KOMPETENZZENTRUM FÜR
MATHEMATISCHE MODELLIERUNG IN
MINT-PROJEKTEN IN DER SCHULE

KOMMS Reports Nr. 3 (2016)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule

Kartenmischen - Ein Modellierungsprojekt für die Sekundarstufen I und II

Patrick Capraro

EUROPÄISCHER SOZIALFONDS
Mehr Chancen für Rheinland-Pfalz

EUROPÄISCHE UNION
Europäischer Sozialfonds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Zusammenfassung:
Um Spielkarten zu mischen gibt es unterschiedliche Techniken, die sich sowohl in ihrem Zeitaufwand, als auch in der Güte der Durchmischung unterscheiden. Der folgende Artikel vermittelt, wie man die Frage nach einer besonders guten Mischtechnik nutzen kann, um mathematische Modellierung anhand einer alltagsnahen Fragestellung in den Unterricht einzubinden. Dabei können verschiedene Aspekte der Stochastik angesprochen werden, und es bietet sich ein breites Potential, auf unterschiedlichen Niveaus Computer zum Generieren von Zufallsexperimenten zu verwenden.

1 Einleitung

Auch wenn das Mischen eines Kartendecks den Anschein erweckt, eine banale Alltagsangelegenheit zu sein, so gibt es doch verschiedene wissenschaftliche Studien zu dem Thema. Denkt man an Glücksspiel und die Möglichkeit, durch Kartentricks zu betrügen, so liegt es auch nahe, dass es ein wirtschaftliches Interesse an besonders guten und vor allem fairen Mischtechniken gibt. Ein häufig genanntes Ergebnis wissenschaftlicher Arbeiten ist, dass bei dem sehr zeiteffizienten Bogenmischen (*riffle shuffle*, siehe Abbildung 1.1) sechs bis sieben Wiederholungen nötig sind, um ein Pokerdeck mit 52 Karten zufriedenstellend zu mischen. Viele andere Mischtechniken benötigen nicht nur mehr Zeit, sondern auch mehr Wiederholungen.

Abbildung 1.1: Das Bogenmischen

Die Frage nach einer guten Mischtechnik berührt den Alltag der meisten Schülerinnen und Schüler, da sie in aller Regel sowohl mit Kartenspielen als auch mit verschiedenen Mischmethoden vertraut sind. Daher kann es helfen, die Alltagsrelevanz und den Bezug der Mathematik auf Problemlösekompetenzen aufzuzeigen, wenn diese Frage mit mathematischen Mitteln untersucht wird. Da die Frage sehr allgemein und ohne mathematischen Kontext formuliert ist, eignet sie sich für verschiedene Altersstufen von der Unterstufe bis in die gymnasiale Oberstufe und auch darüber hinaus. Eine Anpassung der Aufgabenstellung an die Kenntnisse der Schüler ist nicht notwendig, da die Wahl der mathematischen Methoden von den Schülern getroffen wird und diese daher ihrem Wissensstand entsprechen.

Anhand der Fragestellung können unterschiedliche Themen aus der Stochastik in den Fokus rücken. Das sind einerseits Inhalte aus der Statistik, wie etwa die Erhebung von Stichproben, Datenerfassung sowie -auswertung, oder die Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand von Simulationen und relativen Häufigkeiten. Andererseits kann aber auch auf einer theoretischen Ebene analysiert werden, wie man den Begriff der *Güte* einer Mischtechnik definiert, oder wie man den Grad der Durchmischung einer Stichprobe bestimmt. Das gibt einerseits einen Einblick in die Methoden des wissenschaftlichen mathematischen Arbeitens (Erarbeitung mathematischer Strukturen), andererseits bietet es aus wissenschaftstheoretischer Sicht die Möglichkeit, den Begriff des Modells zu thematisieren (etwa wenn die Schüler sich nicht einig sind, welche Kriterien ein gemischter Kartenstapel erfüllen soll). Aufgrund des wissenschaftspropädeutischen Bezugs ist eine Thematisierung letztgenannter Inhalte vor allem in der Sekundarstufe II sinnvoll.

