KOMPETENZZENTRUM FÜR MATHEMATISCHE MODELLIERUNG IN MINT-PROJEKTEN IN DER SCHULE

KOMMS Reports Nr. 6 (2017)

Reports zur Mathematischen Modellierung in MINT-Projekten in der Schule

KOMMS
Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule

# Wir entwickeln einen Synthesizer

Patrick Capraro

EUROPÄISCHER SOZIALFONDS
Mehr Chancen für Rheinland-Pfalz

EUROPÄISCHE UNION
Europäischer Sozialfonds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

**Zusammenfassung:**
Die Akustik liefert einen interessanten Hintergrund, interdisziplinären und fächerverbindenen Unterricht zwischen Mathematik, Physik und Musik durchzuführen. SchülerInnen können hierbei beispielsweise experimentell tätig sein, indem sie Audioaufnahmen selbst erzeugen und sich mit Computersoftware Frequenzspektren erzeugen lassen. Genauso können die Schüler auch Frequenzspektren vorgeben und daraus Klänge erzeugen. Dies kann beispielsweise dazu dienen, den Begriff der Obertöne im Musikunterricht physikalisch oder mathematisch greifbar zu machen oder in der Harmonielehre Frequenzverhältnisse von Intervallen und Dreiklängen näher zu untersuchen.

Der Computer ist hier ein sehr nützliches Hilfsmittel, da der mathematische Hintergrund dieser Aufgabe – das Wechseln zwischen Audioaufnahme und ihrem Frequenzbild – sich in der Fourier-Analysis findet, die für SchülerInnen äußerst anspruchsvoll ist. Indem man jedoch die Fouriertransformation als numerisches Hilfsmittel einführt, das nicht im Detail verstanden werden muss, lässt sich an anderer Stelle interessante Mathematik betreiben und die Zusammenhänge zwischen Akustik und Musik können spielerisch erfahren werden.

Im folgenden Beitrag wird eine Herangehensweise geschildert, wie wir sie bereits bei der Felix-Klein-Modellierungswoche umgesetzt haben: Die SchülerInnen haben den Auftrag erhalten, einen Synthesizer zu entwickeln, mit dem verschiedene Musikinstrumente nachgeahmt werden können. Als Hilfsmittel haben sie eine kurze Einführung in die Eigenschaften der Fouriertransformation erhalten, sowie Audioaufnahmen verschiedener Instrumente.

## 1. Einleitung

Bei Akustik in Verbindung mit interdisziplinärem Unterricht denken viele zunächst an Physik und Musik. Doch auch im Mathematikunterricht gibt es interessante Punkte, an denen man an das Thema anknüpfen kann. Einige Beispiele sind

- Harmonielehre und Frequenzverhältnisse von Intervallen;
- Trigonometrische Funktionen, Bedeutung der wesentlichen Größen von Sinus- und Kosinusfunktionen (Amplitude, Frequenz, Phase), Additionstheoreme;
- Fourieranalysis als Ausblick in die Höhere Analysis: komplexe Zahlen, uneigentliche Integrale;
- Fourieranalysis als Beispiel für ein numerisches Verfahren, auch im Hinblick auf technische Relevanz (mp3, jpg, ...);
- Schwingungsbild und Frequenzbild als zwei Möglichkeiten, das selbe Phänomen durch unterschiedliche Darstellungen zu beschreiben.

Abgesehen von der inhaltlichen Relevanz im Bezug auf oben genannte Themen bietet die Beschäftigung mit Klängen auch die Möglichkeit, mathematisch zu modellieren. Im folgenden Artikel wird auf ein Modellierungsprojekt eingegangen, das während der Felix-Klein Modellierungswoche von SchülerInnen der Jahrgangsstufen 11 und 12 bearbeitet wurde. In der Fragestellung haben die SchülerInnen den Auftrag erhalten, einen Synthesizer zu entwicklen, d.h. mit Hilfe elektronisch erzeugter Klänge verschiedene Instrumente nachzuahmen.

Vorab ist hierbei zu erwähnen, dass den SchülerInnen ausgewähltes Arbeitsmaterial an

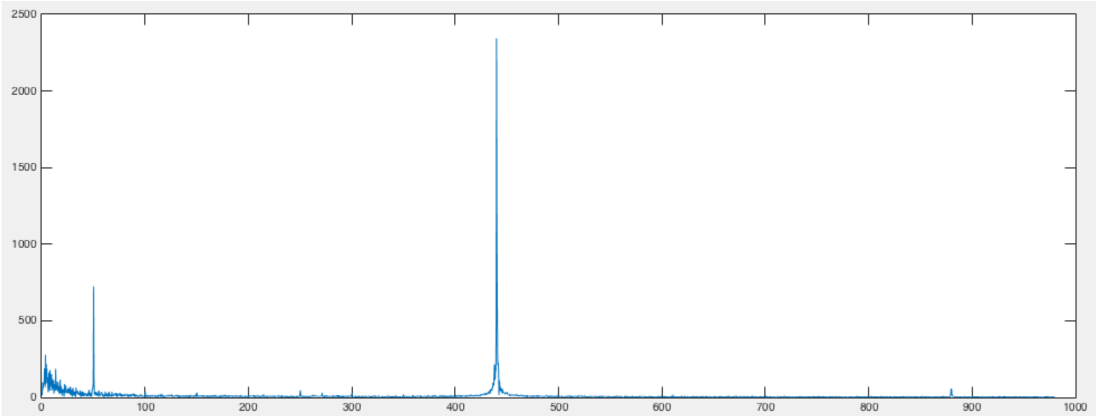


Abbildung 1: Das Frequenzspektrum einer Stimmgabel (Abszisse: Frequenz in Hz)

die Hand gegeben wurde. Dadurch ist die Aufgabenstellung nicht mehr völlig offen und man kann sicherlich argumentieren, dass es sich aus diesem Grund nicht mehr um eine klassische Modellierungsaufgabe handelt, bei der die SchülerInnen die mathematischen Werkzeuge frei wählen können. Durch die nachfolgende Beschreibung des Projekts wird hoffentlich dennoch deutlich, dass es nach wie vor viele verschiedene Herangehensweisen an die Problemstellung gibt und trotz allem zahlreiche Modellierungsprozesse stattfinden, die nicht durch die Lehrkraft vorgegeben werden.

