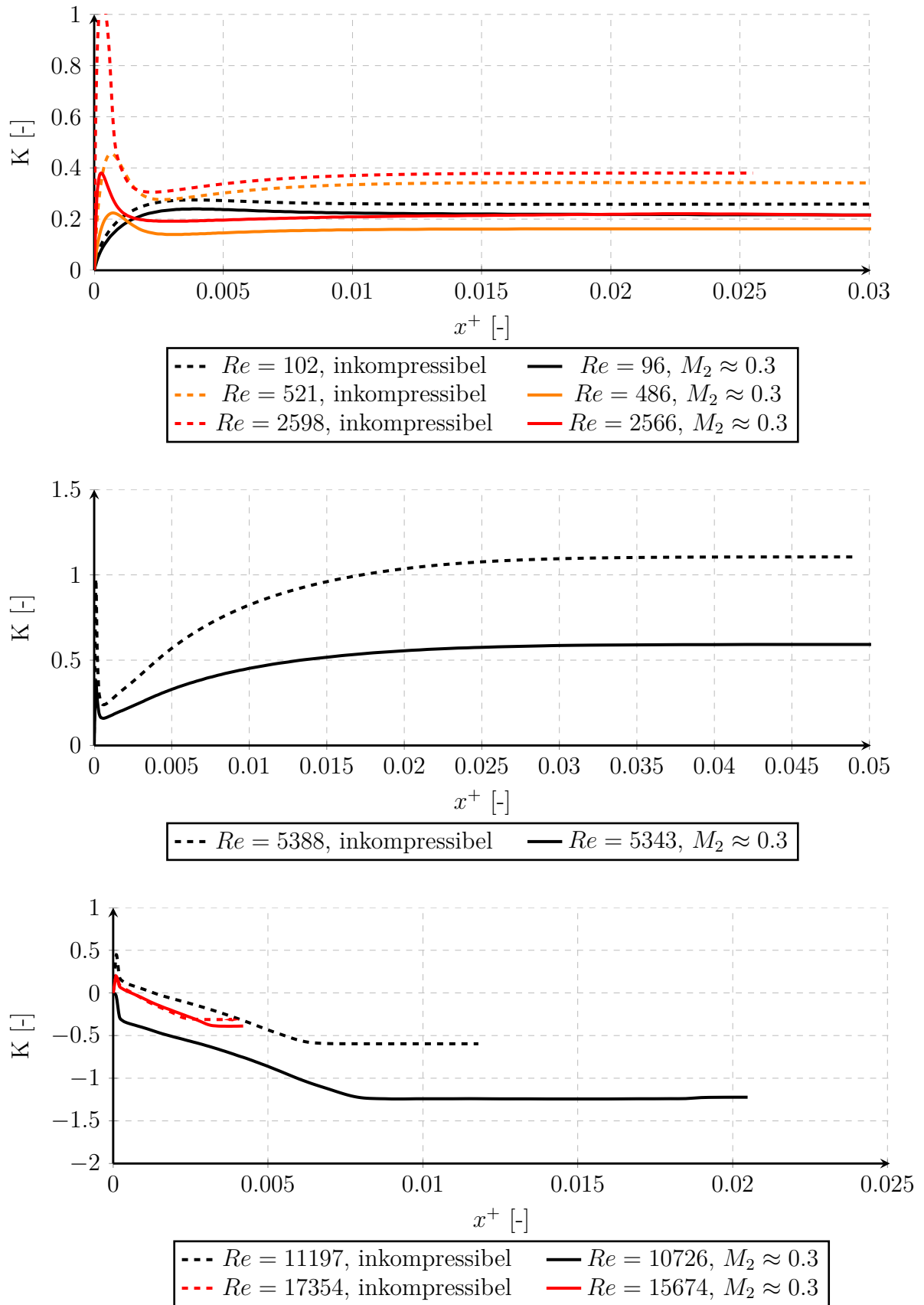


Abb. 6.5: Einfluss der Kompressibilität auf den inkrementellen Druckverlust im Spalteintritt

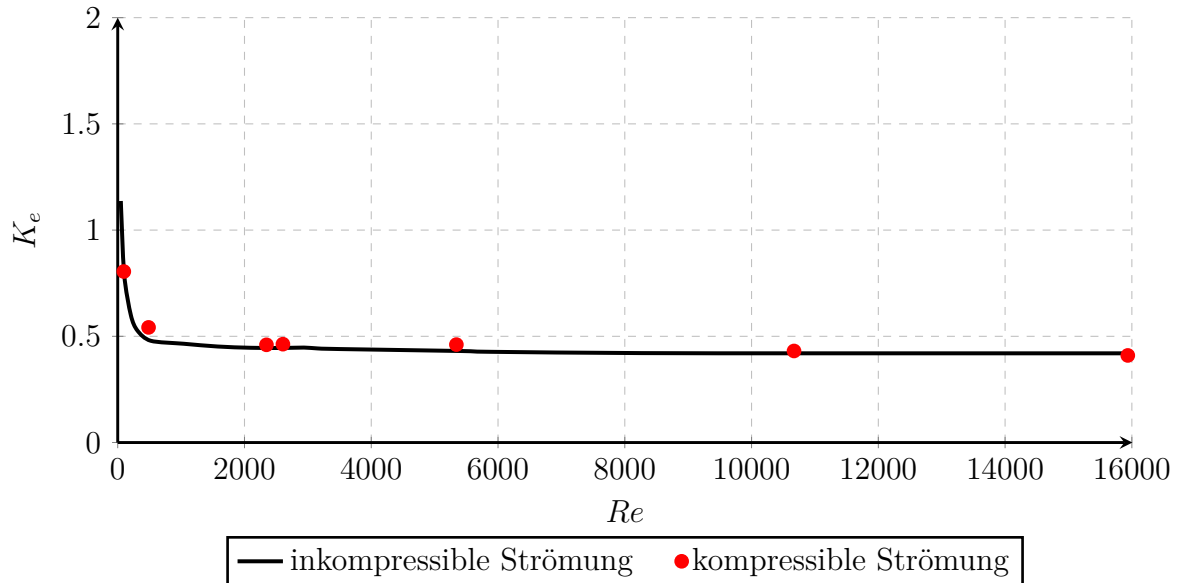


Abb. 6.6: Einfluss der Kompressibilität auf die Zuströmverluste zum Spalt. Gezeigt sind hier die Werte mit vgl. hoher Machzahl am Spaltein- und -austritt ( $M_1 \approx 0.3$ ,  $M_2 \approx 0.7$ ).

### 6.2.2 Zuströmverluste

In der kompressiblen Zuströmung treten die gleichen Verlustmechanismen wie bei der inkompressiblen Strömung auf (siehe Abschnitt 4.2.6), für die Bewertung wird wieder der Verlustkoeffizient  $K_e$  verwendet:

$$K_e = \frac{p_{1,ideal} - p_{1,real}}{\frac{\rho}{2} u_1^2} \quad (6.12)$$

Als Bezugsgröße dient der Staudruck  $\rho/2 \cdot u_1^2$  im Spalteintritt. Zur Bestimmung des verlustfreien Eintrittsdrucks  $p_{1,ideal}$  wurde für die inkompressible Strömung die Bernoulli Beziehung angewendet, die die notwendige Druckabsenkung zur Beschleunigung der Strömung auf die Geschwindigkeit  $u_1$  beschreibt. Für kompressible Strömung ist diese Gleichung nicht gültig, für die Berechnung des idealen Eintrittsdrucks wird die Druckabsenkung einer isentropen Strömung herangezogen [78]:

$$p_{1,ideal} = p_0 \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \quad (6.13)$$

Der Vergleich der kompressiblen mit den inkompressiblen Ergebnissen in Abb. 6.6 zeigt einen geringen Einfluss der Kompressibilität; für praktische Berechnungen können die inkompressiblen Werte eingesetzt werden.

Die kinetische Energie der Strömung wird im adiabaten Fall aus der thermischen Energie des Gases entnommen, was zu einer Absenkung der Temperatur im Spalteintritt führt. Andererseits wird infolge der inneren Gasreibung Energie dissipiert, was eine leichte Temperaturerhöhung zur Folge hat. Zur Beschreibung beider Phänomene wird ein polytroper Ansatz mit dem Polytropenexponenten  $n$  gewählt:

$$T_{in} = T_{0,1} \cdot \frac{p_{in}^{\frac{n-1}{n}}}{p_{0,1}} \quad (6.14)$$

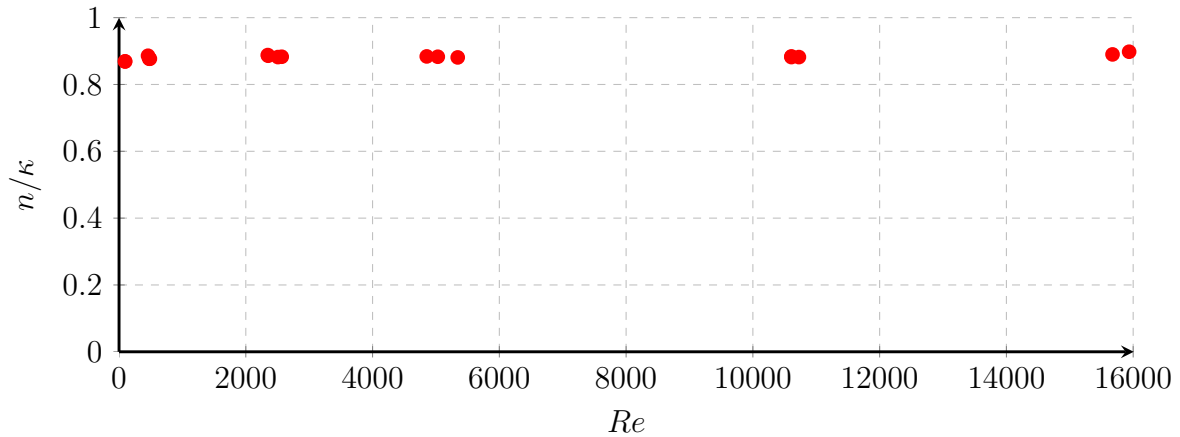


Abb. 6.7: Verhältnis des Polytropenexponenten  $n$  im Verhältnis zum Isentropenexponenten  $\kappa$ . Die Werte korrespondieren zu verschiedenen Machzahlen am Spalteintritt.

Für bekannte Temperaturen und Drücke kann daraus der Exponent  $n$  bestimmt werden:

$$n = \frac{1}{1 - \frac{\ln(T_{in}/T_{0,1})}{\ln(p_{in}/p_{0,1})}} \quad (6.15)$$

Das Verhältnis  $n/\kappa$  ist in Abb. 6.7 für verschiedene Machzahlen am Spalteintritt als Funktion der Re-Zahl dargestellt. Den Ergebnissen nach ist das Verhältnis nahezu unabhängig von der Re- und Machzahl der Strömung und liegt bei  $n/\kappa \approx 0.88$ , was für die weiteren Rechnungen in Kap. 8 verwendet wird.

### 6.2.3 Impulsflussfaktoren

Zur Lösung der Impulsgleichung Gl. 6.10 wird der Impulsflussfaktor  $K_D$  benötigt, der gemäß seiner Definition nach Gl. 4.16 die Form des Geschwindigkeitsprofils erfasst. Für die inkompressible, laminare, voll ausgebildete Strömung gilt  $K_D = 1.2$ , für die Geschwindigkeitsprofile der Einlaufströmung und in der turbulenten Strömung gelten andere Werte. Weiterhin wird in kompressibler Strömung kein tatsächlich voll ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil erreicht, so dass hier  $K_D = K_D(Re, x^+, dM/dx^+)$  gilt. Die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte lassen allerdings erwarten, dass analog zum quasi- ausgebildeten Reibwert der Impulsflussfaktor ebenfalls praktisch konstant wird. Diese Vermutung wird durch die Ergebnisse in der Abb. 6.8 bestätigt, da die Werte sich nach Abklingen der Einlaufstörungen nur unwesentlich von den voll ausgebildeten, inkompressiblen Werten unterscheiden. Weiterhin sind die Abweichungen hiervon selbst in der Einlaufströmung sehr gering, so dass zur Vereinfachung für laminare und transitionelle Strömungen mit  $K_{D,lam} = 1.2$  für die gesamte Spalttiefe gerechnet werden kann. Für turbulente Strömungen gilt gleiches, hier ist der Wert aufgrund des flachen Geschwindigkeitsgradienten in der turbulenten Kernströmung mit  $K_{D,turb} = 1.07$  geringer.

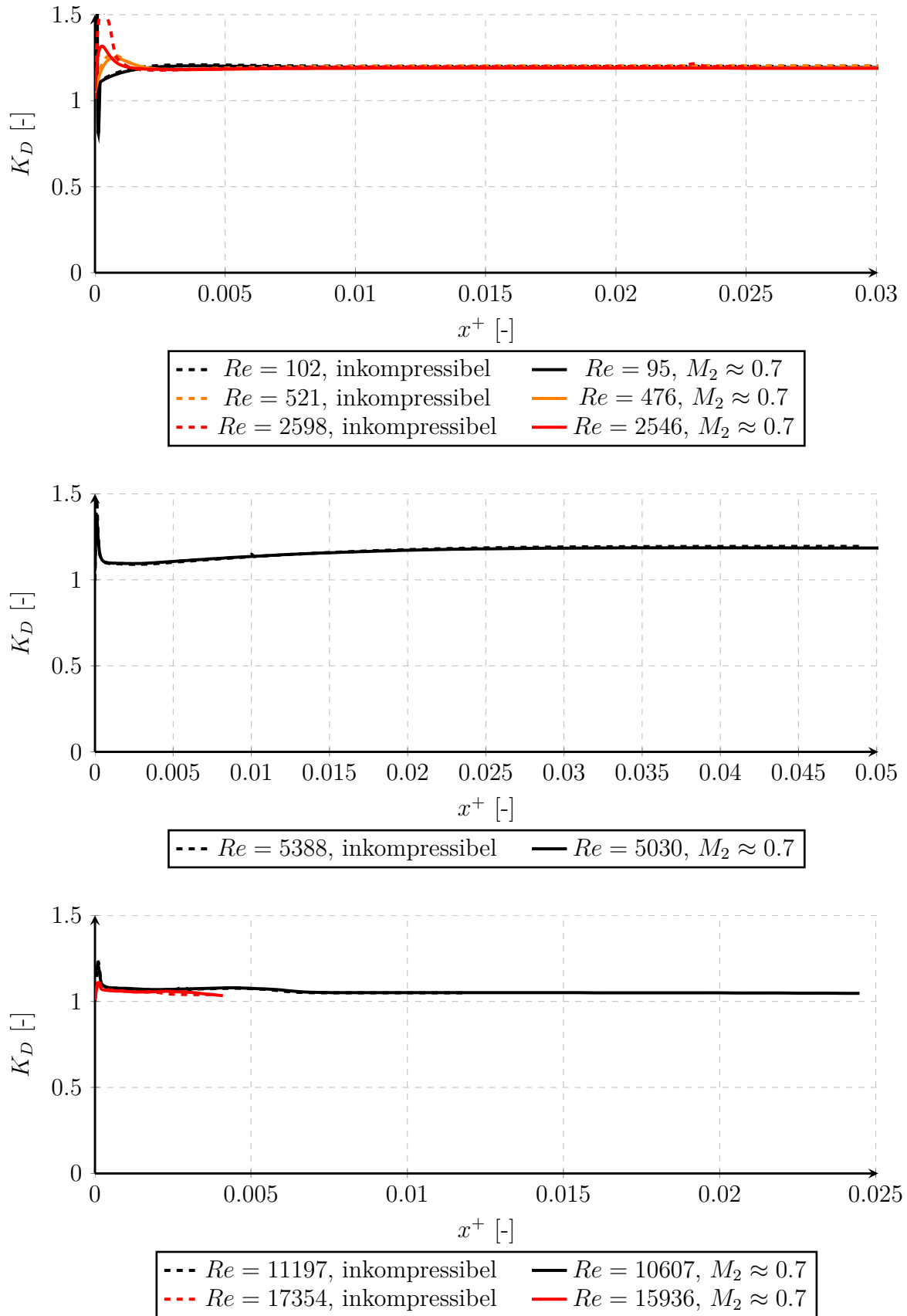


Abb. 6.8: Verlauf des Impulsflussfaktors in den verschiedenen Strömungsgebieten

## 6.3 Kompressible Strömung mit Wärmeübertragung

Durch die Kopplung der Impuls- und Energiegleichung in einer kompressiblen Strömung wird die Energiegleichung nichtlinear, womit das in Kap. 5.2 vorgestellte Superpositionsprinzip zur Wärmeübertragung bei unterschiedlichen Wandtemperaturen nicht anwendbar ist. Eine exakte Behandlung des Wärmeübertragungsproblems erfordert eine weitreichende Untersuchung aller relevanten Ähnlichkeitsparameter ( $Re$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $L/h$ ,  $T_R/T_{0,1}$ ,  $T_G/T_{0,1}$ ). Eine solches Vorgehen ist prinzipiell möglich, aufgrund der großen Anzahl möglicher Kombinationen jedoch nicht zweckmäßig. Im Folgenden wird daher eine Methode vorgestellt, die näherungsweise die Übertragung der inkompressiblen Wärmeübertragungsergebnisse auf die kompressible Strömung erlaubt.

Zur Erläuterung des Prinzips wird zuerst das Gastemperaturprofil an einer ideal isolierten Wand betrachtet. Unmittelbar an der Wand wird die Strömung durch Haftung auf die Geschwindigkeit Null verzögert, was ein Ansteigen der Gastemperatur bis auf die Ruhetemperatur erwarten lässt. Gleichzeitig sorgt jedoch die durch den Temperaturgradienten entstehende Wärmeleitung im Gas dafür, dass Wärme aus den aufgestauten wandnahen Schichten in Richtung der freien Strömung transportiert wird und sich somit eine Gastemperatur unterhalb der Ruhetemperatur an der Wand einstellt. Als weiterer wichtiger Effekt kommt die Dissipationswärme zum Tragen, die aus den großen Geschwindigkeitsgradienten an der Wand entsteht und den Wärmeleitungseffekt teilweise kompensiert.

Zur Bestimmung der sich an einer adiabaten Wand einstellenden Temperatur  $T_{aw}$  wird der "Recovery-Faktor" eingesetzt, der beide Effekte zusammenfasst [83]:

$$R = \frac{T_{aw} - T}{T_0 - T} = \frac{T_{aw} - T}{u^2/2c_p} \quad T_{aw} = T \cdot \left(1 + R \cdot \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2\right) \quad (6.16)$$

Die Temperatur  $T$  ist für angeströmte Körper die statische Temperatur der Anströmung und für den Spalt die eingangs definierte Mitteltemperatur. Der Recovery-Faktor drückt aus, welcher Anteil der kinetischen Energie an der Wand wieder in Form von thermischer Energie zurückgewonnen wird. Die Werte sind immer kleiner 1 und liegen nach Literaturangaben in Rohren zwischen 0.87 und 0.91, wobei sich diese Angaben auf Strömungen mit großer Re-Zahl beziehen [83].

Die Recovery-Faktoren für die hier untersuchte Spaltströmung können aus den Ergebnissen für die adiabate Strömung bestimmt werden und sind allgemein eine Funktion von  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Ma$ <sup>1</sup>. Die numerisch bestimmten Werte für Luft mit  $Pr = 0.71$  sind in Abb. 6.10 über der thermischen Lauflänge  $x^*$  aufgetragen. Unmittelbar am Spalteintritt ergeben sich hier unterschiedliche Werte für die Rotor- bzw. Gehäuse-seite des Spaltes, die Einlaufstörungen klingen jedoch nach sehr kurzer Lauflänge ab und es ergeben sich praktisch gleiche und konstante Werte an beiden Seiten des Spaltes. Bemerkenswert ist zudem, dass die Recovery-Faktoren in der laminaren und transitionellen Strömung in der quasi-ausgebildeten Strömung nahezu unabhängig

<sup>1</sup>Als weiterer Ähnlichkeitsparameter tritt bei der Dimensionsbetrachtung in Kap. 2.4 die Eckert-Zahl auf. Für eine adiabate Strömung gilt  $Ec = \frac{1}{R}$ , d.h. die Eckert-Zahl ist für adiabate Strömungen kein Parameter, sondern ein Ergebnis.



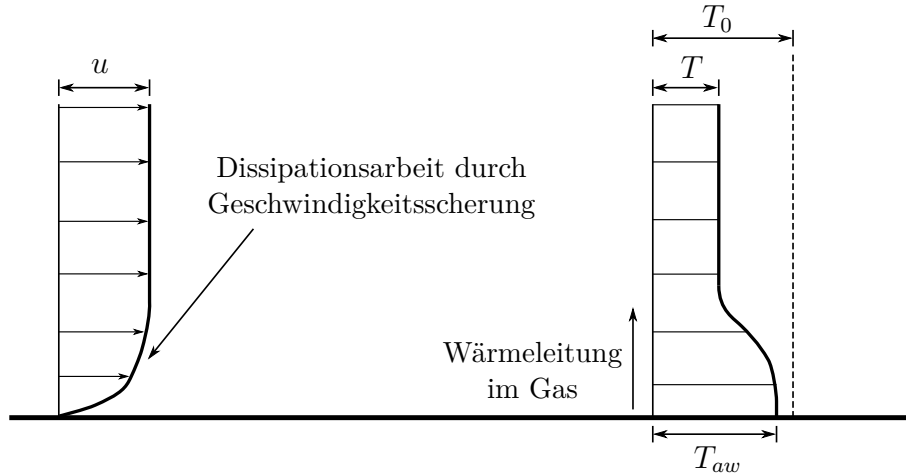


Abb. 6.9: Qualitative Darstellung des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils an einer Wand bei kompressibler Strömung

von der Reynoldszahl und der Strömungsbeschleunigung sind. Die Abweichungen von diesem Wert unmittelbar am Spalteintritt spielen aufgrund der geringen Machzahlen dort nur eine untergeordnete Rolle, so dass für Strömungen bis  $Re > 8000$  mit einem konstanten Wert von  $R = 0.58$  gerechnet werden kann. Analoge Aussagen gelten auch für die turbulente Strömung, wobei in dem hier untersuchten Bereich ( $Re < 16000$ ) sich Werte von  $R = 0.78$  einstellen.

Zur Berechnung der Wärmeübertragung in kompressibler Strömung wird in der Literatur im Allgemeinen der Unterschied zwischen adiabater und tatsächlicher Wandtemperatur als treibende Temperaturdifferenz betrachtet (siehe z.B. [10]), d.h. der Wärmestrom berechnet sich nach folgendem Ansatz:

$$\dot{q} = \alpha \cdot (T_{aw} - T_w) \quad (6.17)$$

Numerische Rechnungen von Eckert [30] für ebene Platten zeigen, dass die so definierten Wärmeübertragungskoeffizienten in guter Näherung mit denen der inkompressiblen Strömung übereinstimmen. Diese Annahme wird hier ebenfalls zu Grunde gelegt, allerdings sind die Wärmeströme nach Gl. 5.8 und 5.9 auf die Differenz zwischen Eintritts- und jeweiliger Wandtemperatur bezogen, so dass die obige Gleichung nicht direkt angewendet werden kann und umgeformt werden muss. Dazu wird die adiabate Wandtemperatur als Funktion der Ruhetemperatur und des Recovery-Faktors ausgedrückt; durch entsprechende Umformung von Gl. 6.16 ergibt sich:

$$T_{aw} = T_0 \cdot \left( 1 + \frac{(R - 1) \cdot \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2} \right) \quad (6.18)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gl. 6.17 folgt:

$$\dot{q} = \alpha \cdot \left[ T_0 - \underbrace{\left( T_w + T_0 \cdot \frac{(1 - R) \cdot \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2} \right)}_{T_w^*} \right] = \alpha \cdot [T_0 - T_w^*] \quad (6.19)$$

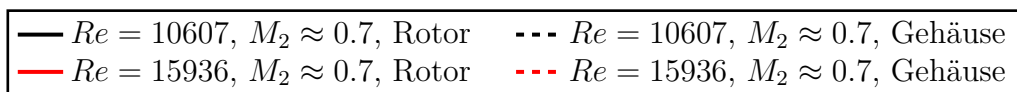
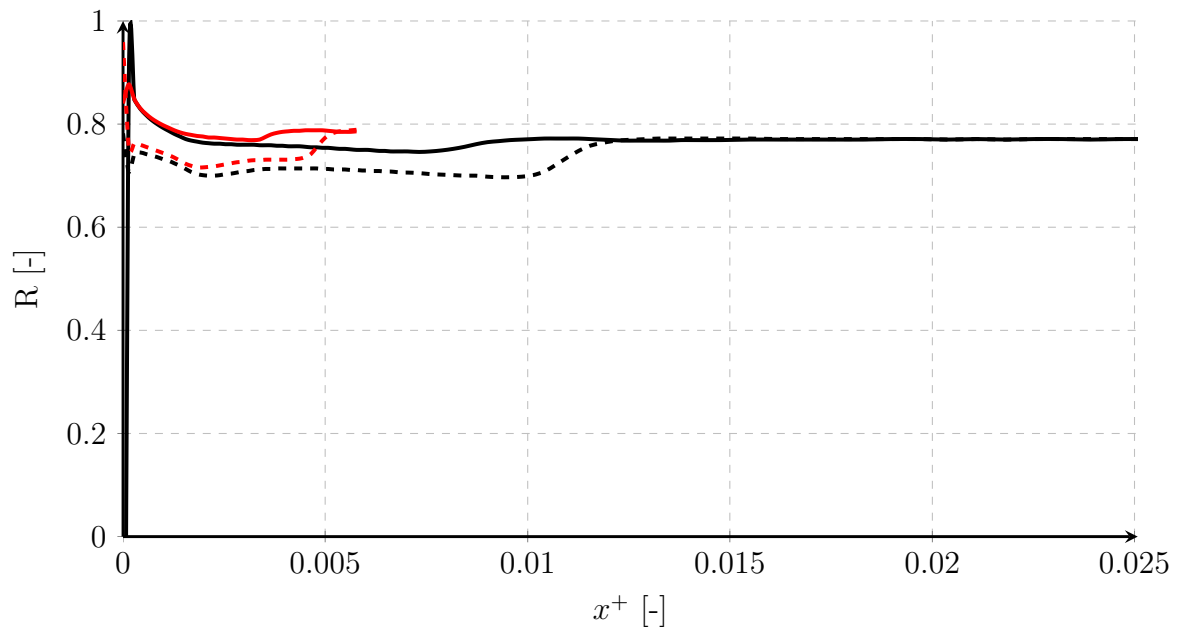
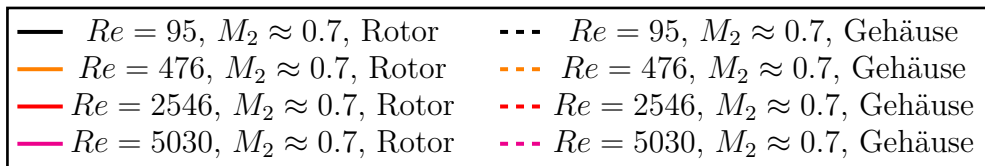
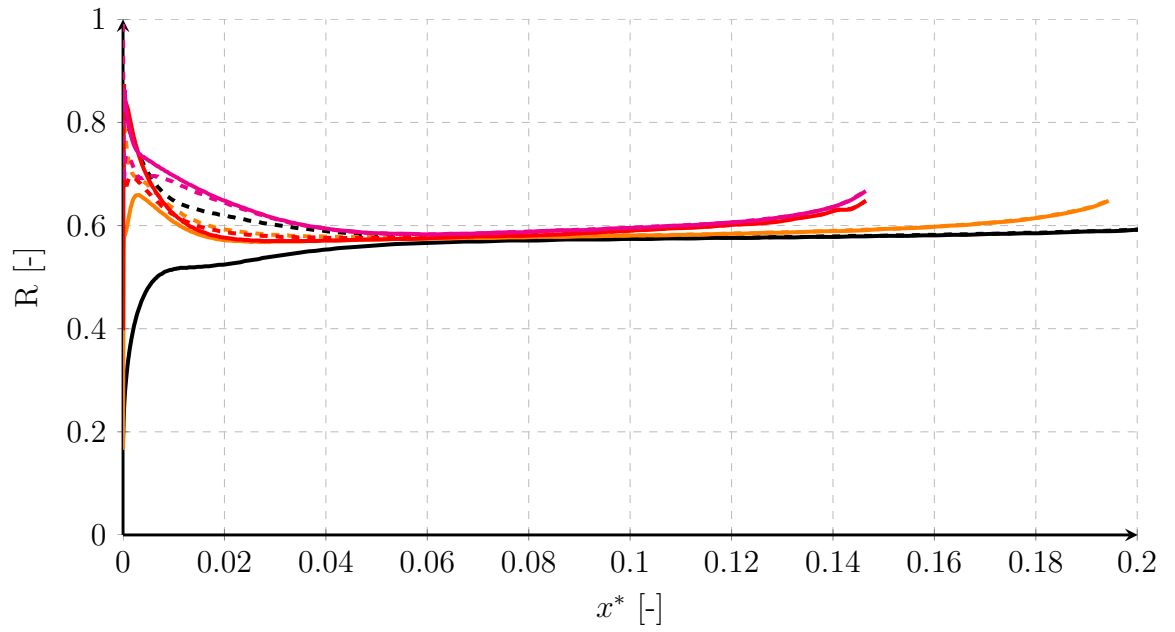


Abb. 6.10: Verlauf der Recovery-Faktoren für Rotor- und Gehäusesseite.

