Portfoliooptimierung im Binomialmodell

Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern zur Verleihung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften (Doctor rerum naturalium, Dr.rer.nat.) genehmigte Dissertation

Henriette Kröner

1. Gutachter: Prof. Dr. Ralf Korn
2. Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Rieder
Datum der Disputation: 13.06.2014
D 386

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung **4**
1.1 Portfoliooptimierung - Begriffsabgrenzung 4
1.2 Das Binomialmodell 5
1.3 Herausforderungen 5

2 Binomialmodell ohne Transaktionskosten **6**
2.1 Binomialmodell für eine Aktie 6
2.1.1 Zielfunktion 6
2.1.2 Optimale Strategie 7
2.1.3 Konvergenz gegen Black-Scholes 11
2.1.4 Zwischenfazit 14
2.2 Mehrere Aktien 15
2.2.1 Optimale Lösung für eine Periode 15
2.2.2 Optimale Lösung für mehrere Perioden 16
2.2.3 Form der Lösung 18
2.2.4 Zwischenfazit 19

3 Binomialmodell mit Transaktionskosten **20**
3.1 Zielfunktion 20
3.2 Schrittweise Lösung des Problems 21
3.2.1 Lösung für eine Periode 21
3.2.2 Schrittweise Vorgehensweise für zwei Perioden 22
3.2.3 Schrittweise Vorgehensweise für drei Perioden 24
3.2.4 Optimale Lösung für mehrere Perioden 25
3.2.5 Zwischenfazit 26
3.3 Optimale Buy-And-Hold-Lösung 26
3.3.1 Hintergrund 26
3.3.2 Existenz von Lösungen ungleich Null 27
3.4 Kombination der Lösungsstrategien 31
3.5 Konvergenz gegen Black-Scholes 32
3.5.1 Existenz von Lösungen ungleich Null im Binomialmodell 32
3.5.2 Existenz von Lösungen ungleich Null im Black-Scholes-Modell 37
3.5.3 Betrachtung des Grenzwerts 38
3.6 Zwischenfazit 48

4 Binomialmodell mit Kosten für mehrere Aktien **49**
4.1 Problemstellung 49
4.2 Optimale Lösungen 50
4.3 Konvergenz 53
4.4 Reduktion der Aktien 59
4.5 Zwischenfazit 64

5 Morton-Pliska-Modell **65**
5.1 Morton-Pliska-Modell für eine Periode 65
5.2 Morton-Pliska-Modell für mehrere Perioden 67
5.3 Abschätzung der realistischen Kosten 71
5.4 Zwischenfazit 73

6 Worst Case Modell **74**
6.1 Binominalmodell für eine Periode 74
6.2 Zwischenfazit 77
6.3 Binominalmodell für mehrere Perioden 77
6.4 Mehrere mögliche Crashs 84
6.5 Die beste konstante Lösung 88
6.6 Veränderte Marktbedingungen nach dem Crash 96
6.7 Mehrere Aktien 102
6.8 Zwischenfazit 108

7 Ergebnis **109**

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Personen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Dissertation unterstützt haben. Mein Dank gilt dabei insbesondere meinem Doktorvater Prof. Dr. Ralf Korn, vor allem für seine Geduld und seine hilfreichen Anregungen.

Des Weiteren danke ich meinem Arbeitgeber d-fine, der mir die Erstellung meiner Doktorarbeit neben dem Beruf ermöglicht hat.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ihre Motivation und moralische Unterstützung.

Kapitel 1

Problemstellung

1.1 Portfoliooptimierung - Begriffsabgrenzung

Unter dem Begriff "Portfoliooptimierung" wird im Folgenden das Problem des optimalen Investierens verstanden. Dabei handelt es sich um die Fragestellung, aus einem gegebenen Portfolio von Wertpapieren einige zum Kauf bzw. Verkauf auszuwählen. Dabei ist sowohl der Zeitpunkt des Handelns als auch die Stückzahl zu bestimmen, die ge- / verkauft werden soll. Die so determinierte Handelsstrategie soll in einer bestimmten Art "optimal" sein, dabei kann es sich sowohl um maximales Endvermögen als auch um Erfüllung einer bestimmten Konsumstrategie (d.h. Entnahmen während der Laufzeit der Investitionen) handeln. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf das maximale Endvermögen.

Weiterhin wird in diesem Zusammenhang eine sogenannte Nutzenfunktion verwendet. Optimiert wird dann nicht das Endvermögen, sondern die Nutzenfunktion des Endvermögens. Nutzenfunktionen sind streng monoton wachsend und konkav, dies spiegelt die Tatsache wider, dass der Nutzen eines bestimmten Gewinns vom bereits erlangten Gewinn abhängt. Dies kann man sich praktisch so veranschaulichen: Wenn man erst 1000 Euro besitzt, sind weitere 1000 Euro Zuwachs sehr viel, wenn man hingegen bereits 1 Mio. Euro sein Eigen nennt, spielen weitere 1000 Euro keine so entscheidende Rolle mehr. Das Problem des optimalen Portfolios ist für die häufig verwendete Nutzenfunktion des natürlichen Logarithmus ln sowie für lognormalverteilte Wertpapierprozesse (d.h. im Black-Scholes-Modell) ohne Transaktionskosten, Steuern, etc. analytisch lösbar (siehe z.B. Korn und Korn, [2]). Für allgemeinere Prozesse gestaltet sich die Lösung jedoch sehr schwierig.

In der vorliegenden Arbeit soll sich daher zunächst auf ein recht einfaches Modell für den Wertpapierprozess beschränkt werden: Das Binomialmodell. Dieses hat den Vorteil, dass es ein diskretes Modell darstellt und daher analytisch bzw. mit einfachen numerischen Mitteln lösbar ist. Darüber hinaus kann man aber durch geeignete Parameterwahl eine Konvergenz gegen zeitstetige Modelle (wie z.B. das Black-Scholes-Modell) erreichen. Die grundsätzliche Idee hierzu stammt aus der Optionsbewertung, wo dies im Rahmen des Cox-Ross-Rubinstein-Modells [1] bereits erprobt wurde.

Als Nutzenfunktion wird weiterhin stets der natürliche Logarithmus verwendet.

1.2 Das Binomialmodell

Im Binomialmodell des Aktienmarktes kann der Preis einer Aktie mit Anfangswert S_0 nach einer Periode nur entweder uS_0 (nach einer Aufwärtsbewegung) oder dS_0 (nach einer Abwärtsbewegung) sein.

$$S_1 = \begin{cases} uS_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$

Dieses Modell wurde bereits als Cox-Ross-Rubinstein-Modell [1] zur Bestimmung des Preises von Optionen eingesetzt. Das Grundprinzip ist dabei der schrittweise Aufbau des Baumes, die Bestimmung des Preises für n Schritte und anschließend die Ermittlung des Grenzwertes für $n \to \infty$. Ähnlich soll hier für den Bereich der Portfoliooptimierung vorgegangen werden.

1.3 Herausforderungen

Bei der Verwendung des Binomialmodells liegt der Vorteil gerade in der analytisch bzw. numerisch einfacheren Ermittelbarkeit der Lösungen. Die Herausforderung ist hingegen das Zeigen der Konvergenz gegen zeitstetige Modelle.

Im Vergleich zur Optionspreisberechnung ergibt sich hierbei noch ein zusätzliches Problem: Für die Preisberechnung ist es ausreichend, die Konvergenz der Erwartungswerte zu zeigen, da in dem Fall genau der Erwartungswert, also der Optionspreis, interessant ist.

Für die Portfoliooptimierung ist jedoch die Konvergenz der Erwartungswerte, d.h. des Endvermögens, weniger interessant, eigentlich wichtig ist die Konvergenz der optimalen Anlagestrategie, d.h. der Weg zum Erreichen des optimalen Endvermögens. Hierfür muss man im allgemeinen Fall jedoch zuerst zeigen, dass die Erwartungswerte für eine feste Strategiewahl konvergieren (wie in der Optionspreisberechnung). Anschließend muss man zeigen, dass auch die Suprema dieser Erwartungswerte konvergieren - hierbei wird sich die Strategie mit steigender Feinheit des Binomialbaums i.d.R. ändern. Schließlich ist zu beweisen, dass auch die Punkte, an denen die Suprema erreicht werden, d.h. die optimalen Strategien, gegen die optimale Strategie im zeitstetigen Modell konvergieren.

Folglich sind die Konvergenzbeweise für die Portfoliooptimierung deutlich aufwändiger als in der Optionspreisberechnung. Dies reflektiert auch die höhere Komplexität: Während man in der Optionsausübung nur entscheiden muss, ob und ggf. noch wann man die Option ausübt, muss man in der Portfoliooptimierung neben dem "ob" und "wann" auch noch das "wie viel" entscheiden, d.h. wie viel man zu einem gegebenen Zeitpunkt in eine Aktie investieren möchte.

Kapitel 2

Portfoliooptimierung im Binomialmodell ohne Transaktionskosten

2.1 Binomialmodell für eine Aktie

2.1.1 Zielfunktion

Für eine Periode ist die folgende Funktion zu maximieren:

$$P(x_0) := \mathbb{E}(\ln(x_0(S_1 - S_0B) + X_0B)) = \mathbb{E}(U(X_1))$$

wobei die folgende Notation verwendet wurde:

x_0	...	Anzahl der Aktien für die erste Periode (Zielgröße)
S_0	...	Startpreis der Aktie
S_1	...	Aktienpreis nach Periode 1
B	...	risikolose Verzinsung (Wert einer Einheit nach Periode 1)
X_0	...	Anfangsvermögen
X_1	...	Vermögen nach Periode 1
ln	...	Nutzenfunktion (monoton wachsend, konkav, zweimal differenzierbar)

Diese Funktion unterstellt, dass zum Zeitpunkt 0 noch keine Aktien sondern nur Barvermögen (oder äquivalent) im Bestand vorliegen. Es wird vorausgesetzt, dass $S_0, B, X_0 > 0$.

Anmerkung: Es wird zunächst nicht ausgeschlossen, dass $X_1 < 0$ vorkommen kann. Weiterhin kann x_0 sowohl positive als auch negative Werte annehmen (d.h. Shortselling erlaubt), es können ebenfalls mehr Aktien gekauft werden, als es das Anfangsvermögen zulässt (d.h. Aktienkauf auf Kredit erlaubt).

Weitere Anmerkung: Häufig verwendet man in der Literatur statt x_0, der Anzahl der Aktien, π_0, der Anteil der Aktien am Gesamtvermögen. Prinzipiell sind die Darstellungen äquivalent, da man sie aufgrund der Beziehung $\pi_0 = \frac{x_0 S_0}{X_0}$ leicht ineinander überleiten kann. Für den Fall ohne Transaktionskosten ist die Darstellung über π_0 stellenweise vorteilhafter, daher wird sie im Laufe der Arbeit auch noch verwendet werden. Für den allgemeinen Fall mit Transaktionskosten ist die Darstellung über x_0 intuitiver, da die Transaktionskosten auf der Anzahl der gekauften Aktien und nicht auf dem Aktienanteil im Portfolio beruhen.

Um den Erwartungswert zu berechnen, sind weiterhin folgende Angaben erforderlich:

u ... prozentuale Steigerung bei einer Aufwärtsbewegung der Aktie, $u > B$
d ... prozentuale Minderung bei einer Abwärtsbewegung der Aktie, $d < B$
p ... Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung

Der Erwartungswert ist leicht zu berechnen, da S_1 nur zwei Werte annehmen kann. Die resultierende Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig und differenzierbar, d.h. das Maximum kann über den üblichen Weg (erste Ableitung auf 0 setzen) bestimmt werden.

Für n Perioden ergibt sich die Zielfunktion als:

$$\mathbb{E}(\ln(X_n)) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B) + B^n X_0\right)\right)$$

mit $n \geq 1$.

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die einzelnen x_i potenziell von der Pfadentwicklung des Aktienkurses, d.h. von den Realisierungen von $S_1, ..., S_i$ abhängen. Dadurch ergibt sich, dass zunächst insgesamt nicht n, sondern $2^n - 1$ Variablen bei der Maximierung der Funktion zu berücksichtigen sind.

2.1.2 Optimale Strategie im Binomialmodell

Die optimale Handelsstrategie im Binomialmodell findet sich bereits in Pliska, [7], und soll hier nur noch einmal zur Vorbereitung auf die folgenden Abschnitte rekapituliert werden.

Lemma 1 *Die optimale Aktienanzahl für eine Periode im Binomialmodell ohne Transaktionskosten ist*

$$x_0^* = -\frac{BX_0}{S_0}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)$$

Beweis: Für die optimale Lösung muss mindestens gelten, dass $P(x_0) > -\infty$, d.h. $x_0 S_0(u - B) + X_0 B > 0$ und $x_0 S_0(d - B) + X_0 B > 0$. Daraus folgt, dass es ausreichend ist, das Intervall

$$\left(-\frac{X_0 B}{S_0(u-B)}, \frac{X_0 B}{S_0(B-d)}\right)$$

zu betrachten. An den Intervallgrenzen strebt weiterhin $P(x_0)$ gegen $-\infty$, so dass es sich bei dem gesuchten Optimum um ein lokales Maximum handeln muss.

Die Lösung kann somit einfach durch Ableiten der Zielfunktion ermittelt werden:

$$\begin{aligned} P'(x_0) \quad &= \quad p\frac{S_0(u-B)}{x_0 S_0(u-B) + X_0 B)} + (1-p)\frac{S_0(d-B)}{x_0 S_0(d-B) + X_0 B)} \\ &= \quad 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x_0 = -\frac{BX_0}{S_0}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} P''(x_0) \quad &= \quad -\left(p\frac{S_0^2(u-B)^2}{(x_0^+ S_0(u-B) + X_0 B)^2} + (1-p)\frac{S_0^2(d-B)^2}{(x_0^+ S_0(d-B) + X_0 B)^2}\right) \\ &< \quad 0 \end{aligned}$$

daher ist die ermittelte Lösung tatsächlich ein Maximum.

□

Das allgemeine Problem ohne Kosten hat die folgende Form:

$$\begin{aligned}
&P(x_0, x_1(u), x_1(d), ..., x_{n-1}(u^n), ..., x_{n-1}(d^n)) \\
&= \mathbb{E}(\ln(X_n)) = \mathbb{E}\left[\ln\left(B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(S_1, ..., S_i) B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B)\right)\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{2^n} \mathbb{P}(\text{path}_\ell(n)) \ln\left(B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\text{path}_\ell(n)) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n)) - S_i(\text{path}_\ell(n))B)\right)
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{P}(\text{path}_\ell(n)) = p^j(1-p)^{n-j}$$

für einen Pfad ℓ der Länge n mit j Aufwärts- und entsprechend $n-j$ Abwärtsbewegungen. Weiterhin darf jedes x_i immer nur von den ersten i Schritten des jeweiligen Pfades abhängen.

Satz 2 *Die optimale Lösung im Binomialmodell ohne Kosten für n Perioden lässt sich analytisch ermitteln und ergibt sich wie folgt:*

$$x_i = -\frac{BX_i}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \forall i = 0 \dots n-1.$$

Beweis: Da die Zielfunktion differenzierbar ist, kann auch hier wieder die übliche Vorgehensweise zum Finden der optimalen Lösung verfolgt werden. Dabei soll rückwärts vorgangen und damit zunächst die verschiedenen $x_{n-1}(\text{path}_\ell)$ betrachtet werden. Dies sind insgesamt 2^{n-1} Variablen, d.h. eine für jeden möglichen Pfad zu S_{n-1} (da zunächst nicht von einer rekombinierenden Aktienanzahl ausgegangen werden kann). Global betrachtet ist ein spezielles x_{n-1} somit nur für zwei Pfade relevant, d.h. dass sich die obige Summe über 2^n Pfade beim Differenzieren auf zwei reduziert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1))} \\
&= \frac{p\mathbb{P}(\text{path}_\ell(n-1))(S_n(\text{path}_\ell(n-1)+u) - S_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1)+u)B)}{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\text{path}_\ell(n-1)) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n-1)+u) - S_i(\text{path}_\ell(n-1)+u)B)} \\
&+ \frac{(1-p)\mathbb{P}(\text{path}_\ell(n-1))(S_n(\text{path}_\ell(n-1)+d) - S_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1)+d)B)}{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\text{path}_\ell(n-1)) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n-1)+d) - S_i(\text{path}_\ell(n-1)+d)B)}
\end{aligned}$$

wobei "$\text{path}_\ell(n-1)+d$" bedeutet, dass der Pfad ℓ nach $n-1$ Schritten im n-ten Schritt mit einer Abwärtsbewegung fortgesetzt wird. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\text{path}_\ell(n-1)) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n-1)+d) - S_i(\text{path}_\ell(n-1)+d)B) \\
&= B^n X_0 + x_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1))(d-B) S_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1)) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} x_i(\text{path}_\ell(n-1)) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n-1)) - S_i(\text{path}_\ell(n-1))B)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n-1))} = 0\\
&\iff x_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n-1))\\
&\quad = -\frac{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-2} x_i(\mathrm{path}_\ell(n–1))B^{n-i-1}(S_{i+1}(\mathrm{path}_\ell(n–1)) - S_i(\mathrm{path}_\ell(n–1))B)}{S_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n–1))}\\
&\qquad \cdot \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)
\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned}
&P(x_0, ..., x_{n-1})\\
&= \sum_{\ell=0}^{2^n} \mathbb{P}(\mathrm{path}_\ell(n)) \ln\left(\left(1 - \frac{(S_n(\mathrm{path}_\ell(n)) - S_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n))B)}{S_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n)}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\right)\right.\\
&\quad \left.\left(B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-2} x_i(\mathrm{path}_\ell(n))B^{n-i-1}(S_{i+1}(\mathrm{path}_\ell(n)) - S_i(\mathrm{path}_\ell(n))B)\right)\right)\\
&= \sum_{\ell=0}^{2^n} \mathbb{P}(\mathrm{path}_\ell(n)) \ln\left(B\left(1 - \frac{(S_n(\mathrm{path}_\ell(n)) - S_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n))B)}{S_{n-1}(\mathrm{path}_\ell(n))}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\right)\right)\\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(\mathrm{path}_\ell(n-1))\\
&\quad \ln\left(B^{n-1}X_0 + \sum_{i=0}^{n-2} x_i(\mathrm{path}_\ell(n–1))B^{n-i-2}(S_{i+1}(\mathrm{path}_\ell(n–1)) - S_i(\mathrm{path}_\ell(n–1))B)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(B\left(1 - \frac{(S_n - S_{n-1}B)}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\right)\right)\right) + \mathbb{E}(\ln(X_{n-1}))
\end{aligned}$$

Für den Rest kann man sich der Induktion bedienen. Der Induktionsanfang ist hierbei trivial, da gemäß dem vorigen Lemma

$$x_0 = -\frac{BX_0}{S_0}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)$$

gilt. Die Induktionsannahme lautet dann

$$x_i = -\frac{B^{i+1}X_0}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\prod_{j=0}^{i-1}\left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j}\right) \forall i = 0 \ldots n-2$$

Setzt man dies in die obige Formel für das optimale x_{n-1} ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= -\frac{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-2} x_i B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B)}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \\
&= -\frac{B^n X_0}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \\
&\quad \left[1 - \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{i+1} - S_i B}{S_i} \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) \right] \\
&= -\frac{B^n X_0}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \left[\left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_1 - S_0 B}{S_0} \right) \right. \\
&\quad - \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_1 - S_0 B}{S_0} \right) \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{i+1} - S_i B}{S_i} \\
&\quad \left. \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) \right] \\
&= -\frac{B^n X_0}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_1 - S_0 B}{S_0} \right) \\
&\quad \left[1 - \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{i+1} - S_i B}{S_i} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) \right] \\
&= \ldots \\
&= -\frac{B^n X_0}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right)
\end{aligned}$$

womit die Induktionsannahme bewiesen wäre.

Durch Einsetzen in die Formel für X_n folgt daraus:

$$\begin{aligned}
X_n &= B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B)) \\
&= B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{B^{i+1} X_0}{S_i} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \\
&\qquad \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B)) \\
&= B^n X_0 \left[1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{i+1} - S_i B}{S_i} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) \right] \\
&= B^n X_0 \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right)
\end{aligned}$$

Dies wiederum reduziert die Formel für die optimalen Aktienanzahlen wie folgt:

$$x_i = -\frac{BX_i}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \forall i = 0 \dots n-1$$

□

Anmerkung: Daraus ergibt sich weiterhin, dass

$$\frac{x_i S_i}{X_i} \equiv -B\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \forall i = 0 \dots n-1$$

d.h. wie auch im Black-Scholes-Modell erhält man für die logarithmische Nutzenfunktion als Lösung einen konstanten Aktienanteil am Gesamtportfolio.

Im Übrigen erkennt man an der obigen Form von x_i, dass die Aktienanzahl rekombinierend (und damit nicht pfadabhängig) ist, da

$$x_i = -\frac{B^{i+1}X_0}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\prod_{j=0}^{i-1}\left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\left(\frac{S_{j+1}}{S_j} - B\right)\right)$$

und somit ist nur die Anzahl und nicht die Abfolge der jeweiligen Auf- und Abwärtsbewegungen relevant.

Weiterhin ist x_i nicht explizit abhängig von x_{i-1}, d.h. es gibt keine Abhängigkeit von vorher getroffenen Entscheidungen sondern nur von der Entwicklung des Aktienkurses.

2.1.3 Konvergenz gegen die Lösung im Black-Scholes-Modell

Analog zur Vorgehensweise bei der Bewertung von Optionen kann man auch für das Problem optimaler Portfolien eine Konvergenz gegen das Optimum des Black-Scholes-Modells erreichen. Dazu wird folgende Parameterwahl vorgenommen (gemäß R. J. Rendleman und B. J. Bartter, [4]):

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n + \sigma\sqrt{t_n}\right)\\
d_n &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n - \sigma\sqrt{t_n}\right)\\
p &= \frac{1}{2}\\
B_n &= \exp(rt_n)\\
t_n &= \frac{T}{n}
\end{aligned}$$

Dabei soll weiterhin gelten, dass

$$\begin{aligned}
& d_n < B_n < u_n \qquad \forall n\\
\iff & \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n - \sigma\sqrt{t_n} < rt_n < \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n + \sigma\sqrt{t_n} \qquad \forall n\\
\iff & \mu - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{T}} < r < \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Dann gilt:

Satz 3 *Sei $x_i^{(n)}$ die optimale Lösung im $i-$ten Schritt für das Binomialmodell mit n Schritten. Dann gilt gemäß Satz 2, dass*

$$\frac{x_i^{(n)} S_i}{X_i} \equiv -\frac{B_n}{2}\left(\frac{1}{d_n - B_n} + \frac{1}{u_n - B_n}\right) =: \pi_n$$

und weiterhin

$$lim_{n\to\infty}\pi_n = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Beweis: Zunächst gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} e^{r\frac{T}{n}} =: \lim_{\Delta T\to 0} e^{r\Delta T} = 1$$

Der Limit ist somit nur noch für den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{d_n - B_n} + \frac{1}{u_n - B_n}\right)$$

zu ermitteln.

Da $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$, lässt sich l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n - B_n} + \frac{1}{u_n - B_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + d_n - 2B_n}{(d_n - B_n)(u_n - B_n)} \\
&= \lim_{\Delta T\to 0} \frac{e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T + \sigma\sqrt{\Delta T}} + e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T - \sigma\sqrt{\Delta T}} - 2e^{r\Delta T}}{(e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T - \sigma\sqrt{\Delta T}} - e^{r\Delta T})(e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T + \sigma\sqrt{\Delta T}} - e^{r\Delta T})} \\
&= \lim_{\Delta T\to 0} \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta t}}\right) u_n + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta t}}\right) d_n - 2rB_n}{u_n d_n(2\mu - \sigma^2) - B_n\left(d_n\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta t}} + r\right) + u_n\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta t}} + r\right)\right) + 2rB_n^2}
\end{aligned}$$

Multipliziert man nun Zähler und Nenner mit $\sqrt{\Delta t}$ und wendet erneut l'Hospital an, so erhält man für den Zähler

$$\begin{aligned}
&\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}(u_n + d_n) + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{4}\right) u_n \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{4}\right) d_n - \frac{r + 2r^2\Delta t}{\sqrt{\Delta t}} B_n
\end{aligned}$$

und für den Nenner

$$
\begin{aligned}
& u_n d_n (2\mu - \sigma^2) \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left((2\mu - \sigma^2)\Delta t + \frac{1}{2} \right) \\
& -rB_n \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(d_n \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta t} + r\Delta t \right) + u_n \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta t} + r\Delta t \right) \right) \\
& -B_n \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\sigma^2}{4} \right) d_n \\
& -B_n \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} r d_n \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta t} \right) - B_n \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} d_n \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + r \right) \\
& -B_n \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\sigma^2}{4} \right) u_n \\
& -B_n \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} r u_n \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta t} \right) - B_n \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} u_n \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + r \right) \\
& + \frac{4r^2 B_n \Delta t + rB_n^2}{\sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}
$$

Nach erneutem Multiplizieren mit $\sqrt{\Delta t}$ ist nun das Limit in Zähler und Nenner ungleich 0, nämlich für den Zähler

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} - r = \mu - r$$

und für den Nenner

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} - 0 - \frac{\sigma^2}{4} - 0 - \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + r \right) - \frac{\sigma^2}{4} - 0 - \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + r \right) + r = -\frac{\sigma^2}{2}$$

d.h. insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{B_n}{2}\left(\frac{1}{d_n - B_n} + \frac{1}{u_n - B_n} \right) = -\frac{1}{2}\frac{\mu - r}{-\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

□

Die Konvergenz ist nicht rein auf das Rendleman-Bartter-Modell beschränkt, sie gilt auch für das Cox-Ross-Rubinstein-Modell (siehe [1]) mit

$$
\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(\sigma\sqrt{t_n}\right) \\
d_n &= \exp\left(-\sigma\sqrt{t_n}\right) \\
p_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{t_n}
\end{aligned}
$$

Satz 4 *Sei $x_i^{(n)}$ die optimale Lösung im $i-$ten Schritt für das Binomialmodell mit n Schritten. Dann gilt gemäß Satz 2, dass*

$$\frac{x_i^{(n)} S_i}{X_i} \equiv B_n \frac{p_n u_n + (1-p_n)d_n - B_n}{(u_n - B_n)(B_n - d_n)} =: \pi_n$$

und weiterhin

$$lim_{n\to\infty}\pi_n = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Beweis: Da auch hier $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$, lässt sich wieder l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{p_n u_n + (1-p_n)d_n - B_n}{(u_n - B_n)(B_n - d_n)} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} - e^{2r\Delta t} - 1} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} + \sigma + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}\right) e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\left(\frac{1}{2}\sigma + r\sqrt{\Delta t}\right) e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} + \left(-\frac{1}{2}\sigma + r\sqrt{\Delta t}\right) e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} - 2re^{2r\Delta t}} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} - \sigma + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}\right) e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} - r\sqrt{\Delta t} e^{r\Delta t}}{\left(\frac{1}{2}\sigma + r\sqrt{\Delta t}\right) e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} + \left(-\frac{1}{2}\sigma + r\sqrt{\Delta t}\right) e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} - 2r\sqrt{\Delta t} e^{2r\Delta t}}
\end{aligned}$$

Wendet man erneut l'Hospital an, so erhält man für den Zähler

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\frac{1}{8} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \left(2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \left(2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma^2 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\Delta t}\right) - \left(\frac{1}{2}r + r^2\Delta t\right) e^{r\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

und für den Nenner

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}\sigma^2 + \sigma r\sqrt{\Delta t} + r^2\Delta t\right) e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}\sigma^2 - \sigma r\sqrt{\Delta t} + r^2\Delta t\right) e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{r\Delta t} - \left(r + 2r^2\Delta t\right) e^{r\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

Nach Multiplizieren mit $\sqrt{\Delta t}$ ist nun das Limit in Zähler und Nenner ungleich 0, nämlich für den Zähler

$$\frac{1}{4}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{8}\sigma^2 - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}r$$

und für den Nenner

$$\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}\sigma^2 - r = \frac{1}{2}\sigma^2$$

d.h. insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

□

2.1.4 Zwischenfazit

Als Ergebnis der vorangegangenen Abschnitte lässt sich festhalten, dass die optimale Handelsstrategie im Binomialmodell die gleichen Grundeigenschaften wie das stetige Modell aufweist und darüber hinaus gegen die Lösung im stetigen Modell konvergiert.

Auf dieser Grundlage ist es sinnvoll, das Binomialmodell weiter zu untersuchen, insbesondere im Hinblick auf Erweiterungen, die im stetigen Modell zu größeren Schwierigekeiten führen - wie z.B. Transaktionskosten.

2.2 Binomialmodell für mehrere Aktien

2.2.1 Optimale Lösung für eine Periode

Für eine Periode ist die folgende Funktion zu maximieren:

$$P^m(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(m)}) := \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} x_0^{(j)}(S_1^{(j)} - S_0^{(j)}B) + X_0 B\right)\right).$$

Satz 5 *Die Funktion P^m hat ein eindeutiges globales Maximum, d.h. das Optimierungsproblem im Binomialmodell mit mehreren Aktien hat eine eindeutige Lösung.*

Beweis: Zunächst sei angemerkt, dass für die optimale Lösung nur solche Aktienanzahlen vorkommen können, für die

$$\sum_{j=1}^{m} x_0^{(j)}(S_1^{(j)} - S_0^{(j)}B) > -X_0 B$$

für jeden möglichen Wert von $S_1^{(1)}, ..., S_1^{(m)}$, da sonst einer der Terme des Erwartungswerts ≤ 0 werden und damit der Logarithmus den Wert $-\infty$ annehmen würde.

Das so definierte Intervall sei im Folgenden mit I^m bezeichnet, weiterhin sei festgehalten, dass P^m an den Rändern von I^m gegen $-\infty$ geht. Folglich wäre eines der in I^m identifizierten lokalen Maxima aufgrund der Stetigkeit von P^m in I^m gleichzeitig auch das globale Maximum von P^m.

Zur Berechnung des lokalen Maximums sollen die Gradienten herangezogen werden.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^m}{\partial x_0^{(j)}} &= \sum_{\omega}\left[\frac{p(\omega, S_1^{(j)} = u_j S_0^{(j)}) S_0^{(j)}(u_j - B)}{x_0^{(j)} S_0^{(j)}(u_j - B) + \sum_{i\neq j} x_0^{(i)}(S_1^{(i)}(\omega) - S_0^{(i)}B) + X_0 B}\right.\\ &\qquad \left. + \frac{p(\omega, S_1^{(j)} = d_j S_0^{(j)}) S_0^{(j)}(d_j - B)}{x_0^{(j)} S_0^{(j)}(d_j - B) + \sum_{i\neq j} x_0^{(i)}(S_1^{(i)}(\omega) - S_0^{(i)}B) + X_0 B}\right]\end{aligned}$$

wobei ω die möglichen Zustände der restlichen Aktien bezeichnet und $p(\omega, S_1^{(j)} = u_j S_0^{(j)})$ die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Für feste $x_0^{(i)}, i \neq j$ gilt: Die Nenner der Terme sind für $x_0 \in I^m$ stets positiv, wenn $x_0^{(j)}$ gegen das untere Limit läuft, geht $\frac{\partial P^m}{\partial x_0^{(j)}}$ gegen $+\infty$ (da der Nenner gegen 0 geht und $u_j > B$), wenn $x_0^{(j)}$ gegen das obere Limit läuft, geht die partielle Ableitung gegen $-\infty$ (Nenner gegen 0, $d_j < B$). Folglich existiert aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitung für $x_0 \in I^m$ mindestens eine Nullstelle. Weiterhin gilt für die zweite partielle Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P^m}{\partial x_0^{(j)} \partial x_0^{(j)}} &= -\sum_{\omega}\left[\frac{p(\omega, S_1^{(j)} = u_j S_0^{(j)})(S_0^{(j)}(u_j - B))^2}{\left(x_0^{(j)} S_0^{(j)}(u_j - B) + \sum_{i\neq j} x_0^{(i)}(S_1^{(i)}(\omega) - S_0^{(i)}B) + X_0 B\right)^2}\right.\\ &\qquad \left. + \frac{p(\omega, S_1^{(j)} = d_j (S_0^{(j)}) S_0^{(j)}(d_j - B))^2}{\left(x_0^{(j)} S_0^{(j)}(d_j - B) + \sum_{i\neq j} x_0^{(i)}(S_1^{(i)}(\omega) - S_0^{(i)}B) + X_0 B\right)^2}\right]\\ &< 0\end{aligned}$$

Folglich ist die partielle Ableitung in $x_0^{(j)}$ streng monoton fallend und hat damit höchstens eine bzw. zusammenfassend genau eine Nullstelle für fixe Werte für $x_0^{(i)}, i \neq j$. Damit hat P^m genau ein lokales Extremum in I^m.

Da P^m an den Rändern von I^m den Wert $-\infty$ annimmt und in I^m, z.B. für $x_0^{(1)} = ... = x_0^{(m)} = 0$, positive Werte, muss das eindeutige lokale Extremum ein lokales Maximum sein. Wie oben bereits gezeigt ist eines der lokalen Maxima auch das globale Maximum, folglich folgt aus der Existenz des eindeutigen lokalen Maximums auch die Existenz und Eindeutigkeit des globalen Maximums. □

2.2.2 Optimale Lösung für mehrere Perioden

Für n Perioden ist die folgende Funktion zu maximieren:

$$P_n^m := \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} x_i^{(j)}(S_{i+1}^{(j)} - S_i^{(j)}B)B^{n-i-1} + X_0 B^n\right)\right).$$

Unter Nutzung der optimalen Aktienanteile

$$\pi_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j)} S_i^{(j)}}{X_i}$$

lässt sich dies umschreiben zu

$$P_n^m := \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0 \prod_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{m} \pi_i^{(j)}\left(\frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}} - B\right) + B\right]\right)\right).$$

Satz 6 *Die optimalen Aktienanteile $\pi_i^{(j)}$ sind konstant in i, d.h. für jeden Schritt im Binomialbaum identisch.*

Beweis: P_n^m lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$P_n^m := \ln(X_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} \pi_i^{(j)}\left(\frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}} - B\right) + B\right)\right).$$

Wegen der identischen Verteilung von $\frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}}$ für alle i ergibt sich somit für die partielle Ableitung nach $\pi_i^{(j)}$ dass

$$\frac{\partial P^m}{\partial \pi_i^{(j)}} = \frac{\partial P^m}{\partial \pi_0^{(j)}} \ \forall i$$

Somit folgt aus Satz 5 die Existenz von eindeutigen lokalen Maxima für jeden Schritt i im Binomialbaum, aufgrund der Gleichheit der Gradienten liegen die lokalen Maxima weiterhin stets beim optimalen $\pi_0^{(j)}$. □

Die optimale Lösung ist im Gegensatz zum eindimensionalen Fall nicht analytisch gegeben. Sie kann jedoch unter Nutzung des Gradientenverfahrens ermittelt werden (da die Zielfunktion differenzierbar ist). Das klassische Gradientenverfahren folgt folgendem Algorithmus:

1. Startwert ist $\pi^{(j)} = 0 \ \forall j$.
2. Berechne $\nabla P^m(\pi)$.
3. Falls Präzision erreicht ($||\nabla P^m|| < \epsilon$), $\pi^* = \pi$. Ende.
4. Sonst, löse das Problem $\max_\alpha\{P^m(\pi + \alpha\nabla P^m(\pi))\}$ zur Bestimmung der Schrittlänge α und setze $\pi := \pi - \alpha\nabla P^m(\pi)$. Weiter mit 2.

