Holomorphie und Laplace Transformation banachraumwertiger Funktionen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Kaiserslautern

vorgelegt von
Peter Vieten

Kaiserslautern
Februar 1995

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„An important part of classical analysis is concerned with functions which are holomorphic in a half-plane. Such a function may be representable by a Cauchy or Poisson integral in terms of the boundary values on the line bounding the half-plane, or it may be representable by one of the several forms of the Laplace integral, or by a suitable interpolation series such as the binomial series, to mention just a few alternatives. The rate of growth of the function on rays or on vertical lines determines what representations are possible.

In the theory of semi-groups of linear bounded transformations, we shall be concerned with several vector-valued functions which are holomorphic in a half-plane. The resolvent $R(\lambda, A)$ of the infinitesimal generator is such a function and in some of the important cases the semi-group operator itself has this property. For an effective study of this functions we are forced to carry over the classical theory to vector-valued functions.“

Mit diesen Worten leiten Hille und Phillips [21] das sechste Kapitel ihres 1957 erschienenen Buches „Functional Analysis and Semi-Groups“ ein. Der letzte Satz diese Zitats kann als ein mathematisches „Programm“ aufgefaßt werden. In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, einen kleinen Teil dieses „Programms“ zu verwirklichen.

Obwohl das Buch von Hille und Phillips eine weite Verbreitung gefunden hat und inzwischen fast vierzig Jahre alt ist, wurde bisher sehr wenig an dem „Programm“ von Hille und Phillips gearbeitet. Erst in „jüngerer Zeit“ wurden Fragen der Repräsentierbarkeit banachraumwertiger Funktionen als Laplace Integral im Hinblick auf Anwendungen für die Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren wieder aufgegriffen. „Jüngere Zeit“ ist hier relativ zum Erscheinungsdatum 1957 des Buches von Hille und Phillips zu sehen: Sova [36] charakterisierte 1979 die Laplace Transformierten einer Klasse analytischer Funktionen. Dieses Ergebnis bildet heute den Hintergrund für fast jede Aussage über die Erzeuger analytischer Evolutionsfamilien. Acht Jahre später war es Arendt [1], der eine banachraumwertige Variante von Widders Satz zur Charakterisierung der Laplace Transformierten beschränkter Funktionen vorstellte und mit Hilfe dieser Variante den Satz von Hille-Yosida als einfache Folgerung erhielt. Angeregt durch das Resultat von Arendt bewies Weis 1991 (siehe auch [40]) eine banachraumwertige Variante von Widders Satz für p-integrierbare Funktionen und zeigte in [41], wie dieses Ergebnis bei der Untersuchung p-integrierbarer Lösungen des abstrakten Cauchy Problems eingesetzt werden kann. Weitere Untersuchungen zur Laplace Transformation banachraumwertiger Funktionen inklusive Anwendungen finden sich in dem 1993 erschienenen Buch von Prüß [33] über evolutionäre Integralgleichungen. Dagegen sind mir keine Arbeiten bekannt, in welchen im Hinblick auf die Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren die Repräsentation holomorpher Funktionen durch ein Cauchy oder Poisson Integral der Randwerte bzw. durch Interpolationsreihen untersucht wurde.

Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit sind zwei verschiedene Typen von Hardyräumen banachraumwertiger Funktionen. Zum einen wird der Raum $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ aller auf der rechten Halbebene $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ holomorphen X-wertigen

Funktionen F, für welche die Norm

$$\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} = \sup_{a>0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \|F(a+ib)\|^p \, db \Big)^{1/p} \tag{0.1}$$

endlich ist, betrachtet. Dem wird für $0 < \alpha < \pi$ der Raum $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ aller auf dem Sektor $\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbf{C} : |\arg(z)| < \alpha\} \setminus \{0\}$ holomorphen X-wertigen Funktionen F, für welche die Norm

$$\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)} = \sup_{|\theta|<\alpha} \Big(\int_0^{\infty} \|F(re^{i\theta})\|^p \, dr \Big)^{1/p} \tag{0.2}$$

endlich ist, zur Seite gestellt. Die Elemente dieser Hardyräume werden untersucht auf Repräsentierbarkeit durch ein „Poisson Integral ihrer Randwerte“ oder „durch eine der verschiedenen Formen des Laplace Integrals“, um die Worte von Hille und Phillips zu benutzen. Dabei werden die folgenden Ergebnisse erzielt:

(1) Zunächst wird gezeigt, daß jede banachraumwertige auf $\mathbf{C}_+$ harmonische Funktion F, für welche die Norm (0.1) endlich ist, eine Repräsentation durch ein Poisson-Stieltjes Integral

$$F(a+ib) = \widetilde{\mathcal{P}}\phi(a+ib) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(b-t)^2 + a^2} \, d\phi(t) \tag{0.3}$$

mit einer Funktion ϕ von beschränkter p-Variation besitzt. Dies ist die banachraumwertige Variante des klassischen Resultats (siehe z.B. Garnett [17]), daß skalarwertige auf $\mathbf{C}_+$ harmonische Funktionen, für welche die Norm (0.1) endlich ist, eine Repräsentation durch ein Poisson Integral

$$F(a+ib) = \mathcal{P}f(a+ib) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(b-t)^2 + a^2} f(t) \, dt \tag{0.4}$$

mit einer Funktion $f \in L_p$ besitzen. Dieses klassische Ergebnis bleibt in genau denjenigen Banachräumen bestehen, welche die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzen.

Diese Repräsentation banachraumwertiger harmonischer Funktionen in der rechten Halbebene durch ein Poisson-Stieltjes Integral ist auch in Weis [40] zu finden, wo sie jedoch nicht bewiesen wird. Ein entsprechendes Ergebnis für banachraumwertige harmonische Funktionen auf der Kreisscheibe wurde 1988 von Blasco [6] vorgestellt sowie von Bukhvalov und Danilevich [9] 1982 angedeutet.

(2) Ist F eine auf der rechten Halbebene harmonische Funktion, für welche die Norm (0.1) endlich ist, so ist natürlich für jedes $a > 0$ die L_p-Norm von F entlang der um a nach rechts verschobenen imaginären Achse endlich, d.h. die durch

$$g(t) = F(a+it) \tag{0.5}$$

auf $\mathbf{R}$ definierte Funktion g ist eine L_p-Funktion. Es stellt sich nun umgekehrt die Frage, wann zu einer gegebenen L_p-Funktion g eine harmonische Funktion F existiert, deren Norm (0.1) endlich ist und welche die Gleichung (0.5) in $\mathbf{R}$ erfüllt. Es zeigt sich, daß eine Folge von Funktionen $(d_{a,n})$ in L_1 existiert, so daß die beiden folgenden Aussagen für alle $g \in L_p$ gleichwertig sind:

(i) Es gibt eine auf $\mathbf{C}_+$ harmonische Funktion F, deren Norm (0.1) endlich ist und welche der Gleichung (0.5) genügt.

(ii) Es gilt $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|d_{a,n} * g\|_{L_p} < \infty$.

Dem Beweis dieser Aussage liegt eine Idee Pollards [32] zugrunde, der eine ähnliche Untersuchung für skalarwertige harmonische Funktionen durchführte.

(3) Da holomorphe Funktionen harmonisch sind, gewinnt man durch das in (1) vorgestellte Ergebnis Aussagen über das Randverhalten holomorpher Funktionen in $H_p(\mathbf{C}_+, X)$, aber das Randverhalten holomorpher Funktionen in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ liegt zu diesem Zeitpunkt noch völlig im Dunkeln. Wird der Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ betrachtet, so stimmt der Sektor Σ_α mit der rechten Halbebene $\mathbf{C}_+$ überein und es besteht die Hoffnung, daß gewisse Eigenschaften des Raumes $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ auf den Raum $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ übertragen werden können, obwohl die Normen (0.1) und (0.2) verschiedenen sind. Diese Hoffnung wird voll und ganz erfüllt, denn die beiden Normen sind äquivalent und die Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ sind identisch! Da zudem jeder der Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ isomorph zu $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ ist (siehe Lemma 2.2.2), kann aus den Ergebnissen aus (1) auf das Randverhalten der Funktionen in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ geschlossen werden.

Die Übereinstimmung der Räume $H_2(\mathbf{C}_+)$ und $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})$ skalarwertiger Funktionen sowie Folgerungen für das Randverhalten von $H_2(\Sigma_\alpha)$-Funktionen wurde laut Držbašjan und Martirosjan [16] bereits 1966 von Držbašjan [15] bewiesen.

(4) Držbašjan und Martirosjan [16] nutzten die Gleichheit der Räume $H_2(\mathbf{C}_+)$ und $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})$ zum Nachweis, daß die Laplace Transformierte für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ einen Isomorphismus zwischen den Räumen $H_2(\Sigma_\alpha)$ und $H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}})$ vermittelt. Im Grenzfall $\alpha \to 0$ ergibt dies den Satz von Paley und Wiener [30].

Sova [36] zeigte 1979, daß jede auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ holomorphe und auf jedem echten Teilsektor beschränkte Funktion darstellbar ist als Laplace Transformierte einer auf dem Sektor Σ_α holomorphen Funktion, welche auf jedem echten Teilsektor beschränkt ist. Im Gegensatz zu Držbašjan und Martirosjan formulierte Sova sein Resultat für banachraumwertige Funktionen.

Eine Kombination der Ergebnisse von Držbašjan und Martirosjan auf der einen Seite sowie Sova auf der anderen Seite führt zu dem in dieser Arbeit gewonnenen Resultat, daß für eine auf $(0, \infty)$ definierte banachraumwertige Funktion F die beiden folgenden Aussagen gleichwertig sind:

(i) F ist Laplace Transformierte einer auf dem Sektor Σ_α holomorphen Funktion, welche für jeden Winkel $\beta < \alpha$ in $H_p(\Sigma_\beta, X)$ liegt.

(ii) F ist holomorph fortsetzbar auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ und die durch $z \mapsto z^{1-2/p}F(z)$ auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ definierte Funktion liegt für jeden Winkel $\beta < \alpha$ in $H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}, X)$.

Jedes der in den Punkten (1)-(4) vorgestellten Ergebnisse liefert eine Folgerung für L_p-Lösungen des abstrakten Cauchy Problems und kann somit für sich in Anspruch nehmen, Teil des „Programms“ von Hille und Phillips zu sein.

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Kapitel unterteilt. Im ersten Kapitel „Analysis banachraumwertiger Funktionen“ werden die Arbeitsgrundlagen für das zweite Kapitel dargestellt. Diese Grundlagen sind weitgehend bekannt. Neu ist nur die Phragmen Inversionsformel der Laplace Transformation in $V_p(X)$ für $1 < p < \infty$, welche im Fall $p = \infty$ von Bäumer und Neubrander [4] bewiesen wurde. Das zweite Kapitel enthält die wesentlichen Resultate dieser Arbeit.

Der erste Abschnitt des ersten Kapitels besteht aus einem Überblick über die hier benötigte Integrationstheorie banachraumwertiger Funktionen. Dieser Abschnitt ist zum großen Teil aus dem Buch „Vector Measures“ von Diestel und Uhl [13] entnommen.

Von zentraler Bedeutung sind die Ergebnisse des zweiten Abschnitts zur Repräsentation von Operatoren auf L_q und C_0. Jedes der in den Punkten (1)-(3) vorgestellten Resultate macht entscheidenden Gebrauch von den Ergebnissen dieses Abschnitts, welche aus dem Buch von Diestel und Uhl [13] sowie aus Artikeln von Blasco [5] und Weis [40] zusammengetragen und in eine für diese Arbeit adäquate Form gebracht wurden. Insbesondere wurde der Versuch unternommen, „Vektormaß freie“ Beweise für bereits bekannte Sätze zu führen. Dies betrifft unter anderem die Charakterisierung absolut summierender Operatoren auf C_0 als diejenigen Operatoren, die durch eine Funktion von beschränkter Variation repräsentiert werden sowie den Nachweis, daß ein Banachraum X genau dann die Radon-Nikodym Eigenschaft hat, wenn jede X-wertige Lipschitz stetige Funktion eine Radon-Nikodym Ableitung besitzt.

Der dritte Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die Theorie banachraumwertiger holomorpher und harmonischer Funktionen. Dabei stammt der Paragraph zur Holomorphie banachraumwertiger Funktionen zum großen Teil von Hille und Phillips [21]. Banachraumwertige harmonische Funktionen wurden in einiger Ausführlichkeit von Hensgen [19] studiert.

Der vierte Abschnitt enthält elementare Eigenschaften der Laplace Transformation sowie einige Ergebnisse zur Theorie der L_p-Flüsse, die von Weis [41] ins Leben gerufen wurde. Ein L_p-Fluß ist ein Lösungsoperator für das abstrakte Cauchy Problem, der bei Eingabe eines Anfangswertes x eine p-integrierbare Lösung ausgibt. Die Theorie der L_p-Flüsse bildet die Brücke zwischen den in (1)-(4) vorgestellten Resultaten auf der einen Seite und dem abstrakten Cauchy Problem auf der anderen Seite.

Im Zentrum des ersten Abschnitts im zweiten Kapitel stehen die in (1) und (2) genannten Resultate zur Darstellbarkeit banachraumwertiger Funktionen durch ein Poisson Integral.

Der zweite Abschnitt beinhaltet im Wesentlichen die in (3) angesprochene Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ sowie drei Konsequenzen dieser Äquivalenz: Erstens wird die Existenz von Randwerten für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen diskutiert, zweitens wird eine Variante des Satzes von Paley und Wiener für Hilberträume angegeben und drittens wird der Dualraum von $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ für Banachräume X mit Radon-Nikodym Eigenschaft dargestellt.

Im dritten Abschnitt wird das in (4) vorgestellte Resultat besprochen. Darüber hinaus wird diskutiert, für welche Banachräume die von Držbašjan und Martirosjan [16] bewiesene Variante des Satzes von Paley und Wiener richtig ist und welche Aussagen im Fall $p \neq 2$ gemacht werden können. Dies führt zum Begriff „Fourier-Stieltjes Typ eines Banachraums“.

An dieser Stelle danke ich allen, die mich während der Arbeit an der Dissertation unterstützt haben. Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Eberhard Schock für die Anregung und Förderung dieser Arbeit und dafür, daß er immer ein offenes Ohr für mich hatte. Ich danke Herrn Prof. Dr. Lutz Weis für die vielen wertvollen Hinweise, ohne welche diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre, sowie Herrn Prof. Dr. Frank Neubrander, der in vielen Diskussionen mein Interesse für das abstrakte Cauchy Problem weckte.

Kapitel 1

Analysis banachraumwertiger Funktionen

1.1 Notationen

Unter einem Banachraum verstehen wir einen komplexen, normierten und vollständigen Vektorraum. Der Buchstabe X steht immer für einen Banachraum und für $x \in X$ bezeichnet $\|x\|$ die Norm von x. Wir schreiben $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ für die Einheitskugel von X. Der Dualraum von X, das ist der Banachraum aller stetigen und linearen Funktionale $x^* : X \to \mathbf{C}$ mit der Norm $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in U_X\}$, wird mit X^* bezeichnet. Für die Wirkung eines $x^* \in X^*$ auf ein $x \in X$ werden die Schreibweisen $x^*(x)$, $\langle x^*, x\rangle$ oder $\langle x, x^*\rangle$ verwendet. Die letzte dieser drei Schreibweisen ist gerechtfertigt, da durch $x^* \mapsto x^*(x)$ $(x^* \in X^*)$ ein Element des Dualraums von X^* definiert wird und dieses Element wird mit $x \in X$ identifiziert. Desweiteren sind topologische Begriffe wie offen, abgeschlossen, separabel, usw. immer im Sinn der durch die Norm in X induzierten Topologie zu verstehen, sofern nicht explizit eine andere Topologie genannt wird.

Ist $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in X, so bedeutet die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, daß die Folge (x_n) in der Norm von X gegen das Element $x \in X$ konvergiert. Konvergiert die Folge (x_n) schwach gegen x, so wird $\sigma \sim \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ist Y ein weiterer (komplexer) Banachraum, so bezeichnet $\mathbf{L}(X, Y)$ den Raum aller stetigen linearen Abbildungen $T : X \to Y$ und $\mathbf{L}(X, X)$ wird durch $\mathbf{L}(X)$ abgekürzt. Wir werden in Zukunft häufig Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen betrachten. Ist in diesem Zusammenhang von einem Operator die Rede, so ist immer eine lineare, aber nicht notwendigerweise stetige Abbildung gemeint. Stetige lineare Abbildungen sind in diesem Sinn stetige Operatoren.

Sei $F(y)$ eine Formel, welche von der Variablen y abhängt. In der Sprache der Prädikatenlogik bedeutet dies, daß die Formel $F(y)$ die Variable y als freie Variable enthält. Dann steht die Schreibweise

$$F(y) \qquad (y \in M)$$

für die ausführliche Formulierung „Für alle $y \in M$ gilt $F(y)$“.

Wird ein Term $term_1$ durch einen Term $term_2$ definiert, so steht der zu definierende Term $term_1$ immer auf der linken Seite der definierenden Gleichung, d.h. es wird

$$term_1 = term_2$$

geschrieben.

1.2 Integration banachraumwertiger Funktionen

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zur Integration banachraumwertiger Funktionen vorgestellt. Behandelt werden das Bochner Integral, das Pettis Integral sowie das Riemann-Stieltjes Integral für banachraumwertige Funktionen. Während das Bochner und das Pettis Integral zwei Verallgemeinerungen des Lebesgue Integrals darstellen, ist das Riemann-Stieltjes Integral banachraumwertiger Funktionen, wie der Name schon sagt, eine direkte Ausdehnung des Riemann-Stieltjes Integrals komplexwertiger Funktionen.

1.2.1 Das Bochner Integral

Mit $I \neq \emptyset$ wird ein abgeschlossenes, nicht notwendigerweise beschränktes Teilintervall der reellen Zahlen bezeichnet. Ist von einer meßbaren Teilmenge von I die Rede, so ist Lebesgue Meßbarkeit gemeint und der Buchstabe μ steht für das Lebesgue Maß. Wie üblich sagen wir, eine Aussage gilt für fast alle $t \in I$, falls eine Lebesgue Nullmenge $U \subseteq I$ so existiert, daß die Aussage für alle $t \in I \setminus U$ richtig ist.

Ist $f : I \to X$ eine Funktion und $x^* \in X^*$, so schreiben wir $x^* \circ f$ für die durch $x^* \circ f(t) = x^*(f(t))$ auf I definierte komplexwertige Funktion. Für $M \subseteq X$ ist $f^{-1}(M)$ die Menge aller Urbilder der Elemente von M. Für $x \in X$ wird $f^{-1}(x)$ anstelle von $f^{-1}(\{x\})$ geschrieben.

Definition 1.2.1 Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *einfache Funktion,* falls f in X nur endlich viele verschiedene Werte $x_1, \ldots, x_n$ annimmt und für alle $i = 1, \ldots, n$ die Mengen $f^{-1}(x_i)$ Lebesgue meßbar sind und endliches Lebesgue Maß besitzen.

Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *meßbar,* falls einfache Funktionen $f_n : I \to X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ so existieren, daß für fast alle $t \in I$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$.

Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *schwach meßbar,* falls $x^* \circ f$ für alle $x^* \in X^*$ meßbar ist.

Ist $f : I \to X$ eine einfache Funktion mit den paarweise verschiedenen Funktionswerten $x_1, \ldots, x_n \in X$ und wird $E_k = f^{-1}(x_k)$ gesetzt, so folgt $f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{E_k}$. Umgekehrt bedeutet im folgenden die Aussage „Sei $f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{E_k}$ eine einfache Funktion“, daß die x_k paarweise verschiedene Elemente des Banachraums X sind und die Mengen E_k Lebesgue meßbar mit endlichem Maß und paarweise disjunkt sind. Im weiteren Verlauf werden wir häufig mit einfachen Funktionen der Form

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{[a_k, b_k)} \tag{1.1}$$

arbeiten, wobei $x_k \in X$ und $[a_k, b_k) \subseteq I$ für $k = 1, \dots, n$. Dabei wird an dieser Stelle die Generalvereinbarung getroffen, daß $\chi_{[a,b)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[a, b]$ bezeichnet, sofern I nach oben durch b begrenzt wird. Diese Vereinbarung kommt nur bei den Betrachtungen zu Räumen stetiger Funktionen zum Tragen. Der Raum $S(I, X)$ besteht aus allen einfachen Funktionen $f : I \to X$, welche von der Form (1.1) sind. Anstelle von $S(I, \mathbf{C})$ wird $S(I)$ geschrieben.

Wie im Fall komplexwertiger Funktionen zeigt man, daß Summen, skalare Vielfache und punktweise fast überall Grenzwerte meßbarer banachraumwertiger Funktionen meßbar sind. Genauso überlegt man sich, daß das Produkt einer banachraumwertigen meßbaren Funktion und einer komplexwertigen meßbaren Funktion meßbar ist.

Die nachfolgenden Sätze sind dem Buch „Vector Measures" von Diestel und Uhl [13] entnommen. Die Sätze in diesem Buch sind zwar für allgemeine Maßräume formuliert, aber leider nur für solche mit endlichem Maß . Die uns verbleibende einfache, aber notwendige Aufgabe besteht darin, die entsprechenden Aussagen auch für unbeschränkte Intervalle zu gewinnen.

Proposition 1.2.2 *Eine Funktion $f : I \to X$ ist genau dann meßbar, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.*

(i) *Es gibt eine Nullmenge $U \subseteq I$ so, daß $f(I \setminus U)$ separabel in X ist.*

(ii) *Die Funktion f ist schwach meßbar.*

Beweis Nach [13], II.1 (Pettis Measurability Theorem), gilt die Behauptung für kompakte Intervalle I.

Sei nun I nicht kompakt, also unbeschränkt, dann wählen wir eine aufsteigende Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ kompakter Teilintervalle von I mit $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und definieren $f_k = f \cdot \chi_{I_k}$.

Wird f als meßbar vorausgesetzt, so ist auch f_k als Produkt der meßbaren Funktionen f und χ_{I_k} meßbar. Da I_k kompakt ist, gibt es also eine Nullmenge $U_k \subseteq I$ so, daß $f_k(I \setminus U_k)$ separabel in X ist. Wegen

$$f(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \subseteq f(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \setminus U_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(I \setminus U_k)$$

ist somit $f(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k)$ als Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung separabler Mengen separabel. Zudem ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge. Das beweist (i). Da starke Meßbarkeit natürlich schwache Meßbarkeit impliziert, ist die Gültigkeit von (i) und (ii) erwiesen.

Erfüllt f die Bedingungen (i) und (ii), dann erfüllen auch die Funktionen f_k die Bedingungen (i) und (ii). Nun ist aber der Träger von f_k für alle $k \in \mathbf{N}$ kompakt und also folgt die Meßbarkeit der Funktionen f_k. Somit erweist sich f als punktweiser Limes der Funktionen f_k für $k \to \infty$ als meßbar. $\equiv$

Beispiel 1.2.3 (1) Stetige Funktionen sind meßbar. Denn ist $f : I \to X$ eine stetige Funktion, so ist f schwach stetig, d.h. $x^* \circ f$ ist stetig für alle $x^* \in X^*$ und somit ist

f schwach meßbar. Zudem ist $f(I)$ enthalten im Abschluß von $f(I \cap \mathbf{Q})$. Denn ist (q_n) eine gegen $t \in I$ konvergente Folge rationaler Zahlen, so besagt die Stetigkeit von f, daß die Folge $(f(q_n))$ in X gegen $f(t)$ konvergiert. Die Meßbarkeit von f folgt nun aus Proposition 1.2.2.

(2) Dies ist das Beispiel einer nicht meßbaren Funktion. Betrachtet wird der Banachraum $C(\mathbf{R})$ der stetigen Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ versehen mit der Supremumsnorm. Für jedes $t \in \mathbf{R}$ wird der Translationsoperator $T(t)$ definiert durch

$$(T(t)f)(s) = f(s-t) \qquad (-\infty < s < \infty).$$

Diese Translationsoperatoren sind offensichtlich stetige Operatoren auf $C(\mathbf{R})$. Demnach ist die Abbildung T, welche jeder reellen Zahl t den Translationsoperator $T(t)$ zuordnet, eine Funktion der reellen Zahlen in den Raum $\mathbf{L}(C(\mathbf{R}))$ der stetigen Operatoren auf $C(\mathbf{R})$. Doch diese Abbildung ist nicht meßbar. Dann es ergibt sich $\|T(t_1) - T(t_2)\| = 2$ für alle reellen t_1, t_2 mit $t_1 \neq t_2$. Daher kann keine Nullmenge $U \subseteq \mathbf{R}$ so existieren, daß $T(\mathbf{R} \setminus U)$ in $\mathbf{L}(C(\mathbf{R}))$ separabel ist. Das Kriterium 1.2.2 besagt somit, daß T nicht meßbar ist.

Definition 1.2.4 Sei $f : I \to X$ eine meßbare Funktion und $E \subseteq I$ sei eine meßbare Teilmenge. Ist $f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{E_k}$ eine einfache Funktion, so ist das Bochner Integral von f bezüglich E definiert durch $\int_E f(t)\, dt = \sum_{k=1}^n x_k \mu(E_k \cap E)$.

Ist f nicht einfach, so heißt f *Bochner integrierbar,* falls eine Folge (f_k) einfacher Funktionen $f_k : I \to X$ existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \|f(t) - f_k(t)\|\, dt = 0. \tag{1.2}$$

In diesem Fall heißt

$$\int_E f(t)\ dt = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(t)\, dt \tag{1.3}$$

das *Bochner Integral* von f bezüglich E. Eine meßbare Funktion $f : I \to X$ heißt *lokal Bochner integrierbar,* falls für jedes kompakte Teilintervall $J \subseteq I$ die Einschränkung von f auf J Bochner integrierbar ist.

Wie bei der Definition des Lebesgue Integrals überlegt man sich, daß der Limes in (1.3) unter der Voraussetzung (1.2) existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Folge (f_k) einfacher Funktionen ist.

Die nächste Proposition, die eine Charakterisierung Bochner integrierbarer Funktionen gibt, ist ein Beispiel für das „Ersetzen von Betrags- durch Normstriche“ beim Übergang vom Lebesgue- zum Bochner Integral. Beim Beweis dieser Charakterisierung greifen wir wieder auf das entsprechende Ergebnis von Diestel und Uhl für kompakte Intervalle I zurück.

Proposition 1.2.5 *Eine meßbare Funktion $f : I \to X$ ist genau dann Bochner integrierbar, falls $\int_I \|f(t)\|\, dt < \infty$.*

Beweis Die Behauptung ist nach [13], II.2, richtig, falls I kompakt ist. Ist I nicht kompakt, so wird eine aufsteigende Folge kompakter Teilintervalle $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ von I mit $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ gewählt und es wird definiert $f_k = f \cdot \chi_{I_k}$. Sei nun $\int_I \|f(t)\|\, dt < \infty$. Dann ist $\int_I \|f_k(t)\|\, dt < \infty$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Somit ist f_k für alle k Bochner integrierbar nach [13], II.2, weil der Träger von f_k kompakt ist. Es gibt demnach für jedes $k \in \mathbf{N}$ eine Folge einfacher Funktionen $(f_{k,n})$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_k(t) - f_{k,n}(t)\|\, dt = 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun für jedes k eine natürliche Zahl $n(k)$ so, daß $\int_I \|f_k(t) - f_{k,n(k)}(t)\|\, dt < \varepsilon$. Zudem können wir wegen $\int_I \|f(t)\|\, dt < \infty$ ein k so wählen, daß gilt

$$\int_I \|f(t) - f_k(t)\|\, dt = \int_{I \setminus I_k} \|f(t)\|\, dt < \varepsilon.$$

Es folgt also

$$\int_I \|f(t) - f_{k,n(k)}(t)\|\, dt \leq \int_I \|f(t) - f_k(t)\|\, dt + \int_I \|f_k(t) - f_{k,n(k)}(t)\|\, dt \leq 2\varepsilon.$$

Folglich ist f Bochner integrierbar.

Ist umgekehrt f Bochner integrierbar, so gibt es eine einfache Funktion g mit $\int_I \|f(t) - g(t)\|\, dt < 1$ und also ist

$$\int_I \|f(t)\| \leq \int_I \|f(t) - g(t)\|\, dt + \int_I \|g(t)\|\, dt < \infty,$$

was zu zeigen war. $\equiv$

Erfreulicherweise gilt auch für das Bochner Integral der überaus nützliche, aus der Lebesgueschen Integrationstheorie bekannte Satz von der dominierten Konvergenz.

Proposition 1.2.6 *Es seien $f_n : I \to X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Bochner integrierbare Funktionen und die Folge (f_n) konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \to X$ für $n \to \infty$. Existiert eine reellwertige Lebesgue integrierbare Funktion g auf I so, daß für jedes $n \in \mathbf{N}$ fast überall $\|f_n(t)\| < g(t)$ gilt, so ist f Bochner integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\|\, dt = 0.$$

Insbesondere ist $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt$.

Beweis Zum Beweis wendet man den Satz über die dominierte Konvergenz reellwertiger Funktionen auf die Funktionen $\|f - f_n\|$ mit dominierender Funktion $2g$ an. $\equiv$

Als nächstes werden einige weitere Eigenschaften des Bochner Integrals gesammelt, deren Beweise ohne Änderungen auch für nicht kompakte Intervalle aus [13], II.2, übernommen werden können.

Proposition 1.2.7 *Sei $f : I \to X$ Bochner integrierbar.*

(i) *Ist* (E_n) *eine Folge meßbarer Teilmengen von* I *mit* $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$*, so ist* $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(t)\,dt = 0$.

(ii) *Es ist* $\|\int_I f(t)\,dt\| \leq \int_I \|f(t)\|\,dt$.

(iii) *Sind* E_k $(k = 1, 2, \dots)$ *paarweise disjunkte meßbare Teilmengen von* I *und ist* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$*, so ist* $\int_E f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(t)\,dt$ *und die Reihe in der rechten Seite der Gleichung konvergiert absolut.*

Ist f eine auf I definierte komplexwertige Lebesgue integrierbare Funktion, so gilt für jedes $z \in \mathbf{C}$ die Gleichung $\int_I zf(t)\,dt = z\int_I f(t)\,dt$. Sind X und Y Banachräume, ist $f : I \to X$ Bochner integrierbar und $A : X \to Y$ ein stetiger Operator, so ist $A \circ f : I \to Y$ und es gilt $\int_I Af(t)\,dt = A\int_I f(t)\,dt$. Diese Behauptung ist sehr einfach nachzuprüfen. Etwas komplizierter ist der Beweis der folgenden Proposition, die eine entsprechende Aussage für abgeschlossene, nicht notwendigerweise stetige Operatoren macht.

Es sei daran erinnert, daß ein Operator $A : D(A) \to Y$, $D(A) \subseteq X$ und Y ein weiterer Banachraum, abgeschlossen heißt, falls sein Graph abgeschlossen in $D(A) \times Y$ ist. Dies ist äquivalent zu der folgenden Aussage: Ist $(x_n) \subseteq D(A)$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge und existiert ein $y \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$, so ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Wir bleiben auch bei dieser Proposition der Strategie treu, den Fall kompakter Intervalle aus [13] zu zitieren und hieraus den Fall beliebiger abgeschlossener Intervalle abzuleiten.

Proposition 1.2.8 *Sei* $A : D(A) \to Y$, $D(A) \subseteq X$*, ein abgeschlossener Operator. Ist sowohl* $f : I \to D(A)$ *als auch* $A \circ f : I \to Y$ *Bochner integrierbar, so ist* $\int_I f(t)\,dt \in D(A)$ *und es gilt*

$$\int_I (A \circ f)(t)\,dt = A\Big(\int_I f(t)\,dt\Big).$$

Beweis Wie angekündigt bemerken wir, daß die Behauptung für kompakte Intervalle nach [13], II.2, richtig ist. Ist I nicht kompakt, so wählen wir wieder eine Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ kompakter Intervalle mit $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und definieren $f_k = f\chi_{I_k}$. Dann ist für alle $k \in \mathbf{N}$ sowohl f_k als auch $A \circ f_k$ Bochner integrierbar, also gilt $\int_I (A \circ f_k)(t)\,dt = A\Big(\int_I f_k(t)\,dt\Big)$. Eine der elementaren Eigenschaften des Bochner Integrals aus Proposition 1.2.7 besagt

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_{I_k} f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_I f_k(t)\,dt.$$

Auf die Folge der Funktionen $A \circ f_k$, $k \in \mathbf{N}$, können wir den Satz von der dominierten Konvergenz mit dominierender Funktion $\|A \circ f\|$ anwenden und erhalten

$$\int_I (A \circ f)(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_I (A \circ f_k)(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} A\int_I f_k(t)\,dt.$$

Die Abgeschlossenheit von A läßt somit die Folgerungen $\int_I f(t)\,dt \in D(A)$ und $\int_I (A \circ f)(t)\,dt = A\Big(\int_I f(t)\,dt\Big)$ zu. $\equiv$

Zum Abschluß der Betrachtungen über das Bochner Integral führen wir die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehenden Funktionenräume $L_p(I,X)$ ein.

Definition 1.2.9 Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $L_p(I,X)$ besteht aus Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen f, für welche die Norm

$$\|f\|_{L_p} = \Big(\int_I \|f(t)\|^p\,dt\Big)^{1/p}$$

im Fall $p < \infty$ beziehungsweise

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf_{\mu(U)=0} \sup_{t \in I \setminus U} \|f(t)\|$$

endlich ist. Die Lebesgue L_p-Räume $L_p(I,\mathbf{C})$ kürzen wir ab durch $L_p(I)$.

Wie im Fall der Lebesgue L_p-Räume werden zwei Funktionen mit endlicher L_p-Norm als äquivalent bezeichnet, falls sie fast überall übereinstimmen.

