

## KOMMS Reports Nr. 4 (2016)

Reports zur Mathematischen Modellierung  
in MINT-Projekten in der Schule



### **Auch Schildkröten brauchen einen Reisepass!**

Martin Bracke





**Zusammenfassung:**

Der Beitrag beschäftigt sich mit der Frage, ob Schildkröten alleine anhand der Musterung bzw. Struktur ihres Bauch- Rückenpanzers eindeutig identifiziert werden können. Dabei sollen sinnvolle Identifizierungsmerkmale entwickelt werden, die auf der Basis von Fotos ausgewertet werden. Das Besondere an diesem Problem ist, dass es mit Lernenden ganz unterschiedlicher Altersstufen bearbeitet werden kann und dass es eine unheimliche Vielfalt an mathematischen Methoden gibt, die auf dem Weg zu einer Lösung hilfreich sind: Dies reicht von einfachen geometrischen Überlegungen über Analysis (Integration, Kurvendiskussion) bis hin zu mathematischer Bildverarbeitung und Fragen der Robustheit. Genauso breit wie das Spektrum der einsetzbaren mathematischen Werkzeuge ist die Altergruppe, mit der ein derartiges Projekt durchführbar ist: Vom Grundschulalter bis hin zur Masterarbeit ist eine Bearbeitung möglich, und die benötigte Zeitspanne reicht von wenigen Stunden bis hin zu mehreren Monaten. Im Beitrag wird die angesprochene Vielfalt exemplarisch gezeigt, so dass die Leser im Idealfall das Projekt genau an die Bedürfnisse ihrer Lerngruppe anpassen können.

**1 Einleitung und Problemstellung**

Das im Folgenden beschriebene Projekt wurde innerhalb eines Modellierungsseminars für Mathematikstudierende im Hauptstudium im Jahr 2000 zum ersten Mal behandelt [2]. Seitdem wurde die zugrunde liegende Fragestellung auf vielfältige Art und Weise von Schülern<sup>1</sup> verschiedenster Altersgruppen bearbeitet, vgl. [5, 3].

Ziel dieses Beitrags ist es, die große Bandbreite möglicher Herangehensweisen vorzustellen, die eine Bearbeitung derselben Grundproblematik bei sehr unterschiedlichen mathematischen Kenntnissen der Schüler erlaubt. Dies bedeutet, dass nicht nur Schüler verschiedener Altersgruppen sich mit dem Problem auseinandersetzen können, sondern dass auch die Bearbeitung in heterogenen Lerngruppen sehr gut möglich ist. Auf die sich hier ergebenden Möglichkeiten wird in den Abschnitten 3 sowie 1.2 näher eingegangen.

**1.1 Das authentische Ursprungsproblem**

Zunächst soll das Projekt so vorgestellt werden, wie es sich beim ersten Kontakt präsentiert hat. Dies ist im Hinblick auf eine authentische Problemstellung (s. [1]) sehr wichtig, erfolgt hier allerdings sehr knapp, weil wir anschließend die Formulierungen des Problems angepasst für die jeweilige Altergruppe betrachten werden. Ausgangspunkt war der spontane Besuch einer promovierten Biologin in der Arbeitsgruppe Technomathematik der TU Kaiserslautern, die Unterstützung bei einer von ihr im Rahmen eines Drittmittelprojekts zum Thema *Artenschutz* bearbeiteten Fragestellung suchte. In diesem Projekt ging es um die Entwicklung von Möglichkeiten zur Kennzeichnung von Schildkröten bzw. eigentlich um ihre eindeutige und sichere Identifikation. Für diesen Zweck sind DNA-Tests aus Zeit- und Kostengründen unpraktikabel

<sup>1</sup>Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichtet; in der Regel wird die männliche Schreibweise verwendet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten grundsätzlich für beiderlei Geschlecht.

und eine Kennzeichnung durch sogenannte *Transponder*<sup>2</sup> ist kritisch zu betrachten: Zum einen fallen hier ebenfalls erhebliche Kosten für den notwendigen operativen Eingriff sowie den Transponder an, zum anderen kann die Sterblichkeitsrate durch die Operation bei bis zu 50% liegen – eine dem Artenschutz deutlich entgegenstehende Tatsache!

Ziel des Projekts war die Entwicklung und Analyse alternativer Methoden, welche die Identifizierung ohne Verwendung eines Senders oder aufwändigen Tests erlauben. Eine Hoffnung war dabei, dass alleine anhand von Fotos des Bauch- und des Rückenpanzers einer Schildkröte dieses Ziel bereits erreicht werden kann. In diesem Sinn gibt es auf der einen Seite eine ganze Reihe biologischer Herangehensweisen und Merkmalen, welche zum Zeitpunkt des ersten Austauschs mit der Biologin auch schon ziemlich detailliert untersucht waren. Diese sollen hier nicht näher vorgestellt werden, die Grundidee ist das Aufstellen eines Klassifikationsbaums, der für jedes Tier einen Merkmalsvektor definiert, anhand dessen die Individuen verglichen werden können. Die Definition des Merkmalsvektors erfolgt durch geeignete Auswahl signifikanter Merkmale, wobei darauf geachtet werden muss, dass ihre Anzahl hinreichend groß ist. Dabei ergibt sich das Problem der Auswahl von Merkmalen, so dass für eine große Anzahl von Individuen – für in Deutschland als Haustiere gehaltene Landschildkröten kann man von mehreren 100.000 bis 1.000.000 Tieren ausgehen – die Merkmale in ihrer Kombination eine eindeutige Zuordnung erlauben. Um dies sicher zu stellen, muss für eine sehr große Anzahl von Tieren der entsprechende Merkmalsvektor zunächst bestimmt werden, was auf jeden Fall eine automatische Auswertung mit Hilfe eines Computers erfordert. Schwierig ist zudem, dass die aus Sicht eines Biologen in diesem Sinne relevanten Merkmale – das kann z.B. die Form der Begrenzungslinien spezieller Schilde des Rückenpanzers sein – nicht kanonisch definiert sind. Außerdem stellen sich bei der Arbeit mit Bilddaten aus Fotos, die nicht unter Laborbedingungen aufgenommen sind, weitere Herausforderungen.

Es wäre außerdem sehr wünschenswert, wenn beim Aufbau einer Datenbank für die Identitätsprüfung bei Schildkröten nicht für jedes Tier hochauflösende Fotos mit einem Speicherbedarf in der Größenordnung von mindestens 10MB notwendig wären. Das würde auf der einen Seite einen hohen Speicherbedarf ergeben, zum anderen bedeutet die Arbeit mit und die Suche in einem derart großen Datenbestand einen hohen Rechen- und damit Zeitaufwand.

## 1.2 Verschiedene Zielgruppen und die entsprechende Problemstellung

Möchte man die gerade beschriebene Fragestellung mit Schülern oder Studierenden bearbeiten, stellt sich zunächst die Frage nach einer geeigneten Formulierung des Problems. Bei der Bearbeitung durch Studierende wurden direkt die Anforderungen und Daten der kooperierenden Biologin verwendet und ein Teil des Projekts bestand für die Teilnehmer darin, die Schwierigkeiten durch unterschiedliche Sprache von Biologen und Mathematikern sowie fehlende oder unvollständige Informationen und Daten selbst im Gespräch mit der Biologin – quasi der Auftraggeberin im Sinne von [1] – zu klären. Wenn die Zeit und die Möglichkeit für einen solchen Austausch vorhanden sind, stellt das sicher den Idealfall dar (in diesem Fall betrug die Dauer für Bearbeitung und Berichtserstellung rund ein halbes Jahr).

Bei Projekten mit Schülern der gymnasialen Oberstufe, die in der Folge mit einer Dauer von jeweils 2-5 Tagen durchgeführt wurden, war zwar der Ausgangspunkt meist die gerade beschriebene, komplexe Darstellung des Problems. Allerdings fiel hier die Möglichkeit des direkten Kontakts mit der Auftraggeberin weg, so dass sowohl Definitionen als auch Daten betreffende Fragen in geeigneter Weise durch die jeweiligen Betreuer erfolgten. Nach einigen durchgeführten Modellierungen wurde erkennbar, dass auch für viel jüngere Schüler eine Bearbeitung möglich ist – interessanter Weise entstand die Idee durch von Schülern vorgeschlagene Modelle, denen sehr einfache mathematische Methoden zugrunde liegen. Deshalb wurde die Fragestellung für die Arbeit mit Grundschulern der Jahrgangsstufen 2 und 4 (vgl. [4]) modifiziert, indem zunächst weniger relevante Details weggelassen wurden. Dabei muss man natürlich gerade im Sinne einer authentischen Problemstellung sehr aufpassen, dass durch die Art der Neuformulierung nicht schon ein wesentlicher Teil der Modellierung vorweg genommen wird. Dieser Anpassungsprozess verlief in mehreren Stufen, wobei natürlich die gesammelten Erfahrungen eingeflossen, er ist

<sup>2</sup>Als Transponder werden in diesem Fall kleine passive Sender bezeichnet, die den Tieren implantiert werden.

sicher für sich genommen schon interessant und einer Diskussion würdig – aus Platzgründen verzichten wir aber an dieser Stelle darauf.