Im vorliegenden Fall kann der Gradient analytisch bestimmt werden. Weiterhin ist auch $P^m(\pi + \alpha\nabla P^m(\pi))$ in α differenzierbar. Somit kann der Algorithmus wie folgt konkretisiert werden:

1. Startwert ist $\pi^{(j)} = 0 \ \forall j$.
2. Berechne
$$(\nabla P^m(\pi))_j = \mathbb{E}\left(\frac{\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B}{\sum_{k=1}^m \pi^{(k)}\left(\frac{S_1^{(k)}}{S_0^{(k)}} - B\right) + B}\right)$$
3. Falls Präzision erreicht ($||\nabla P^m|| < \epsilon$), $\pi^* = \pi$. Ende.
4. Finde die Nullstelle von
$$\frac{\partial P^m(\pi + \alpha\nabla P^m(\pi))}{\partial\alpha} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^m (\nabla P^m(\pi))_j\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right)}{\sum_{j=1}^m (\pi^{(j)} + \alpha(\nabla P^m(\pi))_j)\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right) + B}\right)$$
mit Hilfe des eindimensionalen Intervallhalbierungsverfahrens und den Startwerten
   - $\alpha = 0$
   - Falls $\frac{\partial P^m(\pi+\alpha\nabla P^m(\pi))}{\partial\alpha}(0) > 0$ dann
   $$\min_\omega\left\{-\frac{\sum_{j=1}^m \pi^{(j)}(\omega_j - B) + B}{\sum_{j=1}^m (\nabla P^m(\pi))_j(\omega_j - B)}\right\} - \epsilon \text{ für } \sum_{j=1}^m (\nabla P^m(\pi))_j(\omega_j - B) < 0$$
   sonst
   $$\max_\omega\left\{-\frac{\sum_{j=1}^m \pi^{(j)}(\omega_j - B) + B}{\sum_{j=1}^m (\nabla P^m(\pi))_j(\omega_j - B)}\right\} + \epsilon \text{ für } \sum_{j=1}^m (\nabla P^m(\pi))_j(\omega_j - B) > 0$$
   (dabei steht ω für die möglichen Ausprägungen von $\frac{S_1}{S_0}$).

   Weiter mit 2.

Anmerkungen zur Bestimmung der Schrittlänge α:

- Dass das so gefundene lokale Optimum tatsächlich das eindeutige globale Maximum ist, kann analog zur Eindeutigkeit des Maximums für eine Aktie und eine Periode gezeigt werden (zweite Ableitung ist stets negativ, an den Rändern strebt die Funktion gegen $-\infty$).
- Der zweite Startwert ist jeweils die kleinste positive Polstelle (falls die Ableitung bei $\alpha = 0$ positiv ist) bzw. die größte negative Polstelle - abzgl. bzw. zzgl. ϵ, um den Startwert zu einem zulässigen Wert für α zu machen.
- Es ist möglich, dass die Funktion so steil abfällt / ansteigt, dass die Nullstelle in der ϵ-Umgebung der Polstelle liegt (und innerhalb der numerischen Präzision nicht ermittelt werden kann). In diesem Fall kann man approximativ die um ϵ reduzierte / erhöhte Polstelle als Schrittweite verwenden.
- Falls $\alpha \max\{|(\nabla P^m(\pi))_j|\} < \epsilon$, d.h. falls die Veränderung der optimalen Lösung nicht mehr innerhalb der numerischen Präzision liegt, kann die Berechnung ebenfalls abgebrochen werden, da das (approximative) Maximum erreicht wurde.

2.2.3 Form der Lösung

Im Fall mit nur einer Aktie lässt sich der optimale Aktienanteil auch schreiben als

$$\pi^* = \frac{(pu + (1-p)d - B)B}{(u-B)(B-d)}$$

folglich ist er im Fall $\mathbb{E}\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = pu + (1-p)d > B$ positiv, im umgekehrten Fall negativ. Dies lässt sich nicht auf mehrere Aktien verallgemeinern, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

Es werden folgende Parameter verwendet:

$$\begin{aligned} S_0^{(1)} = S_0^{(2)} &= 10 \\ B &= 1,04 \\ X_0 &= 10000 \\ p &= 0,5 \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1,3 & , & u_2 = 2,4 \\ d_1 = 0,8 & , & d_2 = 0,9 \\ pu_1 + (1-p)d_1 - B = 0,01, & & pu_2 + (1-p)d_2 - B = 0,61 \end{array}$$

sowie

$$\rho = 0,5$$

Die optimale Lösung liegt dann bei

$$\pi^{(1)} = -0,93, \pi^{(2)} = 3,43$$

d.h. obwohl die Erwartungswerte der Aktienzuwächse in beiden Fällen positiv sind, ist die optimale Lösung für die erste Aktie negativ.

Anschaulich betrachtet kauft man in diesem Fall die zweite Aktie, um den Ertrag zu maximieren (da sie in jedem Fall im Vergleich zur ersten Aktie die bessere Wahl ist) und verkauft die erste Aktie zur Risikominimierung (im Verlustfall sind beide Aktien ähnlich, so dass die leerverkaufte erste Aktie den Verlust der zweiten gut ausgleicht).

2.2.4 Zwischenfazit

Das Binomialmodell kann auch genutzt werden, um das Problem für mehrere Aktien zu lösen. Die optimale Lösung kann mit Standardmethoden der Optimierung ermittelt werden.

Weiterhin gibt es im Gegensatz zum Problme mit nur einer Aktie Fälle, in denen es aufgrund vorliegender Korrelationen optimal sein kann, eine Aktie leerzuverkaufen, obwohl deren Erwartungswert über dem der risikolosen Anlage liegt.

Kapitel 3

Binomialmodell mit Transaktionskosten für eine Aktie

3.1 Zielfunktion

Die Zielfunktion setzt sich wie folgt zusammen:

Der Aktienkauf bzw. -verkauf kostet initial zunächst $x_0 S_0$. Weiterhin muss man fixe Transaktionskosten K zahlen - allerdings nur, wenn $x_0 \neq 0$, d.h. wenn man einen Aktienkauf / -verkauf getätigt hat. Schließlich muss man variable Kosten in Höhe von $k|x_0|S_0$ zahlen - hier kommt es nur auf die absolute Höhe der getätigten Transaktion an, man muss sowohl für Käufe als auch für Verkäufe zahlen.

Für die Betrachtung nach einer Periode ist alles mit B zu multiplizieren - Hintergrund hier ist, dass man die Kosten vom Gesamtvermögen X_0 abziehen muss, das man wiederum in die risikofreie Anlage investiert und dafür einen Ertrag von B erhält.

Weiterhin erhält man natürlich nach einer Periode den Ertrag aus der Aktie, d.h. $x_0 S_1$.

Für eine Periode ist somit insgesamt die folgende Funktion zu maximieren:

$$P(x_0) := \mathbb{E}(\ln(x_0(S_1 - (1 + \operatorname{sign}(x_0)k)S_0 B) - K 1_{x_0 \neq 0} B + X_0 B))) = \mathbb{E}(\ln(X_1))$$

Es wird vorausgesetzt, dass $k, K > 0$ sowie $X_0 > K$.

Bemerkung: Im Gegensatz zum Problem ohne Kosten ist die resultierende Funktion bei $x = 0$ weder stetig noch differenzierbar.

Für n Perioden ergibt sich die Zielfunktion als:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\ln(X_n)) \quad = \quad & \mathbb{E}\Bigg[\ln\Bigg(x_{n-1}(S_n - (1 + k\operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-2}))S_{n-1}B) \\
& + \sum_{i=0}^{n-2} x_i B^{n-i-1}((1 + k\operatorname{sign}(x_{i+1} - x_i))S_{i+1} - (1 + k\operatorname{sign}(x_i - x_{i-1}))S_i B) \\
& + B^n X_0 - \sum_{i=0}^{n-1} K 1_{x_i \neq x_{i-1}} B^{n-i}\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

mit $n \geq 1$, $x_{-1} = 0$.

Dabei ist wieder zu beachten, dass die einzelnen x_i von der Pfadentwicklung des Aktienkurses abhängen und sich dadurch insgesamt $2^n - 1$ Variablen ergeben, die bei der Maximierung der Funktion zu berücksichtigen sind.

3.2 Schrittweise Lösung des Problems

3.2.1 Lösung für eine Periode

Satz 7 *Die optimale Aktienanzahl für eine Periode im Binomialmodell ergibt sich als*

$$x_0^* = argmax(P(0), P(x_0^+), P(x_0^-))$$

mit

$$x_0^+ = \max\left\{-\frac{B(X_0-K)}{S_0}\left(\frac{p}{d-(1+k)B}+\frac{1-p}{u-(1+k)B}\right), 0\right\}$$

und

$$x_0^- = \min\left\{-\frac{B(X_0-K)}{S_0}\left(\frac{p}{d-(1-k)B}+\frac{1-p}{u-(1-k)B}\right), 0\right\}.$$

Beweis: Um die Gesamtlösung für eine Periode zu bestimmen, muss man zunächst folgende Fallunterscheidung treffen, damit die Zielfunktion differenzierbar ist:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\text{: weder variable noch fixe Kosten} \\
x_0 &= x_0^+ > 0\text{: variable und fixe Kosten, } \operatorname{sign}(x_0^+) = 1, \\
&\ \text{Lösung: Nullsetzen der 1. Ableitung} \\
x_0 &= x_0^- < 0\text{: variable und fixe Kosten, } \operatorname{sign}(x_0^-) = -1, \\
&\ \text{Lösung: Nullsetzen der 1. Ableitung}
\end{aligned}$$

Die Lösung für $x_0 > 0$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
P'(x_0^+) &= p\frac{S_0(u-(1+k)B)}{x_0^+S_0(u-(1+k)B)+(X_0-K)B)} \\
&\quad +(1-p)\frac{S_0(d-(1+k)B)}{x_0^+S_0(d-(1+k)B)+(X_0-K)B)} \\
&= 0 \\
&\iff x_0^+ = -\frac{B(X_0-K)}{S_0}\left(\frac{p}{d-(1+k)B}+\frac{1-p}{u-(1+k)B}\right)
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
P''(x_0^+) &= -\left(p\frac{S_0^2(u-(1+k)B)^2}{(x_0^+S_0(u-(1+k)B)+(X_0-K)B))^2}\right. \\
&\quad \left.+(1-p)\frac{S_0^2(d-(1+k)B)^2}{(x_0^+S_0(d-(1+k)B)+(X_0-K)B))^2}\right) \\
&< 0
\end{aligned}$$

daher ist die ermittelte Lösung tatsächlich ein Maximum.

Anmerkung: Es ist hierbei noch nicht garantiert, dass die so ermittelte Lösung auch wirklich zulässig existiert (d.h. > 0 ist). Ist dies nicht der Fall, also $x_0^+ \leq 0$, dann läge das Optimum am Rand des Intervalls und würde für $x_0^+ \to 0$ angenommen. Somit gilt also:

$$x_0^+ = \max\left\{-\frac{B(X_0-K)}{S_0}\left(\frac{p}{d-(1+k)B}+\frac{1-p}{u-(1+k)B}\right), 0\right\}$$

Analog gilt für $x_0 < 0$:

$$x_0^- = \min\left\{-\frac{B(X_0 - K)}{S_0}\left(\frac{p}{d-(1-k)B} + \frac{1-p}{u-(1-k)B}\right), 0\right\}.$$

Abschließend muss über die drei oben beschriebenen möglichen Fälle maximiert werden, d.h. für jeden möglichen Fall ist der Wert der Zielfunktion zu ermitteln und anschließend ist derjenige Fall auszuwählen, der den maximalen Wert erreicht:

$$x_0^* = \operatorname{argmax}(P(0), P(x_0^+), P(x_0^-))$$

□

Unter der Annahme

$$\frac{d}{1-k} < B < \frac{u}{1+k}$$

gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} pu + (1–p)d < (1–k)B \quad &\Rightarrow \quad x_0^- < 0, x_0^+ = 0 \\ pu + (1–p)d > (1+k)B \quad &\Rightarrow \quad x_0^+ > 0, x_0^- = 0 \\ (1–k)B \leq pu + (1–p)d \leq (1+k)B \quad &\Rightarrow \quad x_0^+ = x_0^- = x_0^* = 0 \end{aligned}$$

Allerdings ist zu beachten, dass auch hier das Kriterium $x_0^- < 0$ bzw. $x_0^+ > 0$ noch kein Kriterium für Optimalität ist!

3.2.2 Schrittweise Vorgehensweise für zwei Perioden

In diesem Abschnitt wird zunächst davon ausgegangen, dass man die Strategie aus dem vorangegangenen Abschnitt für die folgende Periode wiederholt, d.h. dass man hier die folgende Funktion maximiert:

$$\mathbb{E}\left(\ln(x_1(S_2 - (1 + \operatorname{sign}(x_1 - x_0^*)k)S_1 B) + x_0^* \operatorname{sign}(x_1 - x_0^*)kS_1 B + (X_1 - K1_{x_1 \neq x_0^*})B)\right)$$

(der zweite Term mit x_0^* ergibt sich daraus, dass die variablen Kosten ja nur auf die Differenz $|x_1 - x_0^*|$ zu zahlen sind).

Dabei ist X_1 das Vermögen nach Investition in x_0^* Aktien zum Zeitpunkt 0. Weiterhin ist zu diesem Zeitpunkt S_1 bereits bekannt, insbesondere existieren für jede der zwei möglichen Werte von S_1 verschiedene optimale Aktienanzahlen $x_1^*(u)$ und $x_1^*(d)$ je nachdem, ob $S_1 = S_0 u$ oder $S_1 = S_0 d$. In diesem Sinne ermittelt man quasi einen bedingte optimale Aktienanzahl bezogen auf den aktuellen Aktienkurs. Ein wesentlicher Unterschied dieser Zielfunktion im Vergleich zum vorherigen Abschnitt liegt darin, dass nun eine Abhängigkeit zur bisherigen Historie der Aktienanzahlen vorliegt. Speziell hängt von dieser nicht nur X_1 ab sondern auch die im nächsten Schritt enstehenden Kosten.

Satz 8 *Die optimale Aktienanzahl für eine schrittweise Optimierung über zwei Perioden im Binomialmodell ergibt sich als*

$$x_1^* = argmax(P(x_0^*), P(x_1^+), P(x_1^-))$$

mit

$$x_1^+ = \max\left\{-\frac{B(X_1 - K + x_0^* k S_1)}{S_1}\left(\frac{p}{d-(1+k)B} + \frac{1-p}{u-(1+k)B}\right), x_0^*\right\}$$

und
$$x_1^- = \min\left\{-\frac{B(X_1-K-x_0^*kS_1)}{S_1}\left(\frac{p}{d-(1-k)B}+\frac{1-p}{u-(1-k)B}\right), x_0^*\right\}.$$
Unter schrittweiser Optimierung ist dabei zu verstehen, dass zunächst nur die Zielfunktion über die erste Periode optimiert wird, anschließend wird dann die Optimierung über die zweite Periode vorgenommen. Dies steht im Gegensatz zur globalen Optimierung, bei der von Anfang an alle Aktienanzahlen so ermittelt werden, dass sie über zwei Perioden betrachtet optimal gewählt sind.

Beweis: Es ergibt sich analog zur Vorgehensweise für eine Periode die folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0^*\text{: weder variable noch fixe Kosten}\\
x_1 &= x_1^+ > x_0^*\text{: variable und fixe Kosten, sign}(x_1^+ - x_0^*)=1,\\
&\quad\text{Lösung: Nullsetzen der 1. Ableitung}\\
x_1 &= x_1^- < x_0^*\text{: variable und fixe Kosten, sign}(x_1^- - x_0^*)=-1,\\
&\quad\text{Lösung: Nullsetzen der 1. Ableitung}
\end{aligned}$$

worin sich noch einmal die explizite Abhängigkeit von der vorangegangenen Aktienanzahl widerspiegelt.

Die Lösung für x_1^+ wird folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
P'(x_1^+) &= p\frac{S_1(u-(1+k)B)}{x_1^+S_1(u-(1+k)B)+(X_1-K+x_0^*kS_1)B)}\\
&\quad +(1-p)\frac{S_1(d-(1+k)B)}{x_1^+S_1(d-(1+k)B)+(X_1-K+x_0^*kS_1)B)}\\
&= 0\\
\iff x_1^+ &= -\frac{B(X_1-K+x_0^*kS_1)}{S_1}\left(\frac{p}{d-(1+k)B}+\frac{1-p}{u-(1+k)B}\right)
\end{aligned}$$

wobei wiederum gilt, dass $P''(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Um die Zulässigkeit der Lösung zu garantieren, muss diese analog zu den Betrachtungen für eine Periode begrenzt werden, allerdings diesmal bei x_0^*:

$$x_1^+ = \max\left\{-\frac{B(X_1-K+x_0^*kS_1)}{S_1}\left(\frac{p}{d-(1+k)B}+\frac{1-p}{u-(1+k)B}\right), x_0^*\right\}$$

Analog für x_1^-. Anschließend muss wieder die Lösung gefunden werden, die die Zielfunktion maximiert:
$$x_1^* = \text{argmax}(P(x_0^*), P(x_1^+), P(x_1^-))$$

□

Anmerkung: Es ist zu beachten, dass es vom Zeitpunkt 0 aus betrachtet zwei mögliche Lösungen für die zweite Periode gibt, da die oben beschriebenen Berechnungen davon abhängen, welchen Wert S_1 angenommen hat. Genaugenommen gibt es also $x_1^*(u) = x_1^*(S_1 = uS_0)$ und $x_1^*(d)$.

3.2.3 Schrittweise Vorgehensweise für drei Perioden

Das vorgestellte Verfahren kann natürlich für beliebig viele Perioden wiederholt werden. Es soll hier allerdings auf eine weitere Schwierigkeit im Zusammenhang mit Kosten hingewiesen werden: Die Aktienanzahlen sind nicht rekombinierend, d.h. $x_2^*(ud) \neq x_2^*(du)$. Die optimale Lösung nach einer Aufwärts- und anschließender Abwärtsbewegung der Aktie entspricht also nicht notwendigerweise der optimalen Lösung nach einer Abwärts- und dann einer Aufwärtsbewegung. Dies soll anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden.

Im Beispiel werden folgende Parameter verwendet:

$$\begin{aligned} S_0 &= 10 \\ k &= 0,001 \\ K &= 5 \\ B &= 1,1 \\ X_0 &= 1000 \\ u &= 1,3 \\ d &= 0,2 \\ p &= 0,9 \end{aligned}$$

Gemäß Abschnitt 3.2.1 ergeben sich daraus folgende mögliche Lösungen für x_0^*:

$$\begin{array}{ll} x_0^+ = 54,29, & P(x_0^+) = 7,0235 \\ x_0^- = 55,16, & \text{nicht zulässig, da} > 0 \\ x_0^0 = 0 \quad , & P(x_0^0) = 7,0031 \end{array}$$

Damit ist $x_0^* = x_0^+ = 54,29$.

Nun gilt im zweiten Schritt (Formeln gemäß Abschnitt 3.2.2):

Aufwärtsbewegung	Abwärtsbewegung
$X_1 = 1202,48$	$X_1 = 605,30$
$S_1 = 13$	$S_1 = 2$
$x_1^+ = 50,29$ (nicht zulässig, da $< x_0^*$)	$x_1^+ = 163,80$
$x_1^- = 51,03$	$x_1^- = 166,36$ (nicht zulässig, da $> x_0^*$)
$x_1^0 = x_0^* = 54,29$	$x_1^0 = x_0^* = 54,29$
$P(x_1^-) = 7,2092$	$P(x_1^+) = 6,5184$
$P(x_1^0) = 7,2133$	$P(x_1^0) = 6,5141$
$x_1^* = x_0^* = 54,29$	$x_1^* = x_1^+ = 163,80$

Im dritten Schritt werden nur die Fälle betrachtet, in denen korrespondierend zu den Aktienbewegungen im zweiten Schritt die gegenläufige Bewegung erfolgt, da es ja speziell darum geht, dass die Vermögenswerte und Aktienanzahlen nicht rekombinierend sind. Es gilt hier:

erst Aufwärtsbewegung, dann Abwärtsbewegung	erst Abwärtsbewegung, dann Aufwärtsbewegung
$X_2 = 687,55$	$X_2 = 725,61$
$S_2 = 2,6$	$S_2 = 2,6$
$x_2^+ = 143,26$	$x_2^+ = 151,31$ (nicht zulässig, da $< x_1^*$)
$x_2^- = 145,50$ (nicht zulässig, da $> x_1^*$)	$x_2^- = 153,55$
$x_2^0 = x_1^* = 54,29$	$x_2^0 = x_1^* = 163,80$
$P(x_2^+) = 6,6468$	$P(x_2^-) = 6,7014$
$P(x_2^0) = 6,6430$	$P(x_2^0) = 6,7081$
$x_2^* = x_2^+ = 143,26$	$x_2^* = x_1^* = 163,80$

Also sind weder die Vermögenswerte noch die optimalen Aktienanzahlen rekombinierend.

3.2.4 Optimale Lösung für mehrere Perioden

In dieser Sektion soll angemerkt werden, dass die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellte schrittweise Lösung des Problems für mehrere Perioden nicht optimal ist. Dazu soll das bereits im verangegangenen Abschnitt verwendete Beispiel herangezogen werden. Die schrittweise optimale Lösung für zwei Perioden war dabei:

$$\begin{aligned} x_0^* &= 54,29 \\ x_1^*(S_1 = uS_0) &= 54,29 \\ x_1^*(S_1 = dS_0) &= 163,80 \end{aligned}$$

und insgesamt gilt damit

$$\mathbb{E}(\ln(X_2)) = pP(x_1^*(S_1 = uS_0)) + (1-p)P(x_1^*(S_1 = dS_0)) = 7,1438$$

Die global optimale Lösung ist allerdings

$$\begin{aligned} x_0^* &= 52,25 \\ x_1^*(S_1 = uS_0) &= 52,25 \\ x_1^*(S_1 = dS_0) &= 168,81 \\ \mathbb{E}(\ln(X_2)) &= 7,1439 \end{aligned}$$

Somit ist die schrittweise Vorgehensweise nicht optimal. Allerdings ist die optimale Lösung ebenfalls nicht rekombinierend, denn z.B. für 3 Perioden gilt:

$$\begin{aligned} x_0^* &= 50,34 \\ x_1^*(S_1 = uS_0) &= 50,34 \\ x_1^*(S_1 = dS_0) &= 170,28 \\ x_2^*(S_2 = uS_1, S_1 = uS_0) &= 50,34 \\ x_2^*(S_2 = uS_1, S_1 = dS_0) &= 170,28 \\ x_2^*(S_2 = dS_1, S_1 = uS_0) &= 151,14 \\ x_2^*(S_2 = dS_1, S_1 = dS_0) &= 170,28 \end{aligned}$$

und somit insbesondere $x_2^*(S_2 = uS_1, S_1 = dS_0) \neq x_2^*(S_2 = dS_1, S_1 = uS_0)$. Insgesamt ergibt sich eine Variablenanzahl von $2^n - 1$ für das allgemeine Problem mit n Schritten; eine globale numerische Lösung ist damit nicht praktikabel.

3.2.5 Zwischenfazit

Das Ergebnis bis hierhin ist also folgendes: Im Binomialmodell mit Transaktionskosten sind weder die optimalen Aktienanzahlen noch die optimalen Vermögenswerte rekombinierend. Damit ergibt sich im n-Periodenmodell eine Variablenanzahl von $2^n - 1$, die nicht reduziert werden kann (anders als im Fall ohne Kosten, wo sich die Variablenanzahl aufgrund des rekombinierenden Verhaltens auf n reduziert).

Weiterhin sind die optimalen Aktienanzahlen pfadabhängig, sie hängen dabei sowohl von den realisierten Aktienwerten als auch von den in vorherigen Schritten berechneten optimalen Aktienanzahlen und damit von vorangegangenen Entscheidungen ab. Auch dies ist anders als im Modell ohne Kosten, wo die optimale Aktienanzahl in einem Schritt nicht von den Anzahlen vorangegangener Schritte beeinflusst wird.

Schließlich ist im Modell mit Kosten das schrittweise Vorgehen aufgrund der Abhängigkeiten der Aktienanzahlen nicht global optimal, d.h. zur Berechnung der optimalen Aktienanzahlen kann nicht schrittweise von vorn vorgegangen werden (wäre rechnerisch einfach). Stattdessen ist eine gleichzeitige Optimierung aller $2^n - 1$ Variablen erforderlich, so dass eine Optimierung schon bei vergleichsweise geringen Periodenlängen sehr aufwändig wird.

Diese Abhängigkeit bedeutet weiterhin, dass im Binomialmodell mit Transaktionskosten die Aktienanzahlen vom Investitionszeitraum abhängen. Im Fall ohne Kosten ergibt sich eine feste Prozentzahl vom Gesamtvermögen, die in Aktien zu investieren ist - unabhängig von dem konkreten Punkt, an dem man sich im Binomialbaum befindet. Im Modell mit Kosten ist dies nicht der Fall, wie auch im obigen Beispiel gesehen verändert sich die optimale Lösung für Schritt 1, je nachdem, ob man insgesamt über 1, 2 oder 3 Perioden optimiert.

Hieraus ergibt sich, dass man die optimale Lösung im Binomialmodell mit Transaktionskosten numerisch nicht ohne weiteres gegen die Lösung im zeitstetigen Modell konvergieren lassen kann (wegen der großen Anzahl an Variablen sowie der Nicht-Optimalität des schrittweisen Vorgehens).

3.3 Optimale Buy-And-Hold-Lösung für mehrere Perioden

3.3.1 Hintergrund

Im vorangegangenen Abschnitt wurde erläutert, warum die allgemeine Lösung des Problems mit Transaktionskosten im Binomialmodell sich nicht ohne weiteres auf das zeitstetige Modell übertragen lässt.

Daher soll nun die optimale Buy-And-Hold-Lösung betrachtet werden, d.h. in Gegensatz zu den vorangegangenen Abschnitten darf nur einmal zum Startzeitpunkt gehandelt werden, anschließend bleibt die Aktienanzahl konstant. Dies schließt automatisch das Problem der großen Variablenanzahl aus, da nun nur noch eine Variable bestehen bleibt.

Genauer ist die folgende Funktion zu maximieren:

$$P_n(x) = \mathbb{E}(\ln(x(S_n - (1 + k\text{sign}(x))S_0B^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B^n))$$

Dies kann wieder durch Nullsetzen der ersten Ableitung erfolgen (zweite Ableitung ist auch hier wieder stets negativ). Dabei sind wie gehabt zunächst das Optimum für $x > 0$, $x = 0$ sowie $x < 0$ zu ermitteln und dann die gefundenen Suprema miteinander zu vergleichen.

3.3.2 Existenz von Lösungen ungleich Null

Zunächst sei angenommen, dass

$$pu + (1-p)d > B.$$

In diesem Fall existieren (wie später noch gezeigt werden wird) nur Lösungen ≥ 0.

Satz 9 *Unter der Bedingung $pu + (1-p)d > B$ gilt: Falls für ein bestimmtes n eine optimale Lösung $x_n > 0$ ermittelt wird, so sind die optimalen Lösungen für längere Perioden ebenfalls größer als 0. D.h.:*

$$pu + (1-p)d > B \text{ und } \exists n : x_n > 0 \rightarrow x_N > 0 \forall N > n$$

Beweis: Um dies zu beweisen, müssen zwei Dinge gezeigt werden:

1. Für $n+1$ und $x > 0$ hat die Funktion $P'_{n+1}(x)$ eine Nullstelle x_{n+1} größer 0. Da auch hier wieder $P'' < 0$, handelt es sich dabei dann auch tatsächlich um ein Maximum.
2. Es gilt weiterhin: $P_{n+1}(x_{n+1}) > P_{n+1}(x < 0)\ \forall x < 0$.

Es soll zunächst festgehalten werden, dass jedes Supremum von $P_n(x)$ folgendes Kriterium erfüllt

$$x_n \in I_n := \left(-\frac{(X_0 - K)B^n}{(u^n - (1-k)B^n)S_0}, -\frac{(X_0 - K)B^n}{(d^n - (1+k)B^n)S_0}\right)$$

da sonst mindestens einer der Logarithmen in

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n}{i} \ln(xS_0(u^i d^{n-i} - (1 + k\text{sign}(x))B^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B^n)$$

den Wert $-\infty$ annimmt.

Für den ersten Punkt wird nun zunächst die Ableitung von $P_n(x)$ für $x > 0$ bestimmt:

$$P'_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{S_0(u^i d^{n-i} - (1+k)B^n)}{xS_0(u^i d^{n-i} - (1+k)B^n) + (X_0 - K)B^n}$$

Diese Funktion ist rational vom Grad n mit $n+1$ Polstellen. An den Polstellen nähert sich $P_n(x)$ beidseitig dem Wert $-\infty$, d.h. $P'_n(x)$ springt dort jeweils von $-\infty$ auf $+\infty$. Damit müssen gemäß Mittelwertsatz alle Nullstellen der Funktion jeweils zwischen zwei Polstellen liegen. Insbesondere liegt somit auch in I_n (begrenzt durch die größte negative sowie kleinste positive Polstelle) genau eine Nullstelle. Weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned} P'_n(0) = \frac{S_0((pu + (1-p)d)^n - (1+k)B^n)}{(X_0 - K)B^n} &> 0 \\ \iff \quad n &> \frac{\ln(1+k)}{\ln(pu + (1-p)d) - \ln(B)} \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x \uparrow -\frac{(X_0 - K)B^n}{(d^n - (1+k)B^n)S_0}} P'_n(x) = -\infty$$

da $S_0(d^n - (1+k)B^n) < 0$ und

$$xS_0(d^n - (1+k)B^n) + (X_0 - K)B^n > 0 \text{ für } x < \frac{(X_0 - K)B^n}{(d^n - (1+k)B^n)S_0}$$

also

$$xS_0(d^n - (1+k)B^n) + (X_0 - K)B^n \downarrow 0 \text{ für } x \uparrow -\frac{(X_0 - K)B^n}{(d^n - (1+k)B^n)S_0}$$

und damit

$$\lim_{x \uparrow -\frac{(X_0-K)B^n}{(d^n-(1+k)B^n)S_0}} \frac{S_0(d^n - (1+k)B^n)}{xS_0(d^n - (1+k)B^n) + (X_0 - K)B^n} = -\infty$$

Die restlichen Terme von $P_n(x)$ sind endlich in diesem Limit.

Da weiterhin der Wert am Punkt 0 für ein n, das groß genug ist, > 0 ist, muss die gesuchte Nullstelle x_n somit größer als 0 sein.

Insbesondere folgt aus diesen Betrachtungen auch, dass für $n \leq \frac{\ln(1+k)}{\ln(pu+(1-p)d)-\ln(B)}$ keine optimale Lösung größer als 0 existiert, dies ist also eine notwendige Bedingung. Weiterhin gilt dann natürlich auch noch, dass damit $\forall N > n$ eine positive Nullstelle existiert, damit wäre Teil 1 gezeigt.

Aus

$$P_n'(0) = \frac{S_0((pu + (1-p)d)^n - (1+k)B^n)}{(X_0 - K)B^n}$$

folgt im Übrigen auch (wie oben bereits angemerkt), dass eine Lösung $x > 0$ nur dann existieren kann, wenn $pu + (1-p)d > B$, da ansonsten $P_n'(0) < 0 \; \forall n$ und somit keine Nullstelle > 0 existiert. Damit könnte das Supremum von $P_n(x)$ nur an einer Stelle $x \leq 0$ liegen.

Für den zweiten Punkt sei zunächst angemerkt, dass unter der vorausgesetzten Parameterkonstellation keine negative Nullstelle für $x < 0$ existiert, da in diesem Fall

$$\begin{aligned} P_n'(0) = \frac{S_0((pu + (1-p)d)^n - (1-k)B^n)}{(X_0 - K)B^n} &< 0 \\ \iff \quad n < \frac{\ln(1-k)}{\ln(pu + (1-p)d) - \ln(B)} & \end{aligned}$$

Da $\ln(1-k) < 0$, hingegen gemäß Voraussetzung $\ln(pu + (1-p)d) - \ln(B) > 0$, wird dieses Kriterium nie erfüllt.

Somit ist nur noch zu zeigen, dass $P_{n+1}(x_{n+1}) > P_{n+1}(0) = \mathbb{E}(\ln(X_0 B^{n+1}))$. Dafür soll gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\ln(x_n(S_{n+1} - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \\ &\quad \geq \mathbb{E}(\ln(x_n(S_nB - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \end{aligned}$$

Da dann zum einen aus der Annahme bezüglich x_n folgt, dass

$$\mathbb{E}(\ln(x_n(S_nB-(1+k)S_0B^{n+1})+(X_0-K)B^{n+1})) = \ln(B)+P_n(x_n) > \ln(B)+P_n(0) = P_{n+1}(0)$$

und zum anderen aus der Supremumseigenschaft von x_n folgt, dass

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\ln(x_{n+1}(S_{n+1} - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \\ &\quad \geq \mathbb{E}(\ln(x_n(S_{n+1} - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \end{aligned}$$

wäre Punkt zwei gezeigt.

Also:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\ln(x_n(S_{n+1} - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \\
&\quad -\mathbb{E}(\ln(x_n(S_nB - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1})) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{x_n(S_{n+1} - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1}}{x_n(S_nB - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1}}\right)\right) \\
&\qquad = \ln\left(\prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{x_n u^i d^{n-i} S_0(pu + (1-p)d - B)}{x_n(u^i d^{n-i} S_0 B - (1+k)S_0B^{n+1}) + (X_0 - K)B^{n+1}}\right)^{p^i(1-p)^{n-i}\binom{n}{i}}\right) \\
&\qquad > 0
\end{aligned}
$$

da $x_n \in I_n$ und $x_n > 0$. □

Somit ist bewiesen, dass sobald man für ein n eine optimale Lösung > 0 gefunden hat, auch die optimalen Lösungen für alle folgenden $N > n$ positiv sein werden. Allerdings ist noch nicht gesagt, dass überhaupt ein n existiert, für das die Lösung > 0 ist. Dies gilt zumindest, falls

$$p\ln(u) + (1-p)\ln(d) > \ln(B)$$

da dann gilt:

$$
\begin{aligned}
P_n\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) &= \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_0 - K}{1+k}\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) + \sum_{i=1}^{n} p\ln(u) + (1-p)\ln(d) \\
&= \ln\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) + n(p\ln(u) + (1-p)\ln(d))
\end{aligned}
$$

und damit

$$P_n\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) > \ln(X_0B^n) \iff n > \frac{\ln(X_0) - \ln\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right)}{p\ln(u) + (1-p)\ln(d) - \ln(B)}$$

(und $\frac{X_0-K}{(1+k)S_0} \in I_n \ \forall n$).
Weiterhin sei angemerkt, dass

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \left[0, \frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right]$$

d.h. im Limit ist weder Aktienkauf auf Kredit noch Shortselling zulässig. Dies liegt daran, dass nur es nur in diesen beiden Fällen möglich ist, dass Vermögenswerte < 0 entstehen und dies wird durch die gewählte Nutzenfunktion stark bestraft, da diese für Werte kleiner 0 den Wert $-\infty$ annimmt.