Daß die Abbildung $\|\cdot\|_{L_p} : L_p(I,X) \to \mathbf{R}$ eine Norm ist, folgt direkt aus den Normeigenschaften der L_p-Norm für skalarwertige Funktionen.

Sei $S(I,X)$ der Raum der einfachen Funktionen f auf I, welche von der Form $f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{[a_k,b_k)}$ sind. Dieser Raum ist in jedem der Räume $L_p(I,X)$ enthalten und es gilt die

Proposition 1.2.10 *Ist $1 \leq p < \infty$ so läßt sich jedes $f \in L_p(I,X)$ durch eine Folge von Funktionen in $S(I,X)$ in der L_p-Norm approximieren.*

Beweis Sei $p < \infty$ und $f \in L_p(I,X)$. Dann ist f insbesondere meßbar und folglich gibt es eine Folge (f_k) einfacher Funktionen auf I, welche punktweise fast überall gegen f konvergiert. Für $k \in \mathbf{N}$ werde $g_k : I \to X$ nun definiert durch

$$g_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|f(t) - f_k(t)\| \geq e^{-|t|} \\ f_k(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist auch (g_k) eine Folge einfacher Funktionen, welche punktweise fast überall gegen f konvergiert. Zudem wird die Funktion $t \mapsto \|f(t) - g_k(t)\|^p$ dominiert durch die L_1-Funktion $t \mapsto e^{-p|t|} + \|f(t)\|^p$. Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert daher

$$\lim_{k \to \infty} \int_I \|f(t) - g_k(t)\|^p\,dt = 0.$$

Somit ist die Existenz einer Folge einfacher Funktionen nachgewiesen, welche in der Norm in $L_p(I,X)$ gegen f konvergiert. Andererseits läßt sich jede einfache Funktion auf I durch einfache Funktionen in $S(I,X)$ bezüglich der L_p-Norm approximieren.

Folglich existiert sogar eine Folge einfacher Funktionen in $S(I,X)$, welche in $L_p(I,X)$ gegen f konvergiert. $\equiv$

Da nun die L_p-Räume eingeführt sind, können einige weitere wichtige Beispiele Bochner integrierbarer Funktionen vorgestellt werden.

Mit $C_0(I,X)$ bezeichnen wir im folgenden den Raum der stetigen Funktionen $f : I \to X$, welche im Unendlichen verschwinden, sofern das Intervall I unbeschränkt ist. Als Kurzschreibweise für $C_0(I,\mathbf{C})$ wird $C_0(I)$ benutzt. Wir setzen $Y_p(I,X) = L_p(I,X)$ für $1 \leq p < \infty$, $Y_\infty(I,X) = C_0(I,X)$ und $Y_p(I) = Y_p(I,\mathbf{C})$.

In Beispiel 1.2.3 (2) wurden bereits die Translationsoperatoren $T(t)$ auf dem Raum $C(\mathbf{R})$ eingeführt. Translationen können in entsprechender Weise auf jedem der Räume $Y_p(\mathbf{R},X)$ definiert werden, indem für jedes $t \in \mathbf{R}$ und $f \in Y_p(\mathbf{R},X)$ festgesetzt wird

$$T(t)f(s) = f(s-t) \qquad (s \in \mathbf{R}).$$

Offensichtlich sind die Translationen normerhaltende Operatoren in $Y_p(\mathbf{R},X)$. Insbesondere gilt also $\|T(t)\| = 1$ und die Abbildung $T : \mathbf{R} \to \mathbf{L}(Y_p(\mathbf{R},X))$, die jedem $t \in \mathbf{R}$ die Translation $T(t)$ zuordnet, ist beschränkt. Sei $g \in L_1(\mathbf{R})$. Dann gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \|g(t)T(t)\|\,dt = \|g\|_{L_1}$, und man ist geneigt, das Bochner Integral $\int_I g(t)T(t)\,dt$ im Banachraum der linearen Operatoren auf $Y_p(\mathbf{R},X)$ zu bilden. Doch diese Funktion ist nicht meßbar, sofern $g \neq 0$ ist. Der Beweis dieser Behauptung verläuft analog zur Argumentation in Beispiel 1.2.3 (2). Anders verhält es sich, wenn für $f \in Y_p(\mathbf{R},X)$ die Funktion $t \mapsto g(t)T(t)f$ betrachtet wird. Denn diese Funktion ist stetig (dies wird in der folgenden Proposition bewiesen) und somit Bochner integrierbar.

Wie sieht das Bochner Integral dieser Funktion aus? Ist $g \in L_1(\mathbf{R})$ und $f \in Y_p(\mathbf{R})$, so ist die Faltung $g * f$ von g und f definiert durch

$$(g*f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(s-t)\,dt \qquad (-\infty < s < \infty).$$

Es ist bekannt, daß dieses Integral für fast alle $s \in \mathbf{R}$ existiert und die Funktion $g * f$ in $Y_p(\mathbf{R})$ liegt (siehe etwa [11]).

Entsprechend wird für $g \in L_1(\mathbf{R})$ und $f \in Y_p(\mathbf{R},X)$ die Funktion $g * f$ als Faltung von g und f bezeichnet, falls $g * f$ in $Y_p(\mathbf{R},X)$ liegt und für jedes $x^* \in X^*$ die skalarwertige Funktion $x^* \circ (g*f)$ die Faltung der skalarwertigen Funktionen g und $x^* \circ f$ ist. Die nächste Proposition besagt unter anderem, daß diese Faltung existiert und mit dem Bochner Integral der Funktion $t \mapsto g(t)T(t)f$ übereinstimmt.

Proposition 1.2.11 *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in Y_p(\mathbf{R},X)$ und $g \in L_1(\mathbf{R})$. Dann ist die Abbildung $t \to T(t)f$ stetig in $\mathbf{R}$, also insbesondere meßbar, und das Bochner Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dt$ existiert und stimmt mit der Faltung von g und f überein. Insbesondere gilt $\|g*f\|_{Y_p} \leq \|g\|_{L_1}\|f\|_{Y_p}$.*

Beweis Sei zunächst $p < \infty$. Der Beweis wird zuerst für einfache Funktionen $f = \sum_{k=1}^n x_k\chi_{[a_k,b_k)} \in S(I,X)$ geführt. Ist $\delta > 0$, so ist $\|T(\delta)\chi_{[a_k,b_k)} - \chi_{[a_k,b_k)}\|_{L_p}^p \leq 2\delta$. Demnach gilt

$$\|T(\delta)f - f\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|\|T(\delta)\chi_{[a_k,b_k)} - \chi_{[a_k,b_k)}\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|(2\delta)^{1/p},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen Null für $\delta \to 0$. Dies beweist die Stetigkeit der Funktion $t \mapsto T(t)f$ im Punkt Null. Sei nun $t \in \mathbf{R}$ beliebig. Dann ist $T(t+\delta)f = T(t)T(\delta)f$. Da $\lim_{\delta\to 0} T(\delta)f = f$ und da $T(t)$ ein stetiger Operator ist, folgt $\lim_{\delta\to 0} T(t+\delta)f = T(t)f$. Ist $f \in L_p(\mathbf{R}, X)$ beliebig und ist $\varepsilon > 0$, so wird eine einfache Funktion h gewählt mit $\|h - f\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{3}$. Desweiteren gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$ mit $\|T(\delta)h - h\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{3}$ $(0 < \delta < \tilde{\delta})$. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|T(\delta)f - f\|_{L_p} \leq \|T(\delta)(f-h)\|_{L_p} + \|T(\delta)h - h\|_{L_p} + \|h - f\|_{L_p} \leq \varepsilon.$$

Dies beweist die Stetigkeit von $t \mapsto T(t)f$ im Punkt Null und die Stetigkeit auf $\mathbf{R}$ folgt wiederum aus der Halbgruppeneigenschaft $T(t+\delta) = T(t)T(\delta)$ der Translationen.

Sei nun $f \in Y_\infty(\mathbf{R}, X) = C_0(\mathbf{R}, X)$. Dann ist f auf $\mathbf{R}$ gleichmäßig stetig, was genau die Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto T(t)f$ im Punkt Null bedeutet. Wieder folgt die Stetigkeit dieser Abbildung auf der ganzen reellen Achse aus der Halbgruppeneigenschaft.

Da nach Beispiel 1.2.3 (1) stetige Abbildungen meßbar sind, ist die Abbildung $t \mapsto T(t)f$ meßbar und also existiert das Bochner Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dt$. Es bleibt nachzuweisen, daß dieses Integral die Faltung von g und f ist. Sei f zunächst eine komplexe Funktion und es sei $h \in L_q(\mathbf{R})$. Wird h als lineares Funktional auf $Y_p(\mathbf{R})$ aufgefaßt, so folgt aus Proposition 1.2.8 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(s) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dtds &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(s)f(s-t)\,dsdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(s-t)\,dtds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)(g*f)(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes $h \in L_q(\mathbf{R})$ gilt, ist $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dt = g * f$. Nun sei $f \in Y_p(\mathbf{R}, X)$. Dann ist $x^* \circ f \in Y_p(\mathbf{R})$ für jedes $x^* \in X^*$. Folglich gilt

$$g * (x^* \circ f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)(x^* \circ f)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x^* \circ T(t)f\,dt.$$

Der Nachweis, daß das lineare Funktional auf der rechten Seite dieser Gleichung vor das Integral gezogen werden darf, wird wie folgt geführt. Sei $x^* \in X^*$. Die Abbildung, die jedem $f \in Y_p(\mathbf{R}, X)$ die komplexe Funktion $x^* \circ f \in L_p(\mathbf{R})$ zuordnet, ist ein beschränkter Operator. Also besagt Proposition 1.2.8, daß diese Abbildung mit dem Bochner Integral vertauschbar ist. Die obige Gleichungskette kann nun wie folgt weitergeführt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)x^* \circ T(t)f\,dt = x^* \circ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dt.$$

Somit ist der Nachweis erbracht, daß $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)T(t)f\,dt$ mit der Faltung von g und f im Sinn der oben gegebenen Definition übereinstimmt. $\equiv$

Die Faltung einer skalarwertigen Funktion mit einer banachraumwertigen Funktion ist ein Spezialfall der folgenden Situation: Sei J ein weiteres abgeschlossenes Intervall, gegeben sei eine Funktion $k : I \times J \to X$ und für alle $s \in I$ werde $K_s : J \to X$ definiert durch $K_s(t) = k(s,t)$. Dann gilt:

Proposition 1.2.12 *Ist für jedes $s \in I$ die Funktion $K_s \in L_p(J,X)$, ist $K : I \to L_p(J,X)$ meßbar und ist $\int_I \|K_s\|_{L_p} < \infty$, so existiert für fast alle $t \in J$ das Integral $\int_I k(s,t)\,ds$ und für fast alle $t \in J$ gilt*

$$\Big(\int_I K_s\,ds\Big)(t) = \int_I k(s,t)\,ds.$$

Hier ist das Integral $\int_I K_s\,ds$ als Bochner Integral in $L_p(X)$ aufzufassen.

Beweis Die Existenz des Integrals $\int_I K_s\,ds$ wurde unter den angegebenen Voraussetzungen bereits in Proposition 1.2.5 sichergestellt. Sei $g \in L_q(J)$. Dann gilt aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\int_I \int_J \|g(t)k(s,t)\|\,dt\,ds \le \|g\|_{L_q} \int_I \|K_s\|_{L_p}\,ds.$$

Mit dem Satz Fubini folgt also die Endlichkeit des Integrals $\int_I \|g(t)k(s,t)\|\,ds$ für fast alle $t \in J$. Ist nun $\widetilde{J} \subseteq J$ ein kompaktes Teilintervall und wird speziell g als die charakteristische Funktion von $\widetilde{J}$ gewählt, so folgt für fast $t \in \widetilde{J}$ die Endlichkeit des Integrals $\int_I \|k(s,t)\|\,ds$. Da dies für jedes kompakte Teilintervall von J gilt, kann $\int_I k(s,t)\,dt < \infty$ für fast alle $t \in J$ gefolgert werden.

Nun wird $g \in L_q(J)$ und $x^* \in X^*$ gewählt und der Operator $T \in L_p(J,X)^*$ wird definiert durch

$$Tf = \int_J g(t)(x^* \circ f)(t)\,dt.$$

Offensichtlich ist T linear und wegen der Hölderschen Ungleichung ist T beschränkt. Doch beschränkte Operatoren sind nach Proposition 1.2.8 mit dem Bochner Integral vertauschbar. Also gilt

$$T\Big(\int_I K_s\,ds\Big) = \int_I TK_s\,ds$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\int_J g(t)x^*\Big(\int_I K_s\,ds\Big)(t)\,dt &= \int_I \int_J g(t)(x^* \circ K_s)(t)\,dt\,ds \\
&= \int_J g(t) \int_I (x^* \circ k)(s,t)\,ds\,dt \\
&= \int_J g(t)x^*\Big(\int_I k(s,t)\,ds\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Hier wurde bei der Gleichheit zwischen dem zweiten und dritten Term der Satz von Fubini bemüht. Da x^* auch noch vor das äußere Integral gezogen werden kann, folgt

$$\int_J g(t)\Big(\int_I K_s\,ds\Big)(t)\,dt = \int_J g(t) \int_I k(s,t)\,ds\,dt.$$

Diese Gleichung gilt für jedes $g \in L_q(J)$, somit folgt für fast alle $t \in J$

$$\int_I k(s,t)\,ds = \Big(\int_I K_s\,ds\Big)(t).$$

$\equiv$

Diese Proposition enthält in der Tat die Aussage von Proposition 1.2.11. Denn wird für $g \in L_1(\mathbf{R})$ und $f \in L_p(\mathbf{R},X)$ definiert $k(s,t) = g(s)f(t-s)$, wobei $-\infty < s,t < \infty$, so erfüllt k die Voraussetzungen der Proposition.

1.2.2 Das Pettis Integral

Ist eine banachraumwertige Funktion $f : I \to X$ gegeben, so gibt es zwei verschiedene, aber naheliegende Möglichkeiten, aus dieser Funktion eine reellwertige Funktion zu gewinnen. Die eine Möglichkeit besteht darin, die Funktion $t \mapsto \|f(t)\|$ zu betrachten. Die Frage nach der Integrierbarkeit dieser Funktion führt, wie Proposition 1.2.5 zeigt, zum Bochner Integral. Die zweite Möglichkeit besteht darin, für ein $x^* \in X^*$ die Funktion $t \mapsto |x^*(f(t))|$ zu betrachten. Diese Variante führt zum Pettis Integral.

Ist $f : I \to X$ eine banachraumwertige, schwach meßbare Funktion, so wird eine weitere Norm $\|f\|_{PL_1}$ für f eingeführt durch

$$\|f\|_{PL_1} = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ f\|_{L_1}.$$

Proposition 1.2.13 *Es sei $f : I \to X$ eine schwach meßbare Funktion und für alle $x^* \in X^*$ sei $x^* \circ f \in L_1(I)$. Dann ist $\|f\|_{PL_1} < \infty$. Zudem existiert für jede meßbare Teilmenge E von I ein eindeutig bestimmtes Element $x_E \in X^{**}$ mit $\|x_E\| \leq \|f\|_{PL_1}$ so, daß für jedes $x^* \in X^*$ gilt*

$$x_E(x^*) = \int_E x^* \circ f(t)\, dt. \tag{1.4}$$

Der Beweis kann direkt aus [13], II.3, übernommen werden.

Definition 1.2.14 Ist $f : I \to X$ schwach meßbar mit $x^* \circ f \in L_1(I)$ für alle $x^* \in X^*$, so heißt f *Dunford integrierbar* . Das *Dunford Integral* von f bezüglich einer meßbaren Teilmenge E von I ist das eindeutig bestimmte Element $x_E \in X^{**}$ welches für alle $x^* \in X^*$ die Gleichung (1.4) erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall $D\sim\int_E f(t)\, dt = x_E$.

Gilt sogar $D\sim\int_E f(t)\, dt \in X$ für jede meßbare Teilmenge E von I, so heißt f *Pettis integrierbar* und wir schreiben $P\sim\int_E f(t)\, dt$ anstatt $D\sim\int_E f(t)\, dt$. Ist für jedes kompakte Teilintervall $J \subseteq I$ die Funktion $f_{|J}$ Pettis integrierbar, so heißt f lokal Pettis integrierbar.

Ist ein Banachraum X gegeben, so hat man häufig keinerlei Vorstellung über die Beschaffenheit des Bidualraumes X^{**}. Deshalb ist man weniger an Dunford integrierbaren Funktionen als vielmehr an Pettis integrierbaren Funktionen interessiert. Doch während die Dunford Integrierbarkeit einer Funktion im allgemeinen recht einfach nachgeprüft werden kann, sieht man einer Dunford integrierbaren Funktion meistens nicht an, ob sie Pettis integrierbar ist. Die folgende hinreichende Bedingung für die Pettis Integrierbarkeit einer Dunford integrierbaren Funktion hilft uns hier ein gutes Stück weiter. Der Beweis der nachfolgenden Proposition beruht wieder auf dem entsprechenden Resultat aus [13] für kompakte Intervalle.

Proposition 1.2.15 *Sei $f : I \to X$ Dunford integrierbar und $T : L_\infty(I) \to X^{**}$ sei definiert durch $Tg = D\sim\int_I g(t)f(t)\, dt$. Dann ist T ein beschränkter Operator und es gilt: Ist f meßbar und T schwach kompakt, so ist f Pettis integrierbar.*

Beweis Die Beschränktheit von T folgt sofort wegen

$$\|Tg\| \leq \|g\|_{L_\infty} \sup_{x^* \in U_{X^*}} |\int_I x^* \circ f(t)\, dt| \leq \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{PL_1}.$$

Sei nun f meßbar und der Operator T sei schwach kompakt. Ist I kompakt, so ist die Behauptung identisch mit Theorem II.3.8 (b) in [13]. Sei I nun nicht kompakt, also unbeschränkt, und $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ sei eine Folge kompakter Intervalle mit $\bigcup_{k=1}^\infty I_k = I$. Zu jedem der Intervalle I_k wird die Funktion $f_k = \chi_{I_k} f$ betrachtet. Diese Funktionen sind meßbar, da f meßbar ist, und die Dunford Integrierbarkeit von f impliziert die Dunford Integrierbarkeit der f_k. Somit können die zu f_k gehörenden Operatoren

$$T_k : L_\infty(I_k) \to X^{**}, \qquad g \mapsto D{\sim}\!\int_{I_k} g(t) f_k(t)\, dt$$

definiert werden. Diese Operatoren sind schwach kompakt, wie die folgende Überlegung zeigt: Für $g \in L_\infty(I_k)$ sei $E_k g$ definiert durch

$$E_k g(t) = \begin{cases} g(t) & \text{falls} \quad t \in I_k \\ 0 & \text{falls} \quad t \in I \setminus I_k \end{cases}.$$

Dann ist $E_k : L_\infty(I_k) \to L_\infty(I)$ stetig und linear und T_k läßt sich schreiben als Produkt $T_k = T \circ E_k$. Da das Produkt eines schwach kompakten Operators mit einem stetigen Operator schwach kompakt ist, ist die schwache Kompaktheit von T_k erwiesen.

Somit erfüllt f_k die Voraussetzungen dieser Proposition. Da I_k ein kompaktes Intervall ist, folgt die Pettis Integrierbarkeit von f_k. Wird

$$x_k = \int_{I_k} f_k(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt, so ist also $x_k \in X$. Zudem gilt $x_k = T\chi_{I_k}$ und die Folge $(\chi_{I_k})_{k \in \mathbf{N}}$ liegt in der Einheitskugel von $L_\infty(I)$. Da T schwach kompakt ist, besitzt die Folge (x_k) demnach eine schwach konvergente Teilfolge (x_{k_l}) in X. Sei $x = \sigma \sim \lim_{l \to \infty} x_{k_l}$. Dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \langle x^*, x\rangle &= \lim_{l\to\infty} \langle x^*, x_k\rangle = \lim_{l\to\infty} x^*\Big(P{\sim}\!\int_{I_k} f_k(t)\, dt\Big) \\ &= \lim_{l\to\infty} \int_{I_k} x^* \circ f_k(t)\, dt = \int_I x^* \circ f(t)\, dt \\ &= \langle x^*, D{\sim}\!\int_I f(t)\, dt\rangle. \end{aligned}$$

Dies beweist schließlich $D{\sim}\!\int_I f(t)\, dt = x \in X$ und also ist f Pettis integrierbar. $\equiv$

Die eben bewiesene hinreichende Bedingung für die Pettis Integrierbarkeit einer Funktion wird hauptsächlich zum Beweis des folgenden Korollars benötigt.

Folgerung 1.2.16 *Sei $1 < p < \infty$. Weiter sei $f : I \to X$ meßbar und es gelte $x^* \circ f \in L_p(I)$ für alle $x^* \in X^*$. Dann ist für jedes $g \in L_q(I)$ die Funktion $g \cdot f$ Pettis integrierbar.*

Beweis Aufgrund der Hölderschen Ungleichung ist für jedes f, welches die Voraussetzungen des Korollars erfüllt, und für jedes $g \in L_q(I)$ die Funktion $f \cdot g$ Dunford integrierbar. Da die Meßbarkeit von f die Meßbarkeit von $g \cdot f$ impliziert, haben wir aufgrund der vorhergehenden Proposition 1.2.15 nur noch die schwache Kompaktheit des Operators $T : L_\infty(I) \to X^{**}$ definiert durch $Th := D\sim\!\int_I h(t)(g \cdot f)(t)\, dt$ nachzuweisen.

Zum Beweis definieren wir Operatoren $S : L_\infty(I) \to L_q(I)$ durch $Sh = h \cdot g$ und $R : L_q(I) \to X^{**}$ durch $Rv = D\sim\!\int_I v(t)f(t)\, dt$. Dann gilt offensichtlich $T = R \circ S$, der Operator T faktorisiert also über dem reflexiven Banachraum $L_q(I)$ und ist somit schwach kompakt. $\equiv$

1.2.3 Das Riemann-Stieltjes Integral

Eine Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_k)$ des Intervalls I ist ein Tupel von Zahlen $t_0, \ldots, t_k \in I$ mit $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$. Wir sagen, die Feinheit einer Folge von Zerlegungen (Z_n) mit $Z_n = (t_{n,0}, \ldots, t_{n,k(n)})$ konvergiert gegen Null, und schreiben $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$, falls gilt:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sup_{l=1,\ldots,k(n)} t_{n,l} - t_{n,l-1} = 0$.

(2) Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist $t_{n,0} = a$, falls das Intervall I durch a nach unten begrenzt ist. Ist I nicht nach unten beschränkt, so wird $\lim_{n\to\infty} t_{n,0} = -\infty$ gefordert.

(3) Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist $t_{n,k(n)} = b$, falls das Intervall I durch b nach oben begrenzt ist. Ist I nicht nach oben beschränkt, so wird $\lim_{n\to\infty} t_{n,k(n)} = \infty$ gefordert.

Diese etwas umständliche Formulierung der Konvergenz der Feinheit einer Folge von Zerlegungen ermöglicht eine gemeinsame Behandlung des Riemann-Stieltjes Integrals auf beschränkten und auf unbeschränkten Intervallen.

Es seien $f : I \to \mathbf{C}$ und $\phi : I \to X$ eine komplexwertige und eine banachraumwertige Funktion. Ist $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ eine Zerlegung von I, so wird $\Sigma_Z(f, \phi) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1}))$ gesetzt.

Definition 1.2.17 Die Funktion f heißt *Riemann-Stieltjes integrierbar* bezüglich ϕ, falls ein $x \in X$ so existiert, daß für jede Folge von Zerlegungen Z_n des Intervalls I mit $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{Z_n}(f, \phi) = x.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_I f(t)\, d\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{Z_n}(f, \phi)$$

das *Riemann-Stieltjes Integral* von f bezüglich ϕ.

Ist $f \in C_0(I)$ und ist $\phi : I \to \mathbf{C}$ eine komplexwertige Funktion von beschränkter Variation, so existiert bekanntlich das komplexe Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ. Das erste Ziel besteht darin, ein entsprechendes Resultat für den Fall einer banachraumwertigen Funktion ϕ zu gewinnen.

Im weiteren Verlauf wird es sich als nützlich erweisen, jedem abgeschlossenen Intervall I von $\mathbf{R}$ eine Zahl $\beta(I)$ zuzuordnen. Ist das Intervall I nach unten beschränkt, so wird $\beta(I)$ als untere Grenze von I gewählt, für das Intervall $I = \mathbf{R}$ wird $\beta(I) = 0$ gesetzt.

Definition 1.2.18 Die *Variation* $\|\phi\|_{V_1}$ einer Funktion $\phi : I \to X$ ist definiert als

$$\|\phi\|_{V_1} = \sup_Z \sum_{k=1}^{n} \|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z = (t_0, \dots, t_n)$ von I genommen wird. Ist $\|\phi\|_{V_1} < \infty$, so heißt ϕ *Funktion von beschränkter Variation.* Eine Funktion ϕ von beschränkter Variation wird *normiert* genannt, falls ϕ linksseitig stetig im Inneren von I ist mit $\phi(\beta(I)) = 0$. Der Raum der normierten Funktionen von beschränkter Variation auf I wird mit $V_1(I, X)$ bezeichnet.

Die Semivariation $\|\phi\|_{PV_1}$ von ϕ wird definiert durch

$$\|\phi\|_{PV_1} = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \phi\|_{V_1}.$$

ϕ wird *Funktion von beschränkter Semivariation* genannt, falls die Semivariation von ϕ endlich ist. $PV_1(I, X)$ bezeichnet den Raum der Funktionen von beschränkter Semivariation ϕ mit der Eigenschaft, daß für alle $x^* \in X^*$ die komplexwertige Funktion $x^* \circ \phi$ eine normierte Funktion von beschränkter Variation ist.

Bemerkung 1.2.19 (1) Sei $\phi : I \to X$ von beschränkter Variation. Dann besitzt ϕ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen und überall in I existieren der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von ϕ (siehe [21]). Der Funktion ϕ kann daher eindeutig eine normierte Funktion von beschränkter Variation ψ zugeordnet werden, indem zuerst definiert wird $\tilde{\psi}(t) = \lim_{s \to t^-} \phi(s)$ für alle t im Inneren von I. Ist $a \in \mathbf{R}$ untere Grenze von I bzw. $b \in \mathbf{R}$ obere Grenze von I, so wird $\tilde{\psi}(a) = \phi(a)$ bzw. $\tilde{\psi}(b) = \phi(b)$ gesetzt. Nun wird für $t \in I$ festgesetzt $\psi(t) = \tilde{\psi}(t) - \tilde{(}\beta(I))$. In anderen Worten besagen diese Überlegungen, daß jede Funktion von beschränkter Variation „normiert“ werden kann.

(2) In der Literatur werden die Begriffe Variation und Semivariation einer banachraumwertigen Funktion nicht einheitlich verwendet. So nennen Hille und Phillips [21] eine Funktion f von beschränkter Variation, falls

$$\sup \Big\| \sum_{k=1}^{n} f(b_k) - f(a_k) \Big\| < \infty,$$

wobei das Supremum über alle paarweise nicht überlappenden Teilintervalle $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \dots n)$ von I genommen wird. In der Tat zeigen sie, daß dieser Begriff der beschränkten Variation mit dem hier definierten Begriff der beschränkten Semivariation übereinstimmt. Dagegen nennen sie eine Funktion von starker beschränkter Variation, wenn sie in dem hier gegebenen Sinn von beschränkter Variation ist.

Die in 1.2.18 gegebenen Definitionen korrespondieren zu den entsprechenden Begriffen für Vektormaße, wie sie in [13] eingeführt werden und sie stimmen mit den Bezeichnungen in [2] überein.

Mit dem Beweis der nächsten Proposition ist das oben anvisierte erste Ziel erreicht.

Proposition 1.2.20 *Sei $f \in C_0(I)$ und $\phi : I \to X$ eine Funktion von beschränkter Semivariation. Dann existiert das Riemann- Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ und es gilt*

$$\Big\| \int_I f(t)\, d\phi(t) \Big\| \leq \|f\|_\infty \|\phi\|_{PV_1}.$$

Beweis Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt wird ein Element in X konstruiert, von welchem im zweiten Schritt nachgewiesen wird, daß es das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ ist.

<u>1. Schritt:</u> Für jedes Teilintervall $[a, b)$ von I sei $\widetilde{T}\chi_{[a,b)}$ definiert durch $\widetilde{T}\chi_{[a,b)} = \phi(b) - \phi(a)$[1]. Es sei $S_\infty(I)$ der Abschluß von $S(I)$ bezüglich der Supremumsnorm. Da die charakteristischen Funktionen der Form $\chi_{[a,b)}$ eine algebraische Basis für $S(I)$ bilden, läßt sich $\widetilde{T}$ eindeutig linear fortsetzen auf $S(I)$. Sei $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)}$ eine einfache Funktion in $S(I)$. Dann läßt sich die Norm von $\widetilde{T}f$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}f\| &= \sup_{x^* \in U_{X^*}} |x^* \sum_{k=1}^n c_k T\chi_{[a_k,b_k)}| \\
&\leq \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sup_{k=1,\ldots,n} |c_k| \sum_{k=1}^n |x^*(\phi(b_k) - \phi(a_k))| \leq \|f\|_\infty \|\phi\|_{PV_1}.
\end{aligned}$$

Der Operator $\widetilde{T} : S(I) \to X$ erweist sich also als beschränkt, wenn $S(I)$ mit der Supremumsnorm versehen wird und somit existiert eine eindeutig bestimmte, normerhaltende und lineare Fortsetzung von $\widetilde{T}$ auf $S_\infty(I)$, die aufgrund der Eindeutigkeit wieder mit $\widetilde{T}$ bezeichnet werden kann. Da sich jede Funktion aus $C_0(I)$ durch einfache Funktionen gleichmäßig approximieren läßt, ist $C_0(I)$ in $S_\infty(I)$ enthalten. Für jedes $f \in C_0(I)$ wurde nun das Element $\widetilde{T}f \in X$ konstruiert, welches sich im zweiten Schritt als das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ erweisen wird.

<u>2. Schritt:</u> Ist $f \in C_0(I)$ und $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ eine Zerlegung von I, so wird definiert

$$f_Z = \sum_{k=1}^n f(t_k)\chi_{[t_{k-1},t_k)}.$$

Dann ist offensichtlich f_Z eine einfache Funktion und es gilt $\widetilde{T}f_Z = \Sigma_Z(f, \phi)$. Außerdem sieht man sofort, daß für jede Folge von Zerlegungen Z_n mit $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_{Z_n} = f$. Darüberhinaus ist diese Konvergenz gleichmäßig. Dies zusammen mit der Stetigkeit von $\widetilde{T}$ erklärt die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{Z_n}(f, \phi) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}f_{Z_n} = \widetilde{T}f,$$

was zu zeigen war. $\equiv$

Aus obiger Proposition 1.2.20 ergibt sich unmittelbar eine Folgerung.

[1] Es sei daran erinnert, daß $\chi_{[a,b)}$ die charakteristische Funktion des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ bedeutet, sofern das Intervall I durch $b \in \mathbf{R}$ nach oben begrenzt ist (siehe Seite 8).

Folgerung 1.2.21 *Sei $\phi : I \to X$ eine Funktion von beschränkter Semivariation. Der Operator $T : C_0(I) \to X$, der jedem $f \in C_0(I)$ das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ zuordnet, ist beschränkt durch die Semivariation von ϕ.*

Abgeschlossen wird dieser Paragraph mit einer nützlichen Rechenregel.

Proposition 1.2.22 *Sei $g \in L_1(I,X)$ und $\phi : I \to X$ sei definiert durch $\phi(t) = \int_{\beta(I)}^t g(u)\,du$. Dann ist $\phi \in V_1(I,X)$, und für alle $f \in C_0(I)$ stimmt das Riemann-Stieltjes Integral $\int_I f(t)\,d\phi(t)$ überein mit dem Bochner Integral $\int_I f(t)g(t)\,dt$.*

Beweis Sei $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ eine Zerlegung des Intervalls I. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \Big\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(u)\,du \Big\| \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g(u)\|\,du \leq \|g\|_{L_1}.$$

Folglich ist $\|\phi\|_{V_1} \leq \|g\|_{L_1}$.

Wie im Beweis von Proposition 1.2.20 wird für $[a,b) \subseteq I$ definiert $\tilde{T}\chi_{[a,b)} = \phi(b) - \phi(a)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige und lineare Fortsetzung von $\tilde{T}$ zu einem Operator $\tilde{T} : S_\infty(I) \to X$ und für $f \in C_0(I)$ gilt $\int_I f(t)\,d\phi(t) = \tilde{T}f$. Dies wurde im Beweis von Proposition 1.2.20 gezeigt. Andererseits definiert g einen stetigen Operator $T : L_\infty(I) \to X$, indem festgesetzt wird $Tf = \int_I f(t)g(t)\,dt$. Außerdem gilt für einfache Funktionen $f = \sum_{k=1}^n c_k\chi_{[a_k,b_k)}$ in $S(I)$

$$\tilde{T}f = \sum_{k=1}^n c_k(\phi(b_k) - \phi(a_k)) = \sum_{k=1}^n c_k \int_{a_k}^{b_k} g(u)\,du = \int_I f(u)g(u)\,du = Tf.$$

Die stetigen Operatoren T und $\tilde{T}$ stimmen also auf der in $S_\infty(I)$ dichten Teilmenge $S(I)$ überein, also stimmen sie auch auf $S_\infty(I)$ überein. Insbesondere gilt für alle $f \in C_0(I) \subseteq S_\infty(I)$

$$\int_I f(t)\,d\phi(t) = \tilde{T}f = Tf = \int_I f(t)g(t)\,dt.$$

$\equiv$

1.3 Stieltjes Repräsentation von Operatoren auf L_q und C_0

Sei $1 \leq q < \infty$. Gegeben sei ein beschränkter Operator $T : L_q(I) \to X$. Ist $X = \mathbf{C}$, so ist T ein lineares Funktional auf $L_q(I)$ und für solche linearen Funktionale existiert bekanntermaßen eine Darstellung

$$Tg = \int_I g(t)h(t)\,dt \qquad (g \in L_q(I)), \tag{1.5}$$

wobei h eine eindeutig durch das lineare Funktional T bestimmte Funktion in $L_p(I)$ ist. Umgekehrt wird für jedes $h \in L_p(I)$ durch (1.5) ein lineares Funktional T auf $L_q(I)$

definiert. Darüberhinaus stimmen die L_p-Norm von h und die Operatornorm von T überein.

