

Zinsoptimiertes Schuldenmanagement

Christoph Peters

Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern zur
Verleihung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium, Dr. rer. nat.) genehmigte Dissertation.

1. Gutachter: Prof. Dr. Ralf Korn
2. Gutachter: Prof. Dr. Holger Kraft

Datum der Disputation: 17. Oktober 2014

D 386

Danksagung

Die Herausforderungen des Schuldenmanagements aus wissenschaftlicher Sicht zu untersuchen und zugleich bei der Deutschen Finanzagentur in der Praxis zu meistern, war eine sehr spannende Erfahrung und bot viele interessante Einblicke. Daher möchte ich mich bei allen, die mir dies ermöglicht und mich auf meinem Weg begleitet haben, bedanken.

In erster Linie gilt mein Dank Prof. Dr. Ralf Korn für seine jahrelange unablässige und geduldige Unterstützung. Er stand mir in vielen entscheidenden Momenten immer wieder mit wertvollem Rat zur Seite.

Für die vielen Diskussionen und konstruktiven Anregungen gilt ein besonderes Dankeschön all meinen Kollegen bei der Deutschen Finanzagentur. Insbesondere möchte ich mich bei Dr. Andreas Ricker bedanken, meine Promotion in dieser Konstellation ermöglicht und gefördert zu haben, und bei Dr. Michael Busch, Dr. Gerrit Handrich, Dr. Michael Meyer und Dr. Roland Seydel.

Ein herzlicher Dank gilt meiner Familie für ihre stetige Anteilnahme und den großen Rückhalt während der letzten Jahre, ganz besonders danke ich Lisa für ihre aufopferungs- und liebevolle Unterstützung während der gesamten Zeit.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Zinsmodell und Finanzinstrumente	11
2.1. Zinsmodell	12
2.1.1. Grundlegende Definitionen	12
2.1.2. Das Modell	13
2.1.3. Lineare Transformation	20
2.1.4. Eigenschaften des Modells	22
2.2. Beispiele	23
2.2.1. Parameter des Zinsmodells	23
2.2.2. Stochastische Entwicklung der Zinssätze	25
2.3. Weitere Finanzinstrumente	27
2.3.1. Sliding- und Rolling-Horizon-Bonds	27
2.3.2. Einfacher und selbstfinanzierender Perpetual-Bond	30
2.3.3. Sensitivität der Instrumente	33
3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios	37
3.1. Modellierung eines Bond-Portfolios	37
3.2. Steuerung eines Portfolios durch Sensitivitäten	41
3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios	45
3.3.1. Lösung des Optimierungsproblems	46
3.3.2. Interpretation der optimalen Lösung	54
3.3.3. Übergang zu konkreten Instrumentenspektren	54
3.3.4. Alternativer Lösungsweg	56
3.3.5. Interpretation der Lösung aus dem zweiten Ansatz	58
3.4. Beispiele	59
4. Modellierung eines Schuldenportfolios	65
4.1. Perpetualkosten als Kostenmetrik	67
4.2. Modellierung externer Zahlungsströme	71
4.2.1. Zahlungstypen des Schuldenportfolios	71
4.2.2. Modellierung des Primärsaldos	72

Inhaltsverzeichnis

4.3. Eigenschaften der Perpetualkosten	76
4.3.1. Vergleich mit anderen Kostenmetriken	76
4.3.2. Perpetualkosten und Sensitivitäten	77
4.3.3. Risiko eines Schuldenportfolios	78
5. Optimierung eines Schuldenportfolios	81
5.1. Nutzenfunktion im Schuldenfall	81
5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion	83
5.2.1. Lösung des Optimierungsproblem	84
5.2.2. Interpretation der Lösung	88
5.2.3. Übergang zu konkretem Instrumentenspektrum	90
5.2.4. Beispiele	92
5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse	96
5.3.1. Lösung des Optimierungsproblem	97
5.3.2. Interpretation der Lösung	102
5.3.3. Beispiel	105
6. Fazit und Ausblick	107
A. Stochastische Kontrolle	115
A.1. Existenz- und Eindeutigkeitsätze	115
A.2. Verifikations-Theoreme	116
A.3. Weitere Resultate	120
B. Approximation von $\xi(t)$	123
C. Markowitz: Renditemaximierung vs. Kostenminimierung	127

Abbildungsverzeichnis

2.1. Affiner Term $A(\tau)$	24
2.2. Basisfunktionen $M(\tau)$ und $L(\tau)$	25
2.3. Stochastische Realisationen von Zinskurven	26
2.4. Stochastische Entwicklung der 10J-Zeroraten	26
3.1. Vermögensprozess $X(t)$ bei Anlage mittels Shortrate	61
3.2. Vermögensprozess $X(t)$ bei Anlage mittels $P(t, 1)$ -Bond	62
3.3. Vermögensprozess $X(t)$ bei risikoarmer, optimaler Anlagestrategie	62
3.4. Vermögensprozess $X(t)$ bei risikoreicher, optimaler Anlagestrategie	63
4.1. Perpetualkosten als gleichmäßiger Zahlungsstrom	69
5.1. Nutzenfunktionen im Schuldenfall	83
5.2. Gewichtung verschiedener Portfolioprozesse	94
5.3. Entwicklung der Perpetualkosten für den Geldmarktbond	95
5.4. Entwicklung der Perpetualkosten für den Perpetual	95
5.5. Entwicklung der Perpetualkosten für eine risikoarme optimale Strategie	96
5.6. Entwicklung der Perpetualkosten für eine risikoreiche optimale Strategie	96
5.7. Entwicklung der Perpetualkosten bei Berücksichtigung einer Kostenobergrenze	106
B.1. Stochastische Entwicklung von $\xi_1(u)$ über ein Jahr.	123
B.2. Stochastische Entwicklung von $\xi_2(u)$ über ein Jahr.	124
B.3. Stochastische Entwicklung von $\xi_3(u)$ über ein Jahr.	124

Abkürzungsverzeichnis

ARA	Maß für die absolute Risikoaversion
DFA	Deutsche Finanzagentur
GG	Grundgesetz
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman(-Gleichung)
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
ODE	Gewöhnliche Differentialgleichung
PDE	Partielle Differentialgleichung
RHB	Rolling-Horizon-Bond
RRA	Maß für die relative Risikoaversion
SDE	Stochastische Differentialgleichung
$f(t, T)$	Instantane Forwardrate bei Fälligkeit T
$z(t, T)$	Annualisierte Zerorate mit Fälligkeit T
$P(t, T)$	Zero-Bond mit Fälligkeit T
$M(\tau)$	(Exponentielle) Basisfunktionen des Zinsmodells
$A(\tau)$	Affiner Term des Zinsmodells
σ	Volatilität der Zinsentwicklung
b	Marktpreis des Risikos
$u(t)$	Faktoren in der Zinsentwicklung, stochastischer Prozess
$p^\infty(t)$	Preis des einfachen Perpetuals, stochastischer Prozess
$p^\infty(u)$	Preis des einfachen Perpetuals, Funktion in Abhängigkeit von u
$B(t)$	Geldmarktbond, stochastischer Prozess
$r(t)$	Shortrate, Rate des Geldmarktbonde, stochastischer Prozess
$r^\infty(t)$	Perpetualrate, stochastischer Prozess
$X(t)$	Vermögensprozess
$\pi(t)$	Portfolioprozess
$\psi(t)$	Sensitivitätsprozess
$\psi^\infty(t)$	Sensitivität des Perpetuals, stochastischer Prozess und/oder Kontrollvariable
$\psi^\infty(u)$	Sensitivität des Perpetuals, Funktion in Abhängigkeit von u

$D(t)$	Schuld, stochastischer Prozess
$K(t)$	Perpetualkosten, stochastischer Prozess
$\Delta(t)$	absolute Sensitivität, bemessen gegenüber der des Perpetuals, stochastische Kontrollvariable
$f. s.$	fast sicher
$\mathbf{tr}(A)$	Spur der Matrix A
$\underline{1}$	Vektor mit 1 als Komponenten
$\underline{0}$	Vektor mit 0 als Komponenten
x^\top	Transponierte von x
x^{-1}	Inverse von x
$x^{-\top}$	Inverse der Transponierten von x

1. Einleitung

Die Staatsverschuldung ist in den vergangenen Jahren weltweit von einem Höchststand zum nächsten geschnellt. Innerhalb der Europäischen Union betrug der Schuldenstand Ende des Jahres 2012 bereits 85,1% des Bruttoinlandsprodukts; dies entspricht einem Volumen von 11 032 Mrd. € und einem Anstieg um etwa 50 % seit 2007 (eurostat, 2014). In Deutschland hatte allein der Bund¹ zum gleichen Zeitpunkt Schulden in Höhe von 1 095 Mrd. € und musste daher in 2012 allein für die Begleichung von Zinszahlungen 35,5 Mrd. € aufwenden (DFA, 2012, 2013). Dies entspricht etwa 11 % aller Ausgaben des Bundeshaushalts desselben Jahres und es ist der zweitgrößte Einzeltitel des Haushalts.

Ein effizienteres Schuldenmanagement kann daher einen wertvollen Beitrag zur Konsolidierung der Haushalte leisten. Schon kleine Effizienzsteigerungen könnten, gehebelt durch die Größe der Staatsverschuldung, zu erheblichen Entlastungen führen. So würde bereits eine Reduktion der durchschnittlichen Zinskosten um 0,1 Prozentpunkte zu Einsparungen im Bundeshaushalt von etwa 1,1 Mrd. € p.a. führen.

Das zinsoptimierte Schuldenmanagement verfolgt das Ziel, eine möglichst effiziente Abwägung zwischen den erwarteten Finanzierungskosten einerseits und möglichen Risiken für den Haushalt andererseits zu finden.

Untersucht wurde diese Problemstellung bereits durch oder in Zusammenarbeit mit einigen staatlichen Schuldenmanagern². Umfangreiche Analysen hierzu stammen von der kanadischen Zentralbank (Bolder (2002, 2003, 2008), für einen Überblick siehe Bolder und Deeley (2011)). Ausgangspunkt ihres Optimierungsansatzes ist das jeweils aktuelle Schuldenportfolio, wie es durch die tatsächliche Kreditaufnahme in der Vergangenheit entstanden ist. Dieses Portfolio wird dann über einen gegebenen Betrachtungszeitraum, bspw. zehn Jahre, in die Zukunft gerollt. Auslaufende Bonds werden dabei mittels einer zu wählenden Strategie anschlussfinanziert. Eine solche Strategie gibt *konstante* Anteile vor, mit der die

¹inkl. seiner Sondervermögen

²Das staatliche Schuldenmanagement ist dabei sehr unterschiedlich aufgestellt. Es reicht von Einheiten, die dem jeweiligen Finanzministerium oder der Zentralbank unterstellt sind, bis hin zu eigenständigen Organisationen, wie der *Deutschen Finanzagentur* in der Bundesrepublik oder dem *Debt Management Office* in Großbritannien.

1. Einleitung

Schuld in Zukunft fällig werdender Bonds über verschiedene, neue Instrumente refinanziert wird. Zulässig ist dabei ein weites Spektrum von kurzlaufenden Zero-Bonds über langlaufende nominalverzinsliche Kupon-Bonds bis hin zu inflationsindexierten Bonds. Die Entwicklung des Portfolios für eine bestimmte Strategie wird mit einer Monte-Carlo-Simulation kombiniert, die anhand eines Zinsmodells unterschiedliche Zinspfade generiert. Daraus ergibt sich eine Verteilung von Zinskosten über den definierten Betrachtungszeitraum. Basierend auf dieser Verteilung werden Kennziffern wie der Mittelwert der Zinskosten sowie deren Standardabweichung oder auch andere Risikomaße errechnet. Durch Variation der Strategie und anschließende Neuberechnung der Zinskostenverteilung kann dann eine optimale Strategie in den genannten Kennziffern bestimmt werden.³ So wird zum Beispiel die Strategie identifiziert, welche bei maximal erlaubter Standardabweichung und eventuell weiteren Nebenbedingungen, den Mittelwert der Zinskosten während des Betrachtungszeitraums minimiert.

Ein ähnliches Vorgehen wird auch von Adamo et al. (2004) (Italien) und Abdel-Jawad (2013) (Großbritannien) verfolgt. Insbesondere wird wieder die Verteilung der während des Analysezeitraums angefallenen Zinskosten bzw. daraus errechnete Größen wie Mittelwert und Standardabweichung optimiert. Im Unterschied zu Bolder und Deeley (2011) wird jedoch zu jedem Zeitpunkt der diskreten Entwicklung eine Anpassung der Strategie zugelassen. Die Anteile, mit denen eine fällig werdende Schuld refinanziert wird, sind also nun nicht mehr konstant. Als Verfahren zur Bestimmung der optimalen Lösungen kommt in Adamo et al. (2004) *Model Predictive Control* und in Abdel-Jawad (2013) *Stochastic Programming* zum Einsatz.

Wir werden in dieser Dissertation auf der Suche nach dem zinsoptimierten Schuldenmanagement einen etwas anderen Weg beschreiten, ohne natürlich die grundsätzliche Idee aus den Augen zu verlieren, die Finanzierungskosten eines Staates, bei gleichzeitig begrenzten Risiken, zu senken. Dafür schlagen wir erstmals die Brücke zwischen den Problemstellungen des Schuldenmanagements und den Methoden der *zeitkontinuierlichen, dynamischen Portfoliooptimierung*. Denn diese bietet bereits eine Vielzahl etablierter Methoden zur Lösung von unterschiedlichsten Portfolioproblemen, die wir auch für das Schuldenmanagement erschließen wollen.

Die Begründung der modernen Portfoliooptimierung geht auf das Werk von Markowitz (1952) zurück. Die Verwendung seiner E-V-Regel, die Maximierung

³Da in jedem Optimierungsschritt eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden müsste, wäre dieses Vorgehen sehr rechenintensiv. Daher werden in Bolder und Deeley (2011) auch Möglichkeiten aufgezeigt, die Optimierung zu beschleunigen.

der erwarteten Rendite bei gleichzeitiger Beschränkung ihrer Varianz, ist heute weit verbreitet. Untersucht wurden zunächst jedoch ausschließlich „Buy-and-Hold“-Strategien⁴. Weitere Meilensteine sind daher die Arbeiten zur dynamischen Portfoliooptimierung von Merton (1969, 1971), die auch ein zeit- und zustandsabhängiges Portfoliomanagement zuließen. Seine Arbeiten beruhen auf dem Konzept der *stochastischen Kontrolle*, welches wir auch in dieser Dissertation verwenden werden. Zentrales Element ist bei diesem Verfahren die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der sogenannten *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (Abk.: HJB-Gleichung). Ein alternativer Ansatzpunkt zur Lösung dynamischer Portfolioprobleme ist die sogenannte *Martingalmethode*, welche in Pliska (1986) beschrieben wird.

Die vorgenannten Arbeiten sind auf Aktienportfolios zugeschnitten und gehen von einem konstanten Zins für die risikolose Anlagemöglichkeit aus. Eine solche Annahme ist bei Nutzung von stochastischen *Zinsmodellen* nicht mehr nötig. Zu diesen gibt es je nach Einsatzzweck eine Fülle von verschiedensten Ansätzen und Untersuchungen. Für eine gute Übersicht über die Standardmodelle verweisen wir auf das Buch von Brigo und Mercurio (2006). Im Rahmen dieser Arbeit verwenden wir eine mehrdimensionale Erweiterung des Modells von Vasicek (1977); eine solche wurde erstmals von Langetieg (1980) beschrieben. Sie gehört zur Klasse der affin-linearen Modelle, welche insbesondere von Duffie und Kan (1996) systematisiert wurde. Diese sind im Rahmen der Portfoliooptimierung besonders gut geeignet, da sie explizite Lösungen ermöglichen. Eine detaillierte Beschreibung des hier genutzten affin-linearen Mehrfaktormodells findet sich in dem gemeinsamen Arbeitspapier von Henseler, Peters, und Seydel (2013).

Die Optimierung von *Bondportfolios* ist erst durch die Einbeziehung solcher stochastischer Zinsmodelle sinnvoll. Als einer der ersten erweiterte Sørensen (1999) die Modelle um stochastische Zinssätze und griff dabei auf die Martingalmethode zurück. In Brennan und Xia (2000) wird die Lösung mittels stochastischer Kontrolle bestimmt und auf ein affines Zwei-Faktor-Zinsmodell erweitert. Wir werden in dieser Dissertation zumeist dem Vorgehen von Korn und Kraft (2002) folgen. Neben der Lösung der HJB-Gleichung wird dort erstmals für den Fall stochastischer Zinssätze auch ein zugehöriges Verifikationstheorem bewiesen. Erst ein solches garantiert, dass die gefundene Lösung tatsächlich optimal ist. Wir werden ihre Ergebnisse, erzielt für eindimensionale Zinsmodelle, in der Dissertation auf das affin-lineare Mehrfaktormodell übertragen. Lösungen der

⁴Bei „Buy-and-Hold“-Strategien wird die Zusammensetzung des Portfolios zu Beginn einmalig festgelegt und dann bis zum Optimierungshorizont nicht mehr angepasst. Portfoliooptimierungen auf dieser Basis sind also nur Ein-Schritt-Optimierungen.

1. Einleitung

HJB-Gleichung für allgemeinere Zinsmodelle mit zinsabhängiger Drift finden sich in Liu (2007).

Zumindest bei Portfolio Problemen mit einfachen Nutzenfunktionen⁵, bietet die dynamische Portfoliooptimierung oftmals explizite Lösungen an. Dadurch ergibt sich ein direkter Zusammenhang zwischen den gewählten Parametern des stochastischen Modells und der optimalen Lösung. Dies ermöglicht es, die entsprechenden Abhängigkeiten deutlich besser zu verstehen und einzuordnen als in simulationsbasierten Optimierungsverfahren. Gerade in der Praxis ist ein solches tiefgreifendes Verständnis, *wieso* bestimmte Lösungen entstehen, sehr bedeutsam, da mögliche systematische Fehlsteuerungen so eher erkannt werden können. Dies gilt auch, obwohl die optimalen Lösungen unbeschränkter Optimierungsprobleme wegen zu stark gehebelter Strategien oftmals nicht umsetzbar sind.

Ein grundsätzliches Konzept bei der dynamischen Portfoliooptimierung ist der *selbstfinanzierende* Vermögensprozess. Dies bedeutet, dass sich *alle* Wertveränderungen, die durch die stochastische Entwicklung einzelner Instrumente entstehen, auch im Portfolio widerspiegeln. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass wir *alle* relevanten Kostenbeiträge berücksichtigen können. In den zuvor beschriebenen Studien zum Schuldenmanagement ist dies mitunter nicht der Fall. Dort werden nur die Zinskosten bis zum Optimierungshorizont berücksichtigt. Mögliche Kostenunterschiede in der Zukunft, etwa durch deutlich unterschiedliche Refinanzierungskosten, fließen nicht in die Bewertung einer Strategie ein. Dies bedeutet, dass unter Umständen Strategien mit kleinen Kostenvorteilen während des Betrachtungszeitraums, aber mit deutlichen Mehrkosten in der Zukunft, bevorzugt werden könnten.

Im kanadischen Modell (Bolder und Deeley, 2011) ist der beschriebene Effekt tendenziell klein, da nur konstante Strategien berücksichtigt werden und die Kosten auf einem relativ langen Zeitraum ausgewertet werden. Ein grundsätzlich anderes Verhalten der Finanzierungskosten nach dem Betrachtungszeitraum sollte eher nicht auftreten.

Sind aber auch zeitabhängige Strategien zulässig wie in Adamo et al. (2004) oder Abdel-Jawad (2013), so verschärft sich dieses Problem und es kann zu deutlichen Fehleinschätzungen kommen. Denn dann werden, bei Annäherung an den Betrachtungshorizont, Strategien präferiert, die Kosten hinter den Horizont verschieben; die also zu Beginn äußerst attraktiv scheinen, aber dabei eigentlich nur davon profitieren, dass in der Zukunft deutliche Mehrbelastungen auftreten.

⁵Nutzenfunktionen spiegeln die grundsätzliche Risikoaversion eines Portfoliomanagers wieder.

Die dynamische Portfoliooptimierung könnte somit zu einem Erkenntnisgewinn führen. Sie lässt sich jedoch nicht ohne weiteres auf das Schuldenmanagement anwenden. Erstens steht bisher stets der Barwert bzw. das Vermögen als *die* zentrale Größe im Mittelpunkt der Überlegungen. Diese Fokussierung auf den Barwert ist für das Schuldenmanagement jedoch unangemessen, vielmehr sollten hier die Finanzierungskosten die Hauptrolle spielen. Denn das Schwankungsverhalten des Barwerts stellt kein sinnvolles Risikomaß für einen Staatshaushalt dar. Sehr kurze Finanzierungen unterliegen beispielsweise kaum Barwertschwankungen, führen jedoch zu stark schwankenden Zinskosten für den Haushalt. Sehr lange Finanzierungen hingegen schwanken im Barwert sehr stark, führen aber zu relativ stabilen und vorhersehbaren Zinskosten für den Haushalt.

Zweitens basieren die Portfolios in der Literatur zumeist auf sehr wenigen, einfachen Instrumenten, wie Aktien, einem Geldmarktbond und/oder Zero-Bonds. Einfach bedeutet in diesem Kontext, dass die Instrumente nicht während des Betrachtungshorizontes fällig werden und auch keine Dividenden oder Kupons die Modellierung erschweren; wenig bedeutet, dass es nur genau so viele Risiko-behaftete Instrumente gibt, wie es auch tatsächliche Risikofaktoren gibt. Auch diese Annahmen über die Zusammensetzung eines Portfolios sind für das Schuldenmanagement eher ungeeignet, da die tatsächliche Finanzierung über viele verschiedene Instrumente, hauptsächlich Kupon-Bonds mit unterschiedlichen Laufzeiten, erfolgt. Betrachten wir daher, wie wir mit diesen beiden Schwierigkeiten umgehen werden.

Wie lassen sich Finanzierungskosten und -risiken messen und modellieren?

Die zentrale Größe beim Schuldenmanagement sind die Finanzierungskosten, die durch das Schuldenportfolio verursacht werden. Grundsätzlich sind zu jedem Zeitpunkt t zwei Ausprägungen möglicher Zinskosten zu unterscheiden. Zum einen alle in der Vergangenheit bis zum Betrachtungszeitpunkt t geleisteten tatsächlichen Zinszahlungen wie Kupon- oder Disagio-Zahlungen; zum anderen alle in der Zukunft liegenden Zinszahlungen inklusive möglicher Kosten für notwendige Refinanzierungsgeschäfte. Werfen wir zunächst einen Blick auf die zukünftigen Zinskosten; um sie messen bzw. bewerten zu können, werden wir die sogenannten *Perpetualkosten* einführen. Diese beschreiben den wirtschaftlich fairen, geglätteten Zinsfluss in der Zukunft und bündeln somit die Information

1. Einleitung

über diese Kosten in einem Wert:

$$\int_t^\infty K(t) P(t, s) ds \stackrel{!}{=} \sum_{s \in \{s | t_s > t\}} c_s P(t, t_s) \quad (1.1)$$

Auf der rechten Seite finden sich die diskreten, möglicherweise sehr unregelmäßigen zukünftigen Zahlungsverpflichtungen c_s , die jeweils zum Zeitpunkt t_s anfallen. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass diese deterministisch seien. Diese Zahlungen c_s werden zum Zeitpunkt t mit einem äquivalenten konstanten Zahlungsstrom $K(t)$, den Perpetualkosten, gleichgesetzt. Dabei ist die zur Mittelung verwendete Gewichtungsfunktion $P(t, \cdot)$ gerade der Diskontfaktor bzw. Zero-Bond-Preis zum Zeitpunkt t mit der Laufzeit s bzw. t_s . Diese Wahl der Mittelung stellt die Wirtschaftlichkeit dieser fiktiven Umschichtung sicher.

Bei der Bewertung der Qualität bzw. Güte eines Portfolios sind jedoch auch die vergangenen Kosten zu berücksichtigen. Die Zweiteilung in vergangene und zukünftige Kosten wirft aber die Frage auf: Wie ist die Belastung des Haushalts durch die vergangenen Zinskosten gegenüber der durch die zukünftigen zu gewichten? Wir werden diese Frage beantworten, indem wir unterstellen, dass die vergangenen Zinskosten nicht durch den Haushalt beglichen, sondern refinanziert werden. Somit erhöhen die vergangenen Zinskosten den Barwert des Schuldenportfolios und damit auch die zukünftigen Perpetualkosten. Diese bieten dadurch zu jedem Zeitpunkt eine vollumfängliche Beschreibung *sämtlicher* Kosten in einer einzigen Messgröße.

Zudem zeigt sich, dass die Volatilität der Perpetualkosten bzw. allgemeiner deren Unsicherheit ein relevantes Risikomaß für den Staatshaushalt darstellt. Denn je langfristiger und somit risikoärmer sich ein Staat finanziert, je mehr zukünftige Zinskosten also bereits determiniert sind, desto weniger sensitiv reagieren die mit einer solchen Finanzierung verknüpften gemittelten Zinskosten, die Perpetualkosten, auf mögliche Zinsbewegungen.

Die Perpetualkosten sind also eine sinnvolle Metrik für die Betrachtung der Finanzierungskosten eines Schuldenportfolios. Sie lassen sich modellieren, indem wir den Zusammenhang mit dem Portfoliobarwert herstellen: Die rechte Seite in (1.1) ist gerade die Summe über alle abgezinsten Zahlungsverpflichtungen $c_s P(t, t_s)$ des Portfolios. Per definitionem ist dies der Barwert des Schuldenportfolios, da wir deterministische c_s vorausgesetzt haben. Bezeichnen wir diesen Barwert zum Zeitpunkt t mit $D(t)$, so ergibt sich der folgende Zusammenhang mit den Perpetualkosten:

$$K(t) = \frac{1}{\int_t^\infty P(t, s) ds} D(t) \quad (1.2)$$

Für die Modellierung des Barwerts gibt es mit dem *selbstfinanzierenden Vermögensprozess* in der klassischen dynamischen Portfoliooptimierung bereits ein etabliertes Konzept. Da wir annehmen, dass alle während des Betrachtungszeitraums anfallenden Zinskosten stets refinanziert werden, können wir nach genau diesem Konzept auch einen stochastischen Prozess $D(t)$ für die Modellierung der Schuld bilden. Und wegen des Zusammenhangs in (1.2) ergibt sich daraus dann auch $K(t)$ als stochastischer Prozess.

Die Perpetualkosten können uns somit als *das* zentrale Element beim zinsoptimierten Schuldenmanagement dienen, ganz ähnlich wie das Vermögen bei der optimalen Geldanlage.

Wie lassen sich Finanzierungsstrategien beschreiben?

Wir haben mit den Perpetualkosten ein Modell der Finanzierungskosten entwickelt, das sich auf die Modellierung eines selbstfinanzierenden Portfolios zurückführen lässt. Bleibt zu klären, wie dieses Portfolio konkret ausgestaltet werden sollte, welche Finanzierungsinstrumente zur Verfügung stehen und wie diese kontrolliert bzw. gesteuert werden sollten.

Im Schuldenmanagement steht eine Bandbreite an verschiedenen Instrumenten bereit: kurzlaufende Zero-Bonds im Geldmarkt mit Fälligkeiten bis zu etwa einem Jahr, Kupon-Bonds mit Laufzeiten ab zwei Jahren, aber möglicherweise auch Derivate wie Swaps, die nicht direkt zur Finanzierung sondern ausschließlich zur Steuerung des Portfolios dienen. In der dynamischen Portfoliooptimierung werden üblicherweise zu jedem Zeitpunkt t die Wertanteile kontrolliert, mit denen die verschiedenen Instrumente zur Finanzierung der Gesamtschuld $D(t)$ beitragen. Es werden also immer alle existierenden Instrumente betrachtet und nicht nur die in t neu emittierten Bonds. Die Menge der Instrumente ändert sich im Zeitablauf jedoch ständig, da Anleihen fällig werden können und andere vielleicht noch gar nicht aufgelegt sind. Dies erschwert eine Kontrolle über Wertanteile deutlich, da eine Vielzahl von Nebenbedingungen zu beachten wäre. Die Beschränkung auf nur wenige, einfache Instrumente, die über den ganzen Betrachtungszeitraum hinweg existieren, würde das Modell zwar handhabbar machen, ist jedoch wenig realistisch.

Die Fülle an Möglichkeiten, mit denen man sich als Portfoliomanager konfrontiert sieht, ist etwas überraschend. Denn tatsächlich werden ja *alle* Instrumente durch ein einziges, zwar mehr- aber doch niedrig-dimensionales, stochastisches Zinsmodell getrieben. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass der eigentliche Gestaltungsspielraum durch viel weniger Faktoren bestimmt wird.

1. Einleitung

Statt uns auf konkrete Instrumente zu beziehen, nutzen wir *Sensitivitäten* als abstrakte Steuerungsgrößen. Diese beschreiben die Abhängigkeit einzelner Instrumente oder auch ganzer Portfolios von gewissen Zinsbewegungen und genügen bereits, um die Veränderung der Barwerte und damit auch der Perpetualkosten bei Eintreten dieser Zinsbewegungen zu beschreiben. Egal wie viele unterschiedliche Anleihen wir aus dem Zinsmodell ableiten und in einem selbstfinanzierenden Portfolio vereinigen, die Entwicklung eines solchen würde stets ausschließlich davon abhängen, wie stark es in Summe auf die verschiedenen Zinsveränderungen reagiert. Grundlage für diese Beschreibung einer Strategie ist der „Elasticity Approach to Portfolio Optimization“ von Kraft (2004).

Haben wir eine abstrakte, in Sensitivitäten ausgedrückte Finanzierungsstrategie bestimmt oder vorgegeben, so können wir diese stets in einem nachgelagerten Schritt in eine konkrete, auf Instrumente bezogene Finanzierungsstrategie überführen. Dabei stellen wir fest, dass wir mit ganz unterschiedlichen Gewichtungen von verschiedensten Instrumenten stets die gleichen Sensitivitäten generieren können. Erst in diesem zweiten Schritt entsteht also die große Fülle an Möglichkeiten, die wir zuvor beobachtet haben. Die erwarteten Finanzierungskosten und die damit verknüpften Risiken sind jedoch bei gleicher Sensitivität völlig gleichwertig.

Sowohl bei der Beschreibung der Kosten als auch bei der der Finanzierungsstrategie ist es also möglich, die Komplexität deutlich zu verringern. Durch die Reduktion der Kosten in eine einzige Kennziffer können wir diese genau so betrachten wie den Barwert. Dabei gehen keine wesentlichen, entscheidungsrelevanten Informationen verloren, vielmehr stellen wir sicher, dass wir stets sämtliche Kosten berücksichtigen. Durch die Abstraktion der Steuerungsgröße mittels Sensitivitäten können wir die Entwicklung dieser Kosten sehr einfach kontrollieren. Dies hat den Vorteil, dass wir uns nicht schon am Anfang auf bestimmte Instrumente festlegen müssen und uns so stets den maximalen Gestaltungsspielraum wahren können. Gegenüber den teils sehr komplexen Systemen, die bspw. in Abdel-Jawad (2013) betrachtet werden, ist dies eine deutliche Vereinfachung.

In diesem Modell der Perpetualkosten, gesteuert nach Sensitivitäten können wir nun Resultate der dynamischen Portfoliooptimierung heranziehen und diese auf das Schuldenmanagement anwenden. Wir werden in dieser Dissertation zwei verschiedene unbeschränkte Optimierungsprobleme betrachten, bei denen wir den erwarteten „Nutzen“ der Perpetualkosten im Optimierungshorizont maximieren. Die dabei verwendeten Schulden-Nutzenfunktionen unterscheiden sich natürlich von ihren klassischen Pendanten. Insbesondere fällt ihr Nutzen mit stei-

genden Kosten ab. Im ersten Problem spiegelt die Nutzenfunktion eine konstante relative Risikoaversion wieder. Dies führt zu einer unbeschränkten Entwicklung der Perpetualkosten. Im zweiten Optimierungsproblem steigt die Risikoaversion mit steigenden Kosten an. Dies wird uns zu einer optimalen Strategie führen, deren Kosten stets unterhalb eines definierten Limits verbleiben. In beiden Fällen ist die optimale Strategie über Sensitivitäten gegeben. Anhand von *Rolling-Horizon-Bonds* – dies sind Zero-Bonds mit rollierender Fälligkeit – zeigen wir beispielhaft Verfahren und Möglichkeiten auf, wie man von den abstrakten Sensitivitäten auf eine konkrete Umsetzung in diesen Bonds schließen kann. Wir beschließen diese Einleitung mit einer kurzen Inhaltsübersicht.

Inhaltsübersicht

Die Arbeit gliedert sich in vier wesentliche Teile. Die Basis all unserer Überlegungen bildet ein mehrdimensionales affin-lineares Zinsmodell zur Modellierung des Marktes. Dieses führen wir im zweiten Kapitel ein und besprechen relevante Eigenschaften. Aus diesem Zinsmodell ergeben sich dann die Preisprozesse der von uns betrachteten Instrumente bzw. Finanzierungsmöglichkeiten. Dazu gehören insbesondere die *Rolling-Horizon-Bonds* und der *Perpetual*.

Darauf aufbauend betrachten wir im dritten Kapitel ein aus Rolling-Horizon-Bonds bestehendes selbstfinanzierendes Bondportfolio. Für dieses lösen wir ein einfaches Optimierungsproblem eines *Investors*, zielen also noch auf eine ideale *Anlagestrategie* ab. Anhand dieses Fallbeispiels erklären wir die üblichen Begrifflichkeiten und die grundsätzliche Vorgehensweise in der dynamischen Portfoliooptimierung. Zudem führen wir hier das Konzept der *Steuerung nach Sensitivitäten* ein. Dieses macht uns unabhängig von konkreten Instrumenten oder Finanzierungsmöglichkeiten. Die Beschreibung eines Portfolios und die Formulierung von Optimierungsproblemen bzw. deren Lösung lassen sich durch diese Abstraktion deutlich vereinfachen.

Das vierte Kapitel schlägt schließlich die Brücke zum Schuldenmanagement. Dessen grundlegendes Ziel, eine möglichst effiziente Abwägung zwischen erwarteten Kosten einerseits und möglichen Risiken andererseits zu finden, ist durchaus mit der Suche nach bestmöglichen Anlagestrategien verwandt. Wir werden hier die entscheidenden Unterschiede zwischen beiden Welten herausarbeiten und dadurch die Modellierung des Schuldenportfolios motivieren. Insbesondere führen wir dabei die *Perpetualkosten* als neue zentrale Portfoliogröße ein.

Im fünften Kapitel nutzen wir das Modell des Schuldenportfolios bzw. der Perpetualkosten, um zwei Portfolioprobleme zu lösen. Bei dem ersten unterstellen wir eine konstante relative Risikoaversion des Schuldenmanagers. Die Schulden

1. Einleitung

bzw. die mit ihr verbundenen Perpetualkosten sind bei Anwendung der optimalen Strategie jedoch nicht nach oben beschränkt. Der Idee der *Schuldenbremse* folgend untersuchen wir noch ein zweites Optimierungsproblem. Dort steigt die Risikoaversion mit Annäherung an ein vorgegebenes Limit immer schneller an, so dass das Überschreiten dieser Grenze beim Verfolgen der optimalen Strategie verhindert wird.

Wir beschließen die Arbeit mit einem kurzen Resümee und einem Ausblick über mögliche Erweiterungen des vorgestellten Modells.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Zunächst legen wir das Fundament für die Beschreibung und Modellierung eines Bond-Portfolios: die Eigenschaften und Preisprozesse der einzelnen Instrumente. Im Gegensatz zur Aktienmodellierung steht einem Akteur¹ in den Zinsmärkten (zumindest theoretisch) eine deutlich größere Auswahl an möglichen Finanzinstrumenten zur Verfügung. Diese sind jedoch stark voneinander abhängig, so dass nicht jedem Instrument ein eigener Risikofaktor zugeordnet werden sollte. Selbst die primitivsten Instrumente, die Zero-Bonds, werden üblicherweise nicht „einzeln“ modelliert, sondern ihre Preisprozesse leiten sich aus einem gemeinsamen *Zinsmodell* ab. Wir verwenden im Folgenden ein affin-lineares Multifaktor-Modell, welches in Abschnitt 2.1 eingeführt und in Abschnitt 2.2 anhand von Beispielen veranschaulicht wird.

Aus einem solchen Zinsmodell ließen sich nicht nur die Preisprozesse von Zero-Bonds mit unterschiedlichen Fälligkeiten, sondern auch von Kupon-Bonds, Derivaten wie Swaps oder Zins-Optionen ableiten. Für die zuvor genannten Instrumente, allgemeiner sogar für fast alle handelbaren Instrumente in den Zinsmärkten, gilt jedoch, dass sie eine feste Fälligkeit besitzen. Bei langen Investitionshorizonten verändert sich daher das Spektrum der Instrumente, in die ein Anleger investieren kann. Dies stellt bei der von uns angestrebten dynamischen Portfoliooptimierung eine Schwierigkeit dar. Um dieser zu begegnen, werden wir in Abschnitt 2.3 fiktive, sogenannte *Rolling-Horizon-Bonds*, einführen. Diese besitzen keine Fälligkeiten mehr und es ergibt sich eine Preisentwicklung, die der der Instrumente im Black-Scholes-Modell entspricht.

Es stellt sich heraus, dass tatsächlich die Preisprozesse aller betrachteten Instrumente während ihrer Lebensdauer stets eine sehr ähnliche Struktur bzw. Dynamik besitzen. Daraus leiten wir schlussendlich die Möglichkeit ab, jedwedem Finanzinstrument über seine *Sensitivitäten* bzgl. der gewählten stochastischen Risikofaktoren eindeutig zu charakterisieren bzw. zu definieren.

¹Zumeist nehmen wir in diesem Kapitel noch den üblicheren Blickwinkel eines Investors ein.

2.1. Zinsmodell

Im Bereich der Zinsmärkte hat sich bis dato kein einheitliches Standardmodell etablieren können. Dies mag in den unterschiedlichen Einsatzzwecken begründet sein, die jeweils nach anderen wünschenswerten Eigenschaften des Zinsmodells verlangen.

Für die Bewertung von Derivaten werden beispielsweise ein- oder zweidimensionale Short-Rate-Modelle oder auch hochdimensionale Libor-Markt-Modelle genutzt, da diese sich besonders leicht an implizite Marktdaten kalibrieren lassen und das schnelle (numerische) Bewerten von Optionen ermöglichen. Einen guten Überblick, insbesondere im Hinblick auf das Bewerten von Derivaten, liefert beispielsweise Brigo und Mercurio (2006).

Für die Optimierung und das Steuern von Bondportfolios eignen sich affine Zinsmodelle, wie beispielsweise das im Arbeitspapier von Henseler, Peters, und Seydel (2013) vorgestellte. Sie bieten zumeist eine gute analytische Handhabbarkeit, die Möglichkeit die Parameter des Modells an historischen Marktdaten zu kalibrieren und eröffnen zumindest im folgenden Modell eine intuitive Interpretation der stochastischen Faktoren.

Wir führen zunächst Grundbegriffe für die Beschreibung von Zinsmärkten ein, stellen das genannte Zinsmodell und seine wichtigsten Eigenschaften vor und beleuchten abschließend auch anhand von Beispielen die Vorteile des Modells im Hinblick auf die Portfoliomodellierung und -optimierung.

2.1.1. Grundlegende Definitionen

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Definitionen zur Beschreibung der Zinsmärkte. Dabei ist die Notation aus Brigo und Mercurio (2006) entnommen.

Definition 2.1.1.