Wie inzwischen klar geworden ist, lässt sich die ursprüngliche Fragestellung so anpassen, dass sie ihren authentischen Charakter behält und die Bearbeitung schon in der Grundschule mit einem Zeitumfang von etwa fünf Zeitstunden in kompakter Form eines Projekttages (vgl. [4]) oder innerhalb von sechs bis sieben Unterrichtsstunden in der Schule (vgl. [7]) möglich ist. Die aktuelle Problemvorstellung für die Schüler, die zuletzt im Rahmen eines Projekttages innerhalb eines Vormittags mit Schülern der fünften Jahrgangsstufe verwendet wurde, erfolgt in Form eines Briefs, der am Schluss dieses Abschnitts abgedruckt ist. Dieser Brief ist bei der Bearbeitung mit Schülern bis zur sechsten Jahrgangsstufe geeignet. Für ältere Schüler kann man weiterhin den Brief verwenden und zusätzlich Details aus dem deutlich komplexeren Originalkontext anführen oder direkt die zu Beginn geschilderte ursprüngliche Fragestellung verwenden. Beides ist möglich und die Wahl sollte für den Betreuer eines solchen Projekts, der die Lerngruppe kennt, relativ problemlos möglich sein. Welche Details direkt zu Beginn oder im Laufe der Bearbeitung zusätzlich betrachtet werden können, hängt wiederum von der Bearbeitungsdauer und den Kenntnissen und Ideen der Schüler ab. Hinweise dazu werden im Abschnitt 3 gegeben, wo einige vertiefende Fragestellungen vorgestellt werden. Wichtig ist an dieser Stelle der Hinweis, dass nicht alleine aus der betreffenden Jahrgangsstufe die erwartete Komplexität der Modelle und verwendeten mathematischen Inhalte bestimmt werden sollten. Es hat sich vielmehr – nicht nur bei diesem Modellierungsprojekt – als passend erwiesen, wenn der Betreuer im Laufe der Bearbeitung erweiterte Fragestellungen angepasst an den aktuellen Kenntnisstand der Teilnehmer einbezieht.

### Hilferuf der Schildkröte Emma Turtle

*Hallo Herr Bracke,*

*ich schreibe dir, weil ich ein Problem habe und hoffe, dass du mir helfen kannst: Dieses Jahr möchte ich meine Mutter besuchen, die in Afrika wohnt. Deshalb bin ich gestern ins Reisebüro gegangen, um einen Flug zu buchen. Nachdem die Frau im Reisebüro mir einen Flug rausgesucht hatte, wollte sie meinen Reisepass sehen. Aber so etwas habe ich gar nicht! Die Frau meinte dann, dass ich ohne diesen Reisepass nicht fliegen kann und dass ich mir deshalb irgendwoher einen besorgen muss.*

*Ich habe mich mal informiert, was auf einem solchen Reisepass drauf stehen muss: Also da steht immer der Name drauf und dann ganz viele Zahlen, die bei jedem anders aussehen. Diese Zahlen haben wohl immer eine ganz bestimmte Bedeutung. Ich weiß aber nicht genau, wofür sie stehen. Vielleicht dafür, wie lang mein Panzer ist. Also vielleicht eine 12, weil mein Panzer 12 cm lang ist. Oder vielleicht eine 4, weil ich vier Beine habe – aber nein, das geht nicht. Wir Schildkröten haben ja alle vier Beine. Dann hätten wir ja alle dieselbe Zahl auf dem Pass. Wie sollte man uns dann unterscheiden?*

*Worin unterscheiden wir Schildkröten uns denn voneinander? Ich hab mich mal bei den anderen Schildkröten umgeschaut, aber ich bin schon 105 Jahre alt und ich sehe nicht mehr so gut. Vielleicht kennst du ja jemanden, der mir helfen kann?*

*Ich bräuchte den Ausweis bis nächste Woche. Es wäre super, wenn das klappen würde. Ich habe dir neben diesem Brief ein paar Bilder von mir und meinen Freunden mitgeschickt, immer der Bauch und der Rücken. Vielleicht findest du Merkmale, die bei allen unterschiedlich sind.*

*Das wäre wirklich toll. Ich hoffe, du meldest dich bald, mein Flug geht am 23. Januar.*

*Liebe Grüße,  
 Emma Turtle*

### 1.3 Authentisches Datenmaterial

Zu einem authentischen Modellierungsprojekt gehören selbstverständlich auch die entsprechenden Daten. Wenn die Möglichkeit zum direkten Kontakt mit dem Auftraggeber besteht, wird man in der Regel auf Anfrage Informationen und Daten bekommen, die nicht mit der ursprünglichen Problemformulierung zusammen kommen. In unserem Schildkrötenprojekt haben wir von der problemgebenden Biologin eine ganze Reihe von Fotos verschiedener Tiere bekommen, die jeweils beide Seiten des Panzers sowie vielfach auch Seitenansichten zeigen. Das gesamte Datenmaterial war allerdings bereits im Zuge einer

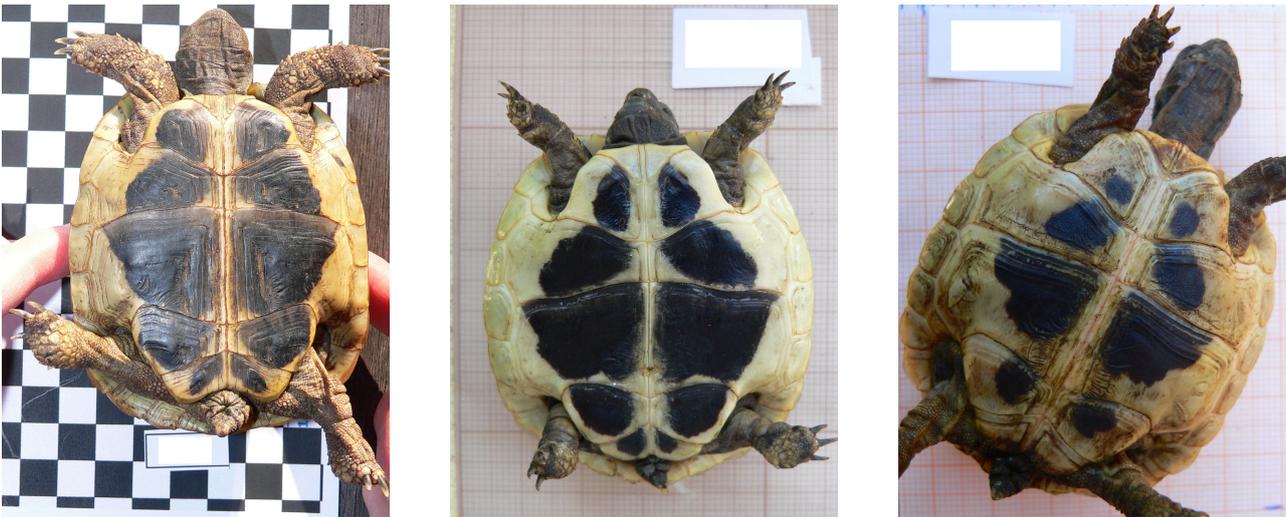


Abbildung 1.1: Bauchpanzer von drei verschiedenen Tieren, die man relativ problemlos unterscheiden kann. Aber wehe es werden mehr...!



Abbildung 1.2: Rückenpanzer der drei Schildkröten aus Abbildung 1.1, mit Farbmarkierungen des Züchters

größeren Aktion erstellt worden und es bestand im Nachhinein keine Möglichkeit, Fotos weiterer Tiere oder unter unterschiedlichen Aufnahmebedingungen bzw. verschiedenen Kameras aufgenommenes Material zu bekommen. Diese Einschränkung kann sich im Verlauf eines Modellierungsprojekts als durchaus relevant zeigen, denn wie wir später sehen werden, wird man sich recht bald die Frage stellen, wie geeignet Aufnahmen des Rückenpanzers für die Identifizierung sind: Natürlich können die Merkmale, die aus den vorhandenen Fotos gewonnen werden, bei hinreichend genauem Arbeiten quantitativ gut reproduziert werden. In der Praxis würde man die Daten jedoch beispielsweise aus diesen Fotos initial bestimmen und stünde dann bei einem Identifizierungsprozess vor der Aufgabe, selbst neue Fotos eines Tieres zu erstellen und aus diesen dann die geforderten Werte zu ermitteln. Aus naheliegenden Gründen wird dabei zwangsläufig eine andere Aufnahmetechnik zum Einsatz kommen und auch der Aufnahmeabstand und die Ausrichtung der Kamera im Verhältnis zum Panzer kann leicht variieren.

Um diese Einflüsse genau untersuchen zu können, aber auch um die Güte der Auswahl für die Identifikation relevanter Merkmale zu beurteilen, ist die Möglichkeit zum Erstellen neuer Aufnahmen der bereits fotografierten oder sogar weiterer Tiere sehr wichtig. Für die in diesem Beitrag vorgeschlagenen Umsetzungen mit relativ kurzer Dauer von maximal einigen Tagen ist dieser Punkt nicht dramatisch, aber bei Projekten längerer Dauer wäre es optimal, wenn in Kooperation mit einem Züchter oder einem Zoo die Möglichkeit gegeben wäre, eigenes Datenmaterial zu erzeugen.