In diesem Abschnitt wird eine (1.5) entsprechende Repräsentation für Operatoren $T : L_q(I) \to X$ vorgestellt. Die Rolle, welche die Funktionen $h \in L_p(I)$ im skalaren Fall spielen, werden von den Funktionen $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Semivariation übernommen und an die Stelle der Repräsentation (1.5) durch ein Lebesgue Integral tritt ein dem Riemann-Stieltjes Integral verwandtes Integral

$$Tg = \int_I g(t)\, d\phi(t) \qquad (g \in L_q(I)).$$

1.3.1 Repräsentation von Operatoren auf L_q

Definition 1.3.1 Sei $\phi : I \to X$ eine Funktion. Die *p-Variation* $\|\phi\|_{V_p}$ von ϕ ist für $p < \infty$ definiert als

$$\|\phi\|_{V_p} = \sup_Z \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \Big)^{1/p},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ des Intervalls I genommen wird. Für $p = \infty$ wird

$$\|\phi\|_{V_\infty} = \sup \Big\{ \frac{\|\phi(s) - \phi(t)\|}{s - t} : s, t \in I,\ t < s \Big\}$$

festgesetzt. Ist $\|\phi\|_{V_p} < \infty$, so heißt φ *Funktion von beschränkter p-Variation* . Die Funktionen von beschränkter ∞-Variation werden auch als *Lipschitz stetige Funktionen* bezeichnet. Die *p-Semivariation* $\|\phi\|_{PV_p}$ von ϕ wird definiert durch

$$\|\phi\|_{PV_p} = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \phi\|_{V_p}.$$

Ist $\|\phi\|_{PV_p} < \infty$, so heißt ϕ *Funktion von beschränkter p-Semivariation.*

Ist $p > 1$, so ist $V_p(I, X)$ der Raum der Funktionen $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Variation mit $\phi(\beta(I)) = 0$ und $PV_p(I, X)$ ist der Raum der Funktionen $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Semivariation $\phi(\beta(I)) = 0$.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden innerhalb eines Abschnitts nur selten mehrere verschiedene Intervalle auftauchen. Doch in diesen Fällen können die Bezeichnungen $\|\phi\|_{V_p}$ für die p-Variation beziehungsweise $\|\phi\|_{PV_p}$ für die p-Semivariation einer Funktion $\phi : I \to X$ zu unpräzise sein und wir werden ausführlich $\|\phi\|_{V_p(I)}$ beziehungsweise $\|\phi\|_{PV_p(I)}$ schreiben.

Der Name p-Variation für $\|\cdot\|_{V_p}$ wird durch die Tatsache motiviert, daß im Fall $p = 1$ die p-Variation von ϕ gerade die Variation von ϕ ist.

Sei I wie üblich ein abgeschlossenes Intervall und es sei $t \in I$. Es wird festgesetzt

$$\chi_t = \begin{cases} \chi_{[\beta(I),t)} & \text{falls } t > \beta(I), \\ 0 & \text{falls } t = \beta(I), \\ -\chi_{[t,\beta(I))} & \text{falls } t < \beta(I). \end{cases}$$

Der Ausdruck χ_t hängt zwar vom Intervall ab, in dem wir uns bewegen, aber dies ist der Bezeichnung nicht anzusehen. Da das Intervall in den Fällen, in denen wir diese Bezeichnung bemühen, immer eindeutig aus dem Kontext hervorgeht, wird dies jedoch nicht zu Komplikationen führen. Insbesondere bedeutet auch hier wieder χ_t die charakteristische Funktion des abgeschlossenen Intervalls $[\beta(I), t]$, sofern t eine obere Grenze von I ist. Dies wird bei der Repräsentation von Operatoren auf C_0 zu beachten sein.

Sei $f : I \to X$ eine lokal Pettis integrierbare Funktion. Für $t \in I$ wird definiert

$$\mathcal{I}f(t) = P\sim\int_{\beta(I)}^{t} f(u)\,du = P\sim\int_I \chi_t(u) f(u)\,du.$$

Hier seien die beiden links stehenden Ausdrücke durch den rechten Ausdruck festgelegt.

Lemma 1.3.2 (i) *Für jedes $f \in L_p(I, X)$ ist $\mathcal{I}f : I \to X$ eine Funktion von beschränkter p-Variation und es gilt $\|\mathcal{I}f\|_{V_p} \leq \|f\|_{L_p}$.*

(ii) *Ist $f : I \to X$ eine meßbare Funktion mit $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ f\|_{L_p} = M < \infty$, so ist $\mathcal{I}f : I \to X$ von beschränkter p-Semivariation und es gilt $\|\mathcal{I}f\|_{PV_p} \leq M$.*

Beweis (i) Sei $f \in L_p(I, X)$ und $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ eine Zerlegung des Intervalls I. Dann folgt für $p < \infty$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\mathcal{I}f(t_k) - \mathcal{I}f(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} &= \sum_{k=1}^{n} \Big\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(u)\,du \Big\|^p (t_k - t_{k-1})^{1-p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(u)\|^p\,du \Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} 1\,du \Big)^{p/q} (t_k - t_{k-1})^{1-p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(u)\|^p\,du \\
&\leq \|f\|_{L_p}^p.
\end{aligned}$$

Hier wurde beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile die Höldersche Ungleichung angewendet. Die Terme in der zweiten und dritten Zeile stimmen wegen $p - 1 = p/q$ überein. Wird auf beiden Seiten dieser Ungleichung die p-te Wurzel gezogen, so liefert der Übergang zum Supremum über alle Zerlegungen Z von I die Behauptung $\|\mathcal{I}f\|_{V_p} \leq \|f\|_{L_p}$.

Ist $p = \infty$, so gilt für alle $s, t \in I$ mit $s < t$

$$\frac{\|\mathcal{I}f(t) - \mathcal{I}f(s)\|}{t - s} \leq \frac{1}{t - s} \int_s^t \|f(u)\|\,du \leq \|f\|_{L_\infty}$$

und folglich $\|\mathcal{I}f\|_{V_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty}$.

(ii) Sei $f : I \to X$ meßbar und es gelte $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ f\|_{L_p} = M < \infty$. Nach Folgerung 1.2.16 ist f dann lokal Pettis integrierbar und aus (i) folgt

$$\|\mathcal{I}f\|_{PV_p} = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \mathcal{I}f\|_{V_p} \leq \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ f\|_{L_p} = M.$$

$\equiv$

Bemerkung 1.3.3 Ist $p = \infty$, so überlegt man sich leicht, daß die Begriffe p-Variation und p-Semivariation identisch sind. Dagegen ist für $p < \infty$ der Raum der Funktionen von beschränkter p-Variation echt enthalten im Raum der Funktionen von beschränkter p-Semivariation, sofern nur die Dimension des zugrunde liegenden Banachraums X unendlich ist. Dies ist folgendermaßen einzusehen:

Sei X ein Banachraum, dessen Dimension nicht endlich ist. Nach dem Satz von Dvoretsky-Rogers (siehe etwa [13]) existiert in jedem unendlich dimensionalen Banachraum eine Folge (x_k) in X mit $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$ und $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \infty$. Zudem kann o.B.d.A. $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$ angenommen werden. Wir wählen nun eine Folge (I_k) paarweise disjunkter Teilintervalle von I und setzen $g_k = \mu(I_k)^{-1/p} \chi_{I_k}$. Sei $y_k = x_k \|x_k\|^{-1/q}$ und $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\mathcal{I} g_k)$. Dann ergibt sich aus Proposition 1.3.2

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{PV_p}^p &\leq \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^{\infty} \|x^* \circ y_k g_k\|_{L_p}^p \\ &= \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|^p \|x_k\|^{-p/q} \leq \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty, \end{aligned}$$

aber $\|\phi\|_{V_p} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \infty$.

Beispiel 1.3.4 Sei $1 \leq r < \infty$ und $\phi : \mathbf{R} \to L_r(\mathbf{R})$ sei definiert durch

$$\phi(t) = \chi_t = \begin{cases} \chi_{[\beta(I),t)} & \text{falls } t > \beta(I), \\ 0 & \text{falls } t = \beta(I), \\ -\chi_{[t,\beta(I))} & \text{falls } t < \beta(I). \end{cases}$$

Für welche p ist ϕ von beschränkter p-Variation bzw. beschränkter p-Semivariation? In diesem Beispiel wird die Funktion ϕ auf p-Variation untersucht. Dann berechnen sich die p-ten Potenzen der Normen von $\phi(t_2) - \phi(t_1)$ für $t_1 < t_2$ zu

$$\|\phi(t_2) - \phi(t_1)\|^p = \|\chi_{[t_1,t_2)}\|_{L_r}^p = (t_2 - t_1)^{p/r}.$$

Folglich gilt

$$\frac{\|\phi(t_2) - \phi(t_1)\|_{L_r}^p}{(t_2 - t_1)^{p-1}} = (t_2 - t_1)^{p(1/r-1)+1}.$$

Es gibt nun die folgenden drei Fälle, welche alle zu dem Ergebnis führen, daß ϕ nicht von beschränkter p-Variation ist.

(1) Sei $p(1/r - 1) + 1 < 0$, d.h $q < r$. Dann geht $(t_2 - t_1)^{p(1/r-1)+1}$ gegen unendlich für $t_1 \to t_2$.

(2) Sei $p(1/r - 1) + 1 = 0$, d.h. $q = r$. Dann gilt $(t_2 - t_1)^{p(1/r-1)+1} = 1$ und also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|_{L_r}^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} = n.$$

(3) Sei $p(1/r - 1) + 1 > 0$, d.h. $q > r$. Dann geht $(t_2 - t_1)^{p(1/r-1)+1}$ gegen unendlich für $t_1 \to -\infty$ und $t_2 \to \infty$.

Im weiter unten folgenden Beispiel 1.3.8 werden wird sehen, daß ϕ genau dann von beschränkter p-Semivariation ist, falls $q = r$, und diese Aussage gilt auch für den Fall $p = \infty$.

Für den Rest dieses Paragraphen wird die Generalvoraussetzung $p > 1$ gemacht. Die nächste Proposition 1.3.5 wird zeigen, daß $PV_p(I, X)$ mit dem Raum der stetigen Operatoren $\mathbf{L}(L_q(I), X)$ identifiziert werden kann. Das Ziel, jeden Operator $T : L_q(I) \to X$ durch eine Funktion von beschränkter p-Semivariation zu repräsentieren, wird mit dem Beweis dieser Proposition erreicht sein.

Diese Repräsentation will sorgfältig vorbereitet sein. Sei $\phi \in PV_p(I, X)$. Dann wird für jede einfache Funktion $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)}$ in $S(I)$ festgesetzt

$$T_\phi f = \sum_{k=1}^n c_k(\phi(b_k) - \phi(a_k)).$$

Auf diese Weise wird ein Operator $T_\phi : S(I) \to X$ definiert. Die folgende Abschätzung zeigt, daß dieser Operator beschränkt ist, wenn der Raum $S(I)$ mit der L_q-Norm versehen wird. Denn aufgrund der Hölderschen Ungleichung ergibt sich für $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|T_\phi f\| &= \sup_{x^* \in U_{X^*}} \Big| \sum_{k=1}^n c_k (x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k) \Big| \\
&\le \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^n |c_k| (b_k - a_k)^{1/q} \frac{|x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k)|}{(b_k - a_k)^{1/q}} \\
&\le \Big(\sum_{k=1}^n |c_k|^q (b_k - a_k) \Big)^{1/q} \sup_{x^* \in U_{X^*}} \Big(\sum_{k=1}^n \frac{|x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k)|^p}{(b_k - a_k)^{p-1}} \Big)^{1/p} \\
&\le \|f\|_{L_q} \|\phi\|_{PV_p}.
\end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde wieder $p/q = p - 1$ ausgenutzt. Ist $p = \infty$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|T_\phi f\| &\le \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sum_{k=1}^n |c_k| |x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k)| \\
&\le \sum_{k=1}^n |c_k| (b_k - a_k) \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sup_{k=1,\dots,n} \frac{|x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k)|}{b_k - a_k} \\
&\le \|f\|_{L_1} \|\phi\|_{PV_\infty}.
\end{aligned}$$

Da der Raum der einfachen Funktionen $S(I)$ dicht in $L_q(I)$ liegt für $1 \le q < \infty$, existiert eine eindeutig bestimmte, normerhaltende lineare Fortsetzung von T_ϕ auf $L_q(I)$, die wegen der Eindeutigkeit wieder mit T_ϕ bezeichnet werden kann. Auf diese Weise wird jedem $\phi \in PV_p(I, X)$ ein stetiger Operator $T_\phi : L_q(I) \to X$ mit $\|T_\phi\| \le \|\phi\|_{PV_p}$ zugeordnet.

Ist umgekehrt ein stetiger Operator $T : L_q(I) \to X$ gegeben, so definieren wir $\phi_T : I \to X$ durch $\phi_T(t) = T\chi_t$. Dann ist für jedes $x^* \in U_{X^*}$

$$\langle x^*, \phi_T(t) \rangle = \langle x^*, T\chi_t \rangle = \langle T^* x^*, \chi_t \rangle = \int_I (T^* x^*)(u) \chi_t(u)\, du = \mathcal{I}(T^* x^*).$$

Bei dieser Rechnung wurde $T^*x^* \in L_q(I)^*$ mit einer Funktion in $L_p(I)$ identifiziert. Nach Lemma 1.3.2 ist demnach

$$\|x^* \circ \phi_T\|_{V_p} \leq \|T^*x^*\|_{L_p} \leq \|T^*\| = \|T\|$$

und folglich $\|\phi_T\|_{PV_p} \leq \|T\|$.

Proposition 1.3.5 *Die Abbildung, die jeder Funktion $\phi \in PV_p(I,X)$ den Operator $T_\phi : L_q(I) \to X$ zuordnet, ist ein isometrischer Isomorphismus von $PV_p(I,X)$ auf $\mathbf{L}(L_q(I),X)$. Seine Inverse ist gegeben durch die Abbildung, die jedem Operator $T \in \mathbf{L}(L_q(I),X)$ die Funktion $\phi_T : I \to X$ zuordnet.*

Beweis Aufgrund der ausführlichen Vorarbeit ist der Satz bewiesen, wenn gezeigt wird, daß die angegebenen Abbildungen zueinander invers sind. Sei $\phi \in PV_p(I,X)$ und setze $T = T_\phi$. Dann ist für $t \in I$

$$\phi_T(t) = T\chi_t = \phi(t) - \phi(\beta(I)) = \phi(t).$$

Somit gilt $\phi_{T_\phi} = \phi$. Ist umgekehrt $T \in \mathbf{L}(L_q(I),X)$ gegeben und wird $\phi = \phi_T$ gesetzt, so gilt für alle $a,b \in I$ mit $a < b$

$$T_\phi \chi_{[a,b)} = \phi(b) - \phi(a) = T\chi_b - T\chi_a = T\chi_{[a,b)}.$$

Die Operatoren T_ϕ und T stimmen also auf der in $L_q(I)$ totalen Teilmenge der charakteristischen Funktionen halboffener Intervalle überein und somit ist $T_{\phi_T} = T_\phi = T$. $\equiv$

Nun wurde zwar jedem stetigen Operator $T : L_q(I) \to X$ umkehrbar eindeutig eine Funktion ϕ von beschränkter p-Semivariation zugeordnet, aber in der Überschrift zu diesem Abschnitt wurde die „Stieltjes Repräsentation von Operatoren auf L_q" angekündigt und diese Bezeichnung gilt es zu rechtfertigen. Dies leistet die nächste Proposition.

Proposition 1.3.6 *Sei I kompakt. Ist $\phi \in PV_p(I,X)$ und $f \in L_q(I)$ eine stetige Funktion, so existiert das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ und stimmt mit $T_\phi f$ überein.*

Beweis Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I mit $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$. Ist Z_n gegeben durch $Z_n = (t_{n,1}, \ldots t_{n,k(n)})$, so wird für $n \in \mathbf{N}$ definiert

$$f_n = \sum_{i=1}^{k(n)} f(t_{n,i})\chi_{[t_{n,i-1},t_{n,i})}.$$

Da f stetig und I kompakt ist, konvergiert die Folge einfacher Funktionen (f_n) gegen f für $n \to \infty$ in der Norm in L_q. Also gilt $\lim_{n\to\infty} T_\phi f_n = T_\phi f$ wegen der Stetigkeit von T_ϕ. Aber $T_\phi f_n$ stimmt mit der Summe $\Sigma_{Z_n}(f,\phi)$ überein und somit ist die Behauptung bewiesen. $\equiv$

Definition 1.3.7 Sei $f \in L_q(I)$ und $\phi \in PV_p(I,X)$. Das *Stieltjes Integral* von f bezüglich ϕ wird definiert durch

$$\int_I f(t)\,d\phi(t) = T_\phi f.$$

In diesem Sinn besitzt also jeder Operator $T \in \mathbf{L}(L_q(I),X)$ eine Stieltjes Repräsentation $Tf = \int_I f(t)\,d\phi(t)$ mit einem eindeutig bestimmten ϕ von beschränkter p-Semivariation. Die Funktion ϕ nennen wir die *repräsentierende Funktion* von T.

Beispiel 1.3.8 Wie im Beispiel 1.3.4 wird wieder für $1 \leq r \leq \infty$ die durch $\phi(t) = \chi_t$ definierte Funktion $\phi : \mathbf{R} \to L_r(\mathbf{R})$ betrachtet. Der Operator $T_\phi : S(\mathbf{R}) \to L_r(\mathbf{R})$ ist dann definiert durch

$$T_\phi\Big(\sum_{k=1}^n c_k\chi_{[a_k,b_k)}\Big) = \sum_{k=1}^n c_k(\phi(b_k) - \phi(a_k)).$$

Nun ist aber $\phi(b_k) - \phi(a_k) = \chi_{[a_k,b_k)}$, d.h. $T_\phi : S(\mathbf{R}) \to L_r(\mathbf{R})$ ist die identische Einbettung von $S(\mathbf{R})$ in $L_r(\mathbf{R})$. Wird $S(\mathbf{R})$ mit der L_q-Norm versehen, so besagt die soeben bewiesene Proposition 1.3.5, daß die Einbettung

$$T_\phi : (S(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{L_q}) \to (L_r(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{L_r})$$

genau dann stetig ist, falls ϕ von beschränkter p-Semivariation ist. Andererseits ist diese Einbettung genau dann stetig, falls $q = r$. Das beweist die am Schluß des vorhergehenden Beispiels 1.3.4 gemachte Aussage, daß ϕ genau dann von beschränkter p-Semivariation ist, falls $q = r$. In diesem Fall ist $T_\phi = Id_{|L_r}$, d.h. für jedes $g \in L_r(\mathbf{R}) = L_q(\mathbf{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,d\phi(t) = g.$$

Ist das zugrunde liegende Intervall kompakt, so ist die Einbettung

$$T_\phi : (S(I), \|\cdot\|_{L_q}) \to (L_r(I), \|\cdot\|_{L_r})$$

genau dann stetig, falls $q \geq r$. Somit ist $\phi_{|I} : I \to L_r(\mathbf{R})$ genau dann von beschränkter p-Semivariation, falls $q \geq r$.

Abgeschlossen wird dieser Paragraph mit einer sehr nützlichen Rechenregel.

Proposition 1.3.9 *Sei $f : I \to X$ eine meßbare Funktion mit $\sup_{x^*\in U_{X^*}} \|x^* \circ f\|_{L_p} = M < \infty$. Wird $\phi = \mathcal{I}f$ gesetzt, so gilt für alle $g \in L_q(I)$*

$$\int_I g(t)\,d\phi(t) = P\!\sim\!\!\int_I g(t)f(t)\,dt.$$

Beweis Es sei daran erinnert, daß nach Folgerung 1.2.16 für jedes $g \in L_q(I)$ das Pettis Integral $P\!\sim\!\!\int_I g(t)f(t)\,dt$ existiert und nach Lemma 1.3.2 (ii) ist $\phi = \mathcal{I}f$ von beschränkter p-Semivariation, so daß auch das Stieltjes Integral $\int_I g(t)\,d\phi(t)$ für alle $g \in L_q(I)$ definiert ist. Für jedes $g \in L_q(I)$ gilt

$$\|P\sim\int_I g(t)f(t)\,dt\| \leq \sup_{x^* \in U_{X^*}} \int_I |g(t)||x^* \circ f(t)|\,dt \leq \|g\|_{L_q} \cdot M.$$

Zudem stimmt die angegebene Rechenregel für charakteristische Funktionen halboffener Intervalle, denn

$$\int_I \chi_{[a,b)}(u)\,d\phi(u) = \phi(b) - \phi(a) = P\sim\int_I \chi_{[a,b)}(u)f(u)\,du.$$

Die auf L_q definierten Operatoren $g \mapsto \int_I g(t)\,d\phi(t)$ und $g \mapsto P\sim\int_I g(t)f(t)\,dt$ sind also beide stetig und stimmen auf der in $L_q(I)$ totalen Teilmenge $\{\chi_{[a,b)} : a, b \in I,\ a < b\}$ überein. Dies beweist die Rechenregel für alle $f \in L_q(I)$. $\equiv$

1.3.2 Funktionen von beschränkter p-Variation

Es ist klar, daß jede Funktion von beschränkter p-Variation von beschränkter p-Semivariation ist. Somit ist die Menge der Operatoren mit einer repräsentierenden Funktion $\phi \in V_p(I,X)$ eine Teilmenge von $\mathbf{L}(L_q(I),X)$. Dieser Paragraph gibt Auskunft darüber, welche Bedingungen an einen Operator $T : L_q(I) \to X$ hinreichend und notwendig sind, um von einem ϕ von beschränkter p-Variation repräsentiert zu werden. Diese Auskunft wird jedoch nur für die Fälle $1 < p < \infty$ gegeben. Dabei werden die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ aus verschiedenen Gründen ausgespart:

Der Fall $p = 1$ wurde bereits in Proposition 1.3.5 ausgespart, weil der Raum $PV_1(I,X)$ eine andere Behandlung als die Räume $PV_p(I,X)$ für $p < \infty$ erfordert. Dieser Untersuchung ist der nachfolgende Paragraph gewidmet.

Der Fall $p = \infty$ wird dagegen in diesem Paragraphen nicht behandelt, weil die Räume $PV_\infty(I,X)$ und $V_\infty(I,X)$ übereinstimmen. Die Frage, welche Operatoren $T : L_1(I) \to X$ von einer Funktion in $V_\infty(I,X)$ repräsentiert werden, wurde also schon in Proposition 1.3.5 beantwortet und die Antwort lautete, daß dies alle beschränkten Operatoren $T : L_1(I) \to X$ sind. Für den Rest dieses Paragraphen gilt immer $1 < p < \infty$.

Sei $\phi : I \to X$ eine Funktion, deren Variation in jedem kompakten Teilintervall von I beschränkt ist. Dann bezeichnet $\mathrm{Var}_\phi([a,b])$ für jedes kompakte Teilintervall $[a,b] \subseteq I$ die Variation von ϕ im Intervall $[a,b]$, d.h. $\mathrm{Var}_\phi([a,b]) = \|\chi_{[a,b]}\phi\|_{V_1[a,b]}$. Die Funktion $\mathrm{Var}_\phi : I \to \mathbf{R}$ wird definiert durch

$$\mathrm{Var}_\phi(t) = \begin{cases} \mathrm{Var}_\phi([\beta(I),t]), & \text{falls } t > \beta(I), \\ 0, & \text{falls } t = \beta(I), \\ -\mathrm{Var}_\phi([t,\beta(I)]), & \text{falls } t < \beta(I). \end{cases}$$

Eine Funktion $\phi : I \to X$ heißt *absolut stetig* in I, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, daß für jede Wahl endlich vieler paarweise nicht überlappender Teilintervalle $[a_k, b_k]$ $(k = 1,\ldots,n)$ von I mit $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ gilt $\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| < \varepsilon$.

Lemma 1.3.10 *Sei $\phi \in V_p(I,X)$. Dann ist ϕ absolut stetig in I und von beschränkter Variation in jedem kompakten Teilintervall von I. Ferner gilt $\|\phi\|_{V_p} = \|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_p}$.*

Beweis Seien $[a_k,b_k] \subseteq I$ $(k=1,\dots,n)$ paarweise nicht überlappende Teilintervalle von I. Dann gilt aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k)-\phi(a_k)\| &= \sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(b_k)-\phi(a_k)\|}{(b_k-a_k)^{1/q}}(b_k-a_k)^{1/q} \\ &\le \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(b_k)-\phi(a_k)\|^p}{(b_k-a_k)^{p-1}}\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n b_k-a_k\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k)-\phi(a_k)\| \le \|\phi\|_{V_p}\Big(\sum_{k=1}^n b_k-a_k\Big)^{1/q}. \tag{1.6}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Ist $\phi = 0$, so gibt es nichts zu zeigen. Andernfalls werde $\delta = \|\phi\|_{V_p}^{-q}\varepsilon^q$ gesetzt. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k)-\phi(a_k)\| < \varepsilon,$$

falls $\sum_{k=1}^n (b_k-a_k) < \delta$. Das beweist die absolute Stetigkeit von ϕ in I.

Sei $[a,b] \subseteq I$ ein beliebiges kompaktes Teilintervall von I und $Z = (t_0,\dots,t_n)$ sei eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Dann sind die Intervalle $[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,\dots,n)$ paarweise nicht überlappend. Mit Gleichung (1.6) folgt also

$$\sum_{k=1}^n \|\phi(t_k)-\phi(t_{k-1})\| \le \|\phi\|_{V_p([a,b])}\Big(\sum_{k=1}^n t_k-t_{k-1}\Big)^{1/q} \le \|\phi\|_{V_p([a,b])}(b-a)^{1/q}.$$

Das beweist die Beschränktheit der Variation im Intervall $[a,b]$.

Insbesondere gilt $\mathrm{Var}_\phi(b)-\mathrm{Var}_\phi(a) \le \|\phi\|_{V_p([a,b])}(b-a)^{1/q}$. Sei nun $Z=(t_0,\dots,t_n)$ eine Zerlegung von I. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{(\mathrm{Var}_\phi(t_k)-\mathrm{Var}_\phi(t_{k-1}))^p}{(t_k-t_{k-1})^{p-1}} \le \sum_{k=1}^n \|\phi\|^p_{V_p([t_{k-1},t_k])} = \|\phi\|^p_{V_p([t_0,t_n])} \le \|\phi\|^p_{V_p(I)}.$$

Der Beweis der umgekehrten Ungleichung ist erheblich einfacher. Wir bemerken zuerst, daß für alle $s,t\in I$ mit $s<t$ die Ungleichung $\|\phi(t)-\phi(s)\| \le \mathrm{Var}_\phi(t)-\mathrm{Var}_\phi(s)$ besteht. Daher folgt für jede Zerlegung $Z=(t_0,\dots,t_n)$ des Intervalls I

$$\sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(t_k)-\phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k-t_{k-1})^{p-1}} \le \sum_{k=1}^n \frac{(\mathrm{Var}_\phi(t_k)-\mathrm{Var}_\phi(t_{k-1}))^p}{(t_k-t_{k-1})^{p-1}} \le \|\mathrm{Var}_\phi\|^p_{V_p}.$$

$\equiv$

Lemma 1.3.11 *Sei $\phi \in V_1(I,X)$ und es existiere eine lokal integrierbare Funktion $g: I \to X$ mit $\phi = \mathcal{I}g$. Für alle $t\in I$ gilt dann $Var_\phi(t) = \int_{\beta(I)}^t \|g(u)\|\,du$, d.h. es ist* $\mathrm{Var}_\phi = \mathcal{I}\|g\|$.

Beweis Sei zuerst I kompakt und $g = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{[a_k,b_k)}$ sei eine einfache Funktion in $S(I,X)$. Wird $g_k = x_k \chi_{[a_k,b_k)}$ und $\phi_k = \mathcal{I} g_k$ gesetzt, so folgt, da die Intervalle $[a_k, b_k)$ paarweise disjunkt sind,

$$\|\phi\|_{V_1} = \sum_{k=1}^{n} \|\phi_k\|_{V_1} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_I \|g_k(u)\|\, du = \int_I \|g(u)\|\, du. \tag{1.7}$$

Sei nun I ein beliebiges abgeschlossenes Intervall und $g : I \to X$ sei lokal integrierbar. Sei $t > \beta(I)$ und I_t bezeichne das Intervall $[\beta(I), t]$. Dann ist $g_t = g_{|I_t}$ eine auf dem kompakten Intervall I_t integrierbare Funktion. Folglich existiert eine Folge (f_n) einfacher Funktionen, welche in $L_1(I_t, X)$ gegen g_t konvergiert. Sei $\phi_t = \mathcal{I} g_t$ und $\phi_n = \mathcal{I} f_n$. Nach Lemma 1.3.2 ist der Operator $\mathcal{I} : L_1(I_t, X) \to V_1(I_t, X)$ stetig. Also konvergiert die Folge (ϕ_n) gegen ϕ_t in $V_1(I_t, X)$. Somit ergibt sich aus Gleichung (1.7)

$$\mathrm{Var}_\phi(t) = \|\phi_t\|_{V_1} = \lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_1} = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L_1} = \|g_t\|_{L_1} = \int_{\beta(I)}^{t} \|g(t)\|\, dt.$$

Für $t < \beta(I)$ verläuft die Argumentation völlig analog. $\equiv$

Die nun folgende Proposition ist gewissermaßen eine Umkehrung der Aussage von Lemma 1.3.2.

Proposition 1.3.12 (i) *Sei $\phi \in V_p(I, X)$ und es existiere eine lokal integrierbare Funktion $g : I \to X$ mit $\phi = \mathcal{I} g$. Dann ist $g \in L_p(I, X)$ und es gilt $\|g\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p}$.*

(ii) *Sei $\phi \in PV_p(I, X)$ und es existiere eine lokal Pettis integrierbare Funktion $g : I \to X$ mit $\phi = \mathcal{I} g$. Dann ist $x^* \circ g \in L_p(I)$ für alle $x^* \in X^*$ und es gilt $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ g\|_{L_p} = \|\phi\|_{PV_p}$.*

Beweis (i) Sei $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[a_k,b_k)}$ eine einfache Funktion in $S(I)$. Da der Träger von f kompakt ist und da g lokal integrierbar ist, existiert das Integral $\int_I f(t)\|g(t)\|\, dt$. Zudem folgt aus den soeben bewiesenen Lemmas 1.3.10 und 1.3.11 sowie aus Proposition 1.3.5

$$\begin{aligned} \Big| \int_I f(t)\|g(t)\|\, dt \Big| &= \Big| \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{a_k}^{b_k} \|g(t)\|\, dt \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{n} c_k (\mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k)) \Big| \\ &= \Big| \int_I f(t)\, d\mathrm{Var}_\phi(t) \Big| \le \|f\|_{L_q} \|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_p} = \|f\|_{L_q} \|\phi\|_{V_p}. \end{aligned}$$

Folglich wird durch die Vorschrift $\tau(f) = \int_I f(t)\|g(t)\|\, dt$ ein lineares Funktional auf dem in $L_q(I)$ dichten Teilraum $S(I)$ definiert. Dieses lineare Funktional läßt sich unter Beibehaltung der Norm zu einem linearen Funktional $\tilde{\tau}$ auf dem gesamten Raum $L_q(I)$ fortsetzen. Da $L_q(I)^*$ identifiziert werden kann mit $L_p(I)$, gibt es eine Funktion $\tilde{g} \in L_p(I)$ mit $\tilde{\tau}(f) = \int_I f(t)\tilde{g}(t)\, dt$ für $f \in L_q(I)$. Doch nun müssen die beiden Funktionen $\|g\|$ und $\tilde{g}$ identisch sein. Das beweist $\|g\|_{L_p} = \|\tilde{g}\|_{L_p} = \|\tilde{\tau}\| \le \|\phi\|_{V_p}$. Die umgekehrte Ungleichung $\|\phi\|_{V_p} \le \|g\|_{L_p}$ folgt aus Lemma 1.3.2.

(ii) Die Behauptung (ii) ist eine direkte Folge von (i). Denn für alle $x^* \in U_{X^*}$ gilt $\|x^* \circ \phi\|_{V_p} = \|x^* \circ g\|_{L_p}$. Also gilt die Gleichung auch, wenn auf beiden Seiten das

Supremum über alle $x^* \in U_{X^*}$ genommen wird. $\equiv$

Sei $T : L_q(I) \to X$ ein beschränkter Operator. Die *Dinculeanu Norm* $|||T|||$ von T ist definiert durch

$$|||T||| = \sup\{\sum_{k=1}^n |c_k| \|T\chi_{[a_k,b_k)}\|\}, \tag{1.8}$$

wobei das Supremum über alle einfachen Funktionen $f = \sum_{k=1}^n c_k\chi_{[a_k,b_k)}$ in $S(I)$ mit Norm $\|f\|_{L_q} \leq 1$ genommen wird.

Der Operator T heißt *ordnungssummierend*, falls ein $L > 0$ so existiert, daß für je endlich viele positive Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in L_q(I)$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \|Tf_k\| \leq L \Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_{L_q}. \tag{1.9}$$

Das Infimum über alle Konstanten L die (1.9) erfüllen, bezeichnen wir mit $\|T\|_{os}$ und nennen es die *ordnungssummierende Norm* von T.