1. Der Wert eines Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T (oder kurz T -Zero-Bond) zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ sei mit $P(t, T)$ bezeichnet. Für $t = T$ gilt $P(T, T) = 1$.
2. Die (instantane) Forwardrate zum Zeitpunkt t mit Fälligkeit $T \geq t$ sei $f(t, T)$. Der Zusammenhang zwischen instantanen Forwardraten und Zero-Bonds sei wie üblich

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right) \iff f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (2.1)$$

3. Die (annualisierte) Zerorate zum Zeitpunkt t mit Fälligkeit T sei $z(t, T)$ und für $T > t$ wie folgt definiert:

$$z(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds \quad (2.2)$$

Für die Fälligkeit $T = t$ sei die Zerorate als $z(t, t) = f(t, t)$ definiert, was gerade $\lim_{T \searrow t} z(t, T)$ entspricht.

4. Der Wert des Geldmarktbonns zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei durch $B(t)$ definiert und folge der Dynamik

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1, \quad (2.3)$$

wobei $r(t)$ ein stochastischer, \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess sei, der die Shortrate beschreibt, also die instantane Verzinsung für Geldmarktgeschäfte. Für diese gilt wie üblich $r(t) = f(t, t)$.

Der Wert eines Geldmarktbonns zum Zeitpunkt t ist somit durch

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) \quad (2.4)$$

gegeben.

Bemerkung 2.1.1 (Wahrscheinlichkeitsraum). Der bei der Definition des Geldmarktbonns und auch im Folgenden verwendete Wahrscheinlichkeitsraum sei vollständig und durch das Triple $(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \Omega)$ beschrieben. Es sei $W(t)$ stets eine n -dimensionale (in sich unabhängige) Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathcal{P} . Die durch $W(t)$ generierte, natürliche Filtration bezeichnen wir mit \mathcal{F}_t . Die Ereignisalgebra \mathcal{F} , also die Gesamtheit aller Informationen, sei die \mathcal{P} -Vervollständigung von $\cup \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty)$. Alle adaptierten bzw. progressiv messbaren Prozesse seien dies stets bezüglich der natürlichen Filtration \mathcal{F}_t .

2.1.2. Das Modell

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften des in Zusammenarbeit entwickelten Zinsmodells (Henseler, Peters, und Seydel, 2013) einführen bzw. erneut herleiten. Grundgedanke eines solchen affin-linearen Modells ist es, die Zinskurve zum Zeitpunkt t , also die Gesamtheit aller instantanen Forwardraten $f(t, t + \tau)$ mit $\tau \in [0, \infty)$, als affin-lineare Kombination von wenigen Basisfunktionen dar-

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

zustellen:

$$f(t, t + \tau) := A(\tau) + M^\top(\tau)u(t). \quad (2.5)$$

$$du(t) := (Su(t) + R)dt + \sigma dW(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2.6)$$

Durch eine geeignete deterministische, zeithomogene Funktionenbasis $M(\tau) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ und stochastische Gewichte $u(t) \in \mathbb{R}^n$ lassen sich somit die instantanen Forwardraten zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit von der Restlaufzeit τ beschreiben (2.5). Die Dimensionalität des Modells n sei zunächst beliebig, aber endlich.²

Zusätzlich ist mit $A(\tau) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ eine weitere deterministische, von der Restlaufzeit τ abhängige Funktion notwendig. Nur mittels eines solchen affinen Teils in der Zinskurve kann die Arbitragefreiheit des Modells sicher gestellt werden. Auch die Klasse geeigneter Funktionenbasen $M(\tau)$ wird durch die Forderung nach Arbitragefreiheit deutlich eingeschränkt. Welche Bedingungen $M(\tau)$ und $A(\tau)$ genau erfüllen müssen, wird durch Proposition 2.1.2 bestimmt werden.

Die stochastischen Faktoren $u(t)$ sind durch einen \mathcal{F}_t -adaptierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert (2.6). Dabei seien $S, \sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $R \in \mathbb{R}^n$ konstant und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger aber fester Anfangszustand für die stochastische Entwicklung. Ferner können wir annehmen, dass σ stets vollen Rang hat, andernfalls könnte man auf einen Teil der n Risikofaktoren verzichten. Der Prozess $W(t)$ ist schließlich die bereits eingeführte n -dimensionale Brownsche Bewegung unter dem physikalischen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathcal{P} .

Bemerkung 2.1.2. Die Klasse der zeithomogenen affin-linearen Modelle ist umfangreicher als das Modell (2.5)/(2.6). Mögliche Verallgemeinerungen sind zum einen die Einführung einer stochastischen Volatilitätsmatrix σ , zum anderen unterliegt der Drift-Term unter dem *physikalischen* Maß \mathcal{P} eigentlich nur kleineren technischen Einschränkungen und müsste somit nicht affin-linear, sprich $Su + R$, gewählt werden (siehe Duffie und Kan (1996)). Das vorgestellte, spezielle Modell ermöglicht jedoch eine deutlich bessere analytische Handhabbarkeit. Denn die Dynamik eines Zero-Bonds, die wir im Folgenden herleiten (siehe Korollar 2.1.3), ermöglicht explizite Lösungen der vor uns liegenden Optimierungsprobleme und eine intuitive Interpretation sowohl des Modells als auch der Ergebnisse.

Aus dem Modell für Forwardraten (2.5) sowie aus (2.1) ergibt sich nun der

²Historische Zinskurven lassen sich beispielsweise mit $n = 5$ Basisfunktionen bzw. Faktoren schon sehr gut beschreiben (siehe Henseler et al. (2013)). In Beispielen werden wir uns hier der besseren Übersicht wegen aber auf drei Faktoren beschränken.

Preis eines beliebigen T -Zero-Bonds zum Zeitpunkt t als

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp\left(-\int_t^T A(s-t) + M^\top(s-t)u(t) ds\right) \\ &= \exp\left(-\tilde{A}(T-t) - \tilde{M}^\top(T-t)u(t)\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{A}(\tau) := \int_0^\tau A(s) ds \quad \text{und} \quad \tilde{M}(\tau) := \int_0^\tau M(s) ds. \quad (2.8)$$

Zentrale Eigenschaft eines Zinsmodells ist seine Arbitragefreiheit. Da im Prinzip zu jeder beliebigen Fälligkeit $T > t$ ein handelbarer Zero-Bond existiert, geht mit der Arbitragefreiheit auch die Vollständigkeit des Zinsmarktes einher.

Ob eine konkrete Ausgestaltung des eingeführten Zinsmodells, d. h. die tatsächliche Wahl der Parameter σ , S , R , der Funktion $A(\tau)$ sowie der Funktionenbasis $M(\tau)$, arbitragefrei und vollständig ist, lässt sich der folgenden Proposition entnehmen.

Proposition 2.1.2 (Arbitragefreiheit und Vollständigkeit). *Das eingeführte Zinsmodell aus (2.5) und (2.6) bzw. die Gesamtheit aller Zero-Bonds $P(t, T)$ mit $T \in [t, \infty)$ bildet genau dann einen arbitragefreien und vollständigen Markt, falls die Modellparameter und -funktionen σ , S , R , $A(\tau)$, $M(\tau)$ so gewählt sind, dass Folgendes gilt:*

Es existieren eindeutige Konstanten $b_0 \in \mathbb{R}^n$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass für alle Restlaufzeiten $\tau \in [0, \infty)$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$\tilde{M}^\top(\tau)(\sigma B_1 - S) + M^\top(\tau) = M^\top(0), \quad (2.9)$$

$$\tilde{M}^\top(\tau)(\sigma b_0 - R) + A(\tau) + \frac{1}{2}\tilde{M}^\top(\tau)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(\tau) = A(0). \quad (2.10)$$

Die Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Marktes sei genau dann gegeben, wenn wir die Existenz eines eindeutigen gemeinsamen äquivalenten Martingalmaßes für alle T -Zero-Bonds $P(t, T)$ mit $T \geq t$ bei Wahl eines beliebigen Numéraires nachweisen können (siehe bspw. Harrison und Pliska (1981, 1983)). Somit ergibt sich der folgende Beweis.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Beweis. Nach Itô's Lemma folgt aus (2.7) die folgende Dynamik für einen beliebigen T -Zero-Bond:

$$\begin{aligned} dP(t, T) = P(t, T) & \left((A(T-t) + M^\top(T-t)u(t)) dt \right. \\ & \left. - \tilde{M}^\top(T-t)(Su(t) + R) dt - \tilde{M}^\top(T-t)\sigma dW(t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\tilde{M}^\top(T-t)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(T-t) dt \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Als Numéraire wählen wir den Geldmarktbond, dessen Dynamik ja durch

$$dB(t) = B(t)r(t) dt \quad (2.12)$$

gegeben ist. Der Maßwechsel sei implizit durch die neue Brownsche Bewegung

$$dW^{\mathcal{Q}}(t) = dW(t) + b(t) dt \quad (2.13)$$

unter dem \mathcal{Q} -Maß und dem Satz von Girsanov gegeben. Der *Marktpreis des Risikos* $b(t)$ sei dabei zunächst ein beliebiger, geeignet beschränkter \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess. Unter dem neuen Maß \mathcal{Q} soll nun der Erwartungswert von $d\frac{P(t,T)}{B(t)}$ verschwinden und somit muss folgende Gleichheit

$$\begin{aligned} A(\tau) + M^\top(\tau)u(t) - \tilde{M}^\top(\tau)(Su(t) + R) \\ + \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b(t) + \frac{1}{2}\tilde{M}^\top(\tau)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(\tau) - r(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

für alle $\tau \geq 0$, wobei $\tau := T - t$, und für alle $u \in \mathbb{R}^n$ erfüllt sein. Es muss daher $b(t) = b_0 + B_1 u(t)$ affin-linear in u gewählt werden und es müssen die beiden Arbitragefreiheits-Bedingungen (2.9) und (2.10) gelten.

Da in der Proposition zudem gefordert wurde, dass b_0 und B_1 eindeutig sein müssen, folgt die Eindeutigkeit des Maßwechsels und damit des Martingalmaßes \mathcal{Q} . Der modellierte Markt ist somit vollständig. \square

Bemerkung 2.1.3. Die Proposition ist natürlich nicht nur dazu geeignet, ein konkret ausgestaltetes Zinsmodell hinsichtlich seiner Arbitragefreiheit zu überprüfen. Es bietet vielmehr eine Konstruktionshilfe für die Funktionenbasis $M(\tau)$ und die Funktion $A(\tau)$. Denn es genügt zunächst, sinnvolle b_0 und B_1 zu wählen, und dann die Gleichungen (2.9) und (2.10) als Definitionsvorschrift für die Funktionen zu begreifen: Das System von ODEs in (2.9) liefert für gegebene S , σ und B_1 das (bis auf Skalierung eindeutige) Funktionensystem $M(\tau)$ und für bekannte R und b_0 definiert (2.10) dann die Form des affinen Term $A(\tau)$. Letztlich ist aber die Gültigkeit der Proposition, insbesondere die Eindeutigkeit, erneut zu überprüfen.

Bemerkung 2.1.4. Die Arbitragefreiheit für alle $\tau \geq 0$ bzw. $T \geq t$ zu fordern, ist nicht unbedingt notwendig. Gelten muss sie nur für alle handelbaren Instrumente. Beschränkt man sich in seinen Betrachtungen stets auf Zero-Bonds mit einer maximalen Fälligkeit T^{max} , so genügt es (2.9) und (2.10) nur für $T \in [t, T^{max}]$ zu erfüllen. Da wir jedoch auch Perpetualbonds (siehe Abschnitt 2.3) nutzen möchten, muss die Arbitragefreiheit in unserem Fall für alle Fälligkeiten $T \in [t, \infty)$ gelten.

Durch Anwenden der Itô-Formel auf (2.7) und die Bedingungen aus Proposition 2.1.2 ergibt sich der folgende Preisprozess für einen T -Zero-Bond.

Korollar 2.1.3 (Preisprozess eines Zero-Bonds). *Der Preisprozess eines Zero-Bonds $P(t, T)$ ist durch folgende SDE gegeben:*

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P(t, T) \left(r(t) dt - \tilde{M}(T-t)^\top \sigma b(t) dt - \tilde{M}(T-t)^\top \sigma dW(t) \right), \\ P(0, T) &= \exp \left(-\tilde{A}(T) - \tilde{M}^\top(T) u_0 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Unter dem risikolosen Martingalmaß \mathcal{Q} entfällt der Marktpreis des Risikos $b(t)$ und es gilt:

$$dP(t, T) = P(t, T) \left(r(t) dt - \tilde{M}(T-t)^\top \sigma dW^{\mathcal{Q}}(t) \right)$$

Zusätzliche Annahmen. Neben den notwendigen Bedingungen zur Arbitragefreiheit werden wir einige zusätzliche Bedingungen an das Zinsmodell stellen. Falls nicht explizit anders ausgeführt, gehen wir in der gesamten Dissertation davon aus, dass diese erfüllt seien.

(A) Für beliebiges, aber festes $u(t)$ seien die Forwardraten

$$f(t, t + \tau) = A(\tau) + M^\top(\tau) u(t)$$

- nach unten beschränkt, also $f(t, t + \tau) > C_1$ für alle $\tau \in [0, \infty)$ und ein konstantes C_1 ,
- im Unendlichen positiv, d. h. es gibt ein $\hat{\tau}$ und ein konstantes $C_2 > 0$ so dass $f(t, t + \tau) \geq C_2$ für alle $\tau \in [\hat{\tau}, \infty)$.

(B) Die Matrix $S - \sigma B_1$ sei diagonalisierbar.

(C) Der Marktpreis des Risikos sei konstant, also $b(t) = b_0 \in \mathbb{R}^n$. Der lineare Teil verschwindet somit: $B_1 = 0$.

Bemerkung 2.1.5. Bedingung (A) ist zwingend. Diese Anforderung stellt sicher, dass der Zero-Preis $P(t, T) = \exp \left(-\int_t^T f(t, s) ds \right)$ für alle $T > t$ beschränkt

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

bleibt und für $T \rightarrow \infty$ gegen null konvergiert. Andernfalls könnten unendliche Zero-Preise auftreten, was für keinerlei Fälligkeiten T zu erwarten ist, und insbesondere wäre der Perpetual nicht wohldefiniert (siehe auch Bemerkung 2.3.2).

Die zweite Bedingung (B) schränkt die Freiheiten in den Basisfunktionen $M(\tau)$ ein. Bei der dynamischen Portfoliooptimierung hat diese Einschränkung keine offensichtlichen Auswirkungen, da sich dadurch die Dynamik der Zero-Bond-Preise (siehe Korollar 2.1.3) nicht grundlegend verändert. Es könnte also im Prinzip auch darauf verzichtet werden, bietet aber einige Vorteile bei der Interpretation des Modells (siehe auch Abschnitt 2.1.3).

Anders verhält es sich bei Bedingung (C). Diese vereinfacht die Dynamik der Zero-Bond-Preise unter dem physikalischen Maß, welches bei der Portfoliooptimierung von Belang ist, deutlich.

Das Funktionensystem. Wir nutzen nun, wie in Bemerkung 2.1.3 beschrieben, die Bedingungen der Arbitragefreiheit als Konstruktionshilfe für ein konkretes Zinsmodell. Unter Annahme (B) leiten wir aus der Integralgleichung (2.9) das folgende System von Exponentialfunktionen her:

$$M(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \tag{2.16}$$

Der dadurch aufgespannte Funktionenraum sei mit $\langle M \rangle$ bezeichnet. O. B. d. A. haben wir dabei $M(0) = \underline{1}$ festgesetzt und zudem angenommen, dass $S - \sigma B_1 = \text{diag}(-\alpha)$, mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Bei jeder anderen Festlegung von $M(0)$ und allen anderen diagonalisierbaren Matrizen $S - \sigma B_1$ mit Eigenwerten α würde genau der gleiche Funktionenraum $\langle M \rangle$ aufgespannt werden. Bis auf eine lineare Transformation würde sich immer das gleiche Modell ergeben (siehe auch Abschnitt 2.1.3). Obiges exponentielles Funktionensystem (2.16) stellt jedoch gerade die kanonische Basis für den aufgespannten Funktionenraum $\langle M \rangle$ dar.

Um die Vollständigkeit des Marktes zu ermöglichen, müssen alle Funktionen $M(\tau)$ linear unabhängig sein. Andernfalls wäre nämlich B_1 in (2.9) nicht eindeutig festgelegt. Wir können somit o. B. d. A. $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ setzen. Wegen Bedingung (A) muss sogar $\alpha_i > 0$ gelten (siehe hierzu auch Henseler et al. (2013)).

Bemerkung 2.1.6. Das vorgestellte Modell mit dem Funktionensystem (2.16) ist eine (zeithomogene) Verallgemeinerung des in Korn und Kraft (2002) zur Optimierung verwendeten Modells von Vasicek (1977). Auf Grund unserer Anforderung (A) fällt das dort ebenfalls genutzte Modell von Ho und Lee (1986) jedoch nicht darunter.

Die folgenden Resultate und Eigenschaften des Zinsmodells werden wir für

die spätere Optimierung bzw. für die Verifikation der Optimierungsergebnisse benötigen.

Bemerkung 2.1.7. Das Funktionensystem $M_i(\tau) = \exp(-\alpha_i\tau)$ mit $\alpha_i > 0$ ist deterministisch und glatt, also beliebig oft differenzierbar. Außerdem ist es auf dem gesamten Intervall $[0, \infty)$ und somit auch auf jedem beliebigen Teilintervall beschränkt. Gleiches gilt auch für $\tilde{M}(\tau)$, denn

$$\tilde{M}_i(\tau) = \int_0^\tau \exp(-\alpha_i s) ds = \frac{1}{\alpha_i}(1 - \exp(-\alpha_i\tau))$$

Der übliche Existenz- und Eindeutigkeitsatz (siehe bspw. Øksendal (2007), S. 68) ermöglicht das folgende Lemma, dessen Lösung sich mittels Itô's Lemma verifizieren lässt:

Lemma 2.1.4. *Die eindeutige Lösung von $u(t)$ in (2.6) ist gegeben durch*

$$u(t) = \exp(St)u_0 + S^{-1}(\exp(St) - 1)R + \int_0^t \exp(S(t-v))\sigma dW(v). \quad (2.17)$$

Bemerkung 2.1.8. Implizit haben wir dabei angenommen, dass die Matrix S invertierbar sei. Dies ist durch unsere Annahmen (A) und (C) sowie die Vollständigkeit des Marktes gegeben. Ohne diese Annahme ist S möglicherweise singulär. In diesem Fall muss in der Lösung (2.17) der Term $S^{-1}(\exp(St) - 1)$ durch eine Funktion $C(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ ersetzt werden, welche die folgende ODE löst:

$$-SC'(t)R + C'(t)R = R, \quad C(0) = 0. \quad (2.18)$$

Für den Geldmarktbond gilt daher das folgende Korollar.

Korollar 2.1.5. *Der Wert des Geldmarktbonds $B(t)$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch*

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t A(0) + M^\top(0) (\exp(Ss)u_0 + S^{-1}(\exp(Ss) - 1)R) ds + \int_0^t \tilde{M}^\top(t-s)\sigma dW(s)\right). \quad (2.19)$$

Beweis. Das Lebesgue-Integral ergibt sich sofort durch Einsetzen von (2.17) in die Definition des Geldmarktbonds

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) = \exp\left(\int_0^t A(0) + M^\top(0)u(s) ds\right).$$

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Für das dabei entstehende Itô-Integral gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t M^\top(0) \int_0^s \exp(S(s-v))\sigma dW(v) ds \\
&= \int_0^t \int_0^t 1_{[v<s]} M^\top(0) \exp(S(s-v))\sigma dW(v) ds \\
&= \int_0^t \int_0^t 1_{[v<s]} M^\top(0) \exp(S(s-v))\sigma ds dW(v) \\
&= \int_0^t M^\top(0) S^{-1}(\exp(S(t-v)) - \mathbb{I})\sigma dW(v) \\
&= \int_0^t \tilde{M}^\top(t-v)\sigma dW(v).
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von stochastischem Integral und dem Lebesgue-Integral ist möglich, da der Integrand messbar und beschränkt ist. Für ein entsprechendes Fubini-Theorem siehe bspw. Protter (2010). Der letzte Schritt ergibt sich direkt aus der Darstellung von $\tilde{M}(\tau)$ in Bemerkung 2.1.7. \square

Für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der im nächsten Abschnitt folgenden Preisprozesse ist noch folgendes Lemma hilfreich.

Lemma 2.1.6. *Für ein beliebiges Zeitintervall $[t_0, t_1]$ mit $0 \leq t_0 < t_1$ gelten die folgenden Integrierbarkeitsbedingungen der Shortrate:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} |r(s)| ds \right) &< \infty, \\
\int_{t_0}^{t_1} |r(s)| ds &< \infty \quad f. s.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Beweis. Nach Satz A.3.1 und der Definition der Shortrate gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} |r(s)| ds \right) &\leq \mathbb{E} \left((t_1 - t_0)|A(0)| + |M^\top(0)| \int_{t_0}^{t_1} |u(s)| ds \right) \\
&\leq (t_1 - t_0)|A(0)| + (t_1 - t_0)|M^\top(0)| E \left(\max_{s \in [t_0, t_1]} |u(s)| \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt $\int_{t_0}^{t_1} |r(s)| ds < \infty$ f. s. . \square

2.1.3. Lineare Transformation

Das Funktionensystem $M(\tau) = \exp(-\alpha\tau)$ ist die kanonische Basis für den Funktionenraum $\langle M \rangle$, der den linearen Teil der Forwardzinskurve beschreibt. Im

Zusammenspiel mit den zugehörigen Gewichten $u(t)$ wird dadurch zu jedem Zeitpunkt die Zinskurve $f(t, t + \cdot)$ eindeutig charakterisiert.

Die Darstellung in diesem kanonischen Funktionensystem ist jedoch wenig intuitiv. Wir wollen daher eine zweite vollkommen äquivalente Darstellung des Zinsmodells betrachten. Mittels geeigneter linearer Transformationen lassen sich das Funktionensystem und die zugehörigen Gewichte verändern, *ohne* dadurch die Zinskurve $f(t, t + \cdot)$ zu beeinflussen. Insbesondere bleibt auch die Arbitragefreiheit des Modells erhalten und der affine Term unberührt.

Prinzipiell könnte jede nicht-singuläre Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ als Transformationsmatrix dienen. Sinnvolle Transformationen sind bspw. die in Henseler, Peters, und Seydel (2013) vorgestellten Haupt- bzw. Pseudohauptkomponenten. Beide Transformationen führen zu deutlich besser interpretierbaren Funktionensystemen, da diese den bekannten Hauptkomponenten – die ersten drei sind Niveau, Steigung und Krümmung – entsprechen. Damit einhergehend stellt sich auch eine natürliche Hierarchie in den transformierten stochastischen Faktoren ein, die Volatilität nimmt also für höhere Ordnungen ab.

Wir betrachten nun den Fall der Hauptkomponentenzerlegung etwas eingehender. Die entsprechende, in Henseler, Peters, und Seydel (2013) entwickelte Methodik liefert, ausgehend von einer feststehenden Volatilitätsmatrix σ , eine zugehörige Transformationsmatrix \mathcal{T} . Definieren wir nun mit $L(\tau) := \mathcal{T}M(\tau)$ eine neue Funktionenbasis und entsprechende Gewichte $\omega(t) := \mathcal{T}^{-\top}u(t)$, so ergibt sich die folgende, äquivalente Darstellung des Modells (2.5) und (2.6):

$$f(t, t + \tau) = A(\tau) + L^\top(\tau)\omega(t) \quad (2.21)$$

$$d\omega(t) = (\bar{S}\omega(t) + \bar{R})dt + \bar{\sigma} dW_t, \quad \omega(0) = \omega_0. \quad (2.22)$$

Dabei sind natürlich auch die Parameter entsprechend transformiert worden: $\bar{R} := \mathcal{T}^{-\top}R$, $\bar{\sigma} := \mathcal{T}^{-\top}\sigma$ und $\bar{S} := \mathcal{T}^{-\top}S\mathcal{T}^\top$. Wesentliche Eigenschaft des Modells nach Transformation durch Hauptkomponentenzerlegung ist die einfache, weil diagonale Form der Volatilitätsmatrix

$$\bar{\sigma} = \text{diag}(\bar{\sigma}_{11}, \dots, \bar{\sigma}_{nn}), \quad (2.23)$$

wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass die Einträge absteigend geordnet sind $\bar{\sigma}_{11} \geq \dots \geq \bar{\sigma}_{nn} > 0$ und somit die Wichtigkeit der entsprechenden Faktoren widerspiegelt wird.

Betrachten wir nun nochmals die Arbitragefreiheit im transformierten Modell.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Die zweite Bedingung (2.10) fordert

$$\tilde{M}^\top(\tau)(\sigma b - R) + A(\tau) + \frac{1}{2}\tilde{M}^\top(\tau)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(\tau) = A(0) \quad (2.24)$$

und somit gilt auch für das transformierte Modell

$$\tilde{L}^\top(\tau)(\bar{\sigma}b - \bar{R}) + A(\tau) + \frac{1}{2}\tilde{L}^\top(\tau)\bar{\sigma}\bar{\sigma}^\top\tilde{L}(\tau) = A(0) \quad (2.25)$$

bei identischem Marktpreis des Risikos b und affinem Term $A(\tau)$, da $\tilde{M}^\top(\tau)\sigma = \tilde{L}^\top(\tau)\bar{\sigma}$ und $\tilde{M}^\top(\tau)R = \tilde{L}^\top(\tau)\bar{R}$ für alle τ .

2.1.4. Eigenschaften des Modells

Zu Beginn von Abschnitt 2.1 haben wir festgestellt, dass sich kein Standardzinsmodell herausgebildet hat. Daher möchten wir kurz auf die Vor- und Nachteile des in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Modells, insbesondere im Hinblick auf die dynamische Portfoliooptimierung, eingehen und somit die Wahl des Modells begründen.

Der gewählte Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (2.6) ist eine relativ einfache Modellierung der Stochastik. Die Qualität des Modells könnte möglicherweise durch zustandsabhängige Drift- und/oder Volatilitätsterme weiter verbessert werden. Ein entscheidender Nachteil des linearen Charakters des Modells ist vor allem, dass mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit negative Forwardzinssätze möglich sind. Solche Zinsraten sind in der Realität jedoch kaum bzw. nur in Ausnahmesituationen zu beobachten.

Andererseits sind jedoch auch einige wünschenswerte oder gar notwendige Eigenschaften durch das Modell erfüllt. Natürlich ist die Arbitragefreiheit des Marktes unerlässlich. Andernfalls würde jedwede dynamische Optimierung genau solche Arbitragemöglichkeiten ausnutzen und dadurch einen unendlichen Nutzen generieren. Ein erwarteter unendlicher Nutzen würde sich auch einstellen, wenn die Forwardraten auf einer geometrischen Brownschen Bewegung fußen würden. Dies wurde in Kraft (2004) am Beispiel des Dothan- sowie des Black-Karasinski-Modells nachgewiesen. Der naheliegendste Weg, positive Zinssätze zu erzwingen, ist somit für unseren Zweck verstellt.

Im Schuldenmanagement sind auch sehr lange Betrachtungszeiträume von Relevanz. Daher sind die gewählten zeithomogenen Parameter und Modelleigenschaften sinnvoll. Auch die problemlose Bewertbarkeit von Bonds mit langen Laufzeiten oder gar Perpetual-Bonds verlangen ein Zinsmodell, welches für solche Laufzeiten geeignet ist.

Zudem ist das vorgestellte Modell analytisch sehr gut handhabbar. Dies liegt gerade in der Linearität, der einfachen Stochastik und den zeithomogenen Parametern begründet. Dadurch lassen sich einige Portfolioprobleme analytisch lösen. Mögliche Auswirkungen einer bestimmten Zinsbewegung, bspw. in einer der Hauptkomponenten, auf den Preis eines Instrumentes können oftmals explizit dargestellt werden. Dies erlaubt eine schnelle Einschätzung des instantanen Risikos eines Instrumentes oder von dessen erwarteter Wertentwicklung. In der Praxis ist zudem eine robuste Einschätzung der Drift- und Kovarianzparameter essentiell – auch hier bietet das relativ einfache und sehr intuitive Modell entscheidende Vorteile.

2.2. Beispiele

Im Folgenden wollen wir die Eigenschaften und die Vorteile des zuvor beschriebenen Zinsmodells anhand eines Beispiels verdeutlichen. Die hier vorgestellten Drift- und Kovarianzparameter im beispielhaften 3-dimensionalen Fall des Modells werden auch in den folgenden Kapiteln stets als Referenz für Beispiele und Analysen dienen. In Henseler, Peters, und Seydel (2013) wurden zwar fünf Faktoren für das Zinsmodell vorgeschlagen, für die Illustration der Eigenschaften sind drei Faktoren jedoch vollkommen ausreichend. Bei Bedarf lässt sich die Anzahl der Faktoren problemlos erhöhen und den jeweiligen Anforderungen anpassen.

2.2.1. Parameter des Zinsmodells

Die Matrix S des Zinsmodells sei zunächst wie folgt festgelegt:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{12} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Aus der Arbitragefreiheits-Bedingung (2.9) bzw. aus (2.16) ergibt sich die exponentielle Funktionenbasis $M^\top(\tau) = (\exp(-\frac{1}{12}\tau), \exp(-\frac{2}{12}\tau), \exp(-\frac{3}{12}\tau))$, welche in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Durch Kalibrierung der restlichen Parameter an historische Datensätzen (siehe auch Henseler et al. (2013)), ergibt sich für die verbliebenen Parameter beispielsweise:

$$R = \begin{pmatrix} -0.0012 \\ 0.0018 \\ -0.0050 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} -0.0139 & 0.0425 & -0.0021 \\ -0.0069 & -0.1361 & 0.0097 \\ 0.0207 & 0.0928 & -0.0093 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0.2281 \\ 0.1064 \\ 2.7999 \end{pmatrix}.$$

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Dabei wurde der Marktpreis des Risikos b so gewählt, dass der affine Term $A(\tau)$ möglichst nahe an seinem festgelegten konstanten Startniveau $A(0) := 0.05$ verbleibt (siehe Abb. 2.1).

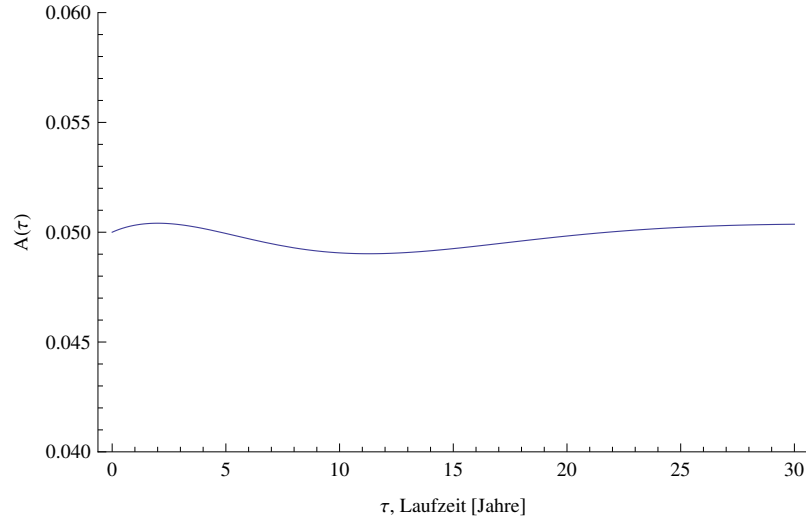


Abbildung 2.1.: Affiner Term $A(\tau)$. Dieser stellt die Arbitragefreiheit des Modells sicher und kann dennoch so gewählt werden, dass sein Einfluss auf die Zinskurve eher klein bleibt.

Die Darstellung im kanonischen, exponentiellen Funktionensystem vereinfacht zunächst die analytische Betrachtung und die technische Umsetzung, jedoch hat keiner der dargestellten Parameter eine intuitive Bedeutung. In der Portfoliooptimierung spielen insbesondere die Parameter σ und b sowie die Funktionenbasis $M(\tau)$ eine besondere Rolle. Daher nutzen wir die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Hauptkomponenten-Transformation mit der Transformationsmatrix

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0.6152 & 0.3069 & -0.9130 \\ -2.2943 & 7.3444 & -5.0115 \\ 1.2475 & -5.7993 & 5.5645 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

um ein gleichwertiges, aber intuitiv deutlich besser verständliches Modell zu erhalten. Die transformierten Basisfunktionen $L(\tau) = \mathcal{T}M(\tau)$ sind ebenfalls in Abbildung 2.2 dargestellt. Die typischen Hauptkomponenten sind selbst in dem niedrig-dimensionalen 3-Faktor-Modell zu erkennen. Darüber hinaus vereinfacht sich die Kovarianzmatrix wie folgt:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0.0226 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0185 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0017 \end{pmatrix}.$$

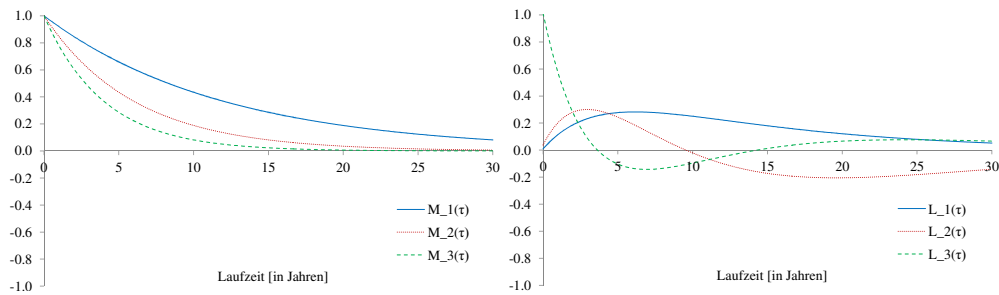


Abbildung 2.2.: Mögliche exponentielle Basisfunktionen $M(\tau)$ und die mittels \mathcal{T} transformierte Basis $L(\tau) = \mathcal{T}M(\tau)$, welche den bekannten Hauptkomponenten ähnelt. Quelle: Henseler, Peters, und Seydel (2013)

Der Marktpreis des Risikos b behält genau wie der affine Term $A(\tau)$ auch im transformierten Modell seine ursprüngliche Form bei.

2.2.2. Stochastische Entwicklung der Zinssätze

Im Folgenden ist die stochastische Zinsentwicklung über ein Jahr hinweg für 40 verschiedene Pfade dargestellt. Genau diese Realisationen möglicher Zinsentwicklungen werden wir auch in den nachfolgenden Kapiteln zur Veranschaulichung der Entwicklung des Portfolios unter verschiedenen möglichen Strategien verwenden. Zunächst zeigt Abbildung 2.3 den Zustand der gesamten Zinskurve, ausgedrückt in annualisierten Zeroraten, zum Zeitpunkt $t = 1$, also nach einem Jahr. Die Startkurve zum Zeitpunkt $t = 0$ ist dabei zusätzlich als schwarz gestrichelte Linie eingezeichnet.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

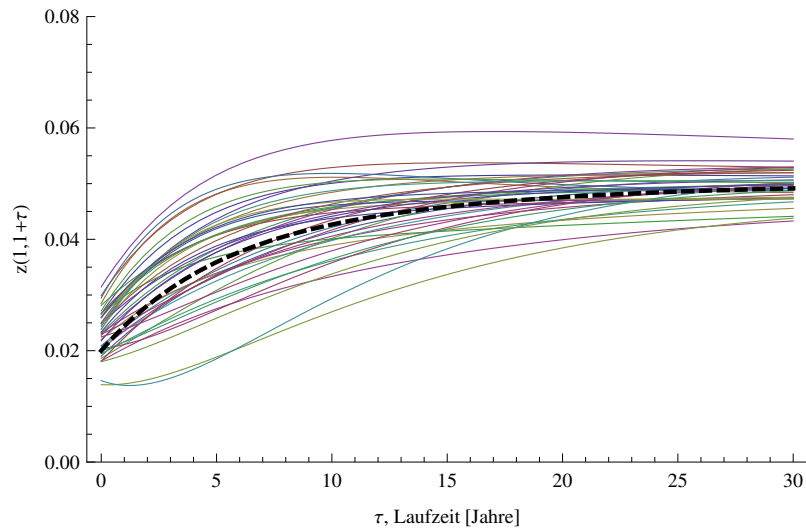


Abbildung 2.3.: Realisationen möglicher Zinskurven, ausgedrückt in annualisierten Zeroraten $z(1, 1 + \tau)$, nach einjähriger stochastischer Entwicklung. Zum Vergleich ist die Startkurve $z(0, 0 + \tau)$ gestrichelt eingezeichnet.

Um die zeitliche Entwicklung zu demonstrieren, stellen wir in Abbildung 2.4 eine einzelne Zerorate, die 10-Jahres-Rate, im Zeitablauf dar. Diese Grafik illustriert insbesondere die Volatilität der Zinsentwicklung, die sich in den folgenden Kapiteln, je nach gewählter Strategie mehr oder weniger stark, auch auf die Volatilität der Portfolioentwicklung übertragen wird.

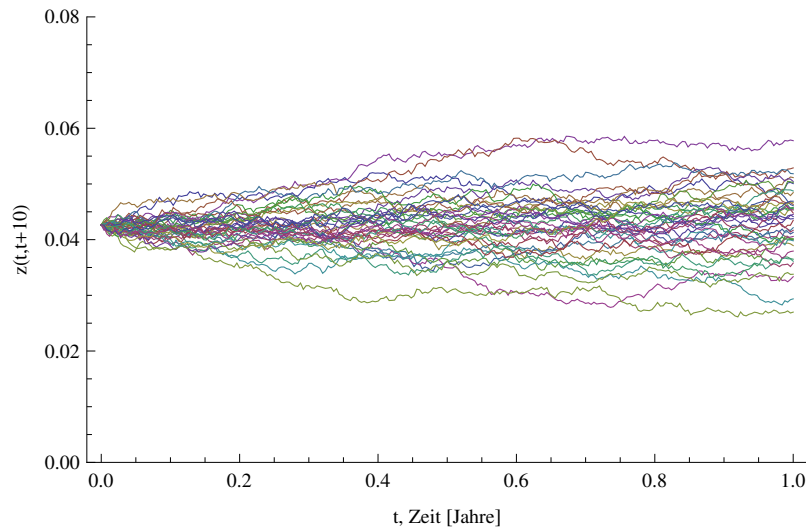


Abbildung 2.4.: Stochastische Entwicklung der 10J-Zeroraten $z(t, t + 10)$ über ein Jahr hinweg.

2.3. Weitere Finanzinstrumente

Neben der Preisentwicklung von Zero-Bonds mit beliebiger Fälligkeit T (siehe Korollar 2.1.3) lässt sich auch eine Vielzahl weiterer Instrumente mit dem obigen Zinsmodell bewerten und darstellen.³

Bei der Einführung neuer Instrumente ist in jedem Fall sicher zu stellen, dass diese nicht die Arbitragefreiheit des Marktes verletzen. Alle Instrumente – Zero-Bonds und neu eingeführte – müssen also unter einem gemeinsamen äquivalenten Maß relativ zum entsprechenden Numéraire Martingale sein. Durch die Vollständigkeit des reinen Zero-Bond-Marktes ist das Maß bereits eindeutig bestimmt (siehe Proposition 2.1.2). Konkret müssen also neue Instrumente relativ zum Geldmarktbond-Numéraire unter dem risikolosen Maß \mathcal{Q} Martingale sein. In Anlehnung an die Begrifflichkeiten in Abschnitt 3.1 werden wir zusätzliche Instrumente, die die Arbitragefreiheit des Modells nicht verletzen, *selbstfinanzierend* nennen.

2.3.1. Sliding- und Rolling-Horizon-Bonds

Zunächst wollen wir die von Rutkowski (1999) ausführlich behandelten *Sliding Bonds* und *Rolling-Horizon-Bonds* einführen. Diese bieten in der Portfoliooptimierung einen entscheidenden Vorteil gegenüber T -Zero-Bonds. Für Zeitpunkte $t > T$ ist der Wert eines Zero-Bonds mit Fälligkeit T nicht mehr definiert, da der Kontrakt bereits ausgelaufen ist. Dies schränkt die Verwendung von Zero-Bonds in der Portfoliooptimierung stark ein, da Fälligkeiten – aber auch Dividenden- bzw. Kuponzahlungen – vor Ende des Anlagehorizonts der Optimierung nur mit Schwierigkeiten zu begegnen sind. Entweder sind jeweils Anschlussgeschäfte zu definieren oder man müsste sich auf T -Zero-Bonds beschränken, deren Laufzeit über den Horizont des Optimierungsproblems hinausreicht.