# 2. Vorbemerkungen

## 2.1. Begrifflichkeiten

Wir unterscheiden die Begriffe Ton und Klang. Als Ton versteht man in der Akustik eine reine Sinusschwingung. Ein Klang hingegen ist eine Überlagerung von mehreren Tönen. Dies ergibt stets eine periodische Schwingung.

Als Geräusch oder Rauschen bezeichnet man eine akustische Schwingung, bei der keine ausgeprägten Frequenzen erkennbar sind. Im Frequenzspektrum liegen sehr viele Frequenzen mit ähnlich starker Intensität sehr dicht beeinander, so dass das Spektrum kontinuierlich erscheint. Die Schwingung weist keine periodische Struktur auf.

Wir werden später feststellen, dass die mathematische Realität etwas anders aussieht: Reine Sinusschwingungen klingen nicht sehr angenehm. Das, was wir oft als reinen, wohlklingenden Ton empfinden (beispielsweise der Ton einer Stimmgabel) hat eine scharf ausgeprägte Frequenz, die jedoch trotzdem ein stetiges Spektrum aufweist (siehe Abbildung 1). Im Unterschied zum Rauschen sind hier die Frequenzen im stetigen Spektrum weit weniger ausgeprägt als die hervorstechende Frequenz bei 440 Hz. Zudem gibt es je nach Qualität der Aufnahme und des Instruments auch Hintergrundrauschen oder andere störende Effekte.

## 2.2. Physikalischer Hintergrund

Wir verzichten auf eine ausführliche Diskussion von mechanischen Schwingungen und der Physik von Musikinstrumenten. Wer dazu mehr erfahren möchte, dem empfehlen wir die

Lektüre von [Dem03, Kapitel 11].

## 2.3. Mathematischer Hintergrund

Ein wesentlicher Inhalt des Themas Akustik, der die Fächer Mathematik und Musik miteinander verbindet, ist die Fourierreihe[1]. Eine stetige, $T$-periodische Funktion $f$ mit hinreichend guten Eigenschaften kann als Reihe in der Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \Big), \qquad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

dargestellt werden. Damit hat man also eine periodische Funktion (z.B. eine akustische Schwingung als Amplitude-Zeit-Funktion) durch eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt. Da der Mensch jedoch keinen Unterschied zwischen Sinus- und Kosinusschwingungen hört (die Phase ist für uns unhörbar, es kommt nur auf Frequenz und Amplitude an), können wir diesen Ausdruck mit Hilfe von Additionstheoremen noch folgendermaßen umschreiben

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cos\left( n\omega t - \arctan \frac{B_n}{A_n} \right) \tag{2.1}$$

(mehr dazu im Anhang, Abschnitt A.3). Insgesamt sind hier also die wesentlichen Größen die Gesamtamplitude $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ und die Frequenz $n\omega$ (Achtung: in der Fourieranalysis spricht man oft von der Frequenz, obwohl man eigentlich die Kreisfrequenz meint, daher auch der Buchstabe $\omega$; mehr dazu im Anhang).

Aus der Sicht der Musik ist nun $\omega$ die Grundfrequenz, also die Tonhöhe, die vom Menschen wahrgenommen wird. Für $n > 1$ ist $n\omega$ ist die Frequenz des $(n-1)$-ten Obertons. Die Obertöne sind für unterschiedliche Instrumente sehr charakteristisch, so sind beispielsweise bei einer Violine andere Obertöne ausgeprägt als bei einer Blockflöte.

Bei einem sauberen Klang haben die Obertöne immer ein Vielfaches der Grundfrequenz. Weichen diese Frequenzen leicht ab, dann überlagern sie sich streng genommen nicht mehr zu einer periodischen Funktion. In Wahrheit wird das auch immer der Fall sein. Hier muss verstanden werden, dass die mathematische Theorie einen Idealzustand beschreibt, der in der realen Welt meist annähernd, aber nie exakt erreicht wird.

Die Fouriertransformation[2] kann aus der Fourierreihe abgeleitet werden und schafft eine Möglichkeit, zwischen dem Schwingungsbild und dem Frequenzbild hin und her zu wechseln. Die Fouriertransformation wandelt die Amplituden-Zeit-Funktion $f$ in eine frequenzabhängige Funktion $F$ um, welche aufzeigt, wie stark unterschiedliche Frequenzen in der Schwingung vertreten sind. Sie ist definiert durch

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \mathrm{d}t.$$

Die inverse Fouriertransformation kann schließlich $F$ wieder zu $f$ transformieren und wird durch

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\omega) \exp(\mathrm{i}\omega t) \mathrm{d}\omega$$

[1] Mehr dazu im Anhang, Abschnitt A.1.
[2] Siehe Anhang, Abschnitt A.2.

gegeben.

Obwohl die Darstellung der Fouriertransformation durch komplexe Zahlen sehr elegante Schreibweisen ermöglicht, ist es auch denkbar, Fourieranalysis ganz ohne komplexe Zahlen anzuwenden. Mehr dazu siehe Anhang, Abschnitt A.3.