Für das beschriebene Projekt sind Fotos von knapp 50 Schildkröten vorhanden, die uns von einem Berliner Züchter zur Verwendung in Modellierungsprojekten zur Verfügung gestellt wurden. Einen ersten Eindruck geben die Bilder von Bauch- und Rückenpanzer drei verschiedener Individuen, die in [Abbildung 1.1](#) bzw. [Abbildung 1.2](#) zu sehen sind.

Die Fotos geben wir auch sehr gerne an interessierte Lehrkräfte weiter, die mit ihren Schülern Reisepässe für Schildkröten erstellen möchten<sup>3</sup>. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann für Umsetzungen kurzer Dauer durch Einsatz von Bildbearbeitungssoftware mit relativ geringem Aufwand weiteres Material erzeugt werden, welches die fehlende Möglichkeit zum Erstellen eigener Fotos relativ brauchbar kompensiert.

## 2 Projektdurchführung in der Orientierungsstufe

In diesem Abschnitt wird exemplarisch die Bearbeitung des Projektes *Auch Schildkröten brauchen einen Reisepass* durch 37 Schüler der fünften Jahrgangsstufe vorgestellt. Die Organisationsform war dabei die eines Projekttages von 8-13 Uhr, wobei zwei reguläre große Pausen nach der zweiten und vierten Schulstunde und zusätzlich eine weitere Pause in Form eines Picknicks mit reichhaltigem, von den Schülern mitgebrachtem Buffet eingeplant waren.

Nach der Einführung durch Vorlesen des abgedruckten Briefs wurden einige Fotos von den knapp 50 zur Verfügung stehenden Schildkröten den Schülern an einer Stellwand präsentiert und sowohl der durch den Brief implizierte Auftrag als auch die Fotos mit den Schülern diskutiert. Am Ende der ersten Schulstunde waren die ersten Ideen ausgetauscht und diskutiert. Anschließend wurden die Schüler in zwei verschiedene Klassenräume aufgeteilt und bildeten dort Kleingruppen von in der Regel drei Teilnehmern. Um der folgenden Arbeitsphase eine inhaltliche und zeitliche Struktur zu geben, wurden zwei Aufträge formuliert, die allerdings keine Details oder Vorgaben enthielten und nur zur Orientierung der Schüler dienen sollten:

- Jede Kleingruppe sucht sich unter den zur Verfügung stehenden Fotos (Farbausdrucke im Format DIN A4) eine Schildkröte aus und nimmt sich jeweils das zugehörige Bild von Rücken- und Bauchpanzer.
- Für die gewählte Schildkröte soll dann ein Reisepass entwickelt werden, der nach der Entwicklungsphase ordentlich auf ein Blatt farbiges Papier im Format DIN A4 übertragen wird.
- Zusätzlich bekommt jede Gruppe einen farbigen Fotokarton im Format DIN A2, auf dem die Ideen und das Vorgehen bei der Entwicklung des Reisepasses dargestellt werden sollen. Auch aufgetretene Schwierigkeiten und ein Ausblick werden explizit als mögliche Inhalte erwähnt.

Der entsprechende Zeitplan sah die konkrete Bearbeitungsphase in der 2.-4. Stunde vor, in der 5. Stunde sollten der Ausweis und das begleitende DIN A2 Plakat fertig gestellt werden und für die 6. Stunde wurde die Präsentation einiger Ergebnisse mit allen Teilnehmern angesetzt.

*Arbeitsmaterial* (s. [Abbildung 2.1](#)): Zur Bearbeitung des vorgestellten Modellierungsprojekts ist bei der Zielgruppe bis etwa zur Jahrgangsstufe sechs nicht viel Material erforderlich. Neben dem vorhandenen Schreibwerkzeug und Geodreiecken wurde den Schülern das farbiges Papier zur Erstellung der Reisepässe sowie der erklärenden Plakate zur Verfügung gestellt. Desweiteren gab es eine Auswahl an verschiedenen Werkzeugen bzw. Materialien, die den Schülern als unter Umständen zur Bearbeitung hilfreich angeboten wurden, ohne aber die beabsichtigte Verwendung näher zu erläutern. Es handelt sich dabei um Lineale der Länge 30cm, Zirkel, Maßbänder, Knetmasse, Pinnwandnadeln und Styroporplatten der Dimension 25 × 25 cm. Weiterhin gab es zwei komplette Sätze mit Fotos von Bauch- und Rückenpanzer von insgesamt 37 Tieren, jeweils farbig ausgedruckt im Format DIN A4 (s. [Abbildung 2.2](#)).

Im folgenden Abschnitt sollen einige der von den Schülern entwickelten Ideen, die aufgetretenen Schwierigkeiten und auch die Rolle der Betreuer und Einschränkungen durch die Zeitvorgaben vorgestellt werden.

<sup>3</sup>Bitte wenden Sie sich dazu per Email an den Autor dieses Beitrags unter [bracke@mathematik.uni-kl.de](mailto:bracke@mathematik.uni-kl.de)



*Abbildung 2.1: Arbeitsmaterial: Auswahl hilfreiche Werkzeuge*



*Abbildung 2.2: Arbeitsmaterial: Auswahl von Schildkrötenfotos*

## 2.1 Erste Ideen und Schwierigkeiten

Während der Diskussion im Anschluss an die Vorstellung des Problems wurde den Schülern die Frage gestellt, warum ihrer Meinung nach auf allen Fotos im Hintergrund kariertes Papier zu sehen ist – teilweise schwarzweiß kariert, teilweise als rotes Millimeterpapier. Sehr schnell kamen einige Schüler auf die Idee, dass die Kästchen bekannte Abmessungen haben und damit eine Möglichkeit gegeben ist, die originalen Maße der Tiere zu bestimmen. Da die Schüler Millimeterpapier noch nicht kannten, wurde es ihnen erklärt und an einem Beispielbild durch Abmessen die Länge eines „dicken Kästchens“ des Papiers von 3 cm ermittelt. Gemeinsam wurde anschließend besprochen, wie man mit Hilfe dieser Informationen die originalen Abmessungen der Tiere ermitteln kann. Im Fall der schwarzweiß karierten Hintergründe ist die Seitenlänge eines Kästchens jeweils 1 cm.

Diese vorweggenommene Erklärung bedeutet eine nicht unerhebliche Steuerung des Modellierungsprozesses der Schüler von außen. Aufgrund früherer Erfahrungen wurde sie an dieser Stelle bewusst gegeben, obwohl dadurch einige Lernprozesse – die aber teilweise sehr lange dauern können – verhindert werden. Hier kann man ganz klar sagen, dass bei deutlich weiterem Zeitrahmen und der Möglichkeit selbst Fotos zu erstellen die optimale Möglichkeit sicher wäre, das Erstellen geeigneter Aufnahmen der Tiere den Schülern als eigene Aufgabe zu überlassen.

Nachdem jede Gruppe eine Schildkröte zur Bearbeitung ausgewählt hatte – die eigene Wahl scheint dabei eine nicht unerhebliche Rolle zu spielen, denn die Schüler vergleichen teilweise sehr ausführlich mehrere Tiere, bevor sie sich entschieden –, begannen die Gruppen mit den Überlegungen zu geeigneten Identifizierungsmerkmalen<sup>4</sup>. An dieser Stelle entsteht nicht selten die Idee, den Panzer einer Schildkröte einfach mit Farbpunkten zu markieren, wie sie beispielsweise in [Abbildung 1.2](#) zu sehen sind. Das ist sicher naheliegend und wird von Besitzern mehrerer Tiere auch gerne so angewandt – ein Missbrauch im illegalen Handel mit Schildkröten ist aber leider nicht zu verhindern, denn bei Veröffentlichung entsprechender Farbcodes könnten sowohl Markierungen wie Ausweise leicht gefälscht werden. Zudem sind sie ohne großen Aufwand nicht beständig gegen normale äußere Einflüsse wie Sonneneinstrahlung oder Feuchtigkeit. Das kann man innerhalb einer kurzen Diskussion mit den Schülern klären und wird auch nicht als Einschränkung in der freien Wahl des Lösungswegs gesehen.

Alle Gruppen begannen irgendwann in der ersten Viertelstunde mit dem Messen verschiedener Strecken innerhalb ihrer Bilder. Dabei gab es aber inhaltlich große Unterschiede, die in zwei Kategorien eingeteilt werden können:

1. Es wurde lediglich der Panzer in Länge und Breite vermessen.
2. Es wurden zusätzlich zu 1. der Kopf, Schwanz und Arme/Beine in die Messungen einbezogen und teilweise auch die Länge und Breite einzelner Gliedmaßen sowie des Kopfes einbezogen.