Sei nun $pu + (1-p)d < B$. Dann lässt sich mit einem analogen Argument zwar zeigen, dass ab einem bestimmten n immer eine negative Nullstelle existiert, genauer

$$P_n'(0) = \frac{S_0((pu + (1-p)d)^n - (1-k)B^n)}{(X_0 - K)B^n} < 0 \iff n > \frac{\ln(1-k)}{\ln(pu + (1-p)d) - \ln(B)}$$

und

$$\lim_{x \downarrow -\frac{(X_0-K)B^n}{(u^n-(1-k)B^n)S_0}} P_n'(x) = +\infty$$

Allerdings existiert hier für ein ausreichend großes n keine negative optimale Lösung, da für $x < 0$ gilt:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} p^i(1-p)^{n-i}\binom{n}{i} \ln(xS_0(u^i d^{n-i} - (1-k)B^n) + (X_0-K)B^n) \\ &< \sum_{i=0}^{n} p^i(1-p)^{n-i}\binom{n}{i} \ln(xS_0(d^n - (1-k)B^n) + (X_0-K)B^n) \\ &= \ln(xS_0(d^n-(1-k)B^n) + (X_0-K)B^n) \\ &< \ln\left(-\frac{(X_0-K)B^n}{(u^n-(1-k)B^n)S_0} S_0(d^n-(1-k)B^n) + (X_0-K)B^n\right) \\ &= \ln\left((X_0-K)B^n\left(1 - \frac{d^n-(1-k)B^n}{u^n-(1-k)B^n}\right)\right) \end{aligned}$$

Der Term

$$-\frac{d^n-(1-k)B^n}{u^n-(1-k)B^n}$$

ist positiv und konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0, da

$$-\frac{d^n-(1-k)B^n}{u^n-(1-k)B^n} = -\frac{\left(\frac{d}{u}\right)^n - (1-k)\left(\frac{B}{u}\right)^n}{1-(1-k)\left(\frac{B}{u}\right)^n}$$

und

$$\left(\frac{d}{u}\right)^n \to 0, \left(\frac{B}{u}\right)^n \to 0 \text{ da } d < B < u$$

Somit fällt dieser Term irgendwann auch unter $\frac{K}{X_0-K}$, womit dann gilt:

$$\begin{aligned} P_n(x) &< \ln\left((X_0-K)B^n\left(1+\frac{K}{X_0-K}\right)\right) \\ &= \ln\left((X_0-K)B^n\frac{X_0}{X_0-K}\right) \\ &= \ln(X_0B^n) \\ &= P_n(0) \end{aligned}$$

Es sei zum Schluss noch angemerkt, dass die gefundenen optimalen Lösungen immer eindeutig sind, es sei denn es gilt $x \neq 0$ und $P_n(x) = P_n(0)$. Dies folgt daraus, dass immer nur entweder Lösungen ≤ 0 oder ≥ 0 zulässig sind (je nachdem, ob $pu + (1-p) < B$ oder umgekehrt). Weiterhin existiert dann immer genau ein lokales Maximum für $x < 0$ oder $x > 0$ sowie als weitere Möglichkeit die Lösung $x = 0$. Das Optimum kann nie an den Intervallrändern von I_n liegen, da dort die Nutzenfunktion den Wert $-\infty$ annimmt.

3.4 Kombination der Lösungsstrategien

In den vorangegangenen beiden Abschnitten wurden zwei mögliche Lösungsstrategien für das Portfoliooptimierungsproblem mit Transaktionskosten vorgestellt. Allerdings ist nicht allgemein eine der Strategien besser als die andere, da man sowohl Parameterkonstellationen finden kann, in denen das schrittweise Vorgehen stets besser ist (z.B. im Grenzfall $k = K = 0$), als auch Konstellationen, in denen die Buy-and-Hold-Strategie einen höheren erwarteten Nutzen liefert.

Letzteres gilt z.B. für den Fall der Konvergenz gegen das zeitstetige Modell, da hier $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 1$, d.h. die schrittweisen Zuwächse der Aktie werden irgendwann so klein, dass sie die (in n konstanten) variablen Kosten $k > 0$ bzw. fixen Kosten $K > 0$ nicht mehr kompensieren können, was dazu führt, dass es dann im schrittweisen Model nie optimal ist zu handeln. Da dies nicht auch zwangsweise für die Buy-and-Hold-Strategie gilt (weil hier die über n Perioden kumulierten Zuwächse entscheidend sind), ist in diesem Fall also die Buy-and-Hold-Strategie besser.

Allerdings lassen sich beide Methoden zu einer "schrittweisen Buy-and-Hold-Strategie" kombinieren, die in jedem Fall einen höheren erwarteten Nutzen garantiert als die einfachen Buy-and-Hold-Strategie. Dazu werden die optimalen Aktienanzahlen gewählt als

$$\begin{aligned} x_i^{sBH} &= \operatorname{argmax}_{x_i}\{\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0 = x_0^{sBH}, ..., x_i = x_i^{sBH}, x_{i+1} = x_i^{sBH}, ..., x_{n-1} = x_i^{sBH})) \\ &\qquad |X_i, S_i, x_{i-1})\} \end{aligned}$$

d.h. im i-ten Schritt wählt man jeweils die auf Basis der in den vorangegangen Schritten getroffenen Entscheidungen optimale Buy-and-Hold-Strategie.

Anschaulich kann man sich die Strategie so vorstellen, dass man initial die optimale Buy-and-Hold-Aktienanzahl wählt und diese nur dann adjustiert, wenn sich die im jeweiligen Schritt optimale schrittweise Buy-and-Hold-Lösung weit genug von der bislang gehaltenen Aktienanzahl entfernt hat.

Die Überlegenheit der schrittweisen Buy-and-Hold-Strategie im Vergleich zur einfachen Buy-and-Hold-Strategie zeigt der folgende Satz:

Satz 10 *Die schrittweise Buy-and-Hold-Strategie erzielt einen höheren erwarteten Nutzen als die einfache Buy-and-Hold-Strategie, d.h.*

$$\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_{n-1}^{sBH}))) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{BH})))$$

Beweis: Zur Abkürzung der Notation soll im Folgenden

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_i^{sBH}))) \\ &\qquad := \mathbb{E}(\ln(X_n(x_0 = x_0^{sBH}, ..., x_i = x_i^{sBH}, x_{i+1} = x_i^{sBH}, ..., x_{n-1} = x_i^{sBH})) \end{aligned}$$

verwendet werden

Aus der Definition von x_{i+1}^{sBH} folgt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_i^{sBH}, x_{i+1}^{sBH}))|X_i, S_i, x_{i-1}) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_i^{sBH}))|X_i, S_i, x_{i-1})$$

und damit auch

$$\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_i^{sBH}, x_{i+1}^{sBH}))) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_i^{sBH})))$$

Und wegen $x_0^{sBH} = x_0^{BH}$ folgt daraus auch

$$\mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{sBH}, ..., x_{n-1}^{sBH}))) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n(x_0^{BH})))$$

□

3.5 Konvergenz gegen die Lösung im Black-Scholes-Modell

Bei der Betrachtung der Konvergenz werden für die folgenden Abschnitte die optimalen Buy-and-Hold-Lösungen herangezogen.

Auch hier soll wieder die schon für das Modell ohne Kosten benutzte Parameterkonstellation verwendet werden:

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_n + \sigma\sqrt{t_n}\right) \\ d_n &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_n - \sigma\sqrt{t_n}\right) \\ p &= \frac{1}{2} \\ B_n &= \exp(rt_n) \\ t_n &= \frac{T}{n} \end{aligned}$$

Und es soll ebenfalls wieder gelten:

$$d_n < B_n < u_n \qquad \forall n$$

Nun ist die Lösung folgender Funktion im Grenzwert $n \to \infty$ zu ermitteln:

$$P_n(x) = \mathbb{E}(\ln(x(S_n - (1 + \text{sign}(x)k)S_0B_n^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B_n^n))$$

(entspricht einer Buy-And-Hold-Strategie über n Perioden).

3.5.1 Existenz von Lösungen ungleich Null im Binomialmodell

Es soll zunächst festgehalten werden, dass jedes Supremum von $P_n(x)$ folgendes Kriterium erfüllt

$$x_n \in I_n := \left(-\frac{(X_0 - K)B_n^n}{(u_n^n - (1-k)B_n^n)S_0}, -\frac{(X_0 - K)B_n^n}{(d_n^n - (1+k)B_n^n)S_0}\right)$$

da sonst mindestens einer der Logarithmen in

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p^i(1-p)^{n-i}\binom{n}{i}\ln(xS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1 + k\text{sign}(x))B_n^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B_n^n)$$

den Wert $-\infty$ annimmt.

Lemma 11 *Es gilt: Die Folge $\mathbb{E}(S_n)$ ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen $S_0 e^{\mu T}$.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{i=0}^{n} 2^{-(n)} \binom{n}{i} S_0 u_n^i d_n^{n-i} \\
&= S_0 \left(\frac{u_n + d_n}{2} \right)^n \\
&= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2} \right)^n
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2} \right)^n \right)' \\
&= \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2} \right)^n \left[\ln \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2} \right) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{n}} \frac{-e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} \right]
\end{aligned}$$

wobei der erste Term positiv, der zweite Term negativ ist.

Um den Term weiter zu untersuchen, sei dieser zunächst vereinfacht als

$$f(a) := \ln\left(\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln(a) \frac{-a + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}}$$

beschrieben. Dieser ist nun für $a > 1$ zu betrachten.

Seine Ableitung ist

$$\begin{aligned}
&f'(a) \\
&= \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{2a} \frac{-a + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{2} \ln(a) \frac{\left(-1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(-a + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} \\
&= \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \ln(a) \frac{\frac{4}{a}}{a + \frac{1}{a}} \right) \\
&= \frac{1}{2a} \frac{1}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} \left(a^2 - \frac{1}{a^2} - 4\ln(a) \right)
\end{aligned}$$

Der Term $a^2 - \frac{1}{a^2} - 4\ln(a)$ hat wiederum sein Minimum in $a = 1$ (lässt sich durch Ableiten ermitteln) und nimmt dort den Wert 0 an. Somit gilt $f'(a) > 0$ für $a > 1$ und damit schließlich auch $f(a) > f(1) = 0$ für alle $a > 1$.

Somit gilt, dass

$$\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2} \right)^n$$

und somit auch $\mathbb{E}(S_n)$ streng monoton wächst.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)-\ln(2)}{\frac{1}{n}} \\
&= \text{(l'Hospital) } \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \text{(l'Hospital) } 2\sigma^2 T\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\left(e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+1\right)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2}T
\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(S_n)=S_0e^{\mu T}$$

□

Satz 12 *Die Funktion $P_n(x)$ hat eingeschränkt auf $x>0$ ein eindeutiges Maximum. Dieses ist weiterhin für ausreichend große n genau dann größer als 0, wenn*

$$\mu > r+\frac{\ln(1+k)}{T}.$$

Andernfalls ist die optimale Lösung (zumindest für ausreichend große n) immer 0.

Beweis: Um das Optimum zu finden, wird die Ableitung von $P_n(x)$ für $x>0$ bestimmt:

$$P_n'(x)=\sum_{i=0}^{n}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{S_0(u_n^id_n^{n-i}-(1+k)B_n^n)}{xS_0(u_n^id_n^{n-i}-(1+k)B_n^n)+(X_0-K)B_n^n}$$

Diese Funktion ist rational vom Grad n mit $n+1$ Polstellen. An den Polstellen nähert sich $P_n(x)$ beidseitig dem Wert $-\infty$, d.h. $P_n'(x)$ springt dort jeweils von $-\infty$ auf $+\infty$. Damit müssen gemäß Mittelwertsatz alle Nullstellen der Funktion jeweils zwischen zwei Polstellen liegen. Insbesondere liegt somit auch in I_n (begrenzt durch die größte negative sowie kleinste positive Polstelle) genau eine Nullstelle. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
P_n'(0) &= \frac{S_0}{(X_0-K)e^{rT}}\left(\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{S_0}\right)-(1+k)e^{rT}\right) \\
&\to \frac{S_0}{(X_0-K)e^{rT}}\left(e^{\mu T}-(1+k)e^{rT}\right) \\
&\quad\text{(Lemma 11)}
\end{aligned}$$

Daher muss folgende Bedingung erfüllt werden, damit $P_n'(0)>0$ gilt (zumindest für ausreichend große n):

$$\mu > r+\frac{\ln(1+k)}{T}$$

Weiter gilt:

$$\lim_{x\uparrow-\frac{(X_0-K)B_n^n}{(d_n^n-(1+k)B_n^n)S_0}} P_n'(x)=-\infty$$

da $S_0(d_n^n - (1+k)B^n) < 0$ und

$$xS_0(d_n^n - (1+k)B_n^n) + (X_0 - K)B_n^n > 0 \text{ für } x < \frac{(X_0 - K)B_n^n}{(d_n^n - (1+k)B_n^n)S_0}$$

also

$$xS_0(d_n^n - (1+k)B_n^n) + (X_0 - K)B_n^n \downarrow 0 \text{ für } x \uparrow -\frac{(X_0 - K)B_n^n}{(d_n^n - (1+k)B_n^n)S_0}$$

und damit

$$\lim_{x \uparrow -\frac{(X_0-K)B_n^n}{(d_n^n-(1+k)B_n^n)S_0}} \frac{S_0(d_n^n - (1+k)B_n^n)}{xS_0(d_n^n - (1+k)B_n^n) + (X_0 - K)B_n^n} = -\infty$$

Die restlichen Terme von $P_n(x)$ sind endlich in diesem Limit.

Da also der Wert am Punkt 0 positiv ist (und der Wert am Intervallende negativ, da $-\infty$), muss die gesuchte Nullstelle x_n gemäß Mittelwertsatz größer als 0 sein ($P_n'(x)$ ist stetig für $x > 0$). Darüber hinaus ist $P_n''(x) < 0$, so dass es sich hierbei tatsächlich um ein Maximum handelt.

Im umgekehrten Fall, d.h.

$$\mu \leq r + \frac{\ln(1+k)}{T}$$

liegt das Supremum für $P(x)$ eingeschränkt auf $x > 0$ am Rand des Intervalls, d.h. bei 0. Die optimale Lösung ist somit stets ≤ 0.

Mit einem analogen Argument kann man zwar weiter zeigen, dass eine Lösung $x < 0$ nur existiert, wenn

$$\mu < r + \frac{\ln(1-k)}{T}$$

Weiterhin lässt sich aber wie in Abschnitt 3.3 zeigen, dass für ausreichend große n keine negative optimale Lösung existiert, d.h. die optimale Lösung für $\mu \leq r + \frac{\ln(1+k)}{T}$ und ausreichend große n ist stets 0.

□

Anmerkung: Der vorherige Satz hat zwar für $\mu > r + \frac{\ln(1+k)}{T}$ die Existenz eines Supremums für $x > 0$ gezeigt, aber nicht dessen Optimalität für die gesamte Funktion. Damit das gefundene Supremum auch ein Optimum für ganz I_n ist, muss zusätzlich noch gelten, dass $P_n(x_n) > P_n(0)$ (wie im Beweis des Satzes erwähnt, existieren für ausreichend große n keine negativen Lösungen, d.h. die optimale Lösung ist für ausreichend große n entweder positiv oder 0).

Im Folgenden sollen nun einige Bedingungen hierfür analysiert werden.

Satz 13 *Falls die Parameter die Bedingung*

$$\mu > r + \frac{1}{T}\ln\left((1+k)\frac{X_0}{X_0 - K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}$$

erfüllen, dann gilt $P(x^*) > P(0)$, d.h. die optimale Lösung ist positiv.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_n\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) &= \ln\left(\frac{X_0 - K}{1+k}\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{X_0 - K}{1+k}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \\
&> \ln(X_0) + rT = P_n(0) \\
\Longleftrightarrow \mu &> r + \frac{1}{T}\ln\left((1+k)\frac{X_0}{X_0 - K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um die Strategie, den maximal möglichen Betrag in Aktien zu investieren ohne hierfür Kredit aufzunehmen. Diese Strategie ist stets in I_n enthalten. □

Satz 14 *Für die Parameterkonstellation*

$$\mu T \leq rT + \ln(1+k) + \ln\left(\frac{X_0}{X_0 - K}\right)$$

ist die optimale Lösung im Binomialmodell zumindest für ausreichend große n gleich 0.

Beweis: Wie eben schon angemerkt gibt es für ausreichend große n keine optimalen negativen Lösungen. Daher sei hier nur der Fall $x_n^* > 0$ betrachtet.
Sei zunächst angenommen, dass $x_n^* > \frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$. Da $x_n^* \in I_n$ und somit weiterhin

$$x_n^* < -\frac{(X_0-K)B_n^n}{(d_n^n - (1+k)B_n^n)S_0}$$

liegt x_n^* für ausreichend große n beliebig nahe an $\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$. Aufgrund der Stetigkeit von P_n liegt dann somit auch $P_n(x_n^*)$ für ausreichend große n beliebig nahe an $P_n\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right)$.
Da aber aufgrund von Satz 13 gilt, dass

$$P_n\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right) > P_n(0) \iff \mu > r + \frac{1}{T}\ln\left((1+k)\frac{X_0}{X_0-K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}$$

gilt für die in diesem Satz vorausgesetzte Parameterkonstellation, dass $P_n\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right) < P(0)$ und folglich für ausreichend große n auch $P_n(x_n^*) < P_n(0)$.
Weiter gilt für $x_n^* \leq \frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$:

$$\begin{aligned}
& P_n(x_n^*) - P_n(0) \\
= \; & \mathbb{E}(\ln(x_n^*(S_n - (1+k)S_0B_n^n) + (X_0-K)B_n^n)) - \ln(X_0B_n^n) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{x_n^*(S_n - (1+k)S_0B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}{X_0B_n^n}\right)\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{x_n^*(1+k)S_0}{X_0}\left(\frac{S_n}{S_0(1+k)B_n^n} - 1\right) + \frac{X_0-K}{X_0}\right)\right) \\
\leq \; & \ln\left(\frac{x_n^*(1+k)S_0}{X_0}\left(\frac{\mathbb{E}(S_n)}{S_0(1+k)B_n^n} - 1\right) + \frac{X_0-K}{X_0}\right) \\
& \text{(Jensensche Ungleichung)} \\
< \; & \ln\left(\frac{x_n^*(1+k)S_0}{X_0}\left(\frac{e^{(\mu-r)T}}{1+k} - 1\right) + \frac{X_0-K}{X_0}\right) \\
& \text{(Lemma 11)} \\
\leq \; & \ln\left(\frac{x_n^*(1+k)S_0}{X_0}\left(\frac{X_0}{X_0-K} - 1\right) + \frac{X_0-K}{X_0}\right) \\
& \text{(gemäß der Annahme für die Parameter)} \\
= \; & \ln\left(\frac{x_n^*(1+k)S_0}{X_0-K}\frac{K}{X_0} + \frac{X_0-K}{X_0}\right) \\
\leq \; & \ln\left(\frac{K}{X_0} + \frac{X_0-K}{X_0}\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

□

Satz 15 *Im Fall ohne Fixkosten, d.h. $K = 0$, lässt sich die Behauptung des obigen Satzes auch umkehren, d.h.*

$$\mu T \leq rT + \ln(1+k) \iff P_n(x) < P_n(0) \forall x \in I_n$$

für ausreichend große n.

Beweis: Der erste Teil wurde bereits im vorangegangenen Satz bewiesen. Es ist also nur noch zu zeigen, dass

$$P_n(x) < P_n(0) \forall x \in I_n \Rightarrow \mu T \leq rT + \ln(1+k)$$

Da im Fall ohne Fixkosten keine Unstetigkeit an der Stelle 0 vorliegt, folgt aus $P_n(x) < P_n(0)$ unmittelbar $P_n'(0) \leq 0$. Gemäß Beweis von Satz 12 folgt daraus wiederum (zumindest für ausreichend große n) $\mu T \leq rT + \ln(1+k)$. □

3.5.2 Existenz von Lösungen ungleich Null im Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt geht es um mögliche Lösungen für das Maximum der Funktion

$$P(x) = \mathbb{E}\left(\ln\left(x(S_T - (1+\text{sign}(x)k)S_0 e^{rT}) + (X_0 - K1_{x\neq 0})e^{rT}\right)\right)$$

Der Erwartungswert ist nur positiv für

$$x \in \left[0, \frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right] =: I$$

daher muss die optimale Lösung natürlich auch in diesem Intervall liegen, insbesondere existieren keine negativen optimalen Lösungen.

Es soll nun zunächst die Existenz positiver Nullstellen untersucht werden.

Satz 16 *Die Funktion $P(x)$ hat ein Supremum $x > 0$, falls*

$$\mu > r + \frac{\ln(1+k)}{T}.$$

Andernfalls ist 0 die optimale Lösung.

Beweis: Für $x > 0$ gilt:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(xS_0(e^y - (1+k)e^{rT}) + (X_0 - K)e^{rT}\right)\phi(y)\mathrm{d}y$$

wobei $\phi(y)$ die Dichte einer $\mathcal{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$-verteilten Zufallsvariable darstellt.

Somit ist

$$P'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0(e^y - (1+k)e^{rT})}{xS_0(e^y - (1+k)e^{rT}) + (X_0 - K)e^{rT}}\phi(y)\mathrm{d}y$$

bzw.

$$P'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0(e^y - (1+k)e^{rT})}{(X_0 - K)e^{rT}}\phi(y)\mathrm{d}y = \frac{S_0\left(e^{\mu T} - (1+k)e^{rT}\right)}{(X_0 - K)e^{rT}} > 0$$

$$\iff \mu > r + \frac{\ln(1+k)}{T}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} P'\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) &= \frac{(1+k)S_0}{X_0 - K}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-(1+k)e^{rT-y}\right)\phi(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{(1+k)S_0}{X_0 - K}(1-(1+k)e^{(r-\mu+\sigma^2)T}) \\ &< 0 \iff \mu < r + \frac{\ln(1+k)}{T} + \sigma^2 \end{aligned}$$

Dann sei angemerkt, dass sich $P'(x)$ als Integral beliebig genau durch eine Treppenfunktion annähern lässt. Die Treppenfunktion ist dann in jedem Fall eine rationale Funktion und hat in I höchstens 1 Nullstelle. Somit hat auch $P'(x)$ in I höchstens eine Nullstelle.

Somit ergeben sich die folgenden Fälle:

1. $\mu \leq r + \frac{\ln(1+k)}{T}$: In diesem Fall liegt keine Nullstelle von $P'(x)$ in I, da $P'(x)$ an beiden Rändern von I negativ ist. Somit liegt das Supremum am Rand von I und wegen $P'(x) < 0 \forall x \in I$ bei 0.
2. $r + \frac{\ln(1+k)}{T} < \mu < r + \frac{\ln(1+k)}{T} + \sigma^2$: Hier hat $P'(x)$ unterschiedliche Vorzeichen an den Rändern von I, so dass I also genau eine Nullstelle enthält. $P''(x)$ ist auch hier wieder negativ, damit ist die Nullstelle das gesuchte Supremum.
3. $\mu \geq r + \frac{\ln(1+k)}{T} + \sigma^2$: Hier gilt nun $P'(x) > 0 \forall x \in I$. Daher liegt das Supremum für $x > 0$ am oberen Rand des Intervalls, also bei $\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$.

□

Weiterhin gilt bzgl. der Optimalität der so gefundenen Nullstelle:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{X_0-K}{1+k}e^y\right)\phi(y)\mathrm{d}y \\ &= \ln\left(\frac{X_0-K}{1+k}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \\ &> \ln(X_0) + rT = P(0) \\ \iff \mu - \frac{\sigma^2}{2} &> r + \frac{1}{T}\ln\left((1+k)\frac{X_0}{X_0-K}\right) \end{aligned}$$

Das Black-Scholes-Modell weist somit bzgl. der Existenz von Lösungen ungleich 0 ähnliche Eigenschaften auf wie das Binomialmodell.

3.5.3 Betrachtung des Grenzwerts

Im folgenden Abschnitt soll die Konvergenz der Lösung (d.h. der optimalen Aktienanzahl) im Binomialmodell gegen die optimale Lösung im Black-Scholes-Modell gezeigt werden.

Lemma 17 *Es gilt: Die Folge $P'_n\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right)$ ist streng monoton fallend und konvergiert gegen $P'\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right)$.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_n'\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right) &= \sum_{i=0}^{n} 2^{-(n)}\binom{n}{i}\frac{S_0(u_n^i d_n^{n-i}-(1+k)B_n^n)}{\frac{X_0-K}{1+k}(u_n^i d_n^{n-i}-(1+k)B_n^n)+(X_0-K)B_n^n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{-(n)}\binom{n}{i}\frac{S_0(u_n^i d_n^{n-i}-(1+k)B_n^n)}{\frac{X_0-K}{1+k}u_n^i d_n^{n-i}} \\
&= \frac{S_0(1+k)}{X_0-K}-\frac{S_0B_n^n(1+k)^2}{X_0-K}\left(\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{d_n}}{2}\right)^n \\
&= \frac{S_0(1+k)}{X_0-K}-\frac{S_0B_n^n(1+k)^2}{X_0-K}e^{-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 11 gilt, dass

$$\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2}\right)^n$$

streng monoton wächst und somit, dass $P_n'\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right)$ streng monoton fällt.
Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
P_n'\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right) &= \frac{S_0(1+k)}{X_0-K}-\frac{S_0B_n^n(1+k)^2}{X_0-K}e^{-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2}\right)^n \\
&\to \frac{S_0(1+k)}{X_0-K}-\frac{S_0B_n^n(1+k)^2}{X_0-K}e^{-(\mu-\sigma^2)T} \quad \text{(siehe Lemma 11)} \\
&= \frac{(1+k)S_0}{X_0-K}(1-(1+k)e^{(r-\mu+\sigma^2)T}) \\
&= P'\left(\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right) \quad \text{(siehe Beweis von Satz 16)}
\end{aligned}$$

□

Satz 18 *Unter der gegebenen Wahl der Parameter für u_n, d_n, B_n und p gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \arg\sup_{x_n} P_n(x_n) = \arg\sup_{x} P(x)$$

mit

$$\begin{aligned}
P_n(x_n) &= \mathbb{E}\left(\ln\left(x_n(S_n-(1+sign(x_n)k)S_0B_n^n)+(X_0-K\mathit{1}_{x_n\neq 0})B_n^n\right)\right), \\
P(x) &= \mathbb{E}\left(\ln\left(x(S_T-(1+sign(x)k)S_0e^{rT})+(X_0-K\mathit{1}_{x\neq 0})e^{rT}\right)\right), \\
\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) &\sim \mathcal{N}\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right),
\end{aligned}$$

d.h. die im Binomialmodell berechneten optimalen Aktienanzahlen konvergieren mit steigender Schrittanzahl des Binomialbaums gegen die optimale Aktienanzahl des Black-Scholes-Modells.

Beweis: Sei zunächst der Fall $x_n^* \in I \; \forall n > N$ betrachtet, wobei

$$I := \left[0, \frac{X_0-K}{(1+k)S_0}\right]$$

Gemäß zentralem Grenzwertsatz gilt, dass

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$$

Entsprechend gilt auch

$$\begin{aligned}&\ln\left(x(S_n - (1+\operatorname{sign}(x)k)S_0B_n^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B_n^n\right)\\ &\quad\xrightarrow{\mathcal{D}} \ln\left(x(S_T - (1+\operatorname{sign}(x)k)S_0e^{rT}) + (X_0 - K1_{x\neq 0})e^{rT}\right) \text{ für festes } x \in I\end{aligned}$$

da die Transformationen durch stetige Funktionen erfolgen.

Zu zeigen ist nun:

1. Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x) \text{ gleichmäßig für } x \in I$$
2. Es gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} P_n(x) = \sup_{x\in I} P(x)$$
Insbesondere sind die Suprema endlich.
3. Im letzten Schritt folgt dann:
$$\lim_{n\to\infty} x_n^* := \lim_{n\to\infty} \arg\sup_{x_n\in I} P_n(x_n) = \arg\sup_{x\in I} P(x) =: x^*$$

Zu Punkt 1:

Sei $x \in I$ fest gewählt. Dann gilt: Ist die Folge der

$$\ln\left(x(S_n - (1+\operatorname{sign}(x)k)S_0B_n^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B_n^n\right)$$

gleichmäßig integrierbar, so folgt aus der Konvergenz in Verteilung auch die Konvergenz der Erwartungswerte, womit zunächst die punktweise Konvergenz gezeigt wäre.

Gleichmäßige Integrierbarkeit ist unter anderem dann gegeben, wenn eine Funktion G existiert mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, G \geq 0, G \text{ monoton wachsend}$$

und

$$\sup_n \mathbb{E}(G(|\ln\left(x(S_n - (1+\operatorname{sign}(x)k)S_0B_n^n) + (X_0 - K1_{x\neq 0})B_n^n\right)|)) < \infty$$

(Satz von de la Valée-Poussin).

Es sei in diesem Fall als Funktion $G(y) = e^y$ gewählt, welche die obigen Bedingungen erfüllt. Weiterhin sei $x > 0$ (Konvergenz der Erwartungswerte für $x = 0$ ist trivial).

Darüber hinaus sei zunächst festgehalten, dass

$$\begin{aligned}&\ln\left(x(S_n - (1+k)S_0B_n^n) + (X_0 - K)B_n^n\right) > 0\\ \iff\ &\frac{S_n}{S_0} > \frac{1-(X_0-K)B_n^n}{xS_0} + (1+k)B_n^n =: c \text{ (konstant für alle } n)\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\sup_n \mathbb{E}(\exp(|\ln(x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n)|)) \\
&\quad\le \sup_n \mathbb{E}(\exp(-\ln(x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n))1_{S_n<cS_0}) \\
&\qquad+\sup_n \mathbb{E}((x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n)1_{S_n>cS_0})
\end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt: Falls $x=\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp(-\ln(x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n))1_{S_n<cS_0}) \\
&=\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}\mathbb{E}\left(\frac{S_0}{S_n}1_{S_n<cS_0}\right) \\
&\le\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}\mathbb{E}\left(\frac{S_0}{S_n}\right) \\
&=\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}\left(\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{d_n}}{2}\right)^n \\
&=\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}e^{-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}+e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{2}\right)^n \\
&\to\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}e^{-(\mu-\sigma^2)T}\ \text{(siehe Beweis von Lemma 11)}
\end{aligned}$$

d.h. der Erwartungswert ist endlich für spezifische n, aus der Konvergenz gegen einen endlichen Wert folgt dann auch die Endlichkeit des Supremums.
Falls $x<\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp(-\ln(x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n))1_{S_n<cS_0}) \\
&\le\mathbb{E}(\exp(-\ln(x(-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n))) \\
&=\frac{1}{(X_0-K)B_n^n-x(1+k)S_0B_n^n} \\
&<\infty \text{ für } x<\frac{X_0-K}{(1+k)S_0}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}((x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n)1_{S_n>cS_0}) \\
&=x\mathbb{E}(S_n1_{S_n>cS_0})+\mathbb{E}(1_{S_n>cS_0})(-x(1+k)S_0B_n^n+(X_0-K)B_n^n) \\
&\le x(\mathbb{E}(S_n)-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n
\end{aligned}$$

wobei $\sup_n\mathbb{E}(S_n)$ gemäß Lemma 11 endlich ist (genauer: es entspricht $S_0e^{\mu T}$).

Damit ist insgesamt für ein festes $x\in I$ die gleichmäßige Integrierbarkeit und somit auch die punktweise Konvergenz von $P_n(x)$ gegen $P(x)$ gezeigt.

Für die Funktion

$$P_n^{>0}(x):=\mathbb{E}\left(\ln(x(S_n-(1+k)S_0B_n^n)+(X_0-K)B_n^n)\right)$$

(d.h. P unter der Bedingung $x>0$) kann weiterhin die gleichmäßige Konvergenz gezeigt werden. Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, dass eine punktweise konvergente Folge auf einem kompakten Intervall auch gleichmäßig konvergiert, wenn sie weiterhin gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\forall x, y \in I \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P_n^{>0} : |x-y| < \delta \Rightarrow |P_n^{>0}(x) - P_n^{>0}(y)| < \epsilon$$

Es gilt nämlich (mit o.B.d.A. $P_n^{>0}(x) > P_n^{>0}(y)$):

$$\begin{aligned}
&|P_n^{>0}(x) - P_n^{>0}(y)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \ln\left(\frac{xS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}{yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}\right) \\
&\leq \ln\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{xS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}{yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}\right) \\
&\quad \text{(Jensensche Ungleichung)} \\
&= \ln\left(1 + (x-y)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{S_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n)}{yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n}\right)
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n > 0$$

da $y \in I$ und weiter

$$yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n \begin{cases} \leq (X_0-K)B_n^n \\ \geq \frac{X_0-K}{1+k} u_n^i d_n^{n-i} \end{cases} \quad \text{für } u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n < 0$$

sowie

$$yS_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n) + (X_0-K)B_n^n \begin{cases} \leq \frac{X_0-K}{1+k} u_n^i d_n^{n-i} \\ \geq (X_0-K)B_n^n \end{cases} \quad \text{für } u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n \geq 0$$

Und daher gilt für $x > y$:

$$\begin{aligned}
&|P_n^{>0}(x) - P_n^{>0}(y)| \\
&\leq \ln\left(1 + (x-y)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{S_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n)}{(X_0-K)B_n^n}\right) \\
&= \ln\left(1 + |x-y|\left(\frac{\mathbb{E}(S_n) - (1+k)S_0 B_n^n}{(X_0-K)B_n^n}\right)\right) \\
&< \ln\left(1 + |x-y|\left(\frac{e^{\mu T}S_0 - (1+k)S_0 B_n^n}{(X_0-K)B_n^n}\right)\right) \\
&\leq \ln(1 + |x-y|c_1) \text{ mit } c_1 := \frac{|e^{(\mu-r)T} - (1+k)|S_0}{X_0-K} > 0
\end{aligned}$$

da $\mathbb{E}(S_n)$ gemäß Lemma 11 streng monoton wächst und gegen $e^{\mu T}S_0$ konvergiert.

Für $x < y$ hingegen gilt

$$\begin{aligned}
&|P_n^{>0}(x) - P_n^{>0}(y)| \\
&\leq \ln\left(1 + (x-y)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\frac{S_0(u_n^i d_n^{n-i} - (1+k)B_n^n)}{\frac{X_0-K}{1+k}u_n^i d_n^{n-i}}\right) \\
&= \ln\left(1 - |x-y|\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}\left(1-(1+k)B_n^n\mathbb{E}\left(\frac{S_0}{S_n}\right)\right)\right) \\
&< \ln\left(1 - |x-y|\frac{(1+k)S_0}{X_0-K}\left(1-(1+k)e^{(r-\mu-\sigma^2)T}\right)\right) \\
&\quad \text{(analog Beweis von Lemma 11)} \\
&\leq \ln(1+|x-y|c_2) \text{ mit } c_2 := \frac{(1+k)S_0}{X_0-K}|1-(1+k)e^{(r-\mu-\sigma^2)T}| > 0
\end{aligned}$$

Nun ist also für

$$\delta = \frac{e^\epsilon - 1}{c} \text{ mit } c := \max\{c_1, c_2\}$$

die gleichgradige Stetigkeit und somit auch die gleichmäßige Konvergenz von $P_n^{>0}$ gezeigt.
Da weiterhin gilt:

$$P_n(x) = \begin{cases} P_n^{>0}(x) & \text{für } x > 0 \\ X_0 B_n^n & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I}|P_n(x) - P(x)| &= \max\left\{|P_n(0) - P(0)|, \sup_{x\in I, x>0}|P_n^{>0}(x) - P(x)|\right\} \\
&\leq \max\left\{0, \sup_{x\in I}|P_n^{>0}(x) - P(x)|\right\} \\
&= \sup_{x\in I}|P_n^{>0}(x) - P(x)| \\
&\to 0 \text{ (gleichmäßige Konvergenz von } P_n^{>0})
\end{aligned}$$

womit dann auch die gleichmäßige Konvergenz von P_n gegen P gezeigt wäre.
Zu Punkt 2:
Zunächst gilt für $x > 0$

$$\begin{aligned}
P_n(x) &\leq \ln(x(\mathbb{E}(S_n) - (1+k)S_0B_n^n) + (X_0-K)B_n^n) \\
&\leq \ln(x\mathbb{E}(S_n) + (X_0-K)B_n^n) \\
&\leq \ln(xe^{\mu T}S_0 + (X_0-K)B_n^n) \\
&\leq \ln(X_0-K) + \ln\left(\frac{e^{\mu T}}{1+k} + e^{rT}\right)
\end{aligned}$$

und somit $\sup_{x\in I} P_n(x) < \infty$ für alle n. Analog gilt auch $\sup_{x\in I} P(x) < \infty$.