Eine elegante Alternative zu Zero-Bonds besteht in den erwähnten Sliding- oder Rolling-Horizon-Bonds, deren Zahlungstermin nicht fix ist, sondern immer weiter in die Zukunft gerollt wird. Ein solches Finanzinstrument läuft per Definition nicht aus. Für theoretische Überlegungen im Rahmen der Portfoliooptimierung sind solche Konstrukte somit sehr gut geeignet.

Definition 2.3.1 (Sliding-Bond). *Ein Sliding-Bond ist ein Zero-Bond $P(t, t + \tau)$ mit konstanter Restlaufzeit τ bzw. rollierender Fälligkeit $t + \tau$. Der Rückzahlungsbetrag verändert sich dabei nicht und wird stets mit einer Geldeinheit angenommen.*

³Auch Zinsoptionen können in diesem Zinsmodell behandelt werden und für einige, wie bspw. Caps oder Floors, wurden in Henseler, Peters, und Seydel (2013) analytische Bewertungsformeln vorgestellt.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

Lemma 2.3.2. *Die Dynamik des Sliding Bond ergibt sich in unserem Zinsmodell als*

$$dP(t, t + \tau) = P(t, t + \tau) \left(\left(r(t) - f(t, t + \tau) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b \right) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right).$$

Der Anfangswert $P(0, 0 + \tau)$ ist gerade der Wert des Zero-Bonds $P(0, T)$ mit $T = \tau$. Der Sliding-Bond ist nicht selbstfinanzierend, würde also die Arbitragefreiheit unseres Modells verletzen.

Beweis. Die Dynamik in der Definition des Sliding-Bonds ergibt sich durch die Anwendung der Itô-Formel auf (2.7):

$$\begin{aligned} & dP(t, t + \tau) \\ &= d \left(\exp \left(-\tilde{A}(\tau) - \tilde{M}^\top(\tau)u(t) \right) \right) \\ &= P(t, t + \tau) \left(-\tilde{M}^\top(\tau)((Su + R) dt + \sigma dW(t)) + \tilde{M}^\top(\tau)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(\tau) dt \right) \\ &= P(t, t + \tau) \left(\left(r(t) - f(t, t + \tau) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b \right) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right) \end{aligned}$$

Dabei werden im letzten Schritt die beiden Arbitragebedingungen (2.9) und (2.10) verwendet. Diese besitzen natürlich stets Gültigkeit, auch wenn die Einführung des Instruments selbst die Arbitragefreiheit verletzen würde.

Bei Wahl des Geldmarktbonds $B(t)$ als Numéraire und Übergang zum risikolosen Martingalmaß \mathcal{Q} ergibt sich für den Quotienten:

$$d \frac{P(t, t + \tau)}{B(t)} = \frac{P(t, t + \tau)}{B(t)} \left(-f(t, t + \tau) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW^\mathcal{Q}(t) \right)$$

Dieser ist somit offensichtlich – unabhängig von der Restlaufzeit τ kein Martingal unter \mathcal{Q} . Daher ist der Sliding-Bond nicht selbstfinanzierend. \square

Dieses Resultat verleiht auch dem Ausdruck *selbstfinanzierend* seine ganz natürliche Bedeutung. Durch die Verschiebung des Horizonts geht dem Investor nämlich stets ein gewisser Teil seiner Verzinsung verloren, nämlich gerade die Forwardrate mit der Restlaufzeit des Sliding Bonds $f(t, t + \tau)$. Sliding-Bonds können und dürfen somit offensichtlich nicht in das Spektrum handelbarer Instrumente aufgenommen werden und dienen hier nur als mathematisches Hilfsmittel.

Den „Konstruktionsfehler“ der Sliding-Bonds behebt der sogenannte Rolling-Horizon-Bond. Statt stets genau eine Einheit des Sliding-Bonds zu halten, wächst diese Stückzahl nun an und kompensiert den Anleger somit gerade für das Rollen der Fälligkeit.

Definition 2.3.3 (Rolling-Horizon-Bond). Ein Rolling-Horizon-Bond $R(t, \tau)$ mit Restlaufzeit τ (oder kurz τ -RHB) ist ein Kontrakt, bei dem sich die Stückzahl $\phi(t)$, die in einem Sliding-Bond gehalten wird, stets wie folgt verändert:

$$R(t, \tau) = \phi(t)P(t, t + \tau),$$

$$\phi(t) = \exp\left(\int_0^t f(t, t + \tau) d\tau\right).$$

Proposition 2.3.4. Die Dynamik eines τ -RHBs $R(t, \tau)$ ist gegeben durch

$$dR(t, \tau) = R(t, \tau) \left(\left(r(t) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b \right) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right).$$

Dabei ist der Anfangswert $R(0, \tau)$ wieder der Wert eines Zero-Bonds $P(0, T)$ mit $T = \tau$. Außerdem gilt nun für alle $\tau \in [0, \infty)$, dass τ -RHBs selbstfinanzierend sind.

Beweis. Die Dynamik in der Definition des τ -RHB ergibt sich nach Itô sowie nach der bereits aus Lemma 2.3.2 bekannten Dynamik von $P(t, t + \tau)$:

$$\begin{aligned} dR(t, \tau) &= d\phi(t)P(t, t + \tau) + \phi(t) dP(t, t + \tau) \\ &= f(t, t + \tau)\phi(t)P(t, t + \tau) + \phi(t) dP(t, t + \tau) \\ &= \phi(t)P(t, t + \tau) \left(\left(r(t) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b \right) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right) \\ &= R(t, \tau) \left(\left(r(t) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b \right) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right) \end{aligned}$$

Für den Nachweis, dass RHBs selbstfinanzierend sind, verwenden wir wieder den Geldmarktbond $B(t)$ als Numéraire und gehen zum risikolosen Martingalmaß \mathcal{Q} über. Es ergibt sich wie erhofft, dass

$$d\frac{R(t, \tau)}{B(t)} = \frac{R(t, \tau)}{B(t)} \left(-\tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW^\mathcal{Q}(t) \right),$$

für alle $\tau \geq 0$ ein Martingal ist. □

Bemerkung 2.3.1. Der einfachste Rolling-Horizon-Bond ist der Geldmarktbond $B(t)$, denn für einen RHB mit der konstanten Restlaufzeit $\tau = 0$ ergibt sich wegen $\tilde{M}^\top(0) = 0$ gerade

$$\begin{aligned} dR(t, 0) &= R(t, 0) \left(r(t) dt - \tilde{M}^\top(0)\sigma b dt - \tilde{M}^\top(0)\sigma dW(t) \right) \\ &= R(t, 0)r(t) dt \end{aligned}$$

und $R(0, 0) = \phi(0)P(0, 0) = 1$, also genau die gleiche Dynamik wie beim Geldmarktbond $B(t)$.

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

2.3.2. Einfacher und selbstfinanzierender Perpetual-Bond

Für unsere theoretischen Überlegungen hinsichtlich des idealen Kreditmanagements eines staatlichen (Dauer-)Schuldners spielen zudem *Perpetual-Bonds* eine zentrale Rolle. Wir werden in Kapitel 4 feststellen, dass diese quasi als risikolose Finanzierung für einen Dauerschuldner dienen können. Wieder greifen wir auf die Ergebnisse von Rutkowski (1999) zurück, wobei dort Perpetual-Bonds unter dem Namen *Console-Bonds* firmieren.

Definition 2.3.5 (Einfacher Perpetual-Bond). *Ein einfacher Perpetual-Bond (oder kurz Perpetual) $p^\infty(t)$ ist ein Kontrakt mit unendlicher Laufzeit, welcher zu jedem zukünftigen Zeitpunkt $T > t$ stets eine Geldeinheit, bzw. genauer den infinitesimalen Teil einer Geldeinheit $1 dt$, zahlt. Der Wert ist daher gegeben durch*

$$p^\infty(t) := \int_t^\infty P(t, T) dT.$$

Zudem sei die Perpetualrate definiert durch:

$$r^\infty(t) := \frac{1}{p^\infty(t)}$$

Diese beschreibt gerade die Höhe der kontinuierlichen Zahlungen, falls zu einem Zeitpunkt t genau eine Geldeinheit in einem Perpetual $p^\infty(t)$ gehalten wird.

Bemerkung 2.3.2. Das Integral, welches den Perpetual $p^\infty(t)$ definiert, ist nur dann wohldefiniert, wenn $P(t, T)$ für $T \rightarrow \infty$ schnell genug gegen null konvergiert. Dies wird gerade durch Annahme (A) in unserem Zinsmodell sichergestellt. Desweiteren gilt $P(t, T) > 0$ f. s. für alle $T \geq t$ und somit folgt $p^\infty(t) > 0$ und $r^\infty(t) > 0$ f. s. .

Proposition 2.3.6. *Für den Perpetual ergibt sich die folgende Dynamik*

$$dp^\infty(t) = -1 dt + p^\infty(t) \left(r(t) dt + \psi^{\infty\top}(t) \sigma b dt + \psi^{\infty\top}(t) \sigma dW(t) \right),$$

wobei der \mathcal{F}_t -adaptierte Prozess $\psi^\infty(t)$ definiert sei durch die Funktion

$$\psi^{\infty\top}(u) := \frac{1}{p^\infty(u)} \frac{\partial p^\infty(u)}{\partial u}.$$

Dabei sei p^∞ – wieder unter Dehnung der üblichen Notation – nicht nur der

2.3. Weitere Finanzinstrumente

stochastische Prozess, sondern zugleich auch eine Funktion von u (siehe (2.7)):

$$p^\infty(u) = \int_0^\infty \exp\left(-\tilde{A}(s) - \tilde{M}^\top(s)u\right) ds$$

Der einfache Perpetual ist nicht selbstfinanzierend.

Beweis. Zunächst machen wir uns zu nutze, dass wir den Wert eines Perpetuals nicht nur als Integral über alle T -Zero-Bonds, sondern auch als Integral über alle Sliding-Bonds darstellen können:

$$p^\infty(t) = \int_t^\infty P(t, T) dT = \int_0^\infty P(t, t + \tau) d\tau$$

Für diese kennen wir aber bereits die Dynamik aus Lemma 2.3.2. Wegen des Fubini-Theorems aus Protter (2010) können wir diese wie folgt sortieren, denn alle Integranden sind wieder messbar und beschränkt:

$$\begin{aligned} & dp^\infty(t) \\ &= \int_0^\infty P(t, t + \tau) \left((r(t) - f(t, t + \tau) - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma b) dt - \tilde{M}^\top(\tau)\sigma dW(t) \right) d\tau \\ &= \left(\int_0^\infty P(t, t + \tau) d\tau \right) r(t) dt \\ &\quad - \left(\int_0^\infty P(t, t + \tau) f(t, t + \tau) d\tau \right) dt \\ &\quad + \left(\int_0^\infty -P(t, t + \tau) \tilde{M}^\top(\tau) d\tau \right) (\sigma b dt + \sigma dW(t)) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Betrachten wir nun die drei Integrale bzw. Terme getrennt: Das erste Integral ist per definitionem gerade der Wert des Perpetuals. Zur Auflösung des zweiten Integrals können wir uns den Zusammenhang (2.1) zwischen Forwardraten und Zero-Preisen zu eigen machen, aus dem folgt, dass

$$\frac{\partial P(t, t + \tau)}{\partial \tau} = -f(t, t + \tau)P(t, t + \tau).$$

Das zweite Integral ist somit die Differenz $P(t, t) - P(t, \infty)$. Auf Grund der Beschränktheit der Forwardraten in unserem Zinsmodell (Annahme (A)), ist der Zero-Preis im Unendlichen gerade 0 und somit ergibt sich $P(t, t) - P(t, \infty) = 1$.

Zunächst wenden wir uns nun noch $\psi^\infty(u)$ zu und bestimmen die darin ent-

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

haltene Ableitung:

$$\begin{aligned} p^\infty(u)\psi^{\infty\top}(u) &= \frac{\partial p^\infty(u)}{\partial u} \\ &= \int_0^\infty -\tilde{M}^\top(s) \exp\left(-\tilde{A}(s) - \tilde{M}^\top(s)u(t)\right) ds \\ &= \int_0^\infty -\tilde{M}^\top(s)P(t, t+s) ds \end{aligned}$$

Nutzt man dies, um den dritten Term in (2.28) zu vereinfachen, so folgt schließlich für die Dynamik des einfachen Perpetuals:

$$dp^\infty(t) = -1 dt + p^\infty(t) \left(r(t) dt + \psi^{\infty\top}(t) (\sigma b dt + \sigma dW(t)) \right)$$

Auch der Perpetual ist offensichtlich nicht selbstfinanzierend, da er ja gerade die „Summe“ von nicht selbstfinanzierenden Sliding-Bonds ist. Und tatsächlich gilt

$$d\frac{p^\infty(t)}{B(t)} = -\frac{1}{B(t)} dt + \frac{p^\infty(t)}{B(t)} \psi^{\infty\top} \sigma dW^{\mathcal{Q}}(t).$$

unter dem \mathcal{Q} -Maß und der Quotient ist somit kein Martingal. \square

Daher führen wir – genau wie beim Übergang von Sliding- zu Rolling-Horizon-Bond – wieder eine erweiterte Version ein: in diesem Fall den sogenannten *selbstfinanzierenden Perpetual*. Die Zahlung zu jedem Zeitpunkt t in Höhe „einer“ Geldeinheit $1 dt$, welche bei dem einfachen Perpetual verloren geht, wird nun wieder in das Instrument reinvestiert und die Stückzahl, die im Perpetual gehalten wird, entsprechend erhöht.

Definition 2.3.7 (Selbstfinanzierender Perpetual). *Ein selbstfinanzierender Perpetual $P^\infty(t)$ ist ein Kontrakt, bei dem sich die Stückzahl $\phi(t)$, die in einem normalen Perpetual $p^\infty(t)$ gehalten wird, stets wie folgt verändert:*

$$\begin{aligned} P^\infty(t) &= \phi(t)p^\infty(t), \\ \phi(t) &= \exp\left(\int_0^t r^\infty(s) ds\right) \end{aligned}$$

Korollar 2.3.8. *Die Dynamik eines selbstfinanzierenden Perpetuals ist durch*

$$dP^\infty(t) = P^\infty(t) \left(\left(r(t) + \psi^{\infty\top} \sigma b \right) dt + \psi^{\infty\top} \sigma dW(t) \right)$$

gegeben.

2.3. Weitere Finanzinstrumente

Beweis. Die Dynamik in der Definition des selbstfinanzierenden Perpetuals $P^\infty(t)$ ergibt sich wieder nach Itô:

$$\begin{aligned} dP^\infty(t) &= d\phi(t)p^\infty(t) + \phi(t) dp^\infty(t) \\ &= \frac{1}{p^\infty(t)}\phi(t) dt p^\infty(t) - \phi(t) dt + P^\infty(t) \left(r(t) dt + \psi^{\infty\top} (\sigma b dt + \sigma dW(t)) \right) \\ &= P^\infty(t) \left(r(t) dt + \psi^{\infty\top} (\sigma b dt + \sigma dW(t)) \right) \end{aligned}$$

Durch den Maßwechsel zum risikolosen \mathcal{Q} -Maß wird auch deutlich, dass diese Variante des Perpetuals tatsächlich selbstfinanzierend ist:

$$d\frac{P^\infty(t)}{B(t)} = \frac{P^\infty(t)}{B(t)}\psi^{\infty\top}(t)\sigma dW^\mathcal{Q}(t)$$

□

Bemerkung 2.3.3. Ergibt sich aus dem Kontext eindeutig, auf welche Variante des Perpetuals – den einfachen oder den selbstfinanzierenden – wir uns beziehen, so nennen wir ihn in beiden Fällen nur *Perpetual*.

2.3.3. Sensitivität der Instrumente

Zu beobachten ist, dass alle vorgestellten selbstfinanzierenden Finanzinstrumente eine ähnliche Dynamik besitzen. Tatsächlich folgen alle eingeführten – und auch fast alle anderen selbstfinanzierenden Instrumente – einer solchen gemeinsamen Dynamik:

Proposition 2.3.9 (Selbstfinanzierendes Instrument). *Es sei $\psi^I(t)$ ein beliebiger n -dimensionaler progressiv messbarer Prozess, wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte*

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \|\psi^I(t)\|^k \right) < \infty \quad f. s. . \quad (2.29)$$

Dann ist jedes Instrument mit der Dynamik

$$\begin{aligned} dI(t) &= I(t) \left(r(t) dt + \psi^{I\top}(t)\sigma b dt + \psi^{I\top}(t)\sigma dW(t) \right), \\ I(0) &= I_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

selbstfinanzierend, wobei I_0 ein beliebiger deterministischer Anfangswert sei.

Beweis. Entscheidend für die Arbitragefreiheit ist der gemeinsame Term vor dem Marktpreis des Risikos $\sigma b dt$ und dem stochastischen Term $\sigma dW(t)$. Denn

2. Zinsmodell und Finanzinstrumente

relativ zum Geldmarktbond $B(t)$ gilt dann unter dem risikoneutralen Martingalmaß

$$d\frac{I(t)}{B(t)} = \frac{I(t)}{B(t)}\psi^{I\top}(t)\sigma dW^{\mathcal{Q}}(t).$$

Der Quotient ist somit ein Martingal. Dabei stellt die Integrierbarkeitsbedingung von $\psi^I(t)$ sicher, dass eine eindeutige Lösung für die SDE existiert. Denn dies und die Beschränktheit der Shortrate (Lemma 2.1.6) erlaubt die Verwendung von Korollar A.1.2. \square

Der Prozess $\psi^I(t)$ beschreibt, wie stark bzw. wie sensitiv der Preis des Instruments auf mögliche Schwankungen des Marktes reagiert. Daher definieren wir:

Definition 2.3.10 (Sensitivität). *Wir bezeichnen den in Proposition 2.3.9 auftretenden charakterisierenden Prozess $\psi^I(t)$ als (relative) Sensitivität des Instruments I oder auch als Sensitivitätsprozess.*

Um ein besseres Verständnis und eine Intuition für die relativen Sensitivitäten zu erhalten, listen wir für einige bekannte Instrumente die entsprechenden Sensitivitäten auf:

- Der Geldmarktbond hat eine konstante Sensitivität von $\psi = 0$. Er hat somit kein instantanes Risiko. Profitiert entsprechend aber auch nicht vom Marktpreis des Risikos.
- Ein Zero-Bond $P(t, T)$ besitzt eine zeitabhängige Sensitivität $\psi(t) = -\tilde{M}^\top(T - t)$. Diese ist für $T \gg t$ stark ausgeprägt und sinkt im Zeitablauf immer weiter bis auf 0 ab.
- Ein τ -RHB hat die zeithomogene Sensitivität $\psi = -\tilde{M}^\top(\tau)$. Je größer also die Restlaufzeit τ eines RHBs, desto stärker die Ausprägung der Sensitivität.
- Für den Perpetual haben wir die Sensitivität schon eingeführt. Diese ist zeithomogen, aber zustandsabhängig $\psi(t) = \psi^\infty(u)$.

Bemerkung 2.3.4 (Einschränkungen). Für die meisten Instrumente gilt in unserem Modell $I(t) > 0$ f. s. . Insbesondere für Derivate, beispielsweise für Swaps, ist diese Eigenschaft jedoch nicht mehr gegeben, da diese sowohl einen positiven als auch einen negativen Barwert besitzen können. In der Umgebung von $I(t) = 0$ sind *relative* Sensitivitäten jedoch nicht wohldefiniert und erfüllen insbesondere nicht mehr die Beschränktheitsbedingung aus Proposition 2.3.9. Falls

2.3. Weitere Finanzinstrumente

solche Instrumente betrachtet werden sollen, könnte man jedoch auf *absolute* Sensitivitäten übergehen. Man würde dann also das Instrument direkt durch $\hat{\psi}^I(t) = I(t) \cdot \psi^I(t)$ charakterisieren, um die Singularität bei Null zu verhindern:

$$dI(t) = I(t)r(t) dt + \hat{\psi}^{I\top}(t)\sigma b dt + \hat{\psi}^{I\top}(t)\sigma dW(t), \quad I(0) = I_0$$

Swaps könnte man beispielsweise aber auch als *Summe* zweier Instrumente auffassen, also $I^{Fix}(t)$ und $I^{Float}(t)$, die jeweils für sich genommen wohldefinierte Instrumente gemäß Proposition 2.3.9 bilden.

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Im folgenden Kapitel werden die bisherigen Erkenntnisse über einzelne Instrumente genutzt, um ein Bond-Portfolio zu modellieren. Zunächst verwenden wir dafür die in Abschnitt 2.3 eingeführten Rolling-Horizon-Bonds. Aus diesen lässt sich relativ leicht ein wohldefiniertes Portfolio konstruieren, da sie keine Fälligkeiten besitzen. In einem weiteren Schritt wählen wir eine alternative Charakterisierung des Portfolios über Sensitivitäten. Diese Modellierung ist – unter kleineren Einschränkungen – unabhängig von den gewählten Instrumenten und bietet somit eine deutlich höhere Flexibilität.

Für ein solches Portfolio, charakterisiert durch Sensitivitäten, nutzen wir dann die Methoden der *stochastischen Kontrolle*, um ein einfaches Portfolioproblem explizit zu lösen. Dabei maximieren wir den erwarteten Endnutzen des Vermögens. Im gesamten Kapitel beschränken wir uns also zunächst auf den Anlagefall. Der nächste Schritt, der Übergang auf ein Schuldenportfolio und dessen Optimierung, folgt in den anschließenden Kapiteln.

3.1. Modellierung eines Bond-Portfolios

Ein Investor bzw. Anleger kann sein Vermögen fast beliebig in die eingeführten Finanzinstrumente investieren. Das resultierende Portfolio muss jedoch in jedem Falle *selbstfinanzierend* sein.

Wir präzisieren diese Anforderung nun und führen die folgenden Begrifflichkeiten zur Beschreibung und Modellierung einer Strategie, die der Anleger verfolgt, ein. Dabei richten wir uns in der Darstellung im Wesentlichen nach Korn (1997).

Wir nehmen an, dass das Anfangsvermögen zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $x_0 > 0$ gegeben ist. Desweiteren definieren wir mit $T > 0$ einen beliebigen, aber festen Anlage- bzw. *Optimierungshorizont*. Zunächst gehen wir davon aus, dass das *Instrumentenspektrum*, die Menge aller dem Anleger zur Verfügung stehenden Instrumente, aus genau $d = n + 1$ verschiedenen RHBs $R(t, \tau_i)$ besteht. Dabei ist n die Anzahl der stochastischen Faktoren des Zinsmodells und die Laufzeiten sind durch $\tau_0 < \dots < \tau_{d-1}$ gegeben, wobei $\tau_0 = 0$ sei. Der Geldmarktbond

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

ist also auch Teil des Instrumentenspektrums. Letzteres ist keine notwendige Anforderung, verkürzt aber die Darstellung.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $R_i(t) = R(t, \tau_i)$ und fassen die d verschiedenen τ_i -RHBs zu einem d -dimensionalen stochastischen Prozess $R(t)$ zusammen

$$dR_i(t) = R_i(t) \left(r(t) dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma b dt + -\tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma dW(t) \right),$$

der entgegen der üblichen Notation mit seiner Indexierung bei 0 beginne.

Definition 3.1.1.

1. Eine Handelsstrategie $\phi(t)$ ist ein \mathbb{R}^d -wertiger progressiv messbarer Prozess mit $t \in [0, T]$.
2. Für eine gegebene Handelsstrategie $\phi(t)$ wird der Vermögensprozess wie folgt definiert:

$$X(t) := \sum_{i=0}^{d-1} \phi_i(t) R_i(t) = \phi^\top(t) R(t) \quad (3.1)$$

Dabei nehmen wir an, dass das Anfangsvermögen mit $X(0) = x_0 > 0$ gegeben ist.

3. Ein (externer) Zahlungsstrom $z(t)$ ist ein \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess mit $t \in [0, T]$, für den gilt:

$$\int_0^T |z(t)| dt < \infty \quad f. s. \quad (3.2)$$

4. Ein Paar aus Handelsstrategie und externem Zahlungsstrom $(\phi(t), z(t))$ wird selbstfinanzierend genannt, falls für den zugehörigen Vermögensprozess $X(t)$ zu allen Zeitpunkten $t \in [0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t \phi^\top(s) dR(s) - \int_0^t z(s) ds \quad \text{bzw.} \\ dX(t) &= \phi^\top(t) dR(t) - z(t) dt, \quad X(0) = x_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bemerkung 3.1.1. Üblicherweise wird an die Handelsstrategie $\phi(t)$ noch eine zusätzliche Integrierbarkeitsbedingungen gestellt, um zu garantieren, dass der resultierende Vermögensprozess stets wohldefiniert ist und eine eindeutige Lösung besitzt. Entsprechendes wird in der nachfolgenden Definitionen 3.1.2 nachgeholt.

3.1. Modellierung eines Bond-Portfolios

Eine Strategie bzw. ein sich daraus ergebendes Portfolio ist also selbstfinanzierend, wenn alle Gewinne und Verluste des Portfolios durch Gewinne und Verluste der einzelnen Instrumente ausgelöst werden. Insbesondere darf sich durch eine reine Umschichtung des Portfolios, also einer Veränderung der Handelsstrategie $\phi(t)$, der Wert des Portfolios nicht ändern.

Externe Zahlungsströme machen das Portfolio-Modell flexibler, da dadurch *kontrollierte* Veränderungen des Portfoliowertes durch exogene Zahlungen möglich sind. Oftmals werden externe Zahlungsströme als *Konsumprozess* interpretiert, welcher bei der Optimierung eines Portfolios zum Gesamtnutzen beiträgt (siehe Korn (1997)). Auch das Einkommen oder die Einnahmen eines Anlegers (siehe bspw. El Karoui und Jeanblanc-Picqué (1998) oder Korn und Krekel (2000)) können so einbezogen werden. Ähnlich werden wir dies in Kapitel 4 nutzen, um die Einnahmen und Ausgaben des Staates bzw. des Schuldners einzubeziehen.

Die Einführung des Vermögensprozesses über die Handelsstrategie $\phi(t)$ ist sehr intuitiv, da diese gerade die Stückzahl reflektiert, die von einem bestimmten Instrument R_i zu einem bestimmten Zeitpunkt t gehalten wird. Der resultierende Vermögensprozess bleibt jedoch unhandlich. Eine Alternative ist es, die Strategie über die relative Portfoliozusammensetzung zu beschreiben:

$$\pi_i(t) = \frac{\phi_i(t)R_i(t)}{X(t)}, \quad i = 0, \dots, d-1. \quad (3.4)$$

Dazu passend definieren wir einen $(d-1)$ -dimensionalen *Portfolioprozess* $\pi(t)$, für den gelte:

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_{d-1}(t))^\top \quad (3.5)$$

In diesem reduzierten Prozess fehlt $\pi_0(t)$, dessen Wert ist jedoch stets implizit gegeben, da sich die relativen Anteile gerade zu 1 summieren müssen:

$$\pi_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi_i = 1 - \pi^\top(t)\mathbf{1} \quad (3.6)$$

Durch die Aufgabe eines Freiheitsgrades beim Übergang von Handelsstrategie zu Portfolioprozess ist nun sichergestellt, dass die Selbstfinanzierungsbedingung (3.3) stets eingehalten wird. Aus dieser und den Definitionen hinsichtlich des

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Portfolioprozesses π folgt nämlich für den Vermögensprozess X :

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \phi^\top(t) dR(t) - z(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \phi_i(t) R_i(t) \left(r(t) dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma b dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \\
&= X(t) \sum_{i=0}^{d-1} \pi_i(t) \left(r(t) dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma b dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \\
&= X(t) \left(r(t) + \sum_{i=0}^{d-1} \pi_i(t) \left(-\tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma b dt - \tilde{M}(\tau_i)^\top \sigma dW(t) \right) \right) - z(t) dt
\end{aligned}$$

Fassen wir nun die Sensitivitäten zu $\Psi^R = \left(-\tilde{M}(\tau_1) | \dots | -\tilde{M}(\tau_{d-1}) \right) \in \mathbb{R}^{n \times d-1}$ zusammen, so folgt, da $\tilde{M}(\tau_0) = \tilde{M}(0) = \underline{0}$:

$$dX(t) = X(t) \left(r(t) dt + \pi^\top(t) \Psi^{R^\top} \sigma b dt + \pi^\top(t) \Psi^{R^\top} \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \quad (3.7)$$

Ähnlich wie bei der Handelsstrategie können wir auch für den Portfolioprozess den Begriff *selbstfinanzierend* formal einführen. Durch die Aufgabe eines Freiheitsgrades gegenüber der Handelsstrategie reduziert sich die Anforderung zu der folgenden Integrierbarkeitsbedingung:

Definition 3.1.2. Der Prozess $\pi(t)$ ist ein selbstfinanzierender Portfolioprozess bzw. das Paar aus (π, z) eine selbstfinanzierende Strategie, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \|\pi(t)\|^k \right) < \infty \quad f.s. \quad (3.8)$$

Diese Bedingung stellt im Zusammenspiel mit Satz A.1.2 und Lemma 2.1.6 sicher, dass der zugehörige Vermögensprozess $X^\pi(t)$ stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Bemerkung 3.1.2. Abschließend müssen wir noch bemerken, dass wir in dem hier vorgestellten Modell einen idealisierten Markt unterstellen. Ganz ähnlich wie ihn auch schon Merton (1971) gefordert hat: Es gibt keinerlei Transaktionskosten, es sind im Grunde beliebig stark gehebelte Strategien zulässig, kontinuierliches Handeln ist möglich. Zudem gehen wir davon aus, dass der Portfoliomanager *kein* „Price Maker“ sei; die gewählte Strategie (π, z) hat also keine Rückwirkung auf die Preisentwicklung der Instrumente.

3.2. Steuerung eines Portfolios durch Sensitivitäten

Zentrale Elemente der Portfoliomodellierung sind in erster Linie drei Bausteine: das gewählte Instrumentenspektrum $R(t)$, eine selbstfinanzierende Strategie (π, z) und der aus beidem resultierende Vermögensprozess $X(t)$.

Betrachtet man die Dynamik des Vermögensprozesses $X(t)$ näher, so zeigt sich, dass diese – bis auf die externen Zahlungsströme – die gleiche Struktur besitzt wie die einzelner selbstfinanzierender Instrumente (siehe Proposition 2.3.9). Statt über Instrumente und Strategie ist es daher naheliegend, den Vermögensprozess direkt über einen Sensitivitätsprozess $\psi(t)$ zu charakterisieren:

$$dX^\psi(t) = X^\psi(t) \left(r(t) dt + \psi^\top(t) \sigma b dt + \psi^\top(t) \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \quad (3.9)$$

Im bisherigen Fall der Rolling-Horizon-Bonds ist der Sensitivitätsprozess gerade als $\psi(t) = \Psi^R \pi(t)$ gegeben.

Könnte man diesen Sensitivitätsprozess nicht nur in der Darstellung nutzen, sondern auch in der Steuerung eines Portfolios, nämlich als stochastische Kontrollvariable in einem Portfolioproblem, welches auf dem Vermögensprozess (3.9) beruht, so hätte man sich von der Festlegung auf ein bestimmtes Instrumentenspektrum emanzipiert.

Ein solches Vorgehen wurde bereits in Kraft (2004) unter dem Begriff „Elasticity Approach to Portfolio Optimization (EAPO)“ vorgeschlagen. Wir werden diesen Ansatz konsequent weiterverfolgen und auf unser mehrdimensionales Zinsmodell übertragen.

Das Instrumentenspektrum. Eine der Schwierigkeiten bei der Portfoliooptimierung mit Bonds, deren Fälligkeit, lässt sich durch die Modellierung des Portfolios mittels Rolling-Horizon-Bonds elegant umschiffen. Technisch verhalten diese sich wie Aktien, einzig die stochastische Shortrate unterscheidet dieses Modell dann von dem des Standard-Aktienmodells. Wählt man genau $d = n + 1$ verschiedene Rolling-Horizon-Bonds, so lassen sich einfache zugehörige Portfolioprobleme sogar explizit und eindeutig lösen.

Ein wesentlicher, durchaus gerechtfertigter Kritikpunkt an einem solchen Vorgehen ist jedoch die Festlegung auf ein fiktives, realitätsfernes Instrumentenspektrum. Tatsächlich handelbar und für einen Anleger verfügbar sind die Rolling-Horizon-Bonds nämlich nicht. Ein typisches, realistisches Instrumentenspektrum sieht zu einem bestimmten Zeitpunkt t eher wie folgt aus:

- Im Geldmarkt sind T -Zero-Bonds verbreitet. Für deren Laufzeit gilt zu meist $T - t \leq 1 \text{Jahr}$.

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

- Im Kapitalmarkt, also für längere Laufzeiten $T - t > 1\text{Jahr}$, sind Zero-Bonds unüblich. Standardbonds sind hier Par-Kupon-Anleihen.
- Swaps¹ mit festgelegten Standardlaufzeiten $T = t + \tau_i$, wobei τ_i üblicherweise ganze Jahre sind.

Für die Modellierung eines solchen realistischen Instrumentenspektrums und die Optimierung eines zugehörigen Portfolios, ist ein angemessener Umgang mit fälligen Instrumenten und Kuponzahlungen notwendig.

Für Letzteres könnten wir ähnlich wie beim Übergang von Sliding- zu Rolling-Horizon-Bonds oder vom einfachen zum selbstfinanzierenden Perpetual definieren, dass die Kuponzahlungen stets über den Kupon-Bond selbst refinanziert werden, indem die gehaltene Stückzahl erhöht wird. Letztendlich würde dadurch ein selbstfinanzierendes Instrument (siehe Definition 2.3.9) mit einem geeigneten charakterisierenden Sensitivitätsprozess entstehen.

Um fälligen Instrumenten richtig zu begegnen, erweitern wir die Definition solcher Papiere und legen für sie eine standardisierte Anschlussfinanzierung mittels des Geldmarktbonds fest. Für einen T_1 -Zero-Bond mit Laufzeit $T_1 < T$ ergäbe sich beispielsweise auf dem Zeitraum $[0, T]$ der folgende charakterisierende Sensitivitätsprozess

$$\psi(t) = \begin{cases} -\tilde{M}(T - t), & 0 < t \leq T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq T. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ähnlich lassen sich natürlich auch Instrumente, die zu einem Zeitpunkt t *noch nicht* definiert bzw. handelbar sind, einbeziehen. Das darin zu investierende Geld wird bis zum erstmöglichen Handelstag mittels der Shortrate verzinst.

Wir nehmen nun ganz allgemein an, dass das Instrumentenspektrum I genau d beliebige selbstfinanzierende Instrumente gemäß Proposition 2.3.9 umfasse, die jeweils durch ihren Sensitivitätsprozess $\psi^{I_i}(t)$ charakterisiert seien. Dabei können wir, durch die oben eingeführte Erweiterung und durch die standardisierte Anschlussfinanzierung, alle Instrumente, die innerhalb des Investitionszeitraums $[0, T]$ existieren, einbeziehen, auch wenn deren eigentliche Lebensdauer nicht das komplette Intervall $[0, T]$ abdeckt.

Ferner nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Geldmarktbond Teil des Instrumentenspektrums sei: $I_0 = B(t)$. Analog zu dem Vorgehen bei Rolling-Horizon-Bonds können wir die verschiedenen Sensitivitätsprozesse der einzelnen

¹Wir unterstellen hier vereinfacht, dass diese Swaps auf der gleichen Zinskurve wie Bonds gepreist werden.

3.2. Steuerung eines Portfolios durch Sensitivitäten

Instrumente in einer Sensitivitätsmatrix zusammenfassen.

$$\Psi^I(t) = (\psi^{I_1}(t) | \dots | \psi^{I_{d-1}}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times d-1} \quad (3.11)$$

Statt nun aber den Vermögensprozess

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \left(r(t) dt + \pi^\top(t) \Psi^{I^\top}(t) \sigma b dt + \pi^\top(t) \Psi^{I^\top}(t) \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \quad (3.12)$$

mittels des Portfolioprozesses $\pi(t)$ zu kontrollieren bzw. zu optimieren, ist es naheliegend, das in Kraft (2004) vorgeschlagene zweischrittige Lösungsverfahren zu verwenden:

Zweischrittiges Lösungsverfahren. Im ersten Schritt werden wir ein sogenanntes *reduziertes Portfolioproblem* lösen, bei dem $\psi(t)$ als stochastische Kontrolle in (3.9) verwendet wird. Eine solche Beschreibung ist nahezu unabhängig von der konkreten Ausgestaltung des Instrumentenspektrums.

Erst in einem zweiten Schritt wird dann von der optimalen Lösung des reduzierten Problems $\psi^*(t)$ auf den tatsächlichen Portfolioprozess $\pi^*(t)$ zurückgeschlossen.

Letztendlich entscheidet aber doch immer das gewählte Instrumentenspektrum I zusammen mit den zulässigen Portfolioprozessen $\pi(t)$, welche Sensitivitätsprozesse $\psi(t)$ überhaupt *zulässig* sind. Um diese Abhängigkeit zu schwächen, definieren wir zunächst in Anlehnung an den Begriff des vollständigen Markts:

Definition 3.2.1 (Vollständiges Instrumentenspektrum mit Geldmarktbond).

Wir sprechen von einem vollständigen Instrumentenspektrum I , falls zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ der Rang der Sensitivitätsmatrix $\Psi^I(t) \in \mathbb{R}^{n \times d-1}$ gleich der Anzahl der stochastischen Faktoren n ist und zudem der Geldmarktbond als Instrument I_0 zur Verfügung steht.

Bemerkung 3.2.1. Ein vollständiges Instrumentenspektrum bedeutet insbesondere, dass zu jedem Zeitpunkt t und für eine beliebige Sensitivität $\psi(t)$ ein Portfolioprozess $\pi(t)$ mit

$$\psi(t) = \Psi^I(t) \pi(t) \quad (3.13)$$

existiert. Im Allgemeinen ist $\pi(t)$ dadurch allerdings nicht eindeutig bestimmt. Die Mindestanforderung für ein vollständiges Instrumentenspektrum ist natürlich $d - 1 \geq n$. Obige Zuordnung ist genau dann eindeutig, wenn $d = n + 1$ gilt.

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Bei der Lösung der reduzierten Portfolio-Probleme in den folgenden Abschnitten werden wir stets annehmen, dass uns ein vollständiges Instrumentenspektrum zur Verfügung steht. In den Zinsmärkten ist dies eine gerechtfertigte Annahme, da die Anzahl der handelbaren Instrumente zu jedem Zeitpunkt t deutlich größer als die der Risikofaktoren sein sollte.

Daraus ergibt sich die folgende Definition eines zulässigen Sensitivitätsprozesses. Diese lässt sich auf die Definition des selbstfinanzierenden Portfolioprozesses zurückführen und stellt u. a. die eindeutige Lösbarkeit von (3.9) sicher.

Definition 3.2.2. Der Prozess $\psi(t)$ ist ein zulässiger Sensitivitätsprozess bzw. das Paar aus (ψ, z) eine zulässige Strategie, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \|\psi(t)\|^k \right) < \infty \quad f.s. \quad (3.14)$$

Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen $\psi(t)$ und $\pi(t)$ etwas näher. Falls die Instrumente die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Rolling-Horizon-Bonds mit der Sensitivitätsmatrix $\Psi^R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind, so ergibt sich eine bijektive Beziehung zwischen Sensitivität und Portfolioprozess:

$$\psi(t) = \Psi^R \pi(t), \quad \pi(t) = (\Psi^R)^{-1} \psi(t) \quad (3.15)$$

Wirklich profitieren kann man aber von der Charakterisierung über Sensitivitäten und dem zweischrittigen Verfahren vor allem, wenn das vollständige Instrumentenspektrum eine weniger klare Struktur besitzt. Denn auch bei einer anderen, komplizierteren Sensitivitätsmatrix $\Psi^I(t)$ lässt sich zu jedem Zeitpunkt t ein sinnvoller Portfolioprozess $\pi^*(t)$ bestimmen:

$$\psi^*(t) = \Psi^I(t) \pi^*(t) \quad (3.16)$$

Gerade wenn obige Beziehung nicht eindeutig ist, können wir durch den Ansatz gewinnen. Denn dann kann aus der Menge möglicher, optimaler Portfolioprozesse derjenige ausgewählt werden, der sich in anderen, zusätzlichen Kriterien positiv darstellt, wie beispielsweise der Umsetzbarkeit. Wir werden dies in den nachfolgenden Abschnitten und Kapiteln immer wieder beispielhaft für die dort optimierten Sensitivitätsprozesse demonstrieren.