Das Projekt wurde unter unterschiedlichen Rahmenbedingungen und von Schülern unterschiedlicher Altersstufen schon mehrfach durchgeführt. Dies geschah einerseits im Rahmen der mathematischen Modellierungswoche, in der Schüler der Sekundarstufe II in Gruppen von 4 bis 6 Schülern eine Woche lang an je einem Projekt arbeiten. Darüber hinaus wurde die Fragestellung mehrfach bei den Modellierungstagen bearbeitet, deren Dauer von einem Nachmittag bis zu 3 Tagen reichen kann. Die Schüler werden in aller Regel sowohl von Mathematik- oder Informatiklehrern, als auch von Tutoren der TU Kaiserslautern betreut. Dabei waren die Lehrer angehalten, lediglich technische Hilfestellungen (Programmierung, Klären von Unklarheiten bzgl. mathematischer Methoden) zu geben. Die Wahl der mathematischen Herangehensweise sollte dabei ausschließlich von den Schülern getroffen werden. Die Aufgabe der Tutoren bestand im Wesentlichen darin, Hintergrundinformationen zur Fragestellung bereitstellen zu können.

2 Vorbemerkungen

2.1 Verschiedene Mischtechniken

Als eine der effizientesten Mischtechniken wurde das *Bogenmischen* meist bereits in der Aufgabenstellung erwähnt. Bei dieser Technik wird der Kartenstapel in zwei Hälften aufgeteilt, die jeweils in einer Hand gehalten werden. Mit dem Daumen jeder Hand wölbt man eine Ecke des Stapels nach oben und lässt anschließend die beiden gewölbten Ecken ineinander blättern, so dass Karten beider Stapel abwechselnd übereinander liegen.

Mit am verbreitetsten ist das *Überhandmischen*. Dabei hält man den Kartenstapel in der einen Hand und zieht mit dem Daumen der anderen Hand eine gewisse Menge an Karten ab, die dann auf den neuen Stapel gelegt werden.

Eine weitere Methode, die von Schülern oft erwähnt wurde, ist das *Durchwühlen*, bei dem die Karten auf dem Tisch verdeckt ausgebreitet und mit den Händen zufällig durchmischt werden.

Beim *Stapeln* werden Karten einzeln reihum auf mehrere Stapel aufgeteilt. Diese Methode wird in manchen Kasinos verwendet, jedoch nicht zum Mischen, sondern als Methode, um aneinanderhaftende Karten voneinander zu lösen. Jedoch wurden von den Schülern auch abgewandelte Formen dieser Technik betrachtet, um Karten nach einem gewissen System auf Stapel aufzuteilen, wodurch sich eine deterministische Mischtechnik ergibt.

2.2 Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler

Programmierkenntnisse. Da man sich auf verschiedene Teilaspekte der Fragestellung konzentrieren kann, sind Programmierkenntnisse nicht zwangsweise nötig. Die Entwicklung eines Gütekriteriums ist eine theoretische Fragestellung und benötigt keine numerischen Methoden. Das Testen von Mischmethoden kann auch mit wenigen Wiederholungen erfolgen, so dass ein Kartenspiel (oder besser mehrere) in jeder Gruppe ausreicht, um einfache Ergebnisse zu gewinnen. Für eine anspruchsvolle Simulation jedoch ist es sinnvoll, viele Wiederholungen durch ein Computerprogramm durchführen zu lassen. Dazu reicht es aber aus, einfache Kontrollstukturen zu beherrschen (Schleifen, if/else-Verzweigungen) und Einträge in Listen gezielt umzusortieren. Das Generieren von Zufallszahlen ist darüberhinaus sehr sinnvoll, um nichtdeterministische Modelle zu verwenden.

Stochastik. Auch wenn Inhalte der Stochastik in unterschiedlicher Form zur Lösung der Aufgabe genutzt werden können, sind Vorkenntnisse nicht zwingend erforderlich, da sich die mathematische Tiefe des Modells aus den Kenntnissen der Schüler ergibt.