Die Verwendung der Differenz zwischen adiabater und tatsächlicher Wandtemperatur als treibende Kraft für die Wärmeübertragung kann demnach auch als Differenz zwischen der Ruhetemperatur des Gases und einer entsprechend angepassten Wandtemperatur  $T_w^*$  angesehen werden. Weitergehend kann dies als eine inkompressible Ersatzströmung interpretiert werden, wobei  $T_0$  die (inkompressible) Gastemperatur und  $T_w^*$  die angepasste Wandtemperatur ist. Mit diesem Konzept wird ein Übertragen der inkompressiblen Ergebnisse aus Kap. 5 auf die kompressible Strömung unter gewissen Vereinfachungen möglich, was im Folgenden erläutert wird.

Dazu wird nochmals auf den Verlauf der Mach- Zahl über der Spalttiefe in Abb. 6.1 verwiesen. Für große Druckdifferenzen wird die Strömung zum Spaltaustritt hin stark beschleunigt, was zu einem Ansteigen der Mach- Zahl führt. Das Anwenden des oben aufgezeigten Konzepts liefert nach Gl. 6.19 ein Ansteigen der Wandtemperatur der inkompressiblen Ersatzströmung entlang des Strömungswegs. Die Modellierung des Kompressibilitätseinflusses erfordert für die Spaltströmung also die Übertragung der Wärmeübergangsergebnisse von konstanter auf variable Wandtemperatur. Wie von McCuen [58] gezeigt, ist dies unter der Voraussetzung einer hydrodynamisch voll ausgebildeten Strömung möglich. In diesem Fall ist es unerheblich, an welcher Stelle im Spalt die Wärmeübertragung einsetzt, so dass ein beliebiger Wandtemperaturverlauf durch Überlagerung vieler, abschnittweiser konstanter Wandtemperaturen dargestellt werden kann (siehe Prinzipskizze 6.11). Nach dem Grenzübergang zu infinitesimal kleinen Abschnitten ergibt sich für den Temperaturverlauf:

$$T(x, y) = \int_{\xi=0}^{\xi=x} [\bar{T}_{R1}(x - \xi, y)] dT_{Rot}(\xi) + \int_{\xi=0}^{\xi=x} [\bar{T}_{G1}(x - \xi, y)] dT_{Geh}(\xi) + T_e \quad (6.20)$$

Dieser Temperaturverlauf erfüllt unter der Voraussetzung einer hydrodynamisch ausgebildeten Strömung (d.h.  $u_z = u(r)$ ) sowohl die Differentialgleichung Gl. 5.10 als auch die beliebig vorgegebenen Wandtemperaturverteilungen  $T_{Rot}(x)$  und  $T_{Geh}(x)$  und ist somit eine gültige Lösung des Problems. Analog dazu können die Wandwärmeströme bestimmt werden [58]:

$$q_{Rot/Geh}(x) = \frac{\lambda}{D_h} \left[ \int_{\xi=0}^{\xi=x} [\Phi_{R1, Rot/Geh}(x - \xi)] dT_R(\xi) + \int_{\xi=0}^{\xi=x} [\Phi_{G1, Rot/Geh}(x - \xi)] dT_G(\xi) \right] \quad (6.21)$$

Für den allgemeineren Fall der im Spalteinlass simultan entwickelnden hydrodynamischen und thermischen Grenzschicht ist diese Methode nicht gültig, da in Gl. 5.10  $u_r$  von  $z$  abhängen und damit als zusätzlicher Parameter der Ort auftritt, an dem die Wärmeübertragung beginnt. Für eine allgemeingültige Lösung müssten die Wärmestromverläufe für jeden beliebigen Punkt innerhalb der hydrodynamischen Einlaufänge bestimmt werden, an dem die Wärmeübertragung einsetzt [80].

Für die hier untersuchten Spalte liegt dieser der Fall vor, was im strengen Sinne eine solche Lösung erfordert. Große Abweichungen vom hydrodynamisch voll ausgebildeten Strömungszustand liegen insbesondere in der Ablöseblase bis etwa  $x^+ \approx 0.003$  für laminare Strömung vor; danach ist die Strömung zwar noch nicht ganz ausgebildet, der Unterschied zur voll ausgebildeten Strömung ist allerdings relativ gering. Zudem zeigen die Ergebnisse in Abb. 6.1, dass am Spalteintritt die Machzahländerung relativ gering ist, was zu einer ebenso geringen Änderung des Wandtemperaturverlaufs

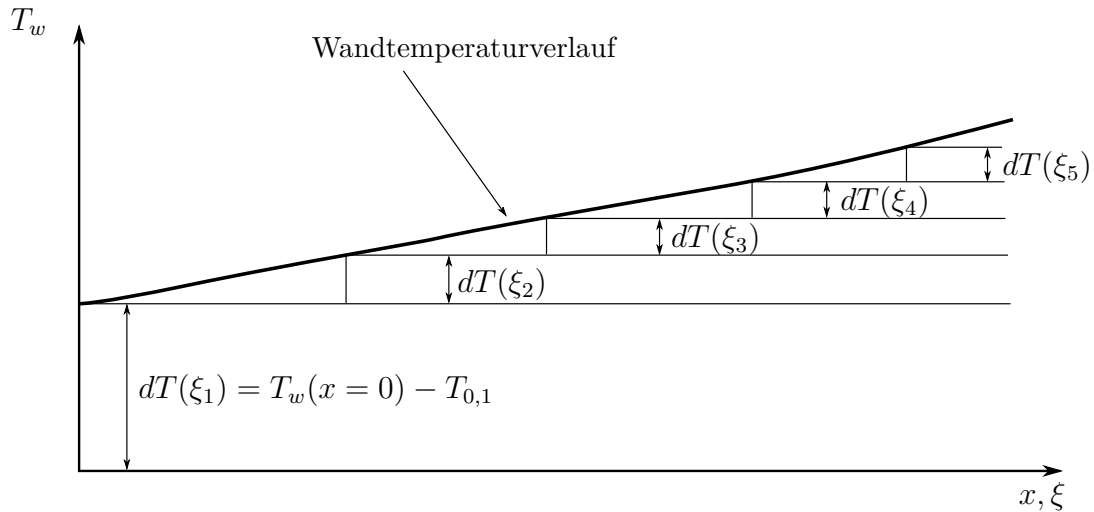


Abb. 6.11: Prinzipskizze zur Berücksichtigung variabler Wandtemperatur.

der inkompressiblen Ersatzströmung führt (siehe Gl. 6.19). Für die voll turbulente Strömung gelten analoge Aussagen, da die hydrodynamische Einlaufänge kürzer ist (siehe Abb. 6.3).

Diese Beobachtungen legen nahe, dass mit guter Genauigkeit ab Spaltbeginn mit Gl. 6.20 gerechnet werden kann, so dass die Ergebnisse aus Kap. 5 übernommen werden können. Für transitionelle Strömungen ist diese Annahme jedoch kritisch zu prüfen, da in diesem Bereich sehr lange hydrodynamische Einlaufängen auftreten, in der sich die Strömungsform von turbulent nach laminar ändert. Die Bewertung hierzu erfolgt im nächsten Abschnitt.

Die inkompressiblen Ergebnisse zeigen außerdem, dass sich bei niedrigen Re- Zahlen die Strömung bereits im Zulauf zum Spalt erheblich erwärmt, was für die kompressible Strömung ebenfalls modelliert werden muss. Eine zum Spalt analoge Vorgehensweise würde eine detaillierte Auswertung der Mach- Zahl und der Recovery-Faktoren im Zuströmbereich erfordern. Allerdings sind die Machzahlen über weite Bereiche der Zuströmung sehr gering, so dass der Unterschied zwischen  $T_w$  und  $T_w^*$  vernachlässigbar ist. Vereinfachend wird daher ein Recovery-Faktor von  $R = 1$  angenommen; die Ruhetemperatur des Gases in der Zuströmung bei kompressibler Strömung ändert sich also wie im inkompressiblen Fall.

Durch die getroffenen Annahmen kann das kompressible Wärmeübertragungsproblem auf eine inkompressible Ersatzströmung zurückgeführt werden, mit der der Ruhetemperaturverlauf des Gases sowie die Wandwärmeströme bestimmt werden kann. Im nächsten Schritt werden die zugrunde gelegten Annahmen kritisch geprüft, um die Genauigkeit der Modellierung bewerten zu können.

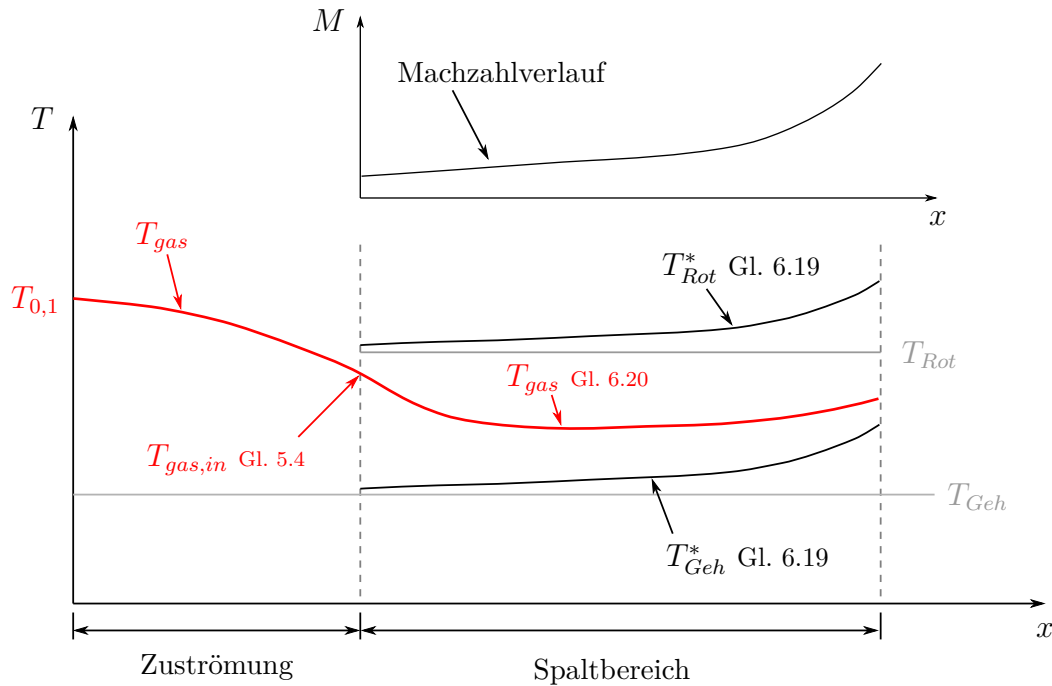


Abb. 6.12: Inkompressible Ersatzströmung zur Abbildung der Wärmeübertragung in einer kompressiblen Strömung. Der skizzierte Verlauf gilt für den Fall  $T_0 > T_{Rot} > T_{Geh}$ .

### 6.3.1 Validierung der Wärmeübergangsmodellierung

Die Validierung der Wärmeübergangsmodellierung erfolgt gegen ausgesuchte Testfälle, bei denen die Erhaltungsgleichungen numerisch gelöst werden. Die Untersuchung umfasst dabei den gesamten Re- Zahl Bereich, beschränkt sich allerdings auf Strömungen mit großer Machzahländerung über dem Spalt, da hier der Einfluss der Kompressibilität am deutlichsten in Erscheinung tritt. Als thermische Randbedingungen werden drei Fälle untersucht:

1.  $T_{0,1} = 300K$ ,  $T_{Rot} = 400K$ ,  $T_{Geh} = 300K$ : Diese Randbedingungen entsprechen näherungsweise dem "R1"-Fall der inkompressiblen Strömung, da der Anteil der "G1"- Wärmeströme an den Gesamtwärmeströmen (nach Gl. 6.21) von Rotor und Gehäuse klein ist. Dieser Fall dient zur Validierung der Umrechnung des "R1"-Falles auf die kompressible Strömung.
2.  $T_{0,1} = 300K$ ,  $T_{Rot} = 300K$ ,  $T_{Geh} = 400K$ : Hier dominieren die "G1"- Wärmeströme, was zur Validierung des "G1"-Falls eingesetzt wird.
3.  $T_{0,1} = 300K$ ,  $T_{Rot} = 400K$ ,  $T_{Geh} = 350K$ : Bei diesem Testfall tragen beide Wärmeströme in ähnlicher Größenordnung zum Gesamtwärmestrom bei, womit die Gültigkeit des Superpositionsprinzips untersucht wird.

Aus der Lösung der Erhaltungsgleichungen kann der Verlauf der Machzahl bestimmt werden, aus der der Wandtemperaturverlauf der inkompressiblen Ersatzströmung folgt. Damit wird Gleichung 6.21 gelöst, wobei die inkompressiblen Wärmestromverläufe mittels linearer Interpolation auf die jeweilige Re- Zahl umgerechnet werden.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt analog zu Kap. 5.2 in dimensionsloser Form. Als Bezugstemperatur wird  $T_1 = T_{Rot}$  für die Fälle 1 und 3 gewählt, so dass für die Ruhetemperatur und die Wandwärmeströme gilt:

$$\bar{T}_0 = \frac{T_0 - T_{0,1}}{T_{Rot} - T_{0,1}} \quad \Phi_{1,3} = \frac{q}{\frac{\lambda}{D_h}(T_{Rot} - T_{0,1})} \quad (6.22)$$

Für den zweiten Testfall mit der "G1"-Randbedingung wird sinnvollerweise  $T_1 = T_{Geh}$  gesetzt, womit analoge Beziehungen folgen. Zwecks übersichtlicher Darstellung sind nur die Ergebnisse des dritten Testfalls aufgezeigt; die hieraus ableiteten Aussagen gelten auch für die ersten beiden Testfälle.

In den Abb. 6.13 - 6.14 sind beispielhafte Ergebnisse für jeden Strömungsbereich aufgetragen. Nennenswerte Abweichungen zwischen Lösungen der Erhaltungsgleichungen und der entwickelten Modellierung treten bei niedriger Re-Zahl in der Nähe des Spaltaustrittes auf, wo die Wärmeströme nach dem Näherungsverfahren betragsmäßig etwas zu klein berechnet werden (siehe Ergebnis für  $Re = 86$  in Abb. 6.13). Für transitionelle und turbulente Strömung ergeben sich geringe Unterschiede im Bereich des Spalteintritts, die zu einem leichten Unterschieden in den Verläufen der Ruhetemperatur führen.

Insgesamt beschränken sich diese Abweichung auf einen sehr kurzen Bereich des Spaltes, so dass die insgesamt dem Rotor und Gehäuse zu- bzw. abgeführte Wärmemenge mit guter Genauigkeit von dem Näherungsverfahren erfasst wird. Die vorgeschlagene Modellierung der Wärmeübertragung unter Verwendung des Superpositionsprinzips der inkompressiblen Strömung kann daher mit brauchbarer Genauigkeit eingesetzt werden.

Abschließend sei noch angemerkt, dass in allen drei Fällen der Verlauf der scheinbaren Reibwerte ausgewertet wurde. Dabei zeigt sich, dass diese mit guter Genauigkeit denen der adiabaten Rechnung entsprechen; ein nennenswerter Einfluss der Wärmeübertragung auf die Reibwerte ist nicht festzustellen.

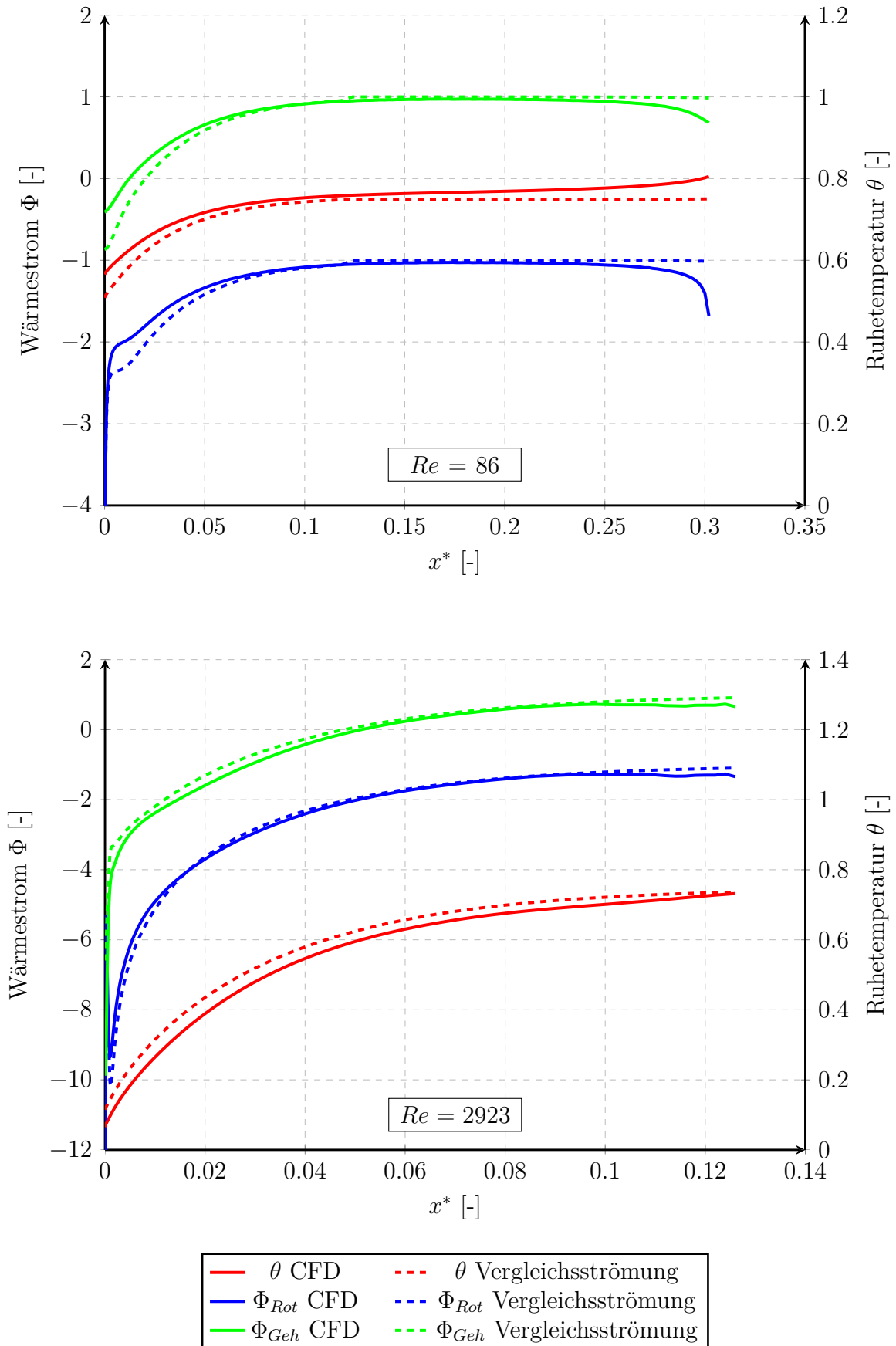


Abb. 6.13: Vergleich der dimensionslosen Wärmeströme und Gastemperatur durch numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen ("CFD") mit der inkompressiblen Ersatzströmung für laminare Strömung.

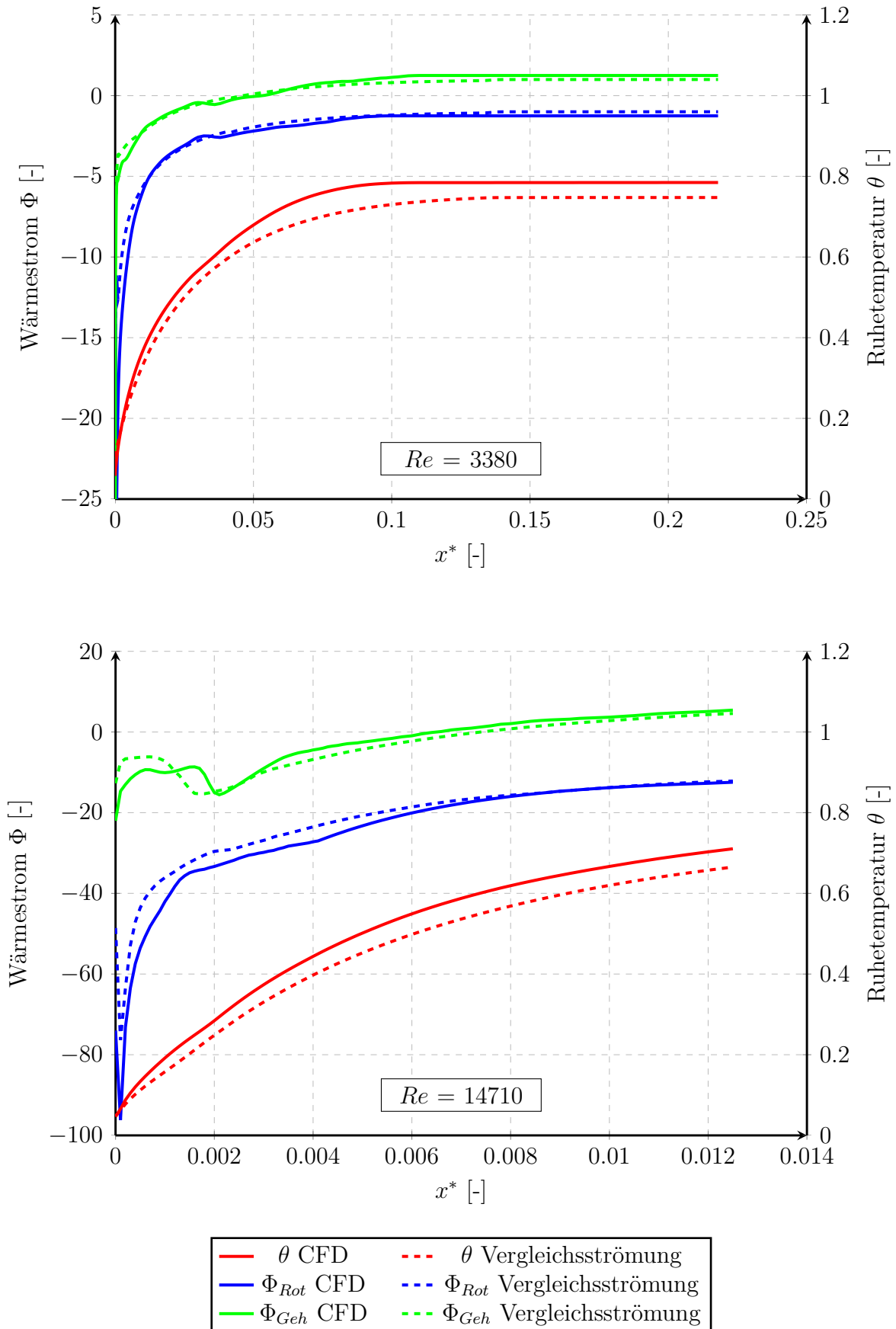


Abb. 6.14: Vergleich der dimensionslosen Wärmeströme und Gastemperatur durch numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen ("CFD") mit der inkompressiblen Ersatzströmung für intermittente und turbulente Strömung.



# Kapitel 7

## Modellierung der Gasverdünnung

### 7.1 Bedeutung der Einlaufeffekte für verdünnte Strömungen

Wie in Kap. 1 erläutert kann in den Spalten von Schraubenvakuumpumpen die Strömungsform zwischen viskoser, turbulenter Strömung bis zur freien Molekularströmung variieren. Die Strömungsform hat dabei einen großen Einfluss auf das Durchströmungsverhalten und die Wärmeübertragung, so dass diese in der Modellierung in geeigneter Form berücksichtigt werden muss.

Der Übergang von viskoser zur verdünnten Strömung tritt bei großen Knudsenzahlen und damit geringen Drücken im Spalt ein. Die Reynoldszahl im Spalt ist damit stets klein, als Obergrenze kann  $Re_P \approx 100$  bei  $Kn = 0.01$  angesehen werden (Abb. 1.8). Dies hat zur Folge, dass die hydrodynamische und die thermische Einlaufänge kurz werden (siehe Abb. 5.12).

Den Einfluss des in einer schwach verdünnten Strömung ( $Kn < 0.1$ ) einsetzenden Geschwindigkeitsschlupfes an den Wänden auf den Spalteinlaufbereich untersuchen Duan und Muzychka in [29]. Als Randbedingung am Spalteintritt verwenden sie ein gleichförmiges, rechteckiges Geschwindigkeitsprofil. Sie können zeigen, dass sich die hydrodynamische Einlaufänge durch den Geschwindigkeitsschlupf an den Wänden vergrößert. Ursache hierfür dürfte der im Vergleich zu Hafttrandbedingung verringerte Impulsaustausch mit der Wand sein. Duan und Muzychka geben für den ebenen Spalt folgende Erweiterung der Formel von Chen [22] (siehe Gl. 1.15) an:

$$\frac{L_{hyd}}{D_h} = \frac{0.315}{1 + 0.0175 \cdot Re} + 0.011 \cdot Re \left[ 1 + 6.7 \frac{2 - \sigma}{\sigma} \cdot Kn - 37 \left( \frac{2 - \sigma}{\sigma} \cdot Kn \right)^2 \right] \quad (7.1)$$

Unter Verwendung der Abschätzung der max. Reynoldszahlen nach der isentropen Düsenströmung (siehe Abschnitt 1.4, Gl. 1.8) kann der Einfluss der Schlupfströmung auf die hydrodynamische Einlaufänge abgeschätzt werden. Für vollständige Akkommodation ( $\sigma = 1$ ) ergeben sich hierdurch Vergrößerungen bis max. 20% bei großen Knudsenzahlen.