Nun sind wir in der Lage die angesprochene Charakterisierung von Operatoren $T : L_q(I) \to X$ mit repräsentierender Funktion ϕ von beschränkter p-Variation zu formulieren und zu beweisen.

Proposition 1.3.13 *Sei $T : L_q(I) \to X$ ein stetiger Operator mit repräsentierender Funktion $\phi \in PV_p(I,X)$ und es sei $M > 0$ eine reelle Zahl. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\phi \in V_p(I,X)$ *mit* $\|\phi\|_{V_p} = M$.

(ii) *Die Dinculeanu Norm von T ist endlich und es gilt $|||T||| = M$.*

(iii) *T ist ordnungssummierend und es gilt $\|T\|_{os} = M$.*

(iv) *Es gibt ein $g \in L_p(I)$ mit $\|g\|_{L_p} = M$ und*

$$\|Tf\| \leq \int_I |f(t)|g(t)\,dt \qquad (f \in L_q(I)). \tag{1.10}$$

Beweis Bewiesen wird die Implikationskette (i)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i). Wir zeigen dabei, daß unter den jeweiligen Voraussetzungen die Ungleichungen

$$\|\phi\|_{V_p} \geq \|g\|_{L_p} \geq \|T\|_{os} \geq |||T||| \geq \|\phi\|_{V_p}$$

richtig sind und erhalten hieraus die Gleichheit der jeweiligen Normen.

(i)$\Rightarrow$(iv) Sei $\phi \in V_p(I,X)$ mit $\|\phi\|_{V_p} = M$. Aufgrund Lemma 1.3.10 gilt $\|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_p} = \|\phi\|_{V_p} = M$. Dasselbe Lemma besagt, daß Var_ϕ als Funktion von beschränkter p-Variation absolut stetig ist. Als absolut stetige reellwertige Funktion ist Var_ϕ fast überall differenzierbar (siehe etwa Rudin [35]). Bezeichnet $g : I \to \mathbf{R}$ die Ableitung von Var_ϕ, so ist g lokal integrierbar, und es gilt für alle $t \in I$

$$\mathrm{Var}_\phi(t) = \int_{\beta(I)}^t g(u)\,du.$$

Nach Proposition 1.3.12 ist daher $g \in L_p(I)$ und die Normen $\|g\|_{L_p}$ und $\|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_p}$ stimmen überein. Folglich ist $\|g\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p}$ aufgrund von Lemma 1.3.10. Zudem ergibt sich für einfache Funktionen $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)}$ in $S(I)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|Tf\| &\le \sum_{k=1}^n |c_k| \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| \\
&\le \sum_{k=1}^n |c_k| (\mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k)) \\
&= \int_I \sum_{k=1}^n |c_k| \chi_{[a_k,b_k)}(t) g(t)\, dt \\
&= \int_I |f(t)| g(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Ist $f \in L_q(I)$ eine beliebige Funktion, so wird eine Folge einfacher Funktionen (f_n) in $S(I)$ gewählt mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in der Norm in L_q und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|Tf\| &\le \|T(f - f_n)\| + \|Tf_n\| \\
&\le \|T\| \|f - f_n\|_{L_q} + \int_I |f_n(t) - f(t) + f(t)| g(t)\, dt \\
&\le \|f - f_n\|_{L_q} (\|T\| + \|g\|_{L_p}) + \int_I |f(t)| g(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Da $\|f - f_n\|_{L_q}$ beliebig klein wird für große n, ist die Abschätzung $\|Tg\| \le \int_I |f(t)| g(t)\, dt$ für alle $f \in L_q(I)$ erwiesen.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Sei $g \in L_p(I)$ und g erfülle die Ungleichung (1.10). Dann gilt für jede Wahl endlich vieler positiver Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in L_q(I)$

$$\sum_{k=1}^n \|Tf_k\| \le \sum_{k=1}^n \int_I f_k(t) g(t)\, dt \le \|g\|_{L_p} \Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_{L_q}.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) Wir setzen voraus, daß T ordnungssummierend ist mit $\|T\|_{os} = M$. Dann gilt für jede einfache Funktion $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)}$ in $S(I)$ mit $\|f\|_{L_p} \le 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |c_k| \|T\chi_{[a_k,b_k)}\| &= \sum_{k=1}^n \|T(|c_k| \chi_{[a_k,b_k)})\| \\
&\le M \Big\| \sum_{k=1}^n |c_k| \chi_{[a_k,b_k)} \Big\|_{L_q} = M.
\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Wir setzen voraus, daß die Dinculeanu Norm $|||T|||$ von T gleich M ist. Für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ des Intervalls I gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^{p-1}}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \|T\chi_{[t_k,t_{k-1})}\|.$$

Wird $c_k = \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^{p-1}}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}}$ $(k = 1, \ldots, n)$ gesetzt, so kann die q-te Potenz der L_q-Norm von $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[t_k,t_{k-1})}$ abgeschätzt werden durch

$$\|f\|_{L_q}^q = \sum_{k=1}^n \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^{q(p-1)}}{(t_k - t_{k-1})^{q(p-1)}} (t_k - t_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}}.$$

Weil die Funktion $f/\|f\|_{L_q}$ eine einfache Funktion mit L_q-Norm eins ist, folgt aus $|||T||| = M$ und den beiden vorangehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}}\Big)^{-1/p} &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}}\Big)^{1/q} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \\
&= \|f\|_{L_q}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \\
&= \|f\|_{L_q}^{-1} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_k|}{\|f\|_{L_q}} \|T\chi_{[t_k, t_{k-1})}\| \leq M.
\end{aligned}$$

Das beweist $\|\phi\|_{V_p} \leq M$. $\equiv$

1.3.3 Repräsentation von Operatoren auf C_0

Im Abschnitt über vektorwertige Riemann-Stieltjes Integrale wurde gezeigt, daß für jede Funktion $\phi : I \to X$ von beschränkter Semivariation und jede stetige Funktion $f : I \to \mathbf{C}$, die im Unendlichen verschwindet, das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ existiert. Darüber hinaus ist der durch $Tf = \int_I f(t)\, d\phi(t)$ definierte Operator $T : C_0(I) \to X$ beschränkt und es gilt $\|T\| \leq \|\phi\|_{PV_1}$. Man nennt ϕ in diesem Fall die T *repräsentierende Funktion.* In dieser Arbeit ist von Interesse, ob auch die Umkehrung richtig ist: Läßt sich jeder beschränkte Operator $T : C_0(I) \to X$ darstellen in der Form $Tf = \int_I f(t)\, d\phi(t)$ mit einem $\phi \in PV_1(I, X)$? Ist $X = \mathbf{C}$, so gibt der Rieszsche Darstellungssatz eine positive Antwort auf diese Frage. Im allgemeinen muß die Frage jedoch negativ beantwortet werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3.14 Als Banachraum X wird der Raum c_0 der komplexwertigen Nullfolgen gewählt. Ist $x \in c_0$, so bedeutet x_n die n-te Komponente von x. Der Operator $T : C[0,2] \to c_0$ sei definiert durch $(Tf)_n = f(1 - 1/n) - f(1 + 1/n)$ $(n \in \mathbf{N})$. Offensichtlich ist T linear und beschränkt. Aber es gibt kein $\phi : [0,2] \to X$ von beschränkter Semivariation so, daß $Tf = \int_0^2 f(t)\, d\phi(t)$ für alle $f \in C[0,2]$ richtig ist. Zum Beweis wird die Annahme, ein solches ϕ existiere, zum Widerspruch geführt. Denn existiert ein solches ϕ, so wird wie in Proposition 1.2.20 der Operator $\widetilde{T} : S_\infty[0,2] \to X$ definiert durch die Festsetzung $\widetilde{T}\chi_{[a,b)} = \phi(b) - \phi(a)$[2]. Aus Proposition 1.2.20 ist bekannt, daß für $f \in C[0,2]$ das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich ϕ mit $\widetilde{T}f$ übereinstimmt. Die Annahme, daß ϕ den Operator T repräsentiert, besagt also $\widetilde{T}f = Tf$ für stetige

[2]Hier, wie im gesamten Verlauf dieses Paragraphen ist es wichtig, die Generalvereinbarung zu beachten, daß $\chi_{[a,b)}$ die charakteristische Funktion des abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$ bezeichnet, sofern b obere Grenze von I ist.

Funktionen $f : [0,2] \to \mathbf{C}$. Sei $e_n \in c_0^*$ die Projektion auf die n-te Komponente, d.h. $\langle e_n, x\rangle = x_n$ für $x \in c_0$. Dann gilt

$$\langle e_n, \phi(1)\rangle = \langle e_n, \widetilde{T}\chi_{[0,1)}\rangle = \langle \widetilde{T}^* e_n, \chi_{[0,1)}\rangle.$$

Als nächstes wird eine Folge (f_k) stetiger Funktionen auf $[0,2]$ mit $f_k(t) = 0$ für $t \in [1,2]$ gewählt, welche punktweise gegen die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1)$ konvergiert. Da punktweise Konvergenz die Konvergenz bezüglich eines jeden linearen Funktionals auf $C[0,2]$ impliziert und wegen $\widetilde{T}^* e_n \in C[0,2]^*$, folgt

$$\langle e_n, \phi(1)\rangle = \langle \widetilde{T}^* e_n, \chi_{[0,1)}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \widetilde{T}^* e_n, f_k\rangle = \lim_{k\to\infty} f_k(1 - 1/n) - f_k(1 + 1/n) = 1.$$

Nun war aber n beliebig gewählt. Somit entpuppt sich $\phi(1)$ als die Folge $(1,1,1,\ldots)$, die keine Nullfolge ist. Die Annahme, ϕ repräsentiere T, ist somit nicht haltbar.

In dem Beispiel wurde ausgenutzt, daß punktweise Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen gegen eine charakteristische Funktion die Konvergenz bezüglich eines jeden linearen Funktionals auf $C[0,2]$ impliziert. Diese Argumentation wird im folgenden häufiger benutzt und wird deshalb an dieser Stelle näher diskutiert. Zum einen muß geklärt werden, wie für eine beschränkte Borel meßbare Funktion $f : I \to X$ und ein $\varphi \in C_0(I)^*$ die Wirkung $\langle \varphi, f\rangle$ von φ auf f definiert ist. In anderen Worten ist das Ziel, jede beschränkte Borel meßbare Funktion mit einem Element des Bidualraums von $C_0(I)$ zu identifizieren. Zum anderen bedarf es des Nachweises, daß punktweise Konvergenz Borel meßbarer Funktionen f_n gegen eine Funktion f für jedes $\varphi \in C_0(I)$ die Konvergenz von $\langle \varphi, f_n\rangle$ gegen $\langle \varphi, f\rangle$ nach sich zieht.

Im folgenden werde der Dualraum von $C_0(I)$ mit dem Raum der normierten Funktionen von beschränkter Variation identifiziert. Das dies möglich ist, besagt der Rieszsche Darstellungssatz für lineare Funktionale auf $C_0(I)$ (siehe z.B. Heuser [20]). Andererseits besagt eine zweite Variante des Rieszschen Darstellungssatzes, daß $C_0(I)^*$ isomorph zum Raum $M(I)$ der regulären komplexen Borel Maße auf I ist. Diese Variante kann bei Rudin [35] nachgelesen werden. Jedem regulären Borel Maß ν wird dabei ein lineares Funktional φ auf $C_0(I)$ zugeordnet, indem für $f \in C_0(I)$ festgesetzt wird $\langle \varphi, f\rangle = \int_I f\, d\nu$. Dieses Integral ist im Sinn einer abstrakten Integration zu verstehen, wie sie in [35], Chapter 1 und 6, beschrieben wird. Das Integral $\int_I f\, d\nu$ ist nicht nur für stetige, sondern für jede beschränkte Borel meßbare Funktion auf I definiert. Daher wird für eine gegebene beschränkte Borel meßbare Funktion $f : I \to \mathbf{C}$ durch die Festsetzung $\langle \varphi, f\rangle = \int_I f\, d\nu$ ($\varphi \in C_0(I)^*$) ein lineares Funktional auf dem Raum $C_0(I)^*$ definiert. In diesem Sinn kann jede beschränkte Borel meßbare Funktion mit einem Element des Bidualraums von $C_0(I)$ identifiziert werden.

Der Beweis zu Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz in der folgenden Form findet sich bei Rudin [35].

Proposition 1.3.15 *Sei ν ein positives Borel Maß auf I und (f_n) eine Folge komplexer Borel meßbarer Funktionen auf I, die punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbf{C}$ konvergiert. Gibt es eine Funktion $g \in L_1(\nu)$ so, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $t \in I$ gilt $|f_n(t)| \le g(t)$, so ist $f \in L_1(\nu)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\nu = \int_I f\, d\nu.$$

Sei nun ν ein beliebiges nicht notwendigerweise positives Borel Maß auf I. Dann gibt es nach [35] ein positives Borel Maß $|\nu|$ und eine Borel meßbare Funktion $h \in L_1(|\nu|)$ so, daß für alle beschränkten Borel meßbaren Funktionen f auf I gilt

$$\int_I f\, d\nu = \int_I fh\, d|\nu|.$$

Sei (f_n) eine beschränkte Folge Borel meßbarer Funktionen auf I, welche gegen $f : I \to \mathbf{C}$ punktweise konvergiert. Dann ist auch f Borel meßbar und es gilt das Folgende: Da die Folge (f_n) beschränkt ist, ist auch die Funktion $\sup_n f_n$ beschränkt und somit ist $\sup_n f_n h \in L_1(|\nu|)$. Die Folge $f_n h$ wird demnach durch eine $L_1(|\nu|)$-Funktion dominiert. Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz sagt nun $fh \in L_1(|\nu|)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n h\, d|\nu| = \int_I fh\, d|\nu| = \int_I f\, d\nu.$$

Wird nun wieder ν mit einem linearen Funktional φ auf $C_0(I)$ identifiziert, so besagt dies

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi, f_n\rangle = \langle \varphi, f\rangle.$$

Es lohnt sich, dieses Ergebnis in einem Lemma festzuhalten.

Lemma 1.3.16 *Sei (f_n) eine beschränkte Folge Borel meßbarer Funktionen auf I, welche punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbf{C}$ konvergiert. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty}\langle \phi, f_n\rangle = \langle \phi, f\rangle$ *für alle $\phi \in V_1(I)$.*

Die Möglichkeit, charakteristische Funktionen mit Elementen aus dem Bidualraum von $C_0(I)$ identifizieren zu können, ist Voraussetzung für den Beweis der folgenden Proposition.

Proposition 1.3.17 *Sei $T : C_0(I) \to X$ ein beschränkter Operator. Dann existiert eine Funktion $\phi : I \to X^{**}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle $x^* \in X^*$ ist $x^* \circ \phi \in V_1(I)$ und es gilt $\|T\| = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \phi\|_{V_1}$.*

(ii) *Für alle $x^* \in X^*$ und alle $f \in C_0(I)$ gilt $\langle x^*, Tf\rangle = \int_I f(t)\, d(x^* \circ \phi)(t)$.*

Beweis Zum Beweis wird der zu T biduale Operator $T^{**} : C_0(I)^{**} \to X^{**}$ betrachtet und $\phi : I \to X^{**}$ wird definiert durch

$$\phi(t) = T^{**}\chi_t \qquad (t \in I).$$

Dabei wird χ_t mit einem Element aus $C_0(I)^{**}$ identifiziert. Ist $g = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)}$[3] eine einfache Funktion in $S(I)$, so gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\langle x^*, T^{**}g\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle x^*, T^{**}\chi_{[a_k,b_k)}\rangle = \sum_{k=1}^n c_k (x^* \circ \phi(b_k) - x^* \circ \phi(a_k)).$$

[3]Beachte die Vereinbarung für $\chi_{[a,b)}$ auf Seite 8.

Sei nun $f \in C_0(I)$. Für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_k)$ von I wird die einfache Funktion g_Z definiert durch $g_Z = \sum_{k=1}^n f(t_k)\chi_{[t_{k-1},t_k)}$. Dann gilt $\lim_{|Z|\to 0} g_Z = f$ gleichmäßig in I und folglich

$$\begin{aligned}
\lim_{|Z|\to 0} \Sigma_Z\langle f, x^* \circ \phi\rangle &= \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)(x^* \circ \phi(t_k) - x^* \circ \phi(t_{k-1})) \\
&= \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)\langle x^*, T^{**}\chi_{[t_{k-1},t_k)}\rangle \\
&= \lim_{|Z|\to 0} \langle x^*, T^{**}g_Z\rangle \\
&= \langle x^*, T^{**}f\rangle \\
&= \langle x^*, Tf\rangle.
\end{aligned}$$

Der Limes für $|Z| \to 0$ von $\Sigma_Z(f, x^* \circ \phi)$ existiert demnach für alle $x^* \in X^*$ und stimmt mit $\langle x^*, Tf\rangle$ überein. Da andererseits dieser Limes das Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich $x^* \circ \phi$ ist, folgt

$$\langle x^*, Tf\rangle = \int_I f(t)\, d(x^* \circ \phi)(t).$$

Somit ist (ii) nachgewiesen. Zum Beweis von (i) wird benutzt, daß die Totalvariation von $x^* \circ \phi$ mit der Norm des durch $x^* \circ \phi$ definierten linearen Funktionals auf $C_0(I)$ übereinstimmt. Denn dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \phi\|_{V_1} &= \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sup_{f \in U_{C_0}} \Big|\int_I f(t)\, d(x^* \circ \phi)(t)\Big| \\
&= \sup_{x^* \in U_{X^*}} \sup_{f \in U_{C_0}} |\langle x^*, Tf\rangle| \\
&= \sup_{f \in U_{C_0}} \|Tf\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch für alle $x^* \in X^*$ die Normiertheit von ϕ nachzuweisen. Definitionsgemäß gilt $\phi(\beta(I)) = 0$. Sei t ein Innerer Punkt in I. Dann ist $x^* \circ \phi(t) = \langle x^*, T\chi_t\rangle = \langle T^*x^*, \chi_t\rangle$. Konvergiert nun $s \to t^-$ von links gegen t, so konvergiert $\chi_s \to \chi_t$ punktweise in I, da die Intervalle χ_s nach rechts offen und nach links abgeschlossen sind. Somit gilt nach Lemma 1.3.16

$$\lim_{s\to t^-} x^* \circ \phi(t) = \lim_{s\to t^-} \langle T^*x^*, \chi_s\rangle = \langle T^*x^*, \chi_t\rangle = x^* \circ \phi(t),$$

folglich ist $x^* \circ \phi$ linksseitig stetig im Inneren von I. $\equiv$

Ist $\phi : I \to X$ von beschränkter Semivariation und $T : C_0(I) \to X$ der Operator mit repräsentierender Funktion ϕ, so erfüllt ϕ die Punkte (i) und (ii) der soeben bewiesenen Proposition, wobei X als Teilraum von X^{**} aufgefaßt wird. Es führt also nicht zu begrifflichen Kollisionen, wenn für jeden beschränkten Operator $T : C_0(I) \to X$ jede Funktion $\phi : I \to X^{**}$, welche (i) und (ii) aus Proposition 1.3.17 erfüllt, repräsentierende Funktion von T genannt wird.

Im weiteren Verlauf werden Operatoren auf C_0 von Interesse sein, welche eine repräsentierende Funktion von beschränkter Variation besitzen. Der Rest dieses Paragraphen wird genutzt um zu zeigen, daß diese Operatoren die absolut summierenden Operatoren sind.

Definition 1.3.18 Ein Operator $T : Y \to X$ des Banachraums Y in den Banachraum X heißt *absolut summierend*, falls ein $M > 0$ so existiert, daß für je endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in Y$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \|Ty_k\| \leq M \sup_{y^* \in U_{Y^*}} \sum_{k=1}^{n} |\langle y^*, y_k \rangle| \tag{1.11}$$

besteht. Das Infimum über alle M, welche die Ungleichung (1.11) erfüllen, wird *absolut summierende Norm* von T genannt und mit $\|T\|_{as}$ bezeichnet.

Der Charakterisierung absolut summierender Operatoren auf C_0 werden drei Lemmas vorausgeschickt.

Lemma 1.3.19 *Sei $T : Y \to X$ ein beschränkter Operator des Banachraums Y in den Banachraum X. Dann ist $T^{**} : Y^{**} \to X^{**}$ schwach*-schwach*-stetig, d.h ist (y_n) eine Folge in Y^{**} und ist $y \in Y^{**}$ mit $\lim_{n\to\infty}\langle y^*, y_n \rangle = \langle y^*, y \rangle$ für alle $y^* \in Y^*$, so gilt für alle $x^* \in X^*$ die Konvergenz $\lim_{n\to\infty}\langle x^*, T^{**}y_n \rangle = \langle x^*, T^{**}y \rangle$.*

Beweis Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt

$$\lim_{n\to\infty}\langle x^*, T^{**}y_n \rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T^*x^*, y_n \rangle = \langle T^*x^*, y \rangle = \langle x^*, T^{**}y \rangle.$$

$\equiv$

Lemma 1.3.20 *Sei $[a, b)$ ein in I enthaltenes Intervall. Dann gibt es zwei Folgen stetiger Funktionen (g_k) und (h_k) mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle $t \in I$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) - h_k(t) = \chi_{[a,b)}(t)$.*

(ii) *Die Funktionen g_k und h_k sind für alle $k \in \mathbf{N}$ positiv und $\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$ positiv.*

(iii) *Es ist $\|\sum_{k=1}^{n} g_k\|_\infty, \|\sum_{k=1}^{n} h_k\|_\infty, \|\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

(iv) Träger$(\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k) \subseteq [a - \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$ *falls b nicht obere Grenze von I ist und* Träger$(\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k) \subseteq [a - \frac{1}{n}, b]$, *falls b obere Grenze von I ist.*

Beweis Ist b keine obere Grenze von I, so werden die Funktionen $\sum_{k=1}^{n} g_k$ und $\sum_{k=1}^{n} h_k$ wie folgt definiert:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(t) = \begin{cases} t - (a-1) & \text{für } t \in [a-1, a) \\ 1 & \text{für } t \in [a, b - 1/n) \\ n(b - 1/n - t) & \text{für } t \in [b - 2/n, b - 1/n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(t) = \begin{cases} t-(a-1) & \text{für } t \in [a-1, a-1/n) \\ -(n-1)(t-a) & \text{für } t \in [a-1/n, a] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist b obere Grenze von I, so wird

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(t) = \begin{cases} t-(a-1) & \text{für } t \in [a-1, a) \\ 1 & \text{für } t \in [a, b] \end{cases}$$

gesetzt und $\sum_{k=1}^{n} h_k$ wird wie oben definiert. $\equiv$

Lemma 1.3.21 *Ist $\phi : I \to X$ eine Funktion von beschränkter Variation, so ist auch $\mathrm{Var}_\phi : I \to \mathbf{R}$ von beschränkter Variation und es ist $\|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_1} = \|\phi\|_{V_1}$. Zudem gilt für alle $f \in C_0(I)$ die Abschätzung*

$$\Big\| \int_I f(t)\, d\phi(t) \Big\| \leq \int_I |f(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t).$$

Beweis Die erste Behauptung ist einfach nachzurechnen. Denn Var_ϕ ist eine monoton wachsende Funktion und daher gilt für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ von I

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{Var}_\phi(t_k) - \mathrm{Var}_\phi(t_{k-1})| = \mathrm{Var}_\phi(t_n) - \mathrm{Var}_\phi(t_0).$$

Wird in dieser Gleichung das Supremum über alle Zerlegungen von I gebildet, so ergibt sich die Behauptung $\|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_1} = \|\phi\|_{V_1}$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung wird wieder der Operator $\widetilde{T}_\phi : S_\infty(I) \to X$ betrachtet, der durch die Festsetzung $\widetilde{T}_\phi \chi_{[a,b)} = \phi(b) - \phi(a)$ für $[a,b) \subseteq I$ eindeutig bestimmt ist. Entsprechend sei $\widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi} : S_\infty(I) \to \mathbf{R}$ durch die Funktion Var_ϕ festgelegt. Dann folgt wie im Beweis von Proposition 1.2.20 für alle $f \in C_0(I)$

$$\widetilde{T}_\phi f = \int_I f(t)\, d\phi(t) \quad \text{und} \quad \widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi} f = \int_I f(t)\, d\mathrm{Var}_\phi(t).$$

Für jede einfache Funktion $g = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[a_k, b_k)}$ in $S(I)$ ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_\phi g\| &\leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| (\mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k)) \\ &= \widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi} |g|. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in C_0(I)$ und (g_n) sei eine Folge einfacher Funktionen in $S(I)$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Da sowohl $\widetilde{T}_\phi$ als auch $\widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi}$ stetige Operatoren sind, folgt

$$\begin{aligned} \Big\| \int_I f(t)\, d\phi(t) \Big\| &= \|\widetilde{T}_\phi f\| = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{T}_\phi g_n\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi} |g_n| = \widetilde{T}_{\mathrm{Var}_\phi} |f| = \int_I |f(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\equiv$

Die Vorbereitungen zur Charakterisierung absolut summierender Operatoren auf C_0 sind nun abgeschlossen.

Proposition 1.3.22 *Sei $T : C_0(I) \to X$ ein beschränkter Operator mit repräsentierender Funktion $\phi : I \to X^{**}$ und es sei $M > 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\phi \in V_1(I, X)$ mit $\|\phi\|_{V_1} = M$.*

(ii) *T ist absolut summierend und es gilt $\|T\|_{as} = M$.*

(iii) *Es gibt ein reellwertiges $\psi \in V_1(I)$ mit $\|\psi\|_{V_1} = M$ und*

$$\|Tf\| \leq \int_I |f(t)|\, d\psi(t) \qquad (f \in C_0(I)). \tag{1.12}$$

Beweis Bewiesen wird die Implikationskette (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i) sowie die Gültigkeit der Ungleichungskette $\|\phi\|_{V_1} \geq \|\psi\|_{V_1} \geq \|T\|_{as} \geq \|\phi\|_{V_1}$.

(i)$\Rightarrow$(iii) Sei also $\phi : I \to X$ von beschränkter Variation mit $\|\phi\|_{V_1} = M$. Dann ist die reellwertige Funktion Var_ϕ nach Lemma 1.3.21 ebenfalls von beschränkter Variation mit $\|\mathrm{Var}_\phi\|_{V_1} = \|\phi\|_{V_1} = M$. Zudem gilt für alle $f \in C_0(I)$ die Abschätzung

$$\|Tf\| = \Big\| \int_I f(t)\, d\phi(t) \Big\| \leq \int_I |f(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t).$$

Somit ist gezeigt, daß eine reellwertige Funktion von beschränkter Variation existiert, welche die Ungleichung (1.12) erfüllt und deren Totalvariation mit M übereinstimmt. Das beweist (iii).

(iii)$\Rightarrow$(ii) Es gelte (iii). Dann wird ein reellwertiges $\psi \in V_1(I)$ gewählt, welches die Ungleichung (1.12) erfüllt. Dann folgt für je endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in C_0(I)$

$$\sum_{k=1}^n \|Tf_k\| \leq \sum_{k=1}^n \int_I |f_k(t)|\, d\psi(t) \leq \|\psi\|_{V_1} \Big\| \sum_{k=1}^n |f_k| \Big\|_\infty.$$

Da die Funktion $\sum_{k=1}^n |f_k|$ stetig in I ist und im Unendlichen verschwindet, nimmt sie ihr Maximum in I an. Es gibt demnach ein $t_0 \in I$ mit $\left\| \sum_{k=1}^n |f_k| \right\|_\infty = \sum_{k=1}^n |f_k(t_0)|$. Mit $\delta_0 \in C_0(I)^*$ werde das Punktfunktional von t_0 bezeichnet, d.h. für $g \in C_0(I)$ ist $\langle \delta_0, g \rangle = g(t_0)$ und U bezeichne für den Augenblick die Einheitskugel von $C_0(I)^*$. Dann ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n \|Tf_k\| \leq \|\psi\|_{V_1} \Big\| \sum_{k=1}^n |f_k| \Big\|_\infty = \|\psi\|_{V_1} \sum_{k=1}^n |\langle \delta_0, f_k \rangle| \leq \|\psi\|_{V_1} \sup_{\eta \in U} \sum_{k=1}^n |\langle \eta, f_k \rangle|,$$

da δ_0 in U enthalten ist. Somit ist $\|T\|_{as} \leq \|\psi\|_{V_1}$ nachgewiesen.

(ii)$\Rightarrow$(i) Sei nun T absolut summierend. Die folgenden drei Eigenschaften der repräsentierenden Funktion ϕ von T gilt es nachzuweisen:

(1) Für alle $t \in I$ ist $\phi(t) \in X$.

(2) Die Totalvariation von ϕ ist beschränkt.

(3) ϕ ist normiert.

Sobald die Eigenschaften (1) und (2) nachgewiesen sind, folgt (3) automatisch, denn: Es ist bekannt, daß jede Funktion von beschränkter Variation linksseitige Grenzwerte für alle t im Inneren von I besitzt, und diese müssen wegen der vorausgesetzten Normiertheit von $x^* \circ \phi$ für alle $x^* \in X^*$ notwendigerweise mit dem Funktionswert an der Stelle $\phi(t)$ übereinstimmen. Zudem folgt aus $x^* \circ \phi(\beta(I)) = 0$ für alle $x^* \in X^*$ natürlich $\phi(\beta(I)) = 0$.

Zum Nachweis von (1) wird ausgenutzt, daß $\phi(t)$ sich schreiben läßt als $\phi(t) = T^{**}\chi_t$. Sei $[a,b)$ ein in I enthaltenes Intervall. Dann gibt es nach Lemma 1.3.20 zwei Folgen (g_k) und (h_k) mit den Eigenschaften:

(3) Für alle $t \in I$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) - h_k(t) = \chi_{[a,b)}$[4]

(4) Die Funktionen g_k und h_k sind für alle $k \in \mathbf{N}$ positiv.

(5) Es ist $\|\sum_{k=1}^{n} g_k\|_\infty, \|\sum_{k=1}^{n} h_k\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

(6) Träger$(\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k) \subseteq [a - \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$, falls b keine obere Grenze von I ist und Träger$(\sum_{k=1}^{n} g_k - h_k) \subseteq [a - \frac{1}{n}, b]$, falls I durch b nach oben begrenzt ist.

Sei $f_k = g_k - h_k$. Da T nach Voraussetzung absolut summierend ist, lassen sich die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|Tf_k\|$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \|Tf_k\| &\leq \|T\|_{as} \sup_{\eta \in U} \sum_{k=1}^{n} |\langle \eta, f_k \rangle| \leq \|T\|_{as} \sup_{\eta \in U} \sum_{k=1}^{n} \int_I (g_k + h_k)(t)\, d\mathrm{Var}_\eta(t) \\ &\leq \|T\|_{as} \Big\| \sum_{k=1}^{n} g_k + h_k \Big\|_\infty \leq 2\|T\|_{as}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{n} Tf_k$ absolut in X konvergiert. Darüber hinaus gilt $\sum_{k=1}^{\infty} Tf_k = T^{**}\chi_{[a,b)}$. Das ist folgendermaßen einzusehen: Sei η ein lineares Funktional auf $C_0(I)$. Dann konvergiert nach Lemma 1.3.16 die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, f_k \rangle$ gegen $\langle \eta, \chi_{[a,b)} \rangle$, da $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktweise gegen $\chi_{[a,b)}$ konvergiert. Also gilt nach Lemma 1.3.19 für alle $x^* \in X^*$

$$\langle x^*, T^{**}\chi_{[a,b)} \rangle = \langle x^*, \sum_{k=1}^{\infty} Tf_k \rangle. \tag{1.13}$$

Ist speziell $[a,b) = [\beta(I), t)$, falls $t > \beta(I)$, so folgt

$$\phi(t) = T^{**}\chi_{[\beta(I),t)} = \sum_{k=1}^{\infty} Tf_k \in X$$

und ist $[a,b) = [t, \beta(I))$, falls $t < \beta(I)$, so folgt

$$\phi(t) = -T^{**}\chi_{[t,\beta(I))} = -\sum_{k=1}^{\infty} Tf_k \in X$$

[4]Beachte die Vereinbarung für $\chi_{[a,b)}$ auf Seite 8.

In jedem Fall liegt $\phi(t)$ in X.

Es bleibt zu zeigen, daß ϕ von beschränkter Variation ist. Sei $\varepsilon > 0$ und es sei $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von I. Sei $1 \leq l \leq n$. Dann gibt es zum Intervall $[t_{l-1}, t_l)$ zwei Folgen $(h_{l,k})_k$ und $(g_{l,k})_k$, welche die Bedingungen (i)-(iv) aus Lemma 1.3.20 erfüllen und es sei $f_{l,k} = g_{l,k} - h_{l,k}$. Wie eben gezeigt wurde, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} T f_{l,k}$ absolut gegen $T^{**}\chi_{[t_{l-1},t_l)} = \phi(t_l) - \phi(t_{l-1})$. Wird $m(l) \in \mathbf{N}$ genügend groß gewählt, so folgt für alle $m > m(l)$

$$\Big\| \phi(t_l) - \phi(t_{l-1}) - T\Big(\sum_{k=1}^{m} f_{l,k}\Big)\Big\| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Sei $m = \max\{m(l) : l = 1, \dots, n\}$ und $u_l = \sum_{k=1}^{m} f_{l,k}$. Dann hat u_l die folgenden Eigenschaften.

(7) $\|\phi(t_l) - \phi(t_{l-1}) - Tu_l\| < \frac{\varepsilon}{n}$.

(8) u_l ist positiv mit $\|u_l\|_\infty \leq 1$.

(9) Träger$(u_l) \subseteq [t_{l-1} - 1/m, t_l - 1/m)$ und Träger$(u_l) \subseteq [t_{n-1} - 1/m, t_n]$, falls I durch t_n nach oben begrenzt ist.