2.3 Deterministische und Nichtdeterministische Modelle

Mischtechniken lassen sich durch deterministische und nichtdeterministische Modelle beschreiben. Bei ersteren wird ein starres Muster angenommen, um elementare Mischvorgänge zu modellieren. Beispielsweise könnte man davon ausgehen, dass beim Überhandmischen in jedem Schritt jeweils drei Karten vom Kartenstapel abgezogen werden und in einen neuen Kartenstapel nach unten wandern. Solche Modelle eignen sich gut, um eine theoretische Analyse der Mischtechnik durchzuführen, ohne dass dafür eine Simulation notwendig ist. Man könnte hier Teilfragen untersuchen, beispielsweise wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Mischmethode vorsortierte Paare durchbricht.

Bei einem nichtdeterministischen Modell wird zusätzlich berücksichtigt, dass gewisse Vorgänge nicht immer gleich ablaufen. Etwa beim oben genannten Überhandmischen sind es eben meist unterschiedlich viele Karten, die vom Stapel abgezogen werden. Daher besteht hier die Aufgabe darin, die Anzahl durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung anzugeben. Theoretische Analysen des Verhaltens einer solchen Mischtechnik sind schwieriger, da nun viele mögliche Ergebnisse zu vergleichen sind und bei mehreren Wiederholungen einer Methode die Anzahl der möglichen Ergebnisse meist exponentiell steigt. Es gibt jedoch auch Mischtechniken, die per se bereits deterministisch sind. So hat etwa eine Gruppe eine Methode des Stapelns entwickelt, in der die Karten nach einem vorgegebenen, aber komplexen Muster in Stapel unterschiedlicher Größe sortiert wurden. Die Methode war zeitaufwändig, konnte jedoch bei von Hand getätigten Testdurchläufen schon nach wenigen Wiederholungen gute Ergebnisse liefern.

Meist haben vor allem jüngere Schüler eher dazu tendiert, deterministische Modelle aufzustellen. Nichtdeterministische Modelle wurden oft von Oberstufenschülern benutzt, welche auch programmieren und die zufälligen Elemente durch das Erzeugen von Zufallszahlen in die Simulation einbauen konnten.

2.4 Gütekriterien

Gerade dann, wenn Mischtechniken vom Computer simuliert werden, ist es sinnvoll, eine quantitative Größe für den Grad der Durchmischung anzugeben. Das ist für viele Schüler ungewohnt, da es keinen offensichtlichen Maßstab für eine solche Größe gibt und nicht immer Einigkeit darin besteht, welche Kriterien berücksichtigt werden müssen. Teilweise hängt die Bewertung einer guten Durchmischung davon ab, welches Kartenspiel die Schüler im Sinn haben. Manchmal war ihnen wichtig, Paare zu vermeiden (z.B. zwei Könige hintereinander), manchmal sollten die Differenzen der Kartenwerte möglichst groß sein (z.B. nicht $7-9-8$ hintereinander). Gerade hier ist es wichtig, dass der Lehrer die Modelle der Schüler nicht beeinflusst, wenn Uneinigkeit über die Gütekriterien herrscht. Es kann aber sinnvoll sein, durch kritische Fragen oder allgemein gehaltene Hinweise die Diskussion unter den Schülern voranzutreiben. Beispielsweise kann der Lehrer motivieren, dass mehrere Kriterien miteinander kombiniert werden, was dann wiederum die Frage nach der Gewichtung der Kriterien nach sich zieht. Wenn ein Gütekriterium entwickelt wurde, und genug Zeit bleibt, kann man durch eine weitere Simulation auch das Kriterium selbst einem Test unterziehen. Man kann etwa durch eine Monte-Carlo-Simulation Durchmischungen finden, für die das Kriterium einen besonders großen oder besonders kleinen Wert liefert, und sich ausgeben lassen. So kann das Modell auf Schwachstellen untersucht werden.