Portfolio-Modellierung ohne Geldmarktbond. Bisher sind wir davon ausgegangen, dass der Geldmarktbond Teil des Instrumentenspektrums ist. Mitunter steht der Geldmarktbond jedoch nicht für Investitionen bzw. Finanzierungen zur Verfügung. In diesem Fall muss also ein anderes Instrument $I_0 \neq B(t)$ mit

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

der Sensitivität $\psi^{I_0}(t) \neq 0$ dessen Rolle übernehmen. Dieses Instrument trägt mit dem Anteil $1 - \pi(t)^\top \underline{1}$ auch zur Sensitivität des Portfolios bei. Es gilt somit der folgende Zusammenhang zwischen Sensitivität und Portfolioprozess:

$$\psi(t) = \Psi^I(t)\pi(t) + \psi^{I_0}(t)(1 - \pi(t)^\top \underline{1}) \quad (3.17)$$

bzw. gleichwertig

$$\psi(t) - \psi^{I_0}(t) = \left(\Psi^I(t) - \psi^{I_0}(t)\underline{1}^\top \right) \pi(t). \quad (3.18)$$

Allgemeiner muss daher nun auch die Definition des *vollständigen* Instrumentenspektrums gefasst werden:

Definition 3.2.3 (Vollständiges Instrumentenspektrum). *Wir sprechen von einem vollständigen Instrumentenspektrum I , falls*

$$\text{Rang} \left(\Psi^I(t) - \psi^{I_0}(t)\underline{1}^\top \right) = n \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Das Instrument $I_0 \in I$ sei dabei beliebig festgelegt. Insbesondere muss es nicht dem Geldmarktbond entsprechen.

Für ein vollständiges Instrumentenspektrum mit genau $d = n + 1$ Instrumenten, lässt sich $(\Psi^I(t) - \psi^{I_0}(t)\underline{1}^\top)$ invertieren und es stellt sich wieder ein bijektiver Zusammenhang zwischen Sensitivität und Portfolioprozess ein. Für den Fall eines Portfolios aus $n + 1$ Rolling-Horizon-Bonds könnte die Forderung von $\tau_0 = 0$ nun also problemlos entfallen und es würde gelten:

$$\pi(t) = \left(\Psi^R + \tilde{M}(\tau_0)\underline{1}^\top \right)^{-1} \left(\psi(t) + \tilde{M}(\tau_0) \right) \quad (3.20)$$

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

Wir werden nun für das vorgestellte Portfoliomodell bzw. den Vermögensprozess (3.9) den erwarteten Endnutzen mittels Methoden der *stochastischen Kontrolle* maximieren. Dies ist eines der klassischen Optimierungsprobleme. Im Folgenden werden wir auf externe Zahlungen z verzichten und annehmen, dass $z \equiv 0$.

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, lösen wir zuerst das reduzierte Portfolioprobem, welches optimale Sensitivitäten liefert. In einem zweiten Schritt schließen wir aus diesen dann auf mögliche Portfolioprozesse zurück.

Zur Beschreibung des Nutzens verwenden wir in diesem Kapitel die folgende Nutzenfunktion $U(x)$, bei der der einzige Freiheitsgrad γ die Risikoaversion des

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Investors steuert:

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad \gamma < 1, \gamma \neq 0 \quad (3.21)$$

Dabei stellt $\gamma = 1$ die Grenze zur Risikoaffinität dar. Für $\gamma = -\infty$ spiegelt die Nutzenfunktion die Präferenzen eines maximal risikoaversen Investors wieder.

Bemerkung 3.3.1. Damit die Nutzenfunktion wohldefiniert ist, müssen wir den Fall $\gamma = 0$ an dieser Stelle ausschließen. Dies hat aber rein technische Gründe. Üblicherweise wird dieser Sonderfall durch die Verwendung des Logarithmus als Nutzenfunktion aufgefangen (siehe bspw. Korn (1997)). In der Lösungsherleitung würde dieser Fall dann stets getrennt behandelt werden. Die optimale Strategie verhält sich aber letztlich doch genau so, als ob wir ganz am Ende $\gamma = 0$ setzen würden. Daher verzichten wir hier auf die entsprechende Fallunterscheidung und stören uns bei der Interpretation möglicher Lösungen nicht weiter an der formalen Lücke bei einer Risikoaversion von $\gamma = 0$.

Portfolio Problem. Das Optimierungsproblem stellt sich also wie folgt dar:

$$\max_{\psi \in \mathcal{A}([0, T], x_0)} \mathbb{E} \left[U \left(X^\psi(T) \right) \right] \quad (\text{P})$$

Dabei ist ψ der Sensitivitätsprozess und in unserem Fall zugleich die stochastische Kontrolle. Von dieser abhängig ist der kontrollierte Prozess $X^\psi(t)$ und insbesondere der Wert des Vermögens $X^\psi(T)$ bei Erreichen des Optimierungshorizonts. Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse \mathcal{A} sei durch Definition A.2.1 im Anhang gegeben.

3.3.1. Lösung des Optimierungsproblems

Bei der Lösung des obigen Optimierungsproblems (P) folgen wir Korn und Kraft (2002). Insbesondere verwenden wir das dort genutzte dreistufige Lösungsverfahren. Dieses basiert auf der zu (P) gehörigen Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (kurz: HJB-Gleichung). Wir wollen diese kurz motivieren:

Heuristische Herleitung der HJB-Gleichung. Zunächst definieren wir die zum Optimierungsproblem gehörige Wertfunktion:

$$v(t, x, u) = \max_{\psi \in \mathcal{A}([t, T], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[U \left(X^\psi(T) \right) \right]. \quad (3.22)$$

Dabei symbolisiert $\mathbb{E}^{t, x, u}$ den bedingten Erwartungswert nach \mathcal{F}_t mit $X(t) = x$ und $u(t) = u$. Da der Prozess $X(t)$ über die Shortrate $r(t)$ mittelbar auch

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

von der Dynamik von $u(t)$ abhängt, ist die Wertfunktion von der Zeit t , dem Vermögen x und dem Zustand der Zinskurve u abhängig.

Im Optimierungshorizont T ist die Wertfunktion bekannt, da sowohl der Erwartungswert als auch die Strategieabhängigkeit entfällt. Es gilt somit

$$v(T, x, u) = U(x). \quad (3.23)$$

Der klassische Lösungsansatz bei der stochastischen Kontrolle ist die Verwendung des Bellman-Prinzips:

$$v(t, x, u) = \sup_{\psi \in \mathcal{A}([t, s], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[v \left(s, X^\psi(s), u(s) \right) \right]$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit v_t die erste Ableitung von v nach t und definieren dies analog auch für die Komponenten x und u sowie Ableitungen höherer Ordnungen. Zu Gunsten einer übersichtlicheren Notation verzichten wir bei den Ableitungen von v auf die explizite Darstellung der Abhängigkeiten von (t, x, u) . Wenden wir nun Itô's Lemma an, um v zu erweitern, so folgt:

$$\begin{aligned} v(t, x, u) &= \sup_{\psi \in \mathcal{A}([t, s], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[v(t, x, u) + \int_t^s v_t dy + \frac{1}{2} \int_t^s v_{xx} d\langle X(y), X(y) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s v_{xu} d\langle X(y), u(y) \rangle + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\int_t^s v_{uu} d\langle u(y), u(y) \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s v_x dX(y) + \int_t^s v_u du(y) \right] \\ &= \sup_{\psi \in \mathcal{A}([t, s], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[v(t, x, u) + \int_t^s v_t dy + \frac{1}{2} \int_t^s X(y)^2 v_{xx} \psi(y)^\top \sigma \sigma^\top \psi(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s X(y) v_{xu} \sigma \sigma^\top \psi(y) dy + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\int_t^s v_{uu} \sigma \sigma^\top dy \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s X(y) v_x \left(r(y) dy + \psi^\top(y) \sigma b dy + \psi^\top(y) \sigma dW(y) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s v_u \left((Su + R) dy + \sigma dW(y) \right) \right] \end{aligned}$$

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Nun teilen wir durch $s - t$ und bestimmen den Grenzwert $s \downarrow t$. Unter der Annahme, dass der Grenzwert auch innerhalb des Integrals gebildet werden darf und unter der Annahme, dass das verbleibende stochastische Integral ein Martingal ist, entfällt der Erwartungswert:

$$0 = \sup_{\psi \in \mathcal{A}(t,x)} \left[v_t + \frac{1}{2} x^2 v_{xx} \psi(t)^\top \sigma \sigma^\top \psi(t) + x v_{xu} \sigma \sigma^\top \psi(t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(v_{uu} \sigma \sigma^\top \right) + x v_x \left(r(t) + \psi^\top(t) \sigma b \right) + v_u (S u + R) \right] \quad (3.24)$$

Dabei war der letzte Schritt ein rein heuristischer, da die Korrektheit der Umformung nicht ohne Weiteres nachzuweisen ist. Die Herleitung diente somit nur der Motivation der HJB-Gleichung, welche gerade durch (3.24) und die zugehörige Randbedingung (3.23) gegeben ist.

Wenden wir uns nun wieder dem dreischrittigen Lösungsverfahren zu. In Schritt 1 ist die optimale Kontrolle in Abhängigkeit von der (noch unbekannt) Lösung der HJB-Gleichung zu bestimmen. Durch Verwendung der optimalen Kontrolle vereinfacht sich die HJB-Gleichung zu einer partiellen Differentialgleichung (Abk.: PDE), deren Lösung in Schritt 2 erfolgt und die explizite Wertfunktion liefert. Zwar ist damit scheinbar das Optimierungsproblem bereits gelöst, jedoch ist Schritt 3 von zentraler Bedeutung, wie insbesondere von Korn und Kraft (2002) betont wird: Alle Annahmen, welche in den ersten beiden Schritten gemacht wurden, müssen überprüft werden und erst ein passendes Verifikationstheorem stellt sicher, dass es sich tatsächlich um eine optimale Lösung handelt.

Schritt 1. Eine simple Umordnung der HJB-Gleichung führt zu

$$0 = \sup_{\psi \in \mathcal{A}(t,x)} \left[\left(\frac{1}{2} x^2 v_{xx} \psi(t)^\top \sigma + x v_{xu} \sigma + x v_x b^\top \right) \sigma^\top \psi(t) + v_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left(v_{uu} \sigma \sigma^\top \right) + x v_x r(t) + v_u (S u + R) \right].$$

Bildet man die Ableitung nach $\psi(t)$ und setzt diese 0, so lässt sich das (vermutliche) Supremum der rechten Seite bestimmen:

$$0 \stackrel{!}{=} \left(x^2 v_{xx} \psi(t)^\top \sigma + x v_{xu} \sigma + x v_x b^\top \right) \sigma^\top \Rightarrow \psi^*(t) = -\frac{1}{x v_{xx}} \left(v_{xu}^\top + v_x \sigma^{-\top} b \right) \quad (3.25)$$

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

Die zweite Ableitung nach $\psi(t)$ ist $x^2 v_{xx}^\top \sigma \sigma^\top$. Da die Kovarianzmatrix $\sigma \sigma^\top$ positiv definit ist, muss zum Nachweis, dass ψ^* tatsächlich ein Supremum ist, in Schritt 3 gezeigt werden, dass $v_{xx} < 0$.

Schritt 2. Das Wiedereinsetzen von ψ^* in die HJB-Gleichung liefert die partielle Differentialgleichung

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_{xx}} \left(\sigma^\top v_{xu}^\top + v_x b \right)^\top \left(\sigma^\top v_{xu}^\top + v_x b \right) + v_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left(v_{uu} \sigma \sigma^\top \right) + x v_x r(t) + v_u (Su + R),$$

mit der Randbedingung $v(T, x, u) = U(x)$.

Die Nutzenfunktion ist durch $U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ mit $\gamma < 1$ und $\gamma \neq 0$ gegeben. Separieren wir nun die Abhängigkeiten der Wertfunktion mit dem Ansatz $v(t, x, u) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma f(t, u)$, so vereinfacht sich die Randbedingung zu $f(T, u) = 1$ und die PDE – bei Eliminierung von x^γ – zu

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{f} \left\| \sigma^\top f_u^\top + fb \right\|^2 + \frac{1}{\gamma} f_t + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} \text{tr} \left(f_{uu} \sigma \sigma^\top \right) + f r(t) + \frac{1}{\gamma} f_u (Su + R). \quad (3.26)$$

Mit dem Ansatz $f(t, u) = \exp(h(t) + G(t)^\top u)$, bei nachfolgender Eliminierung von f sowie unter Ausnutzung der expliziten Form der Shortrate im Zinsmodell $r(t) = M^\top(0)u + A(0)$ erhalten wir:

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma - 1} \left\| \sigma^\top G(t) + b \right\|^2 + \frac{1}{\gamma} h_t + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} G(t)^\top \sigma \sigma^\top G(t) + A(0) + \frac{1}{\gamma} G^\top(t) R + \frac{1}{\gamma} G_t^\top u + M^\top(0)u + \frac{1}{\gamma} G^\top(t) Su \quad (3.27)$$

Da diese PDE für alle u gelten muss, ergibt sich zunächst für $G(t)$ folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen (Abk.: *ODE*):

$$-\frac{1}{\gamma} G^\top(t) S - \frac{1}{\gamma} G_t^\top = M^\top(0), \quad \text{mit } G(T) = 0 \quad (3.28)$$

Vergleichen wir dies mit der ersten Arbitragefreiheits-Bedingung (2.9)

$$-\tilde{M}^\top(\tau) S + M^\top(\tau) = M^\top(0),$$

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

so folgt aus dieser sofort die Lösung

$$G(t) = \gamma \tilde{M}(T-t) = \gamma \int_0^{T-t} M(s) ds.$$

Nun ergibt sich eine zweite ODE

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma-1} \left\| \sigma^\top \gamma \tilde{M}(T-t) + b \right\|^2 \\ & + \frac{1}{\gamma} h_t + \frac{1}{2} \gamma \tilde{M}(T-t)^\top \sigma \sigma^\top \tilde{M}(T-t) + A(0) + \tilde{M}(T-t)^\top(t) R \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit der Randbedingung $h(T) = 0$. Deren Lösung ist durch das folgende Integral definiert:

$$\begin{aligned} h(t) = & -\gamma \int_0^t \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma-1} \left\| \sigma^\top \gamma \tilde{M}(T-t) + b \right\|^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \gamma \tilde{M}(T-t)^\top \sigma \sigma^\top \tilde{M}(T-t) + A(0) + \tilde{M}(T-t)^\top(t) R \right) dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Insgesamt ergibt sich also für v die folgende Lösung

$$v(t, x, u) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp \left(h(t) + \gamma \tilde{M}(T-t)^\top u \right), \quad (3.31)$$

und der Kandidat für die optimale Kontrolle ist gegeben durch:

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \left(\sigma^{-\top} b + \gamma \tilde{M}(T-t) \right) \quad (3.32)$$

Bevor wir dieses Ergebnis interpretieren, wenden wir uns zunächst der Verifikation desselben zu.

Schritt 3. Die Verifikation der Lösung ist vollständig Korn und Kraft (2002) entnommen. Wir passen das Vorgehen jedoch an einigen Stellen an, wenn dies wegen der Verwendung des mehrdimensionalen Zinsmodells notwendig ist. Die technischen Grundlagen für diesen Schritt sind in Anhang A ausgeführt. In der Notation des Anhangs ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(X(t), u^\top(t) \right)^\top, \\ \Lambda(t, x, u, \psi) &= \begin{pmatrix} x \left(A(0) + M^\top(0)u + \psi^\top \sigma b \right) \\ Su + R \end{pmatrix}, \\ \Sigma(t, x, u, \psi) &= \begin{pmatrix} x \psi^\top \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

Somit ist Y ein $(n + 1)$ -dimensionaler Prozess, wobei aber nur die erste Komponente mittels ψ gesteuert werden kann. Der Term $A(0) + M^\top(0)u$ in der Funktion Λ beschreibt wieder die stochastische Shortrate $r(t)$ im verwendeten Zinsmodell. Mittels des Differentialoperators D^ψ aus dem Anhang können wir die zu lösende HJB-Gleichung wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in \mathcal{A}(t,x)} D^\psi v(t, x, u) &= 0, \\ v(T, x, u) &= \frac{1}{\gamma} x^\gamma. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die zweite Komponente des Prozesses Y , nämlich u . Diese unterliegt keiner stochastischen Kontrolle, daher können wir die Zulässigkeit (siehe Definition A.2.1) des zweiten Teils von Y unabhängig von ψ^* bewerten. Bedingung (i) der Definition erfordert die Existenz einer eindeutigen Lösung der SDE

$$du(t) = (Su + R) dt + \sigma dW(t), \quad u(0) = u_0,$$

wobei u_0 ein konstanter Startwert sei. Die entsprechende eindeutige Lösung ist in Lemma 2.1.4 dargestellt. Nach Satz A.3.1 gilt des weiteren

$$E \left(\max_{s \in [0, T]} |u(s)|^k \right) < \infty$$

für alle $k \geq 1$. Somit ist auch Bedingung (iii) für den nicht-kontrollierten Teil von $Y(t)$ nachgewiesen. Von nun an können wir uns ausschließlich auf die erste, gesteuerte Komponente von Y konzentrieren, also den Vermögensprozess X .

Für die Verwendung von Korollar A.2.3 müssen wir die folgenden Annahmen überprüfen:

1. Die optimale Kontrolle $\psi^*(t)$ ist progressiv messbar und zulässig gemäß Definition A.2.1.
2. v ist die Lösung der HJB-Gleichung (3.24) mit Randbedingung (3.23).
3. v erfüllt die Integrierbarkeitsbedingung (A.13) in Korollar A.2.3

Nachweis von 1. Die Kontrolle $\psi^*(t)$ ist deterministisch, stetig und beschränkt. Sie ist somit progressiv messbar und erfüllt Eigenschaft (ii) von Definition A.2.1. Der Vermögensprozess (3.9) hat die folgende eindeutige Lösung, woraus Bedin-

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

gung (i) folgt:

$$X^*(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t r(s) + \psi^{*\top}(s) \sigma b - \frac{1}{2} \psi^{*\top}(s) \sigma \sigma^\top \psi^*(s) ds + \int_0^t \psi^{*\top}(s) \sigma dW(s) \right)$$

Dies lässt sich mittels Korollar A.1.2 nachweisen, dessen Voraussetzungen für alle Koeffizienten, insbesondere auch durch die Shortrate $r(t)$ (siehe Lemma 2.1.6), erfüllt sind.

Es verbleibt noch Eigenschaft (iii) zu zeigen. Wir betrachten daher eine geeignete Abschätzung für $X^*(t)^k$. Dabei nutzen wir Korollar 2.1.5 und wählen feste Konstanten $K_i > 0$.

$$\begin{aligned} X^*(t)^k &= x^k \exp \left(k \int_0^t r(s) + \psi^{*\top}(s) \sigma b - \frac{1}{2} \psi^{*\top}(s) \sigma \sigma^\top \psi^*(s) ds \right. \\ &\quad \left. + k \int_0^t \psi^{*\top}(s) \sigma dW(s) \right) \\ &\leq K_1 \exp \left(k \int_0^t r(s) ds + k \int_0^t \psi^{*\top}(s) \sigma dW(s) \right) \\ &\leq K_2 \exp \left(k \int_0^t \tilde{M}^\top(t-s) \sigma dW(s) \right. \\ &\quad \left. + k \int_0^t \psi^{*\top}(s) \sigma dW(s) \right) \\ &= K_2 \exp \left(\int_0^t g^\top(s) dW(s) \right), \end{aligned}$$

wobei die n -dimensionale deterministische und beschränkte Funktion g wie folgt gegeben sei:

$$g^\top(s) = k \left(\tilde{M}^\top(t-s) + \psi^{*\top}(s) \right) \sigma$$

Daher können wir mit Korollar A.3.2 folgern, dass auch Bedingung (iii) für eine zulässige Kontrolle erfüllt ist:

$$E^{0,x} \left(\sup_{t \in [0,T]} \|X^*(t)\|^k \right) \leq E^{0,x} \left(\sup_{t \in [0,T]} \left\| K_2 \exp \left(\int_0^t g^\top(s) dW(s) \right) \right\|^k \right) < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nachweis von 2. Die Wertfunktion ist wie folgt gegeben

$$v(t, x, u) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp \left(h(t) + \gamma \tilde{M}(T-t)^\top u \right). \quad (3.33)$$

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

Da die zweite Ableitung $v_{xx} = (\gamma - 1)x^{\gamma-2} \exp(\dots) < 0$ f. s. für $\gamma < 1$ und $v \in C^2(\bar{Q})$, ist v offensichtlich eine Lösung der HJB-Gleichung (3.24) mit Randbedingung (3.23).

Nachweis von 3. In der Wertfunktion v sind $h(t)$ und $\tilde{M}(T-t)$ beschränkt, somit gilt für einen beliebigen Startpunkt (t_s, x_s, u_s) , wegen Lemmas 2.1.4 und 2.1.5:

$$\begin{aligned}
 v(t, X(t), u(t)) &= \frac{1}{\gamma} X(t)^\gamma \exp\left(h(t) + \gamma \tilde{M}(T-t)^\top u(t)\right) \\
 &= \frac{1}{\gamma} x_s^\gamma \exp\left(\gamma \int_{t_s}^t r(s) + \psi^\top(s) \sigma b - \frac{1}{2} \psi^{*\top}(s) \sigma \sigma^\top \psi(s) ds \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \int_{t_s}^t \psi^\top(s) \sigma dW(s)\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left(h(t) + \gamma \tilde{M}(T-t)^\top u(t)\right) \\
 &\leq K_1 \exp\left(\gamma \int_{t_s}^t \tilde{M}^\top(t-s) \sigma dW(s) + \gamma \int_{t_s}^t \psi^\top(s) \sigma dW(s) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \tilde{M}(T-t)^\top \int_{t_s}^t \exp(S(t-v)) \sigma dW(v)\right) \\
 &\leq K_1 \exp\left(\int_0^t g^\top(s) dW(s)\right),
 \end{aligned}$$

wobei die n -dimensionale deterministische und beschränkte Funktion g wie folgt gegeben sei:

$$g^\top(s) = \gamma \left(\tilde{M}^\top(t-s) + \psi^\top(s) + \tilde{M}(T-t)^\top \exp(S(t-s)) \right) \sigma$$

Daher gilt nach Korollar A.3.2

$$\begin{aligned}
 E^{t_s, x_s} \left(\sup_{s \in [t_s, T]} \|v(s, X(s), u(s))\|^2 \right) \\
 \leq E^{t_s, x_s} \left(\sup_{t \in [t_s, T]} \left\| K_1 \exp\left(\int_0^t g^\top(s) dW(s)\right) \right\|^2 \right) < \infty
 \end{aligned}$$

für beliebige Zustände (t_s, x_s, u_s) .

Somit haben wir alle getroffenen Annahmen überprüft und die Voraussetzungen für die Verwendung von Korollar A.2.3 verifiziert. Zusammengefasst ergibt sich das folgende Resultat:

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

Theorem 3.3.1. Die optimale Strategie für das Portfolioproblem (P) ist durch den Sensitivitätsprozess

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} b + \left(1 - \frac{1}{1-\gamma}\right) (-\tilde{M}(T-t)) \quad (3.34)$$

gegeben.

3.3.2. Interpretation der optimalen Lösung

Der optimale Sensitivitätsprozess besteht aus zwei Teilen. Der erste Term $\sigma^{-\top} b$ zzgl. eines Faktors entspricht dem klassischen Resultat von Merton (1969, 1971), wie es auch im Aktienfall mit konstanter Shortrate auftritt. Es ist in gewisser Weise das optimale Marktportfolio, ausgedrückt in Sensitivitäten, und setzt den Marktpreis des Risikos zur Volatilität ins Verhältnis.

Der zweite Teil in der Lösung, $-\tilde{M}(T-t)$, spiegelt gerade die Sensitivität eines Zero-Bonds mit der Fälligkeit T , also dem Optimierungshorizont wieder. Ein solcher T -Zero-Bond stellt im betrachteten Optimierungsproblem gerade die risikolose Anlage dar, denn der Wert dieses Bonds zum Zeitpunkt T – genau eine Geldeinheit – ist von Beginn an und zu jedem Zeitpunkt $t \leq T$ bekannt.

Bei der Beschreibung der Nutzenfunktion haben wir bereits festgestellt, dass der Parameter γ die Risikoaversion des Investors steuert. Und tatsächlich ergibt sich bei einem maximal risikoaversen Investor ($\gamma \rightarrow -\infty$) eine vollständige Anlage in den risikolosen T -Zero-Bond. Bei minimaler Risikoaversion ($\gamma \nearrow 1$) jedoch wird eine stark gehebelte Strategie verfolgt, bei der sich der Investor mittels risikolosem T -Zero-Bond sogar immer mehr zusätzliches Kapital leiht, um dies in das Marktportfolio zu investieren. Zwischen diesen beiden Extremen skaliert der Faktor $\frac{1}{1-\gamma}$ den Hebel, mit dem in das optimale Marktportfolio investiert wird. Dieser Skalierungsfaktor ist stets positiv und bewegt sich in dem Intervall von $(0, \infty)$.

Das Ergebnis lässt sich also auch ohne Kenntnis des Instrumentenspektrums schon relativ gut interpretieren. Diese Veranschaulichung bietet sogar den Vorteil, dass offensichtlich wird, welche Bedeutung der Term $-\tilde{M}(T-t)$ besitzt. Hätte man mit verschiedenen Rolling-Horizon-Bonds oder langlaufenden Zero-Bonds operiert, so wäre die oben beschriebene klare Aufteilung in Marktportfolio einerseits und risikoloses Instrument andererseits zumindest maskiert.

3.3.3. Übergang zu konkreten Instrumentenspektren

Nach der Lösung des reduzierten Portfolioproblems besteht der nächste Schritt im zweischrittigen Lösungsverfahren (siehe Abschnitt 3.2) nun natürlich dar-

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

in, aus dem optimalen Sensitivitätsprozess eine konkrete Finanzierungsstrategie für ein gewisses Instrumentenspektrum zu generieren. Implizit haben wir bereits bei der Interpretation angenommen, dass dem Investor der T -Zero-Bond zur Verfügung steht. Dies ist natürlich nicht notwendiger Weise der Fall. In einem vollständigen Markt besteht jedoch immer die Möglichkeit, einen perfekten Hedge zu bilden, der diesen Zero-Bond dupliziert.

Stehen dem Investor genau $d = n + 1$ beliebige, aber unabhängige Instrumente zur Verfügung, so haben wir in Abschnitt 3.2 bereits die Eindeutigkeit der Beziehung zwischen Sensitivität und Portfolioprozess festgestellt. Bei Wahl eines vollständigen Instrumentenspektrums aus Rolling-Horizon-Bonds – also bei einer Sensitivitätsmatrix Ψ^R und eines beliebigen, aber davon unabhängigen RHB $R(t, \tau_0)$ mit $\tau_0 \geq 0$ – haben wir in (3.20) bereits den folgenden Zusammenhang herausgearbeitet:

$$\begin{aligned}\pi^*(t) &= \left(\Psi^R + \tilde{M}(\tau_0) \mathbf{1}^\top \right)^{-1} \left(\frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} b + \frac{\gamma}{1-\gamma} \tilde{M}(T-t) + \tilde{M}(\tau_0) \right) \\ \pi_0^*(t) &= 1 - \mathbf{1}^\top \pi^*(t)\end{aligned}$$

Hier ist es also nicht notwendig, dass das 0-te Instrument besondere Eigenschaften bzw. Sensitivitäten besitzt, sondern es kann beliebig gewählt werden. Insbesondere muss es nicht das risikolose Instrument sein.

Üblicherweise kann ein Anleiheinvestor aber aus deutlich mehr Investitionsmöglichkeiten wählen. Nehmen wir nun an, dass er *zusätzlich* noch in den risikolosen T -Zero-Bond investieren könnte und dass $\tau_0 = 0$ sei. Dann wäre π^* ein deutlich klarer strukturierter und sogar konstanter Portfolioprozess:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{1}{1-\gamma} \Psi^{R-1} \sigma^{-\top} b \\ \pi_{\text{Zero}}^* &= 1 - \frac{1}{1-\gamma} \\ \pi_0^* &= 1 - \mathbf{1}^\top \pi^* - \pi_{\text{Zero}}^*\end{aligned}$$

Durch eine geschickte Wahl der Instrumente kann der Investor also sein Ziel womöglich leichter erreichen, da die beiden dargestellten Strategien π letztlich zur gleichen Sensitivität gegenüber Marktbewegungen und somit zum genau gleichen Ergebnis führen. Zu guter letzt ist natürlich noch darauf hinzuweisen, dass selbst im letzten Fall eines konstanten Portfolioprozesses kontinuierlich gehandelt werden müsste, um die relativen Wertanteile des Portfolios tatsächlich festzuhalten.

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

3.3.4. Alternativer Lösungsweg

Der Übergang von einer konstanten zu einer stochastischen Shortrate hat das klassische optimale Ergebnis nicht wesentlich verändert. Einzig das risikolose Instrument ist ausgetauscht worden: der T -Zero-Bond nimmt nun den Platz des vormals risikolosen Geldmarktbonds ein. Mit dieser Erkenntnis bewaffnet, hätten wir das reduzierte Optimierungsproblem einfacher lösen können.

Bei dem folgenden alternativen Lösungsansatz ist die Lösung der HJB-Gleichung deutlich leichter zu finden und die Verifikation gelingt mit Standard-Resultaten aus der Theorie der stochastische Kontrolle.

Dafür betrachten wir wieder das Portfolio-Problem (P), erweitern aber die Definition der Wertfunktion um das risikolose Instrument:

$$v(t, x, u) = \max_{\psi \in \mathcal{A}([t, T], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[U \left(X^\psi(T) \right) \right] = \max_{\psi \in \mathcal{A}([t, T], x)} \mathbb{E}^{t, x, u} \left[U \left(\frac{X^\psi(T)}{P(T, T)} \right) \right]$$

Die Gleichheit ist gegeben, da per definitionem fast sicher gilt $P(T, T) = 1$. Betrachten wir nun den Quotientenprozess $Z(t) = \frac{X(t)}{P(t, T)}$. Inhaltlich bedeutet dies nichts anderes, als dass wir den Wert unseres Portfolios nicht mehr in Geldeinheiten beschreiben, sondern in Stücken des T -Zero-Bonds. Zum Zeitpunkt T sind beide Prozesse gleichwertig und können daher beide für die Beschreibung des Portfolioproblems genutzt werden. Der Prozess $Z(t)$ hat nach Itô's Lemma die folgende Dynamik:

$$\begin{aligned} dZ(t) = Z(t) & \left((\psi^\top(t) + \tilde{M}^\top(T-t))\sigma b dt + (\psi^\top(t) + \tilde{M}^\top(T-t))\sigma dW(t) \right. \\ & \left. + \tilde{M}^\top(T-t)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(T-t) dt + \psi^\top(t)\sigma\sigma^\top\tilde{M}(T-t) dt \right) \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\hat{b}(t) = b + \sigma^\top\tilde{M}(T-t)$, so erhalten wir

$$dZ(t) = Z(t) \left(\left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right)^\top \sigma \hat{b}(t) dt + \left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right)^\top \sigma dW(t) \right). \quad (3.35)$$

Der Startwert bei $Z(0)$ sei dabei natürlich durch $z_0 = \frac{x_0}{P(0, T)}$ gegeben. Da der Prozess $Z(t)$ *nicht* von u abhängt, verschwinden die entsprechenden Ableitungen

3.3. Optimierung eines Bond-Portfolios

in der resultierenden HJB-Gleichung:

$$0 = \sup_{\psi \in \mathcal{A}(t,z)} \left[\left(\frac{1}{2} z^2 v_{zz} \left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right)^\top \sigma + z v_z \hat{b}^\top(t) \right) \cdot \sigma^\top \left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right) + v_t \right]$$

$$v(T, z) = U(z)$$

Nun können wir auch für diese HJB-Gleichung das bereits zuvor verwendete dreisrittige Lösungsverfahren anwenden. Die Komplexität der einzelnen Schritte ist jedoch deutlich reduziert:

Schritt 1. Bildet man die Ableitung der HJB-Gleichung nach $\psi(t)$ und setzt diese 0, so lässt sich das (vermutliche) Supremum der rechten Seite bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \left(z^2 v_{zz} \left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right)^\top \sigma + z v_z \hat{b}^\top(t) \right) \sigma^\top \\ \Rightarrow \psi^*(t) &= -\frac{1}{z v_{zz}} v_z \sigma^{-\top} \hat{b}(t) - \tilde{M}(T-t) \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung nach $\psi(t)$ ist $z^2 v_{zz} \sigma \sigma^\top$. Da die Kovarianzmatrix $\sigma \sigma^\top$ positiv definit ist, muss zum Nachweis, dass ψ^* tatsächlich ein Supremum ist, in Schritt 3 gezeigt werden, dass $v_{zz} < 0$.

Schritt 2. Das Wiedereinsetzen von ψ^* in die HJB-Gleichung liefert die partielle Differentialgleichung

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_{zz}} v_z^2 \left\| \hat{b}(t) \right\|^2 + v_t$$

mit der Randbedingung $v(T, z) = U(z)$.

Separieren wir nun die Abhängigkeiten der Wertfunktion mit dem Ansatz $v(t, z) = \frac{1}{\gamma} z^\gamma \exp(g(t))$, so vereinfacht sich die Randbedingung zu $g(T) = 0$ und die PDE – bei Eliminierung von $z^\gamma \exp(g(t))$ – zu

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma - 1} \left\| \hat{b}(t) \right\|^2 + \frac{1}{\gamma} g_t$$

Die Lösung für g ergibt sich somit sofort als

$$g(t) = -\int_t^T \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\| \hat{b}(s) \right\|^2(s) ds,$$

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

und der Kandidat für die optimale Kontrolle ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \psi^*(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \hat{b}(t) - \tilde{M}(T-t) & (3.36) \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} (b + \sigma^\top \tilde{M}(T-t)) - \tilde{M}(T-t) \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} b + \left(1 - \frac{1}{1-\gamma}\right) (-\tilde{M}(T-t)).
 \end{aligned}$$

Diese entspricht, wie zu erwarten, der bereits bekannten Lösung.

Schritt 3. In der Notation des Anhangs ergäbe sich der folgende 1-dimensionale Prozess

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= Z(t), \\
 \Lambda(t, z, \psi) &= z \left(\psi^\top + \tilde{M}^\top(T-t) \right) \sigma \hat{b}(t), \\
 \Sigma(t, z, \psi) &= z \left(\psi^\top + \tilde{M}^\top(T-t) \right) \sigma.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenfunktionen erfüllen somit die Lipschitz-Stetigkeit (A.2) und die Wachstumsbeschränkungen (A.3).

Da die zweite Ableitung $v_{zz} = (\gamma - 1)z^{\gamma-2} \exp(\dots) < 0$ für $\gamma < 1$ und $v \in C^2(\bar{Q})$, ist v offensichtlich eine Lösung der HJB-Gleichung. Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um den Standard-Verifikations-Satz A.2.2 anzuwenden.

Verglichen mit dem vorangegangenen Lösungsweg ist also die Optimierung deutlich vereinfacht. Sowohl die HJB-Gleichung und ihre Lösung als auch die Verifikation ist deutlich schneller zu erreichen.

3.3.5. Interpretation der Lösung aus dem zweiten Ansatz

Ein besonderen Hinweis verdient abschließend noch die Form der optimalen Sensitivität $\psi^*(t)$ in (3.36):

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \hat{b}(t) + \left(-\tilde{M}(T-t)\right)$$

Auch in dieser Darstellung zerfällt die Lösung also in zwei Bestandteile. Jedoch in einer leicht anderen Aufteilung. Zum Einen besteht sie aus dem risikolosen Instrument $P(t, T)$ mit der Sensitivität $-\tilde{M}(T-t)$, diesmal jedoch ohne einen skalierenden Term, der von der Risikoaversion abhängt. Zum Anderen taucht wieder eine Marktportfolio bzw. Merton-Term auf, aber mit einem angepassten Marktpreis des Risikos $\hat{b}(t) = b + \sigma^\top \tilde{M}(T-t)$. Dieser entstand gerade aus

b durch die Verwendung des „Numéraires“ bzw. der Maßeinheit $P(t, T)$. Der Marktpreis des Risikos b beschreibt das Verhalten bzw. bestimmt die zusätzliche Drift gegenüber der instantan risikolosen Kassenfinanzierung. Für einen Portfoliomanager mit Horizont T wichtig ist jedoch eigentlich das Verhalten gegenüber dem tatsächlich risikolosen Instruments $P(t, T)$. Dies wird gerade in $Z(t)$ beschrieben und drückt sich in dem modifizierten Marktpreis des Risikos $\hat{b}(t)$ aus.

Da wir auch in den folgenden Kapiteln auf ganz ähnliche Strukturen stoßen, ist eine möglichst sinnvolle Interpretation bzw. Zerlegung der Lösung für uns von besonderem Interesse. Denn sie erlaubt uns Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Portfolioproblemen aufzuzeigen. Gemeinsamkeiten in der Struktur werden so offensichtlich und Veränderungen in der Lösung können so besser untersucht und hinterfragt werden.

3.4. Beispiele

Bei allen folgenden Beispielen werden wir uns stets auf das Zinsmodell mit drei Faktoren beschränken, welches wir bereits in Abschnitt 2.2 ausführlich vorgestellt haben. Wir werden dabei alle Analysen in der transformierten L -Basis des Zinsmodells darstellen. In dieser Basis lassen sich die Ergebnisse deutlich besser interpretieren, als in der für die Berechnungen genutzten M -Basis.