Das wichtigste numerische Hilfsmittel, das man in der Fourieranalysis verwendet ist die Fast-Fourier-Transform[3] oder kurz FFT. Diese berechnet die Fouriertransformierte einer Funktion, die als Wertetabelle mit endlich vielen Werten gegeben ist. Die Fouriertransformierte ist dann auch wieder eine Wertetabelle mit ebensovielen Einträgen.

## 2.4. Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler

Bei der Bearbeitung des Projekts kann es sicherlich hilfreich sein, wenn die SchülerInnen Kenntnisse über wichtige mathematische Sachverhalte besitzen: Trigonometrische Funktionen und Integrale helfen dabei, die mathematischen Methoden der Fourieranalysis nachzuvollziehen. Dennoch sind diese Kenntnisse nicht notwendig. Da in vielen Fällen die Fouriertransformierte einer Funktion analytisch nicht berechnet werden kann (auch nicht auf Hochschulniveau), ist es ohnehin verzichtbar, die Fouriertransformation in Integralschreibweise verstehen und anwenden zu können. Die FFT als numerisches Werkzeug kann daher ohne tiefere Mathematikkenntnisse verwendet werden.

Auch auf die Kenntnis von Sinus- und Kosinusfunktionen kann notfalls verzichtet werden. Sobald der Funktionsbegriff vorhanden ist (7. Klasse) sollte es denkbar sein, die Sinusfunktion über das Schaubild einzuführen, sie zu verstehen und damit arbeiten zu können. Dennoch ist ein tieferes Verständnis der wesentlichen Begriffe, die im Zusammenhang mit Schwingungen stehen – vor allem Frequenz und Wellenlänge bzw. Periodenlänge – nützlich für die Arbeit in diesem Projekt.

Wesentlich für die geschilderte Herangehensweise sind rudimentäre Programmierkenntnisse oder die Bereitschaft, sich die wichtigsten Kenntnisse kurzfristig anzueignen. Dabei ist das wesentliche jedoch der Umgang mit Variablen, Arrays und mathematischen Operationen. Kontrollstukturen wie if/else-Verzweigungen oder Schleifen sind für fortgeschrittene Modelle hilfreich, für einen kurzen Einblick in die Fragestellung jedoch verzichtbar.

## 2.5. Grundlegendes zum Arbeiten mit Audiodateien

Die einfachste Weise, Audiodateien zu speichern, erfolgt über ein sogenanntes Datensample. Dabei handelt es sich im Prinzip um eine Wertetabelle, in welcher die Daten der Amplitude-Zeit-Funktion einer Schwingung gespeichert sind. Von dieser Tabelle braucht man aber nur die Amplituden in einem $n$-dimensionalen Vektor zu speichern, da die Zeitwerte äquidistant gewählt werden und es daher genügt, die Abtastrate $Ar$ (d.h. den Kehrwert der Zeitdifferenzen) zu hinterlegen. Eine übliche Standard für Audiodateien – z.B. auch für CDs – ist eine Abtastrate von 44 100 Hz.

Auf eine Sache sollte man bei der Analyse der Daten achten: Häufig sind in einer Audiodatei zwei oder mehr Audiokanäle gespeichert, so dass das Sample z.B. aus einem $2 \times n$ Array bestehen kann. In diesem Fall sollte entsprechend nur ein Teil der Daten ausgelesen werden oder die Daten müssen in sinnvoller Weise zusammengeführt werden.

[3] Siehe Anhang, Abschnitt A.4

# 3. Welches Material wurde den SchülerInnen zur Verfügung gestellt?

Den SchülerInnen, die in diesem Projekt gearbeitet haben, wurden Computer mit der Software MATLAB zur Verfügung gestellt. Weiterhin haben sie Programmcode erhalten, mit dem sie Audiodateien einlesen und sich die zugehörigen Frequenzspektren anzeigen lassen konnten sowie eine Auswahl an Aufnahmen verschiedener Musikinstrumente und anderer Geräusche.

Schließlich wurde den Schülern gezeigt, wie sie Klänge erzeugen konnten. Das konnte entweder geschehen, indem sie ganz gezielt Funktionswerte einer Sinusschwingung in einen Datenvektor schreiben, oder indem sie einen Datenvektor mit Frequenzen erzeugen und diesen mit einer FFT-Funktion in ein Audiosample umwandeln. Schließlich wurden aus den Datenvektoren eine Audiodatei erzeugt oder der Klang direkt abgespielt. In MATLAB erfordert ein solcher Arbeitsschritt nur wenige Zeilen Code, so dass es auch von Schülern ohne Programmierkenntnisse schnell verstanden werden kann.

## 3.1. Fourieranalyse: Frequenzspektren anzeigen

In MATLAB lässt sich das Plotten des Frequenzspektrums einer Audiodatei mit wenigen Zeilen Code programmieren (Listing 3.1): `audioread` liest eine Datei ein und hat als Rückgabewert `[y,Ar]`, d.h. die eigentlichen Daten der Audiodatei in einem Vektor `y` und die Abtastrate `Ar`. Je nach Art der Audiodatei handelt es sich bei `y` um ein $2 \times n$ oder sogar $m \times n$-Array, wobei $m$ die Anzahl der Kanäle ist. Bei der Berechnung der FFT verwenden wir daher nur den ersten Kanal der Audiodatei, also den Inhalt von `y(:,1)`.

Schließlich wird noch die Abszissenachse geeignet skaliert. Die zweite Hälfte des Vektors `x` enthält redundante Frequenzwerte. Da aber bei den meisten Klängen die hochfrequenten Anteile ohnehin kaum eine Rolle spielen, wurde die Achse auf das erste Fünftel gekürzt, um die wesentlichen Daten besser sichtbar zu machen. Der Faktor `Ar/length(x)` sorgt schließlich dafür, dass wir auf der Achse Werte in Hz ablesen können. In Abbildung 2 sehen wir ein solches Spektrum.