Gleichzeitig fiel eine unterschiedliche Berücksichtigung des Maßstabs auf

1. Einige Gruppen notierten nur die gemessenen Werte.
2. Zusätzlich zu den gemessenen Werten wurden anhand des zuvor am Beispiel gemeinsam bestimmten Maßstabs von 3:1 zusätzlich die „originalen“ Werte berechnet.
3. Wenige Gruppen kamen direkt auf die Idee, den Maßstab durch Ausmessen des im Hintergrund fotografierten Papiers den individuellen Maßstab ihrer Fotos zu ermitteln.

Dazu muss gesagt werden, dass es sich in den meisten Fällen aber um einen anderen Maßstab als 3:1 handelt, da die Fotos nicht unter identischen Bedingungen aufgenommen, vor dem Druck aber sämtlich an das Format DIN A4 angepasst wurden. Nicht selten bestehen sogar kleine Unterschiede im Maßstab der Fotos von Bauch- und Rückenpanzer desselben Tieres.

<sup>4</sup>Obwohl einiges naheliegend erscheint, begünstigt die Bereitstellung der Materialien doch gewisse Ansätze. Wenn als Organisationsform eine kleine Unterrichtsreihe gewählt wird, sollte daher überlegt werden, ob man die Materialien erst auf Wunsch der Schüler mitbringt bzw. mitbringen lässt. Durch die Unterbrechungen zwischen den einzelnen Unterrichtsstunden sowie die Möglichkeit, auch Hausaufgaben einzubeziehen, ergibt sich daraus keine zeitliche Einschränkung wie sie bei der kompakt durchgeführten Veranstaltung zu erwarten wäre.

Die verschiedenen Fehlannahmen bzw. problematisch gewählten Merkmale wurden von den Betreuern nicht direkt angesprochen, sondern durch Nachfragen und Überprüfen der ersten Version eines Ausweises indirekt aufgedeckt: Bei der Wahl der Merkmale können die Schüler natürlich das von ihnen ausgewählte Tier anhand des speziellen Fotos recht gut wieder erkennen, sofern sie genau messen. Zeigt man ihnen dann allerdings weitere Fotos, bei denen beispielsweise einzelne Gliedmaßen oder der Kopf nicht vollständig abgebildet sind (oder sogar komplett eingezogen in den Panzer), so wird in der Diskussion vielen – aber nicht allen – klar, dass Variante 2. an dieser Stelle kritisch ist. Dass die Berücksichtigung des Maßstabs notwendig ist, wird ebenfalls deutlich, wenn man sich Fotos ansieht, die einen besonders großen oder kleinen Maßstab aufweisen. Hier fällt den Schülern dann auf, dass es die tatsächlichen Maße der Tiere sind, die schließlich für eine Identifizierung herangezogen werden sollten. Die fälschliche Verwendung des Beispielmaßstabs lässt sich auf zwei Arten auflösen: Entweder man vollzieht in Gegenwart der Schüler die Messungen und Umrechnungen nach, wobei man nach den konkreten Rechnungen fragt und sich eine Begründung für den vorgeschlagenen Maßstab von 3:1 geben lässt, die man ja direkt nachvollziehen (und damit den Fehler durch die Schüler aufdecken lassen) kann. Alternativ bereitet man zu den ausgeteilten Fotos Ausdrücke derselben Tiere mit anderem Maßstab vor (z.B. auf DIN A5 Papier). Wenn die Schüler auf zwei verschieden groß ausgedruckten Fotos dasselbe Tier identifiziert haben, werden sie anschließend die Frage des Maßstabs in den meisten Fällen selbständig beantworten können.

Wenn es an die Erstellung des endgültigen Ausweises für die gewählte Schildkröte geht, tritt häufig ein weiteres Problem in verschiedenen Varianten auf: Die Schüler ermitteln verschiedene Abmessungen, definieren die gewählten Merkmale aber nicht. Für sie selbst sind Art und Weise der Messung aufgrund der vorherigen Experimente und Diskussionen nämlich so selbstverständlich, dass sie gar nicht auf die Idee kommen, man müsste sie beschreiben. So trat bei den zwölf Gruppen des beschriebenen Projekttags in mehr als der Hälfte der Fälle das Problem auf, dass die Maße an Bauch- oder Rückenpanzer ermittelt wurden, dies aber nicht als Anweisung im Ausweis auftauchte. Während die Breite bei genauer Messung und wirklich exakter Bestimmung und Anwendung des Maßstabs noch identisch sein sollte, so ist die Länge an Bauch und Rücken tatsächlich unterschiedlich. Das Fehlen dieser Angabe lässt sich durch den Betreuer allerdings sehr einfach aufdecken, indem er beobachtet, welche Seite des Panzers die Schüler gewählt haben und dann – unter direktem Protest! – auf der anderen Seite eine Probemessung vornimmt. Ein wenig subtiler ist die genaue Definition der Längen- bzw. Breitenmessung und man sollte bei der Betreuung die Aufnahme- und Leistungsfähigkeit der jeweiligen Schüler unbedingt berücksichtigen<sup>5</sup>. Wenn man die von den Schülern bestimmten Werte nachvollziehen möchte, stellt sich nämlich schnell die Frage, wie denn die Breite und Länge des Panzers überhaupt definiert sind. Zwar hat jeder hierbei eine kanonische Definition zumindest intuitiv im Kopf, doch können sich die von Schüler zu Schüler (zu Lehrer) unterscheiden! Unter *Breite* verstehen die meisten die Abmessung des Panzers an der breitesten Stelle, doch wo genau ist die eigentlich und wie messe ich reproduzierbar die Breite, ohne dass ein Koordinatensystem vorhanden ist? Diese Schwierigkeit wird spätestens dann offensichtlich, wenn man ein Foto betrachtet, auf dem die Längsachse (wie kann man diese definieren?) des Panzers nicht parallel zu einer Kante des Papiers verläuft.

Solche Fragen kann man mit einigen Schülern sehr gut und mit ergiebigem Ausgang diskutieren, andere zeigen sich unbeeindruckt von derartigen Überlegungen und finden sie unwichtig. Bei der Zeitplanung eines solchen Projekts in heterogenen Lerngruppen ist diese Möglichkeit der Differenzierung natürlich sehr hilfreich, denn es ist so quasi ausgeschlossen, dass Gruppen schon vor Ablauf der Zeit wirklich „fertig“ sind!

Obwohl die Schüler im Mathematikunterricht das Thema *Maßstabsrechnung* bereits behandelt hatten, ergaben sich bei der konkreten Anwendung im Projekt verschiedene Schwierigkeiten. Zum einen kommen die erforderlichen Rechnungen nicht in eindeutiger Form daher – und sie kommen nicht vom Lehrer! „Was müssen wir rechnen, wenn wir im Bild gemessen haben und nun die tatsächlichen Maße des Tieres für den Ausweis bestimmen wollen?“ Oder: „Wie berechnen wir aus der Panzerlänge, die wir für den Ausweis bestimmt haben, die Länge, die wir in einem Foto messen müssten, wenn es das gleiche Tier zeigt?“ „Wann müssen wir teilen, wann malnehmen?“

<sup>5</sup> Es geht nicht darum, dass jede Gruppe am Schluss ein optimales Ergebnis hat, sondern dass das Ergebnis in großen Teilen selbst erarbeitet und verstanden wurde!

Diese Fragen sehen ganz unscheinbar aus, offenbaren allerdings, dass das vollständige Verständnis bereits erlernter Werkzeuge teilweise noch fehlt. Und sie zeigen das große Potential, das sich bei der Bearbeitung derartiger Problemstellungen für das Erlernen mathematischer Werkzeuge und Verfahren bietet. Sehr spannend ist in diesem Zusammenhang die Frage des richtigen Rundens: Kann man mit einem ganzzahligen Maßstab arbeiten oder ist es besser, mit 2.6 als Faktor zu arbeiten, wenn dieser Wert als Länge eines Kästchens des Hintergrundmusters ermittelt wurde? Und dabei: „Kann man überhaupt durch 2.6 teilen?“ Im veranschlagten Zeitrahmen kann man kaum mit allen Schülern jede dieser Fragen erschöpfend behandeln, doch alleine die Tatsache, dass sie von den Schülern selbst aufgeworfen werden, ist bemerkenswert. Wenn alle Fragen gesammelt werden, kann man in der Nachbereitung des Projekttags sicher die eine oder andere wertvolle Übung oder mathematische Diskussion anschließen.

## 2.2 Komplexere Merkmale

Ein relativ großer Anteil der Gruppen bezieht neben den quantitativen Maßen auch „weiche“ Merkmale ein wie die Farbe (bräunlich, gelblich oder eher blass-grün). Diese sind natürlich zum einen tatsächlich vorhanden, können sich aber z.B. durch starke Sonneneinstrahlung ändern (hier ist die entsprechende Information aus der Biologie hilfreich, für Experimente wird es in den meisten Fällen an der Gelegenheit mangeln). Zum anderen können unterschiedliche Farben aber auch durch die verwendete Aufnahmetechnik bedingt sein, d.h. entweder durch den Einsatz eines Blitzes oder die Art des Lichts (Kunstlicht, natürliches Tageslicht oder starke Sonnenstrahlung, um Beispiele zu nennen). Diese Einflüsse würden bei dem schon angesprochenen Erstellen eigener Aufnahmen von Schildkröten direkt sichtbar werden. In den meisten Fällen wird aber auf die vorhandenen Aufnahmen zurückgegriffen und hier kann man auf die angesprochenen Einflüsse aufmerksam machen, indem man besonders markante Fotos herausnimmt und miteinander vergleicht. Viele Schüler erkennen bei einer solchen Gegenüberstellung die Problematik.