Sei weiterhin zunächst angenommen, dass $\sup_{x\in I} P(x) > \sup_{x\in I} P_n(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sup_{x\in I} P(x) - \sup_{x\in I} P_n(x)\right| &= \sup_{x\in I} P(x) - \sup_{x\in I} P_n(x) \\
&= \sup_{x\in I}(P(x) - P_n(x) + P_n(x)) - \sup_{x\in I} P_n(x) \\
&\leq \sup_{x\in I}(P(x) - P_n(x)) + \sup_{x\in I} P_n(x) - \sup_{x\in I} P_n(x) \\
&= \sup_{x\in I}(P(x) - P_n(x)) \\
&\leq \sup_{x\in I} |P(x) - P_n(x)|
\end{aligned}$$

Andernfalls gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sup_{x\in I} P(x) - \sup_{x\in I} P_n(x)\right| &= \sup_{x\in I} P_n(x) - \sup_{x\in I} P(x) \\
&= \sup_{x\in I}(P_n(x) - P(x) + P(x)) - \sup_{x\in I} P(x) \\
&\leq \sup_{x\in I}(P_n(x) - P(x)) + \sup_{x\in I} P(x) - \sup_{x\in I} P(x) \\
&= \sup_{x\in I}(P_n(x) - P(x)) \\
&\leq \sup_{x\in I} |P(x) - P_n(x)|
\end{aligned}$$

Und schließlich

$$\sup_{x\in I} |P(x) - P_n(x)| \to 0$$

aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von P_n gegen P gemäß Punkt 1.

Zu Punkt 3:

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n^*) - P(x^*) = \left(\lim_{n\to\infty}(P(x_n^*) - P_n(x_n^*))\right) + \left(\lim_{n\to\infty} P_n(x_n^*) - P(x^*)\right) = 0$$

wobei der erste Term gemäß Punkt 1 (gleichmäßige Konvergenz) und der zweite Term gemäß Punkt 2 (Konvergenz der Suprema) gegen 0 konvergiert.

Falls x^* das eindeutige Maximum von P in I ist (d.h. $P(x) < P(x^*) \forall x \in I\backslash\{x^*\}$), kann man zeigen, dass die Folge x_n^* gegen x^* konvergiert. Denn würde sie dies nicht tun, so gälte:

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall N \ \exists k \geq N : |x_k^* - x^*| > \epsilon, \text{ d.h. } x_k \in I\backslash[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$$

Wenn man nun

$$C := \max_{x\in I\backslash[x^*-\epsilon, x^*+\epsilon]} P(x)$$

definiert (existiert, da P endlich in I, I beschränkt), dann folgt

$$\forall x_k \text{ wie oben } P(x^*) - P(x_k^*) \geq P(x^*) - C =: 2\delta > 0$$

da x^* das eindeutige Maximum von P in I ist. Folglich

$$\exists \delta > 0 \ \forall N \ \exists k \geq N : |P(x_k^*) - P(x^*)| > \delta$$

d.h. die Folge $P(x_n^*)$ konvergiert nicht gegen $P(x^*)$, was zu einem Widerspruch führen würde. Somit konvergiert x_n^* gegen x^*.

Falls $x^* = 0$ und $P(x^*) = P(x^{**})$ für ein $x^{**} > 0$ (d.h. optimale Aktienanzahl ist nicht eindeutig bestimmbar), dann ist es möglich, dass die Folge der x_n^* entweder gegen x^* oder gegen x^{**} konvergiert oder dass es zwei Teilfolgen gibt, von denen die eine gegen x^* und die andere gegen x^{**} konvergiert. Andere Grenzwerte sind nicht möglich, da zunächst x^{**} eindeutig ist (P hat für $x > 0$ genau ein Maximum) und weiterhin gilt:

- Die (ggf. existierende) unendliche Teilfolge mit $x_n^* = 0$ konvergiert automatisch gegen 0.
- Für die (ggf. existierende) unendliche Teilfolge mit $x_n^* > 0 \forall n$ kann man analog zum Fall des eindeutigen Maximums zeigen, dass x_n^* gegen x^{**} konvergieren muss (Anmerkung: Es gilt $C < P(x^{**})$ da $x_n^* > 0$).

Damit ist insgesamt die Konvergenz für $x_n^* \in I \; \forall n > N$ gezeigt.

Bleibt somit noch der Fall $\forall N \; \exists n > N : x_n^* \in I_n, x_n^* \notin I$. Da für ausreichend große n keine negativen optimalen Lösungen existieren, kann dies nur bedeuten, dass $\forall N \; \exists n > N : x_n^* \in I_n, x_n^* > \frac{X_0 - K}{(1+k)S_0}$.

Sei y_n definiert als

$$y_n := \begin{cases} x_n^* & \text{falls } x_n^* \in I \\ 0 & \text{falls } x_n^* < 0 \\ x_n^* \frac{(1+k)B_n^n - d_n^n}{(1+k)B_n^n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt $y_n \in I \; \forall n$.

Weiter gilt (für ausreichend große n)

$$|y_n - x_n^*| \leq |x_n^*| \left| \frac{d_n^n}{(1+k)B_n^n} \right| \to 0$$

Mit einem analogen Argument wie für die gleichgradige Stetigkeit oben kann man zeigen, dass

$$|P_n(x_n^*) - P_n(y_n)| \leq ln(1 + |x_n^* - y_n|a) \leq |x_n^* - y_n|a \text{ mit } 0 < a < +\infty$$

und somit auch $|P_n(x_n^*) - P_n(y_n)| \to 0$.

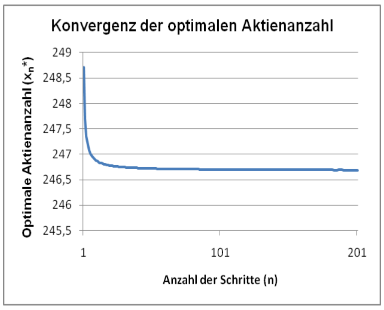
Mit $y_n^* := \sup_{y \in I} P_n(y)$ gilt (gemäß Konstruktion) $P(y_n) \leq P(y_n^*) \leq P(x_n^*)$ und somit auch $|P_n(x_n^*) - P_n(y_n^*)| \to 0$ bzw. $|P_n(y_n) - P_n(y_n^*)| \to 0$

Gemäß dem ersten Teil des Beweises oben (Schritt 2) gilt weiter $P_n(y_n^*) \to P(x^*)$ und somit auch $P_n(y_n) \to P(x^*)$. Damit folgt analog wie in Schritt 3 auch $P(y_n) \to P(x^*)$ und daher $y_n \to x^*$. Gemäß Konstruktion von y_n folgt schließlich auch die Konvergenz von $x_n^* \to x^*$. □

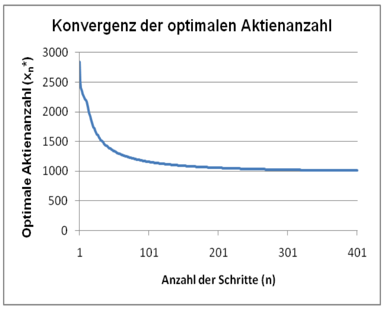
Numerisch lässt sich die optimale Buy-and-Hold-Lösung mit folgendem Algorithmus berechnen:

- Für gegebenes n finde die Nullstelle von $P_n'(x)$ für $x > 0$, wobei P_n' analytisch gegeben ist.
- Falls $P_n'(0) < 0$, dann ist 0 die optimale Lösung.
- Ansonsten kann die Nullstelle x^* mit Hilfe eines klassischen Intervallhalbierungsverfahrens gefunden werden. Startwerte sind dabei $x = 0$ und $x = -\frac{(X_0 - K)B_n^n}{(d_n^n - (1+k)B_n^n)S_0} - \epsilon$ (d.h. etwas kleiner als Polstelle).
- Falls $P(x^*) > P(0)$, dann ist die so gefundene Nullstelle die optimale Lösung, ansonsten liegt die optimale Aktienanzahl bei 0.

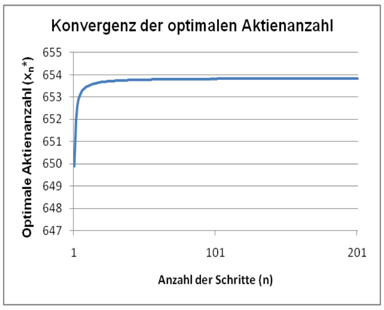
Die Geschwindigkeit der Konvergenz soll mit den folgenden Grafiken veranschaulicht werden:



$k = 0,01$
$K = 10$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 20\%$
$\mu = 6\%$
$r = 4\%$
$T = 1$



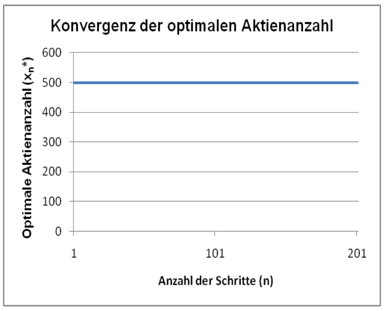
$k = 0,01$
$K = 10$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 20\%$
$\mu = 15\%$
$r = 4\%$
$T = 1$



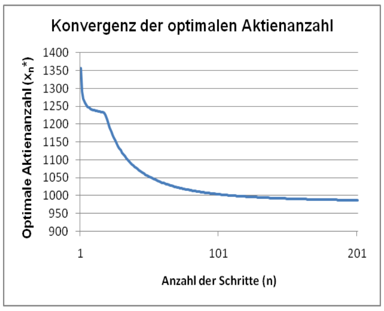
$k = 0,01$
$K = 150$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 30\%$
$\mu = 11\%$
$r = 4\%$
$T = 1$

Die Grafiken zeigen die Entwicklung der optimalen Aktienanzahlen für verschiedene Parameterkonstellationen. Wie man sieht, wird die stabile Aktienanzahl unterschiedlich schnell erreicht.

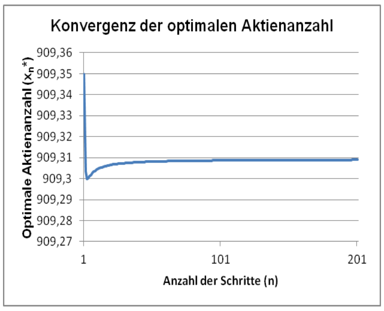
Weiterhin kann die Kurve auch folgende Formen annehmen:



$k = 0$
$K = 10$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 20\%$
$\mu = 12\%$
$r = 10\%$
$T = 1$



$k = 0,002$
$K = 150$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 40\%$
$\mu = 25\%$
$r = 4\%$
$T = 1$



$k = 0$
$K = 0$
$p = 0,5$
$S_0 = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma = 25\%$
$\mu = 9,67\%$
$r = 4\%$
$T = 1$

Die linke Grafik zeigt einen Spezialfall, hier ist $k = 0$ und $\mu - \frac{\sigma^2}{2} = r$, die optimale Lösung ist dann in allen Fällen $\frac{X_0 - K}{2S_0}$.

Satz 19 *Für die Parameterkonstellation*

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = r + \frac{1}{T}\ln(1+k)$$

gilt: Die optimale Aktienanzahl für $x > 0$ ist unabhängig von n und beträgt konstant

$$x_n^* \equiv x^* = \frac{X_0 - K}{2S_0(1+k)}.$$

Weiterhin muss mindestens

$$K < X_0\left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}\right)$$

gelten, damit sie auch für ganz I optimal (d.h. besser als 0) ist.

Beweis: Um zu zeigen, dass für alle n die oben angegebene Lösung für Anzahlen $x > 0$ optimal ist, soll (wie üblich) gezeigt werden, dass es eine Nullstelle von $P_n'(x)$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_n'(x^*) &= \sum_{i=0}^{n} 2^{-n}\binom{n}{i}\frac{u_n^i d_n^{n-i} - B_n^n(1+k)}{x^* S_0(u_n^i d_n^{n-i} - B_n^n(1+k)) + (X_0 - K)B_n^n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{-n}\binom{n}{i}\frac{u_n^i d_n^{n-i} - B_n^n(1+k)}{\frac{X_0-K}{2(1+k)}u_n^i d_n^{n-i} + \frac{X_0-K}{2}B_n^n} \\
&= \frac{2(1+k)}{X_0 - K}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{-n}\binom{n}{i}\left[\frac{u_n^i d_n^{n-i} - B_n^n(1+k)}{u_n^i d_n^{n-i} + B_n^n(1+k)} + \frac{u_n^{n-i} d_n^i - B_n^n(1+k)}{u_n^{n-i} d_n^i + B_n^n(1+k)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{-n}\binom{n}{i}\frac{2u_n^n d_n^n - 2B_n^{2n}(1+k)^2}{(u_n^i d_n^{n-i} + B_n^n(1+k))(u_n^{n-i} d_n^i + B_n^n(1+k))} \\
&= 0 \text{ da } u_n^n d_n^n = e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} = e^{2rT}(1+k)^2 = B_n^{2n}(1+k)^2
\end{aligned}$$

Damit die optimale Lösung in I größer als 0 ist, darf mindestens nicht die Parameterkonstellation aus Satz 14 gegeben sein, d.h. es muss mindestens gelten, dass

$$\mu T > rT + \ln(1+k) + \ln\left(\frac{X_0}{X_0 - K}\right) \text{ bzw. } \ln\left(\frac{X_0}{X_0 - K}\right) < \frac{\sigma^2}{2}T$$

Dies ist dann wiederum äquivalent zu $K < X_0\left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}\right)$. □

Anmerkung: Es lässt sich weiter zeigen, dass unter dieser Bedingung auch $P(0+) = P\left(\frac{X_0-K}{S_0(1+k)}\right)$ sowie $0 < P'(0+) = -P'\left(\frac{X_0-K}{S_0(1+k)}\right)$ gilt.

3.6 Zwischenfazit

In diesem Kapitel wurde eingehend das Problem der Portfoliooptimierung im Binomialmodell mit Transaktionskosten für eine Aktien untersucht. Dabei konnte zunächst gezeigt werden, dass die schrittweise Problemlösung (d.h. Optimierung jedes einzelnen Schritts im Binomialbaum ohne Berücksichtigung möglicher noch kommender Schritte) nicht optimal ist, dass allerdings weiterhin die Berechnung der global optimalen Lösung aufgrund der exponentiell steigenden Anzahl von Variablen nicht praktikabel ist (insbesondere nicht im Hinblick auf eine mögliche Konvergenz gegen das zeitstetige Modell).

Alternativ wurde eine kombinierte Lösungsstrategie entwickelt, die "schrittweise Buy-and-Hold-Strategie", die zum einen rechnerisch praktikabel ist und zum anderen garantiert besser als eine einfache "Buy-and-Hold-Strategie" ist. In der Konvergenz gegen das zeitstetige Modell (d.h. schrittweise Verfeinerung des Binomialbaums) ist diese Strategie ebenfalls garantiert besser als eine reine schrittweise Strategie. Anschaulich betrachtet wählt man hierbei initial die optimale Buy-and-Hold-Strategie für die Länge des Binomialbaums. In jedem weiteren Schritt berechnet man jedoch die (unter den bisherigen getroffenen Entscheidungen) neue optimale Buy-and-Hold-Strategie. Ist deren Nutzen deutlich besser als der Nutzen der aktuell gewählten Strategie, d.h. ist man anschaulich betrachtet so weit von der jetzt optimalen Strategie entfernt, dass sich der Wechsel trotz der damit verbundenen Kosten lohnt, dann wechselt man zur neuen Strategie, ansonsten nicht.

Dieses Vorgehen lässt sich auch problemlos auf das zeitstetige Modell übertragen, da weiterhin gezeigt wurde, dass die optimale Aktienanzahl der Buy-and-Hold-Strategie im Binomialbaum gegen die optimale Buy-and-Hold-Strategie im zeitstetigen Modell konvergiert. Weiterhin lässt sich die optimale Strategie im Binomialbaum mit einfachen numerischen Mitteln berechnen.

Kapitel 4

Binomialmodell mit Transaktionskosten für mehrere Aktien

4.1 Problemstellung

Für den Fall mit mehreren Aktien ist folgende Funktion zu maximieren:

$$
\begin{aligned}
&P_n^m(x_n(1),...,x_n(m)) \\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} x_n(j)(S_n(j) - (1+\operatorname{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)\right) \\
&= \sum_{i_1,...,i_m=0}^{n} \ln\left(\sum_{j=1}^{m} x_n(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+\operatorname{sign}(x_n(j))k(j))B_n^n)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right) B_n^n\right) \cdot p_n(i_1,...,i_m)
\end{aligned}
$$

mit

$$p_n(i_1,...,i_m) = \mathbb{P}(S_n(1) = u_n(1)^{i_1} d_n(1)^{n-i_1}, ..., S_n(m) = u_n(m)^{i_m} d_n(m)^{n-i_m}).$$

Dabei sind die Parameter $u_n(j)$ und $d_n(j)$ analog zum eindimensionalen Problem gewählt. In p_n sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Aktien einzubeziehen.

4.2 Betrachtung der optimalen Lösungen

In diesem Abschnitt sollen einige grundlegende Eigenschaften der optimalen Lösungen im mehrdimensionalen Fall betrachtet werden.

Lemma 20 *Für die optimalen Lösungen des mehrdimensionalen Problems* $\sup_{x_n} P_n^m(x_n)$ *gilt:*

$$x_n(j) \in I_n(j) \forall j = 1, ..., m$$

mit $I_n(j)$ *analog zum eindimensionalen Fall, d.h.*

$$I_n(j) = \left(-\frac{(X_0 - K(j))B_n^n}{(u_n(j)^n - (1 - k(j))B_n^n)S_0(j)}, -\frac{(X_0 - K(j))B_n^n}{(d_n(j)^n - (1 + k(j))B_n^n)S_0(j)} \right).$$

Beweis: Analog zum eindimensionalen Fall müssen die optimalen Lösungen die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\sum_{j=1}^{m} x_n(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+\text{sign}(x_n(j))k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x_n(j) \neq 0} \right) B_n^n > 0$$

$\forall i_j = 0, ..., n.$

Es soll nun die Behauptung zunächst für $x_n(1)$ gezeigt werden (die Behauptung für $j > 1$ folgt dann analog). Seien also $x_n(j), j > 1$ beliebig gewählt. Um den obigen Term möglichst klein zu machen, wählt man dann $i_j = n$, falls $x_n(j) < 0$, sonst $i_j = 0$. Damit sind alle Terme für $x_n(j), j > 1$ zumindest ≤ 0 (gleich 0 im Fall von $x_n(j) = 0$).

Nun gibt es zwei zu betrachtende Fälle, $x_n(1) < 0$ sowie $x_n(1) > 0$ ($x_n(1) = 0$ liegt in $I_n(1)$ und ist somit trivial). In beiden Fällen ist der Term bzgl. X_0 höchstens $(X_0 - K(1))B_n^n$ groß (falls $x_n(j) = 0, j > 1$), für $i_1 = n$ muss somit

$$x_n(1) > -\frac{(X_0 - K(1))B_n^n}{S_0(1)(u_n(1)^n - (1 - k(1))B_n^n)}$$

erfüllt sein. Mit einem analogen Argument gilt für $x_n(1) > 0$ auch, dass

$$x_n(1) < -\frac{(X_0 - K(1))B_n^n}{S_0(1)(d_n(1)^n - (1 + k(1))B_n^n)}.$$

womit die Behauptung gezeigt wäre. □

Im nächsten Lemma werden mögliche negative Lösungen betrachtet:

Lemma 21 *Für ausreichend große* n *gilt für die optimale Wahl von* x_n*, dass* $x_n(j) \geq 0$ $\forall j = 1, ..., m$.

Beweis: Betrachtet wird die Funktion $P_n^m(x_n)$. Sei o.B.d.A. angenommen, dass $x_n(1) < 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&P_n^m(x_n)\\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+\text{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)\right)\\
&< \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=2}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+\text{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=2}^m K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + x_n(1)S_0(1)(d_n(1)^n - (1-k(1))B_n^n) - K(1)B_n^n\right)\right)\\
&< \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=2}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+\text{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=2}^m K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. - \frac{(X_0 - K(1))B_n^n}{S_0(1)(u_n(1)^n - (1-k(1))B_n^n)} S_0(1)(d_n(1)^n - (1-k(1))B_n^n) - K(1)B_n^n\right)\right)\\
&\qquad \text{(wegen Lemma 20)}
\end{aligned}$$

Der Term

$$-\frac{d_n(1)^n - (1-k(1))B_n^n}{u_n(1)^n - (1-k(1))B_n^n}$$

ist positiv, konvergiert aber für $n \to \infty$ gegen 0 und fällt daher auch irgendwann unter $\frac{K(1)}{X_0 - K(1)}$, d.h. der gesamte $x_n(1)$ betreffende Term fällt unter 0.

Somit folgt für $x_n(1) < 0$ und ausreichend großes n:

$$\begin{aligned}
&P_n^m(x_n)\\
&< \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=2}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+\text{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=2}^m K(j)1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)\right)\\
&= P_n^m(x_n, x_n(1) = 0)
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Wahl $x_n(1) = 0$ besser ist als $x_n(1) < 0$. Damit existieren für ausreichend große n auch im mehrdimensionalen Fall keine negativen optimalen Lösungen. $\square$

Lemma 22 *Für $n \to \infty$ gilt $x_n^* \in I^m$ mit*

$$I^m := \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0, \sum_{j=1}^m \left[x(j)(1+k(j))S_0(j) + K(j)1_{x(j)\neq 0}\right] \leq X_0 \right\}$$

Weiterhin ist $P_n^m(x) > -\infty\ \forall n,\ \forall x \in I^m$ und I^m ist kompakt.

Beweis:

Wegen Lemma 20 folgt zunächst, dass für $n \to \infty$ kein $x_n^*(j)$ negativ sein kann (darüber hinaus gibt es gemäß Lemma 21 keine negativen optimalen Lösungen für ausreichend große n).

Weiterhin muss gelten, dass

$$\sum_{j=1}^{m} x_n^*(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x(j)\neq 0}\right) B_n^n > 0$$

für sämtliche mögliche Realsierungen von $S_n(j)$, insbesondere auch für $S_n(j) = d_n^n(j)S_0(j) \to 0$ für $n \to \infty$.

Somit folgt mindestens:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[x_n^*(j)(1+k(j))S_0(j) + K(j)1_{x(j)\neq 0}\right] \leq X_0$$

für $n \to \infty$.

Weiter gilt für $x \in I^m$: Falls $x = 0$, dann ist $P_n^m(x) = \ln(X_0 B_n^n) > -\infty$. Ansonsten gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} x(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x(j)\neq 0}\right) B_n^n \\
&\quad \geq \sum_{j=1}^{m} x(j)S_n(j) \\
&\quad > 0
\end{aligned}$$

und damit auch $P_n^m(x) > -\infty$.

Die Kompaktheit von I^m folgt direkt aus der Definition (abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}^n$ sind kompakt). □

4.3 Konvergenz gegen das zeitstetige Modell

Es gilt folgender Satz (analog zum Fall für eine Aktie):

Satz 23 *Unter der gegebenen Wahl der Parameter für u_n, d_n und B_n gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \arg\sup_{x_n} P_n^m(x_n) = \arg\sup_{x} P^m(x)$$

mit

$$P_n^m(x_n)$$
$$= \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m x_n(j)(S_n(j)-(1+\mathit{sign}(x_n(j))k(j))S_0(j)B_n^n)+\left(X_0-\sum_{j=1}^m K(j)\,1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)\right),$$

$$P^m(x)$$
$$= \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(S_T(j)-(1+\mathit{sign}(x(j))k(j))S_0(j)e^{rT})+\left(X_0-\sum_{j=1}^m K(j)\,1_{x(j)\neq 0}\right)e^{rT}\right)\right),$$

S_T ist m-dimensional lognormalverteilt mit Korrelationsmatrix Σ,

d.h. die im Binomialmodell berechneten optimalen Aktienanzahlen konvergieren mit steigender Schrittanzahl des Binomialbaums auch im m-dimensionalen Binomialmodell gegen die optimale Aktienanzahl des Black-Scholes-Modells.

Beweis: Sei zunächst angenommen, dass $x_n^* \in I^m \forall\ n > N$.

Gemäss dem multivariaten zentralenen Grenzwertsatz gilt analog zum eindimensionalen Fall $S_n \to S_T$ in Verteilung.

Entsprechend gilt auch

$$\ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(S_n(j)-(1+\operatorname{sign}(x(j))k(j))S_0(j)B_n^n)+\left(X_0-\sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(S_T(j)-(1+\operatorname{sign}(x(j))k(j))S_0(j)B_n^n)+\left(X_0-\sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)$$

da die Transformationen durch stetige Funktionen erfolgen ($x := (x(1), ..., x(m)$ ist dabei fest gewählt).

Zu zeigen ist nun wieder:

1. Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} P_n^m(x) = P^m(x) \text{ gleichmäßig für } x \in I^m$$

2. Es gilt weiter:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) = \sup_{x\in I^m} P^m(x).$$

   Insbesondere sind die Suprema endlich.

3. Im letzten Schritt folgt dann:
$$\lim_{n\to\infty} x_n^* := \lim_{n\to\infty} \arg\sup_{x_n\in I^m} P_n^m(x_n) = \arg\sup_{x\in I^m} P^m(x) =: x^*.$$

Zu Punkt 1:

Sei $x \in I^m$ fest gewählt. Da die punktweise Konvergenz für $x = 0$ trivial ist, sei weiter vorausgesetzt, dass $x(j) > 0$ für mindestens ein j. Dann gilt: Ist die Folge der

$$\ln(f_n^m(x)) := \ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(S_n(j) - (1+\text{sign}(x(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)$$

gleichmäßig integrierbar, so folgt aus der Konvergenz in Verteilung auch die Konvergenz der Erwartungswerte, womit zunächst wieder die punktweise Konvergenz gezeigt wäre.

Gleichmäßige Integrierbarkeit ist (gemäß Satz von de la Valée-Poussin) wie im eindimensionalen Fall unter anderem dann gegeben, wenn eine Funktion G existiert mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, G \geq 0, G \text{ monoton wachsend}$$

und

$$\sup_n \mathbb{E}(G(|\ln(f_n^m(x))|)) < \infty$$

Es sei wieder $G(y) = e^y$ gewählt, welche die obigen Bedingungen erfüllt.

Dann gilt:

$$\sup_n \mathbb{E}(\exp(|\ln(f_n^m(x))|)) \leq \sup_n \mathbb{E}\left(\frac{1}{f_n^m(x)}1_{f_n^m(x)<1}\right) + \sup_n \mathbb{E}(f_n^m(x)1_{f_n^m(x)>1})$$

Für den ersten Term gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{f_n^m(x)}1_{f_n^m(x)<1}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{f_n^m(x)}\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^m x(j)S_n(j)}\right)\\
&\ \text{(aufgrund der Eigenschaften von } I^m \text{ wie in Lemma 22 gezeigt)}\\
&\leq \mathbb{E}\left(\sum_{j:x(j)\neq 0} \frac{1}{x(j)S_n(j)}\right) \quad \text{(mindestens ein } x(j) > 0)\\
&= \sum_{j:x(j)\neq 0} \frac{1}{x(j)}\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n(j)}\right)\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt schon im Konvergenzbeweis für den eindimensionalen Fall gezeigt wurde.

Für den zweiten Term gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f_n^m(x)1_{f_n^m(x)>1})\\
&\quad \leq \mathbb{E}(f_n^m(x))\\
&\quad = \sum_{j=1}^m x(j)(\mathbb{E}(S_n(j)) - (1+\text{sign}(x(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right)B_n^n\\
&\quad < +\infty
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt ebenfalls schon im Konvergenzbeweis für den eindimensionalen Fall gezeigt wurde.

Damit ist insgesamt für ein festes $x \in I^m$ die gleichmäßige Integrierbarkeit und somit auch die punktweise Konvergenz von $P_n^m(x)$ gegen $P^m(x)$ gezeigt.

Für die Funktion

$$P_n^{m,>0}(x) \quad := \quad \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} x(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)\right) B_n^n\right)\right)$$

(d.h. P_n^m unter der Bedingung $x(j) > 0 \forall j$) kann weiterhin die gleichmäßige Konvergenz gezeigt werden. Dazu wird wie im eindimensionalen Fall wieder die Tatsache ausgenutzt, dass eine punktweise konvergente Folge auf einem kompakten Intervall auch gleichmäßig konvergiert, wenn sie weiterhin gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\forall x, y \in I^m \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P_n^{m,>0} : \|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |P_n^{m,>0}(x) - P_n^{m,>0}(y)| < \epsilon$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
&|P_n^{m,>0}(x) - P_n^{m,>0}(y)| \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m) \\
&\quad \cdot \ln\left(\frac{\sum_{j=1}^m x(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}{\sum_{j=1}^m y(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}\right) \\
&\quad\quad (\text{o.B.d.A. } P_n^{m,>0}(x) > P_n^{m,>0}(y)) \\
&\le \ln\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m)\right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\sum_{j=1}^m x(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}{\sum_{j=1}^m y(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}\right) \\
&\quad (\text{Jensensche Ungleichung}) \\
&= \ln\left(1 + \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m)\right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\sum_{j=1}^m (x(j) - y(j))S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n)}{\sum_{j=1}^m y(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}\right) \\
&\le \ln\left(1 + \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m)\right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\sum_{j=1}^m |x(j) - y(j)|S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} + (1+k(j))B_n^n)}{\sum_{j=1}^m y(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right) B_n^n}\right)
\end{aligned}$$

Wegen $y \in I^m$ und $y(j) > 0 \ \forall j$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} y(j)S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} - (1{+}k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)\right) B_n^n \\
&\quad \geq \sum_{j=1}^{m} y(j)S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} \\
&\quad \geq \min_{j=1,\dots,m}\{y(j)\} \sum_{j=1}^{m} S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} \\
&=: \quad c\sum_{j=1}^{m} S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} \text{ mit } c > 0
\end{aligned}$$

Und daher:

$$\begin{aligned}
&|P_n^{m,>0}(x) - P_n^{m,>0}(y)| \\
&\leq \quad \ln\left(1 + \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m) \frac{\sum_{j=1}^m |x(j)-y(j)| S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} + (1+k(j))B_n^n)}{c\sum_{j=1}^m S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j}}\right) \\
&\leq \quad \ln\Bigg(1 + \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m) \max_{j=1,\dots,m}\{|x(j)-y(j)|\} \\
&\qquad\qquad \cdot \frac{\sum_{j=1}^m S_0(j)(u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j} + (1+k(j))B_n^n)}{c\sum_{j=1}^m S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j}}\Bigg) \\
&= \quad \ln\Bigg(1 + \frac{\|x(j)-y(j)\|_\infty}{c} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^m S_0(j)(1+k(j))B_n^n \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m) \frac{1}{\sum_{j=1}^m S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j}}\right)\Bigg) \\
&\leq \quad \ln\Bigg(1 + \frac{\|x(j)-y(j)\|_\infty}{c} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^m S_0(j)(1+k(j))B_n^n \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} p(i_1,\dots,i_m) \sum_{j=1}^m \frac{1}{S_0(j)u_n(j)^{i_j} d_n(j)^{n-i_j}}\right)\Bigg) \\
&= \quad \ln\left(1 + \frac{\|x(j)-y(j)\|_\infty}{c}\left(1 + \sum_{j=1}^m S_0(j)(1+k(j))B_n^n \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n(j)}\right)\right)\right) \\
&=: \quad \ln\left(1 + \|x(j)-y(j)\|_\infty a\right) \text{ mit } 0 < a < +\infty
\end{aligned}$$

Nun ist also für

$$\delta = \frac{e^\epsilon - 1}{a} > 0$$

die gleichgradige Stetigkeit und somit auch die gleichmäßige Konvergenz von $P_n^{m,>0}$ gezeigt.

Der Rest der Behauptung kann nun durch Induktion gezeigt werden (Induktionsanfang: eindimensionaler Fall). Sei also vorausgesetzt, dass die gleichmäßige Konvergenz für alle Dimensionen $h < m$ gezeigt ist.

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in I^m} |P_n^m(x) - P^m(x)| \\ &\qquad = \max\left\{ \sup_{x\in I^m, \exists j: x(j)=0} |P_n^m(x) - P^m(x)|, \sup_{x\in I^m, x(j)>0 \forall j} |P_n^{m,>0}(x) - P^{m,>0}(x)| \right\}\end{aligned}$$

Falls eines der $x(j) = 0$, dann entspricht dies einer Reduktion der Dimension und die Konvergenz des Supremums gegen 0 ist somit durch die Induktionsannahme gezeigt. Im anderen Fall ($x(j) > 0\ \forall j$) gilt $P_n^m(x) = P_n^{m,>0}(x)$, wobei letztere Funktion (wie oben gezeigt) gleichgradig stetig ist und somit gegen $P^{m,>0}$ konvergiert (und wiederum $P^{m,>0}(x) = P^m(x)$ falls $x(j) > 0$ $\forall j$). Damit ist auch die gleichmäßige Konvergenz von P_n^m gegen P^m für $x \in I^m$ gezeigt.

Zu Punkt 2:

Zunächst gilt: Das Supremum von $P_n^m(x)$ in I^m ist endlich ist, denn

$$\begin{aligned}&P_n^m(x) \\ \leq\ & \ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(\mathbb{E}(S_n(j)) - (1+\text{sign}(x(j))k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right) B_n^n\right) \\ & \text{(Jensensche Ungleichung)} \\ <\ & \ln\left(\sum_{j=1}^m x(j)(S_0 e^{\mu T} - (1+\text{sign}(x(j))k(j))S_0(j)e^{rT}) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)1_{x(j)\neq 0}\right) e^{rT}\right) \\ & \text{(Lemma 11)} \\ <\ & +\infty\end{aligned}$$

da $x(j) \in I_n(j)$ und somit ist x beschränkt. Analog gilt auch $\sup_{x\in I^m} P^m(x) < \infty$.

Sei weiterhin zunächst angenommen, dass $\sup_{x\in I} P^m(x) > \sup_{x\in I} P_n^m(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\sup_{x\in I^m} P^m(x) - \sup_{x\in I^m} P_n^m(x)\right| &= \sup_{x\in I^m} P^m(x) - \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) \\ &= \sup_{x\in I^m} (P^m(x) - P_n^m(x) + P_n^m(x)) - \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) \\ &\leq \sup_{x\in I^m} (P^m(x) - P_n^m(x)) + \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) - \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) \\ &= \sup_{x\in I^m} (P^m(x) - P_n^m(x)) \\ &\leq \sup_{x\in I^m} |P^m(x) - P_n^m(x)|\end{aligned}$$

Andernfalls gilt

$$\begin{aligned}\left|\sup_{x\in I^m} P^m(x) - \sup_{x\in I^m} P_n^m(x)\right| &= \sup_{x\in I^m} P_n^m(x) - \sup_{x\in I^m} P^m(x) \\ &= \sup_{x\in I^m} (P_n^m(x) - P^m(x) + P^m(x)) - \sup_{x\in I^m} P^m(x) \\ &\leq \sup_{x\in I^m} (P_n^m(x) - P^m(x)) + \sup_{x\in I^m} P^m(x) - \sup_{x\in I^m} P^m(x) \\ &= \sup_{x\in I^m} (P_n^m(x) - P^m(x)) \\ &\leq \sup_{x\in I^m} |P^m(x) - P_n^m(x)|\end{aligned}$$

Und schließlich

$$\sup_{x \in I^m} |P^m(x) - P_n^m(x)| \to 0$$

aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von P_n^m gegen P^m gemäß Punkt 1.