Die Sensitivität des optimalen Marktportfolios ist wie folgt gegeben

$$\bar{\sigma}^{-\top} b = \begin{pmatrix} 10.0745 \\ 5.7407 \\ 1681.1340 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun beispielhaft ein Instrumentenspektrum, bestehend aus Geldmarktbond, drei Rolling-Horizon-Bonds mit Laufzeiten 1, 5 und 10 Jahren und einem Zero-Bond, dessen Laufzeit dem Optimierungshorizont entspricht. Die Sensitivitätsmatrix der RHBs hat dann die folgende Form:

$$\bar{\Psi}^R = \begin{pmatrix} -0.0385 & -0.1165 & -0.1390 \\ -0.1045 & -0.2670 & -0.2653 \\ 0.1676 & 0.4815 & 0.5517 \end{pmatrix}$$

Bei einer angenommenen Risikoaversion von $\gamma = -10^7$ ergibt sich dann der

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

folgende Portfolioprozess für die einzelnen Instrumente:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{1}{1-\gamma} \Psi^{R-1} \sigma^{-\top} b = \begin{pmatrix} 0.1281 \\ -0.0886 \\ 0.0387 \end{pmatrix} \\ \pi_{\text{Zero}}^* &= 1 - \frac{1}{1-\gamma} = 1.0000 \\ \pi_0^*(t) &= 1 - \underline{1}^\top \pi^* - \pi_{\text{Zero}}^* = -0.0782\end{aligned}$$

Wegen der relativ hohen Risikoaversion ergibt sich eine nur leicht gehebelte Strategie. Auch die gewählten Laufzeiten haben einen Einfluss darauf, wie stark die Strategie gehebelt ist. Nehmen wir nun an, dass der Investor bei gleicher Risikoaversion ähnliche Laufzeiten, beispielsweise 4, 5 und 7 Jahre, wählt. Die Sensitivitätsmatrix ist dann wie folgt gegeben:

$$\bar{\Psi}^{R_{457}} = \begin{pmatrix} -0.1049 & -0.1165 & -0.1307 \\ -0.2505 & -0.2670 & -0.2768 \\ 0.4385 & 0.4815 & 0.5298 \end{pmatrix}$$

Die mittlere Spalte, welche die Sensitivitäten des 5J-RHBs repräsentiert, bleibt natürlich unverändert. Die erste und dritte Spalte sind jedoch dieser mittleren ähnlicher, da die Laufzeitunterschiede nun geringer sind. Durch die notwendige Inversion der Sensitivitätsmatrix ergibt sich dann natürlich eine deutlich stärker gehebelte Strategie π^{*457} :

$$\begin{aligned}\pi^{*457} &= \frac{1}{1-\gamma} \Psi^{R_{457}-1} \sigma^{-\top} b = \begin{pmatrix} 0.6116 \\ -0.8561 \\ 0.2722 \end{pmatrix} \\ \pi_{\text{Zero}}^{*457} &= 1 - \frac{1}{1-\gamma} = 1.0000 \\ \pi_0^{*457}(t) &= 1 - \underline{1}^\top \pi^{*457} - \pi_{\text{Zero}}^{*457} = -0.0276\end{aligned}$$

In beiden Fällen sind jedoch die Eigenschaften des Vermögensprozesses identisch, denn die optimalen Sensitivitäten sind es ja auch. Das Beispiel zeigt aber, wie durch eine geschickte Wahl von Instrumenten der Übergang von optimalen Sensitivitäten zu einer konkreten Strategie vereinfacht werden kann.

Zur Illustration verschiedener (optimaler) Strategien dienen die nachfolgenden Grafiken. Dabei ist jeweils die stochastische Entwicklung des Vermögensprozesses $X(t)$ über ein Jahr durch 40 zufällige, aber für die verschiedenen Strategien stets gleiche, stochastische Pfade repräsentiert. Es handelt sich um genau die

gleiche Stichprobe, die wir auch schon zur Illustration in Abschnitt 2.2.2 verwendet haben.

In Abb. 3.1 erfolgt die Anlage über einen Geldmarktbond. Gut zu erkennen ist, dass es keine instantanen Schwankungen des Vermögens im Zeitablauf gibt. Im Optimierungshorizont $T = 1$ ist jedoch das Vermögen $X(T)$ für verschiedene Pfade gestreut und somit nicht risikolos. Erst in Abb. 3.2 bei Verwendung eines 1J-Zero-Bonds ist dies der Fall. Aber tatsächlich verschwindet das Risiko auch nur genau in diesem Zeitpunkt. Für $t < T$ sind auch hier durchaus Schwankungen des Vermögens zu beobachten. Der Vergleich von Abb. 3.3 und Abb. 3.4 macht schließlich deutlich, wie sich die abgeleiteten optimalen Strategien bei unterschiedlicher Risikoaversion verhalten.

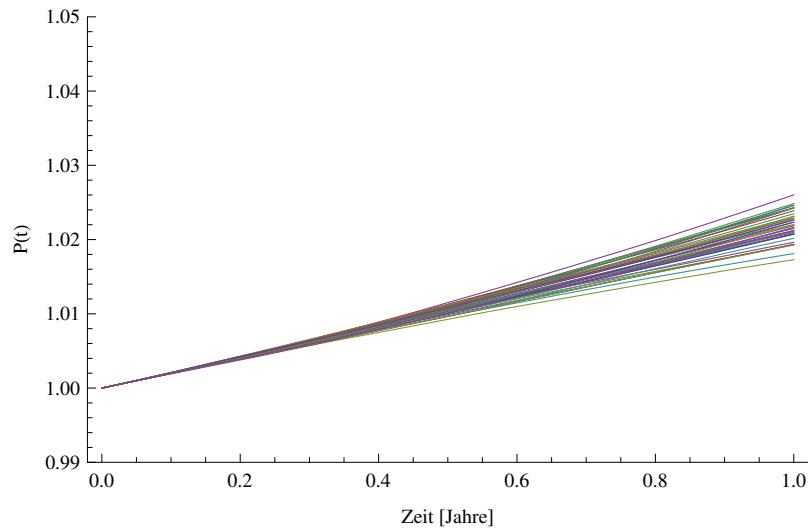


Abbildung 3.1.: Stochastische Entwicklung des Vermögensprozesses $X(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Geldanlage erfolgt dabei ausschließlich über die Shortrate und somit gilt $\psi(t) \equiv 0$.

3. Modellierung und Optimierung eines Bond-Portfolios

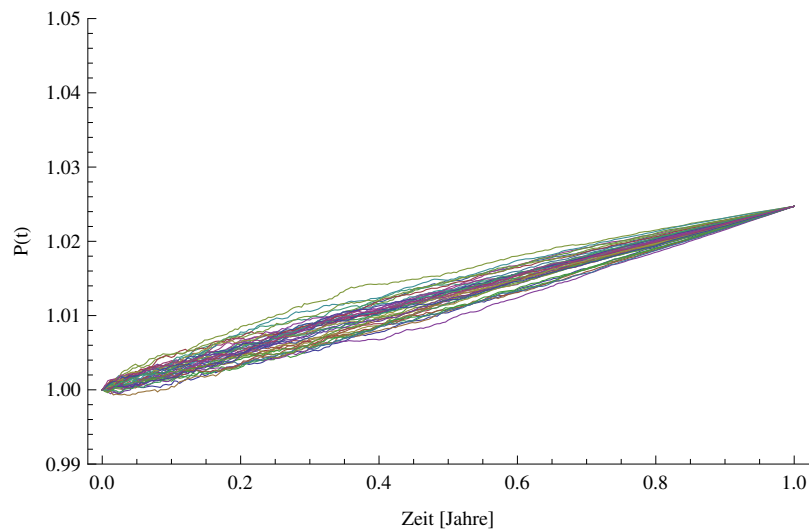


Abbildung 3.2.: Stochastische Entwicklung des Vermögensprozesses $X(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Geldanlage erfolgt dabei über einen $P(t, 1)$ -Bond, der risikolosen Anlagestrategie auf einem einjährigen Anlagehorizont. Es gilt $\psi(t) \equiv -\tilde{M}(1 - t)$.

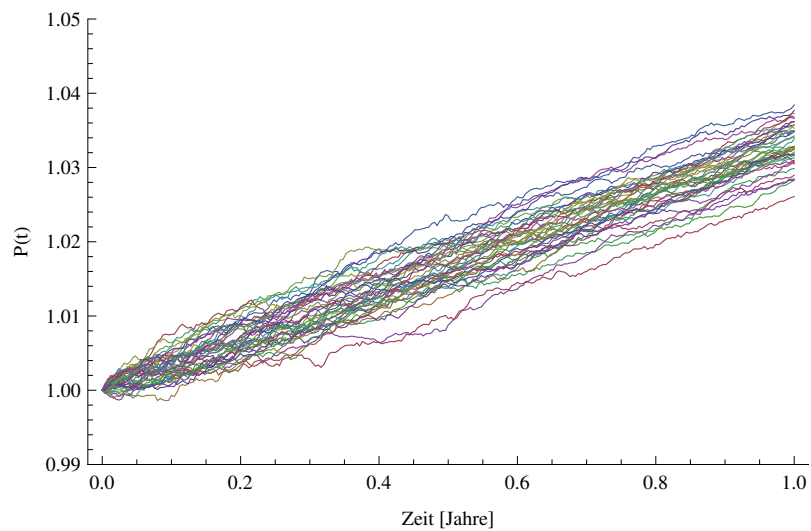


Abbildung 3.3.: Stochastische Entwicklung des Vermögensprozesses $X(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Geldanlage erfolgt dabei über die optimale Strategie $\psi^*(t)$ bei einem risikoaversen $\gamma = -1000$.

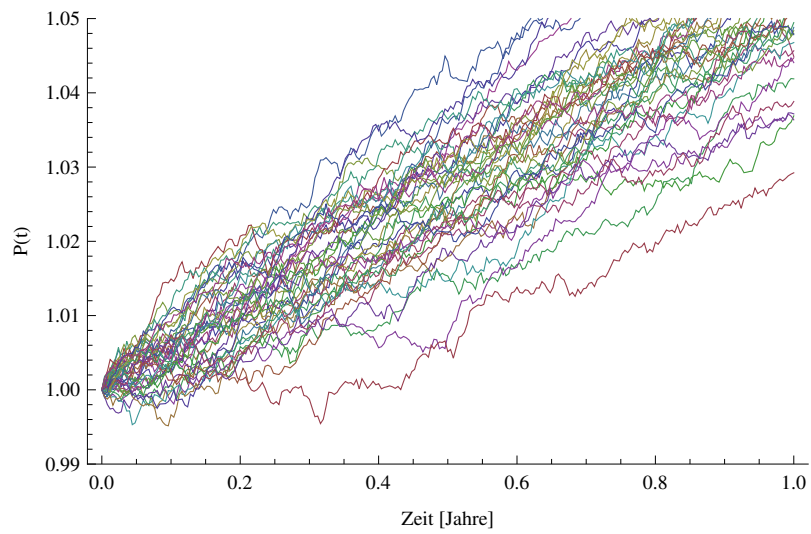


Abbildung 3.4.: Stochastische Entwicklung des Vermögensprozesses $P(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Geldanlage erfolgt dabei über die optimale Strategie $\psi^*(t)$ bei einem risikoreichen $\gamma = -300$.

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

Die Theorie der Portfoliooptimierung, insbesondere im zeitkontinuierlichen Fall, wird üblicherweise dazu genutzt, bestmögliche Anlagestrategien zu identifizieren. Wir wollen hier einen gänzlich neuen Anwendungsfall erschließen und die Methoden der dynamischen Portfoliooptimierung auf Kreditportfolios übertragen. Gesucht ist also die bestmögliche Finanzierung einer vorgegebenen Schuld. Wir werden dabei von einem staatlichen bzw. öffentlichen Dauerschuldner ausgehen. Ein solcher Kreditnehmer kann das Gros seiner Schulden nicht im eigentlichen Sinne tilgen, sondern muss auslaufende Kredite über einen sehr langen Horizont beständig refinanzieren.

Bevor wir uns jedoch der Optimierung selbst zuwenden, werden wir in diesem Kapitel die Modellierung eines Schuldenportfolios beschreiben. Als Ausgangspunkt dient dabei das im vorangegangenen Kapitel eingeführte Modell eines selbstfinanzierenden Bond-Portfolios. Wir werden dies im Folgenden anpassen, um die speziellen Zielsetzungen, nach denen das Schuldenmanagement und somit auch eine Optimierung verlangt, implementieren zu können. Wichtigster Unterschied zum Anlagefall ist, dass wir – unter Berücksichtigung einer gewissen Risikoaversion – die Minimierung von Finanzierungskosten, statt der Maximierung von Vermögen anstreben. Dafür werden wir eine neue Kostenmetrik einführen, die sogenannten *Perpetualkosten*. Diese bemessen die zukünftigen durchschnittlichen Finanzierungskosten. Statt den Barwert bzw. die Schuld eines Kreditportfolios in den Mittelpunkt zu stellen, werden wir die Perpetualkosten als zentrale charakterisierende Größe des Schuldenportfolios auffassen. Dies hat einen erheblichen Einfluss darauf, wie risikoreich einzelne Strategien erscheinen.

Zudem verwenden wir die Möglichkeit, externe Zuflüsse in ein selbstfinanzierendes Portfoliomodell einzubeziehen, um den Primärsaldo des Staatshaushaltes zu beschreiben und dem Schuldenportfolio zuzuführen. Alle anderen Zahlungen werden hingegen innerhalb des Portfolios finanziert. Wir modellieren den Primärsaldo so, dass er im Wesentlichen unabhängig von der Finanzierungsstrategie ist. Somit genügt stets die Betrachtung der Perpetualkosten, um die Vorteilhaftigkeit einer Strategie zu bewerten.

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

Da die Perpetualkosten eine zentrale Rolle in unserem Modell eines Kreditportfolios einnehmen, widmen wir uns im letzten Abschnitt des Kapitels mit einigen wichtigen Eigenschaften dieser Kosten: insbesondere ihrer Bedeutung als Basis für ein geeignetes Risikomaß und ihr Zusammenhang mit Sensitivitäten.

Zunächst führen wir jedoch das Äquivalent zum Vermögensprozess im Schuldenfall ein. Dabei gehen wir davon aus, dass es sich um die Netto-Schuld eines Kreditnehmers handelt. Der Schuld stehen also keine Barvermögen gegenüber.

Definition 4.0.1 (Schuldprozess). Ein Schuldprozess (kurz: Schuld) $D(t)$ beschreibt den (Bar-)Wert eines Kreditportfolios zum Zeitpunkt t und sei ein \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess mit der Dynamik:

$$dD(t) = D(t) \left(r(t) dt + \psi^\top(t) \sigma b dt + \psi^\top(t) \sigma dW(t) \right) - z(t) dt \quad (4.1)$$

Die Anfangsschuld sei zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $D(0) = D_0 > 0$ gegeben.

Bemerkung 4.0.1.

1. Hier und im Folgenden ist die Schuld als *Barwert* der Verbindlichkeiten definiert. Dies unterscheidet unsere Definition grundlegend von dem zumeist verwendeten *nominalen* Schuldbegriff. Letzterer bietet nur ein unvollständiges Bild des Portfolios, da dadurch nur das Nominal, nicht aber die damit verknüpften Zinszahlungen reflektiert werden. Der Barwert hingegen stellt sicher, dass stets alle relevanten Zahlungsverpflichtungen berücksichtigt werden.
2. Wir nehmen zunächst an, dass das Kreditportfolio vollständig durch den Sensitivitätsprozess ψ definiert bzw. kontrolliert sei. Der Übergang zu einer konkreten Strategie, basierend auf einem zu wählenden Instrumentenspektrum, erfolgt wie schon in den Kapiteln zuvor in einem nachgelagerten Schritt.
3. Die externen Zahlungsströme $z(t)$ sind noch nicht näher spezifiziert. Da diese im Schuldenfall eine zentrale Rolle spielen, widmen wir ihnen einen separaten Abschnitt 4.2.

Bemerkung 4.0.2. Bei der Entwicklung der Schuld, gehen wir somit wieder von einem idealisierten Markt aus (siehe auch Bemerkung 3.1.2). Als staatlicher Schuldenmanager ist man jedoch einer der entscheidenden Akteure auf dem Zinsmarkt: jede größere Veränderung der Finanzierungsstrategie wird Rückwirkungen auf die Zinsentwicklung haben. Nichtsdestotrotz anzunehmen, dass der

Schuldenmanager kein „Price Maker“ sei, ist somit eine starke Vereinfachung. In zukünftigen Untersuchungen gilt es also, entweder diese Vereinfachung durch ein entsprechendes strategieabhängiges Zinsmodell aufzulösen oder sich auf Optimierungsprobleme zu konzentrieren, bei denen diese Vereinfachung gerechtfertigt ist, beispielsweise Probleme, bei denen der Raum zulässiger Strategien stark beschränkt ist.

4.1. Perpetualkosten als Kostenmetrik

Bei der Geldanlage wird der Erfolg einer Strategie beim Erreichen des Anlagehorizonts T zumeist anhand des (Bar-)Wertes des Portfolios gemessen. In der Optimierung in Abschnitt 3.3 wurde daher der erwartete Nutzen des Portfolio-Barwertes $X(T)$ maximiert. Die vorgenommene Art der Bewertung ist für das Ergebnis der Optimierung bzw. die optimale Strategie von zentraler Bedeutung, denn sie bestimmt unter anderem, welche Portfoliostrategie risikolos sein wird.

Wir werden im Folgenden begründen, wieso der Barwert eine sinnvolle Bewertung im Anlagefall darstellt und daraus ableiten, wieso eine solche Bewertung im Falle eines Kreditportfolios gerade nicht angemessen ist.

Geldanlage. Der Zeitpunkt T ist der Anlage- oder Investitionshorizont. Der Name impliziert bereits eine zentrale Annahme bei der Aufstellung des Portfolio-Problems: das bis T aufgebaute Vermögen wird danach *nicht* weiter angelegt, sondern anderweitig verwendet. Sollte es auch über T hinaus angelegt werden, so wäre der Horizont des Portfolio-Problems offensichtlich nicht passend gewählt und das Problem entsprechend zu modifizieren. In Theorem 3.3.1 zeigte sich bereits, dass die optimale Strategie stark von T abhängt. Denn der Zeithorizont bestimmt gerade, welcher Zero-Bond die risikolose Anlage darstellt (siehe bspw. Sørensen (1999) oder Wachter (2003)). Die „richtige“ Wahl des Horizonts ist also bedeutsam.

Wird das Vermögen $X(T)$ nach T anderweitig verwendet, so ist der Barwert des Portfolios zu diesem Zeitpunkt eine plausible bzw. die neutrale Bewertungsmöglichkeit. Eindeutig ist diese Bewertung aber mitnichten. Es könnte beispielsweise auch der reale bzw. inflationsbereinigte Wert im Fokus eines Anlegers stehen. Eine solche alternative Bewertung hätte einen erheblichen Einfluss auf die optimale Strategie. Offensichtlich wäre in einem solchen Szenario die risikolose Anlageform ein inflationsindexierter T -Zero-Bond und nicht sein nominalverzinsliches Pendant (siehe bspw. Chiarella et al. (2007)).

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

Kreditaufnahme. Was ist nun eine sinnvolle Art und Weise den „Wert“ eines Kreditportfolios zum Zeitpunkt T zu messen? Der Barwert ist in jedem Falle ungeeignet, da diese Bewertung gerade darin begründet ist, dass das Vermögen nach T anderweitig verwendet wird. Im Schuldenfall fehlt jedoch eine entsprechende Analogie, da eine zum Zeitpunkt T existierende (Netto-) Schuld $D(T)$ nicht einfach aus anderen Quellen getilgt werden kann (Bolder und Dealey, 2011). Die Schuld *muss* also auch über den Horizont T hinaus finanziert werden. Statt die Bewertung zum Zeitpunkt T mittels Barwert vorzunehmen, betrachten wir stattdessen die zukünftigen durchschnittlichen Kosten, die nach dem Zeitpunkt T durch das Portfolio ausgelöst werden.

Definition 4.1.1 (Perpetualkosten). Die Perpetualkosten $K(t)$ seien ein reellwertiger \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess, der wie folgt definiert sei:

$$K(t) = r^\infty(t) \cdot D(t) \quad (4.2)$$

Dabei ist $D(t)$ der zuvor definierte Schuldprozess und $r^\infty(t)$ die in Definition 2.3.5 eingeführte Perpetualrate.

Die Perpetualkosten beschreiben den Durchschnitt aller zukünftigen Zahlungsverpflichtungen. Dabei werden die einzelnen Zahlungen jeweils entsprechend ihrem Barwert gewichtet, um einen wirtschaftlich fairen Mittelwert zu bilden. Deutlich wird dies, wenn wir zunächst vereinfachend annehmen, dass sich das Schuldenportfolio zum Zeitpunkt t ausschließlich aus fixen Zahlungen c_s , bspw. Tilgungs- oder Kupon-Zahlungen, die zu den Zeitpunkten t_s fällig sind, zusammensetzt. Die Schuld $D(t)$ ist dann gerade die Summe der diskontierten c_s und es ergibt sich aus der Definition der Perpetualkosten der folgende Zusammenhang:

$$\int_t^\infty K(t)P(t, s) ds = \sum_{s \in \{s | t_s > t\}} c_s P(t, t_s) \quad (4.3)$$

Die diskreten, möglicherweise sehr unregelmäßigen zukünftigen Zahlungsverpflichtungen $c(s)$ werden also in einen äquivalenten konstanten Zahlungsstrom $K(t)$ überführt. Wir nennen einen solchen Zahlungsstrom *äquivalent*, da er genau den gleichen Barwert besitzt wie die ursprünglichen Zahlungen c_s . Es wäre dem Portfoliomanager daher möglich, beide Zahlungsströme am Markt gegeneinander einzutauschen. Veranschaulicht wird dies auch in Abb. 4.1. Wichtig ist anzumerken, dass auf der rechten Seite auch die Tilgungen aufgeführt sind. Dies stellt sicher, dass die Kosten, die durch eine erneute Schuldaufnahme zur Refinanzierung dieser Tilgung entstehen, adäquat in die Perpetualkosten auf der

4.1. Perpetualkosten als Kostenmetrik

linken Seiten einfließen.

Ebenso gilt natürlich auch für allgemeine, nicht-deterministische Zahlungsverpflichtungen \hat{c}_s zu den Zeitpunkten t_s ein gleichwertiger Zusammenhang:

$$K(t) \underbrace{\int_t^\infty P(t, s) ds}_{p^\infty(t) = \frac{1}{r^\infty(t)}} = \underbrace{\sum_{s \in \{s | t_s > t\}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\hat{c}_s \exp \left(- \int_t^{t_s} r(v) dv \right) \right]}_{D(t)} \quad (4.4)$$

Einzigster Unterschied ist, dass sich der einzelne Barwert einer stochastischen Zahlung \hat{c}_s nun nur noch als Erwartungswert¹ unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} darstellen lässt und nicht mehr in ein Produkt aus Zahlung und Diskontfaktor zerfällt. Letztlich gilt die Definition der Perpetualkosten aber natürlich für beliebige Schuldenportfolios $D(t)$ nach Definition 4.0.1.

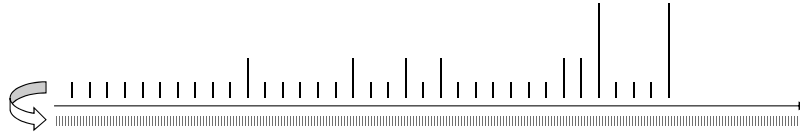


Abbildung 4.1.: Umwandlung eines unregelmäßigen Zahlungsstroms in einen äquivalenten gleichmäßigen Zahlungsstrom.

Statt also den Barwert des Schuldenportfolios zu betrachten, bewerten wir ein Portfolio anhand der erwarteten durchschnittlichen zukünftigen Kosten. Zu einem festen Zeitpunkt t bieten Barwert und Perpetualkosten natürlich eine ähnliche Information, da sie in einem proportionalen Zusammenhang zueinander stehen. Zu einem zukünftigen Zeitpunkt $s > t$ aus Sicht von t besitzen die beiden Bewertungsmöglichkeiten jedoch unterschiedliche Verteilungen. Dies führt insbesondere zu einer anderen Einschätzung des Risikos einzelner Strategien und davon, welche Strategie tatsächlich risikolos ist. Diese Aspekte betrachten wir ausführlicher in Abschnitt 4.3.3. Werfen wir zunächst einen Blick auf die dynamische Entwicklung der Perpetualkosten.

Proposition 4.1.2. *Es sei ein Sensitivitätsprozess ψ mit*

$$\int_0^T \|\psi(s)\|^2 ds < \infty \quad (4.5)$$

gegeben. Dann sind die Perpetualkosten dieser Strategie die eindeutige Lösung

¹Im Allgemeinen gilt es für die Bewertung den Erwartungswert der Summe zu bilden, da wir hier aber von endlich vielen Zahlungen \hat{c}_s ausgehen können, können wir auch die Summe der Erwartungswerte betrachten

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

von

$$dK(t) = K(t) \left(r^\infty(t) dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top (\sigma \xi(t) dt + \sigma dW(t)) \right) - r^\infty(t) z(t) dt,$$

wobei der n -dimensionale \mathcal{F}_t -adaptierte Prozess $\xi(t)$ gegeben sei durch

$$\xi(t) := b - \sigma^\top \psi^\infty(t).$$

Beweis. Die Dynamik von $p^\infty(t) = \frac{1}{r^\infty(t)}$ ist in Proposition 2.3.6 gegeben. Zusammen mit der Definition des Schuldprozesses 4.0.1 ergibt sich nach Itô:

$$\begin{aligned} dK(t) &= d \left(\frac{D(t)}{p^\infty(t)} \right) \\ &= \frac{D(t)}{p^\infty(t)} \left(\frac{dD(t)}{D(t)} - \frac{dp^\infty(t)}{p^\infty(t)} - \frac{d\langle D, p^\infty \rangle_t}{D(t)p^\infty(t)} + \frac{d\langle p^\infty, p^\infty \rangle_t}{p^\infty(t)^2} \right) \\ &= K(t) \left(r(t) dt + \psi^\top(t) \sigma b dt + \psi^\top(t) \sigma dW(t) - \frac{z(t)}{D(t)} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p^\infty(t)} dt - \left(r(t) dt + \psi^{\infty\top}(t) \sigma b dt + \psi^{\infty\top}(t) \sigma dW(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \psi^\top(t) \sigma \sigma^\top \psi^\infty(t) dt + \psi^{\infty\top}(t) \sigma \sigma^\top \psi^\infty(t) dt \right) \\ &= K(t) \left(r^\infty(t) dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma b dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma dW(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z(t)}{D(t)} dt - (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma \sigma^\top \psi^\infty(t) dt \right) \\ &= K(t) \left(r^\infty(t) dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top (\sigma \xi(t) dt + \sigma dW(t)) \right) - r^\infty(t) z(t) dt \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.1. Die Perpetualkosten $K(t)$ können auch analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 3.3.4 interpretiert werden, denn es gilt:

$$K(t) = r^\infty(t) \cdot D(t) = \frac{D(t)}{p^\infty(t)}$$

Genau wie bei $Z(t) = \frac{X(t)}{P(t,T)}$ der T -Zero-Bond als eine Maßeinheit für das Vermögen genutzt wird, fungiert nun die Perpetualfinanzierung $p^\infty(t)$ als eine Maßeinheit für den „Wert“ der Schuld. Folgerichtig ergibt sich auch in der stochastischen Entwicklung die gleiche Analogie, der neue Marktpreis des Risikos

$$\xi(t) = b - \sigma^\top \psi^\infty(t)$$

ergibt sich wieder aus b und der Sensitivität der Maßeinheit genau wie schon zuvor bei $\hat{b}(t)$ (siehe Abschnitt 3.3.5).

4.2. Modellierung externer Zahlungsströme

Im Zeitablauf, bspw. im Zeitintervall bis zum Optimierungshorizont $[0, T]$, können bereits Zahlungen anfallen. Solche Zahlungsströme betrachten wir in diesem Abschnitt.

Externe Geldflüsse werden klassischerweise dazu verwendet, sogenannte *Konsumprozesse* (siehe bspw. Korn (1997)) abzubilden. Diese beschreiben die Entnahme von Geld aus dem Portfolio, welches dann für beliebige andere Einsatzzwecke zur Verfügung steht. Der erwartete Nutzen dieser Geldabflüsse wird daher zusätzlich zum Nutzen des Endvermögens zum Zeitpunkt T in die Optimierung eines Portfolios einbezogen. Üblicherweise kontrolliert dabei der Anleger die Höhe des Konsumprozesses, so dass dieser neben dem Portfolioprozess eine weitere Kontrollvariable darstellt, mit der der Gesamtnutzen beeinflusst bzw. maximiert werden kann.

Neben der Ausgabenseite ist es natürlich auch möglich, die Einnahmeseite, also Zuflüsse zum Portfolio, zu modellieren. Entsprechende Probleme wurden beispielsweise in El Karoui und Jeanblanc-Picqué (1998) oder Korn und Krekel (2000) untersucht.

Widmen wir uns nun der Frage, welche Zahlungen im Schuldenmanagement als externe Zahlungsströme aufgefasst werden sollten.

4.2.1. Zahlungstypen des Schuldenportfolios

Zunächst können wir grundsätzlich vier verschiedene Arten von Zahlungen im Zusammenhang eines Schuldenportfolios unterscheiden:

- *Schuldaufnahme*
- *Schuldtilgung*
- *Zinskosten*: bspw. Kuponzahlungen oder Agio/Disagio-Zahlungen.
- *Primärsaldo*: der Saldo des Staatshaushaltes aus allen übrigen Einnahmen und Ausgaben, welche nicht mit dem Schuldendienst verknüpft sind.

Für den Fall eines öffentlichen Dauerschuldners gehen wir davon aus, dass es keine grundsätzlichen Veränderungen des Schuldenstandes gibt. Die Tilgung von Altschulden findet somit durch die Aufnahme neuer Kredite statt. Die ersten beiden Zahlungen fließen daher stets *innerhalb* des Portfolios. Da $D(t)$ selbstfinanzierend ist, ist die Refinanzierung bereits automatisch gewährleistet. Weitere Zahlungsströme $z(t)$ sind hierfür nicht zu beachten.

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

Die Selbstfinanzierung des Schuldenportfolios $D(t)$ stellt ebenso sicher, dass die Zinskosten vollständig refinanziert werden. Wir könnten nun mittels eines entsprechenden externen Zahlungsstrom $z(t)$ annehmen, dass die Zinskosten doch aus dem Portfolio abfließen. In einem möglichen Optimierungsproblem ergäben sich dann jedoch zwei Arten von Kosten: die Zinskosten im Zeitintervall $[0, T]$, also bis zum Optimierungshorizont T , sowie die Perpetualkosten $K(T)$, die die zukünftigen Kosten nach T widerspiegeln. Beide Kostenbeiträge hängen entscheidend von der gewählten Finanzierungsstrategie ab und müssten daher bei einem zinsoptimierten Schuldenmanagement adäquat berücksichtigt werden. Wie die verschiedenen Kosten richtig gegeneinander zu gewichten sind, ist jedoch völlig unklar. Zudem ergeben sich die Zinskosten, etwa Kupon-Zahlungen, immer in Abhängigkeit von den tatsächlichen Finanzierungsinstrumenten. Die abstrakte Beschreibung und Steuerung mittels Sensitivitäten wäre somit nicht auf das Schuldenmanagement übertragbar.

Daher legen wir fest, dass auch die Zinskosten nicht mittels eines entsprechenden externen Zahlungsstrom $z(t)$ aus dem Portfolio abfließen. Sie verbleiben also in dem selbstfinanzierenden Portfolio $D(t)$. Dadurch ergeben sich im Zeitraum $[0, T]$ keine Kosten im eigentlichen Sinne, die bei einer Optimierung zusätzlich zu berücksichtigen wären. Sämtliche Kosten werden vollständig durch die Perpetualkosten zum Zeitpunkt T widergespiegelt. Zudem können wir den Schuldprozess $D(t)$ (siehe (4.1)) weiterhin mittels eines Sensitivitätsprozesses $\psi(t)$ kontrollieren und steuern.

4.2.2. Modellierung des Primärsaldos

Durch die Refinanzierung der Zinskosten innerhalb des Portfolios entsteht ein exponentielles Wachstum der Schuld. Dieses wird in der Realität durch den Primärüberschuss bzw. den Primärsaldo des Staates gedämpft. Diesen wollen wir daher als exogen gegebenen, externen Zufluss $z(t)$ zum Schuldenportfolio in unserer Betrachtungen einbeziehen.

Durch die Refinanzierung der Zinskosten über das Schuldenportfolio und durch die Berücksichtigung des Primärsaldos wird das Schuldenmanagement umfassend beschrieben. Zentrale Aufgabe dessen ist es unter anderem, stets ausreichend Liquidität zu Verfügung zu stellen, so dass der Staat jederzeit all seinen Verpflichtungen und Aufgaben nachkommen kann. Der gesamte Staatshaushalt wird somit durch das Schuldenportfolio balanciert und ausgeglichen. Durch die Hinzunahme eines exogen gegebenen Primärsaldos, wird dieser Gedanke auch in unserem Modell verankert. Denn der Primärsaldo stellt ja nichts anderes als die Gesamtheit des „restlichen“ Haushalts dar und führt zusammen

4.2. Modellierung externer Zahlungsströme

mit der Modellierung des Schuldenportfolios zu einer umfassenden Beschreibung der Haushaltssituation.

Der Primärsaldo wird in erster Linie durch die wirtschaftliche Entwicklung und durch fiskalpolitische Entscheidungen bestimmt. Er ist somit im Wesentlichen unabhängig von einer gewählten Finanzierungsstrategie. Wegen dieser Unabhängigkeit ist es nicht notwendig, diese externen Zahlungen in ein mögliches Optimierungsproblem einzubeziehen. Daher liefern die Perpetualkosten $K(T)$ weiterhin die gesamte Information, um die Güte und Vorteilhaftigkeit verschiedener Finanzierungsstrategien bewerten bzw. vergleichen zu können.

Wir führen zunächst ein Modell für den *geplanten* Primärsaldo ein. Wir nennen diesen Primärüberschuss, somit symbolisiert ein positives Vorzeichen Netto-Einnahmen. Die Planung unterliegt dabei *nicht* der Kontrolle des Schuldenmanagers und sei stets exogen vorgegeben. Wir gehen bis auf weiteres davon aus, dass für die Planung zum Zeitpunkt t ein fester Zinszustand u^{fix} und eine feste Schuld D^{fix} gegeben seien.

Definition 4.2.1 (Geplanter Primärüberschuss). *Der geplante Primärüberschuss*

$$\hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R} \quad (4.6)$$

sei eine deterministische, reelwertige Funktion. Die für die zukünftigen Zeitpunkte $t + \tau$ aus Sicht von t geplanten Zahlungen $\hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau)$ seien die Summe aus geplanten Einnahmen und Ausgaben (ohne Zinsausgaben) des Haushalts zum jeweiligen Zeitpunkt. Dabei kann die Planung sowohl auf der gegebenen Schuld D^{fix} als auch auf dem Zustand der Zinskurve u^{fix} basieren.

Bemerkung 4.2.1. In obiger Definition ist der geplante Primärüberschuss deterministisch aus Sicht von t und gilt für einen festgelegten Zinszustand u^{fix} . Dies spiegelt den Gedanken wider, dass es sich um eine exogen gegebene, verbindliche Vorgabe für das Schuldenmanagement handelt. Grundsätzlich wäre es natürlich auch möglich, das Modell für den geplanten Primärüberschuss mit einer Stochastik zu versehen, um die Schwankungen wirtschaftlicher Einflussfaktoren adäquat zu berücksichtigen. Im kanadischen Modell (siehe Bolder und Deeley (2011)) hängt der Primärüberschuss bspw. von Faktoren wie der Entwicklung des Bruttoinlandsprodukts, der Inflation oder der Leitzinsen ab.

Welche konkrete Form der Funktion \hat{c} stellt nun aber eine sinnvolle Modellierung des geplanten Primärüberschusses dar? Sowohl Einnahmen als auch Ausgaben hängen von unterschiedlichsten Faktoren und möglichen politischen Entscheidungen ab. Wir nutzen vornehmlich zwei Argumente bzw. Annahmen, um

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

die Modellierung zu konkretisieren.

Als erster Anhaltspunkt dien uns die sogenannte Schuldenbremse. Diese wurde – mit Übergangsregelungen – 2009 im deutschen Grundgesetz verankert (Grundgesetz, 2009). Dort heißt es in Artikel 115 Absatz (2) „Einnahmen und Ausgaben sind grundsätzlich ohne Einnahmen aus Krediten auszugleichen. [...]“. Das Gesetz bezieht sich dabei auf die *nominale* Schuld. Der Haushalt muss jedoch nur strukturell, also im Mittel über mehrere Konjunkturzyklen hinweg, ausgeglichen sein: „Zusätzlich sind bei einer von der Normallage abweichenden konjunkturellen Entwicklung die Auswirkungen auf den Haushalt im Auf- und Abschwung symmetrisch zu berücksichtigen.“

Da wir den etwas willkürlichen nominalen Schuldbegriff vermeiden wollen, überführen wir den Gedanken eines strukturell ausgeglichen Haushalts in ein barwertiges Analogon. Um einen im Mittel über mehrerer Jahre hinweg ausgeglichenen Haushalt zu garantieren, müssen die Einnahmen und Ausgaben sich insgesamt in der Waage halten. Dies ist gerade dann der Fall, wenn der Barwert aller zukünftigen Ausgaben dem der Einnahmen entspricht. Teilt man den Haushalt nach dem geplanten Primärüberschuss einerseits und dem Schuldendienst andererseits auf, so ergibt sich daher die folgende Definition:

Definition 4.2.2 (Schuldenbremse). Der Wert aller zu einem Zeitpunkt t für die Zukunft geplanten Primärüberschüsse $\hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau)$ mit $\tau > 0$, muss größer sein, als der aktuelle Wert der Schuld:

$$\int_0^{\infty} \hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau) P^{fix}(t, t + \tau) d\tau \geq D^{fix} \quad (4.7)$$

Diese barwertige Definition der Schuldenbremse stellt sicher, dass zu einem festen Zeitpunkt t der geplante Primärüberschuss ausreichend hoch ist, um die aktuellen Schulden D^{fix} langfristig zu finanzieren. Auch innerhalb der Restriktionen durch die Schuldenbremse ist immer noch eine Vielzahl möglicher Modellierungen des geplanten Primärüberschusses denkbar. So wäre etwa eine Haushaltsplanung, die in den ersten beiden Jahren ($\tau \leq 2$) sehr niedrige oder gar negative Primärüberschüsse, dafür aber in den Folgejahren ($\tau > 2$) entsprechend höhere Überschüsse ansetzt, durchaus mit Bedingung (4.7) vereinbar.

Als zweite Modellannahme, neben der Schuldenbremse, gehen wir daher von einem gleichmäßigen, konstanten, also von τ unabhängigen, Verlauf des Primärüberschusses aus. Dies stellt den einfachsten, aber auch robustesten Ansatz dar:

$$\hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau) = \tilde{c}(t, D^{fix}, u^{fix}) \quad (4.8)$$

4.2. Modellierung externer Zahlungsströme

Unter dieser Annahme vereinfacht sich die Bedingung der Schuldenbremse zu

$$\tilde{c}(t, D^{fix}, u^{fix}) \cdot p^\infty(u^{fix}) \geq D^{fix}, \quad (4.9)$$

wobei $p^\infty(u)$ der in Theorem 2.3.6 definierte Wert eines Perpetuals bei gegebenem Zinszustand u ist. Wählen wir nun bspw. eine Konstante $c \geq 0$, um die Ungleichung in eine konkrete Definition zu wandeln, so ergibt sich:

$$\hat{c}(t, D^{fix}, u^{fix}, \tau) := \frac{D^{fix}}{p^\infty(u)} + c \cdot D^{fix}. \quad (4.10)$$

Mittels der Rate $c \geq 0$ kann bei der Aufstellung des Haushaltes geplant werden, welcher (relative) Teil der Schuld abgebaut werden soll. Mit $c = 0$ wird die Schuldenbremse genau eingehalten und es ist kein Schuldabbau vorgesehen.

Wir haben also ein Modell entwickelt, das beschreibt, wie zu einem festen Zeitpunkt t und bei gegebener Schuld D^{fix} und Zinszustand u^{fix} die Planung des Primärüberschusses erfolgt. Wie sehen aber nun die Zuflüsse zum Portfolio $z(t)$ im Zeitablauf aus, die sich aus (4.10) ergeben?

Bisher sind wir von einer festen Schuld D^{fix} und einem festen Zinszustand u^{fix} ausgegangen. Sind Schuld $D(t)$ und Zinszustand $u(t)$ jedoch zeitabhängig, so gilt dies gemäß (4.10) automatisch auch für den geplanten Primärüberschuss. Anpassungen der Planung sind auch in der Realität notwendig, um etwa trotz veränderter wirtschaftlicher Rahmenbedingungen die gesetzliche Schuldenbremse nicht zu verletzen. Üblicherweise erfolgen solche Anpassungen jedoch in diskreten Zeitintervallen, bspw. einmal vor Beginn eines jeden neuen Haushaltsjahres. Für unser Modell nehmen wir allerdings vereinfachend an, dass eine kontinuierliche Anpassung zu jedem Zeitpunkt t erfolgt.