Wichtig ist hier noch, dass man die Beträge von `x(t)` plottet. Das Frequenzspektrum beinhaltet sowohl Sinus- als auch Kosinusanteile und speichert diese als komplexe Zahlen. Interessant sind jedoch nur die Beträge dieser Anteile (siehe Formel (2.1)).

Wenn man den Code außerdem in einer Funktion hinterlegt (hier die Funktion `spektrum` mit Parameter `datei`), dann kann man diese Inhalte ganz vor den Schülern verbergen und muss lediglich den Gebrauch der Funktion erläutern, wo die Schüler nur einen Dateinamen übergeben müssen.

*Listing 3.1: MATLAB-Code zum Anzeigen der Frequenzspektren*

```
function spektrum(datei)
  [y,Ar]=audioread(datei);
  x=fft(y(:,1));
  t=1:floor(length(x)/5);          %kuerzt die x-Achse
  plot(t*Ar/length(x),abs(x(t)))
end
```

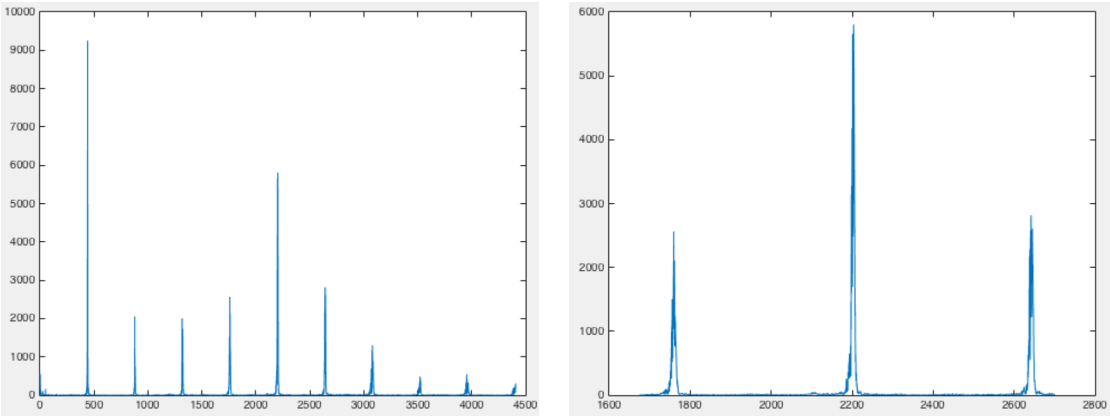

Abbildung 2: Das Frequenzspektrum einer Violinsaite (Abszisse: Frequenz in Hz; rechts: Ausschnitt)

In Python sieht der Code etwas komplizierter aus, da man zunächst einige Bibliotheken laden muss. Zudem funktioniert das Beispiel in Listing 3.2 nur für wav-Dateien. Für andere Audioformate muss das Programm entsprechend angepasst werden.

Zudem ist zu beachten, dass in Listenindizes in Python bei 0 beginnen, nicht bei 1.

*Listing 3.2: Python-Code zum Anzeigen der Frequenzspektren*

```
from scipy.io import wavfile
from scipy.fftpack import fft
import matplotlib.pyplot as plt
import math
[Ar,y]=wavfile.read('test.wav')
x=fft(y[:,0])
t=list(range(math.floor(len(x)/10)))
t=[i * Ar/len(x) for i in t]
x=x[0:len(t)]
p=plt.plot(t,abs(x))
plt.show()
```

## 3.2. Fouriersynthese: Klänge fester Frequenz erzeugen

Geht man den umgekehrten Weg, kann man Klänge mit einer vorgegebenen Frequenz erzeugen. Hier muss man ein wenig darüber nachdenken, wie groß der Datenvektor für das Frequenzspektrum gewählt wird und an welche Stelle man einen Eintrag schreiben will. Da die FFT die Länge des Datenvektors unverändert lässt, ergibt sich die Dimension $n$ des Vektors aus dem Produkt $n = T \cdot Ar$, wobei $T$ die Gesamtdauer des Klangs ist und $Ar$ die Abtastrate. Da man bei einem Vorgehen über die Fouriersynthese $n$ und $Ar$ vorgeben würde, ergibt sich die Dauer $T$ somit in Abhängigkeit davon.

Wenn wir nun an die $m$-te Stelle im Frequenzvektor einen positiven Zahlenwert schreiben und sonst nur den Wert 0, dann erhalten wir durch eine inverse FFT das Audiosample einer Sinusschwingung mit Frequenz $\frac{m}{n} Ar$. Damit kann man mit der Funktion `ton` in Listing 3.3 einen Ton der Frequenz `f` in Hz erzeugen.

*Listing 3.3: MATLAB-Code zur Fouriersynthese einer Sinusschwingung*

```
function ton(f)
  y=zeros(1,100000);   %erzeugt einen Vektor mit 100000 Nullen
  Ar=44100;
  freq=ceil(0.5*f*length(y)/Ar);  %f umrechnen und aufrunden
  y(freq)=50000;
  x=ifft(y);
  x=real(x)+imag(x);
  audiowrite('test.wav',x,Ar)
  sound(x,Ar)          %spielt das Datensample ab
end
```

Folgendes ist im Code zu beachten: Bei der Umrechnung der eingelesenen Frequenz ist es selbstverständlich wichtig, dass wir auf natürliche Zahlen runden, da wir ja gezielt eine Stelle im Vektor ansprechen müssen. Zudem kann es hier wichtig werden, die SchülerInnen auf die Redundanzen im Frequenzspektrum anzusprechen, um Fehler zu vermeiden (siehe Anhang, Abschnitt A.4). Die SchülerInnen können beispielsweise das Frequenzspektrum so aufbauen, dass Gleichung A.3 erfüllt ist. Damit wird der imaginäre Anteil der inversen Fouriertransformation theoretisch 0 (in der Praxis wird das jedoch aufgrund numerischer Ungenauigkeit kaum der Fall sein).