Zu Punkt 3:

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P^m(x_n^*) - P^m(x^*) = \left(\lim_{n\to\infty} (P^m(x_n^*) - P_n^m(x_n^*))\right) + \left(\lim_{n\to\infty} P_n^m(x_n^*) - P^m(x^*)\right) = 0$$

wobei der erste Term gemäß Punkt 1 (gleichmäßige Konvergenz) und der zweite Term gemäß Punkt 2 (Konvergenz der Suprema) gegen 0 konvergiert.

Analog zum eindimensionalen Fall ergibt sich dann: Falls keine mehrdeutigen Lösungen existieren (d.h. falls die optimale Aktienanzahl eindeutig bestimmbar ist), dann konvergiert x_n^* gegen x^*. Ansonsten könnten konvergente Teilfolgen gegen die verschiedenen möglichen optimalen Lösungen existieren.

Damit ist insgesamt die Konvergenz für $x_n^* \in I^m \; \forall n > N$ gezeigt.

Bleibt somit noch der Fall $\forall N \; \exists n > N : x_n^* \in I_n^m, x_n^* \notin I^m$. Dabei ist $I_n^m := \{x \in \mathbb{R}^n : P_n^m(x) > -\infty\}$. Da für ausreichend große n keine negativen optimalen Lösungen existieren, kann weiter angenommen werden, dass $x_n^* > 0$. Somit gilt insbesondere:

$$\sum_{j=1}^{m} x_n^*(j)(d_n^n(j) - (1 + k(j))B_n^n)S_0(j) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^{m} K(j)1_{x(j)\neq 0}\right) B_n^n > 0$$

Sei weiter y_n definiert als

$$y_n(j) := \begin{cases} x_n^*(j) & \text{falls } x_n^* \in I^m \\ x_n^*(j)\frac{(1+k(j))B_n^n - d_n^n(j)}{(1+k(j))B_n^n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $y_n(j) \in I^m$ (zumindest für ausreichend große n).

Weiter gilt

$$\max_j |y_n(j) - x_n^*(j)| = \max_j |x_n^*(j)| \left| \frac{d_n^n(j)}{(1 + k(j))B_n^n} \right| \to 0$$

Da $P_n^m(x_n^*) > P_n^m(y_n))$ wegen der Optimalität von x_n^*, kann man mit einem analogen Argument wie für die gleichgradige Stetigkeit oben zeigen, dass

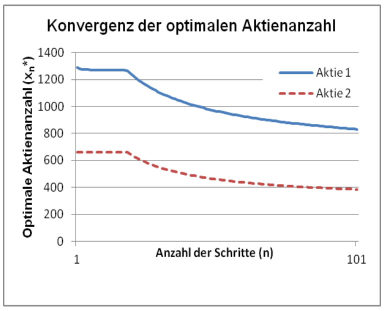
$$|P_n^m(x_n^*) - P_n^m(y_n)| \leq ln(1 + ||x_n^* - y_n||_\infty a) \leq ||x_n^* - y_n||_\infty a \text{ mit } 0 < a < +\infty$$

und somit auch $|P_n^m(x_n^*) - P_n^m(y_n)| \to 0$.

Mit $y_n^* := \sup_{y \in I^m} P_n^m(y)$ gilt (gemäß Konstruktion) $P(y_n) \leq P(y_n^*) \leq P(x_n^*)$ und somit auch $|P_n^m(x_n^*) - P_n^m(y_n^*)| \to 0$ bzw. $|P_n^m(y_n) - P_n^m(y_n^*)| \to 0$

Gemäß dem ersten Teil des Beweises oben (Schritt 2) gilt weiter $P_n^m(y_n^*) \to P^m(x^*)$ und somit auch $P_n^m(y_n) \to P^m(x^*)$. Damit folgt analog wie in Schritt 3 auch $P^m(y_n) \to P^m(x^*)$ und daher $y_n \to x^*$. Gemäß Konstruktion von y_n folgt schließlich auch die Konvergenz von $x_n^* \to x^*$. □

Die Konvergenz soll hier noch einmal für ein Beispiel graphisch veranschaulicht werden:



$$\begin{array}{ll} k(1) = 0,01 & k(2) = 0,002 \\ K(1) = 150 & K(2) = 10 \\ S_0(1) = 10 & S_0(2) = 10 \\ \sigma(1) = 15\% & \sigma(2) = 20\% \\ \mu(1) = 8\% & \mu(2) = 7\% \end{array}$$

$$p = 0,5$$
$$X_0 = 10000$$
$$r = 4\%$$
$$T = 1$$

4.4 Reduktion der zu betrachtenden Aktien

Im Sinne eines effizienten Lösungsverfahrens ist es von Interesse, in welchen Fällen man eine Aktie des Portfolios nicht betrachten muss, weil sie in der optimalen Lösung ohnehin immer eine Anzahl von 0 erhalten würde. Dies ist zumindest für folgende Konstellation der Fall:

Satz 24 *Für unabhängige Aktienpreise $S_i(1), ..., S_i(m)$ sowie für die Parameterkonstellation*

$$\mu(1) \leq r + \frac{1}{T}\ln(1 + k(1)) + \frac{1}{T}\ln\left(\frac{C}{C - K(1)e^{rT}}\right)$$

mit

$$C := \max\left\{\max_{j=2,...,m} \frac{X_0 - K(j)}{1 + k(j)} e^{\mu(j)T}, X_0 e^{rT}\right\}$$

gilt:

$$P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) < P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) = P_n^{m-1}(x_n(2), ..., x_n(m))$$
$$\forall x_n(1) > 0 \ \forall x_n(2), ..., x_n(m)$$

für ausreichend große n, d.h. in jedem Fall ist im Limit 0 die optimale Lösung für Aktie 1. Dabei wird vorausgesetzt, dass $x_n \in I^m$.

Beweis: Gemäß Lemma 21 ist es ausreichend, positive Lösungen zu betrachten.Es gilt

$$\begin{aligned}
&P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) - P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) \\
= \;& \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - K(j)\sum_{j=1}^m 1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right)\right) \\
& -P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) \\
=: \;& \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{x_n(1)S_0(1)(1+k(1))B_n^n}{c - K(1)B_n^n}\left(\frac{S_n(1)}{S_0(1)(1+k(1))B_n^n} - 1\right) + 1\right)\right) \\
& +\mathbb{E}(\ln(c - K(1)B_n^n)) - \mathbb{E}(\ln(c)) \\
& \text{mit } c := \sum_{j=2}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - K(j)\sum_{j=2}^m 1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n \\
\leq \;& \ln\left(\mathbb{E}\left(\frac{x_n(1)S_0(1)(1+k(1))B_n^n}{c - K(1)B_n^n}\left(\frac{S_n(1)}{S_0(1)(1+k(1))B_n^n} - 1\right) + 1\right)\right) \\
& + \ln\left(\frac{\mathbb{E}(c) - K(1)B_n^n}{\mathbb{E}(c)}\right) \\
& \text{(Jensensche Ungleichung)} \\
= \;& \ln\left(\mathbb{E}\left(\frac{x_n(1)S_0(1)(1+k(1))B_n^n}{c - K(1)B_n^n}\right)\left(\frac{\mathbb{E}(S_n(1))}{S_0(1)(1+k(1))B_n^n} - 1\right) + 1\right) \\
& + \ln\left(\frac{\mathbb{E}(c) - K(1)B_n^n}{\mathbb{E}(c)}\right) \\
& \text{(wegen der Unabhängigkeit der } S_n(j))
\end{aligned}$$

Wegen $x_n \in I^m$ gilt

$$\frac{x_n(1)S_0(1)(1+k(1))B_n^n}{c - K(1)B_n^n} \in (0, 1]$$

und somit

$$\begin{aligned}
&P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) - P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) \\
\leq \;& \ln\left(\frac{\mathbb{E}(S_n(1))}{S_0(1)(1+k(1))B_n^n}\right) + \ln\left(\frac{\mathbb{E}(c) - K(1)B_n^n}{\mathbb{E}(c)}\right) \\
< \;& (\mu(1) - r)T - \ln(1+k(1)) - \ln\left(\frac{\mathbb{E}(c)}{\mathbb{E}(c) - K(1)B_n^n}\right) \\
& \text{(Lemma 11)}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(c) \;\leq\; & \sup_{x_n}\left\{\sum_{j=2}^m x_n(j)(\mathbb{E}(S_n(j)) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - K(j)\sum_{j=2}^m 1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n\right\} \\
\leq\; & \max\left\{\max_{j=2,...,m} \frac{X_0 - K(j)}{1+k(j)}e^{\mu(j)T}, X_0e^{rT}\right\} \\
& \text{(Lemma 11)} \\
=\; & C
\end{aligned}$$

und somit insgesamt (aufgrund der gewählten Parameterkonstellation)

$$P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) - P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) < 0$$

□

Satz 25 *Im Fall ohne Fixkosten für Aktie 1, d.h. $K(1) = 0$, lässt sich die Behauptung des obigen Satzes wieder umkehren, d.h. für unabhängige Aktienpreise $S_i(1), ..., S_i(m)$ gilt:*

$$\begin{aligned} & \mu(1) \leq r + \frac{1}{T}\ln(1+k(1)) \\ \iff \quad & P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) < P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m)) = P_n^{m-1}(x_n(2), ..., x_n(m)) \\ & \forall x_n(1) > 0 \ \forall x_n(2), ..., x_n(m) \end{aligned}$$

für ausreichend große n. Dabei wird auch hier wieder vorausgesetzt, dass $x_n \in I^m$.

Beweis: Der erste Teil wurde bereits im vorangegangenen Satz bewiesen.

Da im Fall ohne Fixkosten für Aktie 1 keine Unstetigkeit an der Stelle 0 für Aktie 1 vorliegt, folgt aus $P_n^m(x_n(1), x_n(2), ..., x_n(m)) < P_n^m(0, x_n(2), ..., x_n(m))$ unmittelbar

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial x_n(1)}(0, x_n(2), ..., x_n(m)) \leq 0$$

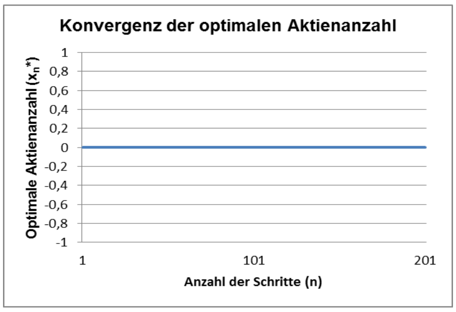
Weiterhin

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_n^m}{\partial x_n(1)}(0, x_n(2), ..., x_n(m)) \\ = \quad & \mathbb{E}\left(\frac{S_n(1) - (1+k(1))S_0(1)B_n^n}{\sum_{j=2}^m x_n(j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - K(j)\sum_{j=2}^m 1_{x_n(j)\neq 0}\right)B_n^n}\right) \\ =: \quad & \mathbb{E}\left(\frac{S_n(1) - (1+k(1))S_0(1)B_n^n}{c}\right) \\ = \quad & (\mathbb{E}(S_n(1)) - (1+k(1))S_0(1)B_n^n)\mathbb{E}\left(\frac{1}{c}\right) \\ & \text{(wegen der Unabhängigkeit der } S_n(j)) \end{aligned}$$

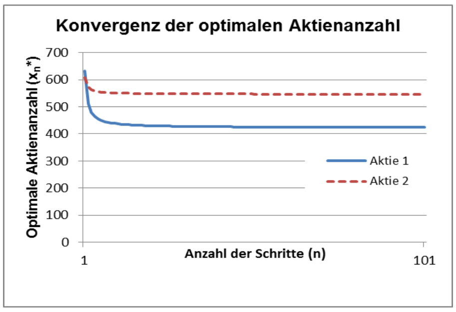
Da $x_n \in I^m$ gilt $c > 0$ und damit auch $\mathbb{E}\left(\frac{1}{c}\right) > 0$ und somit $\mathbb{E}(S_n(1)) - (1+k(1))S_0(1)B_n^n < 0$.

Gemäß Beweis von Satz 12 folgt daraus wiederum (zumindest für ausreichend große n) $\mu(1)T \leq rT + \ln(1+k(1))$. □

Leider lassen sich die beiden Sätze nicht auf korrelierte (zumindest nicht auf negativ korrelierte) Aktien übertragen, wie das folgende Beispiel zeigt:



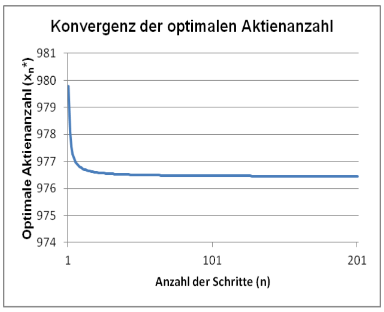
$k = 0,01$
$K = 0,\ p = 0,5,\ X_0 = 10000$
$S_0 = 10$
$\sigma = 10\%$
$\mu = 4\%$
$r = 4\%,\ T = 1$



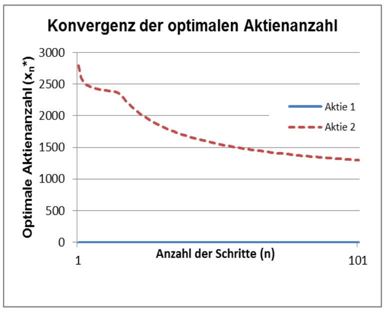
$k(1) = 0,01, k(2) = 0,002$
$K(1) = K(2) = 0,\ p = 0,5,\ X_0 = 10000$
$S_0(1) = 10,\ S_0(2) = 10$
$\sigma(1) = 10\%,\ \sigma(2) = 30\%$
$\mu(1) = 4\%,\ \mu(2) = 8\%$
$r = 4\%,\ T = 1$
$\rho = -0,9$

In diesem Fall gilt also, dass die optimale Aktienanzahl bei ausschließlicher Betrachtung von Aktie 1 bei 0 liegt, wohingegen im Modell mit der zweiten Aktie eine optimale Lösung > 0 vorliegt.

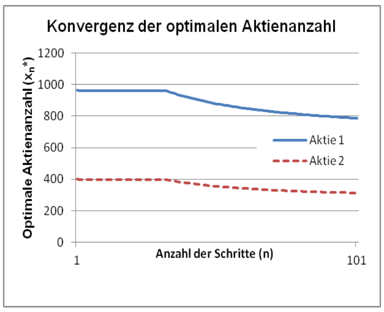
Im Fall mit Fixkosten wäre es noch interessanter, Kriterien für die einzelnen Aktien zu finden, die dazu führen, dass man die Aktie im Portfolio nicht berücksichtigen muss (weil die optimale Lösung stehts 0 ist), da durch die Unstetigkeit bei $x_n(j) = 0$ hier zusätzliche numerische Herausforderungen existieren und es somit sehr hilfreich wäre, wenn die Anzahl der Aktien im Vorhinein reduziert werden könnte. Dies ist allerdings nicht allgemein möglich, wie das folgende Beispiel veranschaulicht:



$k(1) = 0,01$
$K(1) = 150$
$p = 0,5$
$S_0(1) = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma(1) = 20\%$
$\mu(1) = 9\%$
$r = 4\%$
$T = 1$



$k(1) = 0,01; k(2) = 0,002$
$K(1) = 150; K(2) = 10$
$p = 0,5$
$S_0(1) = 10; S_0(2) = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma(1) = 20\%; \sigma(2) = 15\%$
$\rho = 0,5$
$\mu(1) = 9\%; \mu(2) = 10\%$
$r = 4\%$
$T = 1$



$k(1) = 0,01; k(2) = 0,002$
$K(1) = 150; K(2) = 10$
$p = 0,5$
$S_0(1) = 10; S_0(2) = 10$
$X_0 = 10000$
$\sigma(1) = 20\%; \sigma(2) = 30\%$
$\rho = 0,5$
$\mu(1) = 9\%; \mu(2) = 8\%$
$r = 4\%$
$T = 1$

Wie man sieht, ist die optimale Lösung für die einzelne Aktie größer als 0, im Portfolio mit einer zweiten Aktie hängt es von den Parametern der zweiten Aktie ab, ob die optimale Lösung für die erste Aktie 0 oder > 0 ist. Daher ist es im Fall mit Fixkosten nicht möglich, die Unstetigkeiten an den Rändern durch Analyse (und Aussortieren) einzelner Aktien von der Suche der optimalen Lösung generell auszuschließen.

Folglich erhält man folgenden Algorithmus zum Finden der optimalen Lösung:

- Sei M die Menge aller möglichen Kombinationen der m Aktien, d.h. $M = \{0,1\}^m$.
- Für jedes $a \in M$ setze $x_j = 0$ falls $a_j = 0$ und bestimme die optimale Lösung für die restlichen x_j unter der Annahme $x_j > 0$.
- Falls die so gefundene Lösung hinsichtlich des erwarteten Nutzens besser ist als die bisher beste Lösung, überschreibe die bisher beste Lösung mit der aktuellen Lösung.
- Ergebnis ist dann insgesamt die optimale Lösung für m Aktien. Zum finden der Lösung muss man also nicht nur 1 sondern 2^m Optimierungsprobleme (allerdings mit unterschiedlichen Dimensionen) lösen.

Die einzelnen Optimierungsprobleme kann man unter Nutzung der stetigen Differenzierbarkeit der Zielfunktion wieder mit dem Gradientenverfahren lösen:

1. Startwert ist $x_n^{(j)} = 0 \; \forall j$.
2. Berechne
$$(\nabla P_n^m(x_n))_j = \mathbb{E}\left(\frac{S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n}{\sum_{\ell=1}^m x_n(\ell)(S_n(\ell) - (1+k(\ell))S_0(\ell)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{\ell=1}^m K(\ell)\right)B_n^n}\right)$$
3. Falls Präzision erreicht ($||\nabla P_n^m(x_n)|| < \epsilon$), $x_n^* = x_n$. Ende.
4. Finde die Nullstelle von
$$\frac{\partial P_n^m(x_n + \alpha \nabla P_n^m(x_n))}{\partial \alpha}$$
$$= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^m (\nabla P_n^m(x_n))_j (S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n)}{\sum_{j=1}^m (x_n(j) + \alpha(\nabla P_n^m(x_n))_j)(S_n(j) - (1+k(j))S_0(j)B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right)B_n^n}\right)$$
mit Hilfe des eindimensionalen Intervallhalbierungsverfahrens und den Startwerten
   - $\alpha = 0$
   - Falls $\frac{\partial P^m(\pi + \alpha \nabla P^m(\pi))}{\partial \alpha}(0) > 0$ dann
$$\min_{\omega}\left\{-\frac{\sum_{j=1}^m x_n(j)S_0(j)(\omega_j - (1+k(j))B_n^n) + \left(X_0 - \sum_{j=1}^m K(j)\right)B_n^n}{\sum_{j=1}^m (\nabla P_n^m(x_n))_j S_0(j)(\omega_j - (1+k(j))B_n^n)}\right\} - \epsilon$$
$$\text{für } \sum_{j=1}^m (\nabla P_n^m(x_n))_j S_0(j)(\omega_j - (1+k(j))B_n^n) < 0$$

sonst

$$\max_{\omega}\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{m} x_n(j)S_0(j)(\omega_j-(1+k(j))B_n^n)+\left(X_0-\sum_{j=1}^{m}K(j)\right)B_n^n}{\sum_{j=1}^{m}(\nabla P_n^m(x_n))_j S_0(j)(\omega_j-(1+k(j))B_n^n)}\right\}+\epsilon$$

$$\text{für }\sum_{j=1}^{m}(\nabla P_n^m(x_n))_j S_0(j)(\omega_j-(1+k(j))B_n^n)>0$$

(dabei steht ω für die möglichen Ausprägungen von $\frac{S_n}{S_0}$).

Weiter mit 2.

Anmerkungen zur Bestimmung der Schrittlänge α:

- Dass das so gefundene lokale Optimum tatsächlich das eindeutige globale Maximum ist, kann analog zur Eindeutigkeit des Maximums für eine Aktie und eine Periode gezeigt werden (zweite Ableitung ist stets negativ, an den Rändern strebt die Funktion gegen $-\infty$).
- Der zweite Startwert ist jeweils die kleinste positive Polstelle (falls die Ableitung bei $\alpha = 0$ positiv ist) bzw. die größte negative Polstelle - abzgl. bzw. zzgl. ϵ, um den Startwert zu einem zulässigen Wert für α zu machen.
- Es ist möglich, dass die Funktion so steil abfällt / ansteigt, dass die Nullstelle in der ϵ-Umgebung der Polstelle liegt (und innerhalb der numerischen Präzision nicht ermittelt werden kann). In diesem Fall kann man approximativ die um ϵ reduzierte / erhöhte Polstelle als Schrittweite verwenden.
- Falls $\alpha \max\{|(\nabla P_n^m(x_n))_j|\} < \epsilon$, d.h. falls die Veränderung der optimalen Lösung nicht mehr innerhalb der numerischen Präzision liegt, kann die Berechnung ebenfalls abgebrochen werden, da das (approximative) Maximum erreicht wurde.

4.5 Zwischenfazit

Auch für mehrere Aktien kann gezeigt werden, dass die Lösung des Problems des optimalen Portfolios im Binomialmodell mit Transaktionskosten gegen die zeitstetige Lösung konvergiert.

Allerdings konnte man auch zeigen, dass eine Vorab-Reduktion der Anzahl der zu betrachtenden Aktien oder umgekehrt der Ausschluss von 0 als optimale Aktienanzahl für einzelne Aktien nur in Ausnahmefällen möglich ist. Der Ausschluss von 0 als optimale Lösung wäre dabei vor allem aus numerischen Gründen günstig gewesen, da durch die Unstetigkeit an dieser Stelle die numerische Berechnung der optimalen Lösung schwieriger wird. Durch Betrachtung entsprechender Gegenbeispiele kann man allerdings zeigen, dass ein Ausschluss einzelner Aktien bzw. der Ausschluss von 0 als optimale Lösung im Allgemeinen nicht zulässig ist, da es von der Gesamtauswahl und Korrelation der einzelnen Aktien abhängt, ob es optimal ist, eine bestimmte Aktie zu kaufen oder nicht.

Kapitel 5

Betrachtung des Morton-Pliska-Modells

Unter dem "Morton-Pliska-Modell" (siehe [6]) wird im Folgenden eine spezielle Kostenstruktur verstanden, bei der für eine Transaktion jeweils ein Bruchteil ϵ des aktuellen Vermögens zu zahlen ist. Natürlich entspricht diese Struktur nicht den tatsächlich beobachteten Kosten. Wie aber in einem Paper von Korn [5] bereits dargelegt wurde, können die bei Anwendung der mittels des Morton-Pliska-Modells berechneten Strategie tatsächlich entstehenden Kosten abgeschätzt werden. Diese Idee soll hier für das Binomialmodell analysiert werden.

5.1 Morton-Pliska-Modell für eine Periode

Sei zunächst wieder nur eine Periode betrachtet. Die Zielfunktion (mit der Morton-Pliska-Kostenstruktur) ergibt sich dann als:

$$\mathbb{E}(\ln(x_0(S_1 - S_0 B) + X_0(1 - \epsilon 1_{x_0 \neq 0})B)) =: P_1^{MP}(x_0)$$

Es gilt dann:

Satz 26 *Unter der Morton-Pliska-Kostenstruktur ist die optimale Lösung für eine Periode gegeben durch:*

$$\begin{aligned} x_0^* &= argmax\left\{P_1^{MP}\left(-\frac{X_0 B(1-\epsilon)}{S_0}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\right), P_1^{MP}(0)\right\} \\ &=: argmax\{P_1^{MP}(x_0^{\neq}), P_1^{MP}(0)\}. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$x_0^* = x_0^{\neq} \iff \epsilon < 1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)}$$

Beweis: Für $x_0 \neq 0$ kann die optimale Lösung mit dem üblichen Vorgehen (Ableitung gleich 0 setzen) ermittelt werden.

Es gilt dann weiterhin:

$$\begin{aligned}
x_0^* = x_0^{\neq} &\iff P_1^{MP}(x_0^{\neq}) > P_1^{MP}(0) \\
&\iff p \ln\left(X_0 B(1-\epsilon) p \frac{u-d}{B-d}\right) + (1-p)\ln\left(X_0 B(1-\epsilon)(1-p)\frac{u-d}{u-B}\right) > \ln(X_0 B) \\
&\iff -\ln(1-\epsilon) < p\ln\left(p\frac{u-d}{B-d}\right) + (1-p)\ln\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right) \\
&\iff \epsilon < 1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)}
\end{aligned}$$

□

Weiterhin lässt sich zeigen, dass für fast jede gültige Parameterwahl p, u, d, B ein ϵ existiert, so dass $x_0^* > 0$, denn:

Lemma 27 *Für alle $0 < p < 1$, $d < B < u$ mit $p \neq \frac{B-d}{u-d}$ gilt:*

$$1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)} > 0$$

Beweis: Zunächst soll für obigen Ausdruck das Minimum in p bestimmt werden. Die erste Ableitung nach p ergibt sich dabei als:

$$-\left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)} \ln\left(\frac{1-p}{p}\frac{B-d}{u-B}\right)$$

Da $u > B > d$ kann in diesem Ausdruck nur der letzte Term den Wert 0 annehmen, die Ableitung ist also genau dann 0, wenn

$$\ln\left(\frac{1-p}{p}\frac{B-d}{u-B}\right) = 0 \iff \frac{1-p}{p}\frac{B-d}{u-B} = 1 \iff p = \frac{B-d}{u-d} \text{ bzw. } 1-p = \frac{u-B}{u-d}$$

Die zweite Ableitung ergibt sich dann als

$$-\left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)}\left[\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\frac{B-d}{u-B}\right)\right)^2 - \frac{1}{p(1-p)}\right]$$

und ist für $p = \frac{B-d}{u-d}$ größer 0, d.h. an dieser Stelle liegt ein Minimum.

Für $p = \frac{B-d}{u-d}$ ist die Grenze für ϵ gleich 0, da an dieser Stelle aber das (eindeutige) Minimum über p liegt, ist der Ausdruck für alle sonstigen p (bzw. für alle sonstigen Ausprägungen von u, d, B) größer als 0. □

Anmerkung: Es gilt übrigens

$$p = \frac{B-d}{u-d} \iff pu + (1-p)d = B \iff \mathbb{E}\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) = B$$

d.h. es gibt genau dann kein ϵ, für das ein Handeln optimal wäre, wenn der Erwartungswert aus einer Anlage in Aktien genau gleich dem Bondertrag ist.

5.2 Morton-Pliska-Modell für mehrere Perioden

Im Folgenden soll nun die Lösung für mehrere Perioden analysiert werden. Da gemäß Satz 26 die Kosten nicht von der Aktienanzahl sondern nur von der Höhe des Vermögens abängen, kann man das dort angewandte Vorgehen analog für alle weiteren Perioden fortsetzen (die Struktur von x_i^* ist immer gleich). Insbesondere ist die Bedingung für ϵ statisch, d.h. im Binomialmodell würde man bei schrittweiser Vorgehensweise entweder immer handeln oder nie. Dieses Ergebnis lässt sich auch auf die global optimale Lösung übertragen.

Lemma 28 *Unter der Voraussetzung, dass $x_0, ..., x_{n-1} > 0$ gilt:*

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i (1-\epsilon)^{n-i-1} B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B) + X_0 (1-\epsilon)^n B^n.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt über Induktion. Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist dabei trivial. Sei die Annahme also gültig für $n - 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X_n &= x_{n-1}(S_n - S_{n-1}B) + X_{n-1}B(1-\epsilon) \\ &= x_{n-1}(S_n - S_{n-1}B) \\ &\quad + B(1-\epsilon)\left(\sum_{i=0}^{n-2} x_i(1-\epsilon)^{n-i-2}B^{n-i-2}(S_{i+1} - S_i B) + X_0(1-\epsilon)^{n-1}B^{n-1}\right) \\ &= x_{n-1}(S_n - S_{n-1}B) + \sum_{i=0}^{n-2} x_i(1-\epsilon)^{n-i-1}B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B) + X_0(1-\epsilon)^n B^n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i(1-\epsilon)^{n-i-1}B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B) + X_0(1-\epsilon)^n B^n \end{aligned}$$

□

Satz 29 *Die global optimale Lösung mit der Morton-Pliska-Kostenstruktur für n Perioden lässt sich analytisch ermitteln und ergibt sich wie folgt:*

$$x_i = -\frac{BX_i(1-\epsilon)}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \forall i = 0 \ldots n-1,$$

falls

$$\epsilon < 1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)},$$

ansonsten

$$x_i = 0 \ \forall i = 0 \ldots n-1.$$

Insbesondere ist somit (wie für das Problem ohne Kosten) die global optimale Lösung identisch mit der schrittweise optimalen Lösung.

Beweis:

Das n-Perioden-Problem in der Morton-Pliska-Kostenstruktur hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
&P_n^{MP}(x_0, x_1(u), x_1(d), ..., x_{n-1}(u^n), ..., x_{n-1}(d^n)) \\
&= \mathbb{E}(\ln(X_n)) = \mathbb{E}\left[\ln\left(B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(S_1, ..., S_i)B^{n-i-1}(S_{i+1} - S_i B) - \sum_{i=0}^{n-1} X_i B^{n-i}\epsilon 1_{x_i \neq 0}\right)\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{2^n} \mathbb{P}(\text{path}_\ell(n)) \ln \Bigg(B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\text{path}_\ell(n))B^{n-i-1}(S_{i+1}(\text{path}_\ell(n)) - S_i(\text{path}_\ell(n))B) \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\text{path}_\ell(n))B^{n-i}\epsilon 1_{x_i(\text{path}_\ell(n)) \neq 0}\Bigg)
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{P}(\text{path}_\ell(n)) = p^j(1-p)^{n-j}$$

für einen Pfad ℓ der Länge n mit j Aufwärts- und entsprechend $n-j$ Abwärtsbewegungen. Weiterhin darf jedes x_i immer nur von den ersten i Schritten des jeweiligen Pfades abhängen (d.h. $x_i(\text{path}_\ell(n)) = x_i(\text{path}_\ell(i))$).

Zum Finden der optimalen Lösung soll rückwärts vorgangen und damit zunächst die verschiedenen $x_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1))$ betrachtet werden. Dies sind insgesamt 2^{n-1} Variablen, d.h. eine für jeden möglichen Pfad zu S_{n-1} (da zunächst nicht von einer rekombinierenden Aktienanzahl ausgegangen werden kann). Global betrachtet ist ein spezielles x_{n-1} somit nur für zwei Pfade relevant. Sei zunächst angenommen, dass $x_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1)) \neq 0$. Dann ist die Zielfunktion nach dieser Variable differenzierbar. Weiterhin tritt $x_{n-1}(\text{path}_\ell(n-1))$ nur für zwei Pfade in Erscheinung, so dass sich die obige Summe über 2^n Pfade beim Differenzieren auf zwei reduziert.

Für die folgenden Formeln wird im Sinne einer kürzeren Notierung die Abkürzung $\ell_{n-1} := \text{path}_\ell(n-1)$ verwendet.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P_n^{MP}}{\mathrm{d}x_{n-1}(\ell_{n-1})} \\
&= \frac{p\mathbb{P}(\ell_{n-1})(S_n(\ell_{n-1}+u) - S_{n-1}(\ell_{n-1})B)}{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\ell_{n-1})B^{n-i-1}(S_{i+1}(\ell_{n-1}+u) - S_i(\ell_{n-1})B) - \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\ell_{n-1})B^{n-i}\epsilon 1_{x_i(\ell_{n-1})\neq 0}} \\
&\quad + \frac{(1-p)\mathbb{P}(\ell_{n-1})(S_n(\ell_{n-1}(n-1)+d) - S_{n-1}(\ell_{n-1})B)}{B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\ell_{n-1})B^{n-i-1}(S_{i+1}(\ell_{n-1}+d) - S_i(\ell_{n-1})B) - \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\ell_{n-1})B^{n-i}\epsilon 1_{x_i(\ell_{n-1})\neq 0}}
\end{aligned}$$

wobei "$\ell_{n-1} + d$" bedeutet, dass der Pfad ℓ nach $n-1$ Schritten im n-ten Schritt mit einer Abwärtsbewegung fortgesetzt wird.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&B^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\ell_{n-1}) B^{n-i-1}(S_{i+1}(\ell_{n-1}+d) - S_i(\ell_{n-1})B) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\ell_{n-1}) B^{n-i} \epsilon 1_{x_i(\ell_{n-1})\neq 0} \\
&= B^n X_0 + B \sum_{i=0}^{n-2} x_i(\ell_{n-1}) B^{n-i-2}(S_{i+1}(\ell_{n-1}) - S_i(\ell_{n-1})B) \\
&\quad - B \sum_{i=0}^{n-2} X_i(\ell_{n-1}) B^{n-1-i} \epsilon 1_{x_i(\ell_{n-1})\neq 0} \\
&\quad - B X_{n-1}(\ell_{n-1}) \epsilon 1_{x_{n-1}(\ell_{n-1})\neq 0} + x_{n-1}(\ell_{n-1})(d-B) S_{n-1}(\ell_{n-1}) \\
&= B X_{n-1}(\ell_{n-1}) - B X_{n-1}(\ell_{n-1}) \epsilon 1_{x_{n-1}(\ell_{n-1})\neq 0} + x_{n-1}(\ell_{n-1})(d-B) S_{n-1}(\ell_{n-1}) \\
&= B X_{n-1}(\ell_{n-1})(1 - \epsilon 1_{x_{n-1}(\ell_{n-1})\neq 0}) + x_{n-1}(\ell_{n-1})(d-B) S_{n-1}(\ell_{n-1})
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_{n-1}(\ell_{n-1})} = 0 \iff x_{n-1}(\ell_{n-1}) = -\frac{B X_{n-1}(\ell_{n-1})(1 - \epsilon 1_{x_{n-1}(\ell_{n-1})\neq 0})}{S_{n-1}(\ell_{n-1})} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right)$$

Nun muss diese Lösung noch mit der Lösung $x_{n-1}(\ell_{n-1}) = 0$ verglichen werden. Analog zu Satz 26 ist die eben ermittelte Lösung besser als 0, wenn

$$\epsilon < 1 - \left(p \frac{u-d}{B-d} \right)^{-p} \left((1-p) \frac{u-d}{u-B} \right)^{-(1-p)} .$$

Sei diese Bedingung zunächst als gegeben angenommen. Dann wäre $x_{n-1}(\ell_{n-1})$ wie oben angegeben optimal. Weiter gilt dann:

$$\begin{aligned}
&P^{MP}(x_0, ..., x_{n-1}) \\
&\quad = \sum_{\ell=0}^{2^n} \mathbb{P}(\ell_n) \ln\left(x_{n-1}(\ell_{n-1})(S_n(\ell_n) - S_{n-1}(\ell_{n-1})B) + B X_{n-1}(\ell_{n-1})(1-\epsilon)\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\ln\left(B \left(1 - \frac{(S_n - S_{n-1}B)}{S_{n-1}} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \right) \right) \right) + \mathbb{E}(\ln(X_{n-1}(1-\epsilon)))
\end{aligned}$$

Für den Rest kann man sich der Induktion bedienen. Der Induktionsanfang ist hierbei trivial, da das schrittweise optimieren über eine Periode natürlich dem globalen Optimum entspricht und gemäß Satz 26

$$x_0 = -\frac{B X_0 (1-\epsilon)}{S_0} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right)$$

gilt. Die Induktionsannahme lautet dann

$$\begin{aligned}
x_i &= -\frac{B^{i+1} X_0 (1-\epsilon)^{i+1}}{S_i} \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B} \right) \frac{S_{j+1} - S_j B}{S_j} \right) \\
&\quad \forall i = 0, \ldots, n-2
\end{aligned}$$

Setzt man dies in die obige Formel für das global optimale x_{n-1} ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= -\frac{BX_{n-1}(1-\epsilon)}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\\
&= -\frac{B^n(1-\epsilon)^nX_0+\sum_{i=0}^{n-2}x_iB^{n-i-1}(1-\epsilon)^{n-i-1}(S_{i+1}-S_iB)}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\\
&= -\frac{B^n(1-\epsilon)^nX_0}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\\
&\quad\left[1-\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{i+1}-S_iB}{S_i}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)\right]\\
&= -\frac{B^n(1-\epsilon)^nX_0}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\left[\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_1-S_0B}{S_0}\right)\right.\\
&\quad-\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_1-S_0B}{S_0}\right)\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{i+1}-S_iB}{S_i}\\
&\quad\left.\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)\right]\\
&= -\frac{B^n(1-\epsilon)^nX_0}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_1-S_0B}{S_0}\right)\\
&\quad\left[1-\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{i+1}-S_iB}{S_i}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)\right]\\
&= \ldots\\
&= -\frac{B^n(1-\epsilon)^nX_0}{S_{n-1}}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\prod_{j=0}^{n-2}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)
\end{aligned}$$

womit die Induktionsannahme bewiesen wäre.