Einige Gruppen haben allerdings auch weitere Merkmale vorgeschlagen, die einen mathematischen Charakter haben: Nachdem eine Gruppe zur genauen Bestimmung der Länge und Breite des Panzers mit Hilfe von Pinnwandnadeln die Fotos an den entsprechenden Stellen auf einer Styroporunterlage oder an einer Stellwand markiert hatten, kamen andere Schüler auf die Idee, die äußere Begrenzung des Panzers durch Nadeln abzustecken und anschließend mit einem Maßband den Umfang als weiteren Wert für den Reisepass zu bestimmen. Durch den Austausch beim gemeinsamen Arbeiten mehrerer Gruppen in einem Raum hatten nach kurzer Zeit fast alle Gruppen den Umfang als zusätzlichen Wert in ihrem Pass! Im zweiten Arbeitsraum kam keine der Gruppen auf diese Idee und es ist anzunehmen, dass deutlich weniger Gruppen selbständig den Umfang als Möglichkeit berücksichtigt hätten. Ein Merkmal, das an diesem Tag nicht gewählt wurde, welches allerdings bei Schülern dieser Altersstufe gerne gewählt wird, wenn man entsprechendes Material bereitstellt, ist die Fläche: Gibt man den Schülern Folien mit aufgedrucktem Karomuster (Kantenlänge 5 oder 10 mm), so kann die Fläche des Bauch- oder Rückenpanzers bestimmt werden. Dies kann auf mehrere Arten geschehen: Man zählt alle Kästchen (und schätzt evtl. auch nur teilweise überdeckte Kästchen in der Fläche) oder man probiert, die Fläche des Panzers in möglichst viele Rechtecke zu zerlegen, deren jeweiligen Flächen man aufsummiert und für den Rest wiederum Kästchen zählt.

Neben relativ offensichtlichen Abständen innerhalb der Fotos wie Länge und Breite des Panzers können zusätzliche, weniger kanonische Strecken berücksichtigt werden: Eine Gruppe kam dabei auf die Idee, diagonal den Abstand zwischen den Beinen vorne rechts und hinten links bzw. analog für die zweite Diagonale zu messen (s. [Abbildung 2.3](#)). Abgesehen von der schon besprochenen Problematik, dass die Gliedmaßen besser nicht einbezogen werden sollten, ist dies eine sehr gute Idee. Der nächste Schritt würde in einer exakten und praktisch nachvollziehbaren Definition der zu berücksichtigenden Punkte bestehen, was wahrscheinlich nur über Hilfskonstruktionen möglich ist. Die Frage dazu an die Schüler lautet: Wie können wir auf dem Bauchpanzer (oder Rückenpanzer; dort ist es evtl. aufgrund der Musterung sogar einfacher) zwei Diagonalen in eindeutiger Weise festlegen? Und sie können die Qualität ihrer Antwort selbst überprüfen: Wenn sie einen Algorithmus, d.h. eine Beschreibung des Vorgehens zum Einzeichnen der beiden Diagonalen, gefunden haben, so muss dieser (mindestens) zwei Kriterien erfüllen.

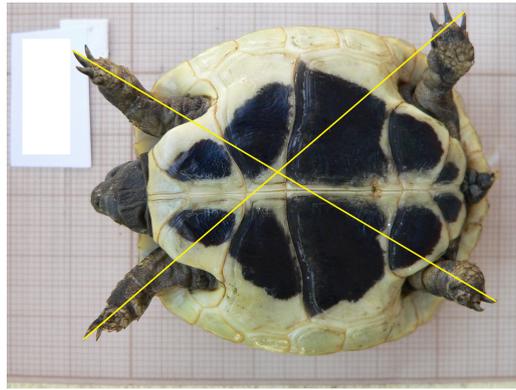


Abbildung 2.3: Längen von Diagonalen als weitere Merkmale?

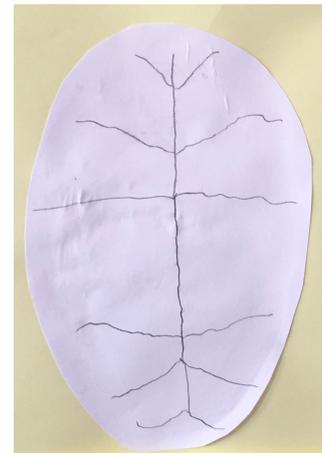
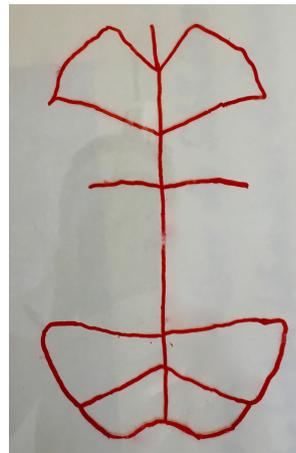
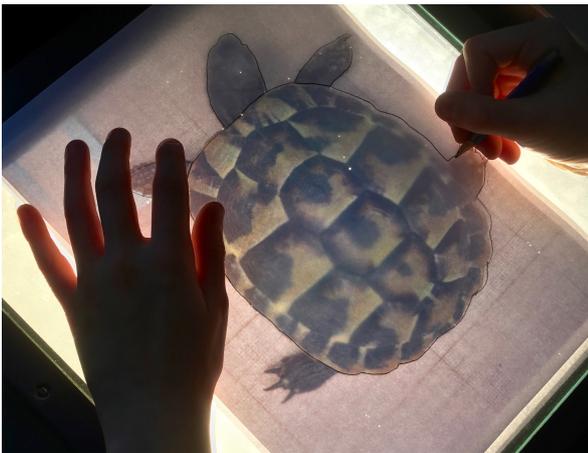


Abbildung 2.4: Übertragen von Strukturen am Overheadprojektor (links) und Abstraktionsstufen (Mitte, rechts)

- Der Algorithmus muss auf mehrere Schildkrötenbilder (möglichst viele) ohne Probleme anwendbar sein.
- Wird der Algorithmus von verschiedenen Personen auf dasselbe Bild angewendet, so sollten die Abweichungen innerhalb des Rahmens der Messgenauigkeit liegen (was wäre das in unserem Fall?).

Da die direkte Benutzung verkleinerter Fotos im Ausweis bei der Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde, kamen viele Schüler auf die Idee, für sie wesentliche Strukturen oder Muster von Rücken- und Bauchpanzer mit Hilfe eines Overheadprojektors oder einfach an einer Fensterscheibe auf weißes Papier zu übertragen (vgl. [Abbildung 2.4](#)). Einerseits schienen sie damit den Wunsch nach einem visuell erfassbaren Merkmal auf dem Ausweis zu erfüllen. Andererseits zeigte sich bei genauerer Betrachtung jedoch in einigen Fällen, dass zumindest andeutungsweise die Idee der Datenreduktion zugrunde lag. Allerdings waren die meisten dieser Abstraktionen immer noch zu komplex, um offensichtlich und leicht abzuleitende Merkmale oder Werte daraus abzuleiten.

Die Grundidee ist jedoch sehr gut, wie auch im folgenden Abschnitt deutlich werden wird. Was man mit dieser Idee anfangen kann, zeigen die Umsetzungen zweier Gruppen, die in [Abbildung 2.4](#) zu sehen sind: Hier wurde in beiden Fällen die sehr komplexe Struktur des Bauchpanzers auf wenige markante Linien reduziert. Auf den ersten Blick könnte der Kommentar lauten, dass sich die Schüler beim Übertragen der Strukturen nur weniger Arbeit gemacht haben – weit gefehlt! Auf Nachfrage kam von den Schülern die Erklärung, dass sie diese „Skelette“ des jeweiligen Panzers auf Overheadfolie übertragen und mit den Fotos anderer Tiere verglichen hatten. Dieser Vergleich ist zwar ohne die Möglichkeit zur Skalierung des Skeletts sehr Schwierig, doch es finden sich zumindest einige Fotos, bei denen die Länge des Panzers sehr gut übereinstimmt. In diesen Fällen kann die Folie auf das zu vergleichende Foto gelegt werden und man sieht sehr deutliche Abweichungen im Verlauf der Linien, sofern es sich um ein anderes Tier

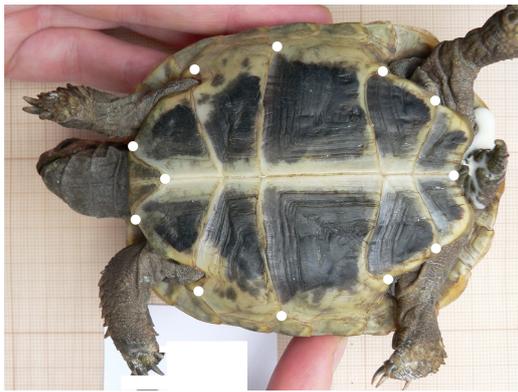


Abbildung 3.1: Endpunkte markanter Linien des Bauchpanzers

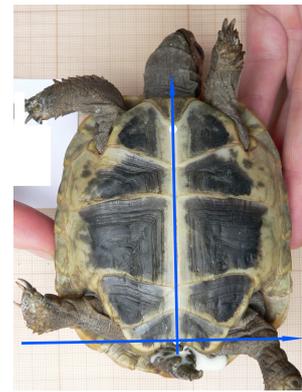


Abbildung 3.2: Normierung durch Referenzstrecke und Beispiel für ein Koordinatensystem

handelt.