3 Ein mathematisches Modell des Mischvorgangs

Da davon auszugehen ist, dass eine gute Mischtechnik alle Arten von Kartenspielen gut mischen wird, kann man auf eine genaue Benennung der Bilder der einzelnen Karten verzichten. Daher kann man den Kartenstapel auch durch eine Liste von natürlichen Zahlen ersetzen (z.B. die Zahlen 1 bis 52 für ein Pokerdeck). Eine Mischtechnik ist daher nichts anderes, als eine Permutation dieser (zunächst geordneten) Zahlen. Solche Permutationen lassen sich auch ohne Computersimulation einer mathematischen Analyse unterziehen.

Mit kombinatorischen Überlegungen, die keine besonderen Vorkenntnisse erfordern, gelang es den Schülern oft, gewisse Muster einer Mischtechnik zu erkennen und diese Eigenschaften in ihre Analyse mit einzubeziehen. Selbstverständlich ist auch ein Vorgehen mit anspruchvollen mathematischen Werkzeugen denkbar. So kann man beispielsweise die elementaren Mischvorgänge durch Permutationsmatrizen darstellt und Methoden der Linearen Algebra anwenden.

In einem vereinfachten Modell könnte man das Bogenmischen derart beschreiben, dass die Zahlenliste in zwei Stapel geteilt wird, d.h. man erhält zwei Listen

$$(1, 2, 3, 4, \dots, 26) \quad \text{und} \quad (27, 28, 29, \dots, 52).$$

Nun werden abwechselnd Zahlen von beiden Stapeln entnommen, und in eine neue Liste sortiert. Man erhält also nach dem ersten Mischungsdurchlauf die Liste

$$(1, 27, 2, 28, 3, 29, 4, \ldots, 26, 52).$$

Wird dieser Vorgang wiederholt, so erhält man nach dem zweiten Mischen die Liste

$$(1, 14, 27, 40, 2, 15, \ldots, 39, 52).$$

Eine flüchtige Betrachtung dieses Verfahrens zeigt bereits diverse Sachverhalte:

- Man erkennt, dass die Liste bei jedem Iterationsvorgang etwas besser gemischt wird.
- Es handelt sich um ein deterministisches Modell, das Ergebnis ist reproduzierbar.
- Bei genauerer Betrachtung erkennt man gewisse Muster, die den Eindruck einer Ordnung wecken können. Beispielsweise haben nach dem zweiten Durchlauf benachbarte Zahlen sehr häufig die Differenz 13.

Man kann dieses Modell bereits nutzen, um gewisse Aussagen über die Mischmethode zu treffen. Beispielsweise kann betrachtet werden, wie weit Zahlen, die anfangs benachbart waren (d.h. die Differenz 1 haben), nach n Durchläufen auseinander liegen. Dies kann beispielsweise ein Hinweis darauf sein, ob die Methode geeignet ist, um Paare zu durchbrechen, die sich während des Kartenspiels gebildet haben.

Auf ähnliche Weise kann man versuchen, das Überhandmischen durch ein simples Verfahren zu beschreiben. Nimmt man an, dass bei jedem Überhanddurchgang 4 Karten vom Stapel abgezogen werden, dann erhält man nach dem ersten Durchlauf

$$(49, 50, 51, 52, 45, 46, 47, 48, \ldots, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4),$$

und nach dem zweiten

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52),$$

d.h. man erhält wieder die Ausgangssituation. Man sieht also, dass dieses Modell sehr schlecht geeignet ist, um die Mischtechnik zu beschreiben, denn die Schüler können hier zurecht anmerken, dass das Überhandmischen eine verbreitete Mischmethode ist, die in der Realität brauchbare Ergebnisse liefert. Unsere Vereinfachung hat zwei Schwächen:

- Die Anzahl der Karten ist durch 4 teilbar. Würden wir jeweils 3 oder 5 Karten abziehen, dann bräuchten wir wesentlich mehr Wiederholungen, um eine vergleichbare Situation herbeizuführen.
- Aber auch bei anderen Zahlenwerten wird man früher oder später zur Ausgangssituation zurückkehren. Das lässt sich nur vermeiden, wenn das Modell grundlegend geändert wird. Das kann durch ein nichtdeterministisches Modell geschehen, jedoch sind auch andere Überlegungen denkbar.