Beim Erzeugen des Audiosamples ist zudem wichtig, dass die beiden Funktionen `sound` und `audiowrite` nur Samples mit reellen Einträgen akzeptieren. Die inverse Fouriertransformation erzeugt jedoch immer komplexe Zahlen (allein schon durch numerische Ungenauigkeiten). Daher werden hier Real- und Imaginärteil des Samples addiert.

In Listing 3.4 sehen wir ein entsprechendes Code-Beispiel in Python. Hier weisen wir auf die aufwändige Skalierung der einträge in `x` hin, was mit den Anforderungen der Funktion `wavfile.write` zusammenhängt.

*Listing 3.4: python-Code zur Fouriersynthese einer Sinusschwingung*

```
import numpy as np
from scipy.io import wavfile
from scipy.fftpack import ifft
import math
Ar = 44100
f = 440
t = list(range(100000))
y = [0 for i in t]
freq=round(f*len(y)/Ar)
y[freq] = 30000
x=ifft(y)
x=x.real+x.imag
scaled = np.int16(30000*x/np.max(x))
wavfile.write('test.wav', Ar, scaled)
```

# 4. Herangehensweisen und Hindernisse des Modellierungsproblems

Trotz der geleiteten Herangehensweise, die das bereitgestellte Material mit sich bringt, gibt es nach wie vor zahlreiche Möglichkeiten, an die Aufgabenstellung heranzutreten. Insofern ist von diesem Punkt aus die Lösung nicht klar ersichtlich (weder für die SchülerInnen noch für die Lehrkraft) und man kann guten Gewissens von einer Modellierungsaufgabe sprechen.

- Es wäre beispielsweise denkbar, dass die Schüler sich von der theoretischen Seite her nähern, sich über Obertonspektren informieren und versuchen, diese Spektren nachzubilden.
- Ebenso könnten die Schüler experimentell vorgehen und die Spektren von realen Aufnahmen untersuchen und diese Ergebnisse künstlich nachbilden.
- Eine weitere interessante Herangehensweise wäre es, eine qualitativ gute Aufnahme eines Tons zu kopieren und auf verschiedene Tonhöhen und -längen zu transformieren.

Alle diese Strategien – und es gibt mit Sicherheit noch andere – sind komplex genug, um ein mehrtägiges Modellierungsprojekt mit Arbeit zu füllen. Im letzteren Fall müssten die SchülerInnen zunächst entscheiden, auf welche Weise sie die Frequenzen und die Tondauern ändern wollen (z.B. ob sie im Schwingungsbild oder Frequenzbild arbeiten oder beides kombinieren). Nach diesem Arbeitsschritt wären die Ergebnisse vermutlich schon recht wohlklingend, was für die SchülerInnen ein Anlass sein kann, das Projekt als beendet zu erklären. Dennoch kann man mit der Gruppe noch weitere Verbesserungsideen erarbeiten, z.B. ob sie aus qualitativ nicht einwandfreien Aufnahmen Störungen entfernen können.

## 4.1. Das künstliche Erzeugen von Klängen

Entscheiden sich die SchülerInnen dazu, die Klänge künstlich zu generieren (ob nun im Schwingungsbild oder im Frequenzbild), werden sie möglicherweise damit beginnen, reine Töne (d.h. Sinusschwingungen) zu überlagern und daraus einen Klang mit Obertönen zu erzeugen. Dieser Ansatz ist bei der Herangehensweise mit dem von uns gewählten Material naheliegend, jedoch weit komplexer als es den Anschein hat. Denn eine Überlagerung von reinen Tönen klingt unangenehm und wird nicht zum gewünschten Ergebnis führen.

Falls die SchülerInnen an diesem Misserfolg die Motiavition verlieren, lohnt es sich, auf die zur Verfügung gestellten Audioaufnahmen hinzuweisen und durch gezielte Fragen wesentliche Charakteristika hervorzuheben. Nimmt man deren Frequenzspektren genauer unter die Lupe , so stellt man fest, dass die Frequenzen nicht scharf ausgeprägt sind, sondern eine gewisse Breite haben (siehe Abbildung 2, Vergrößerung auf der rechten Seite). Hier wäre ein denkbarer nächster Schritt das Addieren von weiteren Schwingungen, deren Frequenz ganz leicht von der Grundfrequenz und ihren Obertönen abweicht. Das Ergebnis sehen wir in Abbildung 3.

Hier bemerken wir, dass dicht beeinanderliegende Frequenzen Schwebungen erzeugen. Der Klang des Tones verändert sich deutlich, was bei geschickter Wahl der Obertöne durchaus interessante Klänge entstehen lässt, doch die Lautstärke schwankt und lässt den Ton unangenehm werden.

Hier wäre es denkbar, im Schwingungsbild die Lautstärke anzupassen. Andererseits kann man auch weiter im Frequenzbild arbeiten und die realen Spektren noch besser nachbilden.