Insbesondere sind die Träger der Funktionen u_l paarweise disjunkt. Dies ermöglicht schlußendlich die Abschätzung

$$\sum_{l=1}^{n} \|\phi(t_l) - \phi(t_{l-1})\| \leq \sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} + \|Tu_l\| \leq \varepsilon + \|T\|_{as} \Big\| \sum_{l=1}^{n} |u_l| \Big\|_\infty \leq \varepsilon + \|T\|_{as}.$$

Da sowohl $\varepsilon > 0$ als auch die Zerlegung Z beliebig gewählt war, ist somit $\|\phi\|_{V_1} \leq \|T\|_{as}$ bewiesen. $\equiv$

Bemerkung 1.3.23 Spätestens zu diesem Zeitpunkt stellen sich die beiden folgenden Fragen:

(1) Welches sind die Operatoren $T : C_0(I) \to X$, welche eine repräsentierende Funktion von beschränkter Semivariation besitzen?

(2) Wie können die Banachräume X charakterisiert werden, welche die Eigenschaft haben, daß jeder beschränkte Operator $T : C_0(I) \to X$ eine repräsentierende Funktion von beschränkter Semivariation besitzt?

Jeder schwach kompakte Operator auf $C_0(I)$ besitzt eine repräsentierende Funktion von beschränkter Semivariation. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Ist $T : C_0(I) \to X$ schwach kompakt, so bildet der zu T biduale Operator T^{**} den Raum $C_0(I)^{**}$ nach X ab. Die durch $\phi(t) = T^{**}\chi_t$ definierte repräsentierende Funktion ϕ nimmt ihre Werte folglich in X an und somit ist $\phi \in PV_1(I, X)$. Doch die schwache Kompaktheit des Operators T ist nicht notwendig, um von einer Funktion von beschränkter Semivariation repräsentiert zu werden. So überlegt man sich leicht, daß der durch $(Tf)_n = f(n)$

definierte Operator $T : C_0([0,\infty)) \to c_0$ nicht schwach kompakt ist, aber dennoch von einer Funktion von beschränkter Semivariation repräsentiert wird. Eine abschließende Antwort auf die erste Frage steht bis dato aus.

Ähnlich verhält es sich mit der zweiten Frage. Es ist bekannt, daß jeder beschränkte Operator $T : C_0(I) \to X$ schwach kompakt ist, sofern nur X keinen zu c_0 isomorphen Teilraum enthält (siehe etwa Diestel und Uhl [13]). Mithin ist jeder Operator auf einem solchen Raum repräsentierbar durch eine Funktion von beschränkter Semivariation. Weitere Ergebnisse, welche einer Antwort auf die Frage (2) näher kommen, finden sich bei Vieten und Weis [39].

1.3.4 Konvergenz in $V_p(X)$

Sei $1 < p < \infty$ und (g_n) sei eine beschränkte Folge in $L_p(I)$. Da $L_p(I)$ reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge (g_{n_k}). Die entsprechende Aussage für beschränkte Folgen in $PV_p(I,X)$ bzw. in $V_p(I,X)$ ist i.allg. falsch, d.h. ist (ϕ_n) eine beschränkte Folge in $PV_p(I,X)$ bzw. in $V_p(I,X)$, so existiert nicht notwendigerweise eine Teilfolge (ϕ_{n_k}) und ein ϕ in $PV_p(I,X)$ bzw. in $V_p(I,X)$ derart, daß für alle $f \in L_q(I)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_{n_k}(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t), \tag{1.14}$$

wie das folgende Gegenbeispiel belegt.

Beispiel 1.3.24 Sei $I = [0,1]$ und $X = c_0$ der Banachraum der komplexen Nullfolgen. Weiter bezeichne f_1 die reelle Funktion, die auf dem Intervall $[0,1]$ konstant 1 ist. Betrachtet wird die durch

$$F_n = (\underbrace{f_1, f_1, \ldots, f_1}_{n-\text{mal}}, 0, 0, \ldots)$$

definierte Folge (F_n) in $L_2([0,1], c_0)$. Es gilt $\|F_n\|_{L_2} = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$, die Folge ist also beschränkt in $L_2([0,1], c_0)$ und somit ist die durch $\phi_n = \mathcal{I}F_n$ definierte Folge (ϕ_n) beschränkt in $V_2([0,1], c_0)$ nach Lemma 1.3.2. Ist nun eine beliebige Teilfolge von (ϕ_n) gegeben, so ist die einzige Kandidatin $\phi : [0,1] \to c_0$, welche die Gleichung (1.14) erfüllt, $\phi(t) = (t,t,t,\ldots)$ $(0 \le t \le 1)$. Doch $\phi(t)$ liegt für kein t in c_0. Folglich existiert für keine Teilfolge von (ϕ_n) ein $\phi \in PV_2(I,X)$, welches der Gleichung (1.14) genügt.

Wird jedoch vorausgesetzt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) \tag{1.15}$$

für Funktionen f in einer totalen Teilmenge von $L_q(I)$ existiert, so konvergiert die Folge in (1.15) für alle $f \in L_q(I)$ und es existiert ein ϕ in $PV_p(I,X)$ bzw. in $V_p(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t). \tag{1.16}$$

Diese Aussage ist sogar für $p = \infty$ richtig. Bewiesen wird diese Behauptung in der unten folgenden Proposition 1.3.26.

Die Situation ist sehr ähnlich im Fall $p = 1$. Sei (ϕ_n) eine beschränkte Folge in $V_1(I)$. Der Satz von Helly (siehe [42]) besagt, das eine Teilfolge (ϕ_{n_k}) und ein $\phi \in V_1(I)$ so existieren, daß für alle $f \in C_0(I)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_{n_k}(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t).$$

Auch in diesem Fall gilt die entsprechende Aussage i.allg. nicht für beschränkte Folgen in $V_1(I, X)$. Existiert der Grenzwert (1.15) jedoch für alle f in einer totalen Teilmenge von $C_0(I)$, so gibt es ein $\phi \in V_1(I, X)$ derart, daß Gleichung (1.16) für alle $f \in C_0(I)$ erfüllt ist. Diese Behauptung ist in Teil (b) der unten folgenden Proposition 1.3.26 enthalten.

Als erstes beweisen wir eine Variante des Satzes von Banach-Steinhaus.

Lemma 1.3.25 *Seien X, Y Banachräume und (T_k) sei eine gleichmäßig beschränkte Folge von Operatoren in $\mathbf{L}(X, Y)$. Weiter existiere eine totale Teilmenge $M \subseteq Y$ so, daß für alle $u \in M$ die Folge $(T_k u)$ in X konvergiert. Dann existiert ein beschränkter Operator $T : Y \to X$ mit $\|T\| \le \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|$ und $\lim_{n\to\infty} T_n y = Ty$ für alle $y \in Y$.*

Beweis Mit $\mathrm{Lin}(M)$ bezeichnen wir die lineare Hülle von M. Da für jedes $u \in M$ nach Voraussetzung ein $v \in X$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} T_k u = v$, existiert natürlich auch für jedes $y \in \mathrm{Lin}(M)$ ein $x \in X$ mit $\lim_{k\to\infty} T_k y = x$. Folglich kann für $y \in \mathrm{Lin}(M)$ festgesetzt werden $\widetilde{T} y = x$. Auf diese Weise wird ein linearer Operator $\tilde{T} : \mathrm{Lin}(M) \to X$ definiert. Die Norm von $\widetilde{T}$ genügt wegen

$$\|\widetilde{T} y\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n y\| \le \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \|y\| \quad (y \in \mathrm{Lin}(M))$$

der Abschätzung $\|\widetilde{T}\| \le \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|$. Da $\mathrm{Lin}(M)$ nach Voraussetzung dicht in Y ist, existiert eine eindeutige lineare und beschränkte Fortsetzung T von $\widetilde{T}$ auf den ganzen Raum Y mit $\|T\| \le \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Es bleibt nur noch die letzte Behauptung $\lim_{n\to\infty} T_n y = Ty$ für alle $y \in Y$ nachzuweisen. Ist $y \in Y$, so wird eine Folge (y_k) in $\mathrm{Lin}(M)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|y - y_k\| = 0$ gewählt. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es $k, n_0 \in \mathbf{N}$ mit $\|y - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{3} \sup_{n\in\mathbf{N}} \|T_n\|$ und $\|Ty_k - T_n y_k\| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \ge n_0$. Wir erhalten schließlich für alle $n \ge n_0$

$$\begin{aligned} \|Ty - T_n y\| &\le \|Ty - Ty_k\| + \|Ty_k - T_n y_k\| + \|T_n y_k - T_n y\| \\ &\le \|T\|\|y - y_k\| + \varepsilon/3 + \|T_n\|\|y_k - y\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

≡

Wird $Y_q(I) = L_q(I)$ für $q < \infty$ und $Y_\infty(I) = C_0(I)$ gesetzt, so ergibt sich aus dem vorhergehenden Lemma die nun folgende Proposition.

Proposition 1.3.26 *Sei $M \subseteq Y_q(I)$ eine totale Teilmenge und (ϕ_n) sei eine Folge in $PV_p(I, X)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $f \in M$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t)$ in X existiert. Dann gilt:*

(a) *Sei $1 < p \leq \infty$. Ist $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\phi_n\|_{PV_p} < \infty$, so existiert ein $\phi \in PV_p(I,X)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t) \qquad (f \in L_q(I)).$$

Darüber hinaus ist $\|\phi\|_{PV_p} \leq \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{PV_p}$.

(b) *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Ist ϕ_n für alle n von beschränkter p-Variation und gilt $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\phi_n\|_{V_p} < \infty$, so gibt es ein $\phi \in V_p(I,X)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t) \qquad (f \in Y_q(I)).$$

Darüber hinaus ist $\|\phi\|_{V_p} \leq \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_p}$.

Beweis Zum Beweis werden die Operatoren $T_n : Y_q(I) \to X$ definiert durch, $T_n f = \int_I f(t)\, d\phi_n(t)$ betrachtet. Die Voraussetzung besagt, daß für jedes $f \in M$ die Folge $(T_n f)$ in X konvergiert. Gilt $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\phi_n\|_{PV_p} < \infty$, so ist $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|T_n\| < \infty$ und somit sind die Voraussetzungen der Variante 1.3.25 des Satzes von Banach-Steinhaus erfüllt. Dies sichert die Existenz eines Operators $T : Y_q(I) \to X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n f = Tf \qquad (f \in Y_q(I))$$

und $\|T\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{PV_p}$.

(a) Ist $p > 1$, so kann der Repräsentationssatz 1.3.5 angewendet werden. Folglich gibt es ein $\phi \in PV_p(I,X)$ mit

$$Tf = \int_I f(t)\, d\phi(t) \qquad (f \in L_q(I)).$$

Das beweist für alle $f \in L_q(I)$ die Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} T_n f = Tf = \int_I f(t)\, d\phi(t).$$

Darüberhinaus folgt $\|\phi\|_{PV_p} = \|T\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{PV_p}$.

(b) Sei zunächst $p > 1$. Erfüllt die Folge (ϕ_n) die Voraussetzungen von (b), so erfüllt sie insbesondere die Voraussetzungen aus (a) und folglich existiert ein $\phi \in PV_p(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) = \int_I f(t)\, d\phi(t) \qquad (f \in L_q(I)).$$

Es bleibt zu zeigen, daß ϕ von beschränkter p-Variation ist und die Norm von ϕ die geforderte Abschätzung erfüllt.

Ist $p = \infty$, so stimmen die Normen $\|\phi\|_{V_\infty}$ und $\|\phi\|_{PV_\infty}$ überein und die Behauptung ist bereits in (a) bewiesen.

Sei also $1 < p < \infty$. Nach Proposition 1.3.13 existiert für alle $n \in \mathbf{N}$ ein $g_n \in L_p(I)$ mit $\|g_n\|_{L_p} = \|\phi_n\|_{V_p}$ und

$$\Big\| \int_I f(t)\, d\phi_n(t) \Big\| = \|T_n f\| \leq \int_I |f(t)| g_n(t)\, dt \qquad (f \in L_q(I)).$$

Da die Banachräume $L_p(I)$ reflexiv sind für $1 < p < \infty$, gibt es eine schwach konvergente Teilfolge (g_{n_k}) der Folge (g_n). Sei $g \in L_p(I)$ der schwache Grenzwert dieser Teilfolge. Dann gilt für alle $f \in L_q(I)$

$$\Big\| \int_I f(t)\, d\phi(t) \Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \int_I f(t)\, d\phi_{n_k}(t) \Big\| \le \lim_{k\to\infty} \int_I |f(t)| g_{n_k}(t)\, dt = \int_I |f(t)| g(t)\, dt.$$

Folglich gilt $\phi \in V_p(I,X)$ nach Proposition 1.3.13 und

$$\|\phi\|_{V_p} \le \|g\|_{L_p} \le \limsup_{k\to\infty} \|g_{n_k}\|_{L_p} \le \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_p}.$$

Sei nun $p = 1$. Nach Proposition 1.3.22 existiert für jedes $n \in \mathbf{N}$ ein $\psi_n \in V_1(I)$ mit $\|\psi_n\|_{V_1} = \|\phi_n\|_{V_1}$ und

$$\|T_n f\| \le \int_I |f(t)|\, d\psi(t) \qquad (f \in C_0(I)) \qquad (f \in C_0(I)).$$

Der Satz von Helly (siehe etwa [42]) sichert die Existenz einer Teilfolge (ψ_{n_k}) der Folge (ψ_n) und ein $\psi \in V_1(I)$ so, daß für alle $f \in C_0(I)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f(t)\, d\psi_{n_k}(t) = \int_I f(t)\, d\psi(t).$$

Dies impliziert zudem $\|\psi\|_{V_1} \le \limsup_{k\to\infty} \|\psi_{n_k}\|_{V_1}$. Für alle $f \in C_0(I)$ ergibt sich nun

$$\|Tf\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \int_I f(t)\, d\phi_{n_k}(t) \Big\| \le \lim_{k\to\infty} \int_I |f(t)|\, d\psi_{n_k}(t) = \int_I |f(t)|\, d\psi(t).$$

Nach Proposition 1.3.22 existiert folglich ein $\phi \in V_1(I,X)$ mit $\|\phi\|_{V_1} = \|\psi\|_{V_1} \le \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_1}$ und

$$\int_I f(t)\, d\phi(t) = Tf = \lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, d\phi_n(t) \qquad (f \in C_0(I)).$$

$\equiv$

Die soeben bewiesene Proposition macht eine Aussage über das Konvergenzverhalten einer Folge in $V_p(I,X)$. Im weiteren Verlauf wird jedoch häufig das Konvergenzverhalten einer Folge in $L_p(I,X)$ von Interesse sein. Es ist daher sinnvoll, das folgende Ergebnis gesondert festzuhalten.

Folgerung 1.3.27 *Sei $M \subseteq Y_q(I)$ eine totale Teilmenge, (g_n) sei eine beschränkte Folge in $L_p(I,X)$ und für alle $f \in M$ konvergiere die Folge $\left(\int_I f(t) g_n(t)\, dt\right)$ in X. Dann gibt es ein $\phi \in V_p(I,X)$ derart, daß für alle $f \in Y_q(I)$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t) g_n(t)\, dt = \int_I f(t)\, d\phi(t).$$

Darüber hinaus ist $\|\phi\|_{V_p} \le \limsup_{n\to\infty} \|g_n\|_{L_p}$.

Beweis Wird $\phi_n = \mathcal{I}g_n$ für $n \in \mathbf{N}$ gesetzt, so folgt aus Lemma 1.3.2

$$\limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_p} = \limsup_{n\to\infty} \|g_n\|_{L_p},$$

insbesondere ist die Folge (ϕ_n) in $V_p(I,X)$ beschränkt. Zudem gilt nach den Rechenregeln 1.2.22 und 1.3.9 für alle $f \in Y_q(I)$ die Gleichung

$$\int_I f(t)g_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,d\phi_n(t).$$

Die Folge (ϕ_n) erfüllt also die Voraussetzungen der soeben bewiesenen Proposition 1.3.26. Folglich existiert ein $\phi \in V_p(I,X)$ mit

$$\|\phi\| \le \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_p} = \limsup_{n\to\infty} \|g_n\|_{L_p}$$

und für alle $f \in L_q(I)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)g_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\,d\phi_n(t) = \int_I f(t)\,d\phi(t).$$

$\equiv$

Aus Proposition 1.3.26 (b) ergibt sich eine weitere Folgerung.

Folgerung 1.3.28 *Der normierte Raum $V_p(I,X)$ ist ein Banachraum.*

Beweis Sei zunächst $p > 1$. Ist (ϕ_n) eine Cauchyfolge in $V_p(I,X)$, so ist die Folge (ϕ_n) sicherlich eine Cauchyfolge in $PV_p(I,X)$. Da $PV_p(I,X)$ ein Banachraum ist, gibt es demnach ein $\phi \in PV_p(I,X)$ so, daß die Folge $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ in der PV_p-Norm konvergiert. Dann gilt aber für jedes $f \in L_q(I)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\,d\phi_n(t) = \int_I f(t)\,d\phi(t).$$

Somit genügt die Folge (ϕ_n) den Voraussetzungen aus Proposition 1.3.26 und es folgt $\|\phi\|_{V_p} \le \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{V_p} < \infty$, da Cauchyfolgen beschränkt sind.

Ist (ϕ_n) eine Cauchyfolge in $V_1(I,X)$, so bilden die Operatoren $T_n : C_0(I) \to X$ mit repräsentierender Funktion ϕ_n eine Cauchyfolge in Raum der beschränkten Operatoren $\mathbf{L}(C_0(I),X)$ und folglich konvergiert für jedes $f \in C_0(I)$ die Folge der Riemann-Stieltjes Untegrale $\int_I f(t)\,d\phi_n(t)$. Somit existiert nach Proposition 1.3.26 eine Funktion $\phi \in V_1(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\,d\phi_n(t) = \int_I f(t)\,\phi(t).$$

$\equiv$

1.3.5 Räume mit Radon-Nikodym Eigenschaft

Sei $\phi : I \to \mathbf{C}$ eine absolut stetige Funktion, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für alle paarweise nicht überlappenden Teilintervalle $[a_k, b_k] \subseteq I$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ gilt $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Dann gibt es laut Rudin [35] eine lokal Lebesgue integrierbare Funktion $f : I \to \mathbf{C}$ mit

$$\phi(s) = \phi(\beta(I)) + \int_{\beta(I)}^s f(t)\,dt \qquad (s \in I).$$

Man nennt f die Radon-Nikodym Ableitung von ϕ. Die Bezeichnung „Ableitung“ ist gerechtfertigt, weil ϕ in I fast überall differenzierbar ist und es gilt

$$f(s) = \phi'(s) \quad \text{für fast alle } s \in I.$$

Kurz gesagt bedeutet dies, daß jede komplexwertige absolut stetige Funktion ϕ eine Radon-Nikodym Ableitung ϕ' besitzt.

Die Frage liegt nahe, ob jede absolut stetige Funktion $\phi : I \to X$ eine lokal Bochner integrierbare Radon-Nikodym Ableitung besitzt? Das nächste Beispiel zeigt, daß diese Frage negativ beantwortet werden muß.

Beispiel 1.3.29 (Beispiel einer absolut stetigen Funktion ohne Radon-Nikodym Ableitung) Sei $I = [0,1]$ und $X = C[0,1]$ sei der Banachraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Die Funktion $\phi : [0,1] \to C[0,1]$ sei definiert durch $\phi(s)(t) = \min\{s,t\}$. Für jedes $s \in [0,1]$ ist die Funktion $\phi(s) : [0,1] \to \mathbf{C}$ stetig, so daß $\phi(s)$ tatsächlich in $C[0,1]$ liegt. Zudem gilt für $u, s \in [0,1]$ mit $s < u$

$$\frac{\|\phi(u) - \phi(s)\|}{u - s} = \frac{u - s}{u - s} = 1.$$

Folglich ist ϕ Lipschitz stetig und somit absolut stetig. Doch ϕ besitzt keine Radon-Nikodym Ableitung. Denn angenommen g wäre eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ. Dann würde für alle $s, t \in [0,1]$ folgen

$$\min\{s,t\} = \phi(s)(t) = \int_0^s g(u)(t)\,du.$$

Diese Gleichung wird aber nur erfüllt für $g(u)(t) = \chi_{[0,t]}(u) = \chi_{[u,1]}(t)$, d.h. $g(u) = \chi_{[u,1]}$. Doch offensichtlich liegt $g(u)$ dann für kein $u \in (0,1)$ in $C[0,1]$. Also kann g keine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ sein.

Definition 1.3.30 Ist X ein Banachraum mit der Eigenschaft, daß jede absolut stetige Funktion $\phi : [0,1] \to X$ eine Radon-Nikodym Ableitung $\phi' \in L_1([0,1], X)$ besitzt, so heißt X Banachraum mit *Radon-Nikodym Eigenschaft*.

Jeder reflexive Banachraum hat die Radon-Nikodym Eigenschaft (siehe [13]). Weitere Beispiele für Banachräume mit Radon-Nikodym Eigenschaft sind:

- Der Raum der absolut konvergenten Folgen l_1.

- Die Hardyräume holomorpher Funktionen auf der Kreisscheibe $H^p(D)$ für $p < \infty$.

- Die Räume $L_p(I, X)$ für $1 < p < \infty$, falls X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt.

Dagegen besitzt keiner der folgenden Räume die Radon-Nikodym Eigenschaft:

- Die Räume $L_1[0,1]$ und $L_\infty[0,1]$.

- Der Raum der stetigen Funktionen $C[0,1]$.

- Der Raum $\mathbf{L}(X)$ der beschränkten Operatoren auf dem Banachraum X, falls X einer der Räume l_p, $L_p[0,1]$ oder $C[0,1]$ ist.

Dies ist eine Auswahl aus einer Liste, die in dem Buch „Vector Measures“ von Diestel und Uhl [13] zu finden ist. Der Nachweis, daß der Raum $C[0,1]$ die Radon-Nikodym Eigenschaft nicht besitzt, wurde im Beispiel 1.3.29 geführt.

Besitzt X die Radon-Nikodym Eigenschaft und ist $I \subseteq \mathbf{R}$ ein kompaktes Teilintervall, so besitzt jede absolut stetige Funktion $\phi : I \to X$ eine Radon-Nikodym Ableitung in $L_1(I, X)$. Dies überlegt man sich folgendermaßen: Sei $I = [a,b]$ und $\phi : [a,b] \to X$ sei absolut stetig. Dann wird durch $\psi(t) = \phi(a(1-t) + bt)$ eine Funktion $\psi : [0,1] \to X$ definiert. Um zu zeigen, daß ψ absolut stetig ist, wird zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gewählt, daß für je endlich viele paarweise nicht überlappende Teilintervalle $[a_k, b_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ von $[a,b]$ mit $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < (b-a)\delta$ gilt $\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| < \varepsilon$. Ein solches δ existiert, da ϕ absolut stetig ist. Seien nun $[c_k, d_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ paarweise nicht überlappende Teilintervalle von $[0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n |d_k - c_k| < \delta$. Dann sind die durch $a_k = (1-c_k)a + c_k b$ und $b_k = (1-d_k)a + d_k b$ definierten Teilintervalle $[a_k, b_k]$ von $[a,b]$ paarweise nicht überlappend und es gilt $\sum_{k=1}^n b_k - a_k = \sum_{k=1}^n (b-a)(d_k - c_k) < (b-a)\delta$. Somit ist

$$\sum_{k=1}^n \|\psi(d_k) - \psi(c_k)\| = \sum_{k=1}^n \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| < \varepsilon$$

und die absolute Stetigkeit von ψ ist nachgewiesen. Da X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt, gibt es eine Bochner integrierbare Funktion $g : [0,1] \to X$ mit

$$\psi(s) = \psi(0) + \int_0^s g(t)\,dt \qquad (0 \le s \le 1).$$

Somit gilt für alle $s \in [a,b]$

$$\phi(s) = \psi\Big(\frac{s-a}{b-a}\Big) = \psi(0) + \int_0^{\frac{s-a}{b-a}} g(t)\,dt = \phi(a) + (b-a)^{-1}\int_a^s g\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)\,dt.$$

Die durch $f(t) = (b-a)^{-1} g\big(\frac{t-a}{b-a}\big)$ $(t \in [a,b])$ definierte Funktion ist somit eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ und es gilt $\|f\|_{L_1[a,b]} = \|g\|_{L_1[0,1]}$.

Mit derselben Argumentation kann gezeigt werden, daß X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt, falls für ein fest vorgegebenes kompaktes Intervall I jede absolut stetige Funktion $\phi : I \to X$ eine Bochner integrierbare Radon-Nikodym Ableitung besitzt.

Diese Überlegungen und weitere Ergebnisse sind in der folgenden Proposition zusammengefaßt.

Proposition 1.3.31 *Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Raum X besitzt die Radon-Nikodym Eigenschaft.*

(ii) *Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ so, daß jede absolut stetige Funktion $\phi \in V_1(I,X)$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_1(I,X)$ mit $\|f\|_{L_1} = \|\phi\|_{V_1}$ besitzt.*

(iii) *Für jedes abgeschlossene Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ und jede absolut stetige Funktion $\phi \in V_1(I,X)$ gibt es eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_1(I,X)$ mit $\|f\|_{L_1} = \|\phi\|_{V_1}$.*

Beweis Bewiesen werden die Implikationen (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i).

(i)$\Rightarrow$(iii) Sei X ein Banachraum mit Radon-Nikodym Eigenschaft. Ist I ein kompaktes Intervall und $\phi \in V_1(I,X)$ absolut stetig, so gibt es, wie oben gezeigt wurde, eine Bochner integrierbare Radon-Nikodym Ableitung f von ϕ. Es gilt daher für alle $s \in I$

$$\phi(s) = \int_{\beta(I)}^{s} f(t)\,dt$$

und somit ist $\|\phi\|_{V_1} = \|f\|_{L_1}$. Sei nun I abgeschlossen, aber nicht notwendigerweise beschränkt und $\phi \in V_1(I,X)$ sei absolut stetig. Dann existiert eine aufsteigende Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ kompakter Intervalle mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = I$. Zudem seien die I_k so gewählt, daß $\beta(I)$ für alle k in I_k enthalten ist. Sei ϕ_k die Einschränkung von ϕ auf das Intervall I_k und $f_k \in L_1(I_k,X)$ sei eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ_k. Dann ist $f_{k|I_j}$ für $k > j$ eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ_j. Da eine absolut stetige Funktion höchstens eine Radon-Nikodym Ableitung besitzen kann, folgt $f_{k|I_j} = f_j$ für $k > j$. Wir können somit $f : I \to X$ definieren durch $f(t) = f_k(t)$ für $t \in I_k$ und erhalten

$$\|f\|_{L_1} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L_1} = \lim_{k\to\infty} \|\phi_k\|_{V_1} = \|\phi\|_{V_1}.$$

Zudem exisitiert zu jedem $s \in I$ ein $k \in \mathbf{N}$ so, daß s in I_k liegt. $\phi(s)$ läßt sich daher schreiben als

$$\phi(s) = \phi_k(s) = \int_{\beta(I)}^{s} f_k(t)\,dt = \int_{\beta(I)}^{s} f(t)\,dt.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) versteht sich von selbst.

(ii)$\Rightarrow$(i) Gilt die Aussage (ii) für ein Intervall I, so gilt sie natürlich auch für jedes kompakte Teilintervall J von I. Dies impliziert nach unseren Vorüberlegungen die Behauptung (i), daß X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt. $\equiv$

Jede Lipschitz stetige Funktion $\phi : I \to X$ ist absolut stetig, denn für je endlich viele paarweise nicht überlappende Teilintervalle $[a_k, b_k] \subseteq I$, $k = 1, \ldots, n$ besteht die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| \leq \|f\|_{V_\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|.$$

Ist I ein kompaktes Intervall und besitzt X die Radon-Nikodym Eigenschaft, so hat demnach jede Lipschitz stetige Funktion $\phi : I \to X$ eine Radon-Nikodym Ableitung. Richtig ist auch die Umkehrung dieses Sachverhaltes, d.h. besitzt jede Lipschitz stetige

Funktion $\phi : [0,1] \to X$ eine Radon-Nikodym Ableitung, so hat X die Radon-Nikodym Eigenschaft. Der Beweis dieser Aussage verlangt einige Vorarbeiten.

Eine auf I definierte komplexe Funktion f heißt Funktion der *ersten Baire Klasse*, falls eine Folge (f_n) auf I stetiger Funktionen existiert, die punktweise gegen f konvergiert. Mit $B_1(I)$ wird der Raum der beschränkten Funktionen der ersten Baire Klasse bezeichnet. Wird $B_1(I)$ mit der Supremumsnorm versehen, so ist $B_1(I)$ ein Banachraum. Denn konvergiert die Folge (f_n) von Funktionen der ersten Baire Klasse gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist nach Natanson [26] $f \in B_1[0,1]$. Natanson beweist dies zwar nur für reellwertige Funktionen $f_n \in B_1(I)$, aber der komplexe Fall folgt aus dem reellen Fall durch getrennte Betrachtung der Real- und Imaginärteile der Funktionen f_n.

Lemma 1.3.32 *Sei $\phi \in V_1([0,1], X)$ und es sei $f \in B_1[0,1]$. Dann gilt:*

(i) *Ist (f_n) eine beschränkte Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert, so konvergiert die Folge (x_n) der Riemann-Stieltjes Integrale*

$$x_n = \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t)$$

in der Norm in X.

(ii) *Wird $(\phi, f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t)$ gesetzt, so hängt (ϕ, f) nicht von der speziellen Wahl der beschränkten Folge (f_n) in $C_0(I)$ ab, welche punktweise gegen f konvergiert.*

(iii) *Ist $\langle \mathrm{Var}_\phi, |f| \rangle$ wie in Lemma 1.3.16 definiert, so genügt die Norm von (ϕ, f) der Abschätzung $\|(\phi, f)\| \leq \langle \mathrm{Var}_\phi, |f| \rangle$.*

(iv) *Für jedes $s \in (0,1]$ ist $(\phi, \chi_{[0,s)}) = \phi(s)$*[5].

Beweis (i) Für alle $t \in [0,1]$ konvergiert die Folge $|f(t) - f_n(t)|$ gegen Null und die Funktionen $|f - f_n|$ sind allesamt Borel meßbar. Das Lemma 1.3.16 besagt also

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{Var}_\phi, |f - f_n| \rangle = 0.$$

Es gibt demnach zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ so, daß für alle $n > n(\varepsilon)$ gilt $\langle \mathrm{Var}_\phi, |f - f_n| \rangle < \frac{\varepsilon}{2}$. Seien $n, N > n(\varepsilon)$. Dann ergibt sich mit Lemma 1.3.16 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| \int_0^1 (f_N(t) - f_n(t))\, d\phi(t) \Big\| &\leq \int_0^1 |f_N(t) - f_n(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t) \\ &\leq \langle \mathrm{Var}_\phi, |f_N - f| \rangle + \langle \mathrm{Var}_\phi, |f - f_n| \rangle < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Folge der Riemann-Stieltjes Integrale $\int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t)$ erweist sich somit als Cauchyfolge in X und ist daher konvergent im Banachraum X.

[5]Beachte, daß $\chi_{[0,1)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1]$ bezeichnet, wegen der Vereinbarung auf Seite 8.

(ii) Sind (f_k) und (g_k) zwei beschränkte Folgen stetiger Funktionen, die beide punktweise gegen f konvergieren, so konvergiert ihre Differenz punktweise gegen Null. Somit konvergiert nach Lemma 1.3.16 die rechte Seite der Ungleichung

$$\Big\| \int_0^1 f_n(t) - g_n(t)\, d\phi(t) \Big\| \leq \langle \mathrm{Var}_\phi, |f_n - g_n| \rangle$$

gegen Null. Also ist $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\, d\phi(t)$.

(iii) In Lemma 1.3.21 wurde die Ungleichung $\| \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t) \| \leq \int_0^1 |f_n(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t)$ bewiesen. Da die punktweise Konvergenz der Folge (f_n) gegen f die punktweise Konvergenz der Folge $(|f_n|)$ gegen $|f|$ nach sich zieht, folgt

$$\|(\phi, f)\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t) \Big\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\, d\mathrm{Var}_\phi(t) = \langle \mathrm{Var}_\phi, |f| \rangle.$$

(iv) Sei $0 < s \leq 1$ und (f_n) sei eine beschränkte Folge stetiger Funktionen, welche punktweise gegen $\chi_{[0,s)}$ konvergiert. Dann gilt nach Lemma 1.3.16 für alle $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \langle x^*, \phi(s) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, d(x^* \circ \phi)(t) \\ &= \langle x^*, \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, d\phi(t) \rangle \\ &= \langle x^*, (\phi, \chi_{[0,s)}) \rangle. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungskette für alle $x^* \in X^*$ gilt, folgt die Behauptung $(\phi, \chi_{[0,s)}) = \phi(s)$. $\equiv$

Proposition 1.3.33 *Für einen Banachraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Raum X besitzt die Radon-Nikodym Eigenschaft.*

(ii) *Jede Lipschitz stetige Funktion $\phi : [0,1] \to X$ besitzt eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_\infty([0,1], X)$ mit $\|f\|_{L_\infty[0,1]} = \|\phi\|_{V_\infty[0,1]}$.*

(iii) *Für jedes abgeschlossene Intervall I und jede Lipschitz stetige Funktion $\phi : I \to X$ existiert eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_\infty(I, X)$ mit $\|f\|_{L_\infty(I)} = \|\phi\|_{V_\infty(I)}$.*

Beweis Zum Beweis der Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) fehlt nur noch der Nachweis, daß die Radon-Nikodym Ableitung f einer Lipschitz stetigen Funktion $\phi : I \to X$ essentiell beschränkt ist durch $\|\phi\|_{V_\infty(I)}$. Es genügt zu zeigen, daß für alle $x^* \in X^*$ die Ungleichung $\|x^* \circ f\|_{L_\infty} \leq \|x^*\| \|\phi\|_{V_\infty}$ besteht. Dazu wiederum genügt der Nachweis, daß das durch $x^* \circ f$ auf $L_1(I)$ definierte lineare Funktional $g \mapsto \int_0^1 g(t)(x^* \circ f)(t)\, dt$ $(g \in L_1(I))$ beschränkt ist und seine Norm sich abschätzen läßt durch $\|x^*\| \|\phi\|_{V_\infty}$. Dies jedoch folgt sofort unter Zuhilfenahme der Rechenregel 1.3.9 aus

$$\Big| \int_0^1 g(t)(x^* \circ f)(t)\, dt \Big| = \Big| \int_0^1 g(t)\, d(x^* \circ \phi)(t) \Big| \leq \|g\|_{L_1} \|x^*\| \|\phi\|_{V_\infty}.$$

Der Beweis von (ii)⇒(iii) verläuft analog zum Beweis von (ii)⇒(iii) in Proposition 1.3.31.