In der mathematischen Analyse äußert sich die Tatsache dadurch, dass eine n-fache Hintereinanderausführung der Permutation die identische Abbildung liefert (bzw. als Matrix dargestellt gibt die n-te Potenz der Permutationsmatrix die Einheitsmatrix). Unserer Erfahrung nach entdecken aber auch Unterstufenschüler solche Probleme sehr schnell, ohne dass die Methoden der Linearen Algebra notwendig wären. Sie werden häufig durch Ausprobieren darauf aufmerksam und können anschließend durch kombinatorische Überlegungen Regeln erkennen, nach denen diese Phänomene auftreten.

Die Entwicklung eines mathematischen Modells kann durchaus mit solch simplen Überlegungen beginnen, wie sie hier für das Bogenmischen und das Überhandmischen geschildert wurden. Das häufige Testen des aktuellen Modells auf die unterschiedlichen Fragestellungen, die mit dem Problem einhergeben, kann Schwächen des Modells aufzeigen und einen Hinweis darauf geben, wie im nächsten Schritt das Modell abgewandelt oder verfeinert werden muss. Im obigen Beispiel könnte man sich beispielsweise anschauen, was passiert, wenn beim Überhandmischen abwechselnd unterschiedliche Mengen von Karten abgezogen werden.

Solche Überlegungen können das Modell sehr schnell äußerst komplex werden lassen. Gerade für ältere Schüler bietet es sich daher an, Mischverfahren am Computer zu simulieren. Computersimulationen komplexer stochastischer Systeme sind im Rheinland-Pfälzischen Lehrplan beispielsweise ab der 9. Klasse vorgesehen. Dabei sind die Anforderungen an die Programmierkenntnisse überschaubar. Die Listings 3.1 und 3.2 zeigen je eine deterministische und eine nichtdeterministische Simulation eines Bogenmisch-Durchgangs. Mit wenigen for-Schleifen und ggf. if-else-Verzweigungen lassen sich brauchbare Simulationen erstellen.

Listing 3.1: Codebeispiel in c++ für eine deterministische Simulation eines Bogenmisch-Vorgangs

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){

int i;
int A[52];
int B[52];

// A ist der Kartenstapel vor dem Mischvorgang

for (i=0;i<52;i++){
  A[i]=i+1;
}

// B ist der Kartenstapel nach dem Mischvorgang

for (i=0;i<26;i++){
  B[2*i]=A[i];
  B[2*i+1]=A[i+26];
}

for (i=0;i<52;i++){
  cout << B[i] << endl;
}

return(0);
}
```

Listing 3.2: Codebeispiel in c++ für eine nichtdeterministische Simulation eines Bogenmisch-Vorgangs

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
using namespace std;

int main(){

int r,i,j,k;
int A[52];
int B[52];

// A ist der Kartenstapel vor dem Mischvorgang

for (i=0;i<52;i++){
  A[i]=i+1;
```

```
}

// B ist der Kartenstapel nach dem Mischvorgang

j=0;
k=0;
srand(time(NULL));

for (i=0;i<52;i++){
 // Karte von zufaelligem Stapel waehlen, bis ein Stapel aufgebraucht ist
  if(j==26){                // Stapel 1 leer
    r=1;
  }
  else if(k==26){           // Stapel 2 leer
    r=0;
  }
  else{                     // beide Stapel noch da
    r=rand() % 2;
  }
  if(r==0){
    B[i]=A[j];
    j++;
  }
  else{
    B[i]=A[k+26];
    k++;
  }
}

for (i=0;i<52;i++){
cout << B[i] << endl;
}

return(0);
}
```

4 Das Mischen großer Kartenstapel

Bei der Durchführung im Rahmen der Modellierungswoche wurde die Aufgabenstellung etwas abgewandelt, um dem größeren zeitlichen Rahmen Rechnung zu tragen. Dort wurde gefragt, ob die Schüler eine Mischmethode entwickeln können, um besonders große Kartenstapel zu mischen. Ausgangspunkt war ein Stapel von 400 Karteikarten mit Vokabeln, wie sie im Buchhandel fertig bedruckt erhältlich sind. Die Karten waren alphabetisch sortiert und sollten gemischt werden. Da es unpraktisch ist, 400 Karten gleichzeitig mit einer der bekannten Methoden (Überhand- oder Bogenmischen) zu mischen, war es offensichtlich, dass man neue Methoden entwickeln oder unkonventionellere Methoden in die Analyse miteinbeziehen musste.