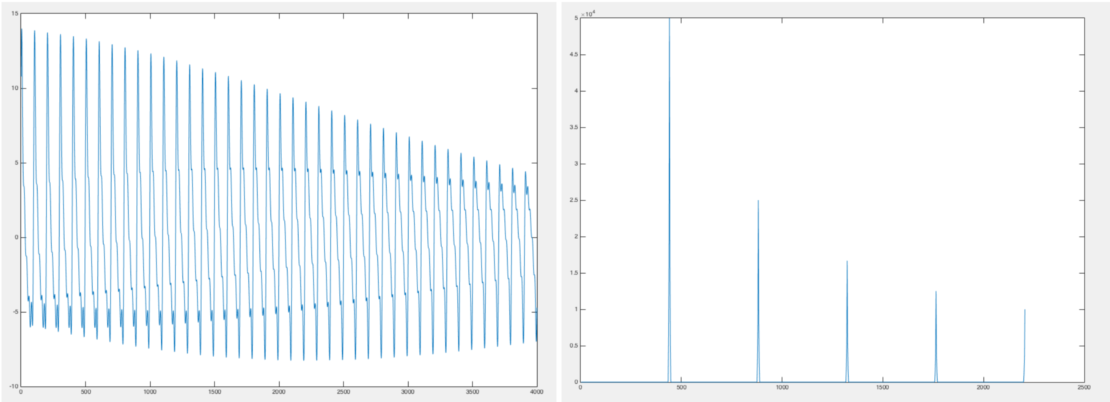

Abbildung 3: Eine Schwebung (links: Schwingungsbild, rechts: Frequenzbild)

Indem die Frequenzpeaks breiter und die Übergänge glatter gemacht werden, lassen sich Schwebungen reduzieren. Eine mathematisch offensichtliche Lösung wäre hier, die Frequenzpeaks durch eine (stückweise) stetige Funktion nachzubilden. Wir sehen ein solches Modell in Abbildung 4. Die SchülerInnen könnten jedoch auch auf andere Ideen kommen, die möglicherweise aufwändiger, aber nicht zwangsläufig schlechter sein müssen.

Sind die Schwebungen noch immer nicht behoben, so kann das unterschiedliche Ursachen haben. Hier einige Fälle, die bei Testdurchläufen aufgefallen sind:

- Die Täler zwischen den Peaks sind zu stark ausgeprägt; hier reicht es unter Umständen, einige Parameter anzupassen, möglicherweise müssen aber auch die verwendeten mathematischen Funktionen überdacht werden.
- Bei abschnittsweise stetigen Funktionen dürfen die Stetigkeitssprünge nicht zu stark sein.

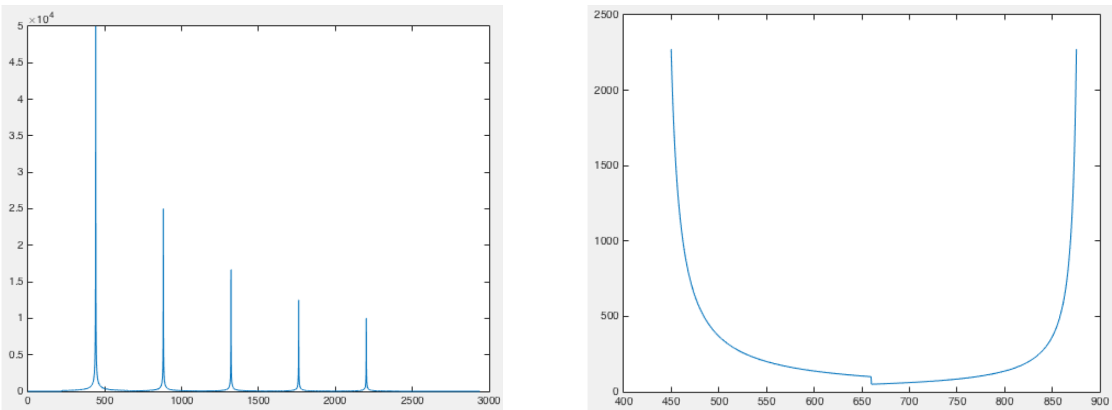


Abbildung 4: Künstliches Spektrum mit abschnittsweise stetiger Frequenzverteilung

## 4.2. Rauschen zu Beginn und Ende des Samples

Ein Problem, das häufiger aufgetreten ist, war ein rauschender oder klickender Ton am Anfang und Ende eines künstlich erzeugten Audiosamples. Dies kann reduziert werden, indem die Lautstärke eines erzeugten Klanges auf stetige Weise hoch und wieder herunter reguliert wird.

# A. Anhang

Wir wiederholen hier einige Grundlagen zur Fourieranalysis, die zum theoretischen Verständnis praktischer Phänomene beitragen können. Für eine vertiefende Lektüre empfehlen wir das Buch [But11].

## A.1. Fourierreihen

### Satz

Eine $T$-periodische Funktion $f$, die hinreichend *gute* Eigenschaften hat, kann als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen folgendermaßen dargestellt werden:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \Big), \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Die Art der Konvergenz der Reihe hängt dabei davon ab, was man unter *gute* Eigenschaften versteht, z.B.

- $f$ ist Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ Konvergenz gilt punktweise
- $f$ ist auf dem Intervall $[0, T]$ quadratisch integrierbar $\Rightarrow$ Konvergenz gilt fast überall

### Satz

Aus den Orthogonalitätsrelationen der Sinus- und Kosinusfunktionen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(kt)\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(kt)\mathrm{d}t = 0$$

erhält man Formeln, mit denen sich die Koeffizienten der Fourierreihe berechnen lassen:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\big(n\omega t\big)\mathrm{d}t, \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\big(n\omega t\big)\mathrm{d}t.$$

### Beweis

Die Orthogonalitätsrelationen lassen sich durch partielle Integration zeigen. Anschließend muss in die Ausdrücke

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\big(n\omega t\big)\mathrm{d}t, \qquad \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\big(n\omega t\big)\mathrm{d}t$$

lediglich die Reihendarstellung für $f$ eingesetzt werden.