Es gelte nun (iii). Wir wollen zeigen, daß dies die Radon-Nikodym Eigenschaft von X impliziert. Sei also $\phi : [0,1] \to X$ absolut stetig. Die größte Schwierigkeit, die zu überwinden ist, besteht darin, daß die absolute Stetigkeit von ϕ nicht die Lipschitz Stetigkeit von ϕ nach sich zieht, so daß die Voraussetzung (iii) nicht auf ϕ angewandt werden kann. Ein kleiner Umweg ist deshalb notwendig.

1. Schritt: In einem ersten Schritt wird die absolute Stetigkeit der Funktion $\mathrm{Var}_\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ nachgewiesen.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für je endlich viele paarweise nicht überlappende Teilintervalle $[a_k, b_k]$ $(k = 1, \dots, n)$ von $[0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ gilt $\sum_{k=1}^n \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| < \varepsilon$.

Seien $[a_k, b_k]$ $(1 \le k \le n)$ paarweise nicht überlappende Teilintervalle von $[0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ und $Z_k = (t_{k,0}, \dots, t_{k,l(k)})$ sei eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a_k, b_k]$. Dann sind natürlich auch die durch die Zerlegungen Z_k definierten Intervalle $[t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ $(1 \le k \le n, 1 \le i \le l(k))$ paarweise nicht überlappend. Da außerdem

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{l(k)} |t_{k,i} - t_{k,i-1}| < \delta,$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{l(k)} \|\phi(t_{k,i}) - \phi(t_{k,i-1})\| < \varepsilon.$$

Diese Aussage gilt für alle Zerlegungen Z_k der Intervalle $[a_k, b_k]$. Weiter gilt für alle $k = 1, 2, \dots$

$$\sup_{|Z_k|} \sum_{i=1}^{l(k)} \|\phi(t_{k,i}) - \phi(t_{k,i-1})\| = \mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen des Intervalls $[a_k, b_k]$ genommen wird. Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k)\| < \varepsilon$$

und die Behauptung des ersten Schritts ist erwiesen.

2. Schritt: In diesem Schritt wird die Funktion f angegeben, die sich im dritten Schritt als Radon-Nikodym Ableitung von ϕ erweisen wird. Die skalarwertige Funktion Var_ϕ besitzt als absolut stetige Funktion eine Radon-Nikodym Ableitung $v \in L_1[0,1]$. Wir betrachten für $n \in \mathbf{N}$ die Mengen

$$E_n = \{t \in [0,1] : n - 1 \le |v(t)| < n\}.$$

Diese Mengen E_n sind meßbar und also gibt es für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Funktion χ_n in der ersten Baire Klasse, welche fast überall mit χ_{E_n} übereinstimmt. Für jede Funktion $h \in B_1[0,1]$ ergibt sich die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Var}_\phi, \chi_n |h| \rangle &= \int_0^1 \chi_n(t) |h(t)| v(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \chi_{E_n}(t) |h(t)| v(t)\, dt \le n \int_0^1 |h(t)|\, dt, \end{aligned}$$

da v auf E_n durch n beschränkt ist. Sei nun $g \in L_1[0,1]$ eine beschränkte Funktion und $h \in B_1[0,1]$ sei eine Funktion der ersten Baire Klasse, welche fast überall mit g übereinstimmt. Wird

$$T_n g = (\phi, \chi_n h)$$

festgesetzt, so gilt zum einen, daß $T_n g$ von der speziellen Wahl der Funktion $h \in B_1[0,1]$, welche fast überall mit g übereinstimmt, unabhängig ist. Ist nämlich $h_1 \in B_1[0,1]$ eine weitere Funktion, die fast überall mit g übereinstimmt, so folgt

$$\|(\phi, \chi_n(h - h_1)\| \leq \langle \mathrm{Var}_\phi, \chi_n |h - h_1| \rangle \leq n \int_0^1 |h(t) - h_1(t)|\, dt = 0$$

und also ist $(\phi, h) = (\phi, h_1)$. Zum anderen gilt

$$\|T_n g\| = \|(\phi, \chi_n h)\| \leq n \int_0^1 |h(t)|\, dt = n \int_0^1 |g(t)|\, dt.$$

Dies zeigt, daß $T_n : L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1] \to X$ ein beschränkter Operator ist, wenn der Raum $L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1]$ mit der L_1-Norm versehen wird. Da $L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1]$ dicht in $L_1[0,1]$ ist, läßt sich T_n eindeutig linear und stetig fortsetzen zu $T_n : L_1[0,1] \to X$. Aufgrund der Proposition 1.3.5 über die Repräsentation beschränkter Operatoren auf $L_1[0,1]$ existiert eine Lipschitz stetige Funktion $\phi_n : [0,1] \to X$, welche T_n repräsentiert. Auf dieses ϕ_n kann die Voraussetzung (ii) angewendet werden. Es gibt daher eine Radon-Nikodym Ableitung f_n von ϕ_n. Die Funktion f, die sich als Radon-Nikodym Ableitung von ϕ erweisen wird, wird nun definiert durch

$$f(t) = f_n(t) \qquad \text{falls } t \in E_n.$$

Da die Mengen E_n paarweise disjunkt sind, ist diese Definition eindeutig und da $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n = [0,1]$, wird f auf diese Weise für alle $t \in [0,1]$ definiert.

3. Schritt: Die Funktion ϕ_n, welche den Operator T_n repräsentiert, wird nach Proposition 1.3.5 definiert durch $\phi_n(s) = T_n \chi_{[0,s)}$ und die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit $(\phi, \chi_n \chi_{[0,s)})$ überein. Da nach Lemma 1.3.32 (iv) für $s \in [0,1]$ gilt $\phi(s) = (\phi, \chi_{[0,s)})$, ergibt sich für alle $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
\Big\| \phi(s) - \sum_{n=1}^{m} \phi_n(s) \Big\| &= \Big\| \Big(\phi, \chi_{[0,s)}(1 - \sum_{n=1}^{m} \chi_n) \Big) \Big\| \\
&\leq \Big\langle \mathrm{Var}_\phi, \chi_{[0,s)}(1 - \sum_{n=1}^{m} \chi_n) \Big\rangle \\
&= \int_0^1 \chi_{[0,s)}(t)(1 - \sum_{n=1}^{m} \chi_{E_n}(t)) v(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz konvergiert die rechte Seite dieser Ungleichung gegen Null für $m \to \infty$ und also ist $\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ für alle $s \in [0,1]$. Andererseits gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \chi_{[0,s)} \chi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \chi_{[0,s)} \chi_n \chi_n)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\chi_{[0,s)}\chi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \chi_{[0,s)}(t)\chi_n(t) f_n(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \chi_{[0,s)}(t) \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t) f_n(t)\,dt = \int_0^1 \chi_{[0,s)}(t) f(t)\,dt = \int_0^s f(t)\,dt, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\equiv$

Die vorangegangene Proposition bleibt richtig, wenn „Lipschitz stetig“ durch „beschränkte p-Variation“ ersetzt wird.

Proposition 1.3.34 *Sei $1 < p < \infty$. Für einen Banachraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Raum X besitzt die Radon-Nikodym Eigenschaft.*

(ii) *Jede Funktion $\phi : [0,1] \to X$ von beschränkter p-Variation besitzt eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p([0,1], X)$ mit $\|f\|_{L_p[0,1]} = \|\phi\|_{V_p[0,1]}$.*

(iii) *Für jedes abgeschlossen Intervall I und jede Funktion $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Variation existiert eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p(I, X)$ mit $\|f\|_{L_p(I)} = \|\phi\|_{V_p(I)}$.*

Beweis Wir beginnen mit dem Nachweis der Implikation (i)$\Rightarrow$(iii). Der Banachraum X besitze also die Radon-Nikodym Eigenschaft. Sei I zunächst ein kompaktes Intervall und es sei $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Variation. Da I kompakt ist, ist ϕ nach Lemma 1.3.10 absolut stetig und von beschränkter Variation in I. Folglich gibt es aufgrund von Proposition 1.3.31 eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_1(I, X)$ von ϕ. In Proposition 1.3.12 wurde gezeigt, daß die Radon-Nikodym Ableitung f einer Funktion von beschränkter p-Variation p-integrierbar ist und die V_p-Norm von ϕ mit der L_p-Norm von f übereinstimmt. Dies beweist (iii) für den Fall des kompakten Intervalls I.

Ist das Intervall I nicht kompakt und $\phi : I \to X$ von beschränkter p-Variation, so ist ϕ insbesondere in jedem kompakten Teilintervall von I von beschränkter p-Variation. Nach dem eben Gezeigten besitzt ϕ also eine Radon-Nikodym Ableitung f_J in jedem kompakten Teilintervall J von I. Da die Radon-Nikodym Ableitung eindeutig bestimmt ist, wird durch $f(t) = f_J(t)$ für $t \in J$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f : I \to X$ von ϕ definiert. Die Behauptung $\|f\|_{L_p(I)} = \|\phi\|_{V_p(I)}$ folgt nun wegen

$$\|f\|_{L_p(I)} = \sup_J \|f_{|J}\|_{L_p(J)} = \sup_J \|\phi_{|J}\|_{V_p(J)} = \|\phi\|_{V_p(I)},$$

wobei das Supremum über alle kompakten Teilintervalle J von I genommen wird.

Bei der Implikation (iii)$\Rightarrow$(ii) gibt es nichts zu zeigen.

Um zu beweisen, daß (ii) die Radon-Nikodym Eigenschaft von X impliziert, wird nachgewiesen, daß jede Lipschitz stetige Funktion $\phi : [0,1] \to X$ eine Radon-Nikodym Ableitung besitzt und dann wird die vorangegangene Proposition 1.3.33 angewendet.

Sei also $\phi : [0,1] \to X$ Lipschitz stetig. Dann gilt für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ von $[0,1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|}{t_k - t_{k-1}}\right)^p (t_k - t_{k-1}) \\ &\leq \|\phi\|_{V_\infty}^p \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \leq \|\phi\|_{V_\infty}^p.\end{aligned}$$

Die p-Variation von ϕ ist demnach beschränkt. Somit besitzt ϕ nach Voraussetzung eine Radon-Nikodym Ableitung f und wie im Beweis von Proposition 1.3.33 (i)$\Rightarrow$(ii) ergibt sich $f \in L_\infty([0,1], X)$ mit $\|f\|_{L_\infty[0,1]} = \|\phi\|_{V_\infty[0,1]}$. $\equiv$

Die beiden Propositionen 1.3.33 und 1.3.34 haben die folgende Konsequenz für die Repräsentation von Operatoren $T : L_q \to X$, falls X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt.

Folgerung 1.3.35 *Der Banachraum X besitze die Radon-Nikodym Eigenschaft und $T : L_q(I) \to X$ sei ein beschränkter Operator.*

(a) *Ist $p = \infty$, so existiert eine Funktion $f \in L_\infty(I, X)$ mit $\|f\|_{L_\infty} = \|T\|$.*

$$Tg = \int_I g(t) f(t)\, dt \qquad (g \in L_1(I)).$$

(b) *Ist $1 < p < \infty$ und ist $\phi \in PV_p(I, X)$ die repräsentierende Funktion von T, so ist jede der Aussagen* (i) *bis* (iv) *aus Proposition 1.3.13 äquivalent zu*

(v) *Es gibt eine Funktion $f \in L_p(I, X)$ mit $\|f\|_{L_p} = M$ und*

$$Tg = \int_I g(t) f(t)\, dt \qquad (g \in L_q(I)).$$

Beweis (a) Sei $T : L_1(I) \to X$ ein beschränkter Operator. Dann besagt Proposition 1.3.5, daß ein Lipschitz stetige Funktion $\phi : I \to X$ existiert, welche T repräsentiert. Da X voraussetzungsgemäß die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt, hat ϕ nach Proposition 1.3.33 eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_\infty(I, X)$ mit $\|f\|_{L_\infty} = \|\phi\|_{V_\infty}$. Da die Normen $\|\phi\|_{V_\infty}$ und $\|T\|$ übereinstimmen, folgt die erste Behauptung $\|f\|_{L_\infty} = \|T\|$. Zudem besagt die Rechenregel 1.3.9, daß für alle $g \in L_1(I)$ gilt

$$\int_I g(t) f(t)\, dt = \int_I f(t)\, d\phi(t) = T_g.$$

(b) Es genügt die Äquivalenz von (i) aus Proposition 1.3.13 und (v) nachzuweisen. Sei also $\phi \in V_p(I, X)$ die T repräsentierende Funktion mit $\|\phi\|_{V_p} = M$. Da X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt, gibt es laut Proposition 1.3.34 eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p(I, X)$ mit $\|f\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p} = M$. Zudem liefert die Rechenregel 1.3.9 für alle $g \in L_q(I)$ die Gleichung

$$\int_I g(t) f(t)\, dt = \int_I g(t)\, d\phi(t) = Tg.$$

$\equiv$

Folgerung 1.3.36 *Sei $1 < p \leq \infty$ und X besitze die Radon-Nikodym Eigenschaft. Weiter sei M eine totale Teilmenge von $L_q(I)$ und (f_n) eine beschränkte Folge in $L_p(I,X)$. Existiert für alle $g \in M$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_I g(t)f_n(t)\,dt$, so gibt es eine Funktion $f \in L_p(I,X)$ so, daß für alle $g \in L_q(I)$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g(t)f_n(t)\,dt = \int_I g(t)f(t)\,dt. \tag{1.17}$$

Beweis Unter den angegebenen Voraussetzungen existiert nach Folgerung 1.3.27 eine Funktion $\phi \in V_p(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g(t)f_n(t)\,dt = \int_I g(t)\,d\phi(t) \qquad (g \in L_q(I)).$$

Ist f die nach Proposition 1.3.33 ($p = \infty$) bzw. 1.3.34 ($1 < p < \infty$) existierende Radon-Nikodym Ableitung von ϕ, so folgt für alle $g \in L_q(I)$ die Gleichung (1.17) aus der Rechenregel 1.3.9. $\equiv$

1.3.6 Randnotiz zur Geschichte der p-Variation

Funktionen von beschränkter p-Variation wurden erstmals im Jahr 1938 von Bochner und Taylor [7] definiert. Sie nutzten diese Funktionen jedoch nicht zur Repräsentation beschränkter Operatoren

$$T : L_q \to X,$$

sondern sie zeigten, daß jedes lineare Funktional

$$\tau : L_q(X) \to \mathbf{C}$$

repräsentiert werden kann durch eine Funktion $\phi \in V_p(X^*)$. Wie diese Repräsentation durchgeführt wird, kann in Proposition 2.2.17 dieser Arbeit nachgelesen werden. Für Bochner und Taylor bestand jedoch keine Notwendigkeit, Funktionen von beschränkter p-Semivariation einzuführen, da diese für die Untersuchungen über lineare Funktionale auf $L_p(X)$ keine Rolle spielen.

Der Begriff der p-Semivariation taucht 1967 bei Dinculeanu [14] auf. Dem damaligen Zeitgeist entsprechend formuliert Dinculeanu p-Variation und p-Semivariation jedoch für Vektormaße ν, welche auf einem Maßraum (Ω,μ) definiert sind. Seine Definition der p-Variation eines Vektormaßes ν lautet

$$\|\nu\|_{V_p} = \sup\{\sum_k |c_k| \|\nu(E_k)\|\},$$

wobei das Supremum über alle Ω-einfachen Funktionen $f = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ mit $\|f\|_{L_q} = 1$ genommen wird. Ein genauer Blick auf diese Definition macht die Übereinstimmung mit der in (1.8) definierten Dinculeanu Norm eines Operators $T : L_q \to X$ deutlich. In der Tat wird für jedes Vektormaß ν mit $\|\nu\|_{V_p} < \infty$ durch

$$T\Big(\sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}\Big) = \sum_{k=1}^n c_k \nu(E_k) \tag{1.18}$$

ein beschränkter Operator $T : L_q \to X$ definiert, dessen Dinculeanu Norm endlich ist. Im weiteren Verlauf des Buches [14] beweist Dinculeanu die Formel

$$\|\nu\|_{V_p} = \sup \Big(\sum_k \frac{\|\nu(E_k)\|^p}{\mu(E_k)^{p-1}} \Big)^{1/p},$$

wobei das Supremum über alle Wahlen paarweiser disjunkter μ-meßbarer Mengen $E_1, \ldots, E_n$ genommen wird. Ist μ das Lebesgue Maß, so entspricht diese Formel der in dieser Arbeit gegebenen Definition der p-Variation einer X-wertigen Funktion.

Die p-Semivariation eines Vektormaßes wird bei Dinculeanu entsprechend definiert durch

$$\|\nu\|_{PV_p} = \sup\{\sum_k c_k \nu(E_k)\}, \tag{1.19}$$

wobei auch hier das Supremum über alle Ω-einfachen Funktionen $f = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ mit $\|f\|_{L_q} = 1$ genommen wird. Wieder zeigt ein scharfer Blick, daß die so definierte p-Semivariation von ν mit der Norm des durch (1.18) definierten Operators übereinstimmt. So nimmt es denn nicht Wunder, daß die p-Semivariation von ν durch die folgende Formel berechnet werden kann:

$$\|\nu\|_{PV_p} = \sup \Big(\sum_k \frac{|\langle x^*, \nu(E_k)\rangle|^p}{\mu(E_k)^{p-1}} \Big)^{1/p},$$

wobei das Supremum über alle Wahlen paarweiser disjunkter μ-meßbarer Mengen $E_1, \ldots, E_n$ und alle $x^* \in U_{X^*}$ genommen wird. Diese Formel wird in [14] in einem Atemzug mit der Formel (1.19) zur Berechnung der p-Variation genannt und bewiesen.

Das im ersten Abschnitt häufig zitierte Buch von Diestel und Uhl [13] verdient hier eine Erwähnung, weil es erstaunlicherweise die p-Variation links liegen läßt. Erstaunlich deshalb, weil in diesem Buch der gesammte Apparat zur Behandlung der Repräsentation von Operatoren auf L_q bereitgestellt wird. Eingesetzt wird dieser Apparat jedoch nur für den Spezialfall, daß X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt. Wie wir in der Folgerung 1.3.35 gesehen haben, wird unter dieser Voraussetzung in der Tat nur die Theorie der $L_q(X)$-Funktionen benötigt. Das oben angesprochene Erstaunen wird jedoch ein bißchen gedämpft, wenn man sich folgendes Zitat aus [13] vor Augen hält: „Allthough we treat in detail the representation of operators on L_1, L_∞ and $C(\Omega)$, the representation of the general operator on L_p for $1 < p < \infty$ is conspicuously absent. Our reason for this is that we do not know any applications of this representation theory.“

Diese Situation änderte sich spätestens 1987 mit dem Erscheinen von Blascos Arbeit [5] mit dem Titel „Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators“. In dieser Arbeit werden Räume von Operatoren $T : L_q[0, 2\pi] \to X$ identifiziert mit Hardyräumen harmonischer Funktionen h auf der Einheitsscheibe, für welche die Norm

$$\|h\|_{h_p} = \sup_{0<r<1} \Big(\int_0^{2\pi} \|h(re^{i\theta})\| \, d\theta \Big)^{1/p}$$

endlich ist. In dieser Situation ist es natürlich von Interesse, solche Operatoren repräsentieren zu können. Die Repräsentation solcher Operatoren durch Vektormaße von beschränkter p-Variation führt Blasco dann auch in einer nachfolgenden Arbeit [6] aus und kann so die Hardyräume harmonischer Funktionen auf der Kreisscheibe identifizieren mit Räumen von Vektormaßen von beschränkter p-Variation. Eine entsprechende Repräsentation für Hardyräume harmonischer Funktionen in der rechten Halbebene wird in dieser Arbeit im ersten Paragraphen des zweiten Kapitels ausgeführt.

In jüngster Zeit wurden Funktionen von beschränkter p-Variation bzw. beschränkter p-Semivariation von Weis [40] zur Untersuchung der Widder Inversion (siehe [42]) der vektorwertigen Laplace Transformation in $L_p(X)$ zum Einsatz gebracht. Dies ermöglicht ihm ein dezidiertes Studium von L_p-Lösungen des Abstrakten Cauchy Problems (siehe [41] und den Abschnitt „L_p-Lösungen des abstrakten Cauchy Problems“ in dieser Arbeit). So stammen denn auch die in dieser Arbeit gegebenen Definitionen der p-Variation und p-Semivariation von Weis [40] und die Art und Weise, wie die Theorie dieser Funktionen hier zum Einsatz gebracht wird, ist zum großen Teil durch Weis [40] inspiriert.

Die Widder Inversion der Laplace Transformation funktioniert nicht nur für L_p-Funktionen, sondern kann allgemein auf Banachfunktionenräumen L mit einigen zusätzlichen Eigenschaften betrachtet werden. Will man die Widder Inversion der Laplace Transformation nun in vektorwertigen Banachfunktionenräumen betrachten, so muß man das Konzept der Funktionen von beschränkter p-Variation entsprechend verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung wird in Teske [38] ausgeführt und bildet den derzeitigen Endpunkt der Untersuchung von Funktionen mit beschränkter p-Variation.

1.4 Banachraumwertige holomorphe und harmonische Funktionen

1.4.1 Banachraumwertige holomorphe Funktionen

„Any two reasonible-sounding definitions of an analytic function with values in a Banach space are equivalent “ lautet ein Zitat, welches Garnett [17] Hoffman [22] zuschreibt. Ergänzen könnte man dieses Zitat mit dem Satz: „Jede Aussage, die für komplexwertige holomorphe Funktionen richtig ist, gilt auch für banachraumwertige holomorphe Funktionen.“ Dieses Zitat spiegelt insbesondere die Tatsache wieder, daß komplexe Differenzierbarkeit (siehe Definiton 1.4.1) und schwache Holomorphie (siehe Folgerung 1.4.9 (i)) einer banachraumwertigen Funktion gleichwertig sind. So nimmt es denn nicht Wunder, daß ein großer Teil der Ergebnisse aus der Theorie komplexwertiger holomorpher Funktionen für banachraumwertige holomorphe Funktionen richtig ist. Die Beweise für banachraumwertige holomorphe Funktionen können dabei fast immer mittels linearer Funktionale auf bekannte Ergebnisse aus der komplexen Funktionentheorie zurückgeführt werden. Auf diese Art kann und wird u.a. gezeigt werden, daß jede holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist (siehe Folgerung 1.4.10) und daß sowohl der Cauchysche Integralsatz als auch die Cauchysche Integralformel gelten (siehe Proposition 1.4.4).

In diesem Abschnitt bezeichnet Ω immer eine nicht leere, offene Teilmenge der komplexen Ebene. Ist z_0 eine komplexe Zahl und $r > 0$, so bezeichnet

$$K_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \;:\; |z_0 - z| < r\}$$

den offenen Kreis um z_0 mit Radius r und $\overline{K}_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r\}$ bezeichnet den abgeschlossenen Kreis mit Radius r um z_0.

Definition 1.4.1 Sei $z_0 \in \Omega$. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *komplex differenzierbar* in z_0, falls der Limes

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}$$

existiert. Dies bedeutet ausführlich: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß für alle $z \in K_\delta(z_0) \cap \Omega$ mit $z \neq z_0$ gilt

$$\left\| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - f'(z_0) \right\| < \varepsilon.$$

Ist $f : \Omega \to X$ in jedem Punkt von Ω komplex differenzierbar, so heißt f *holomorph* in Ω.

Bevor Aussagen über banachraumwertige holomorphe Funktionen gemacht werden können, müssen einige Begriffe aus der komplexen Funktionentheorie geklärt werden. Die folgenden Bezeichnungen und Propositionen sind dem Buch „Real and Complex Analysis“ von W. Rudin [35] entnommen. In diesem Buch finden sich auch die Beweise, die hier nicht ausgeführt werden.

Jede stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ eines kompakten Intervalls in die komplexe Ebene heißt *Kurve.* Das Intervall $[a, b]$ wird Parameterintervall von γ genannt, das Bild von γ in $\mathbf{C}$ wird mit γ^* bezeichnet und γ heißt Parametrisierung von γ^*. Häufig wird die Schreibweise $(\gamma(t) : a \leq t \leq b)$ zur Darstellung der Kurve γ benutzt. Die Kurve γ heißt geschlossen, falls gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ein *Pfad* ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve.

Sind γ_1 und γ_2 zwei Pfade, deren Parameterintervalle benachbart sind, so bezeichnet das Paar $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ den aus γ_1 und γ_2 zusammengesetzten Pfad, d.h.: Sind $[a, b]$ bzw. $[b, c]$ die Parameterintervalle von γ_1 bzw. γ_2, so ist

$$\gamma = (\gamma_k(t) : a \leq t \leq c \text{ und } t \in I_k).$$

Für einen Pfad $\gamma = (\gamma(t) : a \leq t \leq b)$ bezeichnet $-\gamma : [-b, -a] \to \mathbf{C}$ den Pfad, der aus γ durch Änderung der Orientierung besteht, d.h. es ist

$$-\gamma = (\gamma(-t) : -b \leq t \leq -a).$$

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ ein Pfad und f sei eine auf γ^* definierte stetige Funktion mit Werten in X. Dann ist das Integral von f über γ definiert als

$$\int_\gamma f(u)\, du = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung existiert als Bochner Integral, da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist und die Funktion $f \circ \gamma \cdot \gamma'$ beschränkt auf $[a, b]$ ist.

Proposition 1.4.2 *Sei γ ein geschlossener Pfad und es sei $\Omega = \mathbf{C} \setminus \gamma^*$. Wird* Ind_γ *definiert durch*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{du}{u-z} \qquad (z \in \Omega),$$

so ist Ind_γ *eine ganzzahlige Funktion auf Ω, welche konstant ist auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω und es ist* $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ *für alle z aus der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von Ω.*

Man nennt $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ den *Index* von z bezüglich γ. Ist z.B. γ der positiv orientierte Kreis mit Radius $r > 0$ um $z \in \mathbf{C}$, d.h.

$$\gamma = (z + re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

so ist

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{du}{u-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-1} ire^{i\theta}\, d\theta = 1.$$

Aufgrund der vorangegangenen Proposition ist also $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 1$ für $|z-w| < r$ und $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$ für $|z-w| > r$.

Es seien γ_0 und γ_1 zwei geschlossene Kurven in Ω, beide mit Parameterintervall $I = [0,1]$. Die Kurven γ_0 und γ_1 heißen *Ω-homotop*, falls eine stetige Abbildung H von $I \times I$ in die komplexe Ebene existiert mit

$$H(s,0) = \gamma_0(s), \;\; H(s,1) = \gamma_1(s), \;\; H(0,t) = H(1,t).$$

Eine geschlossene Kurve heißt *null-homotop* in Ω, falls sie homotop zu einer konstanten Kurve γ ist, d.h. γ^* besteht nur aus einem Punkt. Man nennt eine offene, zusammenhängende Teilmenge Ω der komplexen Zahlen *einfach zusammenhängend* , falls jede geschlossene Kurve null-homotop in Ω ist.

In dieser Arbeit treten fast nur sternförmige Teilmengen der komplexen Zahlen auf. Dabei heißt eine Teilmenge Ω von $\mathbf{C}$ *sternförmig,* falls es einen Punkt $z_0 \in \Omega$ so gibt, daß für jeden weiteren Punkt $z \in \Omega$ die Verbindungsstrecke von z und z_0 in Ω enthalten ist.

Lemma 1.4.3 *Jede sternförmige Teilmenge von* $\mathbf{C}$ *ist einfach zusammenhängend.*

Beweis Sei γ eine geschlossene Kurve in Ω mit Parameterintervall $I = [0,1]$. Wird H auf $I \times I$ definiert durch

$$H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tz_0,$$

so ist sofort ersichtlich, daß γ homotop zur konstanten Kurve mit Bild $\{z_0\}$ ist. $\equiv$

Die Integralformel und der Satz von Cauchy für banachraumwertige holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebieten kann sehr einfach aus dem entsprechenden Resultat der komplexen Funktionentheorie gefolgert werden.

Proposition 1.4.4 *Sei Ω eine einfach zusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlen und $f : \Omega \to X$ sei eine holomorphe Funktion. Ist γ ein geschlossener Pfad in Ω, so gilt für alle $z \in \mathbf{C} \setminus \gamma^*$ die Integralformel von Cauchy*

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du$$

und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_\gamma f(u)\, du = 0.$$

Beweis Die Holomorphie der banachraumwertigen Funktion f impliziert für jedes lineare Funktional x^* auf X die Holomorphie der komplexen Funktion $x^* \circ f : \Omega \to \mathbf{C}$. Für komplexe Funktionen gilt die Cauchysche Integralformel, also ist

$$x^*(f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^*(f(u))}{u - z}\, du = x^*\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du\Big) \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \gamma^*).$$

Zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes wird ein beliebiges $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ gewählt und es wird $F(u) = (u - z)f(u)$ gesetzt. Dann ergibt sich wegen $F(z) = 0$ aus der soeben bewiesenen Cauchyschen Integralformel

$$\int_\gamma f(u)\, du = \int_\gamma \frac{F(u)}{u - z}\, du = 2\pi i F(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

$\equiv$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß eine banachraumwertige Funktion f bereits dann holomorph ist, wenn für jedes T in einem normierenden Teilraum die Funktion $T \circ f$ holomorph ist. Dabei heißt ein abgeschlossener Teilraum $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}(X, Y)$ der stetigen linearen Abbildungen des Banachraums X in den Banachraum Y *normierend* für X, falls für jedes $x \in X$ gilt

$$\|x\|_X = \sup\{\|Tx\|_Y \ : \ T \in U_{\mathbf{F}}\}.$$

Beispiel 1.4.5 (1) Der Dualraum $\mathbf{F} = X^* = \mathbf{L}(X, \mathbf{C})$ eines Banachraums X ist der wohl populärste normierende Teilraum für X.

(2) Für $x \in X$ sei $\tau_x : \mathbf{L}(X; Y) \to Y$ definiert durch $\tau_x(T) = Tx$. Dann ist $\{\tau_x : x \in X\}$ ein normierender Teilraum für $\mathbf{L}(X, Y)$. Dies ist die Aussage des nächsten Lemmas.

Lemma 1.4.6 *Für jedes $x \in X$ ist τ_x beschränkt, die Operatornorm von τ_x stimmt mit der Norm von x überein und der Teilraum $\mathbf{F} = \{\tau_x \ : \ x \in X\}$ von $\mathbf{L}(\mathbf{L}(X, Y), Y)$ ist ein normierender Teilraum für $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Beweis Sei $x \in X$. Aus der Definition der Operatornorm folgt die Ungleichung

$$\|\tau_x\| = \sup_{\|T\| \le 1} \|\tau_x(T)\| = \sup_{\|T\| \le 1} \|Tx\| \le \|x\|.$$

Zum Beweis der Ungleichung $\|x\| \leq \|\tau_x\|$ wird $y \in U_Y$ und $x^* \in U_{X^*}$ mit $x^*(x) = \|x\|$ gewählt. Wird nun $T : X \to Y$ definiert durch $T\tilde{x} = x^*(\tilde{x})y$, so ist $\|T\| \leq \|x^*\|\|y\| = 1$ und $\|\tau_x(T)\| = \|Tx\| = \|x^*(x)y\| = \|x\|$. Das beweist

$$\|\tau_x\| = \sup_{\|\widetilde{T}\| \leq 1} \|\tau_x(\widetilde{T})\| \geq \|\tau_x(T)\| = \|x\|.$$

Aus der Isometrie der Abbildung, die jedem $x \in X$ den Operator τ_x zuordnet, folgt insbesondere die Abgeschlossenheit von $\mathbf{F}$ in $\mathbf{L}(\mathbf{L}(X,Y),Y)$.

Sei nun $T \in \mathbf{L}(X,Y)$. Dann ist

$$\|T\| = \sup_{x \in U_X} \|Tx\| = \sup_{x \in U_X} \|\tau_x(T)\| = \sup\{\tau(T) \ : \ \tau \in U_{\mathbf{F}}\},$$

$\mathbf{F}$ ist also normierend für $\mathbf{L}(X,Y)$. $\equiv$

Lemma 1.4.7 *Sei $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}(X,Y)$ ein normierender Teilraum für X und die Funktion $f : \Omega \to X$ habe die Eigenschaft, daß $T \circ f : \Omega \to Y$ für jedes $T \in \mathbf{F}$ stetig ist. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega$ beschränkt.*

Beweis Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. In jedem Fall ist $T \circ f$ für jedes $t \in \mathbf{F}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge K beschränkt. Für jedes $u \in K$ sei die lineare Abbildung $\tau_u : \mathbf{F} \to Y$ definiert durch $\tau_u(T) = T(f(u))$. Dann ist τ_u linear und wegen $\|\tau_u(T)\| \leq \|T\|\|f(u)\|$ ist τ_u beschränkt. Zudem gilt für alle $T \in \mathbf{F}$

$$\sup_{u \in K} \|\tau_u(T)\| = \sup_{u \in K} \|T(f(u))\| < \infty.$$

Somit kann der Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit auf die Menge $\{\tau_u \ : \ u \in K\}$ angewendet werden und es ergibt sich

$$\sup_{u \in K} \|\tau_u\| < \infty.$$

Nun ist aber $\|\tau_u\| = \sup_{T \in U_{\mathbf{F}}} \|T(f(u))\| = \|f(u)\|$, da $\mathbf{F}$ normierend ist. Folglich ist $\sup_{u \in K} \|f(u)\| < \infty$. $\equiv$

Die folgende Proposition macht deutlich, weshalb normierende Teilräume bei der Untersuchung banachraumwertiger holomorpher Funktionen von Bedeutung sind.