Der *tatsächliche* Primärsaldo $z(t)$, der dem Schuldenportfolio zum Zeitpunkt t zufließt, ist somit der geplante Primärüberschuss zum Zeitpunkt t mit Restlaufzeit $\tau = 0$, ermittelt auf Basis der aktuellen Werte von $D(t)$ und $u(t)$:

$$z(t) := \hat{c}(t, D(t), u(t), 0) = \frac{D}{p^\infty(u(t))} + c \cdot D(t) = K(t) + c \cdot D(t) \quad (4.11)$$

Da $u(t)$ und $D(t)$ beide \mathcal{F}_t -adaptiert sind und \hat{c} eine stetige deterministische Funktion ist, ist auch $z(t)$ ein \mathcal{F}_t -adaptierter stochastischer Prozess.

Dieser fließt in die Entwicklung der Perpetualkosten (Proposition 4.1.2) ein und es ergibt sich wegen $r^\infty(t)z(t) = r^\infty(t)K(t) + cK(t)$ zusammenfassend:

$$dK(t) = K(t) \left(-c dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top (\sigma \xi(t) dt + \sigma dW(t)) \right) \quad (4.12)$$

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

Bemerkung 4.2.2. Die Definition der Schuldenbremse stellt sicher, dass die fiskalpolitischen Entscheidungen in unserem Portfolio-Modell zu jedem einzelnen Zeitpunkt t so getroffen werden, dass es in der Zukunft zu keinem Schuldanstieg kommen sollte.

Tatsächlich ist dies jedoch im Zeitablauf nicht mehr gewährleistet. Denn kommt es durch die gewählte Strategie im Schuldenmanagement $\psi(t)$ zu einem Anstieg der Perpetualkosten bzw. des Schuldenstands, so fordert die Definition der Schuldenbremse nur, dass der geplante Primärüberschuss \hat{c} für die *Zukunft* entsprechend angepasst werden muss. Der bereits erfolgte Anstieg selbst, wird jedoch durch diese Modellierung der Schuldenbremse nicht verhindert. Einzig ein zukünftiger Zinseszinsseffekt wird unterbunden.

Beides ist in (4.12) gut zu erkennen. Durch eine ungünstige Strategie $\psi(t)$ kann sich der Schuldenstand bzw. die Perpetualkosten erhöhen. Eine Weiterverzinsung dieses Anstiegs findet jedoch nicht automatisch statt, da $c \geq 0$ gilt. Einzig durch ein weiteres, ungünstiges Zusammenspiel von Strategie einerseits, codiert durch $\psi(t)$, und stochastischer Zinsentwicklung andererseits kann es zu weiteren Verlusten kommen.

Das Einhalten einer echten Schuldenobergrenze gelingt also in unserem Portfoliomodell nicht automatisch. Vielmehr benötigt es entsprechende Strategien im Schuldenmanagement, um das Überschreiten einer solchen absoluten Obergrenze zu verhindern (siehe Abschnitt 5.3). Offensichtlich beschränkt ist die Kostenentwicklung nur für die risikolose Strategie $\psi(t) = \psi^\infty(t)$. Für alle anderen konstanten Strategien ist dies nicht der Fall.

4.3. Eigenschaften der Perpetualkosten

Bevor wir uns im anschließenden Kapitel der Optimierung zuwenden, werden wir im Folgenden noch einige interessante Aspekte und Eigenschaften der Perpetualkosten (4.12) näher beleuchten.

4.3.1. Vergleich mit anderen Kostenmetriken

Die Perpetualkosten zum Zeitpunkt T vereinigen in unserem Modell die Gesamtheit vergangener *und* zukünftiger Kosten. Für die Bewertung der Qualität einer bestimmten Strategie ist diese vollständige Beschreibung essentiell.

Falls bei einer Optimierung nur die kumulierten Zinskosten des Intervalls $[0, T]$ betrachtet werden, wie es bspw. in Adamo et al. (2004) oder Bolder und Deeley (2011) vorgeschlagen wird, kann dies zu kurz greifen. Denn es könnte passieren, dass zwar die Kosten in $[0, T]$ optimiert werden, aber nur unter Inkaufnahme

deutlich erhöhter Kosten für $t > T$.

Deutlich wird dieses Problem, wenn wir zwei einfache Finanzierungsalternativen miteinander vergleichen: einen 10-jährigen Par-Kupon-Bond einerseits und einen 1-jährigen Par-Kupon-Bond sowie einen anschließenden 9-jährigen Par-Kupon-Bond andererseits. Die gesamten Zinskosten über das 10-Jahres-Intervall, sind für beide Finanzierungen in Erwartung etwa gleich groß. Wählt man jedoch einen Optimierungshorizont von einem Jahr, so scheint die zweite Finanzierung bei einer normalen, steilen Zinskurve plötzlich deutlich günstiger zu sein, als die erste Finanzierung mit einem 10-jährigen Kupon-Bond. Die Vernachlässigung der Kosten *nach* dem Optimierungshorizont kann also zur Wahl einer insgesamt suboptimalen oder gar kontraproduktiven Strategie führen.

Optimierungsprobleme auf Basis der kumulierten Zinskosten bis T sollten mit sehr viel Bedacht gewählt werden, um solche Effekte möglichst stark zu vermeiden. Die Betrachtung eines langen Optimierungsintervalls $[0, T]$ und die Beschränkung auf konstante Finanzierungsstrategien, wie etwa in Bolder und Deeley (2011), sollten dieses Problem zumindest abmildern. Dies schränkt jedoch den Gestaltungsspielraum bei der Auswahl eines passenden Optimierungsproblems stark ein. Schon das Zulassen zeitabhängiger Strategien, kann zu deutlichen Verzerrungen bei der Optimierung führen.

4.3.2. Perpetualkosten und Sensitivitäten

Die Perpetualkosten bieten zu jedem Zeitpunkt t ein umfassendes Bild der zukünftigen Kosten in einer einzigen Kennziffer. Diese Abstraktion der Kosten bietet insbesondere im Zusammenspiel mit den Sensitivitäten $\psi(t)$ einen enormen Erkenntnisgewinn. Die wesentlichen Charakteristika eines Schuldenportfolios können wir dadurch jederzeit auf analytische und vor allem sehr intuitive Art bestimmen.

Das (instantane) Risiko eines zum Zeitpunkt t gegebenen Portfolios $K^\psi(t)$ wird gemäß (4.12) durch

$$K^\psi(t) (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma dW(t) \quad (4.13)$$

getrieben. Genauso liefert

$$K^\psi(t) (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma \xi(t) dt \quad (4.14)$$

die Drift der Perpetualkosten-SDE. Diese spiegelt das erwartete, instantane Einsparpotential einer bestimmten Strategie $\psi(t)$ zum Zeitpunkt t wider. Je ähnlicher sich also $\psi(t)$ und $\psi^\infty(t)$ sind, desto kleiner ist das Risiko und desto

4. Modellierung eines Schuldenportfolios

kleiner werden tendenziell auch erwartete Einsparungen. Vergrößert man den Sensitivitätsunterschied gleichmäßig in allen Komponenten, so steigt zwar das Einsparpotential an, aber auch das Risiko.

Wir können also nur durch Kenntnis der Sensitivität eines Schuldenportfolios dessen wesentlichen Eigenschaften, Risiko und Erwartungswert, extrahieren. Diese Sensitivitäten lassen sich auch für komplizierte, aus verschiedensten Zero-, Kupon-Bonds und/oder Derivaten zusammengesetzte Portfolios errechnen, insbesondere für das tatsächlich existierende Schuldenportfolio zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Abstraktion, Sensitivitäten statt Instrumente zu verwenden, hat also nicht nur das Portfoliomodell vereinfacht. Die Abkehr von einem theoretischen Instrumentenspektrum ermöglicht es eben auch, Schuldenportfolios zu beschreiben und zu „verstehen“, die in ihrer Komplexität deutlich über einen gewählten, theoretischen Instrumentenbaukasten hinausreichen. All dies gelingt, ohne eine stochastische Simulation der Zins- und Portfolioentwicklung zu benötigen.

Zudem ermöglicht die Kontrolle durch Sensitivitäten, dass wir im nachfolgenden Kapitel 5 einige Portfolioprobleme explizit, transparent und unabhängig von bestimmten Instrumentenspektren lösen können.

4.3.3. Risiko eines Schuldenportfolios

Gegenüber dem klassischen selbstfinanzierenden Portfolio haben wir in den beiden Abschnitten 4.1 und 4.2 zwei neue Konzepte eingeführt. Zum Einen wurde eine alternative Bewertung eines gegebenen Schuldenportfolios über die sogenannten Perpetualkosten definiert. Zum Anderen haben wir ein einfaches Modell für die externen Zahlungsströme aufgestellt, welches als wesentliche Nebenbedingung die Schuldenbremse beinhaltet. Beide Komponenten sind sehr eng miteinander verknüpft, weil sie wesentlichen Anteil am Risikobegriff eines Schuldenportfolios haben.

Da wir bei den Perpetualkosten einen gleichmäßigen äquivalenten Zahlungsstrom generieren (siehe auch Abb. 4.1), hängt das Perpetualkosten-Risiko verschiedener Finanzierungsalternativen davon ab, wie gleichmäßig der von diesen verursachte Zahlungsstrom bereits ist. Bei einer sehr kurzfristigen Finanzierung, bspw. über den Geldmarktbond sind alle Zahlungsverpflichtungen auf einen kleinen Zeitbereich konzentriert. Die wirtschaftlich faire Umwandlung in einen unendlichen regelmäßigen Zahlungsstrom unterliegt daher einer enormen Zinsabhängigkeit, also einem großen Risiko. Anders verhält es sich bei langfristigen Finanzierungen wie bspw. einem 30-jährigen Kupon-Bond oder gar einem Perpetual. Hier sind die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen bereits sehr gleichmäßig

4.3. Eigenschaften der Perpetualkosten

über die Zukunft verteilt und zudem bekannt. Die Umwandlung in einen völlig gleichmäßigen Zahlungsstrom hängt in diesem Fall also kaum vom aktuellen Zinsniveau ab, das Risiko ist somit gering. Codiert ist dieses unterschiedliche Risikoverhalten gerade durch den Sensitivitätsunterschied zwischen Perpetual und gewählter Finanzierungsstrategie, wie wir es bereits in (4.13) dargestellt haben.

Grundsätzlich besteht das Risiko für einen (öffentlichen) Haushalt aber natürlich nicht darin, wie gleichmäßig die Kosten des Schuldenportfolios anfallen. Vielmehr ist von Interesse, wie gut sich die Haushaltssituation planen lässt. Eine gute Planbarkeit sollte einem geringen Risiko entsprechen. Falls häufig Anpassungen notwendig sind, sollte sich dies in einem höheren Risiko widerspiegeln.

In unserer Modellierung haben wir den Haushalt in zwei wesentliche Einheiten unterteilt: zum Einen in den Primärüberschuss, den Saldo aus Einnahmen und Ausgaben, und zum Anderen in die Kosten, die durch das Schuldenportfolio verursacht werden. Im Idealfall ergänzen sich diese beiden Seiten immer perfekt und es kommt zu keinerlei überraschenden Effekten im Haushalt. Das von uns gewählte Modell für den Primärüberschuss ist ein relativ einfaches, denn wir gehen davon aus, dass in der Zukunft konstante gleichmäßige Nettoeinnahmen auftreten. In diesem Fall – und auch nur in diesem Fall – sind gleichmäßige Kosten des Schuldenportfolios tatsächlich risikolos, denn Einnahme- und Ausgabeseite gleichen sich stets aus und es wären nie Anpassungen notwendig.

Zur Verdeutlichung betrachten wir das hypothetische Beispiel, dass nur in einem 10-Jahres-Rhythmus Primärüberschüsse aufträten. In einem solchen Szenario wäre es natürlich wünschenswert, wenn auch das Schuldenportfolio nur alle 10 Jahre Kosten in gleicher Höhe verursachen würde, da dann das Risiko für den Gesamthaushalt ja verschwinden würde. Völlig gleichmäßige Zahlungen wie bei einem Perpetual wären in einem solchen Fall risikobehaftet, denn die kontinuierlich anfallenden Zahlungsverpflichtungen des Perpetuals müssten stets zwischenfinanziert werden, bis wieder ein Überschuss vereinnahmt wird.

Auch in einem solchen Szenario wären natürlich die Perpetualkosten noch ein wohldefiniertes Bewertungsmaß und würden die erwarteten mittleren Kosten einer Finanzierung widerspiegeln. Die Schwankungsbreite der Perpetualkosten würde aber, genauso wie die des Barwertes, nicht das eigentliche Risiko für den Haushalt darstellen.

Unter der sinnvollen Annahme einer deterministischen gleichmäßigen Planung des Primärüberschusses, wie wir sie getroffen haben, liefern die Perpetualkosten aber die Grundlage für ein geeignetes und aussagekräftiges Risikomaß.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Das in Kapitel 4 eingeführte Modell eines Kreditportfolios und der Perpetualkosten erlaubt es uns nun, analog zu Abschnitt 3.3 optimale Finanzierungsstrategien zu entwickeln.

Der „Nutzen“ der Perpetualkosten ist nicht direkt mit dem Vermögensnutzen vergleichbar. Wir passen daher in diesem Kapitel zuerst klassische Nutzenfunktionen an den Schuldenfall an. Für zwei konkrete Schulden-Nutzenfunktionen werden wir dann entsprechende Portfolioprobleme lösen. Dabei beschreiben wir diese zunächst durch Sensitivitätsprozesse. Für die erste der beiden optimalen Lösungen entwickeln wir weitere Verfahren, wie aus deren Sensitivität auf konkrete Portfolioprozesse in Rolling-Horizon-Bonds geschlossen werden kann.

5.1. Nutzenfunktion im Schuldenfall

Die Bewertung des Portfolios zum Zeitpunkt T erfolgt über die Perpetualkosten $K(T)$. Der „Nutzen“, der von diesen Kosten ausgeht, ist natürlich ein anderer als der Nutzen eines Vermögens. Die Nutzenfunktion im Schuldenfall, definiert auf den Perpetualkosten, muss zwei wesentliche Eigenschaften erfüllen. Die Funktion soll

- streng monoton fallend und
- streng konkav sein.

Ersteres garantiert, dass höhere Kosten stets mit einer Reduzierung des Nutzens einhergehen. Letzteres stellt – genau wie bei den normalen Nutzenfunktionen – die Risikoaversion des Portfoliomanagers sicher. Im Gegensatz zur klassischen Nutzenfunktion entsteht hier kein Sättigungseffekt. Bei höheren Kosten wird die Abnahme des Nutzens also nicht immer langsamer, sondern sie beschleunigt sich sogar (siehe Abb. 5.1). Dies trägt dem Umstand Rechnung, dass sich der Schuldner bei immer höheren Kosten bzw. Schulden dem Bankrott nähert (vgl. Peters (2008)). Bei Annäherung an diesen Zustand sollte der Nutzen natürlich besonders schnell abfallen. Somit ergibt sich die folgende Definition.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Definition 5.1.1 (Schulden-Nutzenfunktion). Eine reellwertige Funktion $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

- $U \in C^2$,
- U ist streng konkav sowie
- $U'(0) < 0$ und $U'(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = -\infty$

nennen wir Schulden-Nutzenfunktion.

Bemerkung 5.1.1.

1. Die Klasse der HARA-Nutzenfunktionen lässt sich durch geeignete Anpassungen der Parameter auch auf den Fall von Schulden-Nutzenfunktionen übertragen:

$$U(x) = -\frac{1}{\gamma}(\beta x - \beta\eta)^{\beta\gamma} \quad (5.1)$$

Dabei seien $\gamma > 1$ und $\eta < x$ für $\beta = 1$ bzw. $\gamma > -1$, $\gamma \neq 0$ und $\eta > x$ für $\beta = -1$. Wie schon zuvor (siehe Bemerkung 3.3.1) ist der Ausschluss von $\gamma = 0$ wieder nur eine technische Notwendigkeit.

Gegenüber den klassischen HARA-Funktionen ergeben sich zwei wesentliche Unterschiede. Zum Einen haben wir sie negiert, so dass sie monoton fallend sind statt steigend. Zum Anderen gilt nun $\gamma > 1$ statt $\gamma < 1$, so dass weiterhin die Konkavität sicher gestellt ist.

2. Um die Risikoaversion des Portfoliomanagers zu messen, können wir – bis auf das Vorzeichen – die gleichen Maße wie bei den normalen Nutzenfunktionen verwenden (siehe hierfür bspw. Korn (1997)). Zum Einen kann die absolute Risikoaversion ARA^1

$$ARA(x) = \frac{U''(x)}{U'(x)} \quad (5.2)$$

errechnet werden. Zum Anderen lässt sich auch die relative Risikoaversion RRA^2

$$RRA(x) = \frac{xU''(x)}{U'(x)} \quad (5.3)$$

festlegen. Für beide Maße gilt, je höher der entsprechende Wert, desto größer ist die jeweilige Risikoaversion ausgeprägt.

¹Absolute Risk Aversion

²Relative Risk Aversion

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

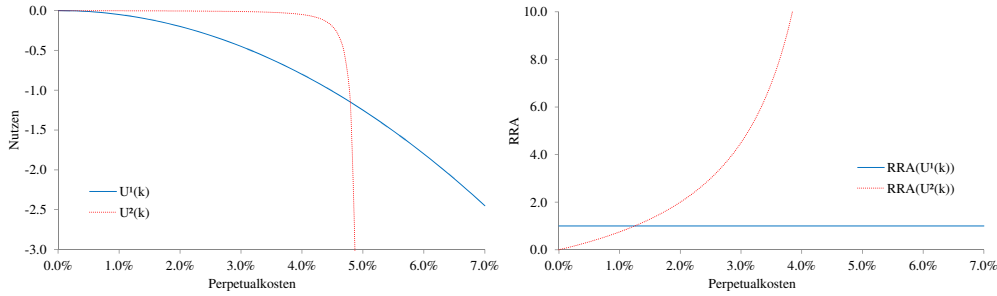


Abbildung 5.1.: Dargestellt sind zwei (skalierte) Nutzenfunktionen $U^{(1)}(k) = -\frac{1}{\gamma}k^\gamma \cdot 10^3$ sowie $U^{(2)}(k) = -\frac{1}{\gamma}(5\% - k)^{-\gamma} \cdot 10^{-5}$ mit $\gamma = 2$ und das jeweilige Maß für die relative Risikoaversion $RRA(x)$. Die erste Nutzenfunktion $U^{(1)}(k)$ hat eine konstante relative Risikoaversion. Die zweite Nutzenfunktion limitiert die Kosten bei 5%, indem die Risikoaversion bei Annäherung an diese Schranke immer stärker ansteigt.

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

Zunächst wollen wir ein Portfolioproblem mit der einfachsten HARA-Schulden-Nutzenfunktion mit $\gamma > 1$, $\eta = 0$ und $\beta = 1$ betrachten:

$$U(k) = -\frac{1}{\gamma}k^\gamma \quad (5.4)$$

Diese stellt das Pendant zur klassischen Nutzenfunktion dar, welche wir in Abschnitt 3.3 verwendet haben. Insbesondere gilt in beiden Fällen, dass $RRA(x)$ konstant ist. Die relative Risikoaversion ist also unabhängig vom Schuldenniveau (siehe auch Abb. 5.1, $U^{(1)}(k)$). Unter dieser Nutzenfunktion möchten wir den erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt T maximieren:

$$\max_{\psi \in \mathcal{A}([0, T], k_0)} \mathbb{E} \left[-\frac{1}{\gamma} \left(K^\psi(T) \right)^\gamma \right] \quad (\text{DP1})$$

Annahme 5.2.1. Die Perpetualkosten $K(t)$ entwickeln sich eigentlich gemäß Theorem 4.1.2 bzw. gemäß (4.12). Der dabei auftretende Prozess $\xi(t)$ ist stochastisch und hängt von der Entwicklung der Zustandsvariablen u ab. Explizite Lösungen sind für einen solchen stochastischen „Marktpreis des Risikos“ im Allgemeinen nicht zu erwarten. Zwar haben Kim und Omberg (1996) die HJB-Gleichung bei einer affin-linearen Abhängigkeit der Drift von u noch lösen können, die Funktion $\psi^\infty(u)$ ist jedoch deutlich komplizierter. Von nun an

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

nehmen wir daher vereinfachend an, dass $\xi(t) := \xi$ **konstant** ist:

$$dK(t) = K(t) \left(-c dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top (\sigma \xi dt + \sigma dW(t)) \right) \quad (5.5)$$

Diese Annahme erlaubt die explizite Lösung der von uns betrachteten Optimierungsprobleme. Für eine Plausibilisierung derselben verweisen wir auf Anhang B.

5.2.1. Lösung des Optimierungsproblem

Zur Lösung des Optimierungsproblems (DP1) folgen wir dem Vorgehen in Abschnitt 3.3. Zunächst definieren wir die zum Optimierungsproblem gehörige Wertfunktion:

$$v(t, k, u) = \max_{\psi \in \mathcal{A}([t, T], k)} \mathbb{E}^{t, k, u} \left[U \left(K^\psi(T) \right) \right] \quad (5.6)$$

Da der Prozess $K(t)$ durch die Sensitivität des Perpetuals $\psi^\infty(t)$ mittelbar auch von der Dynamik $u(t)$ abhängt, ist die Wertfunktion von der Zeit t , dem Vermögen x und dem Zustand der Zinskurve u abhängig.

Es ergibt sich somit die folgende HJB-Gleichung;

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\psi \in \mathcal{A}'(t, k)} & \left[\left(\frac{1}{2} k^2 v_{kk} (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma + k v_{ku} \sigma + k v_k \xi^\top \right) \sigma^\top (\psi(t) - \psi^\infty(t)) \right. \\ & \left. + v_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left(v_{uu} \sigma \sigma^\top \right) - k v_k c + v_u (S u + R) \right], \\ v(T, k, u) &= U(k). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Zur Lösung folgen wir wieder dem bereits in Abschnitt 3.3 vorgestellten dreischrittigen Verfahren:

Schritt 1. Bildet man innerhalb des sup-Operators die Ableitung nach $\psi(t)$ und setzt diese 0, so lässt sich das (vermutliche) Supremum der rechten Seite bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \left(k^2 v_{kk} (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top \sigma + k v_{ku} \sigma + k v_k \xi^\top \right) \sigma^\top \\ \Rightarrow \psi^*(t) &= \psi^\infty(t) - \frac{1}{k v_{kk}} \left(v_{ku}^\top + v_k \sigma^{-\top} \xi \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die zweite Ableitung nach $\psi(t)$ ist $\frac{1}{2} k^2 v_{kk} \sigma \sigma^\top$. Da die Kovarianzmatrix $\sigma \sigma^\top$ positiv definit ist, muss zum Nachweis, dass ψ^* tatsächlich ein Supremum ist, in Schritt 3 gezeigt werden, dass $v_{kk} < 0$.

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

Schritt 2. Das Wiedereinsetzen von ψ^* in die HJB-Gleichung liefert die partielle Differentialgleichung

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_{kk}} \left(\sigma v_{ku}^\top + v_k \xi \right)^\top \left(\sigma v_{ku}^\top + v_k \xi \right) + v_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left(v_{uu} \sigma \sigma^\top \right) - k v_k c + v_u (S u + R),$$

mit der Randbedingung $v(T, k, u) = U(k)$.

Die Nutzenfunktion haben wir auf $U(k) = -\frac{1}{\gamma} k^\gamma$ mit $\gamma > 1$ festgelegt. Separieren wir nun die Abhängigkeiten der Wertfunktion mit dem Ansatz $v(t, k, u) = -\frac{1}{\gamma} k^\gamma f(t, u)$, so vereinfacht sich die Randbedingung zu $f(T, u) = 1$ und die PDE – bei Eliminierung von $-k^\gamma$ – zu

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{f} \left\| \sigma^\top f_u^\top + f \xi \right\|^2 + \frac{1}{\gamma} f_t + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} \text{tr} \left(f_{uu} \sigma \sigma^\top \right) - c f + \frac{1}{\gamma} f_u (S u + R).$$

Da wir von konstantem ξ ausgehen, können wir f unabhängig von u wählen. Mit dem Ansatz $f(t, u) = \exp(h(t))$ und bei anschließender Eliminierung von f erhalten wir

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma - 1} \|\xi\|^2 + \frac{1}{\gamma} h_t - c$$

mit der Randbedingung $h(0) = 0$. Die offensichtliche Lösung ist somit

$$h(t) = \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \|\xi\|^2 + \gamma c \right) t.$$

Insgesamt ergibt sich also für v die folgende Lösung:

$$v(t, x, u) = -\frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp(h(t)) \tag{5.9}$$

Der Kandidat für die optimale Kontrolle ist gegeben durch:

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1 - \gamma} \sigma^{-\top} \xi + \psi^\infty(t) \tag{5.10}$$

Bevor wir dieses Ergebnis interpretieren, wenden wir uns zunächst der Verifikation desselben zu.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Schritt 3. Die technischen Grundlagen für diesen Schritt sind in Anhang A ausgeführt. In der Notation des Anhangs ergäbe sich

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(K(t), u^\top(t) \right)^\top, \\ \Lambda(t, k, u, \psi) &= \begin{pmatrix} k(-c + (\psi - \psi^\infty(u))^\top \sigma \xi) \\ Su + R \end{pmatrix}, \\ \Sigma(t, k, u, \psi) &= \begin{pmatrix} k(\psi - \psi^\infty(u))^\top \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\psi^\infty(u)$ die Sensitivität des Perpetuals in Abhängigkeit von der Zinskurve u , wie wir sie in Proposition 2.3.6 eingeführt haben. Somit ist Y ein $(n+1)$ -dimensionaler Prozess, wobei aber nur die erste Komponente mittels ψ gesteuert werden kann. Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt, genügt es, sich auf die erste Komponente von $Y(t)$ zu konzentrieren, also $K(t)$. Für $u(t)$ wurden im zitierten Abschnitt bereits die notwendigen Eigenschaften von Definition A.2.1 nachgewiesen.

Für die Verwendung von Korollar A.2.3 müssen wir die folgenden Annahmen überprüfen:

1. Die optimale Kontrolle $\psi^*(t)$ ist progressiv messbar und zulässig gemäß Definition A.2.1.
2. v ist die Lösung der HJB-Gleichung (5.7).
3. v erfüllt die Integrierbarkeitsbedingung (A.13) in Korollar A.2.3

Nachweis von 1. Die optimale Kontrolle $\psi^*(t)$ ist deterministisch und beschränkt. Sie ist folglich progressiv messbar und besitzt Eigenschaft (ii) von Definition A.2.1.

Der optimale Kostenprozess hat die folgende Form

$$dK^*(t) = K^*(t) \left(-c dt + \frac{1}{1-\gamma} \left(\xi^\top \xi dt + \xi^\top dW(t) \right) \right), \quad K^*(0) = k_0. \quad (5.11)$$

und somit, da alle Koeffizienten konstant sind, die eindeutige Lösung

$$K^*(t) = k_0 \exp \left(-ct + \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{1}{2} \xi^\top \xi t + \int_0^t \xi^\top dW(s) \right) \right),$$

und erfüllt daher Bedingung (i). Aus (5.11) und nach Itô's Lemma folgt deswei-

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

teren, dass $K^*(t)^\ell$ die folgende Dynamik besitzt:

$$dK^*(t)^\ell = K^*(t)^\ell \left(C_1 dt + \frac{\ell}{1-\gamma} \xi^\top dW(t) \right), \quad K(0)^\ell = k_0^\ell,$$

mit einer geeigneten Konstante C_1 und $\ell \in \mathbb{N}$. Nach Satz A.3.1 folgt, dass auch Bedingung (iii) für eine zulässige Kontrolle gilt:

$$E^{0,x} \left(\sup_{t \in [0,T]} \|K^*(t)\|^\ell \right) < \infty$$

Nachweis von 2. Die Wertfunktion ist wie folgt gegeben

$$v(t, k, u) = -\frac{1}{\gamma} k^\gamma \exp(h(t)). \quad (5.12)$$

Da die zweite Ableitung $v_{kk} = -(\gamma - 1)k^{\gamma-2} \exp(\dots) < 0$ für $\gamma > 1$ und $v \in C^2(\bar{Q})$, ist v offensichtlich eine Lösung der HJB-Gleichung (5.7).

Nachweis von 3. In der Wertfunktion v ist $h(t)$ beschränkt, daher gilt für einen beliebigen Startpunkt (t_s, k_s, u_s) :

$$\begin{aligned} v(t, K(t), u(t)) &= -\frac{1}{\gamma} K(t)^\gamma \exp(h(t)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} k_s^\gamma \exp(h(t)) \\ &\quad \cdot \exp \left(-c\gamma(t - t_s) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{1}{2} \xi^\top \xi (t - t_s) + \int_{t_s}^t \xi^\top dW(s) \right) \right) \\ &\leq K_1 \exp \left(\int_0^t \xi^\top(s) dW(s) \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

für geeignetes K_1 . Folglich gilt nach Korollar A.3.2

$$\begin{aligned} E^{t_s, x_s} \left(\sup_{s \in [t_s, T]} \|v(s, X(s), u(s))\|^2 \right) \\ \leq E^{t_s, x_s} \left(\sup_{t \in [t_s, T]} \left\| K_1 \exp \left(\int_0^t \xi dW(s) \right) \right\|^2 \right) < \infty \end{aligned}$$

für beliebige Zustände (t_s, x_s, u_s) .

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Nun haben wir alle getroffenen Annahmen überprüft und die Voraussetzungen für die Verwendung von Korollar A.2.3 verifiziert. Zusammengefasst ergibt sich das folgende Resultat:

Theorem 5.2.1. Die optimale Strategie für das Portfolioproblem (DP1) ist durch den Sensitivitätsprozess

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \xi + \psi^\infty(t) \quad (5.14)$$

gegeben.

5.2.2. Interpretation der Lösung

Auf den ersten Blick fällt die starke Ähnlichkeit der hier erzielten Lösung mit der in Kapitel 3 optimierten Strategie ins Auge (siehe Theorem 3.3.1 bzw. Abschnitte 3.3.2 und 3.3.5). Wieder zerfällt der optimale Sensitivitätsprozess in zwei Bestandteile. Der erste Term repräsentiert den klassischen Lösungsterm von Merton $\sigma^{-\top} \xi$. Der zweite Term entspricht wie zuvor der Sensitivität des risikolosen Instruments. Direkt gegenüber gestellt ergibt sich das folgende Bild:

$$\begin{aligned} \psi^{*,\text{Schuldenfall}}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \xi + \psi^\infty(t) \\ \psi^{*,\text{Anlagefall}}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \hat{b}(t) + \left(-\tilde{M}(T-t) \right) \end{aligned}$$

Tatsächlich konnte man genau diese strukturelle Gleichheit der Lösungen erwarten. Denn einerseits entspricht die SDE (5.5), die die stochastische Entwicklung der Perpetualkosten beschreibt, in ihrem Aufbau nahezu dem durch den $P(t, T)$ skalierten Vermögensprozess $Z(t)$ (siehe (3.35)):

$$\begin{aligned} dK(t) &= K(t) \left(-c dt + \left(\psi(t) - \psi^\infty(t) \right)^\top (\sigma \xi dt + \sigma dW(t)) \right) \\ dZ(t) &= Z(t) \left(\left(\psi(t) + \tilde{M}(T-t) \right)^\top (\sigma \hat{b}(t) dt + \sigma dW(t)) \right) \end{aligned}$$

Andererseits ist auch die Struktur der verwendeten Schulden-Nutzenfunktion sehr eng an die klassische Form angelehnt und ändert daher die Form der Lösung nicht.

Auf den zweiten Blick und von der strukturellen Gleichheit abgesehen sind die Lösungen jedoch grundverschieden.

Das risikolose Instrument ist nun der Perpetual statt des T -Zero-Bonds. Wie zu erwarten, ist daher dessen Sensitivität $\psi^\infty(t)$ der zweite Teil der optimalen

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

Lösung. Schon dadurch sind die tatsächlichen optimalen Sensitivitäten völlig andere und besitzen keine Ähnlichkeit mehr mit denen des Anlagefall.

Aber auch das Marktportfolio bzw. der Merton-Term selbst hat sich verändert. Der Marktpreis des Risikos bei den Perpetualkosten ist durch ξ codiert und ersetzt wie zu erwarten \hat{b} . Offensichtlichster Unterschied zwischen den beiden Termen ist u. a., dass ξ gemäß Annahme 5.2.1 konstant ist und sich dieser Teil der optimalen Sensitivitäten im Zeitablauf nicht verändert.

Die bisher benannten Veränderungen in der Lösung lassen sich alle auf die oben gegenübergestellten stochastischen Prozesse $K(t)$ und $Z(t)$ zurückführen. Neben den zugrundeliegenden Prozessen haben wir jedoch auch die Nutzenfunktion verändert und die Schulden-Nutzenfunktion eingeführt. Diese sollte vor allem sicherstellen, dass höhere Kosten bestraft werden. Daher ist es zunächst überraschend, dass sich die optimale Lösung durch die Modifikation der Nutzenfunktion scheinbar nicht verändert. Bei genauerer Betrachtung von γ stellt sich dies jedoch als Irrtum heraus.

Denn tatsächlich ist der Merton-Teil nun mit einem anderen Vorzeichen versehen. Im Schuldenfall haben wir nämlich $\gamma > 1$ angesetzt. Der Skalierungsfaktor $\frac{1}{1-\gamma}$ ist nun also negativ und liegt im Intervall $(-\infty, 0)$. Dies steht der Lösung im Anlagefall konträr gegenüber, denn dort lag der Skalierungsfaktor auf der positiven Halbachse $(0, +\infty)$. Dies spiegelt wider, dass wir im Schuldenfall vereinfacht gesagt darauf zielen, die Schulden bzw. die Kosten $K(t)$ zu minimieren, im Anlagefall aber versuchen, das Vermögen bzw. die Rendite zu maximieren.

Diese Dualität tritt auch schon in der einfachen Markowitz-Optimierung auf. Versucht man hier – bei Beschränkung der Varianz der Rendite – die Kosten bzw. die Rendite zu minimieren, so ergibt sich gegenüber der Maximierung der Rendite eine spiegelbildliche Lösung. Näher ausgeführt ist dies in Anhang C.

Der hier gezogene Vergleich mit dem Ergebnis im Anlagefall erklärt bereits die wesentlichen Charakteristika und Mechanismen der optimalen Strategie. Einen weiteren Aspekt dürfen wir jedoch nicht vernachlässigen: die gewählte Strategie garantiert nicht die Einhaltung einer fixen Schuldenobergrenze. Und dies, obwohl die Aufstellung des Haushalts bzw. unser Modell des geplanten Primärüberschusses zu jedem Zeitpunkt t die notwendigen Voraussetzungen dafür legt. Die unter der betrachteten Nutzenfunktion optimierte Strategie ist jedoch bis auf $\psi^\infty(t)$ konstant. Daher ist $K(t)$ eine einfache geometrische Brownsche Bewegung. Offensichtlich ist somit die Entwicklung der Perpetualkosten nicht beschränkt, wie wir es in Bemerkung 4.2.2 bereits angedeutet haben.

Unter der gewählten Nutzenfunktion ist die Lösung natürlich dennoch „opti-

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

mal“. Haupteigenschaft dieser Nutzenfunktion ist eine konstante relative Risikoaversion. Daher gibt es auch keine Anpassung der relativ definierten Strategie; auf mögliche Verluste wird also nicht reagiert.

Nähert man sich als Portfolio- bzw. Schuldenmanager jedoch einem Limit wie einer Schuldenobergrenze, so ist zu erwarten, dass eine Anpassung der Strategie stattfindet. Um dies zu erreichen, muss aber natürlich der Nutzen einer Strategie abhängig vom Niveau bewertet werden und darf gerade keine konstante relative Risikoaversion besitzen. Ein entsprechend angepasstes Portfolio-Problem werden wir in Abschnitt 5.3 behandeln.

5.2.3. Übergang zu konkretem Instrumentenspektrum

Durch die Charakterisierung möglicher Finanzierungsstrategien durch Sensitivitätsprozesse hat sich die Lösung des reduzierten Optimierungsproblems erneut vereinfacht. Zudem konnten wir die wesentlichen Eigenschaften des Schuldenportfolios bzw. der Perpetualkosten bereits mühelos verdeutlichen.

Der zweite, noch ausstehende Schritt in dem Optimierungsverfahren besteht wieder in der Übertragung der abstrakten optimalen Sensitivitätsprozesse auf tatsächliche Finanzierungsstrategien, bestehend aus konkreten Instrumenten. Beispielhaft nutzen wir hierzu erneut Rolling-Horizon-Bonds. Ähnliche Ansätze sind aber auch auf tatsächlich existierende Instrumente, wie etwa Kupon-Bonds, übertragbar.

Für die optimale Lösung im Vermögensfall haben wir in Abschnitt 3.3.3 bereits zwei mögliche Übergänge hergestellt. Zunächst konnte man durch die Wahl eines vollständigen Instrumentenspektrums mit genau $d = n+1$ Instrumenten eine bijektive Beziehung herstellen, wie auch in Abschnitt 3.2 beschrieben. Durch Hinzunahme des T -Zero-Bonds und des Geldmarkt-bonds, erhielten wir dann sogar sehr einfache, konstante Portfolioprozesse.

Wir wollen an dieser Stelle ansetzen und noch weitere Möglichkeiten ausloten. Die optimale Finanzierungsstrategie, die wir in einen konkreten Portfolioprozess π überführen wollen, ist wie folgt gegeben:

$$\psi^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \sigma^{-\top} \xi + \psi^\infty(t)$$

Den zweiten Teil der optimalen Lösung können wir durch das risikolose Instrument, den selbstfinanzierenden Perpetual, abbilden. Dafür setzen wir zunächst dessen Gewicht wie folgt fest:

$$\pi^\infty(t) = 1$$

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

Zusätzlich stehe uns wieder ein vollständiges Instrumentenspektrum aus d Rolling-Horizon-Bonds zur Verfügung; zur Vereinfachung der Notation beinhalte dies stets den Geldmarktbond.

Mit diesen Instrumenten ist also der Merton-Teil der optimalen Strategie darstellbar. Statt nun wie zuvor einfach genau $d - 1 = n$ RHBs mit beliebig festgelegten Laufzeiten $\tau_i > 0$ zu wählen, wollen wir an dieser Stelle möglichst sinnvolle bzw. optimale Laufzeiten ableiten. Wir haben in Abschnitt 3.4 schon feststellen können, dass die Wahl der Laufzeiten einen entscheidenden Anteil daran hat, wie stark die Strategie gehebelt ist. Da bereits $\pi^\infty(t) = 1$ gesetzt ist, wird auch für die oben dargestellte Strategie wieder eine gehebelter Portfolioprozess entstehen. Wir können annehmen, dass sich ein Portfolioprozess besser umsetzen lassen sollte, je kleiner der dafür notwendige Hebel ist. Als einfaches Maß³ für den gewählten Hebel diene uns hier die euklidische Norm des Portfolioprozesses π :

$$\sqrt{\pi(t)^\top \pi(t)} \quad (5.15)$$

Ziel ist es nun, $d - 1$ RHBs mit Laufzeiten $\tau_i > 0$ einerseits und einen Portfolioprozess π andererseits zu wählen, so dass ein möglichst kleiner Hebel entsteht; ohne dabei natürlich die Nebenbedingung zu missachten, den optimalen Sensitivitätsprozess $\psi^*(t)$ zu generieren. Beispielhaft betrachten wir hierfür zwei Möglichkeiten.

Beliebig viele Instrumente

Im betrachteten Fall sei $d - 1 \geq n$. Die Laufzeiten aller RHBs seien jedoch fest vorgegeben und die Eigenschaften des Instrumentenspektrums durch die konstante Sensitivitätsmatrix $\Psi^I \in \mathbb{R}^{n \times d-1}$ codiert. Falls $d - 1 > n$, kann es mehrere mögliche optimale Portfolioprozesse π geben und wir können daher das folgende Optimierungsproblem aufstellen, um den Hebel zu minimieren

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \sqrt{\pi^\top \pi} \\ \text{s. d.} \quad & \frac{1}{1 - \gamma} \sigma^{-\top} \xi = \Psi^I \pi \end{aligned}$$

Dessen Lösung kann mittels der Lagrange-Methodik als

$$\pi^* = \frac{1}{1 - \gamma} \Psi^{I\top} \left(\Psi^I \Psi^{I\top} \right)^{-1} \sigma^{-\top} \xi$$

³Andere Möglichkeiten sind hier ebenfalls denkbar, etwa die Betragsnorm. Auch die Einbeziehung des Gewichts für den Geldmarktbond π_0 könnte eine sinnvolle Ergänzung darstellen.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

bestimmt werden. Für den Fall von $d - 1 = n$ ist Ψ^I übrigens quadratisch und invertierbar und es ergibt sich die bekannte Zuordnung $\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \Psi^{I^{-1}} \sigma^{-\top} \xi$.