Dieser Effekt ist auch bei der hier untersuchten Spaltströmung zu erwarten, allerdings bleibt die hydrodynamische Einlaufänge trotz einer möglichen Vergrößerung in gleicher Größenordnung im Bereich der Schlupfströmung kurz ( $L_{hyd}/D_h < 3$  für  $Re < 100$ ). Für kleinere Reynoldszahlen verkürzt sich die Einlaufänge weiter, die

Strömung im Spalt wird daher von der ausgebildeten Strömung dominiert. Weiterhin ist aufgrund der reibungsdominierten Strömung bei niedriger Reynoldszahl der Druckverlust der ausgebildeten Strömung vergleichsweise hoch, so dass die Einlaufeffekte einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Spaltdurchströmung ausüben (siehe Abb. 4.14).

Analoge Aussagen gelten für die thermisch Einlaufströmung, wenn auch hier die (thermische) Einlaufänge deutlich größer ist ( $L^* = 0.1$ ). In der Schlupfströmung kann die thermische Einlaufänge einen nennenswerten Teil des Spaltes einnehmen, allerdings ist nur unmittelbar am Spalteintritt die Strömung signifikant von der voll ausgebildeten Strömung verschieden. Bei etwa  $L^* = 0.05$  hat die Gastemperatur mehr als 95% von ihrem Endwert erreicht (siehe Abb. 5.5 und 5.7,  $Re = 101$ ). Basierend auf dieser thermische Einlaufänge folgt  $L_{therm}/h < 7$  (mit  $Re < 100$ ). Somit dominiert bei niedrigen Reynoldszahlen das thermische (nahezu) voll ausgebildete Temperaturprofil die Spaltströmung.

Insgesamt spielen die Einlaufeffekte im Bereich der verdünnten Strömung nur eine untergeordnete Rolle, so dass diese mit guter Näherung vernachlässigt werden dürfen. Für die Berechnung ist die Kenntnis über die voll ausgebildeten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile ausreichend. Ferner wird angenommen, dass die Wärmeübertragung nur eine untergeordnete Auswirkung auf das Geschwindigkeitsprofil hat und beide Profile unabhängig voneinander bestimmt werden können.

## 7.2 Modellierung der Reibwerte

Neben den Einlaufeffekten führt, wie im vorherigen Kapitel gezeigt, die Strömungsbeschleunigung infolge der Kompressibilität zu einer Abweichung vom idealen, voll ausgebildeten Geschwindigkeitsprofil. Dieser Effekt macht sich allerdings nur bei großer Strömungsbeschleunigung bemerkbar (siehe Abb. 6.4). Für Spaltströmungen mit kleiner Reynoldszahl dominieren die inneren Reibungskräfte das Strömungsbild, so dass über einen großen Bereich des Spaltes die Strömungsbeschleunigung gering bleibt. Da Verdünnungseffekte nur bei kleiner Reynoldszahl auftreten, trifft dies demzufolge für verdünnte Strömungen stets zu, was auch schon in den Arbeiten von Harley et. al. [39] gezeigt wurde. Für die Berechnung verdünnter Strömungen kann also in guter Näherung das von der lokalen Knudsenzahl im Spaltquerschnitt abhängige, voll ausgebildete Geschwindigkeitsprofil verwendet werden.

Die Lösung hierfür liefert Sharipov durch numerische Lösung der Boltzmann-Gleichung mit dem BGK-Modell [85]. Für voll ausgebildete Strömung gilt  $\frac{\partial f}{\partial x} \ll \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  (gemäß des Koordinatensystem aus Abb. 4.1), so dass die zu lösende Gleichung für einen Rechteckkanal sich in dimensionsloser Form mit  $c_w$  als Bezugsgeschwindigkeit ergibt:

$$\bar{\xi}_y \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} + \bar{\xi}_z \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \delta \cdot (\bar{f}^M - \bar{f}) \quad (7.2)$$

Als charakteristische Länge wird die Kanalhöhe  $h$  verwendet; für den Gasverdünnungsparameter  $\delta$  gilt:

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{h}{l_f} = \frac{h \cdot p}{\eta \cdot c_w} \quad (7.3)$$

Die dimensionslose Maxwell-Verteilung lautet entsprechend:

$$\bar{f}_M = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} \cdot e^{-(\vec{\xi} - \vec{u})^2} \quad (7.4)$$

Da diese in einer nichtlinearen Form von der makroskopischen Geschwindigkeit  $\vec{u}$  abhängt, die wiederum aus dem entsprechenden Moment der Verteilungsfunktion  $\bar{f}$  folgt (siehe Gl. 2.19), ist die oben angegebene Boltzmann-Gleichung (Gl. 7.2) nicht-linear.

Zur Vereinfachung des Problems linearisiert Sharipov die rechte Seite der obigen Gleichung. Dazu verwendet er folgende Ansatzfunktion für die Geschwindigkeitsverteilung  $\bar{f}$  [85]:

$$\bar{f} = \bar{f}^0 \cdot \left( 1 + \nu [\bar{x} + h(\bar{y}, \bar{z}, \vec{\xi})] \right) \quad \text{mit} \quad \bar{f}^0 = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} \cdot e^{-\vec{\xi}^2} \quad (7.5)$$

Der Parameter  $\nu$  beschreibt den dimensionslosen Druckgradienten der Strömung:

$$\nu = \frac{h}{p} \frac{dp}{dx} \quad (7.6)$$

Dem Ansatz liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich (infolge des Druckverlustes der Strömung) die Moleküldichte  $\bar{n}$  linear mit dem Druckverlust ändert und die Gleichgewichtsfunktion  $\bar{f}^0$  durch die makroskopische Geschwindigkeit  $\vec{u}$  beeinflusst wird, was durch die Störfunktion  $h(\bar{y}, \bar{z}, \vec{\xi})$  erfasst wird. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. 7.2, Linearisieren der Exponentialfunktion und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung folgt die zu lösende Gleichung für die Störfunktion  $h$  [85]:

$$\bar{\xi}_y \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} + \bar{\xi}_z \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \delta \cdot (2 \cdot \bar{\xi}_x \cdot \vec{u} - h) - \bar{\xi}_x \quad (7.7)$$

Die makroskopische Geschwindigkeitsverteilung  $\vec{u}(\bar{y}, \bar{z})$  folgt über das Moment (Gl. 2.19) zu:

$$\vec{u}(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int e^{-\vec{\xi}^2} \cdot h \cdot \bar{\xi}_x \cdot d\vec{\xi} \quad (7.8)$$

Diese für die Kanalströmung linearisierte Boltzmann-Gleichung kann numerisch mit Hilfe der Methode der diskreten Geschwindigkeiten gelöst werden (siehe Kap. 3.3). Zur räumlichen Diskretisierung der resultierenden partiellen Differentialgleichungen kommt aufgrund der einfachen Geometrie das Finite-Differenzen-Verfahren zum Einsatz. Mit der so bestimmten Störfunktion  $h$  kann die Integration in Gl. 7.8 ausgeführt werden, womit das Geschwindigkeitsprofil  $\vec{u}(\bar{y}, \bar{z}, \delta)$  der verdünnten Strömung folgt. Die auf diese Weise berechneten Ergebnisse gibt Sharipov in Form des dimensionslosen Volumenstroms  $G_P(\delta, b/h)$  (siehe Gl. 1.20) an; die Ergebnisse sind bereits in Abb. 1.12 aufgetragen. In stark verdünnten Gasen ( $\delta < 1$ ) spielen die seitlichen Berandungen eine nennenswerte Rolle, so dass hier die Idealisierung des Gehäusespaltes als ebener Spalt nur noch eingeschränkt gilt.

Um eine konsistente Modellierung über alle Strömungsbereiche hinweg zu erreichen, wird anstelle des dimensionslosen Volumenstroms  $G_P(\delta)$  eine Angabe über den Reibwert als Funktion des Verdünnungsfaktors benötigt ( $f_{fd} = f_{fd}(\delta)$ ). Hierfür wird der

Impulssatz angewendet, wobei zunächst der Druckverlust in einem Spaltsegment in der voll ausgebildeten Strömung nach Gl. 4.22 betrachtet wird:

$$\frac{dp}{\rho/2 \cdot u^2} = -f_{fd} \cdot \frac{dx}{D_h} \quad (7.9)$$

Der Reibwert wird gemäß Gl. 4.13 beschrieben:

$$f_{fd} = \frac{c}{Re} \quad (7.10)$$

Die hierin auftretende Poiseuille-Konstante  $c$  ist so zu bestimmen, dass diese die Effekte der Gasverdünnung korrekt erfasst. Dazu wird der durch einen Druckgradienten hervorgerufene Massenstrom aus dem obigen Ansatz bestimmt:

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot u = -\frac{2 \cdot \rho \cdot A \cdot D_h^2}{\eta \cdot c} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (7.11)$$

Für den Massenstrom durch ein Spaltsegment der Länge  $dx$  gilt gemäß dem Ansatz von Sharipov (siehe Gl. 1.21):

$$\dot{m} = -\frac{A \cdot \eta}{dx} \int_{\delta}^{\delta+d\delta} G_P(\delta) \cdot d\delta = -\frac{A \cdot D_h}{2 \cdot c_w} \cdot G_P(\delta) \cdot \frac{dp}{dx} \quad (7.12)$$

Durch Gleichsetzen beider Beziehungen folgt die Bestimmungsgleichung für die Poiseuille-Konstante:

$$\frac{2 \cdot \rho \cdot A_q \cdot D_h^2}{\eta \cdot c} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{A_q \cdot D_h}{2 \cdot c_w} \cdot G_P(\delta) \cdot \frac{dp}{dx} \quad (7.13)$$

$$c = \frac{4 \cdot c_w \cdot \rho \cdot D_h}{\eta \cdot G_P} \quad (7.14)$$

Nach Einsetzen der Definition der wahrscheinlichen Geschwindigkeit  $c_w$  (Gl. 2.36) und der idealen Gasgleichung ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Poiseuille-Konstante und dem dimensionslosen Volumenstrom  $G_P$ :

$$c(\delta, b/h) = \frac{16}{G_P(b/h)} \cdot \delta \quad (7.15)$$

Mit diesem Zusammenhang kann die Gasverdünnung über eine einfache Anpassung des Reibwertes abgebildet werden. Die dafür notwendigen  $G_P$ -Werte sind in [85] für  $\delta < 20$  protokolliert. Für den Bereich der Schlupfströmung ( $\delta > 20$ ) können die vereinfachten Navier Stokes-Gleichungen (Gl. 4.3) mit Geschwindigkeitsschlupfbedingung gelöst werden, die Lösung für den ebenen Spalt lautet [85]:

$$G_p = \frac{\delta}{6} + \beta_P \quad \text{mit} \quad \beta_P = 1.018 \quad (7.16)$$

Die damit bestimmten Poiseuille-Werte sind in Abb. 7.1 über alle Strömungsbereiche aufgetragen. Für viskose Strömung verschwindet der Geschwindigkeitsschlupf an der Wand und  $c$  läuft gegen den aus der viskosen, laminaren, inkompressiblen Strömung berechneten Wert von  $c = 96$  (siehe Gl. 4.15).

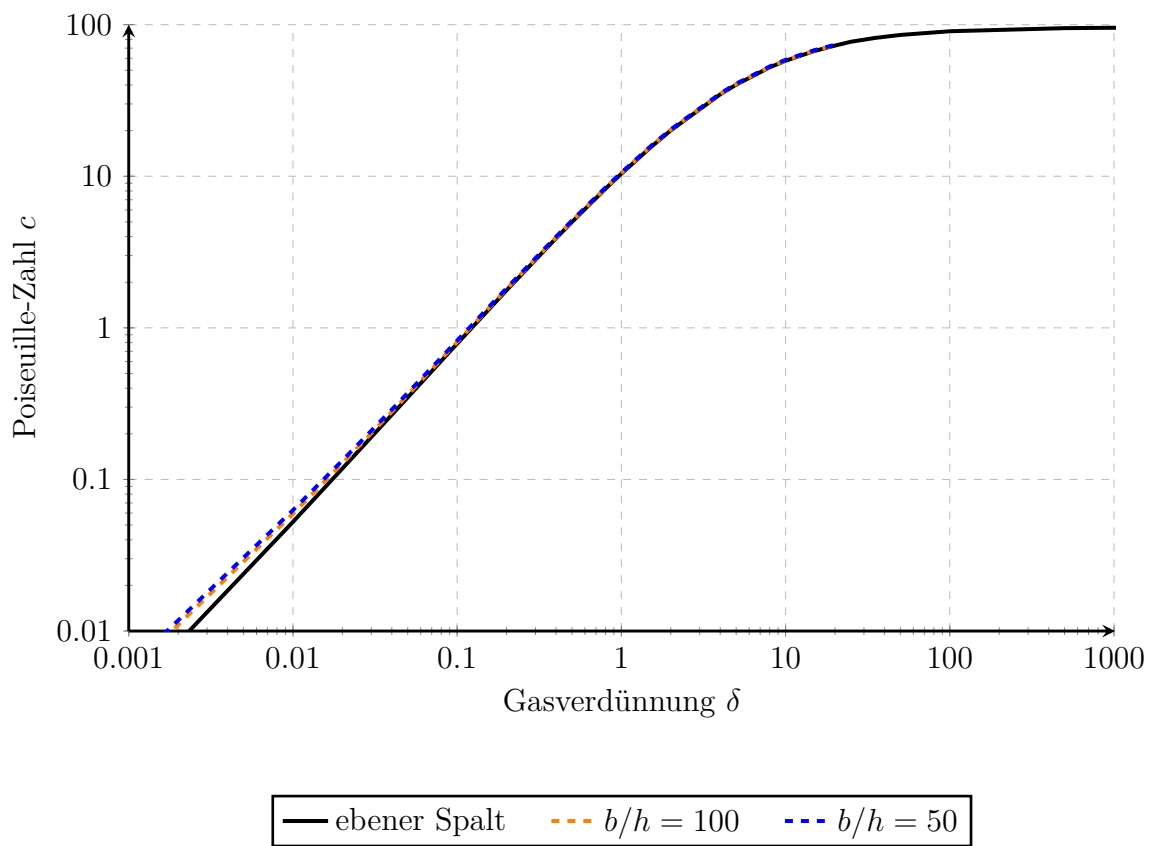


Abb. 7.1: Poiseuille- Wert in Abhängigkeit der Gasverdünnung und unterschiedlicher Streckungsverhältnisse

### 7.3 Modellierung der Wärmeübertragung

Die Berechnung der Wärmeübertragung im Spalt erfolgt analog zur Abbildung der Reibwerte unter der Annahme, dass die Einlaufeffekte und die Kompressibilität mit guter Näherung vernachlässigt werden dürfen. Damit reduziert sich das Problem auf die eindimensionale Wärmeleitung in einem verdünnten Gas zwischen zwei ebenen Platten mit unterschiedlicher Temperatur.

Diese wird von Sharipov in [87] auf Basis einer geeigneten linearisierten Boltzmann-Gleichung mit dem S-Modell für den Stoßterm untersucht. Die Verteilungsfunktion wird dazu unter Annahme kleiner Temperaturdifferenzen  $\Delta T = T_{Rot} - T_{Geh}$  wie folgt beschrieben:

$$f = f_M \left[ 1 + h(y, \vec{\xi}) \frac{\Delta T}{T_0} \right] \quad (7.17)$$

$T_0$  bezeichnet hierin die mittlere Gastemperatur  $(T_{Rot} + T_{Geh})/2$ . Damit folgt analog zu Gl. 7.7 die linearisierte Boltzmann-Gleichung für die Störfunktion  $h(y, \vec{\xi})$ , die wiederum über die Methode der diskreten Geschwindigkeiten gelöst werden kann. Als Randbedingung wird die diffuse Wandreflexion angesetzt. Der resultierende Wärmestrom folgt aus der entsprechenden Momentengleichung und wird in dimensionsloser Form angegeben [86], [87]:

$$\bar{q}(\delta) = \frac{q}{q_{mol}} = \frac{q}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot p c_w \frac{\Delta T}{T_0}} = \frac{1}{\pi} \int e^{-\vec{\xi}^2} \cdot h \cdot \bar{\xi}^2 \cdot \bar{\xi}_y \cdot d\vec{\xi} \quad (7.18)$$

Als Referenzgröße dient der Wärmestrom der rein molekularen Strömung, d.h. es gilt  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{q} = 1$ . Die von Sharipov numerisch bestimmten Werte für  $\delta < 15$  sind in [87] angegeben.

Für den Bereich der Schlupfströmung kann die Energieerhaltungsgleichung mit geeigneten Sprungrandbedingungen gelöst werden:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (7.19)$$

$$T(y) = T_0 \mp \left( \frac{\Delta T}{2} + \zeta_T \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi}} l_f \frac{dT}{dy} \right) \quad \text{bei} \quad y = \pm \frac{h}{2} \quad (7.20)$$

Die Konstante  $\zeta_T$  ist der Koeffizient des Temperatursprungs an der Wand, für den Sharipov einen Wert von  $\zeta_T = 1.954$  empfiehlt. Der Wärmestrom in der Schlupfströmung bestimmt sich aus dem Temperaturgradienten an der Wand, der mit zunehmender Gasverdünnung kleiner wird und den Wärmestrom reduziert. Die analytische Lösung (bezogen auf den Wärmestrom der rein molekularen Strömung) lautet [86]:

$$\bar{q}(\delta) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8\delta} \left( 1 + \frac{2\zeta_T}{\delta} \right)^{-1} \quad (7.21)$$

Die hieraus berechneten Werte für  $\bar{q}$  stimmen für  $\delta > 15$  mit den numerisch aus der linearisierten Boltzmann-Gleichung erhaltenen Werten überein.

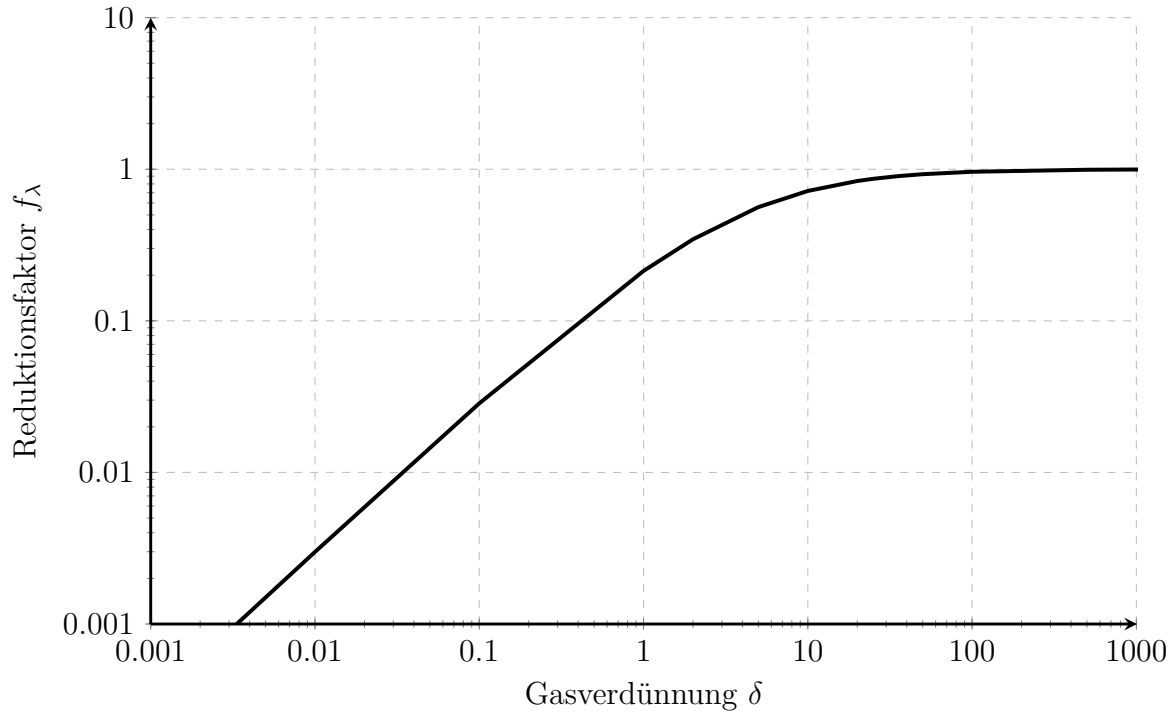


Abb. 7.2: Reduktionsfaktor für die Wärmeleitfähigkeit des Gases als Funktion der Gasverdünnung

Für die Anwendung der Lösung in Kap. 8 ist die dimensionslose Darstellung bezogen auf den rein molekularen Wärmestrom ungünstig; ein von der Gasverdünnung abhängiger Reduktionsfaktor für die effektive Wärmeleitfähigkeit des Gases  $f_\lambda(\delta)$  erweist sich als geeigneter:

$$f_\lambda(\delta) = \frac{q}{q_{viskos}} = \frac{\bar{q}(\delta) \cdot q_{mol}}{\lambda \cdot \frac{\Delta T}{h}} \quad (7.22)$$

Durch Einsetzen der Beziehung für den viskosen Wärmestrom (Gl. 7.21 mit  $\delta \rightarrow \infty$ ) folgt für den Reduktionsfaktor:

$$f_\lambda(\delta) = \bar{q}(\delta) \cdot \frac{8 \cdot \delta}{15 \cdot \sqrt{\pi}} \quad (7.23)$$

Der aus der Schlupfströmung (Gl. 7.21) bzw. aus den numerisch bestimmten Werten (für  $\delta < 15$ ) berechnete Reduktionsfaktor ist in Abb. 7.2 aufgetragen. Für  $\delta > 100$  ist der Temperatursprung an den Wänden praktisch vernachlässigbar und es steht die volle Wärmeleitfähigkeit zur Verfügung ( $f_\lambda(\delta \rightarrow \infty) = 1$ ); für kleinere Verdünnungsfaktoren wird die effektive Wärmeleitfähigkeit des Gases entsprechend reduziert.





# Kapitel 8

## Berechnung von Spaltströmungen

### 8.1 Berechnungskonzept

Mit den dimensionslosen Ergebnissen aus den Kap. 4 - 7 kann für gegebene Spaltgeometrie und Randbedingungen der dimensionsbehaftete Verlauf der mittleren Strömungsgrößen berechnet werden. Damit ist es möglich, die integralen Spaltströmungsgrößen wie Spaltmassenstrom und Wärmebilanzen zu bestimmen, was den Einsatz in einer Kammermodellsimulation erlaubt. Der dafür benötigte Algorithmus wird in diesem Kapitel vorgestellt.

Zur Herleitung der Berechnungsgleichungen wird das in Abb. 8.1 skizzierte infinitesimal breite Kontrollvolumen betrachtet, das sich an einer beliebigen Stelle innerhalb des Spaltes befindet. Im Allgemeinen ändern sich die mittleren Strömungsgrößen Dichte, Druck, Geschwindigkeit und Temperatur über dem Kontrollvolumen, so dass zur allgemeinen Beschreibung der Spaltströmung die Änderung dieser Größen durch geeignete Gesetze bestimmt werden muss. Unter den mittleren Größen werden dabei die Mittelwerte über der Spalthöhe nach Kap. 6 verstanden. Die Berechnung dieser Größen kann durch Anwendung der Erhaltungssätze für Masse, Impuls, Energie und eines Stoffgesetzes auf das Kontrollvolumen erfolgen:

- **Stoffgesetz:** Als Materialgesetz wird die ideale Gasgleichung verwendet:

$$p = \rho \cdot R_s \cdot T \quad (8.1)$$

Durch Differenzieren ergeben sich die Änderungen der Zustandsgrößen:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (8.2)$$

Ferner werden konstante Werte für die spez. Wärmekapazität, Wärmeleitfähigkeit und Viskosität angenommen.

- **Massenerhaltung:** Für stationäre Strömungen muss die ein- und ausströmende Masse in das Kontrollvolumen gleich sein, d.h.:

$$\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A = \text{const.} \quad (8.3)$$

In differentieller Form lautet diese Gleichung für Spalte mit konstantem Querschnitt:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{u^2} = 0 \quad (8.4)$$

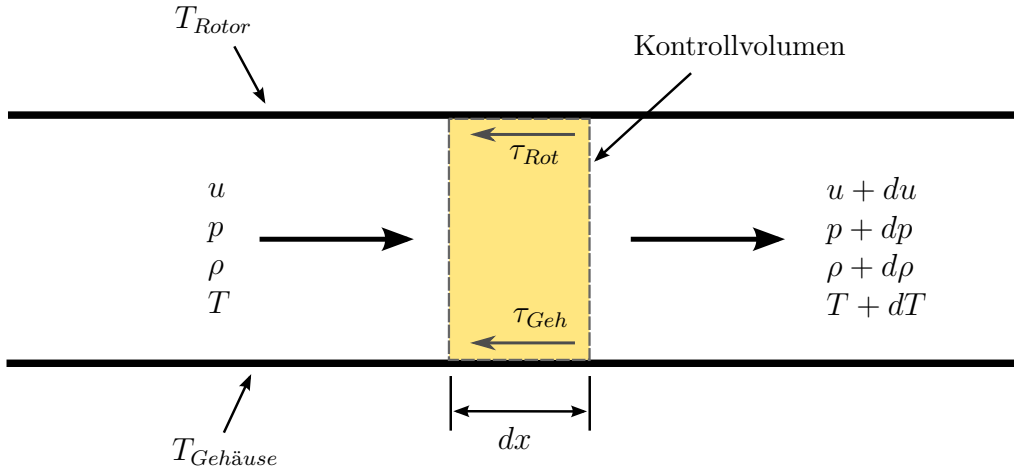


Abb. 8.1: Kontrollvolumen im Spalt für kompressible Strömung

- **Impulserhaltung:** Die Ableitung des Impulssatzes für ein beliebiges Kontrollvolumen erfolgte bereits in Kap. 6, das Ergebnis lautet:

$$-dp - f_{app} \cdot \frac{dx}{D_h} \cdot \frac{\rho u^2}{2} = K_D \cdot \rho \cdot u^2 \cdot \frac{du}{u} \quad (8.5)$$

Zur Vereinfachung wird die Machzahl  $M^2 = u^2/(\kappa R_s T)$  verwendet, so dass unter Berücksichtigung der Beziehung  $\rho u^2 = \kappa p M^2$  die Impulsgleichung umgeschrieben werden kann:

$$\frac{dp}{p} + \frac{\kappa M^2}{2} \cdot f_{app} \cdot \frac{dx}{D_h} + K_D \cdot \frac{\kappa M^2}{2} \cdot \frac{du^2}{u^2} = 0 \quad (8.6)$$

- **Energieerhaltung:** Bei kompressiblen Strömungen mit Wärmeübertragung ändert sich die Ruhetemperatur des Gases. Durch Differenzieren von Gl. 6.1 folgt die Energieerhaltungsgleichung:

$$c_p \cdot dT + d\left(\frac{u^2}{2}\right) = c_p \cdot dT_0 \quad (8.7)$$

Mit der Definition der Mach-Zahl und der Ruhetemperatur kann die Gleichung umgeformt werden (siehe [82]):

$$\frac{dT}{T} + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \cdot \frac{du^2}{u^2} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2\right) \cdot \frac{dT_0}{T_0} \quad (8.8)$$

Diese Grundgleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $dp/p$ ,  $d\rho/\rho$ ,  $dT/T$ ,  $du^2/u^2$  und  $dT_0/T_0$ . Für die Berechnung der Änderung der Ruhetemperatur muss zusätzlich zu den oben aufgeführten Gleichungen ein Wärmeübergangsmodell bereitgestellt werden. In der hier untersuchten Strömung geschieht dies durch die inkompressible Ersatzströmung nach Kap. 6.3.