Proposition 1.4.8 *Es sei $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}(X,Y)$ ein normierender Teilraum. Dann gilt: Eine X-wertige Funktion $f : \Omega \to X$ ist genau dann holomorph in Ω, falls für jedes $T \in \mathbf{F}$ die Y-wertige Funktion $T \circ f : \Omega \to Y$ holomorph in Ω ist.*

Beweis Sei zunächst f holomorph in Ω. Ist $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ und $z_0 \in \Omega$, so impliziert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = f'(z_0)$$

die Konvergenz

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(T \circ f)(z_0) - (T \circ f)(z)}{z_0 - z} = T \circ f'(z_0),$$

da T stetig und linear ist. Das beweist die Holomorphie von $T \circ f$ in Ω für alle $T \in \mathbf{L}(X, Y)$, also insbesondere für alle $T \in \mathbf{F}$.

Sei nun umgekehrt $T \circ f$ holomorph in Ω für jedes $T \in \mathbf{F}$. Dann ist $T \circ f$ insbesondere stetig auf Ω. Ist $z_0 \in \Omega$, so wird $r > 0$ so gewählt, daß $K_{2r}(z_0)$ in Ω enthalten ist. Es bezeichne γ den positiv orientierten Kreis mit Radius r um z_0. Da $T \circ f$ für $T \in \mathbf{F}$ holomorph in Ω ist, kann die Cauchysche Integralformel angewandt werden und es ergibt sich für alle $z \in K_r(z_0)$

$$(T \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(T \circ f)(u)}{u - z} \, du = \frac{1}{2\pi i} T \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \, du.$$

Da diese Gleichung für alle $T \in \mathbf{F}$ besteht, folgt für alle $z \in K_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \, du. \tag{1.20}$$

Ist $z \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ eine von z_0 verschiedene komplexe Zahl, so liefert die Formel (1.20) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(u - z_0)^2} \, du \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_\gamma f(u) \frac{z - z_0}{(u - z_0)^2 (u - z)} \, du \right\| \\ &\leq r |z - z_0| \sup_{u \in \gamma^*} \frac{\|f(u)\|}{|(u - z_0)^2 (u - z)|} \\ &\leq |z - z_0| \frac{2}{r^2} \sup_{u \in \gamma^*} \|f(u)\|. \end{aligned}$$

Da $\gamma^* \subseteq \mathbf{C}$ kompakt ist, ist $\sup_{u \in \gamma^*} \|f(u)\|$ nach Lemma 1.4.7 eine endliche Zahl. Somit konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung gegen Null für $z \to z_0$. Das beweist die komplexe Differenzierbarkeit von f im Punkt z_0. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt die Holomorphie von f in Ω. $\equiv$

Folgerung 1.4.9 *Sei $\mathbf{F} \subseteq X^*$ ein normierender Teilraum für X.*

(i) *Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist genau dann holomorph in Ω, wenn für jedes $x^* \in \mathbf{F}$ die komplexwertige Funktion $x^* \circ f$ holomorph in Ω ist.*

(ii) *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbf{L}(Y, X)$ ist genau dann holomorph in Ω, wenn für jedes $y \in Y$ und jedes $x^* \in \mathbf{F}$ die komplexe Funktion $z \mapsto x^*(f(z)y)$ holomorph in Ω ist.*

Beweis Die Aussage (i) ist ein echter Spezialfall von Proposition 1.4.8 und es bleibt nichts mehr zu beweisen.

Zum Beweis von (ii) seien die Operatoren $\tau_y : \mathbf{L}(Y, X) \to X$ wie in Lemma 1.4.6 definiert durch $\tau_y(T) = Ty$. Dann ist $\mathbf{F} = \{\tau_y \ : \ y \in Y\}$ nach Lemma 1.4.6 ein normierender Teilraum für $\mathbf{L}(Y, X)$. Also ist $f : \Omega \to \mathbf{L}(X, Y)$ genau dann holomorph in Ω, wenn $\tau_y \circ f : \Omega \to X$ für jedes $y \in Y$ holomorph in Ω ist. Die Funktion $\tau_y \circ f$

wiederum ist genau dann holomorph in Ω, wenn für jedes $x^* \in F$ die komplexe Funktion $x^* \circ \tau_y \circ f$ holomorph in Ω ist. Da für alle $z \in \Omega$ gilt $x^* \circ \tau_y \circ f(z) = x^*(f(z)y)$, folgt (ii). $\equiv$

Aus Folgerung 1.4.9 (i) ersieht man insbesondere, daß eine Funktion $f : \Omega \to X$ bereits dann holomorph ist, wenn f schwach holomorph ist. Dabei heißt f *schwach holomorph* , falls $x^* \circ f$ für jedes $x^* \in X^*$ eine komplexe holomorphe Funktion ist.

Als weitere Folgerung aus Folgerung 1.4.9 ergibt sich die für komplexe holomorphe Funktionen wohlbekannte Tatsache, daß jede holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Folgerung 1.4.10 *Sei $f : \Omega \to X$ eine in Ω holomorphe Funktion. Dann ist f beliebig oft differenzierbar in Ω.*

Beweis Ist f holomorph in Ω, so ist für jedes lineare Funktional x^* auf X die Funktion $x^* \circ f$ beliebig oft komplex differenzierbar. Das bedeutet insbesondere, daß $x^* \circ f'$ holomorph ist für alle $x^* \in X^*$. Nach Folgerung 1.4.9 ist demnach f' holomorph in Ω. Die Ableitung einer holomorphen Funktion ist also holomorph. Mit Induktion folgt nun, daß für alle n die n-te Ableitung von f existiert und eine in Ω holomorphe Funktion ist. $\equiv$

Da schwache Holomorphie bereits starke Holomorphie impliziert, kann aus der komplexen Funktionentheorie direkt übernommen werden, daß das Produkt einer komplexwertigen und einer banachraumwertigen holomorphen Funktion holomorph ist. Ein wenig rechnen muß man dagegen zum Nachweis des folgenden Lemmas.

Lemma 1.4.11 *Die Funktionen $F : \Omega \to X$ und $G : \Omega \to X^*$ seien holomorph in Ω. Dann ist die komplexwertige Funktion $h : \Omega \to \mathbf{C}$ definiert durch $h(z) = \langle F(z), G(z)\rangle$ holomorph in Ω.*

Beweis Seien $z_0, z \in \Omega$. Ist $z \neq z_0$, so gilt

$$
\begin{aligned}
& \frac{\langle F(z_0), G(z_0)\rangle - \langle F(z), G(z)\rangle - \langle F(z_0) - F(z), G(z_0)\rangle - \langle F(z_0), G(z_0) - G(z)\rangle}{z_0 - z} \\
= \; & \frac{\langle F(z_0) - F(z), G(z)\rangle - \langle F(z_0) - F(z), G(z_0)\rangle}{z_0 - z} \\
= \; & \frac{\langle F(z_0) - F(z), G(z) - G(z_0)\rangle}{z_0 - z}. \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

Ist $U \subseteq \Omega$ eine offene Menge, deren Abschluß in Ω enthalten ist, so sind die Normen der Differenzenquotienten $\frac{F(z_0)-F(z)}{z_0-z}$ sowie $\frac{G(z_0)-G(z)}{z_0-z}$ in U beschränkt. Da F und G komplex differenzierbar und somit stetig in z_0 sind, konvergiert das rechte Ende (1.21) der obigen Gleichungskette gegen Null für $z \to z_0$ und es ergibt sich

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\langle F(z_0), G(z_0)\rangle - \langle F(z), G(z)\rangle}{z_0 - z} = \langle F'(z_0), G(z_0)\rangle + \langle F(z_0), G'(z_0)\rangle.$$

$\equiv$

Die folgende Proposition ist als Satz von Morera bekannt und wird in [35] bewiesen.

Proposition 1.4.12 *Sei $F : \Omega \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion. Gilt für jedes in Ω gelegene abgeschlossene Dreieck D*

$$\int_{\partial D} F(u)\, du = 0,$$

wobei ∂D die natürliche, positiv orientierte Parametrisierung des Randes von D bezeichnet, so ist F holomorph in Ω.

Mit Moreras Satz können folgendermaßen holomorphe Funktionen konstruiert werden:

Proposition 1.4.13 *Sei I wie üblich ein abgeschlossenes Intervall und $K : \Omega \times I \to X$ sei eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes $z \in \Omega$ ist $K(z,\cdot) : I \to X$ meßbar in I.*

(ii) *Für fast alle $t \in I$ ist $K(\cdot,t) : \Omega \to X$ holomorph in Ω.*

(iii) *Für alle abgeschlossenen Mengen $V \subseteq \Omega$ ist $\int_I \sup_{z\in V} \|K(z,t)\|\, dt < \infty$.*

Dann existiert für alle $z \in \Omega$ das Bochner Integral $F(z) = \int_I K(z,t)\, dt$ und die Funktion $F : \Omega \to X$ ist holomorph in Ω.

Beweis Aus (iii) folgt insbesondere für jedes $z \in U$ die Beschränktheit des Integrals $\int_I \|K(z,t)\|\, dt$. Da die Abbildung $K(z,\cdot)$ voraussetzungsgemäß meßbar ist, ist die Existenz des Bochner Integrals $\int_I K(z,t)\, dt$ eine Konsequenz aus Proposition 1.2.5.

Zum Beweis der Holomorphie von F genügt nach Folgerung 1.4.9 der Nachweis, daß die komplexwertige Funktion $x^* \circ F$ für jedes lineare Funktional $x^* \in X^*$ holomorph in Ω ist. Dieser Nachweis wird mit dem Satz von Morera geführt. Sei $D \subseteq \Omega$ ein abgeschlossenes Dreieck, dessen Rand ∂D durch $\phi : [0,1] \to \mathbf{C}$ parametrisiert wird. Dann gilt wegen (iii)

$$\int_I \int_0^1 |x^* \circ K(\phi(u),t)\phi'(u)|\, dudt \le \mathrm{Umfang}(D) \int_I \sup_{z\in D} \|K(z,t)\|\, dt < \infty,$$

wobei Umfang(D) den Umfang des Dreiecks D bezeichnet. Somit gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_{\partial D} x^* \circ F(z)\, dz = \int_{\partial D} \int_I x^* \circ K(z,t)\, dtdz = \int_I \int_{\partial D} x^* \circ K(z,t)\, dzdt = 0,$$

da die Abbildung $z \mapsto x^* \circ K(z,t)$ für fast alle $t \in I$ holomorph in Ω ist. Der Satz von Morera liefert nun die Holomorphie von $x^* \circ F$ in Ω. $\equiv$

1.4.2 Banachraumwertige harmonische Funktionen

Ist $f : \Omega \to X$ eine holomorphe Funktion mit $a + ib \mapsto f(a + ib)$, so existieren die zweiten partiellen Ableitungen f_{aa} von f bezüglich der ersten Komponente und f_{bb} von f bezüglich der zweiten Komponente und es folgt

$$f_{aa} + f_{bb} = 0.$$

Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem entsprechenden Resultat für komplexe holomorphe Funktionen. Man nennt $\Delta f = f_{aa} + f_{bb}$ die Laplacesche von f. Mit dieser Bezeichnung gilt also, daß die Laplacesche holomorpher Funktionen verschwindet. Allgemein wird definiert:

Definition 1.4.14 Sei $f : \Omega \to X$ eine stetige Funktion. Es heißt

$$f_a(a_0 + ib_0) = \lim_{a \to a_0} \frac{f(a_0 + ib_0) - f(a + ib_0)}{a_0 - a}$$

die partielle Ableitung von f in der ersten Komponente und

$$f_b(a_0 + ib_0) = \lim_{b \to b_0} \frac{f(a_0 + ib_0) - f(a_0 + ib)}{b_0 - b}$$

die partielle Ableitung von f in der zweiten Komponente, sofern der entsprechende Grenzwert existiert. Ist f sowohl in der ersten als auch in der zweiten Komponente zweimal partiell differenzierbar, so wird $\Delta f = f_{aa} + f_{bb}$ die *Laplacesche* von f genannt.

Eine stetige Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *harmonisch* in Ω, falls die Laplacesche von f existiert und $\Delta f = 0$ in Ω.

Üblicherweise werden die Bezeichnungen f_x und f_y für die partiellen Ableitungen von f benutzt. In dieser Arbeit ist der Buchstabe x jedoch ausschließlich für Elemente des Banachraums X reserviert und deshalb wird hier die etwas ungewöhnliche Bezeichnung f_a und f_b gewählt. Genauso wird in dieser Arbeit die Bezeichnung $z = a + ib$ anstelle von $z = x + iy$ zur Darstellung komplexer Zahlen z durch ihren Real- und Imaginärteil verwendet. Ist $z \in \mathbf{C}$ in der Polardarstellung $z = re^{i\theta}$ gegeben, so bedeutet diese Darstellung immer $r = |z|$ und $\theta = \arg(z)$. Dabei ist $\arg(z)$ die eindeutig bestimmte Zahl im Intervall $[0, 2\pi)$, welche die Gleichung $z = |z|e^{i\arg(z)}$ erfüllt.

Der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen entspricht die folgende Darstellung harmonischer Funktionen durch das *Poissonintegral.*

Proposition 1.4.15 *Sei $f : \Omega \to X$ eine harmonische Funktion, es sei $z \in \Omega$ und $R > 0$ werde so gewählt, daß der Kreis mit Radius R und Mittelpunkt z in Ω enthalten ist. Dann gilt für alle $z + re^{i\theta} \in K_R(z)$ die Poissondarstellung*

$$f(z + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\eta - \theta) + r^2} f(z + Re^{i\eta})\, d\eta. \tag{1.22}$$

Beweis Wird auf beiden Seiten der Gleichung (1.22) ein lineares Funktional angewendet, so entsteht die Poisson Darstellung einer komplexen harmonischen Funktion, da lineare Funktionale mit der Integration vertauschbar sind. Demnach gilt die Gleichung (1.22), falls auf beide Seiten ein beliebiges lineares Funktional losgelassen wird. Das impliziert die Gültigkeit der Gleichung (1.22). ≡

Die Proposition 1.4.8 über die Charakterisierung holomorpher Funktionen mittels normierender Teilräume gilt für harmonische Funktionen entsprechend.

Proposition 1.4.16 *Es seien X und Y Banachräume und $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}(X, Y)$ sei ein normierender Teilraum für X. Dann ist $f : \Omega \to X$ genau dann harmonisch, wenn für jedes T des normierenden Teilraums $\mathbf{F}$ die Y-wertige Funktion $T \circ f$ harmonisch ist.*

Beweis Ist f harmonisch, so folgt für jeden beschränkten Operator $T : X \to Y$ aus der Stetigkeit von f und der Stetigkeit von T die Stetigkeit von $T \circ f$. Zudem gilt für die Laplacesche von $T \circ f$ aufgrund der Stetigkeit von T

$$\Delta(T \circ f) = T \circ \Delta f = 0.$$

Sei umgekehrt $T \circ f$ harmonisch für alle $T \in \mathbf{F}$. Dann folgt aus der Poissondarstellung für $T \circ f$ die Poissondarstellung für f. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Ist $z \in \Omega$, so wird $R > 0$ so gewählt, daß $K_{2R}(z)$ in Ω enthalten ist. Da für alle $T \in \mathbf{F}$ gilt

$$\begin{aligned}(T \circ f)(z + re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\eta - \theta) + r^2} (T \circ f)(z + Re^{i\eta})\, d\eta \\ &= T\Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\eta - \theta) + r^2} f(z + Re^{i\eta})\, d\eta\Big),\end{aligned}$$

folgt

$$f(z + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\eta - \theta) + r^2} f(z + Re^{i\eta})\, d\eta.$$

Aus dieser Darstellung ist sofort ersichtlich, daß f stetig in z ist und die zweiten partiellen Ableitungen f_{aa} und f_{bb} in z existieren, sofern nachgewiesen wird, daß f beschränkt ist in $K_R(z)$. Zumindest ist $T \circ f$ für alle $T \in \mathbf{F}$ beschränkt in $K_R(z)$. Demnach folgt die Beschränktheit von f auf diesem Kreis aus Lemma 1.4.7.

Das Verschwinden der Laplaceschen von f ist wieder eine direkte Folge aus dem Verschwinden der Laplaceschen von $T \circ f$ für $T \in \mathbf{F}$, denn aus

$$T \circ \Delta f = \Delta(T \circ f) = 0 \qquad (T \in \mathbf{F})$$

folgt $\Delta f = 0$. ≡

Aus dieser Proposition ergibt sich die folgende Charakterisierung harmonischer Funktionen mit Werten im Banachraum X beziehungsweise mit Werten im Raum der Operatoren $\mathbf{L}(Y, X)$. Diese Folgerung stimmt mit Ausnahme des Wortes „harmonisch“ anstelle von „holomorph“ wortwörtlich mit der Folgerung 1.4.9 für holomorphe Funktionen überein.

Folgerung 1.4.17 *Sei* $\mathbf{F} \subseteq X^*$ *ein normierender Teilraum für* X.

(i) *Eine Funktion* $f : \Omega \to X$ *ist genau dann harmonisch in* Ω, *wenn für jedes* $x^* \in \mathbf{F}$ *die komplexe Funktion* $x^* \circ f$ *harmonisch in* Ω *ist.*

(ii) *Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbf{L}(Y, X)$ *ist genau dann harmonisch in* Ω, *wenn für jedes* $y \in Y$ *und jedes* $x^* \in \mathbf{F}$ *die komplexe Funktion* $z \mapsto x^*(f(z)y)$ *harmonisch in* Ω *ist.*

Beweis Wird im Beweis von Proposition 1.4.9 das Wort „holomorph“ durch „harmonisch“ ersetzt, so ist die Argumentation komplett. $\equiv$

Aus Folgerung 1.4.17 (i) ersieht man insbesondere, daß eine Funktion $f : \Omega \to X$ bereits dann harmonisch ist, wenn f schwach harmonisch ist. Dabei heißt f *schwach harmonisch* , falls $x^* \circ f$ für jedes $x^* \in X^*$ eine komplexe harmonisch Funktion ist.

Mit Hilfe der Folgerung 1.4.17 ergibt sich aus der Theorie komplexer harmonischer Funktionen die Charakterisierung banachraumwertiger harmonischer Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft. Dabei wird $f : \Omega \to X$ eine Funktion mit *Mittelwerteigenschaft* genannt, wenn für jedes $z \in \Omega$ ein $R > 0$ mit $K_R(z) \subseteq \Omega$ so existiert, daß für alle $0 < r < R$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Folgerung 1.4.18 *Eine stetige Funktion* $f : \Omega \to X$ *ist genau dann harmonisch in* Ω, *wenn sie die Mittelwerteigenschaft besitzt.*

Beweis Die stetige Funktion f ist genau dann harmonisch, falls für jedes lineare Funktional $x^* \in X^*$ die komplexe Funktion $x^* \circ f$ harmonisch ist. Nach [35] trifft dies genau dann zu, wenn $x^* \circ f$ für jedes $x^* \in X^*$ die Mittelwerteigenschaft besitzt und dies ist genau dann der Fall, wenn f die Mittelwerteigenschaft hat. $\equiv$

Der Satz von Liouville besagt, daß eine in der komplexen Ebene beschränkte holomorphe Funktion konstant ist. Ein entsprechendes Resultat ist auch für harmonische Funktionen.

Proposition 1.4.19 *Ist* $F : \mathbf{C} \to X$ *harmonisch und beschränkt, so ist* F *konstant.*

Beweis Ist $F : \mathbf{C} \to X$ harmonisch und beschränkt, so sind auch die Funktionen $\mathrm{Re}(x^* \circ F) : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ und $\mathrm{Im}(x^* \circ F) : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ für $x^* \in X^*$ harmonisch und beschränkt. Also besagt der Satz von Liouville für harmonische Funktionen (siehe Axler, Bourdon und Ramey [3]), daß jede der Funktionen $\mathrm{Re}(x^* \circ F)$ und $\mathrm{Im}(x^* \circ F)$ konstant ist. Folglich gilt für jedes $z \in \mathbf{C}$

$$x^* \circ F(z) = \mathrm{Re}(x^* \circ F)(z) + i\mathrm{Im}(x^* \circ F)(z) = \mathrm{Re}(x^* \circ F)(0) + i\mathrm{Im}(x^* \circ F)(0) = x^* \circ F(0).$$

Somit ist $F(z) = F(0)$ und also ist F konstant. $\equiv$

1.5 L_p-Lösungen des abstrakten Cauchy Problems

In diesem Abschnitt wird das zugrunde liegende Intervall I immer die positive reelle Halbachse sein. Deshalb wird in diesem Abschnitt $C_0([0,\infty))$ durch C_0, $L_p([0,\infty),X)$ durch $L_p(X)$ usw. abgekürzt. Mit $W_p^1(X)$ wird der Teilraum von $L_p(X)$ der fast überall differenzierbaren Funktionen f mit $f' \in L_p(X)$ bezeichnet. Eine Norm in $W_p^1(X)$ ist durch $\|f\|_{W_p^1} = \|f\|_{L_p} + \|f'\|_{L_p}$ gegeben und $W_p^1(X)$ wird mit dieser Norm zu einem Banachraum.

Desweiteren steht $\mathbf{C}_+$ für die offene rechte komplexe Halbebene, d.h.

$$\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

Ist im weiteren Verlauf von der rechten komplexen Halbebene oder der rechten Halbebene die Rede, so ist immer $\mathbf{C}_+$ gemeint.

1.5.1 Die Laplace Transformation

Sei $f : [0,\infty) \to X$ eine lokal integrierbare Funktion und z sei eine komplexe Zahl. Das Laplace Integral $\mathcal{L}f(z)$ von f an der Stelle z ist definiert durch

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt,$$

sofern dieses Integral existiert, das heißt sofern $\int_0^\infty \|e^{-zt} f(t)\|\, dt < \infty$. Ist $f \in L_p(X)$, so existiert das Laplace Integral von f aufgrund der Hölderschen Ungleichung für alle z in der rechten komplexen Halbebene. Desweiteren gilt:

Proposition 1.5.1 *Sei $f \in L_p(X)$. Die Abbildung, welche jedem $z \in \mathbf{C}_+$ den Wert $\mathcal{L}f(z)$ zuordnet, ist eine in der rechten komplexen Halbebene holomorphe Funktion.*

Beweis Die durch $k(z,t) = e^{-zt} f(t)$ auf $[0,\infty) \times \mathbf{C}_+$ definierte Funktion erfüllt die Voraussetzungen von Proposition 1.4.13. $\equiv$

Die Funktion $\mathcal{L}f : \mathbf{C}_+ \to X$ wird als *komplexe Laplace Transformierte* von f bezeichnet. Die auf die positive reelle Halbachse eingeschränkte komplexe Laplace Transformierte $\mathcal{L}f : (0,\infty) \to X$ heißt *reelle Laplace Transformierte* von f. Ist von der *Laplace Transformierten*von f die Rede, so wird aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, ob die reelle oder die komplexe Laplace Transformierte gemeint ist. Um nicht noch mehr Bezeichnungen einführen zu müssen, wird die kleine Ungenauigkeit in Kauf genommen, daß die komplexe und die reelle Laplace Transformierte von f mit demselben Symbol $\mathcal{L}f$ bezeichnet werden. Dies wird jedoch zu keinerlei Unklarheiten führen.

Entsprechend wird für $\phi \in PV_p(X)$ die komplexe Laplace-Stieltjes Transformierte $\widetilde{\mathcal{L}}\phi$ von ϕ definiert durch

$$\widetilde{\mathcal{L}}\phi(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\phi(t) \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Die Funktion $\mathcal{L}\phi$ ist ebenfalls holomorph in $\mathbf{C}_+$. Für $p > 1$ ist dies folgendermaßen einzusehen: Sei $x^* \in X^*$. Dann besitzt $x^* \circ \phi$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f_{x^*} \in L_p$ und die Rechenregel 1.3.9 besagt

$$\langle x^* \widetilde{\mathcal{L}}\phi(z)\rangle = \int_0^\infty e^{-zt}\, d(x^* \circ \phi)(t) = \int_0^\infty e^{-zt} f_{x^*}(t)\, dt.$$

Wie oben gezeigt wurde ist also $x^* \circ \widetilde{\mathcal{L}}\phi$ holomorph in $\mathbf{C}_+$. Demnach ist $\widetilde{\mathcal{L}}\phi$ schwach holomorph in $\mathbf{C}_+$ und also holomorph in $\mathbf{C}_+$ nach Folgerung 1.4.9 (i).

Ist $p = 1$, so kann die Holomorphie von $\widetilde{\mathcal{L}}\phi$ in der rechten Halbebene wie folgt nachgewiesen werden. Sei $z_0 \in \mathbf{C}_+$. Ist $R > 0$ mit $K_R(z_0) \subseteq \mathbf{C}_+$ und ist $z \in K_R(z_0)$ von z_0 verschieden, so ergibt sich die Abschätzung

$$\Big\| \frac{\widetilde{\mathcal{L}}\phi(z_0) - \widetilde{\mathcal{L}}\phi(z)}{z_0 - z} - \int_0^\infty z_0 e^{-z_0 t}\, d\phi(t) \Big\| \le \|\phi\|_{PV_1} \sup_{t\in(0,\infty)} \Big| \frac{e^{-z_0 t} - e^{-zt}}{z_0 - z} - z_0 e^{-z_0 t} \Big|.$$

Da das Supremum in der rechten Seite dieser Gleichung gegen Null konvergiert für $|z_0 - z| \to 0$, folgt die komplexe Differenzierbarkeit von $\widetilde{\mathcal{L}}\phi$ im Punkt z_0. Doch z_0 war in der rechten Halbebene beliebig gewählt und also ist $\widetilde{\mathcal{L}}\phi$ holomorph in $\mathbf{C}_+$.

Wir halten dieses Ergebnis in der folgenden Proposition fest.

Proposition 1.5.2 *Sei $\phi \in PV_p(X)$. Dann ist die Laplace-Stieltjes Transformierte von ϕ eine in der rechten komplexen Halbebene holomorphe Funktion.*

Sei $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\phi(t)$, wobei ϕ eine auf $[0,\infty)$ definierte X-wertige Funktion von beschränkter p-Semivariation ist. Wie kann ϕ aus der Kenntnis von F ermittelt werden? Diese Frage nach einer Inversionsformel ist deshalb besonders bedeutungsvoll, weil die Existenz einer solchen Formel die Injektivität der Laplace Transformation impliziert. Aus diesem Grund wird hier die Phragmen Inversion der Laplace Transformation (siehe [4] für den Fall $p = \infty$) vorgestellt.

Sei also $\phi \in PV_p(X)$ und für $n \in \mathbf{N}$ sei $\mu_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, d\phi(t)$. Dann wird für $k \in \mathbf{N}$ festgesetzt

$$\Phi_k[\mu](s) = \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lks} \mu_{lk} \qquad (0 < s < \infty).$$

Die Konvergenz dieser Reihe für jedes $s \in (0,\infty)$ ist folgendermaßen einzusehen: Für $z \in \mathbf{C}$ bezeichne $e_z : [0,\infty) \to \mathbf{C}$ die durch $e_z(t) = e^{-zt}$ definierte Funktion. Mit dieser Bezeichnung läßt sich die Norm von μ_{lk} abschätzen durch

$$\|\mu_{lk}\| \le \|e_{lk}\|_{L_q} \|\phi\|_{PV_p} \le \|\phi\|_{PV_p}.$$

Folglich gilt

$$\sum_{l=1}^n \Big\| \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lks} \mu_{lk} \Big\| \le \|\phi\|_{V_p} \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} (e^{ks})^l \le \|\phi\|_{V_p} e^{e^{ks}}.$$

Somit erweist sich die Reihe $\Phi_k[\mu](s)$ für alle $s > 0$ als absolut konvergent.

Proposition 1.5.3 (Phragmen Inversion) *Sei $\phi \in PV_p(X)$.*

(i) *Ist $1 < p \leq \infty$, so gilt für alle $s \in (0, \infty)$*

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k[\mu](s) = \phi(s).$$

(ii) *Ist $p = 1$, so gilt für alle $f \in C_0$*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f(s)\, d\Phi_k[\mu](s) = \int_0^\infty f(s)\, d\phi(s).$$

Beweis Sei $k \in \mathbf{N}$ und $0 < s, t$ seien zwei positive, reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lk(s-t)} = 1 - \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{l!} (e^{k(s-t)})^l = 1 - e^{-e^{k(s-t)}}$$

und also

$$\Phi_k[\mu](s) = \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lks} \mu_{lk} = \int_0^\infty \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lk(s-t)}\, d\phi(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-e^{k(s-t)}})\, d\phi(t).$$

Hier wurde ausgenutzt, daß die Reihe $\sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l!} e^{lks} e_{lk}$ in der L_q-Norm gegen die Funktion $t \mapsto e^{-e^{lk(s-t)}}$ konvergiert und daher Integration und Summation vertauschbar sind. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \Phi_k[\mu](s) - \phi(s) &= \int_0^\infty (1 - e^{-e^{k(s-t)}}) - \chi_{[0,s)}(t)\, d\phi(t) \\ &= \int_0^\infty \chi_{[s,\infty)}(t) - e^{-e^{k(s-t)}}\, d\phi(t). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Wird $E_k : (0, \infty) \times (0, \infty) \to [-1, 1]$ definiert durch $E_k(s, t) = \chi_{[s,\infty)}(t) - e^{-e^{k(s-t)}}$, so konvergiert für jedes $s \in (0, \infty)$ und $t \in (0, \infty) \setminus \{s\}$ die Folge $(E_k(s, t))$ gegen 0 für $k \to \infty$. Denn ist $t \in (0, s)$, so ist $s - t$ positiv. Folglich konvergiert $e^{k(s-t)}$ gegen unendlich für $k \to \infty$ und also gilt $\lim_{k\to\infty} e^{-e^{k(s-t)}} = 0$. Ist dagegen $t \in (s, \infty)$, so ist $s - t$ negativ. In diesem Fall konvergiert $e^{k(s-t)}$ gegen 0 und es folgt $\lim_{k\to\infty} e^{-e^{k(s-t)}} = 1$.

Die bisherigen Überlegungen gelten für alle $1 \leq p \leq \infty$, doch nun trennen sich die Beweise von (i) und (ii).

(i) Sei $1 < p \leq \infty$. Ist $k \in \mathbf{N}$ und $t \in (0, s)$, so ist

$$|E_k(s, t)| = e^{-e^{k(s-t)}} \leq |E_1(s, t)|.$$

Ist $t \in (s, \infty)$, so ist $s - t$ negativ und also

$$|E_k(s, t)| = 1 - e^{-e^{k(s-t)}} \leq |E_1(s, t)|.$$

Diese Überlegungen zeigen, daß für alle $t \in (0, \infty)$ gilt $|E_k(s, t)|^q \leq |E_1(s, t)|^q$. Wegen $\int_0^\infty |E_1(s, t)|^q\, dt < \infty$ kann Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz auf die Funktionen $t \mapsto |E_k(s, t)|^q$ angewendet werden und es ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty |E_k(s, t)|^q\, dt = 0.$$

Mit Gleichung (1.23) folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi_k[\mu](s) - \phi(s)\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \int_0^\infty E_k(s,t)\, d\phi(t) \right\| = 0$$

und also $\lim_{k\to\infty} \Phi_k[\mu](s) = \phi(s)$.

(ii) Nun sei $p = 1$ und $f \in C_0$. Dann besteht für alle $s \in (0,\infty)$ und $t \in (0,\infty) \setminus \{s\}$ die Konvergenz $\lim_{k\to\infty} f(s)E_k(s,t) = 0$. Wegen $|f(s)E_k(s,t)| \le |f(s)E_1(s,t)|$ folgt aus der Endlichkeit des Integrals $\int_0^\infty |f(s)E_1(s,t)|\, ds$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f(s)E_k(s,t)\, ds = 0.$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (1.23)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f(s)\, d(\Phi_k[\mu] - \phi)(s) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f(s) \int_0^\infty E_k(s,t)\, d\phi(t)\, ds \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)E_k(s,t)\, ds\, d\phi(t) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist auch der Beweis von (ii) vollständig. $\equiv$

Folgerung 1.5.4 (i) *Sei $\phi \in PV_p(X)$ und für alle $n \in \mathbf{N}$ gelte $\widetilde{\mathcal{L}}\phi(n) = 0$. Dann ist $\phi = 0$.*

(ii) *Sei $f \in L_p(X)$ und für alle $n \in \mathbf{N}$ gelte $\mathcal{L}f(n) = 0$. Dann ist $f = 0$.*

Beweis (i) Gilt für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-st}\, d\phi(t) = 0,$$

so ist $\Phi_k[\mu] = 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Die eben bewiesene Proposition 1.5.3 läßt ϕ daher keine andere Chance als trivial zu sein.