Bei den großen Kartenstapeln kamen die Schüler der Modellierungswoche zu dem Schluss, dass es sinnvoll ist, Teilstapel zu mischen, danach durch Halbieren und geordnetes Zusammenfügen der halbierten Stapel neue Teilstapel zu bilden. Diese wurden dann erneut gemischt und der Vorgang mehrfach wiederholt. Hier zeigte sich, dass man durch geschicktes kombinieren der Mischtechniken viel Zeit sparen kann. Es ist z.B. nicht sinnvoll, beim Mischen der Teilstapel bereits ein optimales Mischungsverhältnis zu erzeugen. In den Simulationen der Schüler zeigte sich, dass es ausreicht, die Teilstapel mit wenigen Wiederholungen zu mischen und darauf zu setzen, dass die nachfolgenden Arbeitsschritte dabei helfen, die Durchmischung weiter zu verbessern. So genügten bereits drei Wiederholungen des Bogenmischens für die Teilstapel, wenn diese anschließend durch Abheben dreimal neu zusammengefügt wurden, wobei jedes Mal auch das Bogenmischen wiederholt wurde. Bei einer Stichprobe von 1000 Durchführungen galten anschließend über 95% der Kartenstapel als gut durchmischt.

Als Kriterium für die Güte der Mischtechnik wurden unterschiedliche Faktoren berücksichtigt: Dazu zählten die Summe der Differenzbeträge benachbarter Zahlen nach dem Mischvorgang, die Häufigkeit von Paaren (Nachbarn mit Differenzbetrag 1) und weitere Kriterien mit geringerer Priorität, z.B. die Summe der Differenzen einer Zahl zum Wert ihrer aktuellen Position (unter der Annahme, dass die Zahl n vor dem Mischen am n-ten Platz gestanden hat). Die Kriterien hatten die Schüler nach eigenem ästhetischen Empfinden ausgewählt und deren Gewichtung wurde experimentell bestimmt. Dazu wurden zufällig zusammengestellte Zahlenlisten dem Test unterzogen und besonders gute sowie besonders schlechte Ergebnisse vom Computer ausgegeben.

5 Lehrplanbezug

Unter der Voraussetzung, dass die Fragestellung offen formuliert ist, sind Modellierungsaufgaben eher schlecht dafür geeignet, spezifische, vom Lehrer ausgesuchte Themen des Lehrplans aufzugreifen. Dies ist schlicht und einfach der Tatsache geschuldet, dass bei einer offen gestellten Aufgabe die Schülerinnen und Schüler – und nicht die Lehrkraft – entscheiden, welche mathematischen Methoden zum Lösen des Problems verwendet werden.

Nichtsdestotrotz haben viele der verschiedenen Herangehensweisen einen deutlichen Bezug zum Lehrplan. Daher kann das Modellierungsprojekt auch dazu dienen, bereits gelernte mathematische Inhalte anzuwenden und zu vertiefen. Unter Umständen besteht auch die Möglichkeit, ein von den Schülern gewähltes mathematisches Modell dahingehend zu nutzen, dass gewisse Themen, die kein fester Teil des Lehrplans sind, sich aber inhaltlich mit dem Lehrplan überschneiden, spontan vertieft werden (wie beispielsweise oben erwähnte Permutationsmatrizen).