Diese Idee und das entsprechende Vorgehen des Schüler ist absolut bemerkenswert und von der mathematischen Abstraktion her deutlich höher angesiedelt als die zuvor beschriebenen Methoden. Obwohl der Ansatz innerhalb des Zeitrahmens nicht in allen Details ausgeführt werden konnte, sind bisher solche Ideen nur bei deutlich älteren Schülern zu beobachten gewesen!

### 3 Inhaltliche Erweiterung für die Bearbeitung in höheren Klassenstufen

In diesem Abschnitt soll es um die Möglichkeiten zur inhaltlichen Vertiefung der Bearbeitung gehen. Da die Bandbreite der mathematischen Vertiefungsrichtungen sehr groß ist und eine detaillierte Ausführung mindestens einen weiteren, eigenständigen Artikel ergeben würde, sollen hier lediglich einige Richtungen bzw. mathematische Gebiete vorgestellt werden, in denen eine Vertiefung lohnenswert erscheint. Dabei ist auch diese Auswahl nur beispielhaft gedacht und es wird jeder, der sich ernsthaft mit der Problemstellung befasst, weitere Aspekte entdecken.

#### 3.1 Zusätzliche Merkmale

Wie schon im ausführlich beschriebenen Projekt angedeutet, ist es möglich, neben den kanonischen Abständen *Länge* und *Breite* des Panzers weitere Abstände zu berücksichtigen.

Dies könnten die schon angesprochenen Diagonalstrecken sein und insbesondere der Bauchpanzer bietet durch die Trennlinien der einzelnen Schilde und deren Endpunkte zahlreiche Möglichkeiten. In [Abbildung 3.1](#) sind beispielsweise die Endpunkte markanter Linien auf dem Bauchpanzer einer Schildkröte markiert (zur Verdeutlichung hier nicht durch Punkte sondern durch ausgefüllte Kreise). Wenn lediglich Abstände zwischen derart definierten Punkten benutzt werden, kann wie bisher vorgegangen und es muss lediglich der Maßstab berücksichtigt werden. Flexibler ist man jedoch, wenn ein Koordinatensystem eingeführt wird, so dass auch die Koordinaten von Punkten als Merkmale definiert werden können. Die Wahl eines solchen Koordinatensystems ist gerade für jüngere Schüler nicht so leicht, denn es gibt auch hier unterschiedliche Möglichkeiten. Da auf den meisten Fotos die Tiere ungefähr parallel zu den Kanten des Papiers ausgerichtet sind, ist eine naheliegende Wahl das durch das Papier gegebene Koordinatensystem, etwa mit dem Ursprung in einer Ecke. Schon der Vergleich weniger Aufnahmen zeigt aber, dass damit die Koordinaten von der Wahl des Bildausschnitts abhängen und ohne spezielle, genormte Aufnahmetechnik auch nicht reproduzierbar sind. In der Konsequenz sollte eine Achse des Koordinatensystems beispielsweise durch die Längsachse des Bauch- oder Rückenpanzers festgelegt werden (wie können wir diese Längsachse eindeutig definieren?) und durch die Wahl eines zusätzlichen, eindeutig definierten Punktes die zweite Achse senkrecht dazu zu fixieren. Die Einheiten sind nach Berücksichtigung des Maßstabs auch bestimmt. Alternativ kann – wie später ausgeführt – auch eine Referenzstrecke definiert und deren

Länge normiert werden (vgl. [Abbildung 3.2](#)). Wie schon im ausführlich beschriebenen Projekt angedeutet, ist es möglich, neben den kanonischen Abständen *Länge* und *Breite* des Panzers weitere Abstände zu berücksichtigen.

Schüler der Mittelstufe mit einem Hintergrund in Geometrie haben häufig die Idee, bestimmte Formen auf dem Panzer (dies ist dann oft der Rückenpanzer) mathematisch durch die Angabe von Seitenverhältnissen oder Winkeln zu charakterisieren. Wie zuvor ist es hierzu erforderlich, zunächst die geometrische Form – z.B. ein Fünfeck – eindeutig zu definieren. Dabei stellt sich meist die Frage, wie bei den recht dicken Begrenzungslinien zwischen den Schilden eine Linie im mathematischen Sinn eindeutig festgelegt werden kann. Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten und die konkrete Wahl ist gar nicht entscheidend – sie muss nur getroffen werden!

Eine Abstraktionsstufe höher liegt die Idee der Reduktion von Mustern auf ihre „wesentlichen Strukturen“, die im vorherigen Abschnitt (vgl. auch [Abbildung 2.4](#)) bereits angedeutet wurde: Natürlich ist Datenreduktion in der Praxis immer erwünscht, doch möchten wir in unserem Fall keine für die Identifizierung relevanten Merkmale verlieren. Oder anders ausgedrückt: Nach der Reduktion der Daten sollten noch genügend Merkmale vorhanden sein, um die Identifikation sicher und robust durchführen zu können. In Schülergruppen ist dazu schon mehrfach die Idee entstanden, die Trennlinien zwischen den Schildsegmenten des Bauchpanzers zu verwenden. Dies konnten auch schon die jüngeren Schüler mit Hilfe eines Overheadprojektors bzw. einer Folie sehr leicht umsetzen. Es schließt sich die Frage an, wie man solche „Skelette“ verschiedener Tiere miteinander vergleicht. Durch die Anwendung des Maßstabs, könnte man wie zuvor mit den Originalmaßen arbeiten. Es gibt allerdings noch eine sehr elegante Alternative, sich der absoluten Größenangaben zu entledigen<sup>6</sup>:

Wenn wir die Annahme treffen, dass sich die Struktur dieser wenigen grundlegenden Linien ähnlich wie bei einem Fingerabdruck im Laufe des Lebens eines Tieres nicht ändert – d.h. im mathematischen Sinn sind die in verschiedenem Alter extrahierten „Skelette“ ähnlich zueinander –, so können wir diese Strukturen einfach innerhalb eines normierten Koordinatensystems darstellen. Das geschieht etwa dadurch, dass wir das „Skelett“ so skalieren, dass die Längsachse (definieren!) die Länge 1 hat (vgl. auch [Abbildung 3.2](#)). Es gibt nur einen Haken dabei: Als Mathematiker können wir natürlich eine solche Annahme treffen, doch wenn sie in der Praxis nicht erfüllt ist, sind alle anschließenden Berechnungen und Argumentationen wertlos. Bisher konnte kein Biologe die Annahme widerlegen oder sicher sagen, dass sie sinnvoll ist. Allerdings deuten einige Experimente von Tieren, von denen man Fotos besitzt, die das Tier mit jeweils unterschiedlichem Alter zeigen, an, dass die Annahme haltbar ist. Spannend ist an dieser Stelle die Frage, wie man denn am besten untersuchen und nachweisen kann, ob und in welchem Bereich die Annahme verwendet werden kann. Hat man sich dazu entschlossen, mit einem „normierten Skelett“ zu arbeiten, so wären die Längen der einzelnen Linien neue Merkmale.

### 3.2 Mathematische Konzepte und Methoden

Die gerade angesprochenen Ideen zur Reduktion der Panzermusterung auf wesentliche Strukturen kann schon selbst als mathematisches Konzept verstanden werden. Mit ihrer Hilfe ist ein weiterer Abstraktionsschritt möglich: Für die so erhaltenen Linien können funktionale Zusammenhänge gesucht werden und man kann zwei Individuen vergleichen, indem man Abstände zwischen Funktionen bestimmt!

Eine weitere, sehr spannende Möglichkeit ist die Idee, die äußere Berandung des Panzers durch eine Funktion zu beschreiben und diese als einziges Merkmal – gleich einem Fingerabdruck – zu verwenden. Studierende haben dazu in einem Projekt den Ansatz verfolgt, diese Randkurve mit Hilfe von *Elliptischer Fourieranalyse* zu beschreiben. Man bekommt dadurch einen Vektor von wählbarer Länge, deren Einträge (die *Fourierkoeffizienten*) die Randkurve sehr gut beschreiben. Die Güte der Approximation wird mit zunehmender Zahl der Koeffizienten besser, in der Praxis scheinen 10-15 Koeffizienten sehr gut zu reichen! Auf der methodischen Seite können in höheren Klassenstufen zuvor manuell ermittelte Werte mit numerischen Methoden bestimmt werden, und damit erhält man in der Regel genauere und vor allem reproduzierbare Ergebnisse. Es können Umfang und Fläche des Panzers sowie die Länge von Kurven (z.B. als Teile des Skeletts) durch numerische Integration mit wählbarer Genauigkeit approximiert werden. Wenn

<sup>6</sup>Diese Idee ist auch für die bisher diskutierten Merkmale anwendbar.