Die Lösung dieser Gleichungen folgt dem Vorgehen von Shapiro [82]<sup>1</sup>. Für die weiteren Rechnungen erweist sich die Darstellung über die Variable  $dM^2/M^2$  als günstig, die nach der Definition der Machzahl die Änderung der Geschwindigkeit und der Temperatur beinhaltet:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad (8.9)$$

In dieser Darstellung lautet die Lösung der Gleichungen 8.2, 8.4, 8.6 und 8.8:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{\kappa M^2 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)}{1 - M^2 - \kappa M^2 (K_D - 1)} \cdot f_{app} \cdot \frac{dx}{D_h} + \frac{(1 + \kappa \cdot M^2) \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0} \quad (8.10)$$

Der erste Term auf der linken Seite beschreibt die Änderung der Mach-Zahl durch die Wandreibung, der zweite die Änderung infolge der Wärmeübertragung. Die lokale Änderung der Ruhetemperatur kann mittels der Energiebilanz für das Gas aus den Wandwärmeströmen nach Gl. 5.8 und 5.9 bestimmt werden:

$$dT_0 = - \frac{(q_{Rot}(x) + q_{Geh}(x)) \cdot dx}{\dot{m}/b \cdot c_p} \quad (8.11)$$

Durch Einsetzen und Umformen folgt die zu lösende Differentialgleichung für den Machzahlverlauf  $M(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{dx} = & \frac{\kappa M^4 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)}{1 - M^2 - \kappa M^2 (K_D - 1)} \cdot \frac{f_{app}}{D_h} \\ & + \frac{M^2 \cdot (1 + \kappa \cdot M^2) \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)}{1 - M^2} \cdot \frac{-(q_{Rot}(x) + q_{Geh}(x))}{\dot{m}/b \cdot c_p \cdot T_0} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist im Allgemeinen nur numerisch möglich; lediglich für den Sonderfall einer adiabaten Strömung ( $dT_0/T_0 = 0$ ) ist die analytische Lösung bekannt und in [82] angegeben. Die Erläuterung des hier gewählten Lösungsverfahrens für vorgegebene Druck- und Temperaturrandbedingungen erfolgt im nächsten Abschnitt.

---

<sup>1</sup>Hinweis: Shapiro behandelt die Strömung als eindimensional mit einem Rechteckprofil für die Geschwindigkeitsverteilung, d.h.  $K_D = 1$ . Für die turbulente Strömung ist dies eine gute Annahme, für die laminare Strömung ist  $K_D$  jedoch deutlich von 1 verschieden, so dass die tatsächliche Form des Geschwindigkeitsprofils für den Impulsfluss berücksichtigt werden muss.

Mit dem bekannten Verlauf von  $M(x)$  können die Verläufe von  $p(x)$ ,  $T(x)$ ,  $u(x)$  und  $\rho(x)$  bestimmt werden, die benötigten Gleichungen werden ebenfalls von Shapiro [82] angegeben:

$$p(x) = p_{in} \cdot \frac{M_{in}}{M(x)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{in}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M(x)^2}} \sqrt{\frac{T_0(x)}{T_{0,1}}} \quad (8.13)$$

$$T(x) = T_{in} \cdot \frac{T_0(x)}{T_{0,1}} \cdot \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{in}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M(x)^2} \quad (8.14)$$

$$u(x) = u_{in} \cdot \frac{M(x)}{M_{in}} \cdot \sqrt{\frac{T(x)}{T_{in}}} \quad (8.15)$$

$$\rho(x) = \rho_{in} \cdot \frac{p(x)}{p_{in}} \cdot \frac{T_{in}}{T(x)} \quad (8.16)$$

Die mit dem Index "in" gekennzeichnete Größe bezieht sich darin auf den Zustand im Spalteintritt. Mit den bekannten, dimensionsbehafteten Verläufen können nachfolgend die gesuchten Größen Spaltmassenstrom (Gl. 8.3) und die Gesamtwärmeströme für Rotor und Gehäuse durch Integration von Gl.6.21 bestimmt werden.

Abschließend wird die Frage betrachtet, ob die Mach-Zahl Werte größer 1 erreichen kann. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Einströmung in den Spalt subsonisch erfolgt, d.h.  $M_{in} < 1$ . Die Änderung der Machzahl im Spalt (beschrieben durch Gl. 8.12) erfolgt durch den Einfluss der Wandreibung und der Wärmeübertragung, die beide gesondert untersucht werden:

- Der Reibwert  $f_{app}$  ist (mit Ausnahme der Ablöseblase) stets positiv, der Zähler des ersten Terms ist damit ebenfalls größer Null. Der Nenner des Reibungsterms weist eine Nullstelle bei der Machzahl  $M_f^*$  auf:

$$M_f^* = \sqrt{\frac{1}{1 + \kappa(K_D - 1)}} \quad (8.17)$$

Für laminare Strömung von Luft ( $\kappa = 1.4$ ,  $K_D = 1.2$ ) beträgt die kritische Machzahl  $M_f^* = 0.884$ , für turbulente Strömung mit  $K_D = 1.07$  ist  $M_f^* = 0.954$ . Für Machzahlen kleiner  $M_f^*$  führt die Reibung also zu einer Erhöhung der Machzahl im Spaltverlauf, für Machzahl größer  $M_f^*$  zu einer Abnahme von  $M$ . Eine subsonische, adiabate Strömung kann damit im Durchströmungsverlauf nicht in den Überschallbereich wechseln, da bei Erreichen der kritischen Mach-Zahl die Strömung durch die Reibung wieder verzögert wird.

- Der Nenner des Ruhetemperaturänderungsterms (zweiter Term auf der rechten Seite von Gl. 8.12) hat eine Nullstelle bei  $M^* = 1$ . Für  $M < 1$  führt eine Erhöhung der Ruhetemperatur zu einer Erhöhung der Machzahl, für  $M > 1$  entsprechend zu einer Verringerung der Machzahl. Für eine Absenkung der Ruhetemperatur gelten umgekehrte Aussagen.

Durch den Einfluss der Wärmeübertragung ist damit prinzipiell eine Überschallströmung in einem Spalt mit konstantem Querschnitt möglich. Dazu muss die Strömung

bei Erreichen von  $M = 1$  stark abgekühlt werden, um eine Absenkung der Ruhetemperatur zu bewirken und die Strömung in den Überschallbereich zu beschleunigen. Dieser Effekt wurde experimentell von Shapiro [82] in Rohren mit konstantem Querschnitt nachgewiesen, in die zur Abkühlung des Gases Wassertröpfchen injiziert wurden, um mit der folgenden Verdampfung die notwendige Abkühlung zu erreichen. Ein ähnlicher Effekt ist bei extremer Konstellation von Gaseintrittstemperatur und Wandtemperatur prinzipiell in einer Spaltströmung denkbar, was in der Rechnung geprüft werden muss. Im Normalfall ist jedoch davon auszugehen, dass die thermischen Effekte einen Umschlag zur supersonischen Strömung nicht erlauben und die Strömung maximal  $M_f^*$  am Spaltaustritt erreicht.

## 8.2 Lösungsverfahren

Zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung 8.12 unter Berücksichtigung der in Kap. 1.6 geforderten Randbedingungen müssen folgende Daten vorgegeben werden:

- **Spaltgeometrie:** Spalthöhe  $h$  und Spalttiefe  $L$
- **Strömungsrandbedingungen:** Ruhedruck  $p_{0,1}$  und Ruhetemperatur  $T_{0,1}$  vor dem Spalt, Ruhedruck  $p_{0,2}$  hinter dem Spalt, Rotor- und Gehäusetemperatur.
- **Gasdaten:** Molare Masse  $M_{mol}$ , Isentropenexponent  $\kappa$ , Viskosität  $\eta$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und Wärmekapazität  $c_p$ , wobei für die temperaturabhängigen Größen ein geeigneter Mittelwert anzugeben ist.

Die Berechnung der Spaltströmung unter Einhaltung der gewünschten Randbedingungen erfolgt aufgrund der Nichtlinearität der Gleichungen iterativ in mehreren Schritten:

1. Zuerst muss aus den Ruhegrößen vor dem Spalt der Eintrittszustand am Spalt bestimmt werden, was nach den Gl. 6.12 und 5.4, 6.14 für Druck und Temperatur erfolgt. Dazu wird die Eintrittsmachzahl  $M_{in}$  benötigt, die jedoch noch unbekannt ist und im ersten Schritt geschätzt werden muss.
2. Mit den Eintrittsgrößen  $M_{in}$ ,  $p_{in}$  und  $T_{in}$  kann die Eintrittsdichte (aus Gl. 8.1) und Eintrittsgeschwindigkeit (Gl. 6.4) bestimmt werden, womit die Re-Zahl der Strömung festliegt (Gl. 1.5).
3. Zur späteren numerischen Integration wird eine Stützstellenverteilung  $x_i$  im Spalt festgelegt. Um die Einlaufeffekte im Spalteintritt und die (je nach Druckverhältnis) auftretende Strömungsbeschleunigung zum Spaltaustritt hin genau zu erfassen, sollten diese Bereiche besonders fein aufgelöst werden.
4. Die Reibwertverteilung  $f_{app}(x, Re, \delta)$  kann mit der bekannten Re-Zahl berechnet werden (siehe Kap. 6.2). Der dafür benötigte Machzahl- und Verdünnungsfaktorverlauf (für Gl. 6.11 und 7.15) wird aus der vorigen Iterationsschleife übernommen. Für den ersten Durchlauf ist für diese Größen eine geeignete Schätzung erforderlich.

5. Weiterhin kann mit der Re- Zahl der Ruhetemperaturverlauf  $T_0(x)$  über die inkompressible Ersatzströmung berechnet werden (6.3). Die dafür ebenfalls benötigten Verläufe von  $M(x)$  und  $f_\lambda(x, \delta)$  werden wieder aus dem vorherigen Durchlauf übernommen.
6. Mit den bekannten Größen  $M_{in}$ ,  $f_{app}(x)$  und  $T_0(x)$  kann Gl. 8.12 integriert werden. Es handelt sich dabei um eine gewöhnliche Differentialgleichung mit bekanntem Anfangswert  $M(0) = M_{in}$ . Für diesen Typ stehen verschiedene numerische Integrationsmethoden zur Verfügung, wobei hier das Verfahren von Runge- Kutta mit vierter Ordnung zum Einsatz kommt. Dies ist in der Literatur (z.B. [18]) ausführlich dargelegt, so dass eine Beschreibung an dieser Stelle ausgelassen wird.  
 Als problematisch erweist sich der Umstand, dass bei Erreichen von  $M(x) = M_f^*$  der erste Integrand unbestimmt wird. Um dieses Problem zu umgehen, wird daher bei  $M(x) > M_f^* - 0.01$  die Integration abgebrochen und geprüft, ob die möglicherweise vorhandene Abkühlung des Gases ausreicht, um die Machzahl auf Werte über  $M_f^*$  zu erhöhen. In diesem Sonderfall kann die Integration bei  $x_{i+1}$  fortgesetzt werden. Im Normalfall wird die Ruhetemperaturabsenkung zu gering sein, so dass die Strömung nicht über  $M_f^*$  beschleunigt wird und die Integration an dieser Stelle abgebrochen werden muss. Die Eintrittsmachzahl ist in diesem Fall zu hoch angesetzt worden und muss verringert werden. Zur Schätzung einer neuen geeigneten Machzahl  $M_{in,n+1}$  wird im nächsten Schritt die aktuelle Eintrittsmachzahl  $M_{in}$  als obere Grenze verwendet.
7. Bei erfolgreicher Integration ist die Machzahl  $M_2$  am Spaltaustritt bekannt, so dass aus Gl. 8.13 der Druck am Spaltaustritt bestimmt werden kann. Ist die Austrittsmachzahl kleiner als  $M_f^*$ , so sollte der Druck am Spaltaustritt  $p_2$  dem Ruhedruck  $p_{0,2}$  entsprechen. Dies wird im Allgemeinen nicht der Fall sein, so dass die Eintrittsmachzahl  $M_{in}$  angepasst und die Rechnung wiederholt werden muss. Die Anpassung der Eintrittsmachzahl erfolgt nach einem einfachen Intervallhalbierungsverfahren:

- Ist der Druck  $p_2$  am Spaltaustritt zu hoch, ist die Machzahl  $M_{in}$  zu klein und wird als neue untere Grenze gesetzt ( $M_{min} = M_{in}$ ).
- Falls der Druck  $p_2$  kleiner als  $p_{0,2}$  ist, ist die Machzahl  $M_{in}$  zu groß und bildet eine obere Grenze des Suchgebietes: ( $M_{max} = M_{in}$ )

Als neue Schätzung für die Machzahl am Spalteintritt wird der Mittelwert des Suchintervalls  $[M_{min}, M_{max}]$  verwendet:

$$M_{in,n+1} = \frac{M_{min} + M_{max}}{2} \quad (8.18)$$

Sollte am Spaltaustritt die maximale Machzahl  $M(x) = M_f^* - 0.01$  erreicht werden und der Druck  $p_2$  größer als der Ruhedruck hinter dem Spalt sein, verblockt die Strömung und ein weiteres Absenken von  $p_2$  ist nicht möglich. Die Spaltströmung tritt in diesem Fall mit dem Druck  $p_2$  aus dem Spalt aus und expandiert erst hinter dem Spalt auf den Umgebungsdruck  $p_{0,2}$ .

8. Abschließend wird geprüft, ob (bei erfolgreicher Integration) die Druckrandbedingung am Austritt hinreichend genau erfüllt ist. Dazu wird gefordert, dass die Abweichung des Spaltaustrittsdrucks  $p_2$  vom Druck  $p_{0,2}$  kleiner ist 0.1%:

$$\frac{|p_2 - p_{0,2}|}{p_{0,2}} < 0.001 \quad (8.19)$$

Solange diese Bedingung nicht erfüllt ist, muss die Rechnung ab Schritt 1 mit der neuen Eintrittsmachzahl  $M_{in,n+1}$  wiederholt werden.

Für den Sonderfall der verblockten Strömung am Spaltaustritt ( $M(x) > M_f^* - 0.01$ ) kann diese Bedingung nicht eingehalten werden. Die Eintrittsmachzahl  $M_1^n$  ist dann die physikalisch sinnvolle Lösung für die gegebenen Bedingungen und die Iteration kann abgebrochen werden.

9. Ist die Rechnung nach den oben erläuterten Kriterien konvergiert, so können mit bekanntem Machzahlverlauf  $M(x)$  die Verläufe der Zustandsgrößen nach Gl. 8.13 - 8.16 bestimmt werden. Der Spaltmassenstrom ist aus Schritt 2 bekannt, als weitere integrale Größen können die Gesamtwärmeströme in den Rotor und das Gehäuse durch Integration von Gl. 6.21 bestimmt werden.

Dieses Verfahren ermöglicht die effiziente Berechnung der Spaltmassenströme und Wärmebilanzen für Spalte in Schraubenvakuumpumpen und eignet sich damit für den Einsatz in einer Kammermodellsimulation.

## 8.3 Ergebnisse

Um die Gültigkeit des Algorithmus zu zeigen, wird dieser zunächst gegen mit Fluent numerische bestimmte Werte im viskosen Strömungsbereich bzw. gegen den Ansatz von Sharipov (Gl. 1.21) für verdünnte Strömungen validiert. Als Testfall dient ein kurzer Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $L = 10$  mm, bei dem Einlaufeffekte über weite Re-Zahlbereiche eine deutliche Rolle spielen. Das Druckverhältnis wird auf  $\Pi = p_{0,2}/p_{0,1} = 0.5$  gesetzt, so dass ein signifikanter Anstieg der Machzahl zum Spaltaustritt hin zu erwarten ist. Als thermische Randbedingung werden  $T_{Rot} = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 50^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} = 200^\circ\text{C}$  gewählt, um einen merklichen Einfluss der Wärmeübertragung zu erreichen. Als Parameter dient der Ruhedruck  $p_{0,1}$  vor dem Spalt, der zwischen 2000 mbar und 0.01 mbar variiert wird.

Der Verlauf der Machzahl ist in Abb. 8.2 (oben) für  $p_{0,1} = 1000$  mbar und  $p_{0,1} = 50$  mbar dargestellt. Bezogen auf den Austrittszustand des Gases beträgt die Gasverdünnung im zweiten Fall  $\delta_2 = 65$ , so dass der Geschwindigkeitsschlupf an den Wänden noch gering ausfällt (siehe Abb. 7.1) und der Vergleich mit der viskosen Fluent-Rechnung zulässig ist. Die Machzahlverläufe zeigen nur sehr geringe Unterschiede zwischen dem oben vorgestellten Algorithmus und der kompletten numerischen Lösung der Erhaltungsgleichungen, die auf Interpolationsungenauigkeiten zurückzuführen sind.

Ähnlich gute Übereinstimmung wird auch für den Verlauf der Wärmeströme in den Rotor erzielt, die in dimensionsloser Form nach Gl. 6.22 in Abb. 8.2 dargestellt sind. Gleiches gilt für die Wärmeströme in das Gehäuse und die Gastemperatur (nicht dargestellt), was die Gültigkeit der Wärmeübertragungsmodellierung belegt.

Deutlich zu erkennen ist der Einfluss niedriger Drücke (gekennzeichnet durch niedrige Re- Zahlen) auf die Verläufe: Die Reibwerte nehmen stark zu, wodurch sich geringere Machzahlen bei gleichem Druckverhältnis ergeben als bei hohen Drücken. Weiterhin wird die thermische Einlaufänge kurz, so dass sich in einem Großteil des Spalts nahezu konstante Wandwärmeströme einstellen.



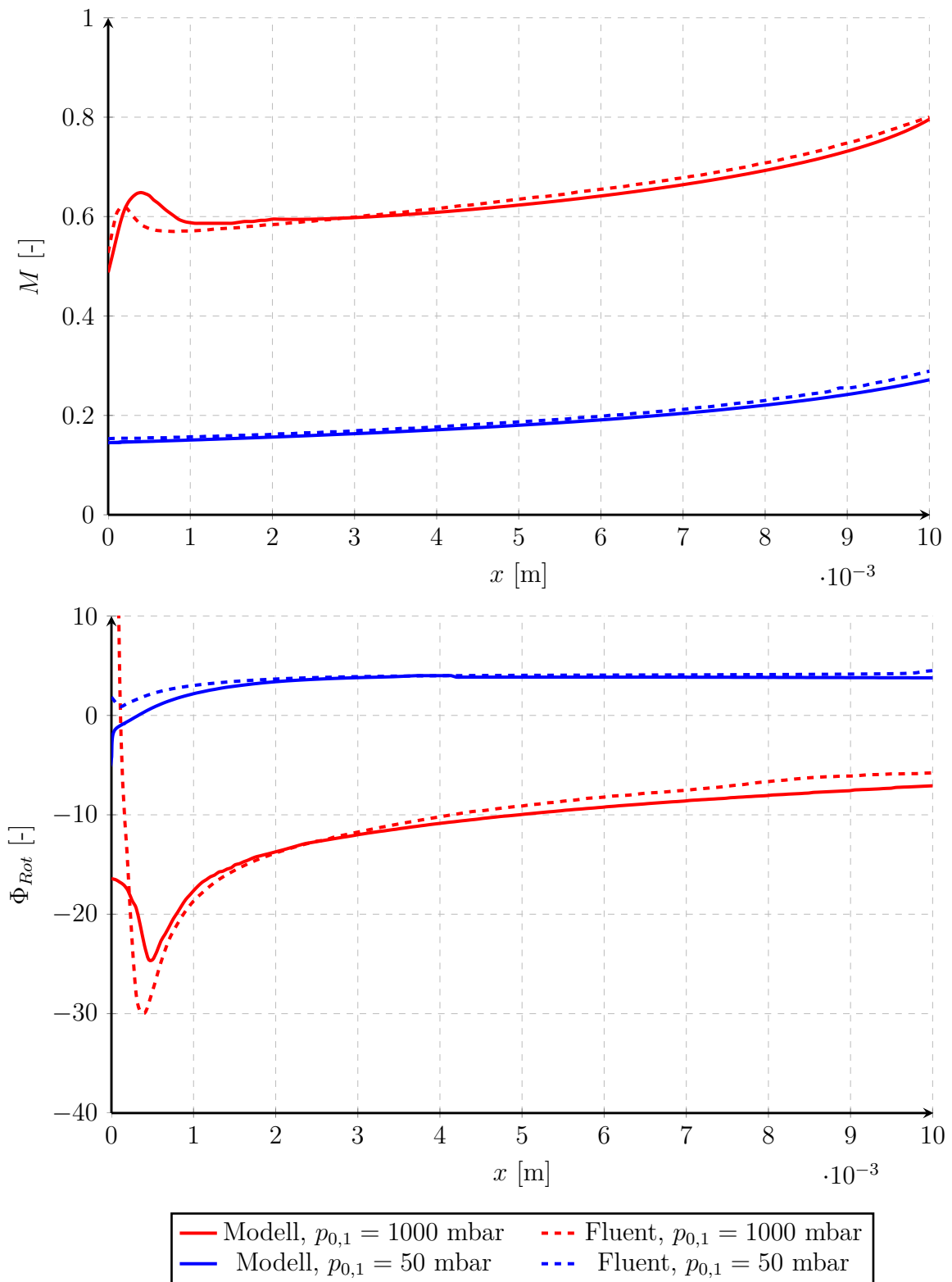


Abb. 8.2: Machzahl- und Wärmestromverlauf (für den Rotor). Die Ergebnisse gelten für einen kurzen Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $L = 10$  mm,  $\Pi = 0.5$ ,  $T_{Rot} = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_{0,1} = 200^\circ\text{C}$  und Luft als Gasart.

Zur weiteren Validierung wird der Spaltmassenstrom betrachtet, der in dimensionsloser Darstellung aufgetragen wird. Als Bezugsgröße dafür wird der Massenstrom durch eine molekular durchströmte Blende ohne Gegendruck (d.h.  $p_{0,2} = 0$ ) mit der Querschnittsfläche  $A = b \cdot h$  verwendet. Dieser sog. "Effusionsmassenstrom" berechnet sich nach [40] zu:

$$\dot{m}_{eff} = \frac{c_m}{4} \cdot \rho_1 \cdot b \cdot h \quad (8.20)$$

Der Effusionsmassenstrom ist somit direkt proportional zur Dichte vor dem Spalt und zur Spaltquerschnittsfläche. Durch die im Folgenden verwendete Darstellung der Ergebnisse als  $\dot{m}/\dot{m}_{eff}$  wird der Einfluss unterschiedlicher Spalthöhen und Ruhedichten  $\rho_1$  herausgerechnet, so dass die Effekte von Reibung und Gasverdünnung sichtbar werden.

In Abb. 8.3 ist der bezogene Spaltmassenstrom über der Gasverdünnung  $\delta_1$  (bezogen auf die Ruhegrößen vor dem Spalt) aufgetragen. Zusätzlich sind die zugehörigen Fluent- Ergebnisse und die Ergebnisse nach Gl. 1.21 dargestellt. Die Ergebnisse des obigen Modells stimmen sehr gut mit den Fluent- Daten bis  $\delta_1 > 100$  überein, Gasverdünnungseffekte machen sich in diesem Bereich erwartungsgemäß noch nicht bemerkbar. Für kleinere Gasverdünnungsfaktoren setzt ein merklicher Geschwindigkeitsschlupf an den Wänden ein, der den Spaltmassenstrom vergrößert, was durch die Fluent- Rechnung bzw. das Modell ohne Berücksichtigung der Verdünnungseffekte (d.h.  $c = 96$  in Gl. 7.10) nicht wiedergegeben wird.

Für  $\delta_1 < 10$  liefern das Reibwertmodell und Gl. 1.21 praktisch das gleiche Ergebnis. Dies ist darauf zurückzuführen, dass aufgrund des großen Reibungseinflusses nur sehr kleine Machzahlen im Spalt erreicht werden und die in Gl. 1.21 nicht enthaltene Gastemperaturänderung infolge der Strömungsbeschleunigung vernachlässigbar ist.

Im Zwischenbereich  $100 > \delta_1 > 10$  spielt dagegen sowohl dieser Kompressibilitätseffekt als auch der einsetzende Schlupf an den Wänden eine signifikante Rolle, was weder die rein viskose Fluent- Rechnung (aufgrund der Haftbedingung an der Wand) noch die Rechnung nach Gl. 1.21 (aufgrund des fehlenden Kompressibilitätseinflusses) korrekt wiedergibt. Dieser Effekt ist vom Druckverhältnis abhängig und tritt bei höheren Werten von  $\Pi$  (d.h. kleineres Druckgefälle über dem Spalt) weniger deutlich in Erscheinung.

Am Verlauf des bezogenen Massenstroms ist deutlich der Einfluss des Gasverdünnungsparameters (und damit auch des Drucks) zu erkennen: Bei großen Werten für  $\delta$  (d.h. viskose Strömung) ist der Spaltmassenstrom vgl. hoch, die Spalte sind relativ "undicht". Mit abnehmendem Gasverdünnungsparameter nimmt aufgrund des zunehmenden Reibungseinflusses der Spaltmassenstrom ab, die Spalte werden also "dichter". Die ab  $\delta_1 \approx 100$  auftretenden Verdünnungseffekte bewirken ein Ansteigen des Spaltmassenstroms im Vergleich zur rein viskosen Betrachtung. Bei  $\delta_1 \approx 1$  tritt das Knudsenminimum auf, danach steigt der bezogene Massenstrom wieder an (siehe auch Abschnitt 1.5).

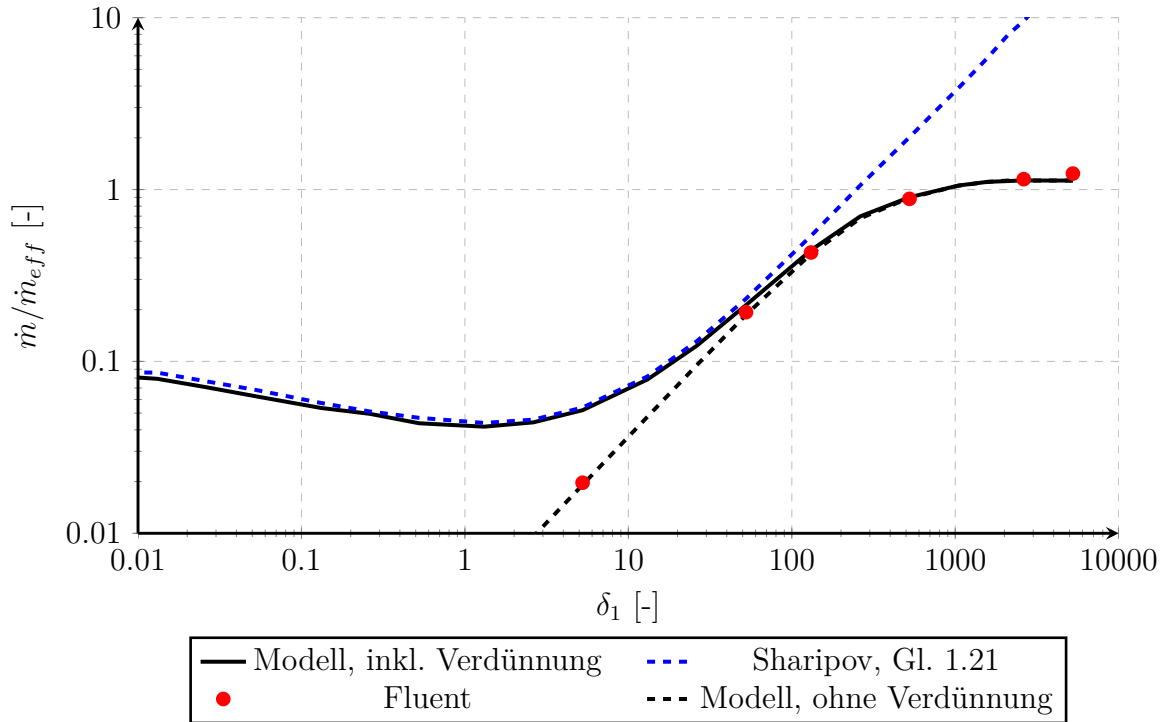


Abb. 8.3: Massenstrom über Gasverdünnung. Die Ergebnisse beziehen sich einen kurzen Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $L = 10$  mm,  $\Pi = 0.5$ ,  $T_{Rot} = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_{0,1} = 200^\circ\text{C}$  und Luft mit den Stoffwerten bei  $100^\circ\text{C}$  als Gasart.