Beliebige Laufzeiten

Statt beliebig viele Instrumente zu wählen könnten wir uns auch auf möglichst wenige, also genau $d = n + 1$ RHBs beschränken. Dafür bestimmen wir die $d - 1$ Laufzeiten $\tau_i > 0$, so dass der Hebel minimal wird. In einem solchen Fall besteht zunächst eine bijektive Beziehung zwischen Sensitivität und Portfolioprozess:

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma} \Psi(\tau)^{-1} \sigma^{-\top} \xi \quad (5.16)$$

wobei die Sensitivitätsmatrix der RHBs nun von den Laufzeiten τ abhängt und wie folgt definiert sei:

$$\Psi(\tau) = \left(-\tilde{M}(\tau_1) | \dots | -\tilde{M}(\tau_{d-1}) \right) \in \mathbb{R}^{n \times d-1} \quad (5.17)$$

Die Minimierung des Hebels durch Variation der möglichen $d - 1$ Laufzeiten benötigt in diesem Falle keine weitere Nebenbedingung und ergibt sich wie folgt:

$$\min_{\tau_1, \dots, \tau_{d-1}} \frac{1}{1-\gamma} \sqrt{\xi^\top \sigma^{-1} (\Psi(\tau) \Psi(\tau)^\top)^{-1} \sigma^{-\top} \xi}$$

Eine numerische Lösung dieses Problems ist im nachfolgenden Beispiel-Abschnitt dargestellt.

5.2.4. Beispiele

Mitentscheidend für die optimale Strategie ist der Marktpreis des Risikos ξ der Perpetualkosten. Basierend auf den Beispiel-Daten aus Abschnitt 2.2 ergibt sich

$$\xi = \begin{pmatrix} 0.1631 \\ 0.1056 \\ 2.7980 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Verglichen mit b (siehe Abschnitt 2.2) erhalten wir somit eher kleine Unterschiede. Bei einer gewählten Risikoaversion von $\gamma = 1001$ ergibt sich daraus der skalierte Merton-Term wie folgt:

$$-\frac{1}{1000} \sigma^{-\top} \xi = \begin{pmatrix} 1.6027 \\ 1.5914 \\ 1.5988 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

Konkrete Portfolioprozesse. Versucht man diesen Teil des optimalen Sensitivitätsprozess durch einen konkreten Portfolioprozess darzustellen, so bieten sich nun mehrere Möglichkeiten. Bei all diesen gehen wir davon aus, dass der Perpetual-Bond mit $\pi^\infty = 1$ genutzt wird, um eine optimale Lösung zu erhalten. Zudem sei immer der Geldmarktbond als Finanzierungsmöglichkeit gegeben.

Betrachten wir zunächst Instrumentenspektren mit genau drei (zusätzlichen) RHBs verschiedener Laufzeit. Bereits in Abschnitt 3.4 haben wir die Laufzeiten 4, 5 und 7 Jahre sowie 1, 5 und 10 Jahre betrachtet. Als dritte Variante wählen wir RHBs mit optimierten Laufzeiten. Bei dieser wurde der Hebel der Strategie gemäß des eben vorgestellten Verfahrens minimiert:

$$\pi^{*,457} = \begin{pmatrix} -9.0587 \\ 10.1445 \\ -2.3136 \end{pmatrix}, \quad \pi^{*,1510} = \begin{pmatrix} -2.8354 \\ 0.4758 \\ -0.1220 \end{pmatrix}, \quad \pi^{*,\tau\text{-Opt}} = \begin{pmatrix} -1.1485 \\ 0.4443 \\ -0.2246 \end{pmatrix}$$

Im dritten Portfolioprozess $\pi^{*,\tau\text{-Opt}}$ haben wir dabei die optimalen Laufzeiten 3.0, 16.3 und 30.0 Jahre verwendet, wobei wir keine Restlaufzeiten $\tau > 30$ Jahre zugelassen haben. Offensichtlich ist, dass der Hebel der Portfolioprozesse tatsächlich immer geringer wird. Dies würde sich im übrigen auch nicht ändern, wenn wir den Anteil des Geldmarktbonds $\pi_0 = 1 - \underline{1}\pi$ bei der Berechnung des Hebels einbeziehen würden.

Als Alternative haben wir die Möglichkeit betrachtet, die Anzahl der Instrumente zu erhöhen. So haben wir beispielsweise in folgender Abbildung 5.2 auch ein Instrumentenspektrum mit zehn RHBs eingefügt, deren Laufzeiten durch die Menge $\{3 \cdot k \mid k = 1, \dots, 10\}$ gegeben sind. Der Portfolioprozess $\pi^{*,d \gg n}$ ist nochmals weniger stark gehebelt als die Laufzeit-optimierte Variante $\pi^{*,\tau\text{-Opt}}$. Letzterer und der Portfolioprozess $\pi^{*,1510}$ ist zum Vergleich ebenfalls in der Abbildung dargestellt.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

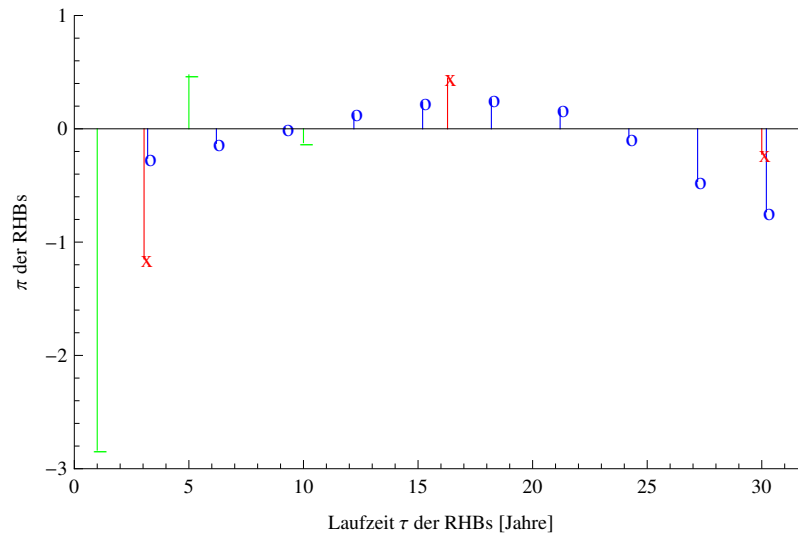


Abbildung 5.2.: Dargestellt sind verschiedene Portfolioprozesse π (eingeschränkt auf die Wertanteile der RHBs) über der Laufzeit der zugehörigen RHBs. Nicht dargestellt ist also π^0 des Geldmarktbonds und π^∞ des Perpetualbonds. Die *blaue* (O) Variante $\pi^{*,d \gg n}$ besitzt mit 10 RHBs deutlich mehr Instrumente als notwendig. Die *roten* (X) Gewichte entsprechen $\pi^{*,\tau-\text{Opt}}$ und sind deutlich kleiner als bei der *grünen* (-) Alternative $\pi^{*,15^{10}}$, bei denen die Laufzeiten ohne Optimierung gewählt wurden.

Abschließend ist zu betonen, dass alle hier dargestellten Portfolioprozesse, im Zusammenspiel mit dem Perpetual und dem Geldmarktbond, immer zum gleichen optimalen Sensitivitätsprozess führen. Die Eigenschaften des Prozesses $K(t)$ sind also für alle Portfolioprozesse stets identisch.

Entwicklung der Perpetualkosten. Zur Illustration der Auswirkungen verschiedener (optimaler) Sensitivitätsprozesse auf die Perpetualkosten $K(t)$ dienen die nachfolgenden Graphen. Dabei ist die stochastische Entwicklung über ein Jahr hinweg durch 40 zufällige, aber für die verschiedenen Strategien stets gleiche stochastische Pfade repräsentiert. In Abbildung 5.3 erfolgt die Finanzierung ausschließlich über einen Geldmarktbond. Im Gegensatz zur Vermögensentwicklung ist dieser in den Perpetualkosten nicht instantan risikolos und auch im Optimierungshorizont $T = 1$ sind die resultierenden Perpetualkosten volatil. Die risikolose Finanzierung, der Perpetual, ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Wie zu erwarten, kommt es zu einer deterministischen Entwicklung. Sie ist sogar konstant, da wir in diesen Beispielen $c = 0$ angesetzt haben. Für ein $c > 0$ würde sich eine leicht monoton fallende Kurve ergeben. Der Vergleich von Abbildung 5.5 und Abbildung 5.6 macht schließlich deutlich wie sich die abgeleiteten optimalen Strategien bei unterschiedlicher Risikoaversion verhalten. In

5.2. Optimierung bei konstanter relativer Risikoaversion

der Tendenz ist dabei in beiden Fällen eine Senkung der Finanzierungskosten zu beobachten.

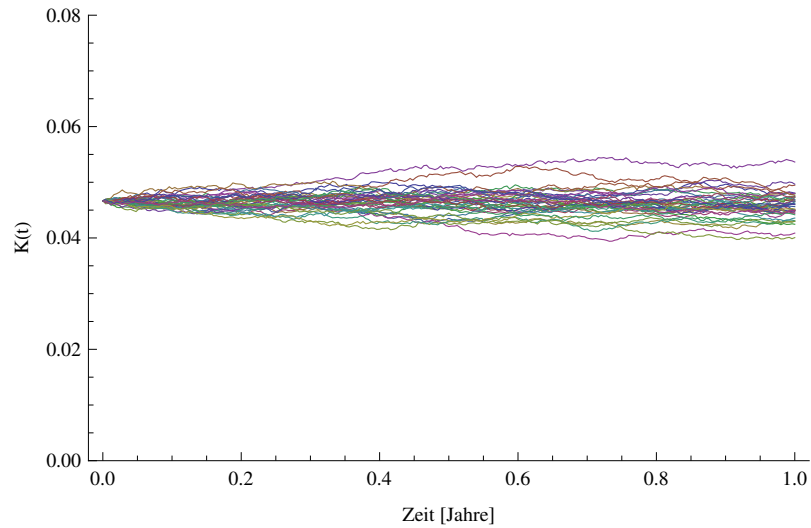


Abbildung 5.3.: Stochastische Entwicklung der Perpetualkosten $K(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Finanzierung erfolgt dabei über die Kasse und somit gilt $\psi(t) \equiv 0$.

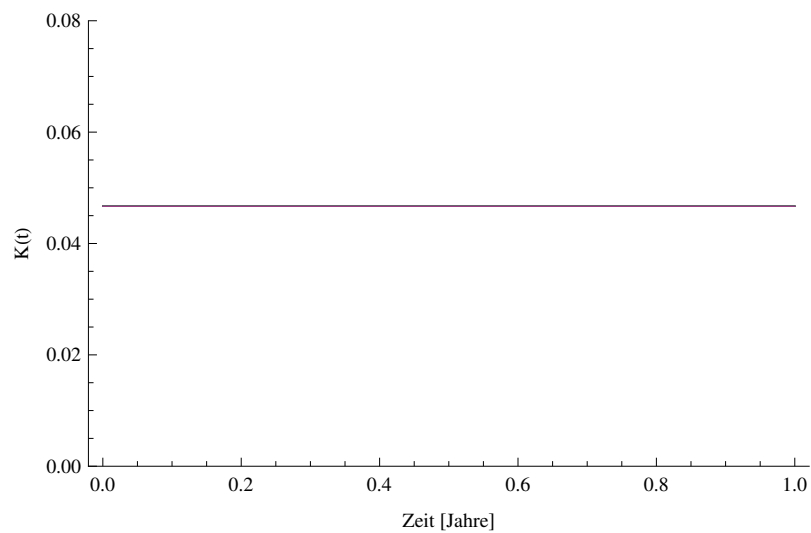


Abbildung 5.4.: Stochastische Entwicklung der Perpetualkosten $K(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Finanzierung erfolgt über einen Perpetual, also die risikolose Finanzierungsstrategie $\psi^\infty(t)$.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

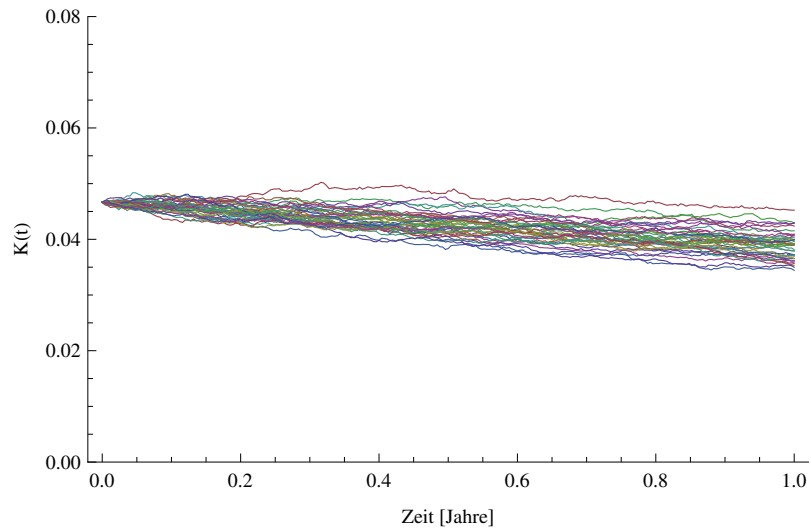


Abbildung 5.5.: Stochastische Entwicklung der Perpetualkosten $K(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Finanzierung erfolgt dabei über die optimale Strategie $\psi^*(t)$ bei einem risikoaversen $\gamma = 45$.

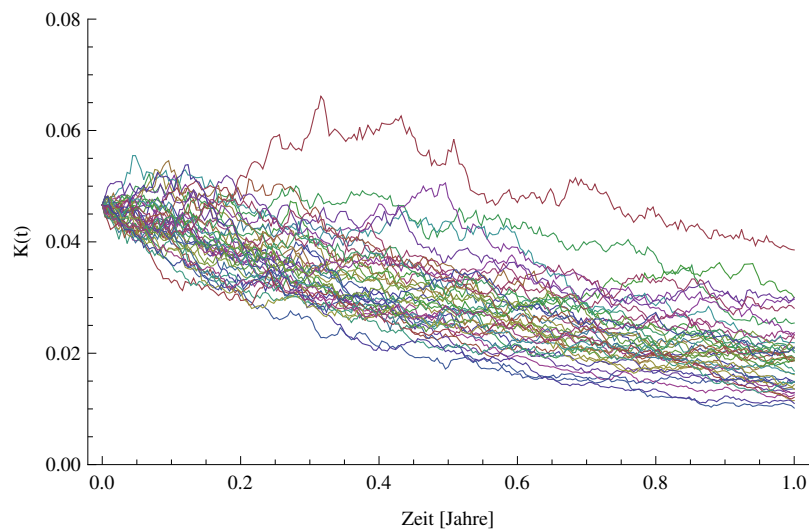


Abbildung 5.6.: Stochastische Entwicklung der Perpetualkosten $K(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Finanzierung erfolgt dabei über die optimale Strategie $\psi^*(t)$ bei einem risikoreichen $\gamma = 10$.

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

Im vorangegangenen Optimierungsproblem (DP1) wurde keine echte Kostenobergrenze eingehalten, denn die Entwicklung der Perpetualkosten war unter Verwendung der optimalen Strategie nicht nach oben beschränkt. Ursächlich

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

hierfür war die vorgegebene Nutzenfunktion, die keine Anpassung der Strategie bei Annäherung an ein Limit vorsah.

Wir betrachten daher nun eine andere Nutzenfunktion, die die Einhaltung einer Obergrenze garantiert. Dazu wählen wir die folgende HARA-Schulden-Nutzenfunktion

$$U(k) = -\frac{1}{\gamma}(\eta - k)^{-\gamma} \quad (5.20)$$

die sich für $\beta = -1$ aus der allgemeinen Form (5.1) ergibt. Dabei sei die Funktion nur auf dem Intervall $(-\infty, \eta)$ definiert, so dass stets gilt $\eta > k$. Zudem sei $\gamma > -1$.

Diese Nutzenfunktion hat keine konstante relative Risikoaversion. Vielmehr steigt $RRA(k)$ sehr schnell an, wenn sich k von unten an η annähert, und wächst asymptotisch gegen ∞ (siehe auch Abb. 5.1, $U^{(2)}(k)$). Mit zunehmender Risikoaversion sollte somit immer stärker und schließlich vollständig über den risikolosen Perpetual finanziert werden. Der Parameter η stellt somit das Limit dar, welches die Kosten zum Optimierungshorizont T nicht überschreiten sollten. Betrachten wir aber nun zunächst das zugehörige Optimierungsproblem, bei dem wir wieder den erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt T maximieren möchten:

$$\max_{\psi \in \mathcal{A}([0, T], k_0)} \mathbb{E} \left[-\frac{1}{\gamma} \left(\eta - K^\psi(T) \right)^{-\gamma} \right] \quad (5.21)$$

Erneut folgt dabei $K(t)$ dem in Bemerkung 5.2.1 beschriebenen Prozess mit konstantem ξ . Damit es sich um ein wohldefiniertes Problem handelt, fordern wir neben $k_0 > 0$ zusätzlich $k_0 < \eta \exp(c(T - t))$. Die zweite Bedingung bedeutet, dass das Limit η so gewählt sein muss, dass es zumindest eine Strategie gibt, nämlich die risikolose Perpetualfinanzierung, die dieses Limit fast sicher unterschreitet.

5.3.1. Lösung des Optimierungsproblem

In den bisherigen Optimierungsproblemen fungierte stets die relative Sensitivität $\psi(t)$ als Kontrollfunktion. Es wird sich jedoch herausstellen, dass bei der Lösung des Optimierungsproblems (5.21) relative Sensitivitäten auftreten, die nicht mehr beschränkt sind bzw. nicht die nötige Integrierbarkeitsbedingung erfüllen. Somit lassen sich die im Anhang A.2 dargestellten Verifikationstheoreme nicht mehr ohne Weiteres anwenden. Gegenüber den vorangegangenen Problemen, passen wir also das Vorgehen etwas an und verwenden eine andere Größe als stochastische Kontrolle.

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Zunächst gehen wir zu der *absoluten Sensitivität* $K(t) \cdot \psi(t)$ der Kosten über. Bei Betrachtung der optimalen Strategie des vorangegangenen Kapitels, siehe etwa Theorem 5.2.1, lässt sich zudem vermuten, dass im Prinzip die *Differenz* zwischen der relativen Sensitivität $\psi^*(t)$ einerseits und der relativen Sensitivität des Perpetuals $\psi^\infty(t)$ andererseits entscheidend ist. Daher nutzen wir für die Lösung des Optimierungsproblems (5.21) nun die folgende Kontrollvariable

$$\Delta(t) = K(t) (\psi(t) - \psi^\infty(t)). \quad (5.22)$$

Diese Gleichung symbolisiert hier lediglich den Zusammenhang zwischen der neuen Kontrollvariable $\Delta(t)$ und der bisherigen $\psi(t)$. Insbesondere ist die Kontrolle $\Delta(t)$ nicht durch diese Gleichung und nicht in Abhängigkeit von $\psi(t)$ definiert. Wohldefiniert sind nun auch solche Strategien, bei denen $K(t) = 0$ auftreten kann und für die $\psi(t) = \infty$ entstehen würde. Die Menge zulässiger Strategien wird durch diese Umformulierung also erweitert.

Die Dynamik der Perpetualkosten stellt sich unter dieser neuen stochastischen Kontrolle wie folgt dar:

$$dK^\Delta(t) = -K^\Delta(t)c dt + \Delta^\top(t) (\sigma \xi dt + \sigma dW(t)) \quad (5.23)$$

Auch das Optimierungsproblem (5.21) lässt sich natürlich entsprechend in die neue Notation überführen:

$$\max_{\Delta \in \mathcal{A}([0, T], k_0)} \mathbb{E} \left[-\frac{1}{\gamma} (\eta - K^\Delta(T))^{-\gamma} \right] \quad (\text{DP2})$$

Unter der neuen stochastischen Kontrolle und durch die Annahmen eines konstanten ξ verliert die kontrollierte SDE ihre Zustandsabhängigkeit von u . Daher ergibt sich die folgende, deutlich vereinfachte HJB-Gleichung für die Wertfunktion $v(t, k)$ des obigen Problems:

$$0 = \sup_{\Delta \in \mathcal{A}(t, k)} \left[\left(\frac{1}{2} v_{kk} \Delta^\top \sigma + v_k \xi^\top \right) \sigma^\top \Delta + v_t - k v_k c \right],$$

$$v(T, k) = U(k). \quad (5.24)$$

Auch hier können wir wieder das bereits bekannte dreischrittige Lösungsverfahren einsetzen.

Schritt 1. Bildet man innerhalb des sup-Operators die Ableitung nach $\Delta(t)$ und setzt diese 0, so lässt sich das (vermutliche) Supremum der rechten Seite

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \left(v_{kk} \Delta^\top \sigma + v_k \xi^\top \right) \sigma^\top \\ \Rightarrow \Delta^*(t) &= -\frac{1}{v_{kk}} v_k \sigma^{-\top} \xi \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die zweite Ableitung nach $\Delta(t)$ ist $v_{kk} \sigma \sigma^\top$. Da die Kovarianzmatrix $\sigma \sigma^\top$ positiv definit ist, muss zum Nachweis, dass Δ^* tatsächlich ein Supremum ist, in Schritt 3 gezeigt werden, dass $v_{kk} < 0$.

Schritt 2. Das Wiedereinsetzen von Δ^* in die HJB-Gleichung liefert die partielle Differentialgleichung

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_{kk}} v_k^2 \xi^\top \xi + v_t - k v_k c,$$

mit der Randbedingung $v(T, k) = U(k)$.

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich prinzipiell nicht von der, die wir im vorangegangenen Portfolioproblem an gleicher Stelle abgeleitet haben. Durch die andere Wahl der Nutzenfunktion $U(k) = -\frac{1}{\gamma}(\eta - k)^{-\gamma}$ mit $\gamma > 1$ und $k \in (-\infty, \eta)$ ergibt sich im Folgenden jedoch ein verändertes Resultat.

Wegen der geschickten Wahl der stochastischen Kontrolle existieren keine Abhängigkeiten der Wertfunktion von u . Separieren wir die Funktion mit dem Ansatz $v(t, k) = -\frac{1}{\gamma}(h(t)\eta - k)^{-\gamma} f(t)$, so ergeben sich zwei neue Randbedingungen $f(T) = 1$ sowie $h(T) = 1$ und die PDE vereinfacht sich – bei Eliminierung von $f(t)(h(t)\eta - k)^{-\gamma}$ – zu

$$0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma + 1} \xi^\top \xi - \frac{1}{\gamma} \frac{f_t}{f} - \frac{h_t \eta + kc}{k - h\eta}.$$

Die Separation ist erfolgreich, falls wir $h(t) = \exp(c(T - t))$ setzen. Der letzte Bruch wird dann zu c und es gilt

$$0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma + 1} \xi^\top \xi - \frac{1}{\gamma} \frac{f_t}{f} - c.$$

Somit ist die Lösung von f wie folgt gegeben:

$$f(t) = \exp \left(-\gamma \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma + 1} \xi^\top \xi - c \right) (T - t) \right) \quad (5.26)$$

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

Für v ergibt sich also die Lösung

$$v(t, k) = -\frac{1}{\gamma} (\exp(c(T-t))\eta - k)^{-\gamma} f(t). \quad (5.27)$$

Der Kandidat für die optimale Kontrolle ist gegeben durch:

$$\Delta^*(t) = \frac{1}{\gamma+1} \sigma^{-\top} \xi (K(t) - \exp(c(T-t))\eta) \quad (5.28)$$

Bevor wir versuchen dieser etwas unübersichtlichen Strategie einen Sinn zu verleihen, wenden wir uns zunächst der Überprüfung des Resultats zu.

Schritt 3. Für die Verifikation benötigen wir das folgende Lemma, welches die explizite Lösung der Perpetualkosten-SDE für die optimale Δ^* -Strategie liefert. Diese explizite Form von $K^*(t)$ wird auch essentiell für das Verständnis und die Interpretation der Lösung sein (siehe Abschnitt 5.3.2).

Lemma 5.3.1. Die kontrollierte SDE der Perpetualkosten

$$dK^*(t) = -K^*(t)c dt + \Delta^{*\top}(t) (\sigma \xi dt + \sigma dW(t)), \quad (5.29)$$

mit der Startbedingung $K^*(0) = k_0$ und bei der Δ^* aus Theorem 5.3.2 gegeben sei, besitzt die folgende eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} K^*(t) = & \eta \exp\left(\int_t^T c ds\right) + \left(k_0 - \eta \exp\left(\int_0^T c ds\right)\right) \\ & \cdot \exp\left(\int_0^t -c + \frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma+1}\right) ds + \frac{1}{\gamma+1} \int_0^t \xi^\top dW(s)\right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus Theorem A.1.1. Dieses liefert zugleich auch eine explizite Darstellung der Lösung, welche jedoch nicht ohne weiteres in die einfache Form des Lemmas überführt werden kann.

Da Existenz und Eindeutigkeit aber bereits nachgewiesen sind, genügt es die

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

Lösung (5.30) mittels Itô-Formel zu verifizieren:

$$\begin{aligned}
dK^*(t) &= -c\eta \exp\left(\int_t^T c ds\right) + \left(k_0 - \eta \exp\left(\int_{t_0}^T c ds\right)\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t -c + \frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma+1}\right) ds + \frac{1}{\gamma+1} \int_{t_0}^t \xi^\top dW(s)\right) \\
&\quad \cdot \left(-c dt + \frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 dt + \frac{1}{\gamma+1} \xi^\top dW(t)\right) \\
&= -c\eta \exp\left(\int_t^T c ds\right) + \left(K^*(t) - \eta \exp\left(\int_t^T c ds\right)\right) \\
&\quad \cdot \left(-c dt + \frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 dt + \frac{1}{\gamma+1} \xi^\top dW(t)\right) \\
&= -K^*(t)c dt + (K^*(t) - \eta \exp((T-t)c)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 dt + \frac{1}{\gamma+1} \xi^\top dW(t)\right) \\
&= -K^*(t)c dt + \Delta^{*\top}(t) (\sigma \xi dt + \sigma dW(t))
\end{aligned} \tag{5.31}$$

□

Nun nutzen wir wieder die technischen Grundlagen aus Anhang A. In dessen Notation ergibt sich

$$\begin{aligned}
Y(t) &= K(t), \\
\Lambda(t, k, \psi) &= ck + \Delta^\top \sigma \xi, \\
\Sigma(t, k, u, \psi) &= \Delta^\top \sigma.
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist $Y(t)$ ein eindimensionaler Prozess. Zudem besitzen die Funktionen Λ und Σ keine Zustandsabhängigkeit von u und sind höchstens linear in k . Sie erfüllen daher die Lipschitz- und Beschränktheitsbedingungen (A.2) und (A.3). Dies erlaubt somit grundsätzlich die Anwendung des Theorems A.2.2.

Zunächst gilt es nachzuweisen, dass der Kandidat Δ^* tatsächlich eine zulässige Strategie gemäß Definition A.2.1 darstellt. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Lösungen ist Δ^* nicht mehr deterministisch, da es von $K^*(t)$ abhängt. Die Perpetualkosten $K^*(t)$ bestehen jedoch (siehe Lemma 5.3.1)) aus einer deterministischen, stetigen Funktion einerseits und einer geometrischen Brownschen Bewegung andererseits. Somit ist auch der Kandidat Δ^* (siehe (5.28)) entsprechend aufgeteilt und es folgt mittels Theorem A.3.1

$$E\left(\int_0^T \|\Delta^*(s)\|^k ds\right) < \infty \quad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

dass Bedingung (ii) zulässiger Kontrollen erfüllt ist. Wegen der eindeutigen Lösung von $K^*(t)$ aus Lemma 5.3.1 wird Bedingung (i) und mithilfe von A.3.2 wird auch Bedingung (iii) eingehalten.

Zu überprüfen ist noch, ob die Wertfunktion v aus (5.27) die notwendigen Voraussetzungen des Theorems erfüllt. Offensichtlich ist v stetig differenzierbar und erfüllt die polynomiale Wachstumsbedingung. Da die zweite Ableitung $v_{kk} = -(\gamma - 1)(\exp(c(T - t))\eta - k)^{\gamma-1}f(t)$ negativ ist, ist die Funktion v außerdem die Lösung der HJB-Gleichung (5.24).

Somit haben wir alle getroffenen Annahmen überprüft und die Voraussetzungen für die Verwendung von Korollar A.2.3 verifiziert. Zusammengefasst ergibt sich das folgende Resultat:

Theorem 5.3.2. Die optimale Strategie für das Portfolioproblem (DP2) ist durch die optimale stochastische Kontrolle

$$\Delta^*(t) = \frac{1}{\gamma + 1} \sigma^{-\top} \xi \cdot K^*(t) - \frac{1}{\gamma + 1} \sigma^{-\top} \xi \cdot \exp(c(T - t))\eta \quad (5.32)$$

gegeben.

Bemerkung 5.3.1. Zu Beginn des Abschnitts haben wir statt der relativen Sensitivitäten ψ absolute Sensitivitäten Δ als stochastische Kontrolle eingeführt. Nun wird deutlich, wieso dieser Schritt notwendig war.

In den relativen Sensitivitäten würde sich die optimale Lösung wie folgt darstellen

$$\psi^*(t) = \frac{1}{\gamma + 1} \sigma^{-\top} \xi - \frac{1}{K^*(t)} \frac{1}{\gamma + 1} \sigma^{-\top} \xi \cdot \exp(c(T - t))\eta + \psi^\infty(t). \quad (5.33)$$

Gleichzeitig entnehmen wir der Form von $K^*(t)$ in (5.30), dass $K^*(t)$ nicht nach unten beschränkt ist. Somit ist insbesondere $K^*(t) = 0$ möglich und würde zu einer degenerierten Form von $\psi^*(t)$ führen. Schwierigkeiten mit dieser Singularität haben wir durch die Darstellung des Problems in absoluten Sensitivitäten verhindert.

5.3.2. Interpretation der Lösung

Die optimalen absoluten Sensitivitäten bieten ein ungewohntes Bild. Die gefundene Lösung lässt sich nicht ohne weitere Vorarbeit interpretieren. Werfen wir daher zunächst nochmals einen Blick auf die Lösung der Perpetualkosten-SDE

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

(5.30) im optimalen Fall:

$$K^*(t) = \eta \exp \left(\int_t^T c ds \right) + \left(k_0 - \eta \exp \left(\int_0^T c ds \right) \right) \cdot \exp \left(\int_0^t -c + \frac{1}{\gamma+1} \|\xi\|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma+1} \right) ds + \frac{1}{\gamma+1} \int_0^t \xi^\top dW(s) \right). \quad (5.34)$$

Diese besteht offensichtlich aus zwei Summanden, die wir wie folgt benennen möchten:

$$K^{Limit}(t) := \eta \exp \left(\int_t^T c ds \right) \quad (5.35)$$

$$K^{Invest}(t) := \left(k_0 - \eta \exp \left(\int_0^T c ds \right) \right) \cdot \exp \left(\dots \right). \quad (5.36)$$

Wir werden nun zeigen, dass beide Teile sich als Kosten von selbstfinanzierenden Teilportfolios verstehen lassen. Dazu müssen wir nachweisen, dass zulässige relative Sensitivitätsprozesse existieren, so dass die Entwicklungen von $K^{Limit}(t)$ und $K^{Invest}(t)$ in der Form von (5.5) dargestellt werden können. Gelingt uns dies, so können wir die optimale Strategie als „Summe“ dieser beiden Teilstrategien auffassen und interpretieren.

Daher definieren wir zunächst

$$\psi^{Limit}(t) := \psi^\infty, \quad (5.37)$$

$$k_0^{Limit} := \eta \exp \left(\int_0^T c ds \right). \quad (5.38)$$

Durch Einsetzen der relativen Sensitivität $\psi^{Limit}(t)$ für den allgemeinen Platzhalter $\psi(t)$ in (5.5) und bei einem Anfangswert von $K^{Limit}(0) = k_0^{Limit}$ ergibt sich gerade eine SDE, deren eindeutige Lösung offensichtlich $K^{Limit}(t)$ ist.

Völlig analog können wir auch im Falle des zweiten Subportfolios verfahren und Folgendes definieren:

$$\psi^{Invest}(t) := \frac{1}{\gamma+1} \sigma^{-\top} \xi + \psi^\infty(t), \quad (5.39)$$

$$k_0^{Invest} := k_0 - \eta \exp \left(\int_0^T c ds \right) \quad (5.40)$$

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass beide Portfolioteile wohldefinierte, selbstfinanzierende Portfolios sind, können wir einfach das Verhalten dieser beiden Teile getrennt voneinander analysieren und daraus das Gesamtbild zusammen-

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

setzen:

$$K^*(t) = K^{Limit}(t) + K^{Invest}(t)$$

Zu jedem der drei Kostenprozesse gibt es einen zugehörigen Portfolioteil. Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir im Folgenden auch die entsprechenden (Teil-)Portfolios durch den jeweiligen Kostenprozess. Das erste Portfolio $K^{Limit}(t)$ ist bzgl. der Perpetualkosten risikolos, da die Sensitivität gerade die Perpetual-Sensitivität ist. Daher besitzt dieses Portfolio auch eine deterministische Kostenentwicklung. Zum Betrachtungshorizont T gilt gerade

$$K^{Limit}(T) = \eta \exp\left(\int_T^T c ds\right) = \eta. \quad (5.41)$$

Die Perpetualkosten dieses Portfolios entsprechen also genau dem Kostenlimit, welches durch η parametrisiert ist.

Die Kosten des Gesamtportfolios $K^*(t)$ liegen aber fast sicher unterhalb dieses Limits. Dies wird deutlich, wenn wir uns dem zweiten Portfolioteil $K^{Limit}(t)$ zuwenden. Denn für dessen Startwert gilt, dass er negativ ist:

$$k_0^{Limit} = k_0 - \eta \exp\left(\int_0^T c ds\right) < 0 \quad (5.42)$$

Somit handelt es sich hier eigentlich nicht um Kosten bzw. eine damit verbundene Schuld, sondern um Zinseinnahmen bzw. Vermögen. Dieses Vermögen wird mittels der Strategie $\psi^{Invest}(t)$ investiert. Da bei dieser gewählten Strategie die Drift der Perpetualkosten-SDE konstant ist, können wir schließen, dass dieses Vermögen im Zeitablauf fast sicher erhalten bleibt:

$$K^{Invest}(t) < 0 \quad f. s. \quad (5.43)$$

Darüber hinaus ähneln die Eigenschaften der Strategie $\psi^{Invest}(t)$ sehr stark den optimalen Lösungen, die wir in den vorangegangenen Kapiteln bestimmt haben. Als risikoloses Instrument für diese Substrategie sollte natürlich der Perpetual fungieren. Und tatsächlich konvergiert für $\gamma \rightarrow \infty$ die Sensitivität $\psi^{Invest}(t)$ gegen die des Perpetuals. Auch der Marktpreis des Risikos ist wieder durch ξ codiert, wie dies für Perpetualkosten zu erwarten war. In dieser Hinsicht entspricht die Strategie genau der Lösung in Theorem 5.3.2.

Betrachten wir jedoch den Skalierungsfaktor vor dem Marktportfolio $\frac{1}{1+\gamma}$, so stellen wir fest, dass dieser positiv ist. Denn in der hier gewählten Nutzenfunktion haben wir alle $\gamma > -1$ zugelassen. Der Skalierungsfaktor liegt also

5.3. Optimierung unter Einhaltung der Schuldenbremse

auf der positiven Halbachse $(0, +\infty)$. Genau diese risikoabhängige Skalierung des Marktportfolios haben wir auch schon beim ersten Portfolioproblem (P) beobachten können. So wie bei diesem Problem, dient die gerade betrachtete Teilstrategie $\psi^{Invest}(t)$ dazu, Vermögen aufzubauen bzw. jetzt Zinseinnahmen zu generieren.

Ohne dies formal nachzuweisen, können wir daraus schließen, dass diese zweite Teilstrategie auch für sich genommen eine optimale Investitionsstrategie darstellt. Diese Optimalität gilt natürlich nur unter Annahme einer Nutzenfunktion, wie wir sie in Abschnitt 3.3 verwendet haben.

Die optimale Strategie $\Delta^*(t)$ sieht also insgesamt vor, sich genau bis zum Kostenlimit η zu verschulden. Dies geschieht *risikolos* mittels des Portfolioteils K^{Limit} und stellt somit sicher, dass das Limit nie überschritten wird. Da die tatsächlich zu finanzierende Schuld aber niedriger ist als das mittels des Portfolios K^{Limit} finanzierte Volumen, ergibt sich noch ein Vermögen bzw. Einnahmen $-K^{Invest}$, die dann auf optimale Weise investiert werden können. Genau die gleiche Zweiteilung der Strategie, die sich bei uns durch die gewählte Nutzenfunktion eingestellt hat, ergibt sich im Übrigen auch für eine Optimierung bei einem CPPI-Ansatz⁴.

Da sich $-K^{Invest}(t)$ wie eine einfache geometrische Brownsche Bewegung verhält und nicht nach oben beschränkt ist, $K^{Limit}(t)$ aber deterministisch und beschränkt ist, kann es sogar vorkommen, dass die Gesamtkosten $K^*(t)$ negativ werden. Dies wäre gleichbedeutend mit einem kompletten Abbau der Schuld und dem Übergang zu einem Vermögensaufbau!

Möglichkeiten einen Übergang zu konkreten Strategien zu vollziehen, haben wir bereits im vorangegangenen Abschnitt ausführlich diskutiert. Da hier ein völlig analoges Vorgehen anwendbar ist, wollen wir uns direkt einem letzten Beispiel zuwenden.

5.3.3. Beispiel

Die Abbildung 5.7 basiert auf der gleichen Stochastik wie im vorangegangenen Beispielabschnitt und zeigt die Entwicklung der Perpetualkosten bei Verwendung der zuvor bestimmten optimalen Strategie (siehe Theorem 5.3.2). Deutlich wird, dass das Limit (gestrichelte Linie) nie überschritten wird. Zudem ist die Volatilität für die Pfade erhöht, die sich weit von dem Limit entfernt haben. Dies war zu erwarten, da für diese ja die Risikoaversion abnimmt und daher ein größeres Volumen über die Teilstrategie ψ^{Invest} investiert wird. Deutlich wird

⁴Constant proportion portfolio insurance, siehe bspw. Prigent (2007)

5. Optimierung eines Schuldenportfolios

zudem, dass auch $K^*(t) = 0$ – zumindest bei $\gamma = 4$ – im Bereich des Möglichen ist.