Endpunkte von Strecken (für die Bestimmung von Länge und Breite des Panzers) am Computer gekennzeichnet werden, ist meist eine höhere Genauigkeit zu erzielen als bei Messung in ausgedruckten Fotos. Auch die Ermittlung des Maßstabs wird auf diese Weise präziser. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass bei Schülern der Mittelstufe oder Oberstufe auch manuell schon eine bessere Bestimmung des Maßstabs erfolgen kann, wenn nicht nur die Maße eines Kästchens innerhalb des Fotos berücksichtigt werden, sondern eine längere bekannte Strecke als Referenz genommen wird.

### 3.3 Mathematische Bildverarbeitung und Computereinsatz

Nach der manuellen Erfassung von Koordinaten und Entfernungen innerhalb eines Fotos besteht der nächste Schritt darin, sie am Computer in den digitalen Bildern im Prinzip pixelgenau erfassen zu können<sup>7</sup>. Da auch hier noch Toleranzen bedingt durch die notwendigen Benutzereingaben entstehen, ist die konsequente Folge die komplette Übertragung der Aufgabe auf den Computer, der natürlich entsprechend programmiert werden muss. An dieser Stelle kann man beliebig tief in die mathematische Bildverarbeitung einsteigen, um Punkte und Kurven automatisch und auf definierte Art und Weise aus den Bildern zu bestimmen. Wenn gewünscht, kann man sich dabei sogar mit den Schwierigkeiten durch qualitativ minderwertige Aufnahmen auseinandersetzen und nach Lösungsmöglichkeiten suchen.

Auf der gerade beschriebenen Ebene ist auf jeden Fall die Erstellung eigener Programme erforderlich, um die entsprechenden an das Problem angepassten Algorithmen umzusetzen. Wenn eine mathematisch-technische Programmiersprache wie MATLAB (kommerziell) oder entsprechende freie Alternativen wie FreeMat, Octave oder Python-IDEs (mit NumPy, SciPy, Matplotlib) verwendet werden, kann man eine solche Aufgabe auch ohne sehr fortgeschrittene Programmierkenntnisse angehen und findet für viele Aufgaben (Integration, Fouriertransformation, verschiedene Techniken der Bildverarbeitung) Standardalgorithmen (wenn man diese nicht sowieso selbst programmieren möchte).

Wie schon angedeutet können auch jüngere Schüler zum Beispiel mit der freien und inzwischen sehr mächtigen Software GeoGebra erstaunliche Dinge erreichen, z.B. innerhalb eines Fotos, das in den Hintergrund gelegt wird, nach Festlegung des Maßstabs sehr genau messen.

### 3.4 Aspekte der praktischen Umsetzung eines Modells

Neben allen bisher vorgestellten Möglichkeiten, anhand von Fotos Merkmale zu definieren, die zur Identifikation von Schildkröten dienen können, gibt es weitere Aspekte, die letztlich für die praktische Implementierung von entscheidender Bedeutung sind. Zwei sollen hier als Anhaltspunkt für weitere eigene Forschung genannt werden:

- **Qualität der Identifikationsmerkmale:** Es wurde eine Vielzahl möglicher Merkmale vorgestellt, die zur Unterscheidung von Schildkröten dienen könnten. Im Schülerprojekt können diese anhand der 30-50 vorhandenen Fotos auch überprüft werden und anhand der Variation der Werte entscheidet man sich, ein Merkmal in den Reisepass einzubeziehen oder eben nicht. Mathematisch betrachtet wird bei der vorgeschlagenen Vorgehensweise jede Schildkröte durch einen Merkmalsvektor charakterisiert, d.h. jede Schildkröte kann im Modell durch einen Punkt im n-dimensionalen Raum repräsentiert werden. Daher muss zunächst die Frage geklärt werden, ob diese Zuordnung eine Bijektion darstellt. Es ist auch klar, dass man die Frage wohl kaum beantworten können wird, da nicht für alle lebenden (und zukünftig lebenden) Schildkröten ein Foto für die Überprüfung zur Verfügung steht. Davon abgesehen würde so ein Test wohl auch zeitlich problematisch...

Diese ernüchternde Antwort bedeutet aber nicht, dass das gesamte Vorhaben der Identifizierung scheitern muss: Es ist vielmehr die Wahrscheinlichkeit dafür interessant, dass zwei Tiere denselben Merkmalsvektor besitzen. Und mit diesem Maß können potentielle Kandidaten für den Merkmalsvektor unter die Lupe genommen werden. So ist die Anzahl der Beine – wie schon im Brief von Emma Turtle erwähnt – sicher kein sehr hilfreiches Kriterium.

<sup>7</sup>Bei zu starker Vergrößerung entsteht allerdings ein neues Problem: Der zuvor mit bloßem Auge als Punkt wahrgenommene Endpunkt eines Kurvenstücks oder Kreuzungspunkt zweier Kurven wird nun zur Punktwolke – wie können für diese Wolke sinnvoll die gewünschten Koordinaten ermittelt werden?

- **Robustheit:** In der praktischen Anwendung muss man sich am Ende fragen, wie robust das vorgeschlagene Verfahren denn ist. Es gibt verschiedene Fehlerquellen bzw. Einflüsse auf die Einträge des Merkmalsvektor, z.B. die Qualität der Bilder und die Genauigkeit der manuellen Eingaben des Benutzers oder der Berechnungen eines Computerprogramms. Beim eigenen Experimentieren wird schnell klar, dass selbst für ein und dasselbe Tier kaum immer exakt derselbe Merkmalsvektor bestimmt wird, wenn verschiedene Fotos oder Anwender beteiligt sind. Das bedeutet für den während der Identifikation erforderlichen Entscheidungsprozess, dass zwei Merkmalsvektoren nicht auf exakte Gleichheit überprüft werden müssen, sondern dass man sich eine geeignete Umgebung um einen „Referenzvektor“ überlegen muss, innerhalb derer jedes Paar von Vektoren als gleich angesehen wird. Die Größe einer solchen Umgebung muss überlegt und als sinnvoll nachgewiesen werden. Und es ist in dieser Hinsicht sehr vorteilhaft, wenn Merkmalsvektoren verschiedener Tiere generell einen großen Abstand haben, weil dann die Abweichungen durch Mess- und Verfahrensrauschen größer sein dürfen.

Die zuletzt diskutierten Aspekte des Modellierungsprojekts gehen sicherlich über das hinaus, was man in der Regel mit Schülern umsetzen kann – es wird aber klar, dass es in der Tat **die Lösung** des Problems nicht gibt und dass man als Betreuer durchaus mit Stirnrunzeln reagieren darf, wenn Schüler deutlich vor Ende der veranschlagten Bearbeitungszeit behaupten, sie seien fertig ☺.

## 4 Verschiedene Organisationsformen zur Durchführung

Bei der Bearbeitung von Modellierungsprojekten gibt es zahlreiche mögliche und erprobte Organisationsformen: Die Durchführung innerhalb eines Projekttages – in diesem Fall mit einer Dauer von fünf Zeitstunden – hat sich gerade bei jüngeren Schülern sehr bewährt. Im Vorjahr wurde dasselbe Projekt ebenfalls in Jahrgangsstufe fünf durchgeführt, allerdings mit um zwei Stunden verlängerter Dauer. Im Vergleich zeigt sich, dass einige Schüler von der verlängerten Arbeitszeit deutlich profitiert haben und die meisten ihrer Ideen umsetzen konnten. Auf der anderen Seite war die Veranstaltung für etwa ein Drittel der Schüler zu lang, da sie keinen Anlass für weitere Arbeit sahen und sich am Ende langweilten. Aus diesem Grund wurde bei der in diesem Beitrag beschriebenen Wiederholung die Bearbeitungszeit etwas gekürzt. Dabei hatten die Betreuer das Gefühl, dass für viele Schüler der Zeitrahmen genau passend war und nicht viel weiter hätte sein dürfen. Und der Wunsch nach mehr Zeit zur Erprobung anderer Ansätze war nur selten zu vernehmen. Die Empfehlung für die Jahrgangsstufe fünf lautet daher eine Dauer von etwa fünf Stunden einzuplanen und diese ggf. bei einer Gruppe besonders motivierter und interessierter Schüler zu verlängern.