## 8.4 Sensitivität

Abschließend wird der Einfluss der verschiedenen Parameter (Spaltgeometrie, Druckverhältnis, Wärmeübertragung) auf die Spaltströmung anhand einiger Beispielrechnungen untersucht.

Für den Einfluss des Druckverhältnisses wird der kurze Spalt aus dem vorherigen Abschnitt für verschiedene Vordrücke  $p_{0,1}$  und variierende Druckverhältnisse analysiert, die Ergebnisse sind in Abb. 8.4 dargestellt. Im Bereich großer Druckverhältnisse steigen die Spaltmassenströme stark an, die Kurven flachen mit kleiner werdendem Druckgefälle ab, bis bei  $\Pi_{krit}$  die kritische Machzahl  $M_f^*$  am Spaltaustritt erreicht wird und die Strömung verblockt. Ab diesem Punkt wird der maximal mögliche Spaltmassenstrom erreicht, eine weitere Absenkung des Druckverhältnisses führt zu keiner Steigerung mehr. Das kritische Druckverhältnis ist dabei vom Vordruck des Spaltes abhängig, für niedrigere Drücke verschiebt sich dieses zu niedrigeren Werten von  $\Pi$ . Dieser Effekt ist damit zu erklären, dass sich infolge der geringeren Dichte niedrigere Re-Zahlen im Spalt ergeben, d.h. der Einfluss der Reibungskräfte nimmt zu, was gemäß Gl. 8.12 einem schnellen Ansteigen der Machzahl entgegenwirkt. Dadurch wird ein höheres Druckgefälle über dem Spalt benötigt, um die Strömung entgegen der Reibung bis auf  $M_f^*$  zu beschleunigen.

Zusätzlich ist das Ergebnis der inkompressiblen Rechnung nach Gl. 4.32 in Abb. 8.4 aufgeführt. Für Druckverhältnisse nahe  $\Pi = 1$  stimmt das Ergebnis mit dem der kompressiblen Betrachtung überein, für abnehmende Druckverhältnisse wird der Fehler der inkompressiblen Rechnung erwartungsgemäß immer größer. Bemerkens-

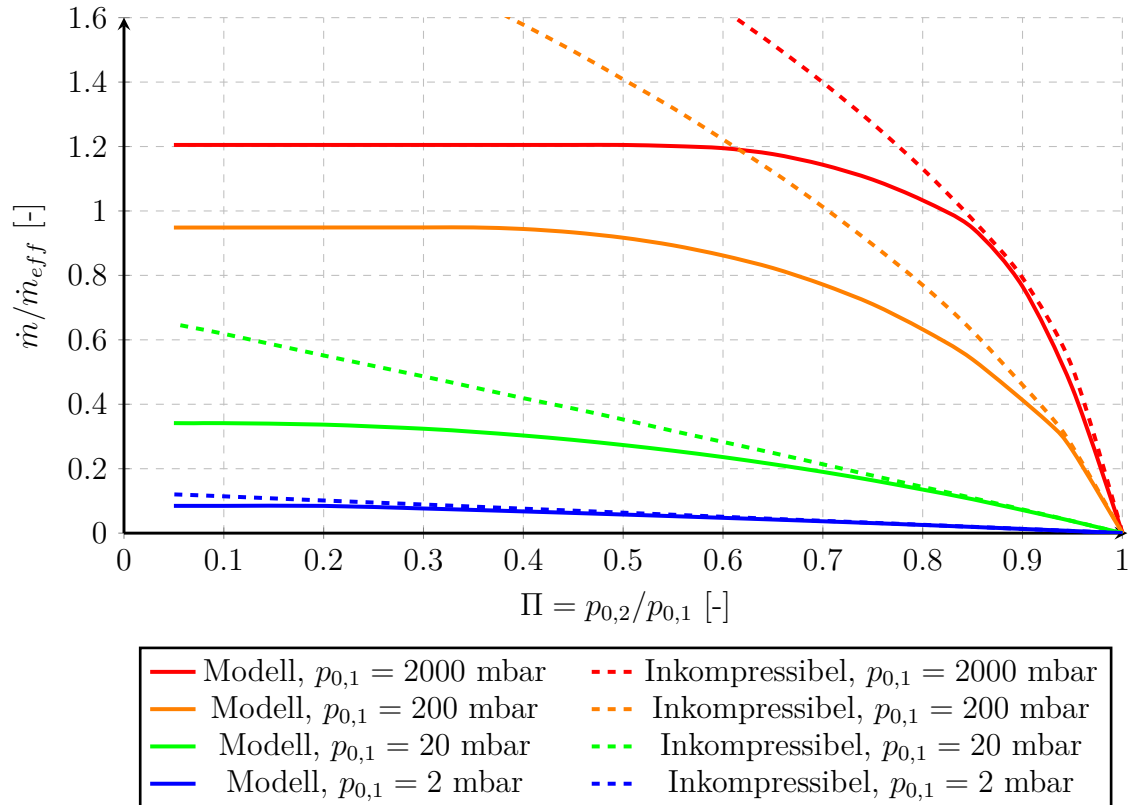


Abb. 8.4: Massenstrom als Funktion des Druckverhältnisses für einen kurzen Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $L = 10$  mm,  $T_{Rot} = T_{Geh} = T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$  und Luft mit den Stoffwerten bei  $20^\circ\text{C}$  [11] als Gasart.

wert ist, dass bei niedrigeren Drücken der Fehler der inkompressiblen Rechnung über weite Bereiche relativ klein ist. Dies ist wieder auf die bei niedrigen Drücken vergleichsweise hohe Reibung zurückzuführen, die selbst bei kleinen Druckverhältnissen nur moderate Machzahlen in der Spaltströmung bewirkt und damit den Einfluss der Kompressibilität abmindert.

In Abb. 8.5 ist der Massenstrom als Funktion der Spalttiefe für die Druckverhältnisse  $\Pi = 0.5$  dargestellt. Durch die vergrößerte Oberfläche mit zunehmender Spalttiefe steigt Reibwirkung an und der Spaltmassenstrom nimmt ab. Bei niedrigeren Drücken fällt dieser Effekt aufgrund der hohen Reibungswerte (niedrige Re-Zahlen) besonders deutlich aus, was zu einer entsprechend starken Abnahme des Spaltmassenstromes führt. Dies ist im zweiten Teil von Abb. 8.5 verdeutlicht, in der der Spaltmassenstrom eines kurzen Spaltes ( $L = 10$  mm) mit dem eines tiefen Spaltes ( $L = 60$  mm) über der Gasverdünnung verglichen ist. Im rein viskosen Bereich ist der Spaltmassenstrom des tiefen Spaltes etwa 74% des kurzen Spaltes; im Knudsen-Minimum bei  $\delta_1 = 1$  sinkt dieses Verhältnis auf etwa 16%, was dem Verhältnis der Spalttiefen entspricht. An diesem Beispiel zeigt sich, dass für hohe Drücke das Druckverhältnis maßgeblich für den Spaltmassenstrom ist und die vergrößerte Reibfläche eine relativ geringe Rolle spielt. In der reibungsdominierten Strömung bei niedrigen Drücken wirkt sich dagegen die Veränderung der Oberfläche praktisch proportional auf den Spaltmassenstrom aus.

Der Einfluss der Spalthöhe auf den Spaltmassenstrom ist in Abb. 8.6 dargestellt. Eine Vergrößerung der Spalthöhe hat im laminaren Strömungsbereich demnach einen stark überproportionalen Einfluss auf den Spaltmassenstrom<sup>2</sup>. Auch hier zeigt sich wieder eine scheinbare “Druckabhängigkeit“ des Verhaltens: Bei niedrigen Drücken haben Spalthöhenänderungen einen sehr viel größeren Einfluss auf den Massenstrom als bei hohen Drücken (siehe unter Bild in Abb. 8.6). Dies lässt sich wieder durch den Einfluss der Re-Zahl erklären, die sich mit abnehmender Spalthöhe ebenfalls verkleinert und folglich der Reibwert ansteigt. Bei hohen Vordrücken und großen Spalthöhen wechselt die Strömung in den turbulenten Bereich, wobei im hier untersuchten Fall der bezogene Spaltmassenstrom konstant wird (siehe  $p_{0,1} = 2000$  mbar,  $\Pi = 0.5$ ). Der Reibungseinfluss geht soweit zurück, dass die Strömung  $M_f^*$  am Spaltaustritt erreicht und verblockt.

Für die Auslegung von Schraubenvakuumpumpen bedeuten diese Ergebnisse, dass insbesondere für die viskos durchströmten Spalte an der Druckseite der Pumpe niedrige Spalthöhen anzustreben sind, um eine gute Dichtigkeit zu erzielen. Die an der Einlassseite mit niedrigem Druck beaufschlagten Spalte reagieren zwar ebenfalls sehr sensibel auf die Spalthöhe, allerdings kann hier durch eine große Spalttiefe ebenfalls ein gute Dichtigkeit erreicht werden.

Abschließend wird der Einfluss der Wärmeübertragung auf die Durchströmung untersucht. Als Testfall dient ein tiefer Spalt, der eine große Oberfläche zur Wärmeübertragung zur Verfügung stellt. Die Ergebnisse in der Abb. 8.7 zeigen den Vergleich der Massenströme für gleiche Temperaturrandbedingungen ( $T_{0,1} = T_{Rot} = T_{Geh} = 20^\circ\text{C}$ ) zu denen mit einer erheblichen Gasaufheizung ( $T_{Rot} = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$ ). Die Stoffwerte Viskosität, Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität wurden für diese Rechnung zunächst unverändert bei den Werten von  $20^\circ\text{C}$  belassen.

Die Variation des Druckverhältnisses über dem Spalt zeigt, dass bei hohen Werten von  $\Pi$  der Spaltmassenstrom mit Gasaufheizung deutlich über dem ohne Aufheizung ( $T_{20}$ -Randbedingung) liegt. Dieser Effekt begründet sich mit der Strömungsbeschleunigung durch Erhöhung der Ruhetemperatur (siehe zweiter Term in Gl. 8.12), die zu einem Ansteigen des Massenstromes führt. Bemerkenswerterweise wird selbst bei  $\Pi = 1$  der Spaltmassenstrom nicht zu Null, da die Aufheizung des Gases alleine einen Spaltmassenstrom verursachen kann. Bei niedrigeren Druckverhältnissen hingegen führt die Gasaufheizung zu einer Abnahme des Spaltmassenstroms. In diesem Fall bewirkt die Erhöhung der Machzahl durch die Aufheizung eine Zunahme der Reibung, die die Transportwirkung der Gasaufheizung überkompensiert und somit den Spaltmassenstrom verringert. Werden die Randbedingungen dagegen so gewählt, dass es zu einer Abkühlung des Gases im Spalt kommt, gelten umgekehrte Aussagen: Der Spaltmassenstrom ist bei hohen Druckverhältnissen kleiner und bei kleinen Druckverhältnissen größer verglichen mit dem Fall gleicher Temperaturen. Weiterhin wird bei  $\Pi = 1$  der Spalt rückwärts durchströmt (von Zustand “2“ nach “1“), erst ab einem Mindestdruckverhältnis übersteigt die Strömungsbeschleunigung durch das Druckgefälle die Strömungsverzögerung durch die Senkung der Ruhetemperatur.

<sup>2</sup>Hinweis: Die Bezugsgröße  $m_{eff}$  steigt gemäß Gl. 8.20 linear mit der Spalthöhe, ein proportionaler Anstieg des Spaltmassenstroms mit der Spalthöhe würde also zu einer horizontalen Geraden in der gewählten Darstellung führen.

Im zweiten Teil von Abb. 8.7 ist der Effekt der Gasaufheizung im Spalt über der Gasverdünnung für die Druckverhältnisse  $\Pi = 0.9$  und  $\Pi = 0.3$  dargestellt, in der das oben erläuterte Verhalten nochmals zu erkennen ist. Die getroffenen Aussagen gelten demnach für den gesamten Verdünnungsbereich, wobei im Bereich  $20 < \delta_1 < 500$  der Unterschied zur Rechnung ohne Aufheizung relativ gering ausfällt.

Weiterhin zeigt das Bild den Einfluss der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte auf den Massenstrom. Dazu wurde die Rechnung mit den Stoffwerten bei  $100^\circ\text{C}$  wiederholt, was der mittleren Ruhetemperatur der voll ausgebildeten Strömung entspricht. Der damit bestimmte Massenstrom weicht zwischen  $2 - 10\%$  vom dem mit den Stoffwerten bei  $20^\circ\text{C}$  ab, der Einfluss der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte ist demnach vergleichsweise gering.

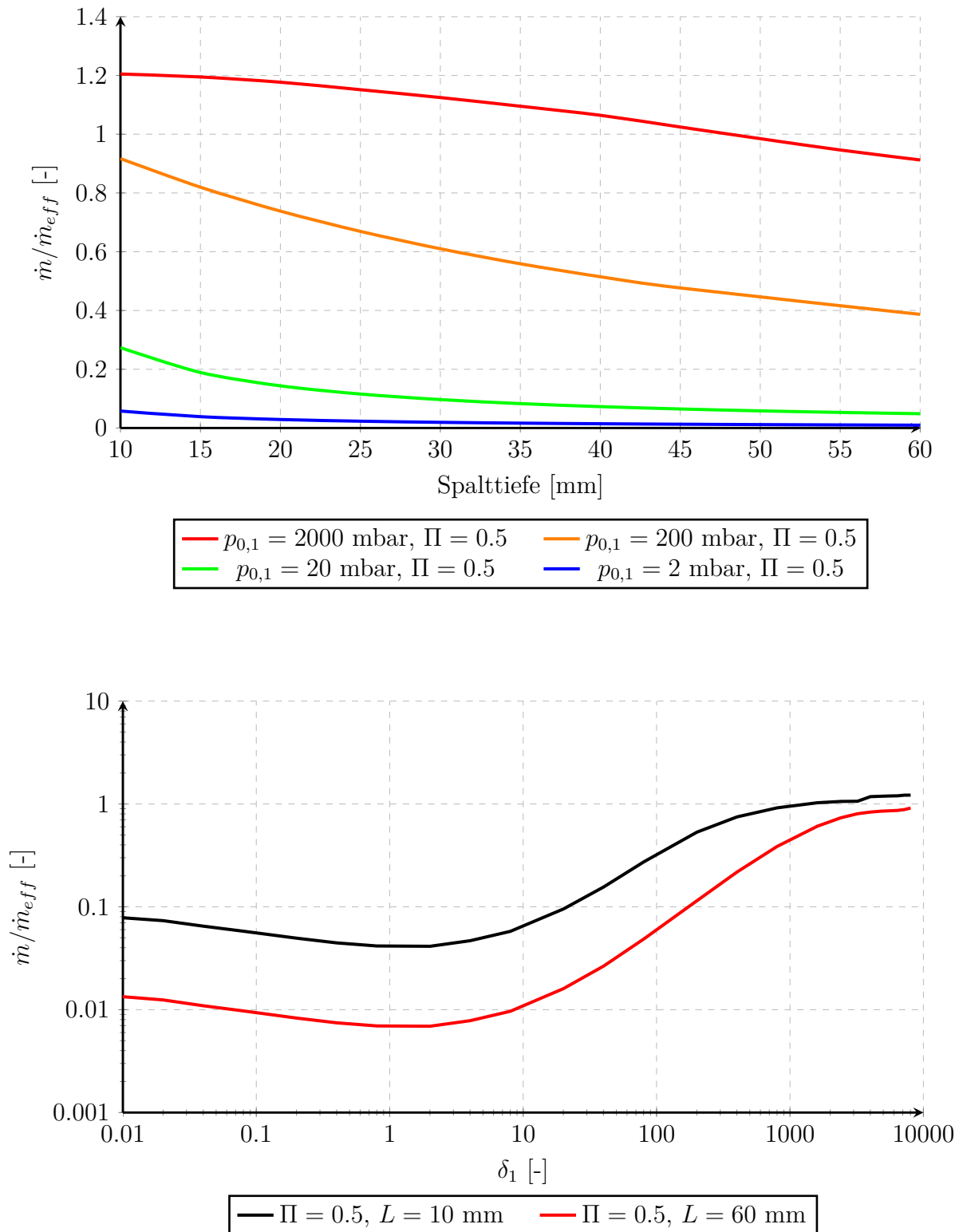


Abb. 8.5: Variation des Spaltmassenstroms mit der Spalttiefe. Als Grundlage dient ein Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $T_{Rot} = T_{Geh} = T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$  und Luft als Gasart.

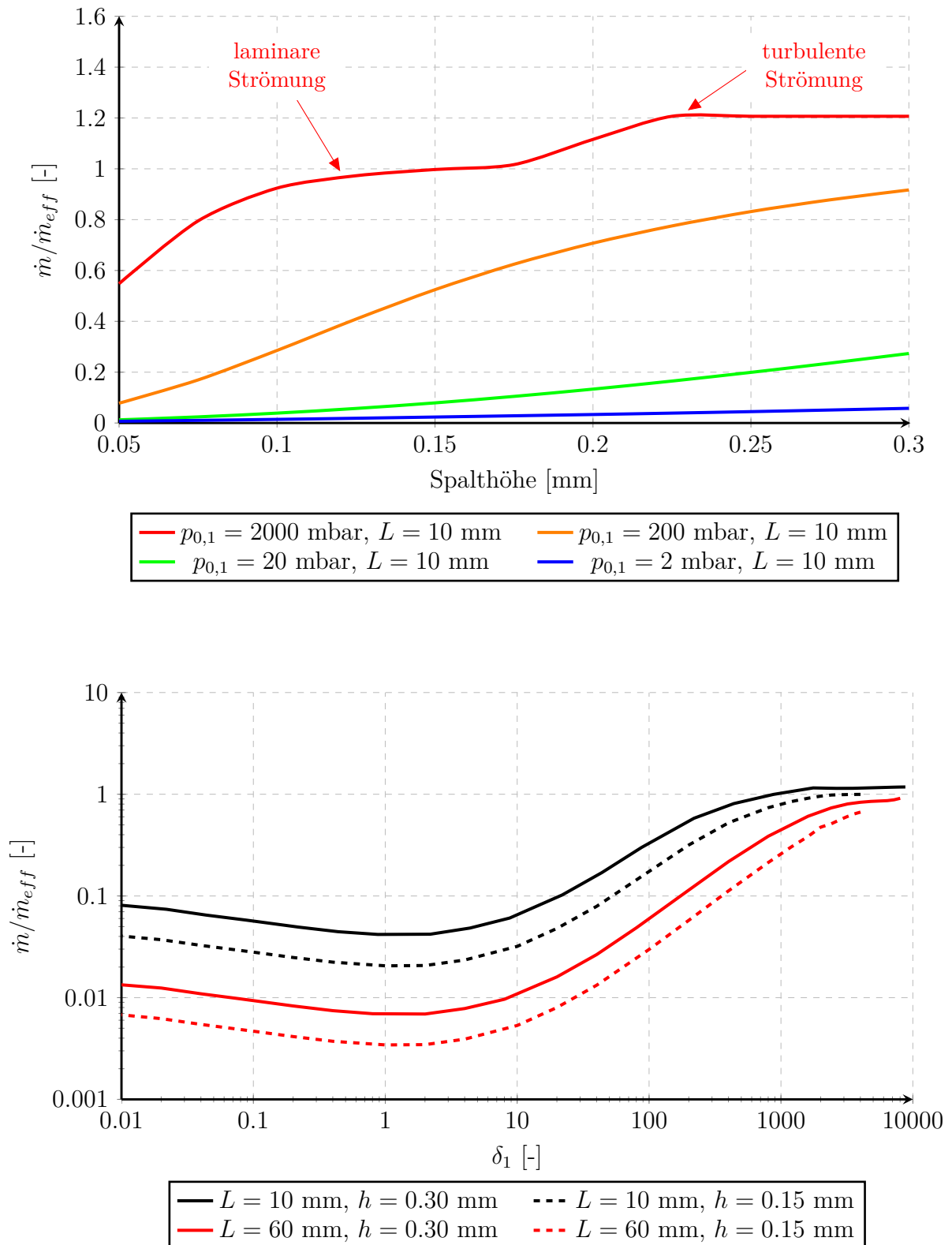


Abb. 8.6: Änderung des Spaltmassenstroms mit der Spalthöhe für  $\Pi = 0.5$ , die thermischen Randbedingungen sind in allen Fällen zu  $T_{Rot} = T_{Geh} = T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$  gesetzt, als Gasart wird Luft verwendet.



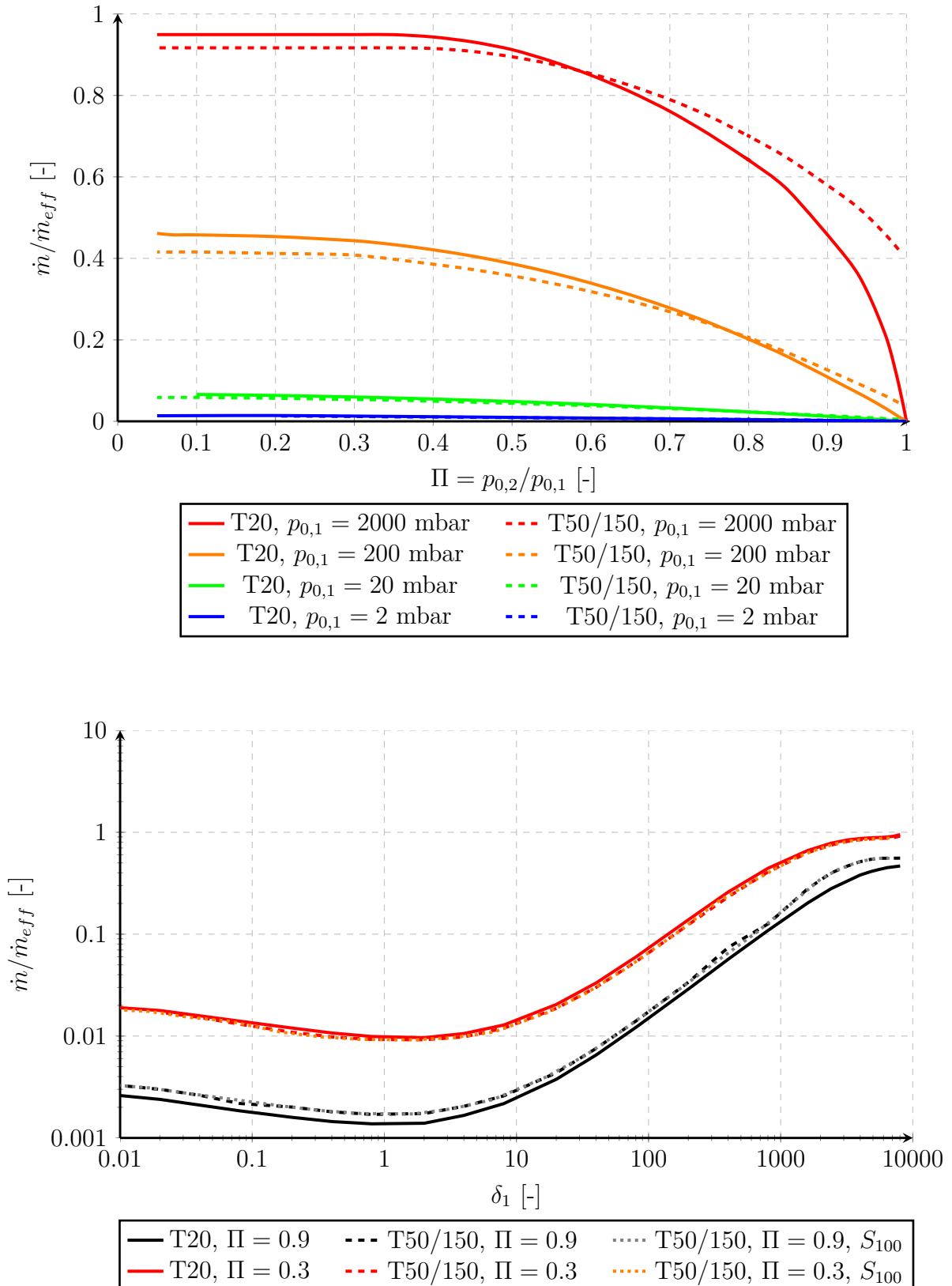


Abb. 8.7: Einfluss der Wärmeübertragung auf den Spaltmassenstrom. Untersucht wird ein tiefer Spalt mit  $h = 0.3$  mm,  $L = 60$  mm und den thermischen Randbedingungen T20 ( $T_{Rot} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$ ) und T50/150 ( $T_{Rot} = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$ ). In den ersten beiden Fällen wurden die Stoffwerte von Luft bei  $20^\circ\text{C}$  verwendet, im mit  $S_{100}$  gekennzeichneten Fall wurde mit den Stoffwerten für Luft von  $100^\circ\text{C}$  [11] gerechnet.



# Kapitel 9

## Experimentelle Validierung

### 9.1 Versuchsaufbau

Zur Validierung der in dieser Arbeit entwickelten Wärmeübergangs- und Reibwertmodellierung werden abschließend Experimente durchgeführt. Da, wie in Kap. 4.6.1 gezeigt, die Rotordrehung für den untersuchten Bereich nur eine vernachlässigbare Rolle spielt, werden die Experimente anhand einer feststehenden, nicht rotierenden Spaltkontur durchgeführt. Deren Geometrie entspricht der aus Abb. 1.13; zur Bestimmung des Wärmeübergangs beide Spaltoberflächen auf eine unterschiedliche Temperatur gebracht.

Der dazu verwendete Versuchsaufbau ist in Abb. 9.1 schematisch dargestellt. Für die Messungen wird die Spaltkontur zwischen zwei große Rezipienten positioniert, in denen das Gas praktisch in Ruhe ist, so dass innerhalb der Rezipienten eine homogene Druckverteilung herrscht. Der Spaltkörper ist vertikal montiert, die Durchströmung des Spaltkörpers erfolgt von unten nach oben. In den unteren Rezipienten auf der Einlassseite des Spaltes wird ein definierter Gasmassenstrom gegeben, der durch die Spaltkontur in den zweiten Rezipienten strömt und dort von einer Vakuumpumpe abgesaugt wird. In den beiden Rezipienten wird der sich einstellende Druck gemessen, so dass bei bekannten Ruhedrücker vor und hinter dem Spalt der eingestellte Spaltmassenstrom mit dem theoretisch ermittelten Massenstrom nach Kap. 8 verglichen werden kann. Als Testgas wird normale Umgebungsluft (bzw. Pressluft für große Massenströme) verwendet, die durch die Massenstromregler durch das nach unten gebogene Verteilrohr in den unteren Rezipienten eingelassen wird.

Die Massenstromregler bestehen aus einer Einheit zur Massenstrommessung und einem Regelventil. Die hier eingesetzten Geräte verwenden eine thermische Durchflussmengenmessung, bei der ein Teilstrom des Gases über einen Heizdraht geführt und dadurch erwärmt wird. Je nach Bauart wird entweder die Temperaturerhöhung des Gases oder die benötigte Heizleistung gemessen, die erforderlich ist, um den Draht auf einer konstanten Temperatur zu halten.