QED

### Beispiel

Betrachte die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - |x|$ (bzw. eine stetige Fortsetzung davon). Aus den Formeln für die Koeffizienten ist ersichtlich, dass die Koeffizienten $B_n$ alle gleich 0 sein müssen, da die Funktion gerade ist. Weiterhin erhält man die Werte $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = \frac{4}{\pi^2}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{4}{9\pi^2}, \ldots$

Daraus ergibt sich die Annäherung

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t).$$

## A.2. Fouriertransformation

Mit der Eulerschen Formel kann man $\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t) = \exp(-\mathrm{i}t)$ schreiben und erhält

$$A_n - \mathrm{i}B_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp\big(-\mathrm{i}n\omega t\big)\mathrm{d}t.$$

Lässt man die Periodendauer $T$ größer werden, dann geht das Frequenzspektrum $\{n\omega : n \in \mathbb{N}\}$ in eine kontinuierliche Menge über. Wir erhalten folgenden Grenzwert:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T}{2}(A_n - \mathrm{i}B_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_n t)\mathrm{d}t. \tag{A.1}$$

Dies motiviert die Definition der Fouriertransformation.

### Definition

Die Fouriertransformation berechnet zu einer Funktion $f$ die zugehörige Fouriertransformierte $F$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Mit der inversen Fouriertransformation kann aus $F$ wieder die Ursprungsfunktion $f$ gewonnen werden

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

### Bemerkungen

1. Für viele Funktionen $f$ ist $F$ keine Funktion (man nutzt hier die Distributionentheorie; ein bekanntes Beispiel ist die Deltafunktion aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften, die nur an einer Stelle ungleich 0 ist). Bei praktischen Anwendungen spielt das jedoch keine große Rolle, da die Funktionen häufig durch Messwerte gegeben sind. In diesem Fall ist die zu untersuchende Funktion nur auf einem endlichen Intervall bekannt und nimmt nur endlich viele Werte an. Das Integral existiert in diesem Fall.
2. Es gibt abweichende Konventionen für die Definition der Fouriertransformation. Die obige Variante ist geläufig in der Signalverarbeitung und hat starke Parallelen zur Fourierreihe.
   - In der theoretischen Physik benutzt man oft eine Definition mit anderen Vorfaktoren

     $$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

     Hier gilt stets die Gleichheit der $L^2$-Normen

     $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega,$$

     was in der Quantenphysik eine wichtige Rolle spielt.

- In einer dritten Variante wird die Frequenz $\nu$ anstelle der Kreisfrequenz $\omega$ verwendet

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi \mathrm{i} \nu t} \mathrm{d}t, \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi \mathrm{i} \nu t} \mathrm{d}\nu. \tag{A.2}$$

  Diese Definition hat stärkere Ähnlichkeit zur diskreten Fouriertransformation (siehe Abschnitt A.4).

**Satz**
Die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion ist nur an abzählbar vielen Stellen ungleich 0.

**Beweis**
Das ist im Wesentlichen eine Folgerung daraus, dass die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion die Koeffizienten der Fourierreihe erzeugt, was abzählbar viele Werte sind.

QED

**Bemerkungen**
Eine Folgerung daraus ist, dass Klänge (die ebenfalls durch periodische Funktionen gegeben sind), ein diskretes Frequenzspektrum haben. Genau genommen ist für eine periodische Funktion $f$ das Integral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

nicht definiert. Im Sinne der Distributionentheorie jedoch ist es definiert. Die Funktion $F$ ist dann eine Summe von Deltafunktionen.

In der Physik spiegelt sich dieses Phänomen außerdem auch in der Optik wider: Optische Abbildungen lassen sich durch die Fouriertransformation berechnen. Ein optisches Gitter (mit einem periodischen Muster) ergibt ein Bild mit scharf ausgeprägten Intensitätsmaxima.

## A.3. Fouriertransformation ohne komplexe Zahlen

Wenn wir von reinen akustischen Schwingungen sprechen, dann beschränken wir uns oft auf Sinusschwingungen. Wenn man das Koordinatensystem frei wählen kann ist das auch in Ordnung, denn wir können jede harmonische Schwingung durch eine Phasenverschiebung zu einer Sinusschwingung transformieren. Arbeiten wir mit realen Daten, kann es aber sinnvoll sein, eine allgemeinere Darstellung zu finden. Eine Möglichkeit bietet dabei das Additionstheorem

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cos\left(n\omega t - \arctan \frac{B_n}{A_n}\right),$$

([BSMM05, Abschnitt 2.7.3.2]) mit dem sich alle harmonischen Schwingungen mit Amplitude $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, Frequenz $n\omega$ und Phase $\arctan \frac{B_n}{A_n}$ darstellen lassen.

Dies bietet auch einen Interessanten Ansatzpunkt, die komplexe Notation, die in der Fourieranalysis verwendet wird, anschaulich zu interpretieren. Mit der Formel (A.1) und den Identitäten

$$\cos\left(\arctan \frac{B_n}{A_n}\right) = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}, \qquad \sin\left(\arctan \frac{B_n}{A_n}\right) = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

erhalten wir für die Amplitude zu einer gegebenen Frequenz $\omega_n$

$$F(\omega_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2}(A_n - \mathrm{i}B_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}\, e^{-\mathrm{i}\arctan\frac{B_n}{A_n}}.$$

Insgesamt lässt sich folgendes über die Fouriertransformierte einer akustischen Schwingung festhalten:

- Der Realteil enthält die Amplitude des Kosinusanteils,
- Der Imaginärteil enthält die Amplitude des Sinusanteils,
- Der Betrag enthält die gesamte Amplitude der jeweiligen Frequenz.