### 4.1 Schildkröten als Reihe im regulären Unterricht

Im Rahmen einer Masterarbeit wurde dasselbe Projekt mit Schülern der fünften Jahrgangsstufe in Form einer Unterrichtsreihe umgesetzt. Die Dauer betrug sieben Unterrichtsstunden und die Ergebnisse sowie Details zur Planung und Umsetzung sind in [7] ausführlich beschrieben. Dabei standen vornehmlich die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren (K1)*, *Probleme mathematisch lösen (K2)*, *Mathematisch Modellieren (K3)*, *Mit symbolischen, formalen und technischen Argumenten der Mathematik umgehen (K5)* und *Mathematisch kommunizieren (K6)* im Mittelpunkt. Gleichzeitig kann das Projekt auch sehr gut als Wiederholungsblock für die Konzepte bzw. Techniken *Maßstab* sowie *Messen und Vergleichen* verwendet werden. Die einzelnen Stunden wurden dabei nicht minutiös geplant, um den Schülern möglichst viel Raum beim Umsetzen eigener Ideen zu geben. Wie beim Projekttag wurde die Reihe mit dem Brief der Schildkröte eröffnet und als Ziel formuliert, dass am Ende Aussehen und Inhalt eines Reisepasses für Schildkröten definiert werden, den jede Dreiergruppe auch konkret für ihre „Gruppenschildkröte“ erstellt.

## 4.2 Modellierungstage und -wochen

Modellierungstage und -wochen werden von der wissenschaftlichen Einrichtung KOMMS<sup>8</sup> der TU Kaiserslautern schon seit langer Zeit durchgeführt und haben in der Regel eine Dauer von 2-3 (Modellierungstage in der Mittel- und Oberstufe) bzw. 5 Tagen (Modellierungswoche für die gymnasiale Oberstufe). Wie im vorherigen Abschnitt angedeutet, gibt es bei der mathematischen Beschreibung und Analyse von Identifikationsmerkmalen eine ganze Reihe von Erweiterungsmöglichkeiten. Mit zunehmender Komplexität der Mathematik kommt der Wunsch hinzu, die Daten nicht per Hand, sondern möglichst mit Unterstützung des Computers zu ermitteln und zu vergleichen. Bei den genannten Modellierungsveranstaltungen kann dafür gut eine Geometrie-Software wie *GeoGebra* eingesetzt werden, bei älteren Schülern und Vorhandensein von Programmierkenntnissen kann der algorithmische Teil der Lösung einen deutlich größeren Raum einnehmen. Innerhalb von 3 bzw. 5 Tagen kommen die Schüler dabei zu erstaunlichen Ergebnissen! Erwähnenswert ist, dass mit zunehmendem Alter der modellierenden Schüler es schwieriger wird, mit einem einzigen Thema eine ganze Lerngruppe dauerhaft zu begeistern. Gelingt das bei Schülern der fünften Jahrgangsstufe noch problemlos, so werden mittlerweile älteren Schülern ab der Mittelstufe meist mehrere Projekte zur Auswahl vorgestellt, um individuelle Interessen besser berücksichtigen zu können.

## 4.3 Facharbeiten und Seminarkurse

In vielen Bundesländern gibt es für Schüler der gymnasialen Oberstufe die Möglichkeit eine Facharbeit (Dauer: etwa 3 Monate) oder eine Jahresarbeit (Dauer: ein Jahr) anzufertigen. Teilweise ist hier sogar die Arbeit in kleinen Gruppen erlaubt. Auch für dieses Szenario eignet sich das Schildkrötenprojekt sehr gut und es wurde in mindestens zwei Fällen erfolgreich umgesetzt. Der Schwerpunkt kann je nach Interesse auf die mathematischen Methoden oder auf die praxisnahe Umsetzung mit dem Computer gelegt werden – in Gruppen evtl. sogar aufgeteilt auf die einzelnen Modellierer.

Insgesamt ist das Thema sicher auch ergiebig genug, innerhalb eines Seminarkurses, wie er inzwischen in vielen Bundesländern angeboten wird, zu bearbeiten. Eine Idee dazu wäre, die Fragestellung prinzipiell auf Projektbasis zu bearbeiten, dann allerdings spezielle Inhalte aus der Mathematik oder Informatik eher in klassischer Form zu erarbeiten. Genannt seien hier exemplarisch *Numerische Integration* (zur Umfang- und Flächenbestimmung), *Statistische Analysen* (zur Untersuchung von Mess- und Verfahrensfehlern sowie der Robustheit des Identifikationsprozesses) oder *Mathematische Bildverarbeitung* (zur automatischen Aufbereitung der Fotos und Extraktion von Merkmalen). Erfahrungen des Autors mit dieser Umsetzungsform liegen aufgrund der fehlenden Möglichkeit in Rheinland-Pfalz leider bisher nicht vor.

## 5 Fazit und Variationsmöglichkeiten

Dieser Beitrag hat ein authentisches Modellierungsprojekt vorgestellt, welches den Autor immer wieder durch die Tatsache beeindruckt, dass durch ein und dieselbe Fragestellung in nahezu identischer Formulierung Schüler von der Grundschule bis zu Oberstufe – ja sogar Studierende der Mathematik – zum selbständigen mathematischen Modellieren angeregt werden können. Die Bearbeitungsdauer reicht von einem halben Tag bis hin zu mehreren Wochen oder sogar Monaten und es gibt ganz sicher nicht **die Lösung!** Selbstverständlich erwarten wir von Schülern der Jahrgangsstufe fünf nicht dasselbe Ergebnis wie von einem Schüler der zwölften Klasse. Und doch werden die Schüler auf jedem Niveau dazu angeregt, im Rahmen ihrer Kenntnisse möglichst gute Ergebnisse zu erzielen und in manchen Fällen sogar neue Methoden und mathematische Konzepte zu erlernen. Dies impliziert die Möglichkeit, sehr gut auch in heterogenen Gruppen an diesem Thema zu arbeiten, sofern man zulässt und die Akzeptanz dafür schafft, dass nicht auf eine bestimmte Lösung oder zumindest Lösungsqualität hingearbeitet wird, die von jedem Schüler erreicht werden muss.

<sup>8</sup>Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule



Abbildung 5.1: Zeig' mir dein Blatt und ich sage dir, wer du bist...

## 5.1 Laubblätter erkennen – ein verwandtes Projekt

Wenn trotz aller bisher beschriebenen Variationsmöglichkeiten noch Lust auf Neues besteht, kann die folgende, sehr eng verwandte – und doch im Detail sehr unterschiedliche – Problemstellung betrachtet werden: Viele Menschen lernen in der Grundschule innerhalb relativ kurzer Zeit, Laubbäume anhand ihrer Blätter zu unterscheiden. Doch wie genau machen wir das? Steckt dahinter ein großes, gut trainiertes neuronales Netz? Oder können wir auch hier mit der Brille des Mathematikers Merkmale finden, die so eine Unterscheidung ermöglichen? Wenn dies der Fall ist, so ist natürlich die Umsetzung mit dem Computer (oder dem Smartphone/Tablet), der automatisch Blätter erkennen soll, eine spannende Herausforderung! Ein solches Projekt hat im Vergleich zu den Schildkröten den enormen Charme und Vorteil, dass man ab dem zeitigen Frühjahr selbst für beliebig viel Datenmaterial sorgen kann. In gewisser Weise kann sogar die Datenauswahl ein eigener Bestandteil der Arbeit sein, der einen erheblichen Einfluss auf die Modelle und Ergebnisse haben kann. Weitere Informationen und Anregungen zur Umsetzung mit Schülern finden sich in der Masterarbeit [6], in der die mathematische Modellierung sowie Umsetzung mit Schülern der Jahrgangsstufe 5 im Rahmen einer Unterrichtsreihe thematisiert werden.

Für welches Projekt der Leser sich auch immer entscheiden mag: Es möge ihn mit Freude erfüllen, Schüler beim (Wieder)Erlernen und Anwenden mathematischer Konzepte und der ständigen Begegnung mit Herausforderungen auf fachlicher wie auf zwischenmenschlicher Ebene zu begleiten!

## Danksagung

Dieser Beitrag entstand mit Unterstützung durch das Projekt *SchuMaMoMINT* des Europäischen Sozialfonds Rheinland-Pfalz und ich bedanke mich bei allen beteiligten Schülern, Lehrkräften und Kollegen.

## Literatur

- [1] W. Bock and M. Bracke. Project Teaching and Mathematical Modelling in STEM Subjects: A Design Based Research Study. In *Proceedings of CERME 8*, 2013.
- [2] M. Bracke. Solving Industrial Problems – Learning by Doing. In A. M. Anile, V. Capasso, and A. Greco, editors, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2000*, pages 466–474. Springer, 2002.
- [3] M. Bracke. Warum brauchen Schildkröten eigentlich einen Personalausweis? – Und was kommt danach? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, Verlag Franzbecker, Hildesheim, pages 328–331, 2007.
- [4] A. Dreuw. Personalausweis für Schildkröten – Ein Modellierungsprojekt von der Grundschule bis zum Abitur. Master's thesis (examensarbeit), Technische Universität Kaiserslautern, 2014.
- [5] S. Göttlich. Mathematische Modellierung in der Mittelstufe: Personalausweis für Schildkröten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, Verlag Franzbecker, Hildesheim, pages 324–327, 2007.
- [6] V. Hansel. Ein Klassifikationsmodell für Blätter von Laubbäumen – Mathematische Modellierung und Umsetzung in Jahrgangsstufe 5 & 10. Master's thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2014.
- [7] S. Schäfer. Reispass für Schildkröten – Mathematische Merkmalsanalyse mit MATLAB und beispielhafte Anwendung in der Unterstufe. Master's thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2014.