Da sich aufgrund des weiten zu untersuchenden Bereichs der Gasverdünnung der Massenstrom um mehrere Dekaden ändert, sind mehrere Massenstromregler nötig. Die in Abb. 9.1 angegebenen Werte sind die maximalen Massenströme für den jeweiligen Regler; als sinnvolle untere Grenze für eine genaue Regelung gilt etwa 10% des maximalen Wertes.

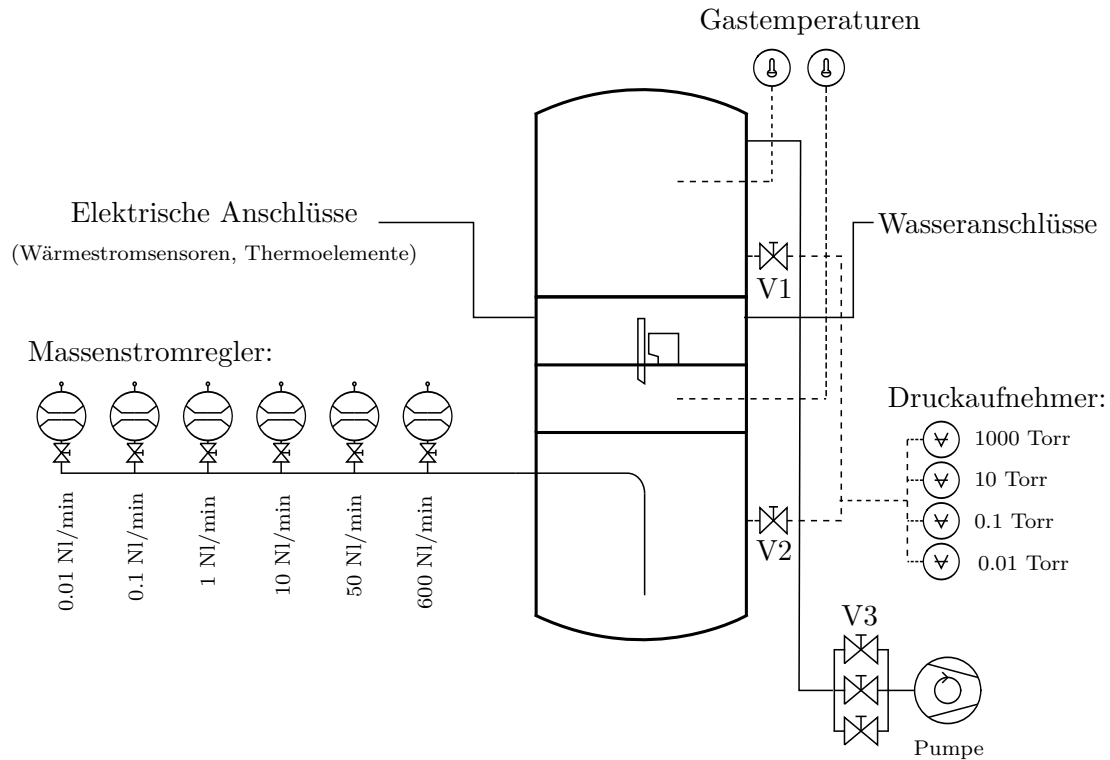


Abb. 9.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Für die Druckmessung werden Membranmessköpfe verwendet. Hierin belastet der Gasdruck eine flexible Membran, die eine Platte eines Kondensators darstellt. Infolge der Verformung ändert dieser seine Kapazität, woraus auf den Gasdruck geschlossen werden kann. Aufgrund des weiten Druckbereiches sind mehrere Druckmessköpfe notwendig, die über eine entsprechende Auslegung der Membran für unterschiedliche Druckbereiche funktionieren. Die hier verwendeten Druckmessköpfe decken einen Druckbereich von 1000 Torr ( $\approx 1330$  mbar) bis etwa  $10^{-4}$  Torr ( $\approx 1.33 \cdot 10^{-4}$  mbar) ab. Für die Messung des Drucks in beiden Rezipienten werden dieselben Druckmessköpfe verwendet, die über die Ventile V1 und V2 an den jeweiligen Rezipienten angeschlossen werden. Der Vorteil dieser Messmethode liegt (neben der geringeren Anzahl an benötigten Geräten) darin, dass sich evtl. vorhandene Messfehler auf beide Drücke in ähnlicher Form auswirken und die für den Spaltstrom maßgebliche Druckdifferenz zwischen beiden Rezipienten genau erfasst wird.

In beiden Rezipienten wird zusätzlich die Gastemperatur über von außen zugeführte Mantelthermoelemente erfasst. Als Vakuumpumpe steht eine Schraubenvakuumpumpe zur Verfügung, die einen Enddruck unterhalb von  $5 \cdot 10^{-3}$  mbar erreicht.

Vor den Messungen wurde das gesamte System einer Leckprüfung unterzogen, bei der eine integrale Leckrate unterhalb von  $5 \cdot 10^{-6}$  mbar l/s erzielt wurde. Verglichen mit dem kleinsten eingestellten Massenstrom von 0.001 NI/min ist die Leckrate daher kleiner als 0.03%, was vernachlässigt werden kann.

Für die Durchführung der Versuche wurde über die Massenstromregler ein fester Massenstrom eingelassen. Die Saugleistung der Vakuumpumpe kann über die Ventile V3 gesteuert werden, so dass für einen Massenstrom mehrere Druckverhältnisse über dem Spalt eingestellt werden können. Für die im folgenden aufgeführten

Messergebnisse wurden stets stationäre Bedingungen abgewartet, bevor der nächste Messpunkt angefahren wurde <sup>1</sup>.

## 9.2 Aufbau des Konturkörpers

Neben der Ermittlung der Durchströmung werden zur Validierung der Wärmeübergangsmodellierung noch die vom Gas an das Rotor- bzw. Gehäusemodell übertragene Wärmeströme gemessen. Hierfür kommen Wärmestromsensoren zum Einsatz, die in die Spaltkontur integriert werden.

In den Wärmestromsensoren tritt der zu messende Wärmestrom durch einen definierten thermischen Widerstand und erzeugt an diesem eine kleine Temperaturdifferenz. Diese wird durch Thermoelemente erfasst, deren beiden Enden sich auf den gegenüberliegenden Seiten des thermischen Widerstands befinden. Damit erzeugen sie eine Thermospannung, die direkt proportional zur Temperaturdifferenz und damit zum Wärmestrom ist. Da der thermische Widerstand klein gehalten werden muss, sind die resultierenden Thermospannungen ebenfalls klein, so dass für ein messbares Signal viele solcher Thermoelemente in Reihe geschaltet werden. Wärmestromsensoren dieser Bauart liefern so ein Spannungssignal, das proportional zum Wärmestrom ist und dessen Polarität sich bei Änderung der Wärmestromrichtung umkehrt.

Die kleinsten verfügbaren Wärmestromsensoren vom Typ SHF1010 [79] haben eine aktive Sensorfläche von 10 x 10 mm bei einer Dicke von 0.4 mm. Um diese in die Spaltkontur einzubringen, können prinzipbedingt nur relativ tiefe Spalte vermessen werden. Weiterhin ändert sich der Wärmestrom, wie in Abb. 9.6 gezeigt, entlang der Durchströmungsrichtung bei hohen Reynoldszahlen stark; eine sinnvolle Messung mit einem derartigen Sensor kann aber nur in Bereichen mit schwach veränderlichem Wärmestrom erfolgen, weshalb eine Spalttiefe von 40 mm eingesetzt wird. Der Sensor ist in der Spaltmitte platziert, wo nach den Rechnungen auch bei hohen Spaltvordrücken  $p_{0,1}$  und damit großen Reynoldszahlen einigermaßen konstante Wärmeströme zu erwarten sind (siehe Abb. 9.6).

Eine weitere Herausforderung stellt die geringe Wärmeleitfähigkeit des Sensors selbst dar ( $\lambda_{Sensor} \approx 2.7 \text{ W/(mK)}$ ). Durch den Einbau in eine verhältnismäßig gut wärmeleitende, metallische Umgebung würde diese geringe Wärmeleitfähigkeit die Wärmeströme im Konturkörper erheblich verändern und damit das Messergebnis verfälschen. Um dieses Problem zu umgehen, wird um den Sensor eine Wärmeleitfolie gelegt (siehe Abb. 9.4), die eine ähnliche Wärmeleitfähigkeit wie der Sensor selbst aufweist ( $\lambda_{Folie} \approx 3 \text{ W/(mK)}$ ). Damit ist der Sensor in eine ihm ähnliche Umgebung integriert, so dass über die gesamte Spaltoberfläche nahe identische thermische Bedingungen herrschen. Durch diese Einschränkung kann der Sensor nicht direkt in die Spaltoberfläche eingebracht werden, sondern muss knapp unterhalb der Oberfläche installiert werden (siehe Abb. 9.4).

Die Temperierung des Rotor- und Gehäusemodells erfolgt durch Wasser, das mit der gewünschten Temperatur durch Kanäle in den Bauteilen geleitet wird (siehe Abb. 9.2). In diesen stellt sich eine turbulente Strömung ein, die eine sehr effektive Heizung bzw. Kühlung des Bauteils gewährleistet. Da die insgesamt übertragenen

---

<sup>1</sup>Versuchsdurchführung durch S. Geus [35].

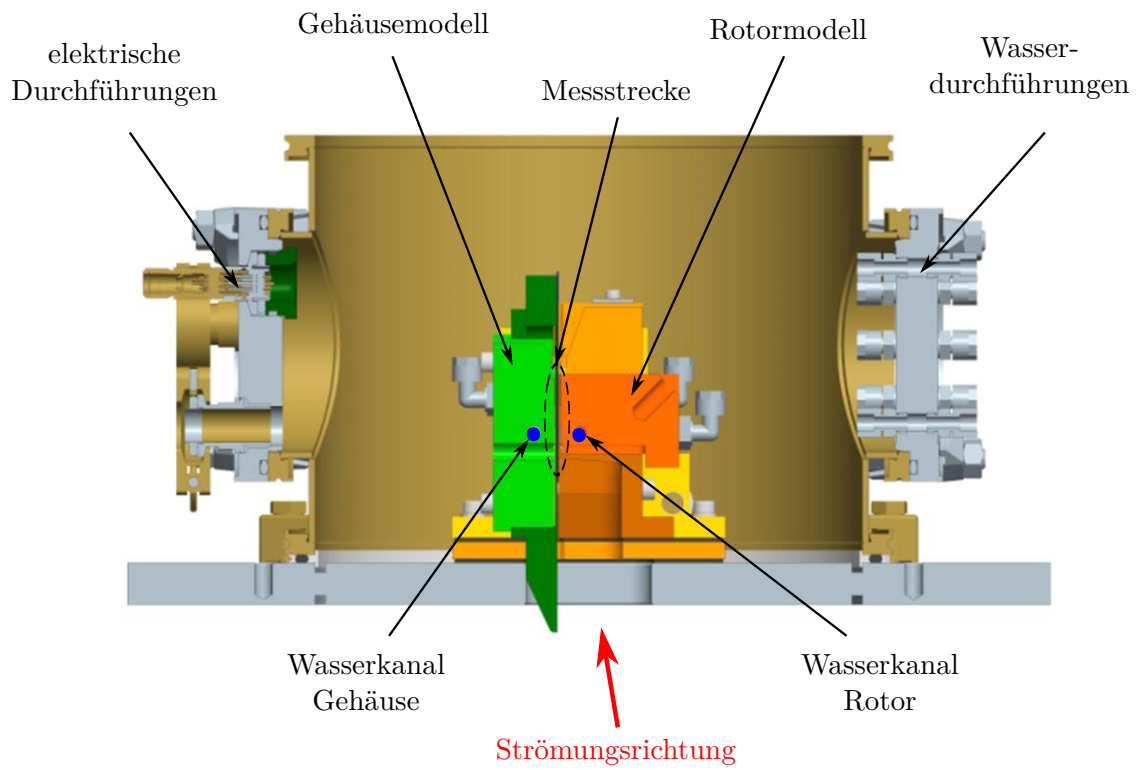


Abb. 9.2: CAD-Modell des Versuchsaufbaus im Querschnitt

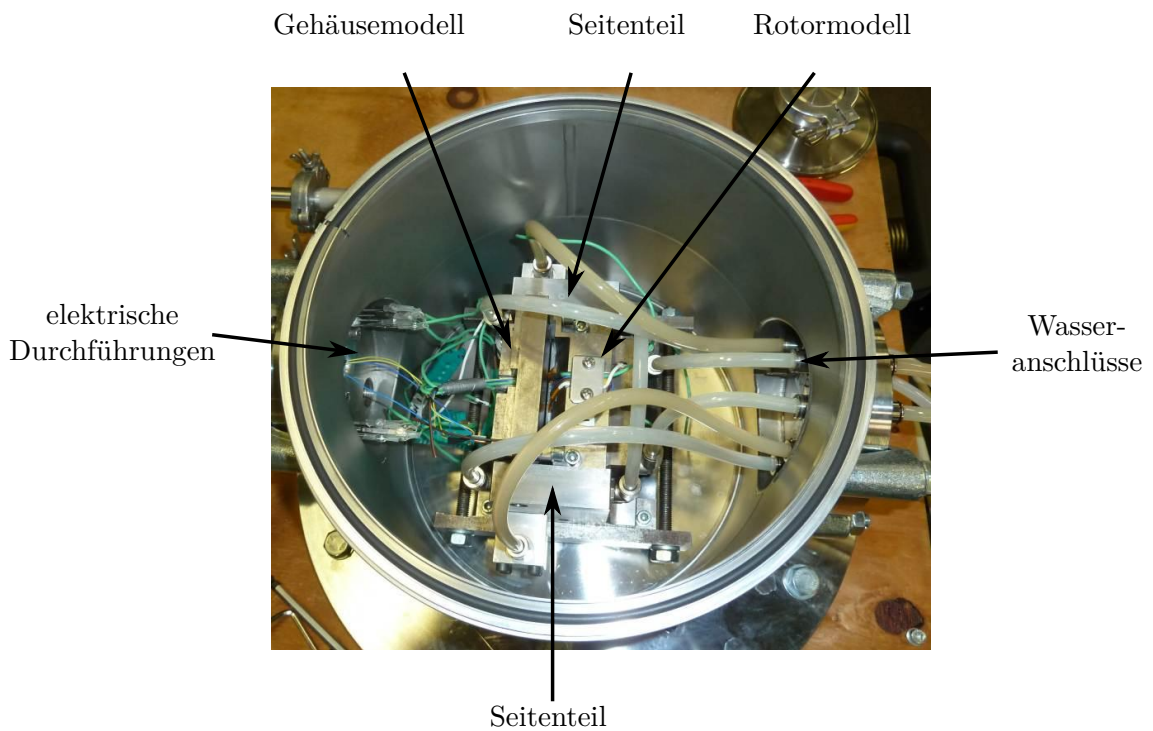


Abb. 9.3: Fotografie des eingebauten Spaltkörpers



spricht nicht einem konstanten Wärmestrom über der Spaltoberfläche (siehe Abb. 9.6) und führt demnach zu einer etwas anderen Temperaturverteilung in den Bauteilen. Da sich zwischen Spaltoberfläche und Wärmestromsensor, konstruktiv bedingt, eine dünne Platte befindet, führen Temperaturgradienten in dieser zu zusätzlichen Wärmeströmen durch den Sensor, die sich als Kalibrierfehler darstellen.

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, reagiert die Spaltströmung sehr sensibel auf die Spalthöhe, so dass deren genaue Einstellung eine entscheidende Bedeutung zukommt. In dem hier verwendeten Spaltmodell ist die Spalthöhe veränderbar und wird durch genau gefertigte Distanzbleche eingestellt, die an den Außenseiten zwischen Rotor- und Gehäusemodell gelegt werden. Beide Teile werden über Schrauben miteinander verspannt, so dass auch bei Erwärmung der Bauteile die Spalthöhe konstant bleibt. Als Spalthöhen wurden 0.5 mm und 0.3 mm eingestellt, die oberhalb der in realen Vakuumpumpen auftretenden Maßen (siehe Kap. 1.4) liegen. Grund hierfür ist, dass im Versuchsstand der maximale Druck auf ca. 1.3 bar begrenzt ist, so dass zum Erreichen von turbulenter Strömung mit  $Re > 8000$  größere Spalthöhen notwendig sind. Die Spaltbreite beträgt 74.4 mm, das Streckungsverhältnis  $b/h$  ist damit selbst für den höchsten Spalt größer als 140, so dass die Spaltströmung mit guter Näherung als zweidimensional betrachtet werden kann.

In Position gehalten wird der Aufbau durch Seitenteile, die fest mit der Flanschplatte verschraubt sind (siehe Abb. 9.3). Da in den Versuchen sowohl Rotor- als auch Gehäusemodell auf eine höhere Temperatur geheizt werden, eine dadurch bedingte Aufheizung des restlichen Prüfstands aber vermieden werden muss, sind auch beide Seitenteile mit Kühlkanälen versehen, durch die Wasser mit Raumtemperatur geleitet wird.

Um den Einfluss der Wärmestrahlung zwischen beiden Spaltoberflächen und von Wärmeströmen durch Wärmeleitung zwischen den Bauteilen zu ermitteln, wurden beide Rezipienten auf einen niedrigen Druck evakuiert ( $< 5 \cdot 10^{-3}$  mbar) und die Wärmeströme durch beide Sensoren gemessen. Durch Subtraktion dieser "Fehlwärmeströme" von den tatsächlichen Messwerten ergeben sich die gesuchten, durch Konvektion verursachten Wärmeströme.

## 9.3 Versuchsergebnisse

### 9.3.1 Durchströmung der nicht beheizten Spaltkontur

Die erste Validierung des Modells erfolgt anhand von Durchströmungsmessungen am unbeheizten Spaltkörper für eine Spalthöhe von  $h = 0.5$  mm. Die Ergebnisse sind in Abb. 9.5 dargestellt, wobei wieder von der Darstellung als dimensionsloser Massenstrom über der Gasverdünnung (bezogen auf den Ruhezustand des Gases vor dem Spalt) Gebrauch gemacht wird. Die verschiedenen Kurven gelten jeweils für ein Druckverhältnis, das zwischen praktisch inkompressibler Strömung ( $\Pi \approx 0.95$ ) und stark kompressibler Strömung ( $\Pi \approx 0.2$ ) variiert. Durch die Wahl der Spaltmassenströme kann die Strömungsform im Spalt von voll turbulenter Strömung bis zur Knudsenströmung mit  $\delta_1 \approx 1$  reichen. Messungen im rein molekularen Bereich konnten mit dem Versuchsaufbau nicht durchgeführt werden, da hierfür sehr kleine Massenströme nötig sind, welche durch die vorhandenen Massenstromregler nicht zur Verfügung gestellt werden können.



Im oberen, doppelt logarithmischen Diagramm in Abb. 9.5 ist das Strömungsverhalten bei kleinem Gasverdünnungsparameter zu erkennen: der dimensionslose Spaltmassenstrom nimmt mit sinkendem Verdünnungsfaktor  $\delta_1$  zunächst stark ab, mit Einsetzen von Verdünnungseffekten bei  $\delta_1 < 100$  flachen die Kurven ab (siehe Erläuterungen in Kap. 8.3). In den Messpunkten bei  $\delta_1 \approx 5$  und  $\delta_1 \approx 0.8$  (beides für  $\Pi = 0.2$ ) befindet sich die Strömung in der Nähe des Knudsenminimums; die bezogenen Massenströme sind hier nahezu identisch. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist für alle Druckverhältnisse und  $\delta_1 < 100$  sehr gut, was die Gültigkeit der Gasverdünnungsmodellierung zeigt.

Das untere, halb-logarithmische Diagramm in Abb. 9.5 zeigt das Verhalten bei hohen Werten der Gasverdünnung, bei der die Strömung vom laminaren in den turbulenten Bereich wechselt. Zur Einordnung der Strömungsart kann zwischen dem dimensionslosen Massenstrom  $\bar{m} = \dot{m}/\dot{m}_{eff}$ , der Re-Zahl und dem Verdünnungsfaktor  $\delta_1$  ein einfacher Zusammenhang abgeleitet werden:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D_h}{\eta} = \frac{2 \cdot \dot{m}}{b \cdot \eta} = \frac{2 \cdot \bar{m} \cdot \dot{m}_{eff}}{b \cdot \eta} = \frac{1}{2} \frac{c_m \cdot \rho_1 \cdot h}{\eta} \cdot \bar{m} \quad (9.1)$$

Durch Einsetzen der Definition von  $\delta$  ergibt sich der Massenstrom  $\bar{m}$  als Funktion der Reynoldszahl und des Verdünnungsfaktors:

$$\bar{m} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot Re \cdot \frac{1}{\delta_1} \quad (9.2)$$

Linien konstanter Reynoldszahlen erscheinen als Hyperbel in der gewählten Darstellung; die Grenzlinien zur laminaren Strömung ( $Re = 3000$ ) bzw. zur voll turbulenten Strömung ( $Re = 8000$ ) sind zur Verdeutlichung in Abb. 9.5 (unten) eingezeichnet. Die Übereinstimmung der berechneten Massenströme mit den Messdaten im laminaren und voll turbulenten Bereich ist sehr gut, was die Gültigkeit der entwickelten Reibwertmodellierung belegt. Im transitionellen Bereich sind die Abweichungen größer, die gemessenen Werte liegen z.T. über, z.T. unter den berechneten. Insgesamt ergibt sich aber auch hier eine brauchbare Übereinstimmung, so dass das vorgestellte Modell mit akzeptabler Genauigkeit für alle Strömungsformen eingesetzt werden kann.

## Eingestellte Spalthöhe: 0.5 mm

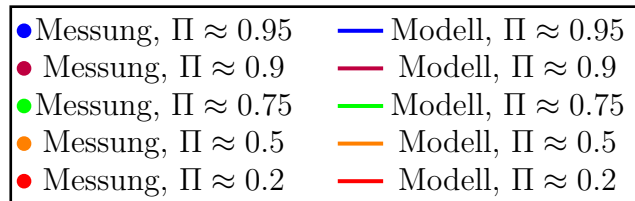
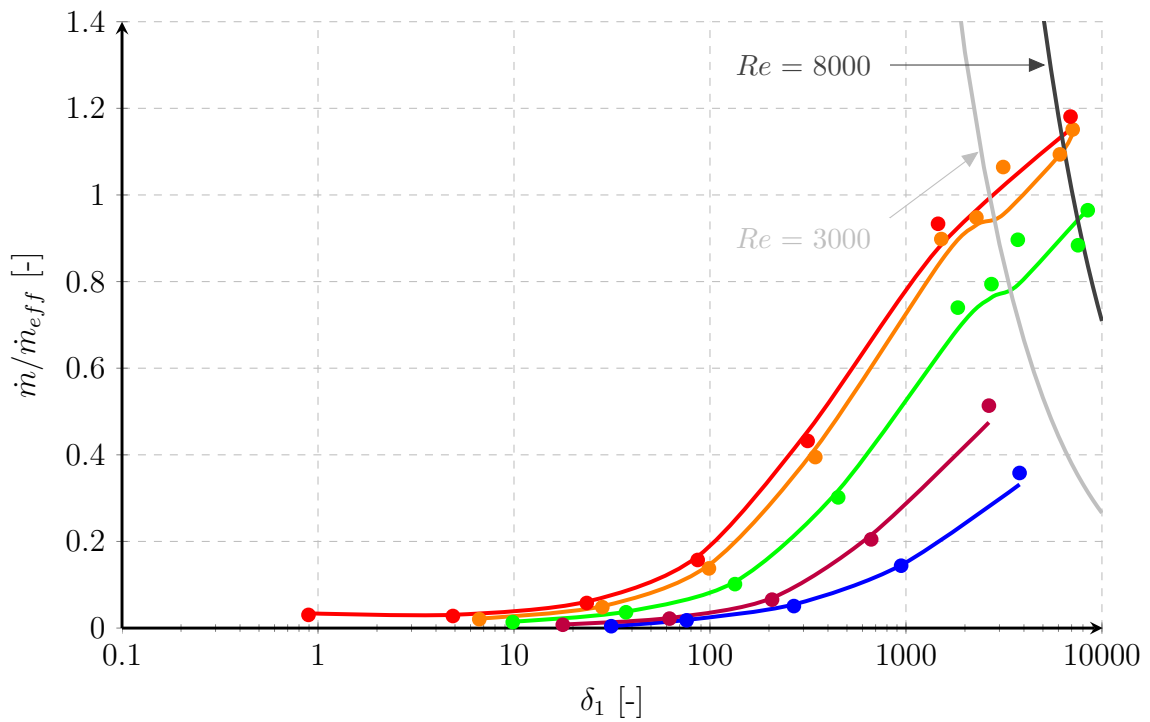
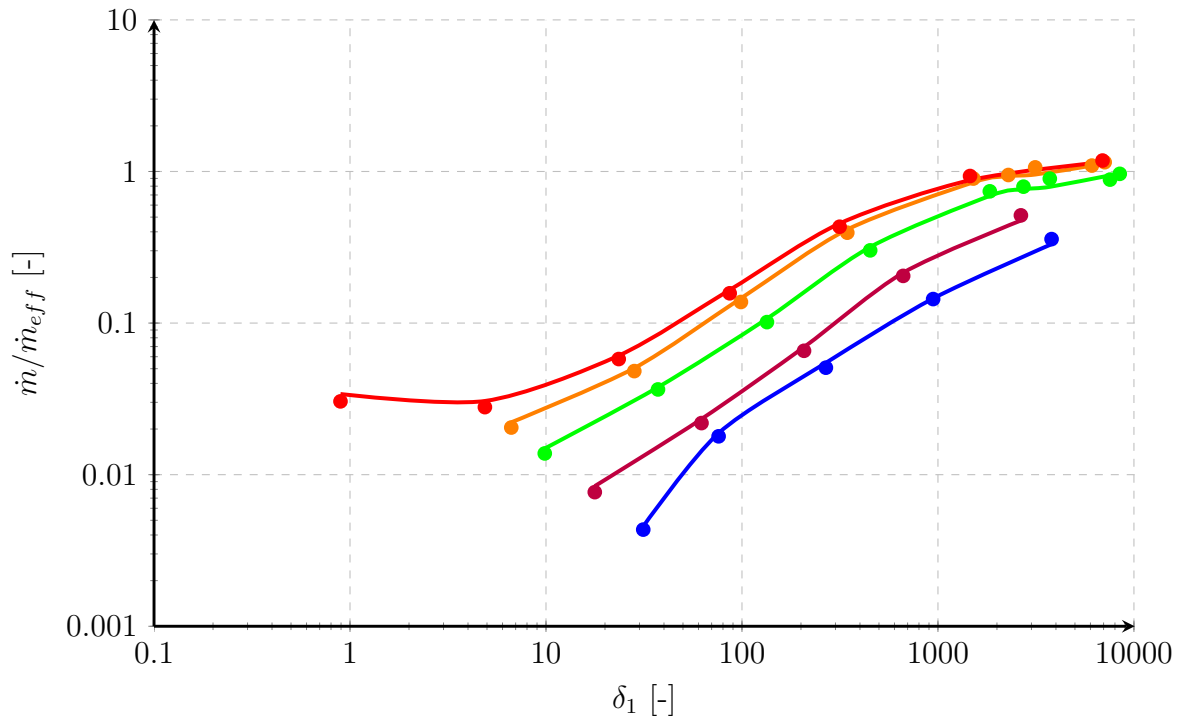


Abb. 9.5: Durchflusswerte für den nicht beheizten Spaltkörper

### 9.3.2 Messungen am beheizten Konturkörper

Zur Messung der konvektiven Wärmeübertragung werden eine bzw. beide Oberflächen auf eine höhere Temperatur gebracht. Das Gas selbst wird (zur Vereinfachung des Versuchsaufbaus) nicht temperiert, so dass dessen Ruhetemperatur vor dem Spalt der Raumtemperatur ( $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$ ) entspricht. Die untersuchten Fälle stellen also einen Aufheizvorgang des Gases in der Einlaufströmung dar, der Verlauf des in Abb. 5.1 skizzierten Temperaturprofils ändert sich entsprechend: Das Gas ist am Spalteintritt kälter als eine (bzw. beide) Spaltoberflächen und heizt sich an einer (bzw. beiden) Oberflächen auf. Die Bauteile werden am Spalteintritt also durch das Gas gekühlt, nach einer gewissen Lauflänge kehrt sich analog zur Abb. 5.1 an der kälteren Oberfläche der Temperaturgradient um, so dass Wärme vom höher temperierten Bauteil in das kühlere geleitet wird. Für die voll ausgebildete thermische Strömung gelten auch in diesem Fall die in Abb. 5.2 dargestellten Temperaturprofile. Da die in Kap. 5 und 6.3 vorgestellte Modellierung allgemein gültig alle Temperaturkonstellationen erfasst, ist es ausreichend, diese für die hier vorgestellten Aufheizvorgänge zu validieren. Der in Schraubenvakuumpumpen häufiger auftretende Fall der Gasabkühlung (nach Abb. 5.1) kann bei erfolgreicher Validierung des Modells damit als abgedeckt angesehen werden.