Fasst man komplexe Zahlen als reelle Vektoren auf, so kann man die FT ganz ohne komplexe Zahlen definieren:

**Definition**
Die Fouriertransformierte von $f$ ist ein Vektor $(F_1, F_2)$ mit

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t,$$
$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t.$$

Dabei ist $F_1$ die Fouriertransformierte vom geraden Anteil $f_g$, $F_2$ die Fouriertransformierte vom ungeraden Anteil $f_u$, die wie folgt gegeben sind:

$$f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)), \qquad f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)).$$

## A.4. Diskrete Fouriertransformation

**Definition**
Für eine endliche Menge von Messwerten $(f_1, \ldots f_n)$ (Sample) definiert man die diskrete Fouriertransformation (DFT) über eine ebenso große Menge von Werten $(F_1, \ldots, F_n)$ mit

$$F_m = \sum_{t=1}^{n} f_t \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}(t-1)(k-1)\right).$$

Der Faktor $2\pi$ im Exponenten suggeriert dabei, dass wir mit einer Definition der Fouriertransformation arbeiten, wie sie in Gleichung (A.2) gegeben ist. Insbesondere arbeiten wir hier also mit Frequenzen und nicht mit Kreisfrequenzen.

**Beispiel**
Bei einem Audiosample mit 3 Sekunden Dauer und einer Abtastrate von $44,1$ kHz ist $n \approx 10^5$.

**Satz**
Bei einem reellen Datenvektor $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt für die Fouriertransformierte $(F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$F_t = \overline{F_{n+1-t}} \tag{A.3}$$

Daher enthält nur die erste Hälfte der Werte im Vektor $F$ sinnvolle Informationen! Der Rest ist redundant.

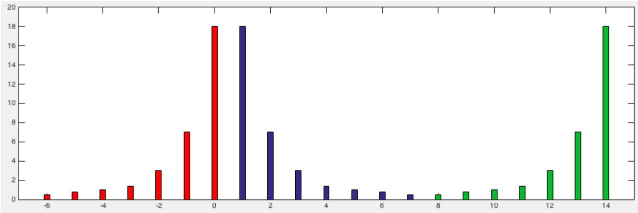

Abbildung 5: Der negative Teil des Frequenzspektrums (rot) wird hinter dem positiven Teil (blau) dargestellt.

### Bemerkungen

Im Übergang von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation wurde die Eulersche Formel benutzt:

$$\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) = \exp(\mathrm{i}x).$$

Damit lässt sich die Fourier-Reihe folgendermaßen schreiben:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \exp(\mathrm{i}n\omega t),$$
$$C_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp\left(\mathrm{i}n\omega t\right)\mathrm{d}t, \quad \text{mit } C_n = \frac{1}{2}(A_n + \mathrm{i}B_n).$$

Man beachte in der Summe, dass $n$ nun auch negativ sein kann, d.h. in dieser Darstellung wird jede Frequenz $n\omega$ in zwei Komponenten aufgeteilt: $-n\omega$ und $n\omega$.

Beide Komponenten tauchen in der diskreten Fouriertransformation auf, allerdings ist der negative Teil so verschoben, dass er hinter dem positiven Teil erscheint (siehe Abbildung 5; das ist eine Folge der Periodizität der komplexen e-Funktion).

Gemäß des obigen Satzes ist der gespiegelte Anteil des Spektrums komplex konjugiert, was jedoch keine Rolle spielt, falls wir die Beträge der Frequenzen darstellen (vgl. Gleichung (2.1)).

### Satz

Ist $\Delta t$ der zeitliche Abstand zweier Messwerte im Sample, so nennen wir $A_r = \frac{1}{\Delta t}$ die Abtastrate.
Die DFT kann maximal Frequenzen bis $\nu_{\text{max}} = \frac{A_r}{2}$ darstellen. Dabei liegen für den fouriertransformierten Vektor $(F_1, \dots, F_{2n})$ die Werte $(F_1, \dots, F_n)$ im Intervall $[0, \nu_{\text{max}}]$.

### Satz

Für ein geradzahliges Sample $(f_1, \dots, f_{2n})$ gilt (für $m = 1, \dots, n$)

$$F_m = \frac{1}{2}\left(X_m + \exp\left(-\pi\mathrm{i}\frac{m}{n}\right)Y_m\right), \qquad F_{m+n} = \frac{1}{2}\left(X_m - \exp\left(-\pi\mathrm{i}\frac{m}{n}\right)Y_m\right).$$

Dabei sind $(X_1, \dots, X_n)$ die FT von $(f_2, f_4, \dots, f_{2n})$ und
$(Y_1, \dots, Y_n)$ die FT von $(f_1, f_3, \dots, f_{2n-1})$.

### Bemerkungen

Aufgrund der großen Datenmengen ($10^5$ oder $10^6$ Einträge im Datensample sind nicht ungewöhnlich) benötigt die DFT viel Rechenzeit. Die Komplexität beträgt $O(n^2)$.

Mit Hilfe des obigen Satzes jedoch lässt sich die Größe der Datenvektoren halbieren! Rekursives Anwenden dieses Verfahrens beschleunigt die DFT für $n = 2^p$. Dieses Verfahren wird in der Fast Fourier Transform (FFT) angewendet. Die Komplexität der FFT beträgt damit nur $O = (n \log n)$, weswegen dieser Algorithmus deutlich schneller ist. Erst diese Ersparnis in der benötigten Rechenzeit macht den Einsatz von `mp3` und anderen technischen Errungenschaften in der Praxis möglich.

## Hinweis zu den Abbildungen

Die Verwendeten Graphen und Balkendiagramme wurden mit Hilfe von MATLAB erzeugt.

## Literatur

[BSMM05] Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A. ; Musiol, G. ; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2005

[But11] Butz, T.: *Fouriertransformation für Fußgänger*. Vieweg+Teubner, 2011

[Dem03] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1*. Springer-Verlag, 2003