Durch Einsetzen in die Formel für X_n folgt daraus:

$$\begin{aligned}
X_n &= B^n(1-\epsilon)^nX_0+\sum_{i=0}^{n-1}x_iB^{n-i-1}(1-\epsilon)^{n-i-1}(S_{i+1}-S_iB))\\
&= B^n(1-\epsilon)^nX_0+\sum_{i=0}^{n-1}-\frac{B^{i+1}(1-\epsilon)^{i+1}X_0}{S_i}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\\
&\qquad\cdot\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)B^{n-i-1}(1-\epsilon)^{n-i-1}(S_{i+1}-S_iB))\\
&= B^n(1-\epsilon)^nX_0\left[1-\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{i+1}-S_iB}{S_i}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)\right]\\
&= B^n(1-\epsilon)^nX_0\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B}+\frac{1-p}{u-B}\right)\frac{S_{j+1}-S_jB}{S_j}\right)
\end{aligned}$$

was wiederum die Formel für die optimalen Aktienanzahlen folgendermaßen reduziert:

$$x_i = -\frac{B(1-\epsilon)X_i}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right) \ \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen, falls die obige Bedingung für ϵ erfüllt ist. Im umgekehrten Fall lässt sich zeigen (s.o.), dass zunächst $x_{n-1} = 0$ gelten muss. Unter dieser Voraussetzung könnte man dann einen weiteren Schritt rückwärts gehen und die optimale Lösung für x_{n-2} ausrechnen. Diese ergäbe sich analog als

$$x^*_{n-2}(\ell_{n-2}) = -\frac{BX_{n-2}(\ell_{n-2})(1-\epsilon 1_{x_{n-2}(\ell_{n-2})\neq 0})}{S_{n-2}(\ell_{n-2})}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)$$

und wäre wiederum genau dann besser als die Lösung $x_{n-2} = 0$, wenn die Bedingung an ϵ erfüllt wäre. Da dies aber in diesem Fall nicht gilt, folgt weiter $x^*_{n-2} = 0$. Dieses Vorgehen lässt sich schrittweise bis $x^*_0 = 0$ fortsetzen, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wie auch im Fall ohne Kosten erkennt man an der obigen Form von x_i, dass die Aktienanzahl rekombinierend (und damit nicht pfadabhängig) ist, da (falls die Bedingung an ϵ erfüllt ist)

$$x_i = -\frac{B^{i+1}(1-\epsilon)^{i+1}X_0}{S_i}\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\left(\frac{p}{d-B} + \frac{1-p}{u-B}\right)\left(\frac{S_{j+1}}{S_j} - B\right)\right)$$

und somit ist nur die Anzahl und nicht die Abfolge der jeweiligen Auf- und Abwärtsbewegungen relevant.

Weiterhin ist x_i auch hier nicht explizit abhängig von x_{i-1}, d.h. es gibt keine Abhängigkeit von vorher getroffenen Entscheidungen sondern nur von der Entwicklung des Aktienkurses.

Das interessante Ergebnis dieses Satzes ist, dass es bei hinreichend kleinen Kosten optimal ist, in jedem Schritt zu handeln, genau wie im Fall ohne Kosten. Dies ist ein wesentlicher Unterschied im Vergleich zum Problem mit von der Aktienanzahl abhängenden fixen und variablen Kosten - dort kann es vorkommen, dass es optimal ist, in einem Schritt nichts zu tun.

5.3 Abschätzung der realistischen Kosten

Analog zum stetigen Fall ist es möglich, für gegebene variable Kosten k ein ϵ so festzulegen, dass die mit der Morton-Pliska-Strategie erzielten variablen Kosten stets geringer sind als die im Modell angenommenen Morton-Pliska-Transaktionskosten.

Satz 30 *Für gegebene variable Kosten $k > 0$ gilt für*

$$\epsilon \geq \frac{|\pi|k}{1+|\pi|k}\left(1 + \max\left\{\frac{u}{\pi(u-B)+B}, \frac{d}{\pi(d-B)+B}\right\}\right)$$

dass die im Morton-Pliska-Modell entstehenden Transaktionskosten $X_i\epsilon$ gleich oder höher sind als die anfallenden variablen Kosten $|x_i - x_{i-1}|S_ik$, wenn man die Morton-Pliska-Strategie anwendet.

Dabei steht π für den optimalen Aktienanteil im Modell ohne Transaktionskosten.

Beweis: Die tatsächlich entstehenden variablen Kosten sind $|x_i - x_{i-1}|S_i k$. Dies lässt sich umformulieren zu

$$\begin{aligned}
|x_i - x_{i-1}|S_i k &= \left| X_i - X_{i-1}\frac{S_i}{S_{i-1}} \right| |\pi|(1-\epsilon)k \\
&= \left| X_{i-1}(1-\epsilon)\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) - X_{i-1}\frac{S_i}{S_{i-1}} \right| |\pi|(1-\epsilon)k \\
&= \left| (1-\epsilon)\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) - \frac{S_i}{S_{i-1}} \right| X_{i-1}|\pi|(1-\epsilon)k
\end{aligned}$$

Die im Modell entstehenden Kosten $X_i\epsilon$ lassen sich umformulieren zu

$$X_i\epsilon = \epsilon X_{i-1}(1-\epsilon)\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right)$$

Soll nun also gelten, dass $X_i\epsilon \geq |x_i - x_{i-1}|S_i k$, ergibt sich folgende Bedingung an ϵ:

$$\epsilon\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) \geq \left| (1-\epsilon)\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) - \frac{S_i}{S_{i-1}} \right| |\pi|k$$

Dies ist mindestens erfüllt wenn

$$\epsilon\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) \geq \left((1-\epsilon)\left(\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B\right) + \frac{S_i}{S_{i-1}} \right) |\pi|k$$

wobei

$$\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B > 0$$

aufgrund der Optimalität von π.

Dies lässt sich schließlich umformulieren zu

$$\epsilon \geq \frac{|\pi|k}{1+|\pi|k}\left(1 + \frac{\frac{S_i}{S_{i-1}}}{\pi\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - B\right) + B}\right)$$

□

Es folgt direkt, dass es variable Kosten k geben kann, für deren zugehöriges ϵ die optimale Strategie im Morton-Pliska-Modell ein reines Investment in die risikofreie Anlage darstellt, nämlich dann, wenn es neben

$$\epsilon \geq 1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)}$$

kein ϵ gibt, so dass die variablen Kosten kleiner sind als die Morton-Pliska-Transaktionskosten, d.h. z.B. wenn

$$\begin{aligned}
&\frac{|\pi|k}{1+|\pi|k}\left(1 + \max\left\{\frac{u}{\pi(u-B)+B}, \frac{d}{\pi(d-B)+B}\right\}\right) \\
&\qquad > 1 - \left(p\frac{u-d}{B-d}\right)^{-p}\left((1-p)\frac{u-d}{u-B}\right)^{-(1-p)}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt: Da man im binomialen Morton-Pliska-Modell entweder nie oder immer handeln muss, ergibt sich, dass eine Abschätzung für ein Modell mit fixen Kosten nur im Trivialfall des Nicht-Handelns möglich ist (da sonst mindestens $\epsilon > nK$ gelten müsste und somit $\epsilon \to \infty$ für $n \to \infty$).

5.4 Zwischenfazit

Der Grund, warum das Morton-Pliska-Modell trotz der unrealistisch anmutenden Transaktionskostenstruktur eine Untersuchung wert ist, ist vor allem dessen mathematisch einfache Lösbarkeit - im Binomialmodell hat die Lösung sogar eine geschlossene Form. Im Vergleich zum Modell mit fixen und variablen Transaktionskosten ist das ein großer Vorteil.

Darüber hinaus kann man zeigen, dass es in vielen Fällen möglich ist, die so gewonnenen Ergebnisse bzw. die berechnete optimale Strategie auf ein Modell mit realistischen Kosten zu übertragen - allerdings aufgrund der Form der gefundenen optimalen Lösungsstrategie nur auf den Fall ohne fixe Transaktionskosten.

Da die optimale Lösung (ähnlich wie im Fall ohne Transaktionskosten) auf einen konstanten Aktienanteil hinausläuft, muss für die optimale Strategie nach jedem Schritt im Binomialbaum gehandelt werden. Diesse Strategie führt im Fall mit fixen Transaktionskosten nur im Trivialfall (optimaler Aktienanteil ist 0) zu einer sinnvollen Lösung, da man bei steigender Schrittlänge des Binomialbaums ansonsten unendlich große Transaktionskosten generieren würde.

Kapitel 6

Worst Case Modell

Im folgenden Kapitel soll in Anlehnung an die Arbeiten von Korn und Wilmott [8] das sogenannte Worst-Case-Modell analysiert werden.

Übertragen auf das Binomialmodell kann im Worst-Case-Modell in einem beliebigen Schritt des Binomialbaums ein Crash erfolgen. Dieser reduziert den Aktienkurs von S_i auf $S_i(1-c)$ wobei c die Höhe des Crashs darstellt und der Crash im vorhinein nur insoweit bekannt ist, als dass er eine maximale Höhe von C haben kann. Annahmen über die Verteilung des Crashs (Höhe und Zeitpunkt) werden nicht getroffen, es steht zusätzlich zur maximalen Höhe lediglich noch die maximale Anzahl der Crashs fest.

Gesucht wird dann diejenige optimale Aktienanzahl, die den erwarteten Nutzen maximiert, sollte der schlimmstmögliche Crash (”worst case”) eintreten. Genauer ist dies die Zielfunktion:

$$\sup_{x_0,...,x_{n-1}} \inf_{0\leq c\leq C} \mathbb{E}(\ln(X_n^c(x_0,...,x_{n-1})).$$

Dabei steht X_n^c für das Endvermögen nach n Schritten im Binonialbaum mit drohendem Crash, d.h. nach jedem Schritt kann, es muss aber kein Crash auftreten.

6.1 Binominalmodell für eine Periode

Zuerst soll das Binomialmodell mit $n=1$, d.h. nur 1 Schritt, untersucht werden. Es sei nochmals betont, dass ein Crash auftreten kann, aber nicht muss. Es sei weiter noch angemerkt, dass ein Crash nicht zwangsweise der Worst Case sein muss (z.B. wenn man die Aktie leerverkauft hat).

Darüber hinaus ist das Einperiodenmodell eigentlich ein Sonderfall, da man im Gegensatz zum Mehrperiodenmodell nach eventuell erfolgtem Crash keine Möglikchkeit hat, zu reagieren (d.h. die Aktienanzahl zu verändern).

Zunächst sollen die Grenzen für die optimale Lösung betrachtet werden:

Lemma 31 *Für die optimale Lösung x^* gilt:*

$$x^* \in \left(-\frac{X_0B}{S_0(u-B)}, \frac{X_0B}{S_0(B-d(1-C))}\right)$$

Beweis: Die Grenzen werden wieder dadurch gegeben, dass der Logarithmus $\ln(xS_1(1-c) - xS_0B + X_0B)$ nicht negativ werden darf (für keinen möglichen Wert für S_1 sowie für keinen möglichen Wert von c).

Für $x > 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
& xS_1(1-c) - xS_0B + X_0B > 0 \ \forall 0 \leq c \leq C \ \forall S_1 \\
\iff \quad & x(S_1(1-c) - S_0B) > -X_0B \\
\iff \quad & x(dS_0(1-C) - S_0B) > -X_0B \\
\iff \quad & x < \frac{X_0B}{S_0(B - d(1-C))}
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt hingegen:

$$\begin{aligned}
& xS_1(1-c) - xS_0B + X_0B > 0 \ \forall 0 \leq c \leq C \ \forall S_1 \\
\iff \quad & x(uS_0 - S_0B) > -X_0B \\
\iff \quad & x > -\frac{X_0B}{S_0(u - B)}
\end{aligned}$$

□

Es scheint zwar recht offensichtlich, dass der schlimmste mögliche Crash bei positiver Aktienanzahl bei C liegt (maximaler Crash) und bei negativer Aktienanzahl bei 0 liegt (kein Crash), trotzdem soll dies vorab noch einmal formal gezeigt werden.

Lemma 32 *Der schlimmste mögliche Crash für $x > 0$ ist C, für $x < 0$ ist es 0.*

Beweis: Zur Ermittlung des schlimmsten Crashs ist die folgende Funktion nach c zu minimieren:

$$f(c) = \mathbb{E}(\ln(xS_1(1-c) - xS_0B + X_0B))$$

Durch einfaches Ableiten erhält man

$$\begin{aligned}
& f'(c) = p\frac{-xS_0u}{xS_0u(1-c) - xS_0B + X_0B} + (1-p)\frac{-xS_0d}{xS_0d(1-c) - xS_0B + X_0B} = 0 \\
\iff \quad & (1-c)udxS_0 = -(pu + (1-p)d)(X_0B - xS_0B) \\
\iff \quad & c = \frac{pu + (1-p)d}{udxS_0}X_0B - \frac{pu + (1-p)d}{ud}B + 1
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung $f''(c)$ ist positiv, damit handelt es sich tatsächlich um das Minimum.

Nun gilt für $x > 0$:

$$\begin{aligned}
c \quad &= \quad \frac{pu + (1-p)d}{udxS_0}X_0B - \frac{pu + (1-p)d}{ud}B + 1 \\
&> \quad \frac{pu + (1-p)d}{ud}(B - d(1-C)) - \frac{pu + (1-p)d}{ud}B + 1 \\
&= \quad 1 - \frac{pu + (1-p)d}{u}(1-C) \\
&= \quad (1-C)\left(1 - \frac{pu + (1-p)d}{u}\right) + C \\
&> \quad C
\end{aligned}$$

(wegen $C < 1$ und $pu + (1-p)d < u$) und somit $c^*(x > 0) = C$ wegen $c \leq C$.

Schließlich gilt für $x < 0$:

$$\begin{aligned} c &= \frac{pu + (1-p)d}{udxS_0} X_0 B - \frac{pu + (1-p)d}{ud} B + 1 \\ &< -\frac{pu + (1-p)d}{ud}(u - B) - \frac{pu + (1-p)d}{ud} B + 1 \\ &= 1 - \frac{pu + (1-p)d}{d} \\ &< 0 \end{aligned}$$

(wegen $pu + (1-p)d > d$) und somit $c^*(x < 0) = 0$ wegen $c \geq 0$. □

Nun kann man folgendes zeigen:

Satz 33 *Die optimale Aktienanzahl im Binomialmodell für eine Periode bei drohendem Crash ist:*

$$\begin{array}{l} \frac{X_0 B}{S_0} \frac{pu(1-C) + (1-p)d(1-C) - B}{(u(1-C) - B)(B - d(1-C))} \textit{ falls } pu(1-C) + (1-p)d(1-C) > B, \\ \frac{X_0 B}{S_0} \frac{pu + (1-p)d - B}{(u - B)(B - d)} \textit{ falls } pu + (1-p)d < B, \\ 0 \textit{ in allen anderen Fällen.} \end{array}$$

Beweis: Sei zunächst $x > 0$. Dann ist C der schlimmstmögliche Crash. Die optimale Lösung in diesem Fall wäre (analog zum Vorgehen im Fall ohne Crash):

$$x^* = \frac{X_0 B}{S_0} \frac{pu(1-C) + (1-p)d(1-C) - B}{(u(1-C) - B)(B - d(1-C))}$$

Nun gibt es folgende Fälle: Fall 1: $pu(1-C) + (1-p)d(1-C) > B$, insbesondere dann auch $u(1-C) > B$. In diesem Fall ist x^* die optimale Lösung.

Fall 2a: $pu(1-C) + (1-p)d(1-C) < B$, $u(1-C) > B$. In diesem Fall ist $x^* < 0$ und damit unzulässig (da die Optimierung für $x > 0$ erfolgt ist). Folglich ist dann 0 die optimale Lösung.

Fall 2b: $pu(1-C) + (1-p)d(1-C) < B$,$u(1-C) < B$. In diesem Fall ist x^* ebenfalls unzulässig, da die obere Grenze (gemäß Lemma 31) überschritten ist. Folglich ist dann auch wieder 0 die optimale Lösung (da das Optimum in diesem Fall an den Rändern liegen muss, am oberen Rand geht der erwartete Nutzen aber gegen $-\infty$).

Sei nun $x < 0$. Dann ist kein Crash der schlechteste Fall. Die optimale Lösung in diesem Fall wäre folglich:

$$x^* = \frac{X_0 B}{S_0} \frac{pu + (1-p)d - B}{(u - B)(B - d)}$$

Hier gibt es folgende Fälle: Fall 1: $pu + (1-p)d < B$. In diesem Fall ist x^* die optimale Lösung.

Fall 2: $pu + (1-p)d > B$. In diesem Fall ist $x^* > 0$ und damit unzulässig (da die Optimierung für $x < 0$ erfolgt ist). Folglich ist dann 0 die optimale Lösung. □

6.2 Zwischenfazit

Als Ergebnis des letzten Abschnitts ist Handeln somit nur dann optimal, wenn entweder die Aktie auch nach dem Crash noch besser ist als das risikolose Investment (dann würde man die Aktie kaufen und auch im Crash-Fall noch gewinnen) oder wenn die Aktie ohnehin schon schlechter als das risikolose Investment war (dann würde man sie verkaufen und durch den Crash ohnehin nur gewinnen). Aus praktischer Sicht sind das jedoch die selteneren Fälle, d.h. für eine typische Parameterkonstellation ist die optimale Lösung 0.

Nun könnte man sich fragen, warum man überhaupt noch weitere Perioden betrachten soll - denn rein intuitiv könnte man auch denken, dass sich dieses Ergebnis induktiv auf die weiteren Perioden überträgt. Dies ist jedoch nicht der Fall, anschaulich kann man das dadurch erklären, dass man bei mehreren Perioden (und weiterhin nur einem möglichen Crash) entweder vor dem Crash bereits Gewinne erzielen kann, die den Crash kompensieren bzw. nach dem Crash auf die optimale Strategie ohne Kosten wechseln kann und so die Verluste durch den Crash wieder wettmacht.

Wäre es hingegen so, dass nach jedem Schritt im Binomialbaum ein Crash erfolgen könnte, wäre die optimale Aktienanzahl weiterhin 0, wie man im Fall mit mehreren Crashs sehen wird. Hier sei jedoch zunächst nur der Fall eines möglichen Crashs betrachtet.

6.3 Binominalmodell für mehrere Perioden

In diesem Abschnitt soll zunächst das Worst-Case-Modell mit nur einem möglichen Crash betrachtet werden. Das bedeutet konkret, dass man nach erfolgtem Crash weiß, dass kein weiterer Crash auftreten kann. Demnach kann man also nach eingetretenem Crash auf die bekannte optimale Lösung für das Binomialmodell ohne möglichen Crash wechseln.

Es gilt:

Satz 34 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ gilt für die optimalen Aktienanzahlen, dass der erwartete Nutzen unabhängig davon ist, ob ein Crash erfolgt oder nicht, d.h.*

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^c(x_0,...,x_n))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}(x_0,...,x_n)))$$

(wobei X_n^c das Endvermögen im Fall eines aufgetretenen Crashs, X_n^{nc} das Endvermögen im Fall eines drohenden, aber nicht eingetretenen Crashs bezeichnet).

Weiterhin sind die optimalen Aktienanteile bei drohendem Crash stets kleiner als die optimalen Aktienanteile ohne drohenden Crash.

Beweis: Der Beweis soll über Induktion geführt werden. Die Induktionsbehauptung ist dabei zum einen (wie oben beschrieben) die Indifferenz des erwarteten Nutzens in Bezug auf das Eintreten eines Crashs. Weiterhin gilt

$$\pi_i^{bc} < \pi_i^{ac} \equiv \frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}, i = 0,...,n$$

mit der Notation $\pi_i = \frac{x_i S_i}{X_i}$ und "ac" = "after crash", "bc" = "before crash". Das heißt, die optimalen Aktienanteile nach erfolgtem Crash sind höher als die optimalen Aktienanteile vor einem (drohenden) Crash.

Der Induktionsanfang für $n = 1$ ergibt sich zum einen aus Satz 33 (die optimale Aktienanzahl für die genannte Parameterkonstellation ist 0, das Endvermögen nach einem Schritt ist damit nicht vom Eintreten des Crashs abhängig). Die Aussage über die Aktienanteile folgt ebenfalls daraus, denn es gilt:

$$\pi_0^{ac} = \frac{B(pu + (1-p)d - B)}{(u-B)(B-d)} > 0 = \pi_0^{bc}$$

(aus dem Binomialmodell ohne drohenden Crash und aufgrund der angenommenen Parameterkonstellation).

Sei die Behauptung also für alle $N < n$ gezeigt. Betrachtet sei dann das n-Perioden-Modell nach dem 1. Schritt. Es können dann zwei Fälle eingetreten sein: Entweder im 1. Schritt ist ein Crash eingetreten (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Im ersten Fall sind die weiteren optimalen Aktienanzahlen bekannt (aus dem Binominalmodell ohne drohenden Crash). Es gilt dann:

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{ac}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right)$$

Im zweiten Fall gilt aufgrund der Induktionsannahme, dass es für die optimalen Aktienanzahlen irrelevant ist, ob im weiteren Verlauf ein Crash erfolgt oder nicht. o.B.d.A. sei daher angenommen, dass kein Crash erfolgt. Es gilt dann:

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{bc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right)$$

Für die Wahl $\pi_0 \leq 0$ gilt dann wegen der Optimalität der π_i^{ac}, dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{ac}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) > \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{bc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right)$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B}{\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(1 + \frac{\pi_0\frac{S_1}{S_0}C}{\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B}\right)\right)\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

wegen $\pi_0 \leq 0$ und da der Nenner aufgrund der Zulässigkeit von π_0 positiv ist.

Somit gilt insgesamt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 \leq 0))) > \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0 \leq 0)))$$

Nun sei $\pi_0 = \pi_0^{ac}$ betrachtet. Aufgrund der vorausgesetzten Indifferenz kann man für X_n^{nc1} auch annehmen, dass der Crash im 2. Schritt erfolgt (der erwartete Nutzen bleibt davon unberührt). Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{c1}\left(\pi_0=\pi_0^{ac}\right)\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{nc1}\left(\pi_0=\pi_0^{ac}\right)\right)\right)\\
&=\ln(X_0)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\\
&-\ln(X_0)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\ln\left(1+\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq\ln\left(\mathbb{E}\left(1+\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B}\right)\right)\\
&=\ln\left(1+p\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(u(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(u(1-C)-B\right)+B}+(1-p)\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(d(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(d(1-C)-B\right)+B}\right)
\end{aligned}$$

Falls $u(1-C)<B$, dann ist der Term insgesamt <0 (da dann beide Zähler negativ sind und die Nenner aufgrund der Zulässigkeit von π_1^{bc} stets positiv). Ansonsten kann man weiter schreiben

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{c1}\left(\pi_0=\pi_0^{ac}\right)\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{nc1}\left(\pi_0=\pi_0^{ac}\right)\right)\right)\\
&\leq\ln\left(1+p\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(u(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(d(1-C)-B\right)+B}+(1-p)\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(d(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(d(1-C)-B\right)+B}\right)\\
&=\ln\left(1+\frac{\left(\pi_0^{ac}-\pi_1^{bc}\right)\left(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B\right)}{\pi_1^{bc}\left(d(1-C)-B\right)+B}\right)\\
&<0
\end{aligned}$$

(wegen $\pi_0^{ac}>\pi_1^{bc}$ und der gewählten Parameterkonstellation).

Somit gilt insgesamt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0=\pi_0^{ac})))<\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0=\pi_0^{ac})))$$

Sei nun die Monotonie der Funktionen betrachtet. In Analogie zum eindimensionalen Binomialmodel ohne drohenden Crash ergibt sich, dass die Funktion $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0)))$ streng monoton fallend in π_0 ist, falls $u(1-C) < B$, ansonsten hat sie ein Maximum in

$$\frac{B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(u(1-C)-B)(B-d(1-C))} < 0$$

Ebenso ergibt sich, dass $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0)))$ streng monoton wachsend ist für $\pi_0 < \pi_0^{ac}$ und streng monoton fallend ist für $\pi_0 > \pi_0^{ac}$.

Die Zielfunktion für π_0 lautet (aufgrund der vorausgesetzten Indifferenz)

$$\pi_0^* = \text{argmax}_{\pi_0} \min\{\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0))), \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0)))\} =: \text{argmax}_{\pi_0} f(\pi_0)$$

Zusammenfassend gilt nun $f(\pi_0) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0)))$ für $\pi_0 \leq 0$, d.h. $f(\pi_0)$ ist streng monoton wachsend für $\pi_0 \leq 0$. Weiterhin ist $f(\pi_0)$ streng monoton fallend für $\pi_0 > \pi_0^{ac}$, da dort sowohl $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0)))$ als auch $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0)))$ streng monoton fallend sind. Schließlich ist an $\pi_0 = \pi_0^{ac}$ das Minimum bei $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0)))$, diese ist wiederum an dieser Stelle streng monoton fallend.

Somit gilt insgesamt zunächst $0 < \pi_0^* < \pi_0^{ac}$. In diesem Bereich ist weiterhin $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0)))$ streng monoton wachsend während $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0)))$ dort streng monoton fallend ist. Diese beiden (stetigen) Funktionen haben somit genau einen Schnittpunkt für $0 < \pi_0^* < \pi_0^{ac}$ und an diesem ist $f(\pi_0)$ maximal.

Folglich gilt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^*))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0^*)))$$

womit auch die Behauptung der Indifferenz gezeigt wäre. □

Weiterhin ist die Monotonie und Konvergenz der so gefundenen Lösungen nachweisbar:

Satz 35 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ gilt: Die Folge der $\pi_0^*(n)$ ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen*

$$\min\left\{\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}, \frac{B}{B-d(1-C)}\right\}.$$

Beweis: Aufgrund der in Satz 34 gezeigten Indifferenz gilt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0,...,\pi_n))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0,...,\pi_n)))$$

wobei hier "$c1$" bedeuten soll, dass der Crash im 1. Schritt erfolgt.

Daraus folgt dann wiederum

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{ac}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)
\end{aligned}$$

(die restlichen Terme kürzen sich raus).

Weiter gilt aufgrund der Optimalität von π_1^{ac} und wegen $\pi_0^* < \pi_1^{ac}$ (gemäß Satz 34), dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{ac}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right) > \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$

und daher muss gelten, dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) < \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

Wäre nun $\pi_0^* \leq \pi_1^{bc}$ dann gälte (Beweisführung analog Beweis von Satz 34), dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

was einen Widerspruch darstellen würde. Somit gilt $\pi_0^* > \pi_1^{bc}$, d.h. die Monotonie ist gezeigt.

Bezüglich der Konvergenz kann man die in Satz 34 gezeigte Indifferenz nutzen. Demnach ist der erwartete Nutzen im Falle eines Crashes im 1. Schritt identisch zum erwarteten Nutzen im Fall ohne Crash, d.h. $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}))$ bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) &+ (n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_i\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\end{aligned}$$

Nun gibt es zwei Fälle: Entweder die optimale Lösung ohne drohenden Crash π^{ac} liegt im gemäß Lemma 31 gültigen Bereich (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Für Fall 2 gilt demnach

$$\pi^{ac} - \pi_0(n) \geq \frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)} - \frac{B}{B-d(1-C)} =: \delta > 0\ \forall n$$

und somit auch

$$\pi^{ac} - \pi_i(n) \geq \pi^{ac} - \pi_0(n) \geq \delta\ \forall i = 0, ..., n-1$$

Weiter folgt daraus auch die Existenz eines $\epsilon > 0$ so dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) \geq \epsilon > 0\forall n$$

(ansonsten würde $\mathbb{E}(\ln(X_1(\pi_0(n))) \to \mathbb{E}(\ln(X_1(\pi^{ac})))$ folgen und dann aufgrund der stetigen Invertierbarkeit der Funktion in π auch die Konvergenz von $\pi_0(n)$ gegen π^{ac} was wegen $\pi^{ac} - \pi_0(n) \geq \delta > 0$ zu einem Widerspruch führen würde).

Daraus ergibt sich dann (unter Berücksichtigung von $\pi_{n-1}(n) = 0$ gemäß Satz 33)

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc})) \geq (n-1)\epsilon + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) - \ln(B)$$

Der erste Term wächst linear in n und konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$. Da aber stets $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc})) = 0$ gelten muss (Indifferenz), muss der zweite Term folglich gegen $-\infty$ konvergieren, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \pi_0(n) = \frac{B}{B-d(1-C)}$$

Wenn in Fall 1 ebenfalls ein $\delta > 0$ exisiteren würde so dass $\pi^{ac} - \pi_0(n) \geq \delta\ \forall n$, dann würde auch dann wieder folgen, dass

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc})) \geq (n-1)\epsilon + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

weiter gälte aber wegen

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) > \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

(da $\pi_0(n) < \pi^{ac}$ gemäß Satz 34 und $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B$), dass

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc})) \geq (n-1)\epsilon + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

Dies führt zu einem Widerspruch, da der erste Term linear in n wächst, der zweite Term aber konstant ist, und somit ein n existieren würde, so dass $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) > \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}))$ - dies wäre ein Widerspruch zur Indifferenz.

Folglich kann in Fall 1 ein solches $\delta > 0$ nicht existieren und damit $\pi_0(n) \to \pi^{ac}$.

Da Fall 2 nur dann eintritt, wenn

$$\pi^{ac} = \frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)} > \frac{B}{B-d(1-C)}$$

ist die Konvergenz von $\pi_0(n)$ gegen

$$\min\left\{\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}, \frac{B}{B-d(1-C)}\right\}$$

gezeigt. □

Schließlich ist die Lösung pfadunabhängig:

Satz 36 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ gilt: Der optimale Aktienanteil π_i ist unabhängig vom Pfadverlauf, vom aktuellen Vermögen X_i und vom aktuellen Aktienwert S_i.*

Beweis: Zunächst sei angemerkt, dass die optimalen Aktienanteile nach erfolgtem Crash den optimalen Aktienanteilen im Modell ohne Crash entsprechen. Sie sind konstant und daher unabhängig vom Pfadverlauf, von X_i oder S_i. Die Behauptung muss also nur noch für die optimalen Aktienanteile vor einem drohenden Crash gezeigt werden.

Der Beweis soll durch Induktion geführt werden. Gemäß Satz 33 ist bei nur einem Schritt mit drohendem Crash die optimale Lösung 0 und somit unabhängig von X_0 und S_0.

Sei nun ein Baum mit $i+1$ Schritten betrachtet. Gemäß Induktionsannahme sind dann alle $\pi_j, j = 1, ..., i$ pfadunabhängig sowie unabhängig vom jeweils aktuellen Vermögen und Aktienwert.

Mit der in Satz 34 gezeigten Indifferenz gilt

$$\mathbb{E}(\ln(X_{i+1}^{c1}(\pi_0, ..., \pi_i))) = \mathbb{E}(\ln(X_{i+1}^{c2}(\pi_0, ..., \pi_i)))$$

wobei "$c1$" bedeutet, dass der Crash im 1. Schritt nach erfolgt.

Daraus folgt dann wiederum

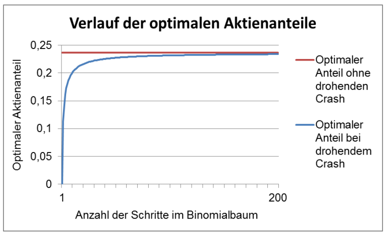
$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{ac}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^*\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{bc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

(die restlichen Terme kürzen sich raus).

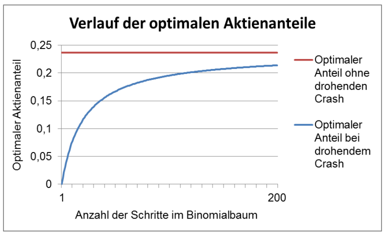
Nach Induktionsannahme ist π_1^{bc} unabhängig vom Pfadverlauf, X_1 oder S_1. π_1^{ac} ist die optimale Lösung aus dem Modell ohne drohenden Crash und somit ebenfalls unabhängig vom Pfadverlauf, X_1 oder S_1. π_0^* wird somit durch eine Gleichung definiert, in der kein Term pfadabhängig oder abhängig vom aktuellen Vermögen und Aktienstand ist. $\square$

Der Verlauf der optimalen Aktienanteile soll noch einmal grafisch veranschaulicht werden. Dabei sei zur Grafik folgendes angemerkt: Gemäß der Pfadunabhängigkeit nach Satz 36 gilt $\pi_m(n) = \pi_0(n-m)$ (dabei bezeichnet $\pi_m(n)$ die Lösung für den m-ten Schritt im Modell mit insgesamt n Schritten). Die folgende Grafik zeigt $\pi_0(n)$ für steigende $n = 1, ..., 200$, genausogut hätte man auch für festes $n = 200$ die $\pi_i(n)$, $i = 0, ..., 199$) darstellen können (dann wäre die Kurve gespiegelt).

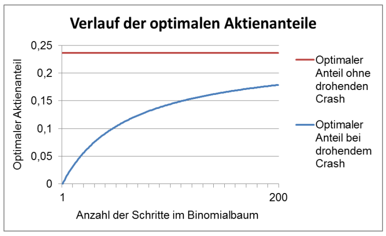
Weiterhin sei noch angemerkt, dass es sich anders als in den verangegangenen Abschnitten gezeigten Grafiken an dieser Stelle nicht um eine mit n steigende Diskretisierung handelt, sondern dass der Anstieg von n hier einem Anstieg des Zeithorizonts T im stetigen Modell entspricht.



$p = 0,5$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,01$



$p = 0,5$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,1$



$p = 0,5$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,3$

Zur Berechnung der in der Grafik dargestellten Werte für $\pi_0(n)$ wurde (in Anlehnung an den Beweis von Satz 34) der folgende Algorithmus verwendet:

- $\pi_0(1) = 0$.
- Bestimme $\pi_0(i)$ so dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(i)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(i)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(i-1)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

wobei mit π^{ac} die (bekannte konstante) optimale Lösung im Fall ohne Crash gemeint ist.