Der Wärmestrom selbst ändert sich entlang des Sensors in Strömungsrichtung (siehe Abb. 9.6), für die Rechnung wird vereinfachend der Wärmestrom in der Sensormitte als Vergleichswert herangezogen. Je nach Reynoldszahl liegt der Wärmestromsensor in der thermischen Einlaufströmung bzw. im Bereich des thermisch voll ausgebildeten Temperaturprofils. Als Darstellungsform wird der dimensionslose Wärmestrom nach Gl. 6.22 an der Sensorposition als Funktion der Gasverdünnung für verschiedene Druckverhältnisse über den Spalt gewählt.

Generell korrespondieren große Werte des Verdünnungsfaktors mit großen Reynoldszahlen (siehe Abb. 1.8), so dass für diese der Sensor in der thermischen Einlaufströmung liegt. Mit kleiner werdender Gasverdünnung und kleinerer Reynoldszahl folgt der Bereich der ausgebildeten laminaren und für niedrige  $\delta$  der verdünnten Strömung. Messungen in der turbulenten, voll ausgebildeten Strömung können nicht vorgenommen werden, da die Spaltkontur hierfür eine zu geringe Tiefe aufweist.

Zur Validierung des Modells wird analog zum Vorgehen in Kap. 6.3 die "1" Randbedingung am Rotor ( $T_{Rot} > T_{Geh} \approx T_{0,1}$ ) und der Fall gemischter Randbedingungen ( $T_{Rot} > T_{Geh} > T_{0,1}$ ) getestet. Auf eine Messung der "1" Randbedingung am Gehäuse wird zur Verringerung des Messaufwandes verzichtet, die Validierung hierfür wird über den zweiten Testfall mit gemischten Randbedingungen als abgedeckt angesehen.

In den Rechnungen werden vereinfachend die Viskosität und Wärmeleitfähigkeit von Luft bei der Mitteltemperatur zwischen Rotor und Gehäuse angesetzt.

Die Ergebnisse für den ersten Fall mit  $T_{Rot} \approx 60^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 20^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$  sind in Abb. 9.7 für eine Spalthöhe von 0.5 mm gezeigt. Da die Rotortemperatur die höchste im System auftretende Temperatur ist, wird dieser durch den Gasstrom stets gekühlt, so dass der Wärmestrom negative Werte annimmt. Die betragsmäßig höchsten Wärmeströme ergeben sich bei großen Werten von  $\delta$  (und damit großen Reynoldszahlen), da sich hier die z.T. turbulente Einlaufströmung über den Sensorbereich erstreckt. Mit abnehmender Gasverdünnung vor dem Spalt sinkt die

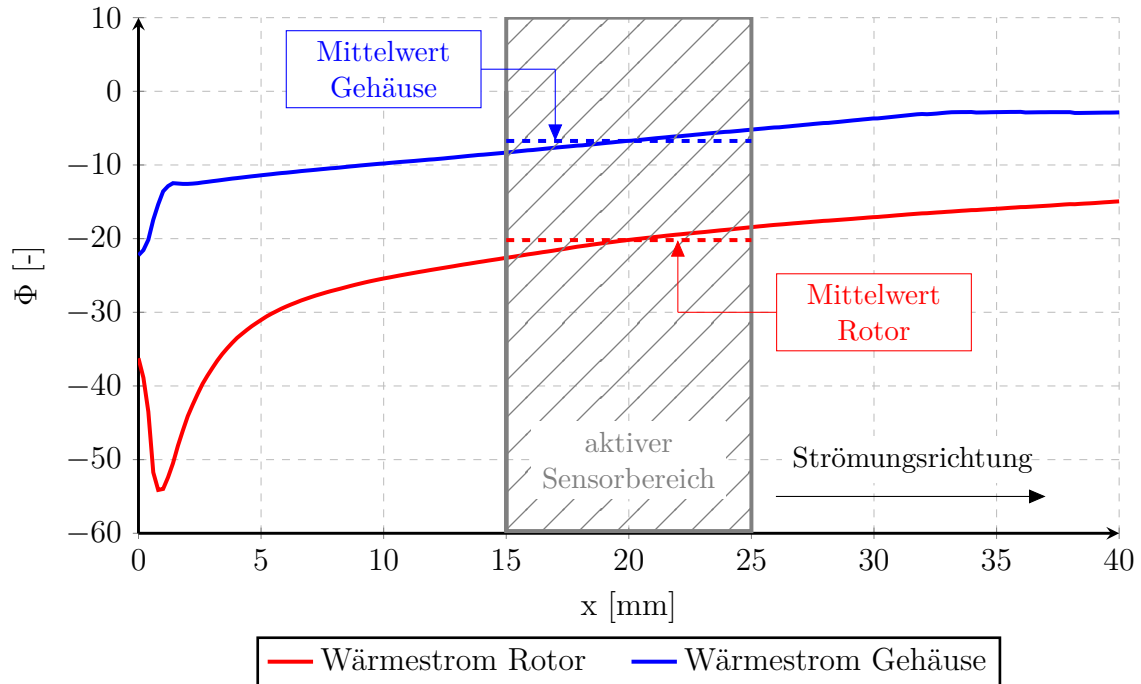


Abb. 9.6: Verlauf der Wärmeströme für  $h = 0.5$  mm,  $p_{0,1} = 1300$  mbar,  $\Pi = 0.5$ ,  $T_{0,1} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_{Rot} = 70^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} = 35^\circ\text{C}$

Reynoldszahl und die Wärmeströme am Sensor verringern sich, bis der Bereich der thermisch ausgebildeten Strömung am Sensor erreicht ist. In diesem bleibt der Wärmestrom konstant und entspricht in etwa der Wärmeleitung durch das Gas zwischen Rotor und Gehäuse. Ab Verdünnungswerten von  $\delta_1 < 10$  machen sich Gasverdünnungseffekte an der Sensorposition bemerkbar, was zu der deutlichen Reduktion des Wärmestroms führt.

Bei gleichem Vordruck (und damit gleicher Gasverdünnung  $\delta_1$  vor dem Spalt) ergeben sich bei kleinen Druckverhältnissen größere Spaltmassenströme und höhere Reynoldszahlen. Dadurch sind die Wärmeströme bei kleinen Druckverhältnissen in der Einlaufströmung größer; in der voll ausgebildeten laminaren Strömung unterscheiden sich die Wärmeströme dagegen nur unwesentlich. Hier bestimmt die Wärmeleitung durch das Gas die Wärmeströme, der Einfluss der Kompressibilität hierauf ist gering.

Die beschriebenen Effekte werden mit guter Genauigkeit durch das theoretische Modell erfasst, größere Abweichungen treten lediglich bei sehr hohen Wärmeströmen auf. Grund hierfür dürfte die Temperaturverteilung in den Bauteilen sein, die an der Oberfläche z.T. deutlich ( $\pm 5$  K) von der idealen, gleichförmigen Temperaturverteilung abwich. Infolge von Wärmeleitung ergeben sich hierdurch zusätzliche Wärmeströme durch den Wärmestromsensor, die einen Messfehler darstellen.

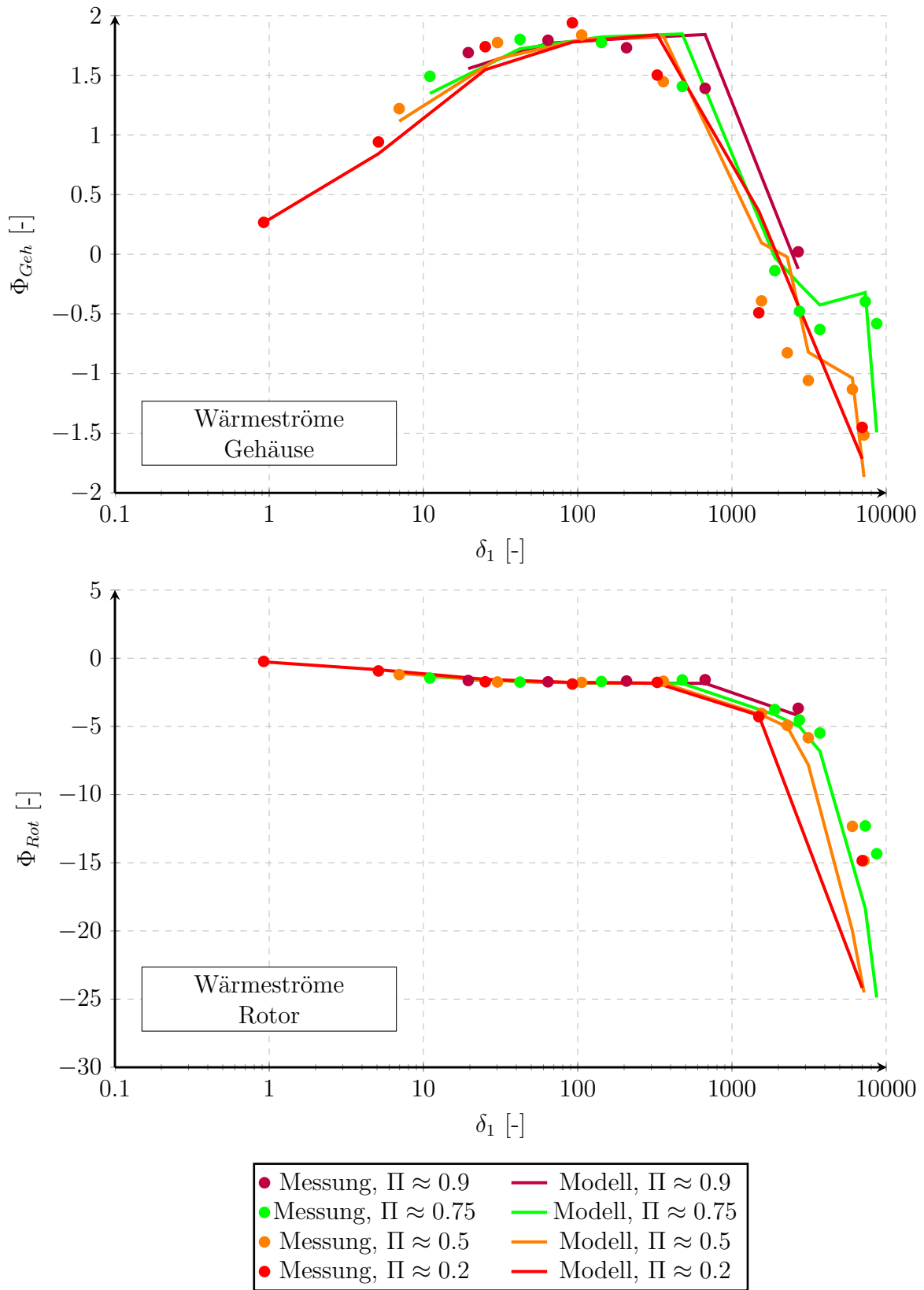
Das Gehäuse sollte unter diesen Versuchsbedingungen durch den Gasstrom geheizt werden, da sich dieser an der Rotoroberfläche erwärmt (siehe auch Abb. 5.4). Tatsächlich stellte sich in den Experimenten eine Gehäuseoberflächentemperatur leicht oberhalb der Gaseintrittstemperatur ein, was am Anfang der thermischen Einlaufströmung ebenfalls ein geringes Aufheizen des Gases und einen negativen Wärmestrom zur Folge hat. Mit kürzer werdender Einlauflänge ist das Temperaturprofil am

Sensor weiter entwickelt und der Wärmestrom nimmt ab. Bei Unterschreitung einer gewissen Reynoldszahl liegt der Sensor im Bereich des Temperaturprofils mit verschwindendem Temperaturgradient an der Gehäusewand, so dass der Wärmestrom Null wird. Bei weiterer Absenkung der Reynoldszahl wird Wärme, die vom Gas an der Rotoroberfläche aufgenommen wird, an das Gehäuse abgegeben und der Gehäusewärmestrom wird folglich positiv. Bei Erreichen der thermisch voll ausgebildeten Strömung am Sensor sind die Wärmeströme am Gehäuse und Rotor betragsmäßig gleich. Ab  $\delta_1 < 10$  werden analog zum Rotor Gasverdünnungseffekte am Sensor messbar, die zu einer Abnahme des Wärmestroms führen. Der Vergleich mit der Rechnung zeigt auch hier über weite Bereiche eine gute Übereinstimmung; der Testfall der "1" Randbedingung am Rotor kann somit als validiert angesehen werden. Die gemessenen und berechneten Ergebnisse für den zweiten untersuchten Fall der gemischten Randbedingung ( $T_{Rot} \approx 70^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 35^\circ\text{C}$ ) sind in Abb. 9.8 aufgetragen. Der qualitative Verlauf der Messgrößen entspricht denen des ersten Falls, allerdings sind bei großen Verdünnungsfaktoren die Wärmeströme in das Gehäuse betragsmäßig größer, da hier eine höhere Temperaturdifferenz zwischen Gehäuse und Gas vorliegt. Auch hier ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung, eine Ausnahme bilden lediglich aus den oben erläuterten Gründen die betragsmäßig hohen Wärmeströme bei großen Werten von  $\delta_1$ . Insgesamt bestätigen die Messungen das Modell zur Berechnung der Wärmeübertragung mittels des Superpositionsprinzips.

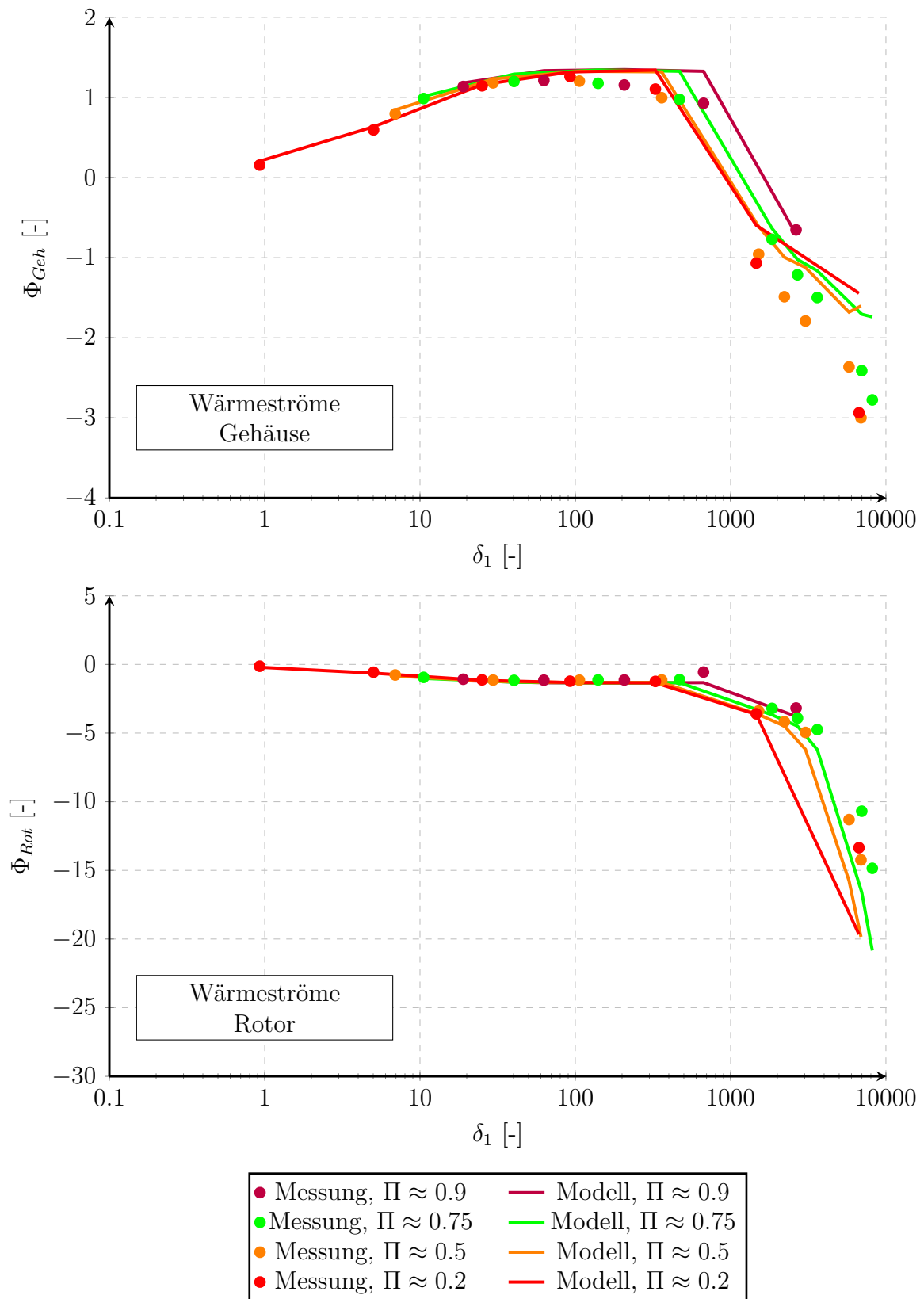
Die gemessenen und berechneten Spaltmassenströme unterscheiden sich nur geringfügig von denen der kalten Messung nach Abb. 9.5, was auf die relativ geringe Erhöhung der Gasruhetemperatur in den Experimenten zurückzuführen ist.

Abschließend wird noch eine zweite, geringere Spalthöhe ( $h = 0.3$  mm) mit den gleichen, gemischten thermischen Randbedingungen geprüft, um das Modell anhand einer weiteren Spaltgeometrie zu testen. Die Ergebnisse für die Durchströmung (Abb. 9.9) und die Wärmeübertragung (Abb. 9.10) zeigen ein ähnliches Bild wie bei der vorher diskutierten Spalthöhe von ( $h = 0.5$  mm), was die Gültigkeit des entwickelten Modells unterstreicht.

## Eingestellte Spalthöhe: 0.5 mm

Abb. 9.7: Wärmeströme für  $T_{Rot} \approx 60^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 20^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$

## Eingestellte Spalthöhe: 0.5 mm

Abb. 9.8: Wärmeströme für  $T_{Rot} \approx 80^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 35^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$

## Eingestellte Spalthöhe: 0.3 mm

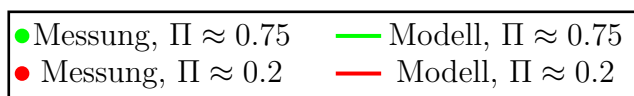
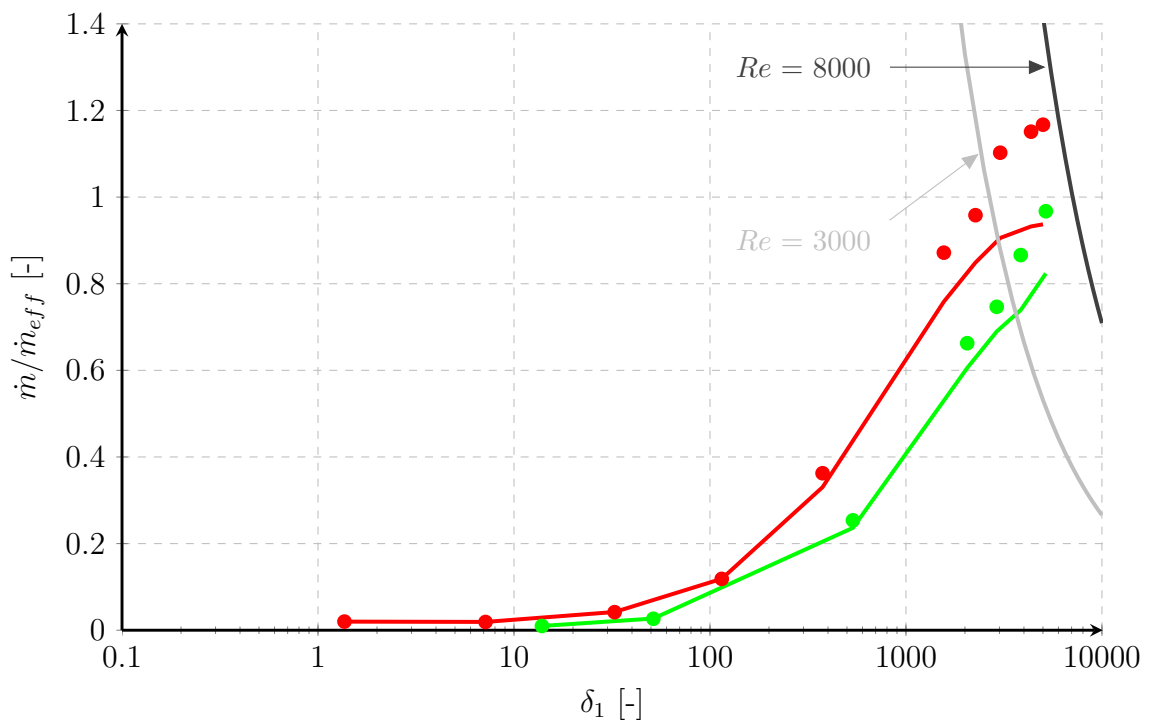
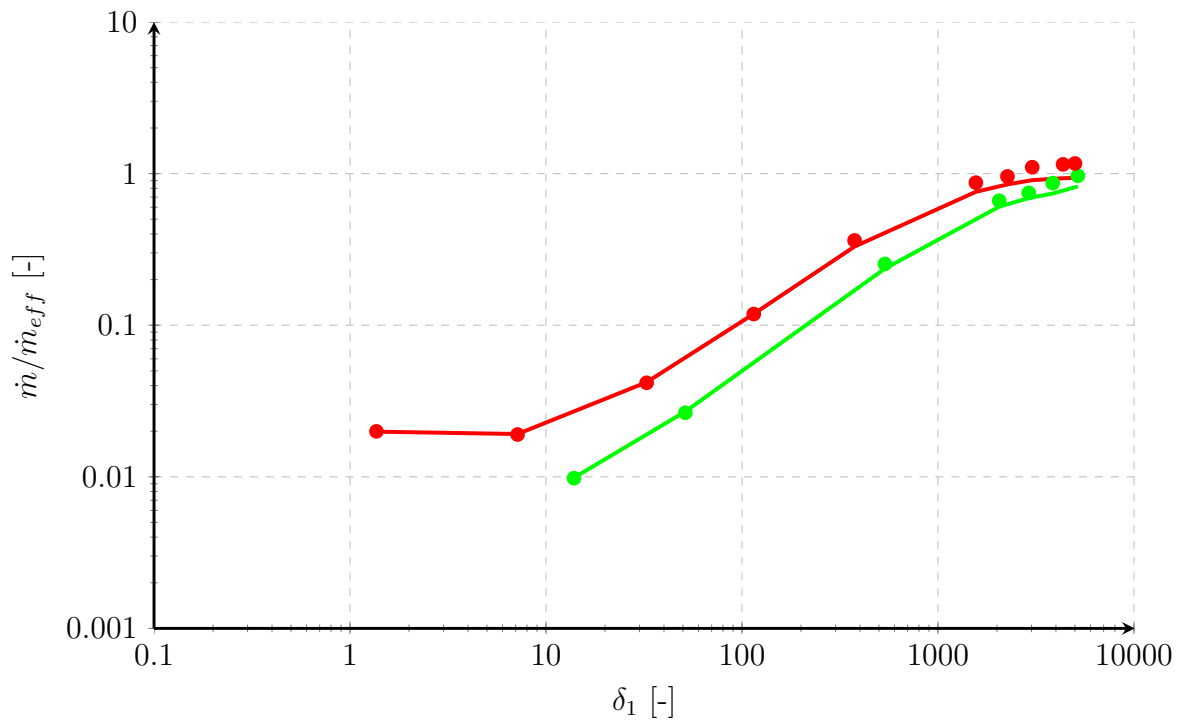


Abb. 9.9: Durchflusswerte für  $T_{Rot} \approx 70^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 35^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$



Eingestellte Spalthöhe: 0.3 mm

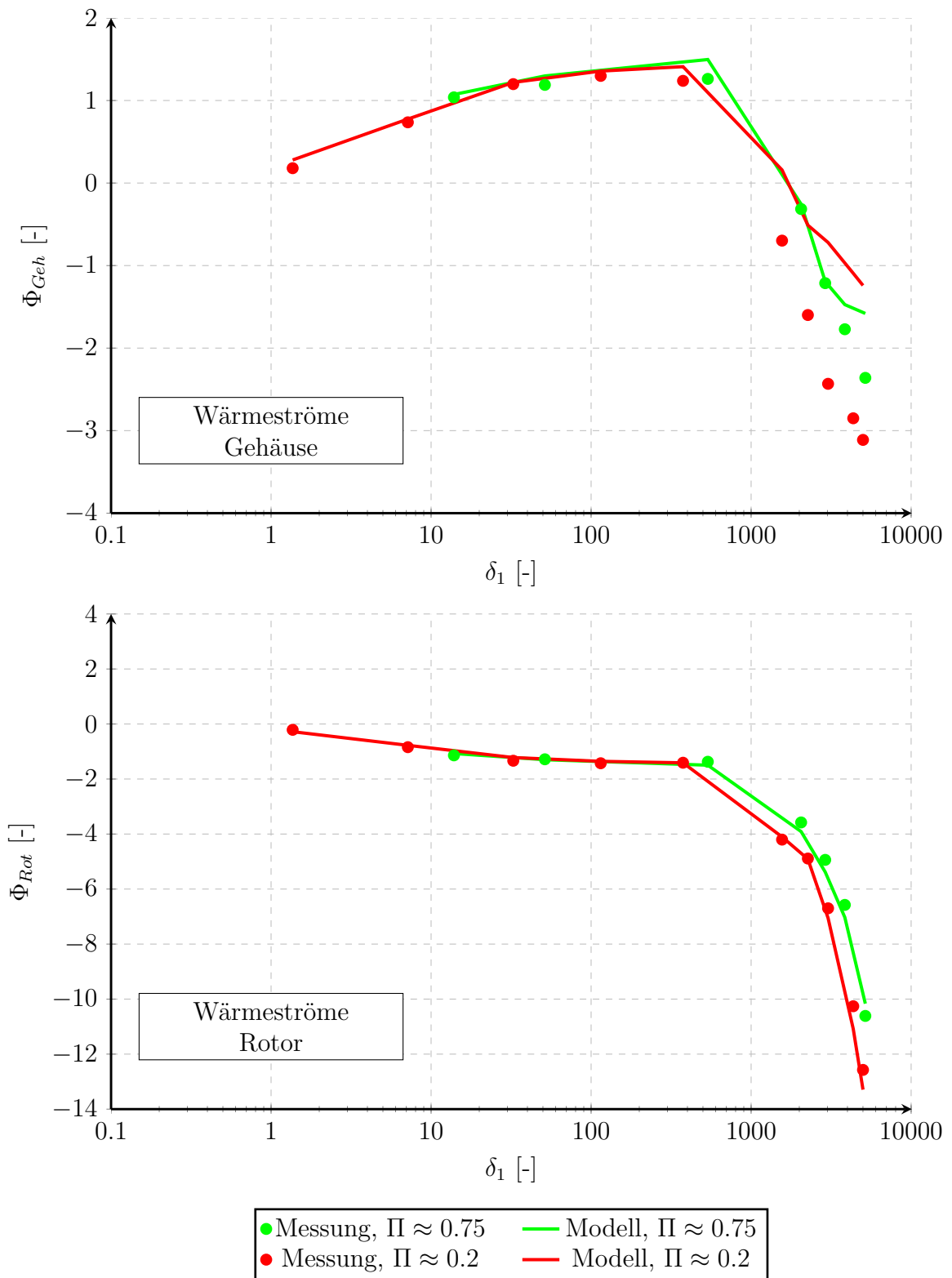


Abb. 9.10: Wärmeströme für  $T_{Rot} \approx 70^\circ\text{C}$ ,  $T_{Geh} \approx 35^\circ\text{C}$  und  $T_{0,1} \approx 23^\circ\text{C}$



# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit präsentiert ein Modell zur Berechnung der Durchströmung und der Wärmeübertragung von Gehäusespalten in Schraubenvakuumpumpen. Eine Besonderheit stellen hierbei die unterschiedlichen Strömungsformen dar, die je nach Betriebszustand von turbulenter bis zur molekularen Strömung variiert. Um den rechnerischen und experimentellen Aufwand für die Entwicklung des Modells zu begrenzen, basiert dieses auf dimensionslosen Kennzahlen für die lokale Reibung und Wärmeübertragung.