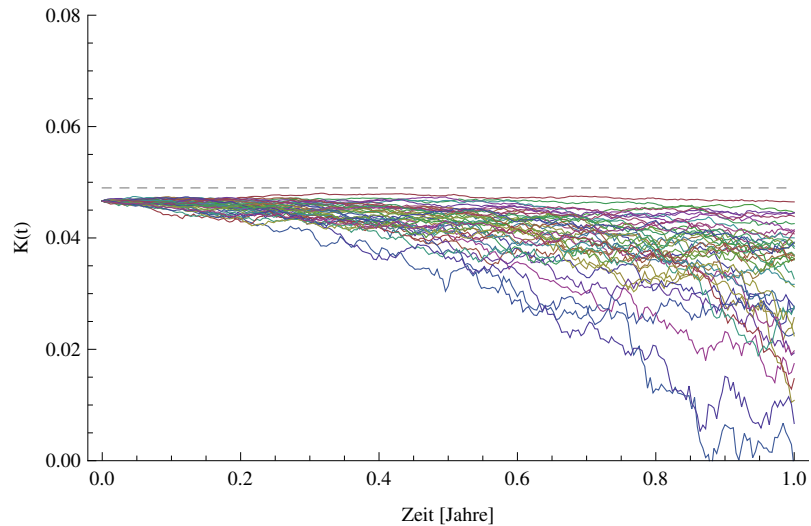


Abbildung 5.7.: Stochastische Entwicklung der Perpetualkosten $K^*(t)$ über ein Jahr hinweg. Die Finanzierung erfolgt dabei über die optimale Strategie $\psi^*(t)$ mit einem Limit (gestrichelte Linie), dass bei 110% des Ausgangskostenniveaus liegt. Die Risikoaversion ist gering und liegt bei $\gamma = 4$.

6. Fazit und Ausblick

Der Brückenschlag zwischen der dynamischen Portfoliooptimierung und Problemstellungen des Schuldenmanagements liefert viele spannende Einblicke. Zwei Konzepte erweisen sich dabei als besonders effektiv und wertvoll.

Die Perpetualkosten, also die gemittelten zukünftigen Zinszahlungen, bieten eine sehr einfache und intuitive Beschreibung der jeweiligen Kostensituation. Alle entscheidenden Informationen werden auf wirtschaftlich faire Weise in einer einzigen Kennzahl gebündelt. Insbesondere berücksichtigt diese nicht nur Zinszahlungen bereits bestehender Anleihen oder Kredite, sondern insbesondere auch mögliche Folgekosten in der Zukunft, die durch Anschlussfinanzierungen entstehen. Gerade solche „versteckten“ Kosten, dürfen im Schuldenmanagement nicht unberücksichtigt bleiben. Außerdem ist das Schwankungsverhalten der Perpetualkosten ein geeignetes Maß für die Risiken, die der Staatshaushalt zu tragen hat.

Neben diesen inhaltlichen Aspekten, lassen sich die Perpetualkosten zudem leicht berechnen und modellieren. Grundlage hierfür ist, dass ihre Definition sehr eng mit dem Barwert des Schuldenportfolios verknüpft ist. Bei der Modellierung können wir uns daher auf den bewährten selbstfinanzierenden Barwertprozess zurückziehen und damit auch den Zusammenhang zur klassischen dynamischen Portfoliooptimierung herstellen.

Das zweite wesentliche Konzept ist die konsequente Steuerung nach Sensitivitäten. Diese beschreiben, wie stark einzelne Instrumente oder auch ganze Portfolios auf bestimmte Zinsbewegungen reagieren. Anhand dieser Sensitivitäten ist die Dynamik des Barwerts und damit auch der Perpetualkosten bereits vollständig bestimmt. Gegenüber der Kontrolle durch Wertanteile in bestimmten Instrumenten haben sie den Vorteil einer reduzierten und abstrakteren Darstellungsweise. Insbesondere kann man Optimierungen ohne vorherige Festlegung auf bestimmte Instrumente durchführen. Dies hat insbesondere bei Anleiheportfolios einen entscheidenden Vorteil, da sich Bonds aufgrund von möglichen Fälligkeiten während des Betrachtungszeitraums oder wegen Kupon-Zahlungen nur unter einigen Mühen zu einem wohldefinierten Portfolio verbinden lassen.

Im Zusammenspiel mit den Perpetualkosten bietet die sensitivitätsbasierte Steuerung ein mächtiges Werkzeug für Analysen und Optimierungen im Schul-

6. Fazit und Ausblick

denmanagement. Für Analysen können konkrete Portfolios, zusammengesetzt aus verschiedensten Anleihen, zunächst durch Sensitivitäten charakterisiert werden. Diese bieten dann im Zusammenspiel mit den Parametern des Zinsmodells die Möglichkeit, die Kerneigenschaften des Portfolios hinsichtlich der Perpetualkosten, also beispielsweise erwartete Entwicklung oder Volatilität, explizit darzustellen. Aufwendige Simulationen sind dafür nicht notwendig. Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich. Aus einer optimalen Strategie, codiert in Sensitivitäten, lassen sich jederzeit konkrete Strategien auf Basis von beliebigen Instrumenten generieren. Oftmals kann dabei unter vielen verschiedenen möglichen Portfoliozusammensetzungen gewählt werden, die allesamt die gleichen Sensitivitäten generieren. Dies erlaubt daher sekundäre Ziele, wie beispielsweise eine möglichst einfache Umsetzbarkeit, zu verfolgen.

Die Lösungen der unbeschränkten Optimierungsprobleme in Kapitel 5 machen deutlich, wie effiziente Strategien aussehen und wie sich diese aus verschiedenen Teilen zusammensetzen. Dabei ist stets eine Aufteilung in die risikolose Finanzierung über einen Perpetual einerseits und ein Marktportfolio andererseits zu beobachten. Dieses Marktportfolio basiert auf den geschätzten Parametern des Zinsmodells und zeigt auf, wie sich diese auf die optimale Strategie auswirken. Auch die entscheidenden Unterschiede zwischen effizienten Finanzierungsstrategien und optimalen Investitionsstrategien konnten wir herausarbeiten. Die Lösung des zweiten Optimierungsproblems verhindert das Überschreiten einer vorgegebenen Kostenobergrenze. Solche Strategien könnten, insbesondere im Hinblick auf die Schuldenobergrenzen, die sich einzelne Staaten auferlegt haben, um das Wachstum der Staatsschulden zumindest zu bremsen, von Interesse sein. Allerdings sind alle optimalen Strategien sehr stark gehebelt, so dass eine tatsächliche Umsetzung nicht in Erwägung gezogen werden kann.

Hierauf sollte sich sicher auch die weitere Forschung in dem beschriebenen Modellrahmen konzentrieren. Innerhalb des vorgestellten Rahmens aus Perpetualkosten und Steuerung nach Sensitivitäten, könnten realitätsnähere Optimierungsprobleme untersucht werden. Am leichtesten gelingt dies sicherlich durch Einbeziehung von sinnvollen Nebenbedingungen. Aber auch die Berücksichtigung von Transaktionskosten könnte effektiv verhindern, dass gehebelte Strategien so attraktiv erscheinen. Die bereits geschaffene enge Verbindung zwischen den Fragestellungen des Schuldenmanagements einerseits und den Methoden der dynamischen Portfoliooptimierung andererseits sollte es ermöglichen, existierende Lösungsansätze auch für das Schuldenmanagement zu erschließen.

Als ein zweiter Aspekt weiterer Forschungsbemühungen gilt es, das System insgesamt noch zu erweitern. Beispielsweise sollten inflationsindexierte Wertpa-

piere, eine wesentliche Finanzierungsalternative vieler Staaten, in das Modell einbezogen werden. Dazu muss zunächst das Zinsmodell entsprechend erweitert werden. Solange dabei die affin-lineare Eigenschaft des Modells erhalten bleibt, sollte es eigentlich auch keine Schwierigkeiten darstellen, diese Wertpapierklasse in dem Portfoliomodell zu berücksichtigen. Auch andere Erweiterungen des Zinsmodells, beispielsweise um zeit- und zustandsabhängige Parameter oder um makroökonomische Einflussfaktoren auf die Zinsentwicklung, könnten für das zinsoptimierte Schuldenmanagement von Relevanz sein.

Literaturverzeichnis

- M. Abdel-Jawad. Applications of optimization to sovereign debt issuance. *School of Information Systems, Computing and Mathematics*, 2013.
- M. Adamo, A. L. Amadori, M. Bernaschi, C. L. CHIOMA, A. Marigo, B. Piccoli, S. Sbaraglia, A. Uboldi, D. Vergni, P. Fabbri, et al. Optimal strategies for the issuances of public debt securities. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(07):805–822, 2004.
- D. J. Bolder. Towards a more complete debt strategy simulation framework. <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp02-13.pdf>, Stand: 2014-02-14, May 2002.
- D. J. Bolder. A stochastic simulation framework for the government of canada’s debt strategy. <http://www.banqueducanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp03-10.pdf>, Stand: 2014-02-14, October 2003.
- D. J. Bolder. The canadian debt-strategy model. *Bank of Canada Review*, 2008 (Summer):5–18, 2008.
- D. J. Bolder und S. Deeley. The canadian debt-strategy model: An overview of the principal elements. <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2011/05/dp11-3.pdf>, Stand: 2013-11-14, May 2011.
- M. J. Brennan und Y. Xia. Stochastic interest rates and the bond-stock mix. *European Finance Review*, 4(2):197–210, 2000.
- D. Brigo und F. Mercurio. *Interest rate models – theory and practice. With smile, inflation and credit. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2006.
- C. Chiarella, C.-Y. Hsaio, und W. Semmler. *Intertemporal investment strategies under inflation risk.* University of Technology, Sydney, 2007.
- DFA. Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur GmbH, Tilgungen des Bundes und seiner Sondervermögen im Jahr 2012. http://www.deutsche-finanzagentur.de/fileadmin/Material_Deutsche_Finanzagentur/PDF/Tilgungen_und_Zinszahlungen/2012/tilgungen_zinsen_12-12_dt.pdf, Stand: 2014-01-18, Dezember 2012.

Literaturverzeichnis

- DFA. Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur GmbH, Statistiken zum Schuldenstand 2012. http://www.deutsche-finanzagentur.de/fileadmin/Material_Deutsche_Finanzagentur/PDF/Schuldenstand/Schuldenstand_Quartal/2012-12-31.pdf, Stand: 2014-01-18, Januar 2013.
- D. Duffie und R. Kan. A yield-factor model of interest rates. *Math. Finance*, 6(4):379–406, 1996.
- N. El Karoui und M. Jeanblanc-Picqué. Optimization of consumption with labor income. *Finance and Stochastics*, 2(4):409–440, 1998.
- eurostat. Öffentlicher Bruttoschuldenstand. <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home>, Code: tsdde410, Stand: 2014-01-18, Januar 2014.
- W. H. Fleming und H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. New York: Springer, 2nd edition, 2006.
- Grundgesetz. Gesetz zur Änderung des Grundgesetzes (Artikel 91c, 91d, 104b, 109, 109a, 115, 143d) (GGÄndG). *Bundesgesetzblatt Online*, 48:2248–2250, 2009.
- J. Harrison und S. R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3):313 – 316, 1983. ISSN 0304-4149.
- J. M. Harrison und S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.
- M. Henseler, C. Peters, und R. C. Seydel. A tractable multi-factor dynamic term-structure model for risk management, 2013.
- T. S. Y. Ho und S.-B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41:1011–1029, 1986.
- T. S. Kim und E. Omberg. Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of financial studies*, 9(1):141–161, 1996.
- R. Korn. *Optimal Portfolios*. World Scientific, 1997.
- R. Korn und H. Kraft. A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(4): 1250–1269, 2002.

- R. Korn und M. Krekel. Optimal portfolios with fixed consumption or income streams. Technical report, Working paper, 2000.
- H. Kraft. *Optimal portfolios with stochastic interest rates and defaultable assets*. Springer, 2004.
- N. Krylov. *Controlled diffusion processes*. Applications of Mathematics. Springer, 2008. ISBN 9783540709145.
- T. Langetieg. A multivariate model of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 35:71–97, 1980.
- J. Liu. Portfolio selection in stochastic environments. *Review of Financial Studies*, 20(1):1–39, 2007.
- H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91, 1952.
- R. C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3):247–257, 1969.
- R. C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373–413, 1971.
- B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Hochschultext / Universitext. Springer, 6nd edition, 4th correction edition, 2007. ISBN 9783540047582.
- C. Peters. Dynamic optimisation of a debt portfolio. Diplomarbeit, TU Kaiserslautern, 2008.
- S. R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 11(2):371–382, 1986.
- J.-L. Prigent. *Portfolio optimization and performance analysis*. CRC Press, 2007.
- P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1*. Applications of mathematics. Springer, 2010. ISBN 9783642055607.
- M. Rutkowski. Self-financing trading strategies for sliding, rolling-horizon, and consol bonds. *Mathematical Finance*, 9:361–385, October 1999.
- C. Sørensen. Dynamic asset allocation and fixed income management. *Journal of financial and quantitative analysis*, 34(4), 1999.

Literaturverzeichnis

- O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, Nov. 1977. ISSN 0304405X.
- J. A. Wachter. Risk aversion and allocation to long-term bonds. *Journal of Economic Theory*, 112(2):325–333, 2003.

A. Stochastische Kontrolle

Im Folgenden seien der Wahrscheinlichkeitsraum (P, \mathcal{F}, Ω) , die darin definierte n -dimensionale Brownsche Bewegung $W(t)$ sowie deren natürliche Filtration \mathcal{F}_t genau wie in Bemerkung 2.1.1 gegeben. Unter der Norm $\|\cdot\|$ ist stets die euklidische Norm bzw. Matrixnorm zu verstehen.

A.1. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

Das folgende Theorem ist Korn (1997) (S. 313f) entnommen.

Theorem A.1.1 (Variation der Konstanten). *Es seien A und a zwei 1-dimensionale sowie S und σ zwei n -dimensionale reellwertige \mathcal{F}_t -adaptierte Prozesse, für die gilt:*

$$\int_{t_0}^{t_1} |A(s)| ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} |a(s)| ds < \infty \quad f. s.$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|S(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} \|\sigma(s)\|^2 ds < \infty \quad f. s.$$

Dann existiert auf $[t_0, t_1]$ eine eindeutige Lösung für die lineare SDE

$$dX(t) = (X(t)A(t) + a(t)) dt + \left(X(t)S^\top(t) + \sigma^\top(t) \right) dW(t), \quad X(t_0) = x,$$

die gegeben ist durch

$$X(t) = Z(t) \left(x + \int_{t_0}^t \frac{1}{Z(u)} \left(a(u) - S^\top(u)\sigma(u) \right) du + \int_{t_0}^t \frac{1}{Z(u)} \sigma^\top(u) dW(u) \right),$$

wobei

$$Z(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \left(A(u) - \frac{1}{2} \|S(u)\|^2 \right) du + \int_{t_0}^t S^\top(u) dW(u) \right).$$

Das folgende Korollar des obigen Theorems ist aus Korn und Kraft (2002) (S. 15) entnommen und behandelt eine kontrollierte SDE.

Korollar A.1.2 (Variation der Konstanten – die Zweite). *Es seien jeweils A_1 ein d -dim., A_2 ein 1-dim., B_1 ein $n \times d$ -dim. und B_2 ein n -dim. progressiv messbarer*

A. Stochastische Kontrolle

Prozess. Für diese gelte:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|A_1(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d B_1^{(i,j)}(s)^4 ds < \infty \quad f. s.$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|B_2(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} |A_2(s)| ds < \infty \quad f. s.$$

Ferner sei u eine d -dimensionale progressiv messbare stochastische Kontrolle, für die für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte:

$$E \left(\int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\|^k ds \right) < \infty$$

Dann besitzt die 1-dimensionale (kontrollierte) SDE

$$dY^u(t) = Y^u(t) \left(\left(A_1^\top(t)u(t) + A_2(t) \right) dt + \left(B_1^\top(t)u(t) + B_2(t) \right)^\top dW(t) \right),$$

$$Y^u(t_0) = y_0$$

auf $[t_0, t_1]$ die fast sichere eindeutige Lösung

$$Y^u(t) = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t A_1^\top(s)u(s) + A_2(s) - \frac{1}{2} \left\| \left(B_1^\top(s)u(s) + B_2(s) \right) \right\|^2 ds \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \left(B_1^\top(s)u(s) + B_2(s) \right)^\top dW(s) \right).$$

Falls u beschränkt ist, so müssen A_1 und B_1 nur die folgenden, weniger starken Integrierbarkeitsbedingungen erfüllen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|A_1(s)\| ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} \|B_1(s)\|^2 ds < \infty \quad f. s. .$$

A.2. Verifikations-Theoreme

Die folgenden in diesem Abschnitt dargestellten Resultate sind vollständig aus Korn und Kraft (2002) entnommen. Ihre wesentlichen Ergebnisse basieren dabei auf Fleming und Soner (2006).

Zunächst definieren wir eine m -dimensionale kontrollierte SDE (Abk.: *CSDE*) der folgenden Form:

$$dY(t) = \Lambda(t, Y(t), u(t)) dt + \Sigma(t, Y(t), u(t)) dW(t),$$

$$Y(t_0) = y_0 \tag{A.1}$$

A.2. Verifikations-Theoreme

Das relevante Zeitintervall sei durch $[t_0, t_1]$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ gegeben. Ferner sei $u(t)$ ein d -dimensionaler *Kontrollprozess* (kurz: *Kontrolle*). Dieser sei progressiv messbar und für alle $t \in [t_0, t_1]$ gelte, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^d$, wobei U ein abgeschlossener Unterraum sei.

Es sei $Q_0 := [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^m$. Die Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}\Lambda &: \overline{Q_0} \times U \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \Sigma &: \overline{Q_0} \times U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},\end{aligned}$$

seien stetig und für festes $u \in U$ auch stetig differenzierbar in $\overline{Q_0}$.

Definition A.2.1 (Zulässige Kontrolle). Eine progressiv messbare Kontrolle $u(t)$ heißt zulässig, falls

- (i) für die CSDE (A.1) in allen Anfangszuständen $Y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung existiert,
- (ii) für alle $k \in \mathbb{N}$ die folgende Integrierbarkeitsbedingung

$$E \left(\int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\|^k ds \right) < \infty$$

erfüllt ist und

- (iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Lösung Y^u gilt

$$E^{t_0, y_0} \left(\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|Y^u(t)\|^k \right) < \infty.$$

Die Menge aller zulässigen Kontrollen bei einem gegebenen Anfangszustand $(t_0, y_0) \in Q_0$ sei mit $\mathcal{A}(t_0, y_0)$ gekennzeichnet. Bezieht sich die Kontrolle u nur auf ein Teilintervall $[t, s] \subset [t_0, t_1]$, so schreiben wir mitunter auch $u \in \mathcal{A}([t, s], y)$.

Diese relativ strenge Definition zulässiger Kontrollen erlaubt es, einige andere Bedingungen abzuschwächen. So sind für Standard-Verifikations-Theoreme üblicherweise die folgenden Lipschitz- und Beschränktheitsbedingungen

$$\begin{aligned}\|\Lambda_t\| + \|\Lambda_y\| &\leq C \\ \|\Sigma_t\| + \|\Sigma_y\| &\leq C\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}|\Lambda(t, y, v)| &\leq C(1 + |y| + |v|) \\ |\Sigma(t, y, v)| &\leq C(1 + |y| + |v|)\end{aligned}\tag{A.3}$$

A. Stochastische Kontrolle

für alle $t \in [t_0, t_1]$, $y \in R$ und $v \in U$ und eine Konstante $C > 0$ notwendig. Diese stellen die Existenz- und Eindeutigkeit der betrachteten CSDE sicher. Zumeist sind diese Bedingungen in unseren Anwendungsbeispielen nicht erfüllt. Mittels Korollar A.1.2 lässt sich jedoch Bedingung (i) oftmals aus Bedingung (ii) folgern.

Bevor wir uns dem Verifikations-Theorem zuwenden, folgen einige notwendige weitere Definitionen. Es sei $O \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Unterraum. Falls O ein echter Unterraum ist, so gelte zusätzlich, dass ∂O eine kompakte C^3 -Mannigfaltigkeit sei. Analog zu Q_0 definieren wir $Q := [t_0, t_1] \times O$.

Die Stoppzeit $\tau := \inf (t \in [t_0, t_1] : (t, Y(t)) \notin Q)$ definiert den Zeitpunkt, zu dem Y den Unterraum O verlässt und es gilt:

$$(\tau, Y(\tau)) \in \partial^* Q := ([t_0, t_1] \times \partial O) \cup (\{t_1\} \times \bar{O})$$

Die stetigen, reellwertigen Funktionen L und Ψ erfüllen

$$|L(t, y, v)| \leq C(1 + |y|^k + |v|^k), \quad (\text{A.4})$$

$$|\Psi(t, y)| \leq C(1 + |y|^k) \quad (\text{A.5})$$

auf $\bar{Q} \times U$ bzw. auf \bar{Q} für geeignete Konstanten $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$. Die beiden Funktionen modellieren den Nutzen, der aus der Kontrolle und/oder dem kontrollierten Prozess Y resultiert.

Ziel ist es nun, die zulässige Kontrolle $u \in A(t_0, y_0)$ zu bestimmen, welche bei gegebenem Anfangszustand (t_0, y_0) den erwarteten Nutzen

$$J(t_0, y_0, u) := E^{t_0, y_0} \left[\int_{t_0}^{\tau} L(s, Y^u(s), u(s)) dt + \Psi(\tau, Y^u(\tau)) \right] \quad (\text{A.6})$$

maximiert. Daher definieren wir die Wertfunktion

$$V(t, y) := \sup_{u \in A(t, y)} J(t, y, u), \quad (t, y) \in Q. \quad (\text{A.7})$$

Für eine beliebige Funktion $G \in C^{1,2}(Q)$ und $(t, y) \in Q$, $v \in U$ definieren wir zudem den folgenden Differentialoperator

$$D^v(t, y) := G_t(t, y) + G_y(t, y)\Lambda(t, y, v) + \frac{1}{2}\text{tr} \left(G_{yy}(t, y)\Sigma(t, y, v)\Sigma^\top(t, y, v) \right) \quad (\text{A.8})$$

A.2. Verifikations-Theoreme

Damit können wir nun das folgende Standard-Verifikations-Theorem aufstellen (siehe Korn und Kraft (2002) oder Fleming und Soner (2006)).

Theorem A.2.2 (Verifikations-Theorem). Es sei ein kontrollierter Prozess wie in (A.1) gegeben. Für die Koeffizientenfunktionen gelten die Bedingungen (A.2) sowie (A.3) und für die Nutzenfunktionen die Bedingungen (A.4) sowie (A.5). Nun sei G eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$,
- für geeignete Konstanten $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ sei

$$|G(t, y)| \leq C(1 + \|y\|^k), \quad (\text{A.9})$$

- zudem sei G eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung (HJB):

$$\begin{aligned} \sup_{v \in U} (L(t, y, v) + D^v G(t, y)) &= 0, & (t, y) \in Q, \\ G(t_1, Y(t_1)) &= \Psi(t_1, Y(t_1)). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dann gilt:

- (i) $G(t, y) \geq J(t, y, u)$ für alle $(t, y) \in Q$ und $u \in A(t, y)$.
- (ii) Wenn für $(t, y) \in Q$ eine optimale Kontrolle $u^* \in A(t, y)$ existiert mit

$$u^*(s) \in \operatorname{argmax}_{v \in U} (L(s, Y^*(s), v) + D^v G(s, Y^*(s))) \quad (\text{A.11})$$

für alle $s \in [t_0, \tau]$, wobei Y^* die Lösung der CSDE (A.1) bei Kontrolle u^* ist, dann gilt

$$G(t, y) = V(t, y) = J(t, y, u^*), \quad (\text{A.12})$$

d. h. u^* ist eine optimale Kontrolle und G entspricht der Wertfunktion.

Neben den Bedingungen (A.2) und (A.3) ist aufgrund der stochastischen Shortrate $r(t)$ oftmals auch (A.9) nicht erfüllt. Das Fehlen dieser Eigenschaften wird durch folgendes Korollar, welches nur abgeschwächte Voraussetzungen fordert, behoben.

Korollar A.2.3. Es sei ein kontrollierter Prozess wie in (A.1) gegeben, bei dem die Koeffizientenfunktionen die Bedingungen von Korollar A.1.2 erfüllen. Wie zuvor erfüllen die Nutzenfunktionen die Bedingungen (A.4) sowie (A.5). Nun sei $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

A. Stochastische Kontrolle

- Für alle $(t, y) \in Q$ und alle zulässigen Kontrollen $u \in (t, y)$ existiert ein geeignetes $\rho > 1$, so dass

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t, t_1]} |G(s, Y(s))|^\rho \right) < \infty. \quad (\text{A.13})$$

- G ist eine Lösung der HJB-Gleichung (A.10).

Dann behalten die Schlussfolgerungen (i) und (ii) aus dem vorangegangenen Verifikations-Theorem ihre Gültigkeit.

Für den Beweis verweisen wir auf Korn und Kraft (2002).

A.3. Weitere Resultate

Das folgende Resultat dient dazu, verschiedene Integrierbarkeitsbedingungen zu erklären. Es entspricht einem Korollar aus Krylov (2008) (S. 86).

Theorem A.3.1. Es sei $X(t)$ ein d -dim. progressiv messbarer Prozess mit d -dim. b und $d \times n$ -dim. σ , der wie folgt gegeben ist:

$$X(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} b(t, X(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sigma(t, X(t)) dW(t).$$

Für die Koeffizientenprozesse b und σ gelte, dass ein $C > 0$ existiere, so dass für alle $t \in [t_0, t_1]$ und für alle x

$$\|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|).$$

Dann gibt es für beliebiges $k \geq 0$ eine Konstante K , so dass für alle $t \in [t_0, t_1]$ gilt

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \|X(s) - x_0\|^k \right) &\leq K t^{\frac{k}{2}} \exp(Kt) (1 + \|x_0\|)^k, \\ E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \|X(s)\|^k \right) &\leq K \exp(Kt) (1 + \|x_0\|)^k. \end{aligned}$$

Aus obigem Korollar folgt insbesondere:

$$\begin{aligned}
 E \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} \|X(s)\|^k \right) &< \infty, \\
 E \left(\int_{t_0}^{t_1} \|X(s)\|^k ds \right) &\leq (t_1 - t_0) E \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} \|X(s)\|^k \right) < \infty, \\
 \int_{t_0}^{t_1} \|X(s)\|^k ds &< \infty \quad f. s. .
 \end{aligned}$$

Zudem gilt folgendes Korollar für log-normale Prozesse.

Korollar A.3.2. Es sei $X(t)$ ein 1-dimensionaler progressiv messbarer Prozess mit 1-dim. b und n -dim. σ , der wie folgt gegeben ist:

$$dX(t) = X(t) (b(t) dt + \sigma(t) dW(t)), \quad X(0) = x_0.$$

Für die Koeffizientenprozesse b und σ gelte, dass ein $C > 0$ existiere, so dass für alle $t \in [t_0, t_1]$ und für alle x

$$|b(t)| + \|\sigma(t)\| \leq C.$$

Dann gilt für alle $t \in [t_0, t_1]$ und für beliebiges $k \geq 0$

$$E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \|X(s)\|^k \right) < \infty.$$

B. Approximation von $\xi(t)$

Die Entwicklung der Perpetualkosten (4.12) besitzt wegen $\xi(t)$ eigentlich einen stochastischen Marktpreis des Risikos:

$$dK(t) = K(t) \left(-c dt + (\psi(t) - \psi^\infty(t))^\top (\sigma \xi(t) dt + \sigma dW(t)) \right)$$

Diese Eigenschaft des Modells erschwert die analytische Optimierung erheblich. Daher haben wir in Kapitel 5 für die Perpetualkosten ein Modell mit konstantem ξ gewählt. Wir wollen hier der Frage nachgehen, wieso eine solche Annahme gerechtfertigt ist?

Analyse der stochastischen Entwicklung. Betrachten wir zunächst die zeitliche, stochastische Entwicklung von $\xi(t)$. Wir simulieren über ein Jahr hinweg und wählen dabei genau das gleiche Beispielmodell mit den gleichen stochastischen Pfaden wie bei der Interpretation optimaler Strategien (siehe etwa Abschnitt 3.3.2). In diesem Beispiel ist $\xi(t)$ 3-dimensional. Die Entwicklung der drei Komponenten ist in den Abbildungen B.1 bis B.3 dargestellt.

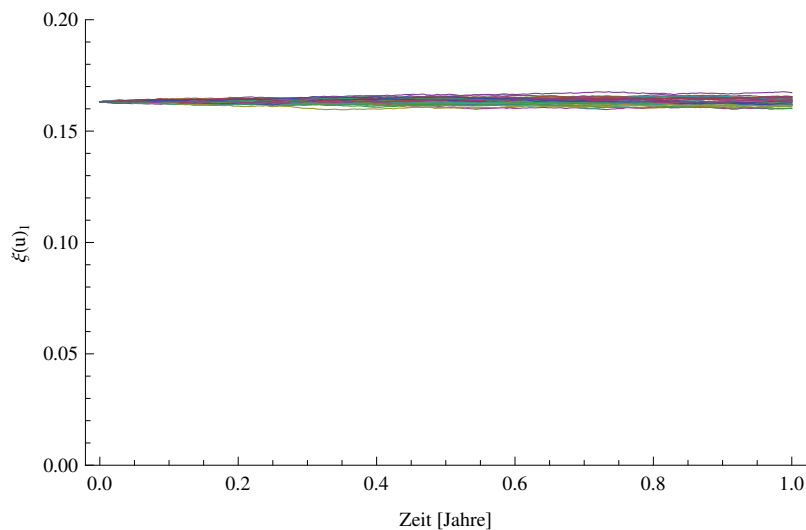


Abbildung B.1.: Stochastische Entwicklung von $\xi_1(u)$ über ein Jahr.

B. Approximation von $\xi(t)$

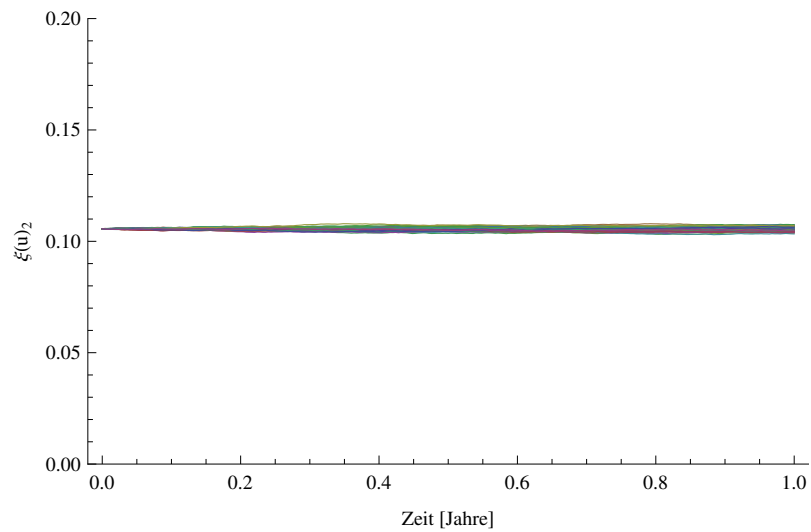


Abbildung B.2.: Stochastische Entwicklung von $\xi_2(u)$ über ein Jahr.

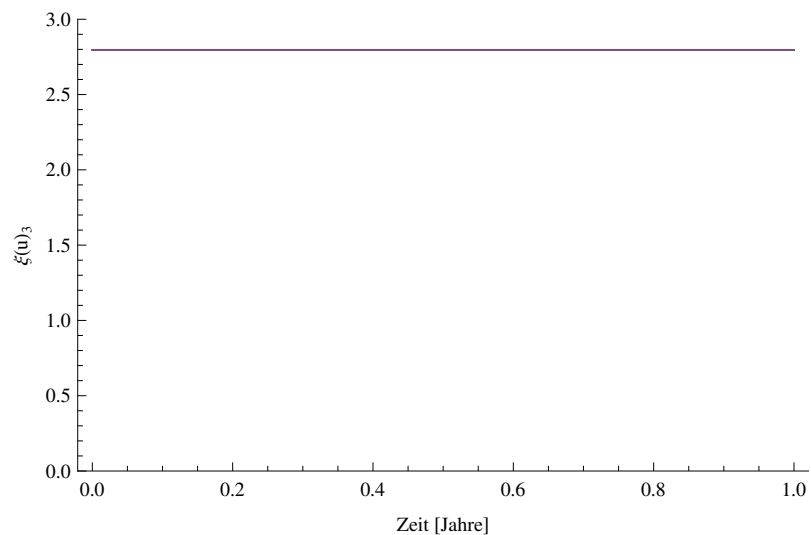


Abbildung B.3.: Stochastische Entwicklung von $\xi_3(u)$ über ein Jahr.

Deutlich wird in diesen Abbildungen, dass die Bandbreite von $\xi(t)$ anscheinend eher gering ist. Die beiden Modelle der Perpetualkosten, mit stochastischem bzw. mit konstantem ξ , sind also zumindest phänomenologisch sehr ähnlich. Bleibt die Frage, ob es Anhaltspunkte dafür gibt, dass ein Modell doch etwas besser als das andere ist.

Zusammenhang von $\xi(t)$ und Risikoprämie R . Wenden wir uns der Entstehungsgeschichte von $\xi(t)$ zu. Zunächst haben wir in unserem Zinsmodell die einfachste aller möglichen Annahmen für die Drift R getroffen und diese als konstant angenommen. Diese Konstanz überträgt sich mittels der zweiten

Arbitragefreiheits-Bedingung (2.10) auf den Marktpreis des Risikos b . Da dieser somit als konstant vorausgesetzt ist, ergibt sich aus

$$\xi(t) = b - \sigma^\top \psi^\infty(t)$$

die stochastische Eigenschaft von $\xi(t)$. Wir sind also von einem einfachen Zinsmodell ausgegangen und haben darauf basierend eine in sich konsistente Modellwelt erschaffen, allerdings auch inklusive eines Modells der Perpetualkosten mit einem komplizierten Drift-Term.

Genauso gut könnten wir jedoch auch „rückwärts“ vorgehen. Wir *beginnen* mit einem Modell für Perpetualkosten. Wie selbstverständlich würden man dabei eine möglichst einfache Drift wählen, nämlich ein konstantes ξ . Um die Konsistenz der Modellwelt zu erhalten, würden wir dann auf einen stochastischen Marktpreis des Risikos

$$b(t) = \xi + \sigma^\top \psi^\infty(t).$$

und schlussendlich wegen der Arbitragefreiheit auf ein stochastisches R stoßen. Ein solches Zinsmodell wäre immer noch wohldefiniert und wir hätten ein in sich konsistentes Gesamtmodell mit konstantem ξ , ohne dass es einer Approximation bedurft hätte.

Nur wenn wir also starke Hinweise darauf hätten, dass ein konstantes R genau *der* richtige Ansatz ist, so würde das Modell der Perpetualkosten mit stochastischem $\xi(t)$ die Realität tatsächlich besser beschreiben. Die Unsicherheiten hinsichtlich der richtigen Wahl der Form von R sind jedoch enorm. Gewählt haben wir es letztendlich vor allem wegen seiner Einfachheit.

Insgesamt ist daher die Wahl eines konstanten ξ eine gerechtfertigte Approximation und beschreibt die tatsächliche Entwicklung der Perpetualkosten wohl ähnlich gut wie die Alternative mit stochastischem $\xi(t)$. Einziger Wermutstropfen ist, dass wir die Konsistenz des Gesamtmodells opfern müssen und nicht ein einfaches Zinsmodell *und* einfaches Perpetualkostenmodell gleichzeitig kreieren können.

C. Markowitz: Renditemaximierung vs. Kostenminimierung

In der zeitkontinuierlichen Optimierung haben wir den Effekt beobachtet, dass sich das Vorzeichen des Skalierungsfaktors, der die Investition in das Marktportfolio steuert, ändert, wenn wir von einer optimalen Anlagestrategie auf eine optimale Finanzierungsstrategie wechseln.

Dieser Effekt lässt sich noch besser nachvollziehen, wenn wir ein einfaches Markowitz-Problem betrachten. Üblicherweise wird dabei das Renditeniveau festgehalten und unter dieser Bedingung die Varianz der Rendite minimiert.

Gleichbedeutend, aber hier pädagogischer wollen wir die Varianz festhalten und unter dieser Nebenbedingung den Erwartungswert der Rendite maximieren bzw. den der Kosten minimieren.

Zunächst definieren wir einige ganz einfache Instrumente bzw. die Verteilung ihrer Renditen nach einem Zeitschritt. Der Renditevektor $R \in \mathbb{R}^n$ der risikobehafteten Instrumente folge einer n -dimensionalen multivariaten Normalverteilung¹:

$$R \sim \mathcal{N}(b + \underline{1}r, \Sigma), \quad (\text{C.1})$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ die erwartete Überschussrendite gegenüber der risikolosen Rendite $r_0 \in \mathbb{R}$ sei und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Kovarianzmatrix.

Bei einer einfachen „Buy-and-Hold“-Strategie, gesteuert mit einem Gewichtsvektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ für die risikobehafteten Instrumente, ergibt sich somit die folgende Gesamrendite nach einem Zeitschritt:

$$X^\pi = \pi^\top R + (1 - \pi^\top \underline{1})r \quad (\text{C.2})$$

¹Eine solche Verteilungsannahme ist beim Markowitz-Ansatz nicht unbedingt nötig. Erwartungswert und Varianz müssen jedoch für die gewählte Verteilung definiert sein.

C. Markowitz: Renditemaximierung vs. Kostenminimierung

Die beiden angesprochenen Optimierungsprobleme sind also in dieser Notation wie folgt gegeben:

Renditemaximierung:

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \quad & \mathbb{E}(X^{\pi}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{Var}(X^{\pi}) = v^2 \end{aligned}$$

Kostenminimierung:

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \mathbb{E}(X^{\pi}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{Var}(X^{\pi}) = v^2 \end{aligned}$$

Dabei gilt natürlich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^{\pi}) &= (1 - \mathbf{1}^{\top} \pi)r + \pi^{\top} (b + \mathbf{1}r) \\ &= r + \pi^{\top} b \\ \text{Var}(X^{\pi}) &= \pi^{\top} \Sigma \pi \end{aligned}$$

Für beide Probleme ergibt sich also zunächst die gleiche Lagrange-Funktion für den Lagrange-Multiplikator λ :

$$f(\pi, \lambda) := \pi^{\top} b + \lambda(\pi^{\top} \Sigma \pi - v^2) \quad (\text{C.3})$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems müssen zunächst die Ableitungen f_{π} und f_{λ} auf null gesetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi^* &= -\frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-\top} b \\ \lambda &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^{\top} \Sigma^{-\top} b}{v^2}} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung $f_{\pi\pi} = 2\lambda\Sigma$ bestimmt nun, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt. Da Σ eine Kovarianzmatrix und somit positiv definit ist, ist das Vorzeichen von λ hierfür entscheidend:

$$\pi^{max} = \sqrt{\frac{v^2}{b^{\top} \Sigma^{-\top} b}} \Sigma^{-\top} b \quad \pi^{min} = -\sqrt{\frac{v^2}{b^{\top} \Sigma^{-\top} b}} \Sigma^{-\top} b$$

Es ist also auch in einer einfachen Markowitz-Optimierung genau der gleiche Effekt zu beobachten wie bei der zeitkontinuierlichen Betrachtungsweise. Hier wird jedoch transparenter, woher der Effekt rührt, dass sich das Vorzeichen vor dem Marktportfolio-Term beim Übergang von Maximierung auf Minimierung verkehrt.

Wissenschaftlicher Werdegang

Name: Christoph Peters

08/1993 - 03/2002	Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey Abitur
04/2003 - 04/2008	Technische Universität Kaiserslautern Studium der Mathematik, Schwerpunkt Finanzmathematik
02/2007 - 06/2007	University of Auckland Studium der Mathematik, Schwerpunkt Optimierung
04/2008	Technische Universität Kaiserslautern Diplom in Mathematik (Dipl.-Math.)
08/2008 - heute	Deutsche Finanzagentur, Bereich Strategie Promotion bei Prof. Dr. Ralf Korn, TU Kaiserslautern

Scientific career

Name: Christoph Peters

08/1993 - 03/2002	Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey Abitur
04/2003 - 04/2008	Technical University Kaiserslautern Study of Mathematics, specialization in mathematical finance
02/2007 - 06/2007	University of Auckland Study of Mathematics, specialization in optimization
04/2008	Technical University Kaiserslautern Diplom in Mathematics (Dipl.-Math.)
08/2008 - today	German Finance Agency, Strategy Department PhD student of Prof. Dr. Ralf Korn, TU Kaiserslautern