Dies kann über eine Standard-Nullstellensuche erfolgen, wobei als Startwerte $\pi_0(i) = 0$ (Term ist positiv) und $\pi_0(i) = \pi^{ac}$ (Term ist negativ) verwendet werden können.

6.4 Mehrere mögliche Crashs

Die bislang gefundenen Ergebnisse lassen sich auch auf Modelle mit mehreren möglichen Crashs übertragen:

Satz 37 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ und ein Binomialmodell mit maximal m (beliebig, aber fix) möglichen Crashs gilt:*

1. *Für die optimalen Aktienanteile gilt, dass der erwartete Nutzen unabhängig davon ist, wie viele der maximal m möglichen Crashs erfolgen oder nicht, d.h.*

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{mc}(\pi_0,...,\pi_n))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{(m-1)c}(\pi_0,...,\pi_n))) = ... = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}(\pi_0,...,\pi_n)))$$

   (wobei X_n^{ic} das Endvermögen im Fall von i aufgetretenen Crashs, X_n^{nc} das Endvermögen im Fall von drohenden, aber nicht eingetretenen Crashs bezeichnet).

2. *Es gilt $\pi_i^{ic} \leq \pi_i^{(i-1)c}$ $\forall i = 1,...,m$, d.h. die optimalen Aktienanteile nach erfolgten $m-i$ und somit vor noch maximal i möglichen Crashs sind geringer als die optimalen Aktienanzahlen nach erfolgten $m-i+1$ Crashs.*

3. *Die Folge der optimalen Aktienanteile $\pi_0^m(n)$ ist monoton wachsend in n.*

4. *Der optimale Aktienanteil π_i^m ist unabhängig vom Pfadverlauf, vom aktuellen Vermögen X_i und vom aktuellen Aktienwert S_i.*

Dabei wird vorausgesetzt, dass pro Schritt im Binimialmodell höchstens 1 Crash erfolgen kann (d.h. man hat nach einem Crash die Möglichkeit zu reagieren, bevor der nächste Crash erfolgt).

Beweis: Der Beweis soll mittels Induktion über m geführt werden. Der Induktionsanfang ergibt sich dabei aus den vorangegangenen Sätzen 34, 35 und 36.

Sei die Behauptung also für bis zu $m-1$ maximal möglichen Crashs bewiesen.

Für Punkte 1 bis 3 soll der Beweis analog zu Satz 34 mittels Induktion über n geführt werden. Die Behauptung für $n \leq m-1$ folgt dabei bereits aus der Induktionsbehauptung der Induktion über m, da für $n \leq m-1$ maximal $m-1$ Crashes auftreten können. Insbesondere ist damit der Induktionsanfang gezeigt.

Sei die Behauptung also für alle $N < n$ gezeigt. Betrachtet sei dann das n-Perioden-Modell nach dem 1. Schritt. Es können dann zwei Fälle eingetreten sein: Entweder im 1. Schritt ist ein Crash eingetreten (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Im ersten Fall sind die weiteren optimalen Aktienanzahlen bekannt. Es gilt dann

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_{n-1}\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)$$

bzw. aufgrund der Induktionsannahme für Punkt 1 (Indifferenz für $n-1$, o.B.d.A. erfolgt kein weiterer Crash)

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{(m-1)c}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\right)$$

Im zweiten Fall gilt ebenfalls aufgrund der Induktionsannahme für Punkt 1, dass es für die optimalen Aktienanzahlen irrelevant ist, ob im weiteren Verlauf ein Crash erfolgt oder nicht. o.B.d.A. sei daher wieder angenommen, dass kein Crash erfolgt. Es gilt dann:

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{mc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\right)$$

Aufgrund der Induktionsannahmen für Punkt 2 für $n-1$ bzw. $m-1$ gilt $\pi_i^{(m-1)c} \geq \pi_i^{mc}$ und daher

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{(m-1)c}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\pi_i^{mc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\right)$$

(aufgrund $pu+(1-p)d > B$, Beweis analog Satz 34).

Weiter gilt ebenfalls analog zu Satz 34 für $\pi_0^{mc} \leq 0$, dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) \leq 0$$

also insgesamt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^{mc} \leq 0))) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0^{mc} \leq 0)))$$

Nun sei $\pi_0^{mc} = \pi_0^{(m-1)c}$ betrachtet. Aufgrund der vorausgesetzten Indifferenz kann man für X_n^{nc1} auch annehmen, dass ein Crash im 2. Schritt erfolgt und anschließend kein weiterer Crash auftritt (der erwartete Nutzen bleibt davon unberührt). Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{c1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_0^{(m-1)c}\right)\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{nc1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_0^{(m-1)c}\right)\right)\right)\\
&\quad = \ln(X_0) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{(m-1)c}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\qquad +\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{(m-1)c}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right) + \sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_i^{(m-1)c}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad - \ln(X_0) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{(m-1)c}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\
&\qquad -\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{mc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right) - \sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_i^{(m-1)c}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad = \left[\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{(m-1)c}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{mc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right]\\
&\qquad + \left[\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{(m-1)c}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{(m-1)c}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Weiter ist $\pi_1^{(m-1)c} \leq \pi_0^{(m-1)c}$ aufgrund der Induktionsannahme für $m-1$ für Punkt 3 sowie $\pi_1^{(m-1)c} \geq \pi_1^{mc}$ aufgrund der Induktionsannhme für $n-1$ für Punkt 2 (und damit $\pi_0^{(m-1)c} \geq \pi_1^{mc}$). Damit folgt insgesamt

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{c1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_0^{(m-1)c}\right)\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{nc1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_0^{(m-1)c}\right)\right)\right) \leq 0$$

(restlicher Beweis analog zu Satz 34).

Die Betrachtung des restlichen Beweises der Indifferenz, d.h. Monotonie von $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^{mc})))$ bzw. $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0^{mc})))$, eindeutiger Schnittpunkt, der das Optimum von

$$f(\pi_0^{mc}) := \min\{\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^{mc}))), \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1}(\pi_0^{mc})))\}$$

darstellt etc., folgt wieder der Beweisführung in Satz 34, wobei noch anzumerken ist, dass in diesem Fall die Funktion $f(\pi_0^{mc})$ bereits für $\pi_0^{mc} \geq \pi_0^{(m-1)c}$ fällt, da an dieser Stelle $f(\pi_0^{mc}) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^{mc})))$ gilt und $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0^{mc})))$ für $\pi_0^{mc} \geq 0$ streng monoton fällt.

Somit sind sowohl Punkt 1 als auch Punkt 2 gezeigt.

Für Punkt 3 sei angemerkt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{c1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_1^{(m-1)c}\right)\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(X_n^{nc1}\left(\pi_0^{mc} = \pi_1^{(m-1)c}\right)\right)\right) \\
&\quad = \left[\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{(m-1)c}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{mc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right] \\
&\quad \leq 0
\end{aligned}$$

da $\pi_1^{(m-1)c} \geq \pi_1^{mc}$ aufgrund der Induktionsannahme für $n-1$ für Punkt 2. Daraus folgt wiederum $\pi_0^{mc} \leq \pi_1^{(m-1)c}$ (siehe obige Argumentation bzgl. Punkt 2).

Weiter folgt aufgrund der Indifferenz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{mc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C) - B\right) + B\right)\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{(m-1)c}\left(\frac{S_2}{S_1} - B\right) + B\right)\right)
\end{aligned}$$

Da eben gezeigt wurde, dass $\pi_0^{mc} \leq \pi_1^{(m-1)c}$ und somit (analog zu Beweis von Satz 34)

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{(m-1)c}\left(\frac{S_2}{S_1} - B\right) + B\right)\right) \leq 0$$

muss gelten, dass auch

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1^{mc}\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C) - B\right) + B\right)\right) \leq 0$$

und damit (auch wieder analog zu Beweis von Satz 34) $\pi_0^{mc}(n) \geq \pi_1^{mc}(n) = \pi_0^{mc}(n-1)$.

Bleibt nur noch der Beweis von Punkt 4. Dieser kann mittels Induktion über m und anschließender Induktion über n vollständig analog zu Satz 36 geführt werden. □

Sofern in jedem Schritt ein Crash erfolgen kann, ist die optimale Aktienanzahl stets 0, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 38 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C) + (1-p)d(1-C) < B < pu + (1-p)d$ und $n \leq m$ gilt: $\pi_0^{mc}(n) = 0$.*

Beweis: Für ein gegebenes m soll der Beweis durch Induktion über n geführt werden. Dabei ist zunächst anzumerken, dass für $m > n$ gilt, dass $\pi_0^{mc}(n) = \pi_0^{(m-1)c}(n)$, da in jedem Schritt des Binomialbaums höchstens ein Crash erfolgen kann.

Somit gilt insbesondere $\pi_0^{mc}(1) = \pi_0^{1c} = 0$ gemäß Satz 33. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Sei also die Annahme gültig für alle $N < n$. Seien ferner $\pi_i^{m_i c}(n)$ die optimalen Aktienanteile, die zum optimalen Vermögen X_n führen. Dabei bezeichnet m_i die Anzahl der maximal in Schritt i noch drohenden Crashes.

Dann gilt $\pi_i^{m_i c}(n) = \pi_0^{m_i c}(n-i)$ sowie $m_i \geq m-i \geq n-i$ und damit gemäß Induktionsannahme $\pi_i^{m_i c}(n) = 0$ für $i > 0$.

Folglich ist $X_n = X_n^{c1}$ oder $X_n = X_n^{nc1}$ mit

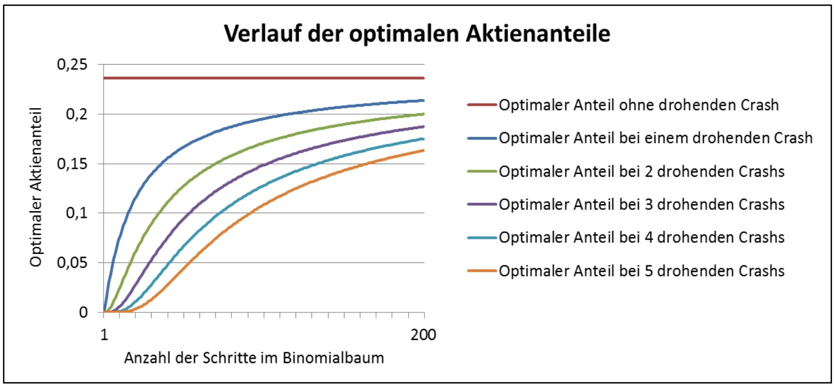
$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0 B^{n-1}\left(\pi_0^{mc}(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right)$$

bzw.

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0 B^{n-1}\left(\pi_0^{mc}(n)\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right)\right)$$

Analog zu Satz 33 lässt sich nun zeigen, dass der optimale Aktienanteil $\pi_0^{mc}(n)$ für die gegebene Parameterkonstellation stets 0 ist. □

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Aktienanzahlen bei mehreren drohenden Crashs:



Parameter: $p = 0,5$; $u = 1,26$; $d = 0,84$; $B = 1,04$; $C = 0,1$

Zur Berechnung der in der Grafik dargestellten Werte für $\pi_0^{mc}(n)$ wurde der folgende Algorithmus verwendet:

- Bestimme $\pi_0^{1c}(i)$ wie im vorangegangenen Abschnitt
- Iteriere über m:
  - $\pi_0^{mc}(n) = 0$ für $n \leq m$.
  - Bestimme $\pi_0^{mc}(i)$ so dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}(i)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{(m-1)c}(i-1)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}(i)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0^{mc}(i-1)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

    Dies kann über eine Standard-Nullstellensuche erfolgen, wobei als Startwerte zum einen $\pi_0^{mc}(i) = 0$ (für diesen Wert ist der Term positiv) und zum anderen $\pi_0^{mc}(i) = \pi_0^{(m-1)c}(i-1)$ (Term ist negativ) verwendet werden können.

6.5 Die beste konstante Lösung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde betrachtet, welche Aktienanteile optimal sind, wenn ein oderer mehrere Crashs auftreten können. Als Ergebnis ergeben sich im Zeitverlauf sinkende (und damit nicht konstante) Aktienanteile. In diesem Abschnitt soll nun betrachtet werden, welcher Anteil an Aktien optimal wäre, wenn man den Aktienanteil bis zum Auftreten des Crashs konstant halten würde.

Im Sinne einer einfacheren Notation wird dabei wieder nur von einem möglichen Crash ausgegangen, die grundsätzlichen Überlegungen ließen sich aber wie im vorangegangenen Abschnitt auch auf Situationen mit mehreren möglichen Crashs übertragen.

Weiter sei angemerkt, dass die Aktienanteile nur bis zum Auftreten des Crashs konstant gehalten werden, nach erfolgtem Crash kann eine Umschichtung erfolgen (bei nur einem drohenden Crash würde man dann also nach dem Crash auf die bekannte optimale Aktienanzahl ohne drohenden Crash wechseln).

Satz 39 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ gilt: Die optimale konstante Lösung im Binomialmodell existiert, ist eindeutig, ist stets kleiner als die optimale Lösung im Modell ohne drohenden Crash, ist streng monoton wachsend in der Schrittanzahl n und konvergiert für $n \to \infty$ gegen*

$$\min\left\{\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)}, \frac{B}{B-d(1-C)}\right\}.$$

Weiterhin ist die optimale konstante Lösung genau dann größer als 0, wenn

$$n > -\frac{pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B}{pu+(1-p)d-B}+1.$$

Beweis: Angenommen, die beste konstante Lösung π^* wäre < 0. Dann wäre der schlimmste Fall der ohne Crash, d.h.

$$\mathbb{E}(\ln(X_n)) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0 \prod_{i=0}^{n-1}\left(\pi\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) < \ln(X_0 B^n)$$

da $\pi < 0$ und $pu + (1-p)d > B$ (Beweis analog Beweisführung in Satz 34). Somit wäre eine Lösung $\pi < 0$ immer schlechter als $\pi = 0$. Folglich gilt $\pi^* \geq 0$.

Weiterhin ist bei positiver konstanter Lösung ein späterer Crash stets schlechter als ein früherer, denn für alle $j = 1, ..., n-1$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\ln(X_n^{c(j+1)})) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{cj})) \\
&= \ln(X_0) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=0}^{j}\left(\pi\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=j+2}^{n-1}\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad - \ln(X_0) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=0}^{j-1}\left(\pi\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad - \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_j}{S_j - 1}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad - \mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - B\right) + B\right)\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

wegen der Optimalität von π^{nc} (optimale Lösung im Modell ohne drohenden Crash).

Folglich ist folgende Funktion über π zu maximieren:

$$\ln(X_0) + (n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right)\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right)$$

Dies kann wie üblich durch Nullsetzen der ersten Ableitung erfolgen. Die erste Ableitung ist eine rationale Funktion vom Grad 3 mit 4 Polstellen bei

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= -\frac{B}{u - B} \\
\pi_2 &= \frac{B}{B - d(1-C)} \\
\pi_3 &= \frac{B}{B - d} \\
\pi_4 &= -\frac{B}{u(1-C) - B}
\end{aligned}$$

Für Polstelle π_1 gilt: Der zugehörige Term der Ableitung ist

$$\frac{p(u-B)}{\pi(u-B)+B}$$

Der Zähler ist folglich stets positiv, der Nenner wechselt das Vorzeichen (negativ für $\pi < -\frac{B}{u-B}$, positiv für $\pi > -\frac{B}{u-B}$.

Für Polstelle π_3 gilt: Der zugehörige Term der Ableitung ist

$$\frac{p(d-B)}{\pi(d-B)+B}$$

Der Zähler ist hier stets negativ, der Nenner wechselt das Vorzeichen (positiv für $\pi < \frac{B}{B-d}$, negativ für $\pi > \frac{B}{B-d}$. Polstellen π_2 und π_4 folgen analog.

An jeder dieser Polstellen springt die Ableitung folglich von $-\infty$ nach $+\infty$, somit muss jede der 3 Nullstellen der Ableitung zwischen zwei Polstellen liegen (da die Ableitung zwischen den Polstellen stetig ist).

Gemäß Lemma 31 muss π^* aufgrund der Zulässigkeitsanforderung

$$\pi\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B>0 \text{ sowie } \pi\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B>0$$

zwischen π_1 und π_2 liegen.

Weiterhin gilt $\pi_3 > \pi_2$ und $\pi_4 < \pi_1$ falls $u(1-C) > B$ bzw. $\pi_4 > \pi_2$ falls $u(1-C) < B$.

Da somit zwischen π_1 und π_2 genau eine Nullstelle liegt, existiert eine eindeutige konstante optimale Lösung (dass es sich um ein Maximum handelt, kann man durch Berechnung der zweiten Ableitung ermitteln, die in diesem Bereich stets < 0 ist).

Die so ermittelte Nullstelle ist genau dann größer als 0, wenn die Ableitung an der Stelle 0 positiv ist, d.h. wenn

$$\begin{aligned}
&(n-1)\left[\frac{p(u-B)}{B}+\frac{(1-p)(d-B)}{B}\right]+\frac{p(u(1-C)-B)}{B}+\frac{(1-p)(d(1-C)-B)}{B}>0\\
\iff\ & n > -\frac{pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B}{pu+(1-p)d-B}+1
\end{aligned}$$

Nun soll gezeigt werden, dass die optimale konstante Lösung bei drohendem Crash stets kleiner ist als die optimale Lösung ohne drohenden Crash. Zum einen gilt: Falls π^{nc} nicht zulässig ist (d.h. größer als die obere Grenze π_2, ist die Behauptung gezeigt. Ansonsten ergibt sich durch Einsetzen von π^{nc} in die Ableitung der zu maximierenden Funktion:

$$\frac{p(u(1-C)-B)}{\pi^{nc}(u(1-C)-B)+B}+\frac{(1-p)(d(1-C)-B)}{\pi^{nc}(d(1-C)-B)+B}$$

Falls $u(1-C) \le B$, so ist der erste Zähler nicht-positiv, der zweite negativ, die Nenner sind (aufgrund der Zulässigkeit) positiv, der Term ist insgesamt also negativ.

Falls $u(1-C) > B$, so kann man den Term auch schreiben als

$$\frac{\pi^{nc}(u(1-C)-B)(d(1-C)-B)+(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)B}{(\pi^{nc}(u(1-C)-B)+B)(\pi^{nc}(d(1-C)-B)+B)}$$

Der Term ist ebenfalls < 0, da $\pi^{nc} > 0$ und $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B$ (für die gegebene Parameterkonstellation).

Folglich ist die Ableitung der zu maximierenden Funktion an der Stelle π^{nc} negativ, die gesuchte Nullstelle ist also stets $< \pi^{nc}$ (da die Ableitung nahe der unteren Grenze π_1 positiv ist).

Aufgrund der Form der zu optimierenden Funktion folgt weiterhin die Abhängigkeit der optimalen Lösung von n. Die strenge Monotonie ergibt sich dabei wie folgt: Sei $\pi(i)$ die optimale konstante Lösung für einen Binomialbaum mit i Schritten. Folglich gilt

$$\begin{aligned}(i-1)&\left[\frac{p(u-B)}{\pi(i)(u-B)+B}+\frac{(1-p)(d-B)}{\pi(i)(d-B)+B}\right]\\&+\frac{p(u(1-C)-B)}{\pi(i)(u(1-C)-B)+B}+\frac{(1-p)(d(1-C)-B)}{\pi(i)(d(1-C)-B)+B}=0\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}i&\left[\frac{p(u-B)}{\pi(i)(u-B)+B}+\frac{(1-p)(d-B)}{\pi(i)(d-B)+B}\right]\\&\quad+\frac{p(u(1-C)-B)}{\pi(i)(u(1-C)-B)+B}+\frac{(1-p)(d(1-C)-B)}{\pi(i)(d(1-C)-B)+B}\\&=\frac{p(u-B)}{\pi(i)(u-B)+B}+\frac{(1-p)(d-B)}{\pi(i)(d-B)+B}\\&=\frac{\pi(i)(u-B)(d-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(i)(u-B)+B)(\pi(i)(d-B)+B)}\\&=\frac{(u-B)(d-B)(\pi(i)-\pi^{nc})}{(\pi(i)(u-B)+B)(\pi(i)(d-B)+B)}\\&>0\end{aligned}$$

da $u > B$, $d < B$ und wie eben gezeigt $\pi(i) < \pi^{nc}$.

Folglich ist die Ableitung der zu maximierenden Funktion für $i+1$ Schritte an der Stelle $\pi(i)$ positiv, die gesuchte Nullstelle $\pi(i+1)$ ist also $> \pi(i)$ (da die Ableitung nahe der oberen Grenze π_2 negativ ist). Folglich ist $\pi(n)$ streng monoton wachsend in n.

Die Konvergenz von $\pi(n)$ gegen

$$\min\left\{\frac{B(pu+(1-p)d-B)}{(u-B)(B-d)},\frac{B}{B-d(1-C)}\right\}$$

folgt nun unmittelbar aus der Form der zu maximierenden Funktion

$$\ln(X_0)+(n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)$$

Der zweite Term steigt linear mit n, dominiert also die Funktion. Somit nähert sich die optimale konstante Lösung im Modell mit drohendem Crash für $n \to \infty$ der optimalen Lösung im Modell ohne Crash - sofern diese zulässig ist, d.h. sofern diese unter der Obergrenze für den zweiten Term liegt.

Andernfalls konvergiert $\pi(n)$ gegen die obere Grenze, da der erste Term für jedes feste π unterhalb der oberen Grenze unbegrenzt in n wächst und somit irgendwann den zweiten Term dominiert. $\square$

Numerisch kann die beste konstante Lösung mit folgendem Algorithmus berechnet werden:

- Für festes n definiere

$$
\begin{aligned}
f_n(\pi) \quad &:= \quad \ln(X_0) + (n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

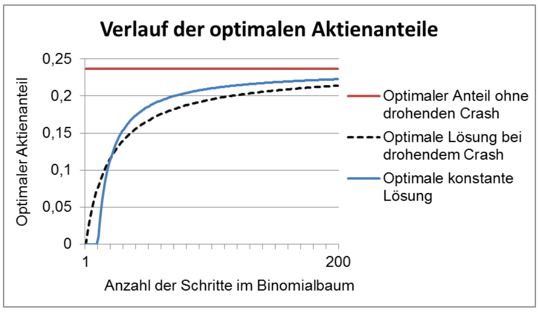
- Falls

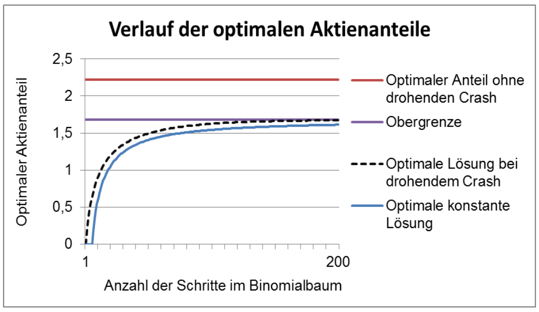
$$n \geq -\frac{pu(1-C) + (1-p)d(1-C) - B}{pu + (1-p)d - B} + 1$$

dann ist 0 die beste konstante Lösung.

- Ansonsten finde die (eindeutige) Nullstelle von $f_n'(\pi)$ mittels eines klassischen Intervallhalbierungsverfahrens mit den Startwerten $\pi_1 = -\frac{B}{u-B} + \epsilon$ und $\pi_2 = \frac{B}{B-d(1-C)} - \epsilon$. Dabei ist $f_n'(\pi)$ analytisch gegeben (siehe Beweis des vorangegangenen Satzes).

Die folgende Abbildung veranschaulicht das Konvergenzverhalten:





$p = 0,5$	$p = 0,7$
$u = 1,26$	$u = 1,26$
$d = 0,84$	$d = 0,84$
$B = 1,04$	$B = 1,04$
$C = 0,1$	$C = 0,5$

Dabei ist anzumerken, dass in den Grafiken zusätzlich zu den optimalen konstanten Lösungen (abhängig von der Baumtiefe) als Vergleich jeweils auch die optimalen Anfangswerte der Aktienanteile dargestellt sind. Letztere erlauben allerdings Änderungen im Zeitverlauf während erstere bis zum Crash konstant sind. Die linke Grafik zeigt den Fall, dass die optimale konstante Lösung gegen die optimale Lösung ohne Crash konvergiert während die rechte Grafik den Fall der Konvergenz gegen die Obergrenze mit drohendem Crash darstellt.

Es lässt sich folgendes weitere Resultat festhalten:

Satz 40 *Die Differenz des erwarteten Nutzens bei Verwendung der optimalen veränderlichen Aktienanteile zum schlechtesten erwarteten Nutzen bei Verwendung des optimalen konstanten Aktienanteils ist stets positiv und konvergiert für $n \to \infty$ gegen*

$$
\begin{array}{ll}
0 & \textit{falls } \pi^{nc} < \dfrac{B}{B - d(1-C)} \\
+\infty & \textit{sonst}
\end{array}
$$

Beweis: Dass die Differenz stets positiv ist, ergibt sich daraus, dass die optimale konstante Lösung auch eine mögliche Lösung für das Problem mit veränderbaren Aktienanteilen darstellt. Folglich muss der erwartete Nutzen der optimalen veränderbaren Lösung stets größer sein als der schlechteste Nutzen aus der optimalen konstanten Lösung.

Für die optimale veränderbare Lösung gilt gemäß Satz 34 die Indifferenz, daher lässt sich der erwartete Nutzen schreiben als

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\ln(X_n(\pi_0(n),...,\pi_{n-1}(n))))\\&\quad=\ln(X_0)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\&\qquad+(n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\end{aligned}$$

Der schlechteste Nutzen für die optimale konstante Lösung ist hingegen (siehe Satz 39)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\ln(X_n(\pi(n))))&=\ln(X_0)+(n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\&\quad+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\end{aligned}$$

Falls $\pi^{nc}<\frac{B}{B-d(1-C)}$, dann gilt gemäß Sätzen 35 bzw. 39, dass sowohl $\pi_0(n)$ der optimalen veränderbaren Lösung als auch die optimale konstante Lösung $\pi(n)$ für $n\to\infty$ gegen π^{nc} konvergieren.

Zu zeigen bleibt dann noch

$$(n-1)\left[\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right]\to 0$$

d.h. die Konvergenz der Differenz der erwarteten Nutzen gegen 0 muss schneller sein als $\frac{1}{n-1}$. Gemäß Satz 39 gilt für $\pi(n)$

$$\begin{aligned}&(n-1)\frac{\pi(n)(d-B)(u-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\&\quad+\frac{\pi(n)(d(1-C)-B)(u(1-C)-B)+B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(\pi(n)(u(1-C)-B)+B)(\pi(n)(d(1-C)-B)+B)}=0\end{aligned}$$

Wählt man nun $\pi(n)=\pi^{nc}-f(n)$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{f(n)(n-1)(B-d)(u-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\&\quad+\frac{\pi(n)(d(1-C)-B)(u(1-C)-B)+B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(\pi(n)(u(1-C)-B)+B)(\pi(n)(d(1-C)-B)+B)}=0\end{aligned}$$

Wäre nun $\lim_{n\to\infty}f(n)(n-1)=0$, so würde der erste Term im Limit verschwinden, der zweite hingegen nicht. Wäre hingegen $\lim_{n\to\infty}f(n)(n-1)=+\infty$, so würde der Term insgesamt gegen $+\infty$ konvergieren. Beides würde eine Verletzung des Optimalitätskriteriums von $\pi(n)$ darstellen, somit gilt also $\lim_{n\to\infty}f(n)(n-1)=a$, $0<a<+\infty$.

Man kann also schreiben

$$\pi(n)=\pi^{nc}-\frac{a(n)}{n-1}\text{ mit }\lim_{n\to\infty}a(n)=a,a(n)>0\ \forall n$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
&(n-1)\left[\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right]\\
&\leq (n-1)\ln\left(1+p\frac{(\pi^{nc}-\pi(n))(u-B)}{\pi(n)(u-B)+B}+(1-p)\frac{(\pi^{nc}-\pi(n))(d-B)}{\pi(n)(d-B)+B}\right)\\
&\quad\text{(analog Beweis von Satz 34)}\\
&=(n-1)\ln\left(1+\frac{a(n)}{n-1}\left[\frac{\pi(n)(u-B)(d-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\right]\right)\\
&=(n-1)\ln\left(1+\frac{a(n)}{n-1}\left[\frac{\frac{a(n)}{n-1}(u-B)(B-d)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\right]\right)\\
&=(n-1)\ln\left(1+\frac{\frac{a(n)^2}{(n-1)^2}(u-B)(B-d)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\right)\\
&\leq (n-1)\frac{\frac{a(n)^2}{(n-1)^2}(u-B)(B-d)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\
&=\frac{\frac{a(n)^2}{(n-1)}(u-B)(B-d)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\
&\to 0 \text{ für } n\to\infty
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $\pi^{nc} < \frac{B}{B-d(1-C)}$ gezeigt.

Falls nun $\pi^{nc} \geq \frac{B}{B-d(1-C)}$, dann gilt gemäß den Sätzen 35 bzw. 39, dass sowohl $\pi_0(n)$ der optimalen veränderbaren Lösung als auch die optimale konstante Lösung $\pi(n)$ für $n\to\infty$ gegen $\frac{B}{B-d(1-C)}$ konvergieren.

Wählt man nun $\pi(n) = \frac{B}{B-d(1-C)} - f(n)$ (anstatt wie oben $\pi(n) = \pi^{nc} - f(n)$) so ergibt sich für die optimale konstante Lösung

$$\begin{aligned}
&(n-1)\frac{\pi(n)(d-B)(u-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\
&\quad+\frac{\pi(n)(d(1-C)-B)(u(1-C)-B)+B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(\pi(n)(u(1-C)-B)+B)f(n)(d(1-C)-B)}=0
\end{aligned}$$

Wegen $f(n) > 0\ \forall n$ (wegen der Zulässigkeit von $\pi(n)$) ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&(n-1)f(n)\frac{\pi(n)(d-B)(u-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)}\\
&\quad+\frac{\pi(n)(d(1-C)-B)(u(1-C)-B)+B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(\pi(n)(u(1-C)-B)+B)(d(1-C)-B)}=0
\end{aligned}$$

Da die Terme

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi(n)(d-B)(u-B)+B(pu+(1-p)d-B)}{(\pi(n)(u-B)+B)(\pi(n)(d-B)+B)} \text{ bzw.}\\
&\quad\frac{\pi(n)(d(1-C)-B)(u(1-C)-B)+B(pu(1-C)+(1-p)d(1-C)-B)}{(\pi(n)(u(1-C)-B)+B)(d(1-C)-B)}
\end{aligned}$$

für $n\to\infty$ endlich sind, folgt $\lim_{n\to\infty}(n-1)f(n) = a$ für ein $a < +\infty$.

Aufgrund der Indifferenz für die variable Lösung kann man die Differenz der schlechtesten erwarteten Nutzen auch schreiben als

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_i(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-(n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\end{aligned}$$

Für große n hat der dritte Term die Ordnung $(1-p)\ln(n-1)$ (da wie oben gezeigt $\pi(n)$ mit Ordnung $\frac{1}{n-1}$ gegen $\frac{B}{B-d(1-C)}$ konvergiert und der Term für u endlich ist).

Es soll nun noch gezeigt werden, dass für ausreichend große n gilt, dass $\pi_0(n) > \pi(n)$. Dann gehen der erste und zweite Term in Summe für ausreichend große n entweder gegen einen festen Wert oder gegen $+\infty$ und die Behauptung dieses Satzes wäre gezeigt.

Hierzu soll der Gedanke aus Satz 35 aufgegriffen werden: Aufgrund der Indifferenz gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)+(n-1)\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\\&\quad=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_i(n)\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\end{aligned}$$

Für große n muss also $\pi_0(n)$ ausreichend schnell fallen um den Zuwachs

$$\delta:=\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{B}{B-d(1-C)}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$

zu kompensieren. Dabei ist für $\pi_0(n)\to\frac{B}{B-d(1-C)}$ nur der Term für d relevant (der Term für u ist endlich), d.h.

$$(1-p)\ln(\pi_0(n)(d(1-C)-B)+B)\sim-\delta(n-1)$$

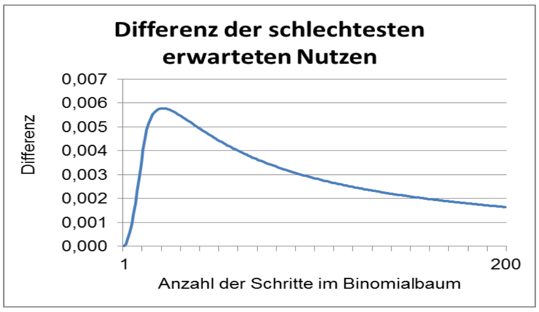
Mit der Notation $\pi_0(n)=\frac{B}{B-d(1-C)}-g(n)$ erhält man so

$$g(n)\sim\frac{e^{-\frac{\delta}{1-p}(n-1)}}{B-d(1-C)}$$

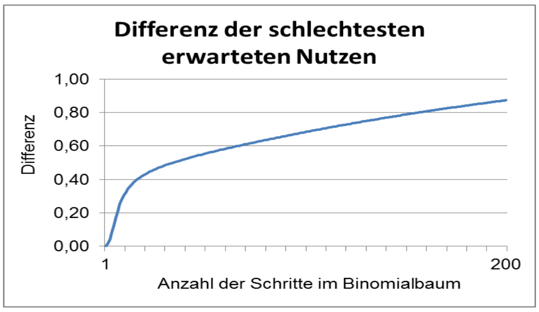
für große n.

Folglich konvergiert $\pi_0(n)$ exponentiell und somit schneller gegen $\frac{B}{B-d(1-C)}$ als $\pi(n)$, d.h. $\pi_0(n)>\pi(n)$ für ausreichend große n. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die Konvergenz der Differenz der erwarteten Nutzen sieht grafisch wie folgt aus:



$p = 0,5$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,1$



$p = 0,7$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,5$

Dieses Ergebnis ist interessant - es zeigt, dass solange es (auch unter einem drohenden Crash) zulässig ist, vor dem Crash den optimalen Anteil an Aktien im Modell ohne Crash zu halten, es (auf lange Sicht) keinen Unterschied macht, ob man einer sich ändernden oder einer konstanten Lösungsstrategie folgt.

Ist es allerdings aufgrund der Restriktion durch den Crash (Vermögen darf mit der verwendeten Strategie durch den Crash nicht negativ werden) nicht möglich, den optimalen Anteil an Aktien im Modell ohne Crash zu halten, wird der Unterschied im resultierenden Endvermögen mit der Zeit unendlich groß.

6.6 Veränderte Marktbedingungen nach dem Crash

Bislang wurde angenommen, dass die Marktbedingungen (p, u, d) vor und nach dem Crash identisch sind. In der Realität ist allerdings zu beobachten, dass sich Märkte durch einen Crash verändern, häufig sogar nachhaltig.

Daher soll in diesem Abschnitt betrachtet werden, wie sich die Lösung im Worst Case Modell verhält, wenn sich nach erfolgtem Crash der Markt verändert. Aus Gründen der einfacheren Notation konzentriert sich auch dieser Abschnitt wieder auf das Modell mit nur einem möglichen Crash.

Im Folgenden bezeichnet π bzw. S den optimalen Aktienanteil bzw. den Aktienkurs vor dem Crash, $\tilde{\pi}$ bzw. $\tilde{S}$ die optimalen Aktienanteile bzw. den Aktienkurs nach dem Crash (mit dann veränderten Marktparametern).