Diese werden durch systematische Analyse der Strömung in einem Ersatzspaltmodell hergeleitet, wobei die Strömung zunächst vereinfachend als inkompressibel idealisiert wird. Hierfür werden die Verläufe des Reibwertes in der Einlaufströmung analysiert und der Einfluss der Rotordrehung berücksichtigt. Es zeigt sich, dass diese für laminare Strömung nur einen sehr geringen Einfluss auf die Reibwerte und damit die Durchströmung ausübt. Ebenfalls wird für die inkompressible Strömung die Wärmeübertragung unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Oberflächentemperaturen von Rotor und Gehäuse untersucht, wofür ein Superpositionsansatz angewendet wird. Der Sonderfall der gleichen Wandtemperaturen ist in diesem Ansatz enthalten; der Vergleich der numerisch bestimmten Werte mit aus der Literatur bekannten Korrelationen ergibt eine sehr gute Übereinstimmung für ausgebildete laminare und turbulente Strömung.

Die nachfolgende Analyse des Einflusses der Kompressibilität zeigt, dass sich die Reibwerte der laminaren Strömung nach einer ausreichenden Lauflänge nur geringfügig von den inkompressiblen Werten unterscheiden. Für die spätere Modellbildung wird zur Abbildung dieses Einflusses eine Korrekturformel entwickelt, die mit guter Näherung die numerisch bestimmten Reibwerte wiedergibt. Im Spalteintritt ergeben sich größere Reibwerte; die Einlaufverluste fallen im Vergleich zur inkompressiblen Strömung jedoch geringer aus. Für die turbulente Strömung ist der Einfluss der Kompressibilität weniger deutlich, hier ergeben sich nahezu die Reibwerte der inkompressiblen Strömung.

Durch die Kopplung der Impuls- und Energiegleichung in der kompressiblen Strömung kann das Superpositionsprinzip nur noch eingeschränkt zur Berechnung der Wandwärmeströme angewendet werden. Hier wird ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, bei dem eine inkompressible Ersatzströmung mit geeigneten Temperaturrandbedingungen an der Wand verwendet wird. Der Vergleich dieses Ansatzes mit numerischen Lösungen der gekoppelten Erhaltungsgleichungen ergibt eine ausreichende Genauigkeit dieses Modells für die Wärmeströme und den Temperaturver-

lauf.

Weiterhin kann gezeigt werden, dass bei Einsetzen von Gasverdünnungseffekten in der Spaltströmung die Einlaufeffekte nur noch eine vernachlässigbare Rolle spielen, so dass in diesem Bereich die Betrachtung der voll ausgebildeten Strömung ausreichend ist. Hierfür können die aus der Literatur bekannten Ergebnisse verwendet werden, wobei diese für die folgende Modellbildung als Anpassung des Reibwertes ( $f = f(Re, \delta)$ ) und der effektiven Wärmeleitfähigkeit (beschrieben durch  $f_\lambda(\delta)$ ) formuliert werden.

Das resultierende Berechnungsmodell für die Spaltströmung basiert auf den eindimensionalen Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie. Zur Lösung dieser Gleichungen werden die vorher entwickelten Modelle für Reibung und Wärmeübertragung eingesetzt und ein geeigneter Lösungsalgorithmus beschrieben. Anhand einiger Beispielrechnungen wird der Einfluss der Geometrieparameter und der verschiedenen Randbedingungen aufgezeigt. So ergeben die Rechnung u.a., dass die Wärmeübertragung je nach Randbedingung sowohl den Spaltmassenstrom erhöhen als auch verringern kann.

Abschließend wird das theoretische Modell mit experimentell ermittelten Werten für die Durchströmung und die Wärmeübertragung abgeglichen. Hierfür kommt ein Versuchsspalt mit integrierten Wärmestromsensoren zum Einsatz, in dem die Strömung alle relevanten Bereiche (mit Ausnahme der rein molekularen Strömung) durchläuft. Der Vergleich der Ergebnisse des Modells mit den gemessenen Werten zeigt eine gute Übereinstimmung sowohl für den resultierenden Massenstrom als auch für die Wärmeströme, was die Gültigkeit des entwickelten Modellansatzes bestätigt.

Ungeklärt bleibt der Einfluss der Rotordrehung im transitionellen und turbulenten Strömungsbereich, da hierfür keine geeigneten Turbulenzmodelle zur Verfügung standen. Weiterhin beschränkt sich die Analyse der Turbulenz auf den Sonderfall der praktisch turbulenzfreien Einströmung in den Spalt, was dem idealisierten Modell des Spaltersatzkörpers zwischen zwei großen Rezipienten entspricht. In realen Schraubenvakuumpumpen ist jedoch aufgrund der Rotordrehung von einer stark turbulenten Einströmung in den Spalt auszugehen, was für zukünftige Modellbildungen berücksichtigt werden sollte.

Die größte Unsicherheit für die thermodynamische Modellierung von Schraubenvakuumpumpen stellen jedoch die noch unbekanntenen Strömungsvorgänge innerhalb der Arbeitskammern dar. Die hier zu erwartende Wirbelbildung dürfte zu einem erheblichen Wärmeaustausch zwischen Gas, Rotor und Gehäuse führen, die das Pumpenverhalten signifikant beeinflussen. Für eine verbesserte Simulationsgenauigkeit sollten daher diese Vorgänge in künftigen Forschungsarbeiten tiefer gehend untersucht werden.

# Anhang A

## SST- Transitionsmodell

Dehnungstensor  $S$

$$S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

Wirbelstärke  $\Omega$

$$\Omega = \sqrt{2 \cdot \Omega_{ij} \cdot \Omega_{ij}} \quad \text{mit} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.2})$$

**Definition der Übergangsfunktion  $F_1$  für die  $k$ -Transportgleichung des SST-Modells:**

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4) \quad (\text{A.3})$$

$$\Phi_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09 \cdot \omega \cdot y}, \frac{500 \cdot \eta}{\rho \cdot y^2 \cdot \omega} \right), \frac{4 \cdot \rho \cdot k}{\sigma_{\omega,2} \cdot D_{\omega}^+ \cdot y^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$D_{\omega}^+ = \max \left[ 2 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\sigma_{\omega,2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right] \quad (\text{A.5})$$

$y$  stellt dabei den Abstand von der nächsten Wand dar.

**Koeffizient  $\alpha$  für den Produktionsterm von  $\omega$ :**

$$\alpha = \frac{\alpha_{\infty}}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + Re_t/R_{\omega}}{1 + Re_t/R_{\omega}} \right) \quad \text{mit} \quad R_{\omega} = 2.95 \quad (\text{A.6})$$

Der Koeffizient  $\alpha^*$  wird zur Dämpfung der turbulenten Viskosität im Falle kleiner Re-Zahlen verwendet:

$$\alpha^* = \alpha_{\infty}^* \cdot \frac{\alpha_0^* + Re_t/R_k}{1 + Re_t/R_k} \quad (\text{A.7})$$

$$Re_t = \frac{\rho \cdot k}{\eta \cdot \omega} \quad R_k = 6 \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3} \quad \beta_i = 0.072 \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_{\infty} = F_1 \cdot \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \cdot \alpha_{\infty,2} \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (\text{A.11})$$

**Koeffizient  $\beta_i$  für den Destruktionsterm von  $\omega$ :**

$$\beta_i = F_1 \cdot \beta_{i,1} + (1 - F_1) \cdot \beta_{i,2} \quad (\text{A.12})$$

**Funktion F2 für die Berechnung der turbulenten Viskosität:**

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) \quad \text{mit} \quad \Phi_2 = \max \left[ 2 \cdot \frac{\sqrt{k}}{0.09 \cdot \omega \cdot y}, \frac{500 \cdot \eta}{\rho \cdot y^2 \cdot \omega} \right] \quad (\text{A.13})$$

**Modifizierte Funktion  $F_1$  für das Transitionsmodell:**

$$R_y = \frac{\rho \cdot y \cdot \sqrt{k}}{\eta} \quad F_3 = e^{-(R_y/120)^8} \quad (\text{A.14})$$

$$F_1 = \max(F_{1orig}, F_3) \quad (\text{A.15})$$

$F_{1orig}$  ist die in Gl. A.3 aufgeführte Übergangsfunktion des ursprünglichen SST-Modells.

# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, J.P. ; SPARROW, E.M. ; MINKOWYCZ, W.J.: Internal-flow Nusselt numbers for the low-Reynolds-number end of the laminar-to-turbulent transition regime. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54 (2011), Januar, Nr. 1-3, S. 584–588
- [2] ABRAHAM, J.P. ; SPARROW, E.M. ; TONG, J.C.K.: Heat transfer in all pipe flow regimes: laminar, transitional/intermittent, and turbulent. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52 (2009), Januar, Nr. 3-4, S. 557–563
- [3] ABRAHAM, J.P. ; SPARROW, E.M. ; TONG, J.C.K. ; BETTENHAUSEN, D.W.: Internal flows which transist from turbulent through intermittent to laminar. In: *International Journal of Thermal Sciences* 49 (2010), Februar, Nr. 2, S. 256–263
- [4] ABU-GHANNAM, B.J. ; SHAW, R.: Natural Transition of Boundary Layers - The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 22 (1980), S. 213–228
- [5] ALBRING, W.: *Angewandte Strömungslehre*. 6. bearbeitete Auflage, 1990. Akademie-Verlag Berlin
- [6] ANDERECK, C.D. ; LIU, S.S. ; SWINNEY, H.L.: Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 164 (1986), S. 155–183
- [7] ANDERSON, J.D.: *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1995
- [8] ANSYS (Hrsg.): *Ansys Fluent 12.0 Theory Guide*. Ansys, 2009
- [9] ASKAO, Y. ; PI, T. ; TURNER, S.E ; FAGHRI, M.: Effect of compressibility on gaseous flows in micro-channels. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (2003), S. 3041–3050
- [10] BAEHR, H.D. ; STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer- Verlag, 1996
- [11] BÖCKH, P. v.: *Wärmeübertragung*. Springer- Verlag, 2006
- [12] BEAVERS, G. S. ; SPARROW, E. M. ; LLOYD, J. R.: Low Reynolds Number Turbulent Flow in Large Aspect Ratio Rectangular Ducts. In: *Journal of Basic Engineering* 93 (1971), Juni, Nr. 2, S. 296–299

- [13] BEAVERS, G.S ; SPARROW, E.M ; MAGNUSON, R.A: Experiments on the breakdown of laminar flow in a parallel-plate channel. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 13 (1970), Mai, Nr. 5, S. 809–815
- [14] BERG, H.R. van d. ; SELDAM, C.A. ; GULIK, P.S. Van d.: Compressible laminar flow in a capillary. In: *Journal of Fluid Engineering* 246 (1993)
- [15] BERGES, H.-P. ; GÖTZ, D.: Oil-free vacuum pumps of compact design. In: *Vacuum* 38 (1988), S. 761–763
- [16] BHATHNAGAR, P.L. ; GROSS, E.P. ; KROOK, M.: A Model for Collision Processes in Gases. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. In: *Physical Review* 94 (1954), S. 511–525
- [17] BIRD, G.A.: *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford University Press, 1994
- [18] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Verlag Deutsch, 2000
- [19] BRUCE, S. ; CHEETHAM, V. ; LEGGE, G.: Recent Operating Experience with Dry Running Vacuum Pumps on Vacuum Degassing and Vacuum Oxygen Decarburising Systems. In: *International Technology Conference Proceedings, Warrendale, Pa.: Iron & Steel Society*, 2003
- [20] CELATA, G.P. ; CUMO, M. ; MCPHAIL, S.J. ; TESFAGABIR, L. ; ZUMMO, G.: Experimental study on compressible flow in microtubes. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 28 (2007), S. 28–36
- [21] CERCIGNANI, C.: *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Springer-Verlag, 1988
- [22] CHEN, R.-Y.: Flow in the Entrance Region at Low Reynolds Numbers. In: *Journal of Fluids Engineering* 95 (1973), S. 153–158
- [23] CHURCHILL, S. W.: Comprehensive Correlating Equations for Heat, Mass and Momentum Transfer in Fully Developed Flow in Smooth Tubes. In: *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals* 16 (1977), S. 109–116
- [24] DENNIS, N. T. M.: Dry Vacuum Pumps. In: LAFFERTY, J.M. (Hrsg.): *Foundations of Vacuum Science and Technology*, John Wiley & Sons, Inc., 1988, S. 159–171
- [25] DREIFERT, T.: Produktions- und Betriebserfahrungen mit Schraubenvakuumpumpen. In: *VDI-Berichte Nr. 1932*. VDI, 2007
- [26] DREIFERT, T. ; JANICKI, M.: Schraubenvakuumpumpen. In: BILDARCHIV W.H. FARAGALLAH, Verlag und (Hrsg.): *Vakuumpumpen*. W.H. Faragallah, 2008, S. 271–289
- [27] DREISSIG, B.: *Ein Beitrag zur Auslegung von trockenlaufenden Schraubenmotoren*, TU Dortmund, Diss., 1989



- [28] DRELA, M.: MISES Implementation of Modified Abu-Ghannam/Shaw Transition Criterion / MIT Aero-Astro. 1998. – Forschungsbericht
- [29] DUAN, Z. ; MUZYCHKA, Y.S.: Slip Flow in the Hydrodynamic Entrance Region of Circular and Noncircular Microchannels. In: *Journal of Fluids Engineering* 132 (2010)
- [30] ECKERT, E.R.G. ; DRAKE, M.: *Analysis of heat and mass transfer*. McGraw-Hill, 1972
- [31] EWART, T. ; PERRIER, P. ; GRAUR, I.A. ; MEOLANS, G.: Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes. In: *Journal of Fluid Mechanics* 584 (2007), S. 337–356
- [32] FRANGI, A. ; GHISI, A. ; FREZZOTTI, A.: Analysis of Gas Flows in MEMS by a Deterministic 3D BGK Kinetic Model. In: *Sensor Letters* 6 (2008), S. 69 – 75
- [33] FROHN, A.: *Einführung in die Kinetische Gastheorie*. 2. Auflage. AULA-Verlag Wiesbaden, 1988
- [34] FROHN, A. ; ANDERS, K.: Wärmeübertragung und Strömung in verdünnten Gasen. In: *VDI-Wärmeatlas*. Springer- Verlag, 1997
- [35] GEUS, S.: *Experimentelle Untersuchung der Strömung mit Wärmeübertragung in Maschinenspalt von Vakuumpumpen*, Rheinische Fachhochschule Köln, Bachelorarbeit, 2012
- [36] GNIELINSKI, V.: New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow. In: *International Journal of Chemical Engineering* 16 (1976), S. 359–368
- [37] GNIELINSKI, V.: Wärmeübertragung bei der Strömung durch Rohre. In: *VDI-Wärmeatlas*. Springer- Verlag, 1997
- [38] GNIELINSKI, V.: Wärmeübertragung im konzentrischen Ringspalt und im ebenen Spalt. In: *VDI-Wärmeatlas*. Springer- Verlag, 1997, Kapitel Gb
- [39] HARLEY, J.C. ; HUANG, Y. ; BAU, H.H. ; ZEMEL, J.N.: Gas flow in microchannels. In: *Journal of Fluid Mechanics* 284 (1995), S. 257–274
- [40] HÄNEL, D.: *Molekulare Gasdynamik*. Springer- Verlag, 2004
- [41] HONG, C. ; ASAKO, Y. ; LEE, J.H.: Poiseuille number correlations for high speed micro-flows. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 41 (2008)
- [42] HSIAO, F.B. ; SHEU, S.-S.: Experimental studies on flow transition of a plane wall jet. In: *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* (1996)
- [43] JANICKI, M.: *Modellierung und Simulation von Rotationsverdrängermaschinen*, TU Dortmund, Diss., 2007

- [44] JITSCHIN, W.: Viskose Gasströmung: Strömungsarten und pV-Durchfluß. In: *Vakuum in der Praxis* 4 (1993), S. 260–262
- [45] JITSCHIN, W.: Gasströmung durch Öffnungen und Leitungen. In: *Vakuum in Forschung und Praxis* 3 (1998), S. 226–229
- [46] JORISCH, W.: Trockenlaufende Vakuumpumpen für die Prozess-Industrie. In: *Vakuum in Forschung und Praxis* 2 (2008), S. 33–39
- [47] JOUSTEN, K.: *Handbuch der Vakuumtechnik*. Vieweg, 2004 (8. Auflage)
- [48] KALEMPA, D. ; SHARIPOV, F.: Flows of rarefied gaseous mixtures with a low mole fraction. Separation phenomenon. In: *European Journal of Mechanics* 30 (2011), S. 466–473
- [49] KARNITZ, M.A. ; POTTER, M.C. ; SMITH, M.C.: An Experimental Investigation of Transition of a Plane Poiseuille Flow. In: *Journal of Fluid Engineering* 96 (1974), S. 384–388
- [50] KAUDER, K. ; WENDEROTT, D.: Gasspaltströmungen in Schraubenspindel-Vakuumpumpen. In: *Schraubenmaschinen - Forschungsberichte des FG Fluid-energiemaschinen* 6 (1997), S. 5–19
- [51] KAUDER, K. ; WENDEROTT, D.: Analysis of flow rates as a basis for the simulation of dry-running rotational displacement pumps. In: *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science (Professional Engineering Publishing), Band 216* 12 (2002), S. 1197–1205
- [52] KAYS, W. M.: Turbulent Prandtl Number—Where Are We? In: *Journal of Heat Transfer* 116 (1994), Mai, Nr. 2, S. 284–295
- [53] KIESER, J. ; GRUNDNER, M.: Gas flow through ducts in the whole pressure range. In: *Proceedings of the Eighth International Vacuum Congress*, 1980
- [54] KOVACEVIC, A. ; STOSIC, N. ; SMITH, I. K.: Analysis of screw compressor performance by means of three-dimensional numerical modelling. In: *International Conference on Compressors and their Systems*, 2001
- [55] KÖSTERS, H. ; EICKHOFF, J.: Trockene Schraubenvakuumpumpe mit hoher innerer Verdichtung. In: *VDI-Berichte* 14 (2006), S. 423 – 428
- [56] LANGTRY, R. B. ; MENTER, F. R. ; LIKKI, S. R. ; SUZEN, Y. B. ; HUANG, P. G. ; VOLKER, S.: A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables—Part II: Test Cases and Industrial Applications. In: *Journal of Turbomachinery* 128 (2006), Juli, Nr. 3, S. 423–434
- [57] LIVESEY, R.G.: Flow of Gases through Tubes and Orifices. In: LAFFERTY, J.M. (Hrsg.): *Foundations of Vacuum Science and Technology*. John Wiley & Sons, 1998, Kapitel 2, S. 81–140

- [58] MCCUEN, P.A. ; KAYS, W. M. ; REYNOLDS, W. C.: *Heat transfer with laminar and turbulent flow between parallel planes with constant and variable wall temperature and heat flux.* 1962. – Thermosciences Divison Department of Mechanical Engineering Stanford University Stanford, California
- [59] MENTER, F. R. ; LANGTRY, R. B. ; LIKKI, S. R. ; SUZEN, Y. B. ; HUANG, P. G. ; VOLKER, S.: A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables—Part I: Model Formulation. In: *Journal of Turbomachinery* 128 (2006), Juli, Nr. 3, S. 413–422
- [60] MENTER, F.R.: Influence of Freestream Values on  $k$ - $\omega$  Turbulence Model Prediction. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Juni, Nr. 6
- [61] MENTER, F.R.: Two-Equations Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. In: *AIAA Journal* 32 (1994), S. 1598–1605
- [62] MINKOWYCZ, W.J. ; ABRAHAM, J.P. ; SPARROW, E.M.: Numerical simulation of laminar breakdown and subsequent intermittent and turbulent flow in parallel-plate channels: Effects of inlet velocity profile and turbulence intensity. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52 (2009), August, Nr. 17-18, S. 4040–4046
- [63] NARIS, S. ; VALOUGEORGIS, D. ; KALEMPA, D. ; SHARIPOV, F.: Flow of gaseous mixtures through rectangular microchannels driven by pressure, temperature, and concentration gradients. In: *Physics of Fluids* 17 (2005)
- [64] OERLIKON LEYBOLD VACUUM (Hrsg.): *Gesamtkatalog.* Oerlikon Leybold Vacuum, 2010
- [65] OERTEL, H. ; DELFS, J.: *Strömungsmechanische Instabilitäten.* Universitätsverlag Karlsruhe, 1996
- [66] OERTEL, H. Jr.: *Prandl-Führer durch die Strömungslehre.* 11. Auflage. Vieweg Verlag, 2002
- [67] OERTEL, H. jr. ; BÖHLE, M. ; DOHRMANN, U.: *Strömungsmechanik.* 5. Auflage. Vieweg+Teubner, 2009
- [68] PATANKAR, S.V. ; PHILLIPS, M.A. (Hrsg.) ; MILLMAN, E.M. (Hrsg.): *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Hemisphere Publishing Corporation, 1980
- [69] PERIC, M. ; FERZIGER, J.H.: *Computational Methods for Fluid Dynamics.* 3 Edition. Springer- Verlag, 2002
- [70] PEVELING, F.-J.: *Ein Beitrag zur Optimierung adiabater Schraubenmaschinen in Simulationsrechnungen,* Universität Dortmund, Diss., 1988
- [71] PFLEIDERER, C. ; PETERMANN, H.: *Strömungsmaschinen.* Springer- Verlag, 1997

- [72] ROHE, A.: Simulation und Messung des Druckverlaufes am Beispiel einer Schraubenspindel-Vakuumpumpe. In: *Schraubenmaschinen* Nr. 10 (2002), S. 137 – 148
- [73] ROHE, A.: *Wärmehaushalt von Schraubenspindel-Vakuumpumpen*, Universität Dortmund, Diss., 2005
- [74] SACHS, R.: *Experimentelle Untersuchung von Gasströmungen in Schraubenmaschinen*, Universität Dortmund, Diss., 2002
- [75] SANTELER, D. J.: Exit Loss in viscous tube flow. In: *Journal of Vacuum Science and Technology* 4 / Issue 3 (1986)
- [76] SANTELER, D. J. ; BOECKMANN, M.D.: Molecular flow transmission probabilities of rectangular tubes. In: *Journal of Vacuum Science and Technology* 9 (1991)
- [77] SCHLATTER, P.: *Large Eddy Simulation of Transition and Turbulence in Wall-Bounded Shear Flow*, ETH Zürich, Diss., 2005
- [78] SCHRÖDER, W.: *Fluidmechanik*. Wissenschaftsverlag Mainz in Aachen, 2004
- [79] SEQUOIA TECHNOLOGY LTD (Hrsg.): *SHF Heatflux Sensors*. Basingstoke Road, Reading, Spencers Wood, Berkshire. RG7 1PW: Sequoia Technology Ltd, 2012
- [80] SHAH, R. K. ; LONDON, A. L.: *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press, 1978
- [81] SHAH, R.K. ; LONDON, A. L.: *Handbook of convective heat transfer*. John Wiley & Sons, 1987
- [82] SHAPRIO, A.H.: *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Volume 1*. Ronald Press, 1953
- [83] SHAPRIO, A.H.: *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Volume 2*. Ronald Press, 1953
- [84] SHARIPOV, F.: Non-Isothermal Gas Flow through Rectangular Microchannels. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 9 (1999)
- [85] SHARIPOV, F.: Rarefied gas flow through a long rectangular channel. In: *Journal of Vacuum Science & Technology A* 17 (1999), Nr. 5, S. 3062–3066
- [86] SHARIPOV, F.: Analytische und numerische Berechnungen von stationären Flüssen verdünnter Gase. In: JOUSTEN, K. (Hrsg.): *Handbuch der Vakuumtechnik*. Vieweg + Teubner, 2010, Kapitel 5, S. 149–201
- [87] SHARIPOV, F. ; CUMIN, L.M.G. ; KALEMPA, D.: Heat flux between parallel plates through a binary gaseous mixture over the whole range of the Knudsen number. In: *Physica A* 378 (2007), S. 183–193

- 
- [88] SHARIPOV, F. ; SELEZNEV, V.: Data on Internal Rarefied Gas Flows. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 27 (1998), S. 657–706
- [89] TAN, W.H. ; ELLENRIEDER, K.D. von ; LIM, T.T. ; SORIA, J.: Stability of Taylor-Couette Flow with Axial Flow. In: *14th Australasian Fluid Mechanics Conference*, 2001
- [90] UMRATH, W.: *Grundlagen der Vakuumtechnik*. Oerlikon Leybold Vacuum, 2007
- [91] VERSTEEG, H.K. ; MALALASEKERA, W.: *An Introduction to Fluid Dynamics: The finite volume method*. Longman Scientific & Technical, 1996
- [92] WENDEROTT, D.: *Spaltströmungen im Vakuum*, Universität Dortmund, Diss., 2001
- [93] WHITE, F. M.: *Viscous Fluid Flow*. 3rd Edition. McGraw-Hill, 2006
- [94] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. 2. Edition. DCW Industries, Inc., 1998
- [95] WU, R.S. ; CHENG, K.C. ; OU, J.W.: Low peclet number heat transfer in the thermal entrance region of parallel-plate channels with unequal wall temperatures. In: *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 54 (1976), S. 526–531



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Roland Albert Müller

## Schulbildung

1988 - 1992 Gemeinschaftsgrundschule Siegburg- Kaldauen

09/1992 - 06/2001 Anno-Gymnasium Siegburg

## Zivildienst

07/2001 - 04/2002 Arbeiter-Samariter-Bund in Troisdorf

## Studium

10/2002 - 09/2007 Maschinenbaustudium an der RWTH-Aachen  
Vertiefungsrichtung: Luftfahrttechnik  
Abschluss: Diplom

## Berufstätigkeit

seit 11/2007 Entwicklungsingenieur für Schraubenvakuumpumpen bei der  
Firma Oerlikon Leybold Vacuum, Köln