Bezüge zum Lehrplan am Beispiel des Lehrplans für die Sekundarstufe in Rheinland-Pfalz:

Modellierung des Mischungsvorgangs

- Das Auffinden von Mustern in Permutationen (heuristisch oder systematisch), Kompetenz K2: Probleme mathematisch lösen)
- Unterschiede zwischen einstufigen und mehrstufigen Zufallsexperimenten (9. – 13. Klasse)
- Permutationsmatrizen (11. – 13. Klasse) und andere systematische Herangehensweisen ()

Statistik

- Erhebung und Auswertung von Stichproben (durch wiederholtes Mischen) (empirische Wahrscheinlichkeit, 5. – 8. Klasse)
- Entwickeln eines Maßes für die Güte der Durchmischung (Kompetenz K3: Probleme mathematisch modellieren; eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen)
- Stichprobenumfang und Konfidenzintervalle (11. – 13. Klasse)

Wissenschaftstheorie

- Wissenschaftspropädeutische Fragen[1] (11. – 13. Klasse)
  - Gültigkeitsbereiche von wissenschaftlichen Modellen
  - Die bedeutung der Begriffe *Zufall* und *Zufallsereignis*

[1] Gemäß den Bestimmungen der Kultusministerkonferenz, siehe „Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II“

Computersimulationen

- Anwendung von Computersoftware ist ab der 7. Klassenstufe verpflichtend vorgesehen
- Schulung des algorithmischen Denkens als eines der „allgemeinen Ziele“der Sekundarstufe II
- Verwendung von Monte-Carlo-Methoden, um komplexe stochastische Systeme zu analysieren (9. – 13. Klasse)

6 Fazit

Die Frage nach dem optimalen Mischverfahren ist sehr gut geeignet, um in unterschiedlichen Altersklassen bearbeitet zu werden. Selbst Unterstufenschüler konnten ohne besondere mathematische Vorkenntnisse sinnvolle Ergebnisse gewinnen. Auch wenn Computersimulationen denkbar sind und zu ausgefeilten Ergebnissen führten, hat sich auch die Datenerhebung durch Kartenspiele, die an die Schüler ausgeteilt worden waren, bewährt. Dabei konnte beispielhaft verglichen werden, ob die von den Schülern gewählten, oft simplen Permutationsmodelle mit den tatsächlich durchgeführten Mischvorgängen vergleichbar waren. Das Thema ist für Projektarbeit mit einem kurzen Zeitfenster durchaus geeignet. Die kürzesten Projekte, in denen die Fragestellung vom Autor mit Schülern bearbeitet wurde, hatten eine Dauer von ca. 3 Zeitstunden inklusive einer Ergebnispräsentation und -diskussion. In diesem Zeitfenster kann das Projekt auch in den Regelunterricht eingebaut werden. Denkbar wäre hier die Modellierung eines Mischvorgangs mit einem Zeitrahmen von zwei Schulstunden. Der Vergleich mit einem von Hand gemischten Kartenstapel könnte anschließend als Hausaufgabe erfolgen, so dass die Ergebnisse in einer weiteren Schulstunde zusammengetragen werden könnten.

Steht für das Projekt mehr Zeit zur Verfügung, kann der Modellierungsprozess auch stärker theoretische Elemente beinhalten (etwa die Diskussion von Permutationen und deren mathematische Darstellung) und man kann – auch ohne Computersimulation -– die Diskussion des Gütekriteriums stärker thematisieren. Um in kürzerer Zeit möglichst viele Fragestellungen zu bearbeiten, können diese auf unterschiedliche Teilgruppen aufgeteilt werden. So könnte man etwa jede Mischmethode von einer anderen Schülergruppe modellieren lassen. Eine weitere Gruppe könnte sich parallel dazu mit der Entwicklung eines Gütekriteriums befassen, so dass am Ende die unterschiedlichen Modelle miteinander verglichen werden können.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Thema nicht nur im Hinblick auf die Altersklasse und den zeitlichen Rahmen sehr flexible Möglichkeiten bietet. Aufgrund der offenen Fragestellung, die für alle Schüler rasch verständlich ist, hat unsere Erfahrung gezeigt, dass sie auch für heterogene Lerngruppen geeignet ist.