Satz 41 *Sei die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ und folgende Bedingung erfüllt:*

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$

$$\textit{oder } \pi^{nc} \geq \frac{B}{B-d(1-C)}$$

(dabei bezeichnet π^{nc} den optimalen Aktienanteil im Modell ohne Crash).

Dann gilt auch im Fall sich ändernder Marktbedingungen nach dem Crash, dass für die optimalen Aktienanteile der erwartete Nutzen unabhängig davon ist, ob ein Crash erfolgt oder nicht, d.h.

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^c(\pi_0,...,\pi_n))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}(\pi_0,...,\pi_n)))$$

(wobei X_n^c das Endvermögen im Fall eines aufgetretenen Crashs, X_n^{nc} das Endvermögen im Fall eines drohenden, aber nicht eingetretenen Crashs bezeichnet).

Weiterhin gilt

$$0 \leq \pi_i < \pi^{ac}$$

wobei π^{ac} der eindeutige Aktienanteil ist, so dass $0 < \pi^{ac} \leq \pi^{nc}$ und

$$\pi^{ac} = argmin\left\{\left|\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)-\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right)\right|\right\}$$

Beweis: Der Beweis soll analog zu Satz 34 über Induktion geführt werden.

Der Induktionsanfang für $n = 1$ ergibt sich dabei direkt aus Satz 34, da es bei nur einer betrachteten Periode unerheblich ist, ob sich die Marktparameter nach erfolgtem Crash ändern oder nicht. Insbesondere gilt auch hier das Ergebnis von Satz 33, d.h. $\pi_0(1) = 0$.

Sei die Behauptung also für alle $N < n$ gezeigt. Betrachtet sei dann das n-Perioden-Modell nach dem 1. Schritt. Es können dann zwei Fälle eingetreten sein: Entweder im 1. Schritt ist ein Crash eingetreten (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Im ersten Fall sind die weiteren optimalen Aktienanzahlen bekannt (aus dem Binomialmodell ohne drohenden Crash). Es gilt dann:

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1})) = \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_{i+1}}{\tilde{S}_i}-B\right)+B\right)\right)\right)$$

Im zweiten Fall gilt aufgrund der Induktionsannahme, dass es für die optimalen Aktienanzahlen irrelevant ist, wann (und ob) im weiteren Verlauf ein Crash erfolgt oder nicht. o.B.d.A. sei daher angenommen, dass der Crash im 2. Schritt erfolgt. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\ln(X_n^{c2})) &= \mathbb{E}\left(\ln\left(X_0\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\ &\quad+\mathbb{E}\left(\ln\left(\prod_{i=2}^{n-1}\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_{i+1}}{\tilde{S}_i}-B\right)+B\right)\right)\right)\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}))-\mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}))\\ &\quad=\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right)\right)\\ &\qquad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass $\pi_0 \leq \pi^{nc}$, denn der erste Term ist monoton fallend in π_0 (siehe Beweis von Satz 34) und für den zweiten Term gibt es aufgrund der Stetigkeit und dem Maximum bei $\pi_0 = \pi^{nc}$ für jedes zulässige $\pi_0 > \pi^{nc}$ ein $\hat{\pi}_0 < \pi^{nc}$ so dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)=\mathbb{E}\left(\ln\left(\hat{\pi}_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$

Da das gesuchte π_0 die Funktion $\min\{\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0))), \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0)))\}$ maximiert, muss somit $\pi_0 \leq \pi^{nc}$ gelten.

Aufgrund der Induktionsannahme gilt $\pi_1 \geq 0$ und damit (wegen $pu(1-C+(1-p)d(1-C) < B)$

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right) \leq \ln(B)$$

Wegen der Optimalität von $\tilde{\pi}^{nc}$ gilt weiter

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right) \geq \ln(B)$$

Weiter gilt für $\pi_0 \leq 0$ dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) \leq 0$$

(analog Beweis von Satz 34) und daher

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 \leq 0))) \geq \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 \leq 0)))$$

Gemäß den Voraussetzungen dieses Satzes gilt

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$
$$\text{oder } \pi^{nc} \geq \frac{B}{B-d(1-C)}$$

Sei zunächst der Fall betrachtet, dass die erste Bedingung erfüllt ist. Dann sei $\pi_0 = \pi^{ac}$ gewählt. Weiter sei angemerkt, dass $\pi^{ac} \geq 0$, da wegen der Optimalität von $\tilde{\pi}^{nc}$

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) \geq \ln(B)$$

(und daher gilt wegen $pu + (1-p)d > B$, dass $\pi^{ac} \geq 0$).

Weiterhin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{ac}))) - \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 = \pi^{ac}))) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) - \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right) \\
&\quad < 0
\end{aligned}$$

da gemäß Induktionsvoraussetzung $\pi_1 < \pi^{ac}$ (Beweis analog zu Satz 34).

Falls die erste Bedingung nicht gilt, dafür aber die zweite, ist $\pi^{ac} = \pi^{nc}$ und $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{nc}))) < \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 = \pi^{nc})))$ (da $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{nc}))) = -\infty$, $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 = \pi^{nc})))$ endlich). Somit gilt dann ebenfalls $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{ac}))) < \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 = \pi^{ac})))$.

Abschließend kann analog zum Beweis von Satz 34 mittels Monotonie- und Stetigkeitsargumenten gezeigt werden, dass der optimale Aktienanteil π_0^* am eindeutigen Schnittpunkt der Funktionen $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0)))$ und $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}(\pi_0)))$ liegt, der sich zwischen 0 und π^{ac} befindet. □

Auch hier ist wieder die Monotonie und Konvergenz der so gefundenen Lösungen nachweisbar:

Satz 42 *Für die Parameterkonstellation* $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ *und unter der Bedingung*

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$
$$\textit{oder } \pi^{nc} \geq \frac{B}{B-d(1-C)}$$

gilt: Die Folge der optimalen Aktienanteile $\pi_0(n)$ *ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen*

$$\min\left\{\pi^{ac}, \frac{B}{B-d(1-C)}\right\}.$$

Beweis: Aufgrund der in Satz 41 gezeigten Indifferenz gilt

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0,...,\pi_n))) = \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0,...,\pi_n)))$$

Daraus folgt dann wiederum

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right)$$
$$=\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

(die restlichen Terme kürzen sich weg).

Gemäß Definition gilt

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right)$$

Wegen $\pi_0 < \pi^{ac} \leq \pi^{nc}$ (gemäß Satz 41) und wegen $pu+(1-p)d > B$, folgt weiter

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{ac}\left(\frac{S_2}{S_1}-B\right)+B\right)\right) > \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$

und daher muss gelten, dass

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right) < \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_1\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

Der restliche Beweis (inkl. Konvergenz) ist analog zu Satz 35. □

Satz 43 *Für die Parameterkonstellation* $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ *sowie unter der Bedingung*

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$
$$\textit{oder } \pi^{nc} \geq \frac{B}{B-d(1-C)}$$

gilt: Der optimale Aktienanteil π_i *ist unabhängig vom Pfadverlauf, vom aktuellen Vermögen* X_i *und vom aktuellen Aktienwert* S_i*.*

Beweis: Analog Beweis von Satz 36. □

Nun sei noch der Fall betrachtet, dass die Marktbedingungen nach dem Crash günstiger sind als vorher:

Satz 44 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ sowie unter der Bedingung*

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0}-B\right)+B\right)\right) > \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)$$
$$\text{und } \pi^{nc} < \frac{B}{B-d(1-C)}$$

gilt: Es existiert ein N so dass für alle $n \geq N$ $\pi_0(n) = \pi^{nc}$. Der erwartete Nutzen für $n \geq N$ ist nicht mehr indifferent in Bezug auf das Auftreten eines Crashs.

Für $n < N$ gilt hingegen die Indifferenz des erwarteten Nutzens gegenüber einem Crash und die strenge Monotonie der optimalen Aktienanteile.

Beweis: Sei wie im Beweis von Satz 41 die Differenz zwischen $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}))$ und $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}))$ betrachtet. Gemäß Voraussetzungen dieses Satzes gilt $\pi^{ac} = \pi^{nc}$.

Analog zu Satz 41 gilt weiter $\pi_0(n) \leq \pi^{nc}$.

Solange weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right)\right)\\
&\quad< \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi_1(n)\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

folgt analog zu Satz 41 sowie Satz 42 die Indifferenz des erwarteten Nutzens und die strenge Monotonie der optimalen Aktienanteile $\pi_0(n)$.

Da $\pi(n)$ aber somit ebenfalls streng monoton wächst, solange die obige Bedingung erfüllt ist, und darüber hinaus gemäß Satz 42 gegen π^{nc} konvergiert (gemäß der Voraussetzungen ist $\pi^{ac} = \pi^{nc}$ und π^{nc} ist zulässig), existiert ein N, so dass für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1}-B\right)+B\right)\right)\right)\\
&\quad\geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}-B\right)+B\right)\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi_1(n)\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)\\
&\quad-\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

(wenn $\pi_1(n)$ wächst, fällt der zweite Term, da $pu(1-C)-(1-p)d(1-C) < B$).

Folglich ist für alle $n \geq N$

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{nc}))) > \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 = \pi^{nc})))$$

Weiter ist analog zu Satz 41

$$\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}(\pi_0 \leq 0))) > \mathbb{E}(\ln(X_n^{c2}(\pi_0 \leq 0)))$$

Mit Monotonieargumenten gilt dann auch $\pi_0 = \pi^{nc}$: Da $X_n^{c1}(\pi_0)$ monoton fallend ist für $\pi_0 > 0$ und $X_n^{nc}(\pi_0)$ monoton wachsend für $0 \leq \pi_0 \leq \pi^{nc}$ sowie $X_n^{c1}(\pi_0 = \pi^{nc}) \geq X_n^{nc}(\pi_0 = \pi^{nc})$ gilt $X_n^{c1}(\pi_0) \geq X_n^{nc}(\pi_0)$ für alle $\pi_0 \leq \pi^{nc}$. Da $X_n^{nc}(\pi_0)$ für $\pi_0 \geq \pi^{nc}$ monoton fallend ist, gilt folglich $\pi_0(n) = \pi^{nc}$.

Anschaulich gesehen ist in dieser Situation der Markt nach dem Crash so viel besser als zuvor, dass selbst der Verlust aus dem Crash wettgemacht wird. In dieser Situation würde ein Crash kein Risiko darstellen, somit entspricht der optimale Aktienanteil dem aus dem Modell ohne drohenden Crash.

Allerdings ist der erwartete Nutzen für den optimalen Aktienanteil nicht indifferent in Bezug auf den Crash, da in diesem Fall der Schnittpunkt zwischen $\mathbb{E}(\ln(X_n^{c1}))$ und $\mathbb{E}(\ln(X_n^{nc}))$ zwischen π^{nc} und $\frac{B}{B-d(1-C)}$ liegt und damit nicht an der Stelle π_0. □

Insgesamt lassen sich die Ergebnisse bei sich ändernden Marktbedingungen wie folgt zusammenfassen:

Korollar 45 *Für die Parameterkonstellation $pu(1-C)+(1-p)d(1-C) < B < pu+(1-p)d$ gilt: Die optimalen Aktienanteile sind monoton wachsend sowie unabhängig vom Pfadverlauf, vom aktuellen Vermögen X_i und vom aktuellen Aktienwert S_i. Sie konvergieren gegen*

$$\min\left\{\pi^{ac}, \frac{B}{B-d(1-C)}\right\}$$

und lassen sich rekursiv wie folgt ermitteln:

- $\pi_0(1) = 0$.
- *Falls*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1} - B\right) + B\right)\right)\right)& \\ < \mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right)\right)& \\ +\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi_0(n-1)\left(\frac{S_2}{S_1}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right)& \\ -\mathbb{E}\left(\ln\left(\left(\pi^{nc}\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\right)&\end{aligned}$$

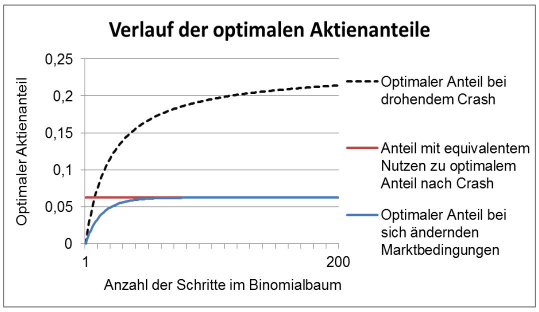
  dann bestimme $\pi_0(n)$ so dass

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\tilde{\pi}^{nc}\left(\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_0} - B\right) + B\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n)\left(\frac{S_1}{S_0} - B\right) + B\right)\right) + \mathbb{E}\left(\ln\left(\pi_0(n-1)\left(\frac{S_1}{S_0}(1-C) - B\right) + B\right)\right)\end{aligned}$$

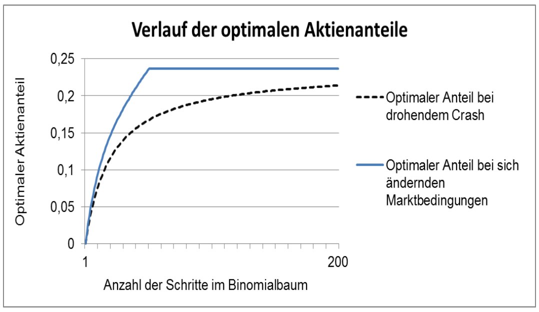
- *Sonst: $\pi_0(n) = \pi^{nc}$.*

Beweis: Vorangegangene Sätze 41, 42, 43 und 44. □

Die Ergebnisse sind hier noch einmal grafisch dargestellt:



$p = 0,5$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,1$
$\tilde{u} = 1,36$
$\tilde{d} = 0,74$



$p = 0,7$
$u = 1,26$
$d = 0,84$
$B = 1,04$
$C = 0,1$
$\tilde{u} = 1,24$
$\tilde{d} = 0,86$

Auf der linken Seite ist die Marktsituation nach dem Crash schlechter (d.h. der maximale erwartete Nutzen kleiner als vorher), im rechten Bild besser.

6.7 Mehrere Aktien

Im Gegensatz zum Fall mit einer Aktie muss die optimale Lösung bei drohendem Crash für eine Periode bei mehreren Aktien nicht notwendigerweise bei 0 liegen. Für das Beispiel aus Abschnitt 2.2.3 und $C = 0,1$ gilt nämlich:

Der optimale erwartete Nutzen für $\pi^{(1)} = -2,12, \pi^{(2)} = 2,16$ liegt bei $9,73$ (egal ob ein Crash auftritt oder nicht) , bei $\pi^{(1)} = \pi^{(2)} = 0$ hingegen nur bei $9,25$.

Allerdings ist es weiterhin ausreichend, nur die Fälle "maximaler Crash" und "kein Crash" zu betrachten, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 46 *In einem Binomialmodell mit drohendem Crash von maximaler Höhe C und m Aktien gilt für alle π*

$$\inf_{0 \leq c \leq C} \mathbb{E}(\ln(X_n(c, \pi_0, ..., \pi_n) = \min\{\mathbb{E}(\ln(X_n(C, \pi_0, ..., \pi_n), \mathbb{E}(\ln(X_n(0, \pi_0, ..., \pi_n)\}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
P_k(c) &:= \mathbb{E}(\ln(X_n(c, k, \pi_0, ..., \pi_n) \\
&= X_0 + \sum_{i \neq k} \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} \pi_i^{(j)} \left(\frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}} - B\right) + B\right)\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} \pi_k^{(j)} \left(\frac{S_{k+1}^{(j)}}{S_k^{(j)}}(1-c) - B\right) + B\right)\right)
\end{aligned}$$

Zum Finden lokaler Extrema in c wird diese Funktion nach c abgeleitet. So erhält man

$$P_k''(c) = -\mathbb{E}\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^m \pi_k^{(j)} \frac{S_{k+1}^{(j)}}{S_k^{(j)}}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^m \pi_k^{(j)}\left(\frac{S_{k+1}^{(j)}}{S_k^{(j)}}(1-c)-B\right)+B\right)^2}\right)$$

Somit ist $P_k''(c)$ stets < 0 und damit hat $P_k'(c)$ höchstens eine Nullstelle bzw. $P_k(c)$ höchstens ein lokales Extremum in c, bei dem es sich darüber hinaus wegen $P_k''(c) < 0$ um ein lokales Maximum handelt. Folglich liegt das globale Minimum für alle k an den Rändern, d.h. das globale Minimum liegt entweder bei $c = 0$ oder $c = C$. □

Weiter gilt auch für mehrere Aktien, dass die optimale Lösung (unter bestimmten Voraussetzungen) bzgl. des Eintreten des Crashs indifferent ist:

Satz 47 *In einem Binomialmodell mit drohendem Crash von maximaler Höhe C und m Aktien gilt: Falls*

$$\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j),nc} > 0 \ \textit{und} \ \sum_{j=1}^{m} \pi^{(j),c} < 0$$

dann gilt: Die optimale Aktienanzahl ist indifferent bzgl. eines Crashs.

Dabei bezeichnet π^{nc} die optimale Lösung im Fall ohne Crash sowie π^c die optimale Lösung im Fall mit sicherem Crash.

Beweis: Sei zunächst der Fall von nur einer Periode, d.h. $n = 1$ betrachtet. Dann gibt es nur zwei Fälle, d.h. entweder tritt ein Crash auf oder nicht.

Sei weiter angenommen, dass π^* die optimale Lösung ist und dass für π^* weder die Indifferenz gilt noch ist π^* die optimale Lösung für den Fall mit (sicherem) oder den Fall ohne Crash.

Dann gäbe es zwei Möglichkeiten: An π^* ist entweder der Fall mit oder der Fall ohne Crash die schlechtere Variante.

Sei zunächst angenommen, dass der Fall mit Crash der schlechtere Fall ist. Dann gilt: $\exists \epsilon > 0 :$ $||y - \pi^*|| < \epsilon$ und y ist eine zulässige Lösung sowohl im Fall mit als auch im Fall ohne Crash (d.h. $\mathbb{E}(\ln(X_1^c(y))) > -\infty$, $\mathbb{E}(\ln(X_1^{nc}(y))) > -\infty$) und für alle y ist das Eintreten des Crashs schlechter. Da π^* nicht das lokale Maximum des Falls mit Crash ist, folgt daraus, dass es in der so definierten ϵ-Umgebung ein y^* geben müsste, dessen erwarteter Nutzen bei (sicherem) Crash besser ist als der von π^*. Da weiterhin für y^* das Eintreten des Crash schlechter ist als das Nicht-Eintreten, wäre y^* auch im Hinblick auf die optimale Lösung bei drohendem Crash besser als π^*. Dies stellt jedoch einen Widerspruch zur Optimalität von π^* dar.

Analog lässt sich auch für den Fall argumentieren, dass bei π^* der Fall ohne Crash der schlechtere Fall ist.

Insgesamt bedeutet dies also, dass nur 3 Möglichkeiten existieren: Die optimale Lösung bei drohendem Crash π^* ist die optimale Lösung des Problems ohne Crash, die optimale Lösung des Problems mit (sicherem) Crash oder sie ist in Bezug auf das Eintreten eines Crashs indifferent.

Im Fall der ersten Variante, d.h. π^* ist die optimale Lösung des Problems ohne Crash, muss gelten, dass $\mathbb{E}(\ln(X_1^{nc}(\pi^*))) \leq \mathbb{E}(\ln(X_1^c(\pi^*)))$ damit π^* auch eine optimale Lösung des Problems bei drohenden Crashs ist.

Allerdings gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}(1-C)\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\left(1-C\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\right)\right)\right)\\
&\leq\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}(1-C)\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad\text{(gemäß Voraussetzung dieses Satzes)}\\
&<\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad\text{(wegen Optimalität ist } \pi^* \text{ besser als } \pi^*(1-C))
\end{aligned}
$$

Folglich führt dieser Fall zu einem Widerspruch.

Im Fall der zweiten Variante, d.h. π^* ist die optimale Lösung des Problems mit sicherem Crash, ist $\mathbb{E}(\ln(X_1^c(\pi^*))) \leq \mathbb{E}(\ln(X_1^{nc}(\pi^*)))$ erforderlich. Es gilt dann aber

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-C}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\left(1+\frac{C}{1-C}\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\right)\right)\right)\\
&\leq\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-C}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad\text{(gemäß Voraussetzung dieses Satzes)}\\
&<\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)\\
&\quad\text{(wegen Optimalität ist } \pi^* \text{ besser als } \frac{\pi^*}{1-C})
\end{aligned}
$$

Da dies also auch wieder zum Widerspruch führt, muss insgesamt gelten, dass π^* bzgl. des Eintretens des Crashs indifferent ist.

Für $n > 1$ soll der Beweis über Induktion geführt werden. Der Induktionsanfang wurde bereits gezeigt. Induktionsannahme ist die Indifferenz für alle Baumgrößen kleiner n.

Für n Perioden gibt es dann wieder zwei Fälle: Der Crash erfolgt im ersten Schritt oder nicht. Wegen der vorausgesetzten Indifferenz ist es für die optimale Lösung egal, wann der Crash nach dem ersten Schritt erfolgt oder ob er gar nicht mehr erfolgt. Sei o.B.d.A. also angenommen, dass der Crash entweder im ersten oder im zweiten Schritt erfolgt. Dann gibt es für den optimalen Nutzen für n Perioden folgende zwei Formeln.

Crash im 1. Schritt:

$$P_n^m(c1) :=$$
$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_1^{(j),nc}\left(\frac{S_2^{(j)}}{S_1^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)$$
$$+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_i^{(j),nc}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)+\ln(X_0)$$

Crash im 2. Schritt

$$P_n^m(c2) :=$$
$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_0^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)+\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_1^{(j),bc}\left(\frac{S_2^{(j)}}{S_1^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$
$$+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_i^{(j),nc}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)+\ln(X_0)$$

Die Formeln unterscheiden sich nur in den ersten beiden Termen. Bezüglich der optimalen Lösung für $\pi_0^{(j)}$ kann analog wie bereits zu Beginn des Beweises gezeigt werden, dass es nur 3 Möglichkeiten gibt: π_0^* ist die optimale Lösung des Problems ohne Crash, die optimale Lösung des Problems mit (sicherem) Crash oder sie ist in Bezug auf das Eintreten eines Crashs indifferent.

Sei angenommen, dass $\pi_0^* = \pi_0^{nc}$, keine Indifferenz. Dann müsste $P_n^m(c2) < P_n^m(c1)$ gelten. Wegen der Optimalität von π_1^{bc} gilt aber

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_1^{(j),bc}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$
$$\geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_0^{(j),nc}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

und folglich $P_n^m(c2) \geq P_n^m(c1)$, was einen Widerspruch ergäbe.

Falls $\pi_0^* = \pi_0^c$ ohne Indifferenz, dann wäre $P_n^m(c1) < P_n^m(c2)$. Dann gälte wegen der Optimalität von π_0^c zunächst

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_0^{(j),c}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$
$$\geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_1^{(j),bc}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

Wegen der Optimalität von $\pi_1^{(j),nc}$ folgt weiter

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_1^{(j),nc}\left(\frac{S_2^{(j)}}{S_1^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)\geq \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_0^{(j),c}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)$$

und somit $P_n^m(c1) \geq P_n^m(c2)$, d.h. dieser Fall führt ebenfalls zum Widerspruch. Folglich muss die Lösung bezüglich des Eintretens eines Crashs indifferent sein. $\square$

Im Folgenden soll noch die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung untersucht werden.

Lemma 48 *Die Funktion*

$$f(\pi) := \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right) + B\right)\right)$$

ist streng konkav.

Beweis: Da $f(\pi)$ stetig ist, ist es ausreichend zu zeigen, dass für alle $\pi \neq \tilde{\pi}$

$$f\left(\frac{\pi + \tilde{\pi}}{2}\right) > \frac{f(\pi) + f(\tilde{\pi})}{2}$$

Es gilt

$$\frac{f(\pi) + f(\tilde{\pi})}{2} - f\left(\frac{\pi + \tilde{\pi}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right) + B\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\pi}^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right) + B\right)}{\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi^{(j)} + \tilde{\pi}^{(j)}}{2}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}} - B\right) + B\right)^2}\right)\right)$$

Weiterhin gilt für jede Kombination von ω_j

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}(\omega_j - B) + B\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\pi}^{(j)}(\omega_j - B) + B\right)}{\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi^{(j)} + \tilde{\pi}^{(j)}}{2}(\omega_j - B) + B\right)^2} \leq 1$$

da

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}(\omega_j - B) + B\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\pi}^{(j)}(\omega_j - B) + B\right)}{\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi^{(j)} + \tilde{\pi}^{(j)}}{2}(\omega_j - B) + B\right)^2} \leq 1$$
$$\iff \left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}(\omega_j - B) + B\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\pi}^{(j)}(\omega_j - B) + B\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi^{(j)} + \tilde{\pi}^{(j)}}{2}(\omega_j - B) + B\right)^2$$
$$\iff 4\left(\sum_{j=1}^{m} \pi^{(j)}(\omega_j - B)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\pi}^{(j)}(\omega_j - B)\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{m} (\pi^{(j)} + \tilde{\pi}^{(j)})(\omega_j - B)\right)^2$$
$$\iff 0 \leq \left(\sum_{j=1}^{m} (\pi^{(j)} - \tilde{\pi}^{(j)})(\omega_j - B)\right)^2$$

Weiterhin gilt für die Wahl $\omega_j = d_j$ falls $\pi^{(j)} < \tilde{\pi}^{(j)}$ bzw. $\omega_j = u_j$ falls $\pi^{(j)} \geq \tilde{\pi}^{(j)}$ sowie wegen $\pi \neq \tilde{\pi}$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} (\pi^{(j)} - \tilde{\pi}^{(j)})(\omega_j - B)\right)^2 > 0$$

Somit folgt insgesamt

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^m \pi^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)\left(\sum_{j=1}^m \tilde{\pi}^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{\pi^{(j)}+\tilde{\pi}^{(j)}}{2}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}-B\right)+B\right)^2}\right)\right)<0$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Lemma 49 *Die Funktion*

$$P_n^{m,nc}(\pi) := \ln(X_0) + \sum_{i=0}^n \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi_i^{(j)}\left(\frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}}-B\right)+B\right)\right)$$

ist streng konkav. Weiterhin ist $P_n^{m,c}$ streng konkav.

Beweis: $P_n^{m,nc}$ ist streng konkav aufgrund Lemma 48 und da Summen streng konkaver Funktionen ebenfalls streng konkav sind.

$P_n^{m,c}$ ist streng konkav, da man analog Lemma 48 zeigen kann, dass

$$f^C(\pi) := \mathbb{E}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^m \pi^{(j)}\left(\frac{S_1^{(j)}}{S_0^{(j)}}(1-C)-B\right)+B\right)\right)$$

streng konkav ist. □

Satz 50 *In einem Binomialmodell mit drohendem Crash von maximaler Höhe C und m Aktien gilt: Falls*

$$\sum_{j=1}^m \pi^{(j),nc} > 0 \text{ und } \sum_{j=1}^m \pi^{(j),c} < 0$$

dann gilt: Die optimalen Aktienanzahlen sind indifferent bzgl. eines Crashs. Weiterhin existiert eine eindeutige Lösung für die optimalen Aktienanzahlen.

Beweis: Die Indifferenz als notwendige Voraussetzung der Optimalität wurde bereits in Satz 47 gezeigt.

Die Existenz ist trivial, da z.B. $\pi_i^{(j)} \equiv 0$ eine zulässige Lösung darstellt.

Die Eindeutigkeit folgt aus der in Lemma 49 gezeigten strengen Konkavität der beiden Funktionen $P_n^{m,nc}$ und $P_n^{m,c}$: Die optimale Lösung wird gesucht für $g := \min\{P_n^{m,nc}, P_n^{m,c}\}$. Dieses ist ebenfalls streng konkav, da

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi+\tilde{\pi}}{2}\right) &= \min\left\{P_n^{m,nc}\left(\frac{\pi+\tilde{\pi}}{2}\right), P_n^{m,c}\left(\frac{\pi+\tilde{\pi}}{2}\right)\right\}\\
&> \frac{1}{2}\min\{P_n^{m,nc}(\pi)+P_n^{m,nc}(\tilde{\pi}), P_n^{m,c}(\pi)+P_n^{m,c}(\tilde{\pi})\}\\
&\quad (\text{für } \pi \neq \tilde{\pi})\\
&\geq \frac{1}{2}\min\{\min\{P_n^{m,nc}(\pi), P_n^{m,c}(\pi)\}+\min\{P_n^{m,nc}(\tilde{\pi}), P_n^{m,c}(\tilde{\pi})\}, P_n^{m,c}(\pi)+P_n^{m,c}(\tilde{\pi})\}\\
&= \frac{1}{2}\min\{P_n^{m,nc}(\pi), P_n^{m,c}(\pi)\}+\min\{P_n^{m,nc}(\tilde{\pi}), P_n^{m,c}(\tilde{\pi})\}\\
&= \frac{g(\pi)+g(\tilde{\pi})}{2}
\end{aligned}$$

Da g streng konkav ist und an den Rändern gegen $-\infty$ läuft, hat es ein eindeutiges Maximum. □

6.8 Zwischenfazit

Im Rahmen des Worst Case Modells wurden mehrere Fälle untersucht - ein und mehrere möglich Crashs, eine und mehrere Aktien, konstante oder sich ändernde Marktbedingungen nach dem Crash. Dabei wurde (außer für den Fall der optimalen konstanten Lösung) stets gezeigt, dass die optimale Strategie stets indifferent in Bezug auf das Auftreten eines Crashs ist. Durch diese Bedingung kann die optimale Strategie auch mit einfachen numerischen Mitteln berechnet werden.

Im Fall der optimalen konstanten Lösung konnte man weiterhin zeigen, dass der Unterschied im optimalen Endvermögen zwischen der konstanten und veränderlichen optimalen Lösung davon abhängt, ob es auch unter einem drohenden Crash zulässig ist, vor dem Crash die optimale Strategie im Fall ohne Crash zu verwenden, ohne dass dann bei Eintreten eines Crashs das Vermögen negativ würde. Ist dies der Fall, d.h. kann man vor dem Crash die optimale Strategie ohne Crash verwenden, dann konvergiert der Unterschied mit steigender Größe des Binomialbaums (also im Zeitverlauf) gegen 0, ansonsten gegen $-\infty$.

Kapitel 7

Ergebnis

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Ansätze der Portfoliooptimierung untersucht und auf das Binomialmodel übertagen.

Zunächst wurde die Optimierung im Fall mit Transaktionskosten (fix und variabel in Abhängigkeit von der Anzahl der gekauften Aktien) betrachtet. Hierbei wurde gezeigt, dass eine optimale Lösung für große n (wobei n die Tiefe des Binomialbaums bezeichnet) nicht mehr mit numerisch vertretbarem Aufwand ermittelbar ist, da für die optimale Lösung ein Problem mit 2^n Variablen zu lösen ist. Allerdings wurde eine Handelsstrategie dargestellt, die zumindest besser ist als einfache Buy-and-hold-Strategien. Weiterhin wurde gezeigt, dass die mittels des Binomialmodells gefundenen optimalen Aktienanzahlen bei geeigneter Wahl der Parameter des Binomialbaums gegen die optimalen Aktienanzahlen im Black-Scholes-Modell konvergieren.

Weiter wurde das Morton-Pliska-Modell analysiert, das sich dadurch auszeichnet, dass die in diesem Modell entstehenden Transaktionskosten als ein fester Prozentsatz des jeweils aktuellen Gesamtvermögens berechnet werden. Für dieses lässt sich im Binomialmodell eine geschlossene optimale Lösung angeben. Wie in [5] wurde dann analysiert, inwieweit man die aus diesem Modell gegebene optimale Handelsstrategie auf die Realität, d.h. auf eine Situation mit variablen und fixen Kosten, übertragen kann. Im Fall mit variablen Kosten ist dies möglich, d.h. unter geeigneter Parameterwahl sind die mit dieser Handelsstrategie in der Realität entstehenden Kosten kleiner als im Modell. Für den Fall mit fixen Kosten kann man aufgrund der Struktur der optimalen Lösung jedoch zeigen, dass ein Übertag der optimalen Morton-Pliska-Handelsstrategie auf die Situation mit fixen Kosten nicht möglich ist.

Das Worst-Case-Modell setzt sich mit der Situation auseinander, dass jederzeit ein Crash auftreten kann, wobei weder feststeht, wann oder ob ein Crash eintritt, noch in welcher Höhe. Auch Verteilungsannahmen hierüber sind nicht bekannt. Analog zum zeitstetigen Modell kann man auch hier optimale Lösungen bzw. Algorithmen zur Ermittlung optimaler Lösungen ableiten. Darüber hinaus kann man zeigen, dass sich das Vorgehen auf das Problem mit mehreren Aktien übertragen lässt.

Die Vorteile des Binomialmodells liegen dabei darin, dass optimale Aktienanzahlen bzw. Handelsstrategien in der Regel mit geringerem numerischen Aufwand berechenbar sind als im zeitstetigen Modell. Aufgrund der gezeigten Konvergenz gegen das zeitstetige Modell sind die Resultate aus dem Binomialmodell darüber hinaus auf das stetige Modell übertragbar. Dabei kann man das Binomialmodell je nach Wahl der Parameter gegen verschiedene zeitstetige Modelle konvergieren lassen (siehe z.B. [1]). Insgesamt sind also die Resultate im Binomialmodell einfacher zu berechnen, die Resultate können aber trotzdem durch geeignete Parameterwahl an verschiedene zeitstetige Modelle angenähert werden.

Referenzen

[1] J. C. Cox, S. A. Ross und M. Rubinstein: *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7: 229-263, 1979

[2] R. Korn und E. Korn: *Optionsbewertung und Portfoliooptimierung*, Vieweg, Wiesbaden, Germany, 2nd edition, 2001

[3] R. Korn und S. Müller: *The decoupling approach to binomial pricing of multi-asset options*, Journal of Computational Finance 12, 1 - 30, 2009

[4] R.J. Rendleman und B.J. Bartter: *Two-state option pricing*, The Journal of Finance 34(5), 1093 - 1110, 1979

[5] R. Korn: *Realism and practicality of transaction cost approaches in continuous-time portfolio optimisation: the scope of the Morton-Pliska approach*, Mathematical Methods of Operations Research (2004) 60: 165-174

[6] A.J. Morton, S.R. Pliska: *Optimal portfolio management with fixed transaction costs*, Mathematical Finance 5(4): 337-356, 1995

[7] S.R. Pliska: *Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models*, Blackwell Publishing, 1997

[8] R. Korn, P. Wilmott: *Optimal portfolios under the threat of a crash*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 5(2), 171-187, 2002

Wissenschaftlicher Werdegang

Oktober 2000 bis Dezember 2004	Studium Wirtschaftsmathematik an der TU Kaiserslautern, Abschluss mit Diplom in 12/2004
Mai 2004 bis Dezember 2004	wissenschaftliche Hilfskraft am Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern
seit Januar 2005	Unternehmensberatung d-fine GmbH, Schwerpunkt Banken und Finanzdienstleister
seit April 2013	Doktorandin im Fachbereich Mathematik an der TU Kaiserslautern, Betreuer Prof. Dr. Ralf Korn

Scientific Career

October 2000 until December 2004	Studies in business mathematics at the TU Kaiserslautern, finished with degree "Diplom" (equivalent to master) in 12/2004
May 2004 until December 2004	Research assistant at the Fraunhofer Institut for Industrial Mathematics in Kaiserslautern
since January 2005	Consulting firm d-fine GmbH, main focus banks and financial service providers
since April 2013	Ph.D. student at the mathematics department at the TU Kaiserslautern, doctoral thesis supervisor is Prof. Dr. Ralf Korn