(ii) Sei $\phi = \mathcal{I}f$. Dann ist $0 = \mathcal{L}f(n) = \int_0^\infty e^{-nt}\, d\phi(t)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ aufgrund der Rechenregel 1.2.22 bzw. 1.3.9 und also ist $\phi = 0$ nach (i). Dies läßt den Schluß $f = 0$ zu. $\equiv$

1.5.2 L_p-Flüsse

Sei $A : D(A) \to X$, $D(A) \subseteq X$, ein abgeschlossener Operator. Betrachtet wird das *Abstrakte Cauchy Problem* (ACP)

$$f'(t) = Af(t), \qquad f(0) = x$$

zum Anfangswert $x \in D(A)$. Ist $A : X \to X$ stetig, so besitzt das (ACP) zum Anfangswert x die Lösung

$$u(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(tA)^k}{k!} x.$$

Diese Lösung existiert, weil im Falle eines beschränkten Operators die Reihe $e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ in der Operatornorm konvergiert. Diese Konvergenz ist natürlich nicht gegeben, wenn A unbeschränkt ist.

Es ist jedoch bekannt (siehe z. B. [18]), daß für abgeschlossene Operatoren A mit nicht leerer Resolventenmenge genau dann zu jedem Anfangswert $x \in D(A)$ eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Lösung von (ACP) existiert, falls A Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Operatoren ist. Dabei ist eine C_0-Halbgruppe von Operatoren mit Erzeuger A eine Abbildung $\tau : [0,\infty) \to \mathbf{L}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften, welche $\tau(t)$ als Ersatz für „e^{tA}“ ausweist:

(1) $\tau(0) = Id$.

(2) τ erfüllt die Halbgruppeneigenschaft, d.h es gilt $\tau(s+t) = \tau(s)\tau(t)$ $(s,t \geq 0)$.

(3) Die Abbildung τ ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ gilt $\lim_{t\to t_0} \tau(t)x = \tau(t_0)x$ $(t \geq 0)$.

(4) $D(A) = \{x \in X : \lim_{h\to 0} h^{-1}(\tau(h)x - x) \text{ existiert}\}$ und $Ax = \lim_{h\to\infty} h^{-1}(\tau(h)x - x)$ für $x \in D(A)$.

Erzeugt A eine C_0-Halbgruppe τ, so ist offensichtlich $u(t) = \tau(t)x$ $(t \geq 0)$ eine Lösung des (ACP) zum Anfangswert $x \in D(A)$. Es gibt jedoch genügend Operatoren, welche keine C_0-Halbgruppen erzeugen. Dies führt zu den folgenden schwächeren Lösungsbegriffen.

Definition 1.5.5 Eine lokal integrierbare Funktion $f : (0,\infty) \to X$ heißt *milde Lösung* des (ACP) zum Anfangswert x, falls für alle $t > 0$ gilt

$$\int_0^t f(u)\,du \in D(A) \quad \text{und} \quad f(t) = x + A\int_0^t f(u)\,du.$$

Ist f darüberhinaus fast überall differenzierbar in $(0,\infty)$ und gilt für fast alle $t \in (0,\infty)$

$$f(t) \in D(A) \quad \text{und} \quad f'(t) = Af(t),$$

so heißt f *starke Lösung* des (ACP) zum Anfangswert x.

Offensichtlich ist jede Lösung des (ACP) eine starke Lösung des (ACP), doch die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. So ist es zum Beispiel möglich, daß eine starke Lösung existiert, welche eine Singularität in der Null besitzt und also keine Lösung sein kann.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage: Wann besitzt das (ACP) für jedes $x \in D(A)$ eine starke Lösung im Sobolevraum $W_p^1(X)$? Den passenden Rahmen zur Bearbeitung dieser Frage liefert der Begriff des L_p-Flusses, wie er von L. Weis in [41] eingeführt wurde.

Definition 1.5.6 Sei A ein abgeschlossener Operator auf X und $T : X \to L_p(X)$ sei ein beschränkter Operator. T heißt *L_p-Fluß* mit Erzeuger A, falls für jedes $x \in X$ die Funktion Tx eine milde Lösung des abstrakten Cauchy Problems ist. Der Operator A wird Erzeuger eines L_p-Flusses genannt, falls ein L_p-Fluß T existiert, dessen Erzeuger A ist.

Im weiteren Verlauf bezeichnet $R(\lambda, A)$ die Resolvente des Operators A im Punkt λ. Die nächste Proposition faßt alle grundlegenden Eigenschaften von L_p-Flüssen zusammen, die im zweiten Kapitel benötigt werden.

Proposition 1.5.7 *Sei $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A erzeugt einen L_p-Fluß.*

(ii) *Für jedes $x \in X$ existiert eine milde Lösung $f \in L_p(X)$ des (ACP) zum Anfangswert x.*

(iii) *Für jedes $x \in D(A)$ existiert eine starke Lösung $f \in W_p^1(X)$ des (ACP) zum Anfangswert x.*

(iv) *Es ist $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ und es gibt einen stetigen Operator $T : X \to L_p(X)$ so, daß für alle $\lambda > 0$ gilt $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt$.*

(v) *Es ist $\mathbf{C}_+ \subseteq \rho(A)$ und es gibt einen stetigen Operator $T : X \to L_p(X)$ so, daß für alle $\lambda \in \mathbf{C}_+$ gilt $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt$.*

Beweis Bewiesen werden die Implikationen (i)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i)

(i)$\Rightarrow$(v) A erzeuge den L_p-Fluß T. Dann gilt für alle $x \in X$ und $t > 0$

$$Tx(t) = x + A \int_0^t Tx(u)\, du.$$

Auf beide Seiten dieser Gleichung wird die Laplace Transformation angewendet und es ergibt sich für $\lambda \in \mathbf{C}_+$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Big(x + A \int_0^t Tx(u)\, du \Big)\, dt \\
&= \frac{x}{\lambda} + A \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t Tx(u)\, du dt \\
&= \frac{x}{\lambda} + A \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit zwischen dem zweiten und dritten Glied dieser Kette beruht auf der Abgeschlossenheit von A und Proposition 1.2.8. Der Gleichheit zwischen dem dritten und vierten Glied der Gleichungskette liegt eine partielle Integration zugrunde. Wird die entstandene Gleichung nach x aufgelöst, so zeigt sich

$$x = (\lambda - A) \int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt.$$

Das beweist $\lambda \in \rho(A)$ und $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\, dt$.

(v)$\Rightarrow$(iv) ist eine Trivialität.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Für $x \in X$ sei $F_x : (0,\infty) \times (0,\infty) \to X$ definiert durch $F_x(s,t) = T(Tx(s))(t)$. Zunächst soll gezeigt werden, daß für fast alle $(s,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ gilt $F_x(s,t) = F_x(t,s)$. Seien $\lambda, \nu > 0$, $x \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} R(\lambda,A)R(\nu,A)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(TR(\lambda,A)x)(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty T\Big(\int_0^\infty e^{-\nu s}Tx(s)\,ds\Big)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\nu s}T(Tx(s))(t)\,dsdt = \cdots. \end{aligned}$$

Bevor diese Gleichungskette weitergeführt wird, ist eine Begründung für den letzten Schritt angebracht. Der Operator T darf in das zweite Integral hineingezogen werden, weil er stetig ist. Die Übereinstimmung der Integrale

$$\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(Tx(s))\,ds\Big)(t) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(Tx(s))(t)\,ds$$

für fast alle $t \in (0,\infty)$ ist nun eine Konsequenz aus Proposition 1.2.12. Weiter ergibt sich aus der Definition von F_x

$$\cdots = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\nu s}F_x(s,t)\,dsdt.$$

Aus Symmetriegründen folgt nun sofort

$$R(\nu,A)R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\nu s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}F_x(t,s)\,dtds.$$

Wird im letzten Term der Satz von Fubini bemüht und wird die Vertauschbarkeit von $R(\lambda,A)$ und $R(\nu,A)$ ausgenutzt, so zeigt sich

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\nu s}F_x(s,t)\,dsdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\nu t}F_x(t,s)\,dsdt.$$

Die Behauptung $F_x(s,t) = F_x(t,s)$ für fast alle $(s,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ ist nun eine Konsequenz der Injektivität der Laplace Transformation.

Sei nun $x \in D(A)$ und $\lambda > 0$ beliebig. Dann ist

$$x = R(\lambda,A)(\lambda - A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(\lambda - A)x\,dt.$$

Mit $y = (\lambda - A)x$ folgt also

$$\begin{aligned} \int_0^s Tx(u)\,du &= \int_0^s T\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}Ty(t)\,dt\Big)(u)\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^s T(Ty(t))(u)\,dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^s F_y(t,u)\,dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^s F_y(u,t)\,dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T\Big(\int_0^s Ty(u)\,du\Big)\,dt \\ &= R(\lambda,A)\Big(\int_0^s Ty(u)\,du\Big). \end{aligned}$$

Somit ist $\int_0^s Tx(u)\,du \in D(A)$ und weiter folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(x + A\int_0^t Tx(u)\,du\Big)\,dt &= \frac{x}{\lambda} + A\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t Tx(u)\,dudt \\ &= \frac{x}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}Tx(t)\,dt \\ &= \frac{x}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}R(\lambda, A)x \\ &= R(\lambda, A)x \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}Tx(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ein weiteres Mal kann aus der Injektivität der Laplace Transformation geschlossen werden, daß für fast alle $t \in (0, \infty)$ gilt

$$Tx(t) = x + A\int_0^t Tx(u)\,du.$$

Es bleibt nur $Tx \in W_p^1(X)$ nachzuweisen. Dazu wird $\lambda^{-1}AR(\lambda, A)x$ auf die folgenden beiden Arten berechnet. Zum einen ist

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}AR(\lambda, A)x &= \lambda^{-1}A\int_0^\infty e^{-\lambda t}Tx(t)\,dt \\ &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t Tx(u)\,dudt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}A\int_0^t Tx(u)\,dudt.\end{aligned}$$

Zum anderen gilt

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}AR(\lambda, A)x &= \lambda^{-1}R(\lambda, A)Ax \\ &= \lambda^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}TAx(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t TAx(u)\,dudt.\end{aligned}$$

Folglich ist $A\int_0^s Tx(u)\,du = \int_0^s TAx(u)\,du$ wegen der Injektivität der Laplace Transformation. Also ist Tx wegen $Tx(t) = x + A\int_0^t Tx(u)\,du = x + \int_0^t TAx(u)\,du$ fast überall in $(0, \infty)$ differenzierbar und die Abgeschlossenheit von A stellt sicher, daß für fast alle $t \in (0, \infty)$ gilt $(Tx)'(t) \in D(A)$ und $(Tx)'(t) = A(Tx)(t)$. Darüber hinaus ist wegen $(Tx)' = TAx$ sichergestellt, daß $(Tx)'$ in L_p liegt.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Für $x \in D(A)$ sei $Tx \in W_p^1(X)$ eine starke Lösung des (ACP) zum Anfangswert x. Sei $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl. Für $x \in X \setminus D(A)$ und $t > 0$ werde $Tx(t) = (\lambda - A)TR(\lambda, A)x(t)$ gesetzt. Diese Festsetzung ist möglich, weil $R(\lambda, A)x$ im Definitionsbereich von A liegt und nach Voraussetzung somit $TR(\lambda, A)x(t)$ für alle $t > 0$ in $D(A)$ enthalten ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}Tx(t) &= (\lambda - A)\Big(R(\lambda, A)x + A\int_0^t TR(\lambda, A)x(u)\Big)\,du \\ &= x + A\int_0^t (\lambda - A)TR(\lambda, A)x(u)\,du = x + A\int_0^t Tx(u)\,du.\end{aligned}$$

Also ist Tx eine milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x. Darüberhinaus gilt für $t > 0$

$$Tx(t) = \lambda TR(\lambda, A)x(t) - ATR(\lambda, A)x(t) = \lambda TR(\lambda, A)x(t) - (TR(\lambda, A)x)'(t).$$

Da $R(\lambda, A)x$ im Definitionsbereich von A liegt, ist nach Voraussetzung (iii) sowohl $TR(\lambda, A)x$ als auch die Ableitung $(TR(\lambda, A)x)'$ ein Element von $L_p(X)$. Demnach ist auch $Tx = \lambda TR(\lambda, A)x + (TR(\lambda, A)x)' \in L_p(X)$.

(ii)⇒(i) Zuerst wird nachgewiesen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x in $L_p(X)$ eindeutig bestimmt ist. Sei $x \in X$ und $Tx \in L_p(X)$ sei eine milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x. Dann gilt für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\,dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(x + A\int_0^t Tx(u)\,du)\,dt \\ &= \frac{x}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\,dt.\end{aligned}$$

Wird die entstandene Gleichung nach x aufgelöst, so zeigt sich $(\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t} Tx(t)\,dt = x$. Ist Sx eine zweite milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x, so gilt diese Gleichung entsprechend für Sx und also

$$(\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t}(Tx - Sx)(t)\,dt = 0.$$

Es folgt $\int_0^\infty e^{-\lambda t}(Tx - Sx)(t)\,dt = 0$, da nach Voraussetzung λ in der Resolventenmenge von A enthalten ist. Nun war aber $\lambda > 0$ beliebig gewählt. Demnach ist die Laplace Transformierte von $Tx - Sx$ identisch Null. Die Injektivität der Laplace Transformation liefert demnach $Tx - Sx = 0$, die beiden milden Lösungen Tx und Sx sind demnach identisch.

Die Eindeutigkeit der milden Lösung Tx gestattet es, $T : X \to L_p(X)$ als Abbildung aufzufassen, die natürlich linear ist. T ist darüberhinaus abgeschlossen, denn: Sei (x_n) eine in X konvergente Folge mit Grenzwert x und die Bildfolge (Tx_n) konvergiere in $L_p(X)$ gegen eine Funktion f. Dann gilt für fast alle $t > 0$ aufgrund der Abgeschlossenheit von A

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} Tx_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_n + A\int_0^t Tx_n(u)\,du = x + A\int_0^t f(u)\,du.$$

Die Funktion $f \in L_p(X)$ ist also die eindeutig bestimmte milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x und somit gilt $f = Tx$. Dies zeigt, daß T ein abgeschlossener, auf dem Banachraum $L_p(X)$ definierter Operator ist. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen liefert folglich die Beschränktheit von T. ≡

Beim Beweis der Implikation (iii)⇒(ii) der vorhergehenden Proposition wurde gezeigt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen für jedes $x \in X$ und $t, \lambda > 0$ gilt $Tx(t) = (\lambda - A)TR(\lambda, A)x$. Ist $x \in D(A)$, so gibt es ein $y \in X$ und $\lambda > 0$ mit $x = R(\lambda, A)y$ und es folgt

$$(\lambda - A)Tx(t) = (\lambda - A)TR(\lambda, A)y(t) = Ty(t) = T(\lambda - A)x(t) = \lambda Tx(t) - TAx(t).$$

Dies zeigt $ATx(t) = TAx(t)$. Da diese Vertauschbarkeit noch häufiger benötigt wird, lohnt es sich, sie in einem Lemma festzuhalten.

Lemma 1.5.8 *Sei A Erzeuger eines L_p-Flusses T. Dann gilt für alle $x \in D(A)$ und fast alle $t > 0$*

$$Tx(t) \in D(A) \quad \textit{und} \quad ATx(t) = TAx(t).$$

Ist $A : X \to X$ ein beschränkter Operator, so erzeugt A die C_0-Halbgruppe $T(t) = e^{tA}$. Doch es gilt noch mehr: Die Reihe $e^{zA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zA)^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbf{C}$ und bildet eine in $\mathbf{C}$ holomorphe Funktion. Dementsprechend ist jede Lösung des (ACP) holomorph fortsetzbar auf $\mathbf{C}$. Wiederum ändert sich diese Situation, wenn A nicht beschränkt ist. Nichts desto trotz existieren auch unbeschränkte Operatoren derart, daß die milden oder starken Lösungen existieren und holomorphe Fortsetzungen auf Gebiete der Form

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbf{C} : z \neq 0, |\arg(z)| < \alpha\}$$

besitzen. Dabei ist $\arg(z)$ die eindeutig bestimmte Zahl im Intervall $[0, 2\pi)$, welche die Gleichung $z = |z|e^{i\arg(z)}$ erfüllt. Diese Überlegungen motivieren uns zu folgender Definition.

Definition 1.5.9 Sei $0 < \alpha < \pi$. Ein L_p-Fluß $T : X \to L_p(X)$ heißt *α-holomorpher L_p-Fluß, falls für alle $x \in X$ eine holomorphe Fortsetzung von Tx auf den Sektor Σ_α so existiert, daß für alle $|\beta| < \alpha$ durch $T_\beta(t) = T(te^{i\beta})$ $(0 < t < \infty)$ ein L_p-Fluß definiert wird mit*

$$\sup_{|\beta|<\alpha} \|T_\beta x\|_{L_p} < \infty \qquad (x \in X). \tag{1.24}$$

Wir werden später sehen, daß ein L_p-Fluß T schon dann ein α-holomorpher L_p-Fluß ist, falls für jedes $x \in X$ die Funktion Tx eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor Σ_α derart besitzt, daß die durch $T_\beta x(t) = Tx(te^{i\beta})$ definierten Funktionen die Bedingung (1.24) erfüllen.

Desweiteren werden wir zeigen, daß $e^{i\alpha}A$ einen L_p-Fluß erzeugt, falls A Erzeuger eines α-holomorphen L_p-Flusses ist. Dies alles erfordert jedoch ein ausgiebiges Studium von Hardyräumen holomorpher Funktionen und eine genaue Untersuchung der Laplace Transformation holomorpher Funktionen. Diese Untersuchungen werden im zweiten Kapitel durchgeführt.

Kapitel 2

Holomorphie und Laplace Transformation banachraumwertiger Funktionen

2.1 Hardyräume vektorwertiger harmonischer Funktionen

Die Poisson Darstellung einer harmonischen Funktion erlaubt es, die Funktionswerte im Inneren eines Kreises aus den Werten auf dem Rand des Kreises zu berechnen (siehe Proposition 1.4.15). Eine harmonische Funktion ist also eindeutig bestimmt durch ihre Randwerte. In diesem Abschnitt wird zuerst untersucht, inwieweit eine auf der rechten Halbebene

$$\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

harmonische Funktion „Randwerte" auf der imaginären Achse besitzt und wie diese „Randwerte" die harmonische Funktion determinieren.

Anschließend wird die folgende Frage untersucht: Sei eine Funktion $f : \mathbf{R} \to X$ gegeben und es sei $a > 0$. Welche Bedingungen an f sind hinreichend und notwendig für die Existenz einer harmonischen Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to X$ mit $F_a = f$, d.h. $F(a+ib) = f(b)$ für $-\infty < b < \infty$?

In diesem Abschnitt ist das zugrunde liegende Intervall immer die ganze reelle Achse. Aus diesem Grund wird bei der Bezeichnung der verschiedenen Funktionenräume auf das „I" verzichtet, d.h. anstelle von $C_0(\mathbf{R})$ wird C_0, anstelle von $L_p(\mathbf{R}, X)$ wird $L_p(X)$, usw. geschrieben.

2.1.1 Poisson Kerne

Für $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$ wird die Funktion $P_z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{(b-t)^2 + a^2}.$$

Die so definierten Funktionen P_z heißen *Poisson Kerne*. Man rechnet leicht nach, daß für jedes reelle t die Funktion, die jedem $z \in \mathbf{C}_+$ den Wert $P_z(t)$ zuordnet, harmonisch in der rechten Halbebene ist. Es wird sich als lohnend erweisen, ein paar weitere elementare Eigenschaften der Poisson Kerne zu notieren.

Lemma 2.1.1 *Sei $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$ und $t \in \mathbf{R}$. Dann gilt:*

(i) $P_z(t) \geq 0$ *und* $\int_{-\infty}^{\infty} P_z(u)\,du = 1$.

(ii) $P_z(t) = P_a(b-t) = \frac{1}{a}P_1(\frac{b-t}{a})$.

(iii) P_z *ist eine gerade Funktion.*

(iv) $P_z \in L_q$ *für* $1 \leq q < \infty$ *und* $P_z \in C_0$.

Sei $f \in L_p(X)$. Die Eigenschaft (iv) der Poisson Kerne ermöglicht für jedes $z \in \mathbf{C}_+$ die Festsetzung

$$\mathcal{P}f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)f(t)\,dt.$$

Die so definierte Funktion $\mathcal{P}f : \mathbf{C}_+ \to X$ heißt *Poisson Transformierte* von f. Entsprechend wird für $\phi \in PV_p(X)$ und $z \in \mathbf{C}_+$

$$\widetilde{\mathcal{P}}\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\,d\phi(t)$$

festgesetzt. Die Funktion $\widetilde{\mathcal{P}}\phi : \mathbf{C}_+ \to X$ heißt *Poisson-Stieltjes Transformierte* von ϕ.

Die folgende Proposition zeigt, daß die Poisson Transformation ein zentrales Instrument zur Konstruktion harmonischer Funktionen auf der rechten Halbebene darstellt.

Proposition 2.1.2 (i) *Für jedes $f \in L_p(X)$ ist die Poisson Transformierte $\mathcal{P}f$ von f eine auf der rechten Halbebene harmonische Funktion.*

(ii) *Für jedes $\phi \in PV_p(X)$ ist die Poisson-Stieltjes Transformierte $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ von ϕ eine auf der rechten Halbebene harmonische Funktion.*

Beweis (i) Sei $f \in L_p(X)$. Da für jedes $t \in \mathbf{R}$ die Abbildung, die jedem $z \in \mathbf{C}_+$ den Wert $P_z(t)$ zuordnet, harmonisch in der rechten Halbebene ist, besitzt sie nach Folgerung 1.4.18 die Mittelwerteigenschaft. Also gilt für $0 < r < \mathrm{Re}(z)$

$$P_z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{z+re^{i\theta}}(t)\,d\theta.$$

Mit dem Satz von Fubini folgt somit für jedes $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned}
(x^* \circ \mathcal{P}f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{z+re^{i\theta}}(t)\,d\theta\,(x^* \circ f)(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_{z+re^{i\theta}}(t)(x^* \circ f)(t)\,dt\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x^* \circ \mathcal{P}f)(z + re^{i\theta})\,d\theta.
\end{aligned}$$

Demnach besitzt auch $x^* \circ \mathcal{P}f$ die Mittelwerteigenschaft. Da $x^* \circ \mathcal{P}f$ stetig in $\mathbf{C}_+$ ist, erweist sich $x^* \circ \mathcal{P}f$ als harmonisch nach Folgerung 1.4.18. Folglich ist $\mathcal{P}f$ schwach harmonisch. Nach Folgerung 1.4.17 sind jedoch schwach harmonische Funktionen harmonisch.

(ii) Sei zuerst $p > 1$. Ist $\phi \in PV_p(X)$, so ist $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ in jedem Fall stetig in $\mathbf{C}_+$. Zudem existiert für jedes $x^* \in X^*$ die Radon-Nikodym Ableitung f_{x^*} der komplexen Funktion $x^* \circ \phi$. Die Rechenregel 1.3.9 besagt nun, daß für alle $z \in \mathbf{C}_+$ die folgende Gleichung besteht:

$$(x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}\phi)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\, d(x^* \circ \phi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f_{x^*}(t)\, dt = \mathcal{P}f_{x^*}(z).$$

Doch $\mathcal{P}f_{x^*}$ ist nach (i) eine in der rechten Halbebene harmonische Funktion. Folglich ist $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ schwach harmonisch. Ein weiteres Mal wird Folgerung 1.4.17 zur Anwendung gebracht und daraus ergibt sich, daß $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ harmonisch ist.

Sei nun $\phi \in V_1$. Aufgrund von Lemma 1.3.16 kann der Laplace Operator mit dem Riemann-Stieltjes Integral vertauscht werden und folglich gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$

$$\Delta\widetilde{\mathcal{P}}\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P_z(t)\, d\phi(t) = 0.$$

Also ist $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ harmonisch in $\mathbf{C}_+$. Ist nun $\phi : \mathbf{R} \to X$ eine banachraumwertige Funktion von beschränkter Semivariation, so ist $x^* \circ \phi \in V_1$ für alle $x^* \in X^*$. Folglich ist $x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}\phi = \widetilde{\mathcal{P}}(x^* \circ \phi)$ harmonisch in $\mathbf{C}_+$ und wieder liefert Folgerung 1.4.17, daß $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ harmonisch in $\mathbf{C}_+$ ist. $\equiv$

Beispiel 2.1.3 Dieses Beispiel stellt eine konkrete harmonische Funktion mit Werten im Banachraum L_p vor. Betrachtet wird die Abbildung $F : \mathbf{C}_+ \to L_p$, die jedem $z \in \mathbf{C}_+$ den Poisson Kern $P_z \in L_p$ zuordnet, d.h. $F(z) = P_z$. Es ist leicht einzusehen, daß diese Funktion harmonisch ist, denn für $f \in L_q \subseteq L_p^*$ gilt

$$\langle F(z), f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f(t)\, dt$$

und diese Funktion ist als Funktion in z harmonisch in der rechten Halbebene nach Proposition 2.1.2 (i). Da L_q für alle $1 \leq p \leq \infty$ ein normierender Teilraum für L_p ist, ergibt sich mit Folgerung 1.4.17, daß die Abbildung F harmonisch in $\mathbf{C}_+$ ist.

Sei $F : \mathbf{C}_+ \to X$ eine harmonische Funktion. Im folgenden werden für $a > 0$ die Einschränkungen von F auf die zur imaginären Achse parallel verlaufenden Linien $a + i\mathbf{R}$ eine Rolle spielen. Deshalb wird die Bezeichnung $F_a(b) = F(a + ib)$ für $-\infty < b < \infty$ eingeführt. Gilt speziell $F = \mathcal{P}f$ mit einem $f \in L_p(X)$ bzw. $F = \widetilde{\mathcal{P}}\phi$ mit einem $\phi \in PV_p(X)$, so schreiben wir $\mathcal{P}_a f$ anstelle von $(\mathcal{P}f)_a$ bzw. $\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$ anstelle $(\widetilde{\mathcal{P}}\phi)_a$.

Definition 2.1.4 Der *Hardyraum harmonischer Funktionen* $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ besteht aus allen in der rechten Halbebene harmonischen Funktionen $F : \mathbf{C}_+ \to X$, welche der Abschätzung

$$\sup_{a>0} \|F_a\|_{L_p} < \infty$$

genügen. Ist $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$, so wird die h_p-Norm von F durch $\|F\|_{h_p} = \sup_{a>0} \|F_a\|_{L_p}$ definiert. Weiter wird $h_p(\mathbf{C}_+) = h_p(\mathbf{C}_+, \mathbf{C})$ gesetzt.

Es ist klar, daß $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ ein normierter Raum ist. Der zentrale Satz 2.1.14 des nächsten Paragraphen liefert als kostenlose Zugabe die Vollständigkeit von $h_p(\mathbf{C}_+, X)$. Die nächste Proposition zeigt, daß sowohl die Poisson Transformation als auch die Poisson-Stieltjes Transformation Funktionen in $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ produziert.

Proposition 2.1.5 (i) *Für jedes $f \in L_p(X)$ ist $\mathcal{P}f \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ und es gilt $\|\mathcal{P}f\|_{h_p} \leq \|f\|_{L_p}$.*

(ii) *Für jedes $\phi \in PV_p(X)$ und $x^* \in X^*$ ist $x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}\phi \in h_p(\mathbf{C}_+)$ und es gilt $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}\phi\|_{h_p} \leq \|\phi\|_{PV_p}$.*

(iii) *Für jedes $\phi \in V_p(X)$ ist $\widetilde{\mathcal{P}}\phi \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ und es gilt $\|\widetilde{\mathcal{P}}\phi\|_{h_p} \leq \|\phi\|_{V_p}$.*

Beweis (i) Sei $f \in L_p(X)$ und $F = \mathcal{P}f$. Nach Proposition 2.1.2 ist $F : \mathbf{C}_+ \to X$ harmonisch in $\mathbf{C}_+$. Ist $a > 0$, so ergibt sich die Funktion F_a als Faltung der Funktion f mit dem Poisson Kern P_a, denn es gilt $P_{a+ib}(t) = P_a(b-t)$ und also

$$F_a(b) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t) f(t)\, dt.$$

Nach Lemma 2.1.1 ist $\|P_a\|_{L_1} = 1$ und also folgt $\|F_a\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}$ aus Proposition 1.2.11.

(ii) Ist $\phi \in PV_p(X)$, so ist $F = \widetilde{\mathcal{P}}\phi$ nach Proposition 2.1.2 eine in der rechten Halbebene harmonische Funktion. Sei $p > 1$ und $x^* \in X^*$. Dann ist $x^* \circ \phi \in V_p$ und also besitzt $x^* \circ \phi$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f_{x^*} \in L_p$ mit $\|f_{x^*}\|_{L_p} = \|x^* \circ \phi\|_{V_p}$. Die Rechenregel 1.3.9 liefert für alle $z \in \mathbf{C}_+$

$$(x^* \circ F)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\, d(x^* \circ \phi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f_{x^*}(t)\, dt.$$

Wird nun (i) auf die skalarwertige Funktion $x^* \circ F$ angewendet, so ergibt sich

$$\|x^* \circ F_a\|_{L_p} \leq \|f_{x^*}\|_{L_p} = \|x^* \circ \phi\|_{V_p} \leq \|\phi\|_{PV_p} \|x^*\|.$$

Nun sei $p = 1$. Weiter sei $x^* \in X^*$ und das lineare Funktional $\tau_{x^*} \in C_0^*$ sei definiert durch $\tau_{x^*}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, d(x^* \circ \phi)(t)$. Dann gilt für alle $g \in L_1 \cap C_0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\, d(x^* \circ \phi)(t) &= \tau_{x^*}(g * P_a) \\
&= \tau_{x^*}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) T(u) P_a\, du \Big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \tau_{x^*}(T(u) P_a)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} P_a(t-u)\, d(x^* \circ \phi)(t)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \widetilde{\mathcal{P}}_a(x^* \circ \phi)(u)\, du.
\end{aligned}$$

Hier ist das in der zweiten Zeile dieser Gleichungskette auftretende Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)T(u)P_a\,du$$

ein Bochner Integral in C_0 (siehe Proposition 1.2.12) und das Gleichheitszeichen zwischen der zweiten und der dritten Zeile wird durch Proposition 1.2.8 gerechtfertigt. Insbesondere folgt

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\widetilde{\mathcal{P}}_a(x^*\circ\phi)\phi(u)\,du\Big| \le \|\mathcal{P}_a g\|_\infty \|x^*\circ\phi\|_{V_1} \le \|g\|_\infty \|x^*\circ\phi\|_{V_1} \qquad (g\in L_1\cap C_0).$$

Dies zeigt, daß $\widetilde{\mathcal{P}}_a(x^*\circ\phi)$ ein beschränktes lineares Funktional auf der in C_0 dichten Teilmenge $L_1\cap C_0$ definiert, dessen Norm sich durch $\|x^*\circ\phi\|_{V_1}$ abschätzen läßt. Dies beweist die Behauptung

$$\sup_{x^*\in U_{X^*}} \|\widetilde{\mathcal{P}}(x^*\circ\phi)\|_{h_1} = \sup_{x^*\in U_{X^*}} \sup_{a>0} \|\widetilde{\mathcal{P}}_a(x^*\circ\phi)\|_{L_1} \le \|\phi\|_{PV_1}.$$

(iii) Sei zuerst $p>1$. Dann wird ein reelles und positives $g\in L_p$ mit $\|g\|_{L_p}=\|\phi\|_{V_p}$ gewählt, welches für alle $h\in L_q$ der Ungleichung

$$\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,d\phi(t)\Big\| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|g(t)\,dt$$

genügt. Ein solches g existiert nach Proposition 1.3.13, da ϕ voraussetzungsgemäß von beschränkter p-Variation ist. Wird $h=P_{a+ib}$ gewählt, so kann $\|F(a+ib)\|$ abgeschätzt werden durch

$$\|F(a+ib)\| \le \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t)g(t)\,dt = (P_a * g)(b) = \mathcal{P}g(a+ib).$$

Dies beweist

$$\|F\|_{h_p} \le \|\mathcal{P}g\|_{h_p} \le \|g\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p}.$$

Ist $p=1$, so gibt es nach Proposition 1.3.22 ein reelles $\psi\in V_1$ mit $\|\psi\|_{V_1}=\|\phi\|_{V_1}$ so, daß für alle $h\in C_0$ die Ungleichung

$$\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,d\phi(t)\Big\| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,d\psi(t)$$

besteht. Wird wieder $h=P_{a+ib}$ gewählt, so folgt die Abschätzung

$$\|F(a+ib)\| \le \int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t)\,d\psi(t) = \widetilde{\mathcal{P}}\psi(a+ib)$$

und also $\|F\|_{h_1} \le \|\widetilde{\mathcal{P}}\psi\|_{h_1} \le \|\psi\|_{V_1} = \|\phi\|_{V_1}$. $\equiv$

Im nächsten Lemma wird wieder die Schreibweise $Y_p=L_p$ falls $1\le p<\infty$ und $Y_\infty = C_0$ verwendet.

Lemma 2.1.6 *Sei $\phi \in PV_p(X)$. Dann gilt für alle $a > 0$ und $g \in Y_q$*

$$\mathrm{P}\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\,d\phi(t). \tag{2.1}$$

Diese Aussage beinhaltet insbesondere die Behauptung, daß das Pettis Integral in Gleichung (2.1) existiert.

Beweis Für $p = 1$ wurde im Beweis von Proposition 2.1.5 (ii) bereits gezeigt, daß für jedes $x^* \in X^*$ und $g \in L_1 \cap C_0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a(x^* \circ \phi)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\,d(x^* \circ \phi)(t). \tag{2.2}$$

Da $L_1 \cap C_0$ dicht in C_0 ist, gilt die Gleichung (2.2) für alle $g \in L_1 \cap C_0$. Folglich stimmt das Dunford Integral $\mathrm{D}\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt$ mit dem Stieltjes Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\,d\phi(t)$ überein. Insbesondere liegt dieses Dunford Integral in X und ist folglich ein Pettis Integral.

Ist $p = \infty$, so ist das Pettis Integral in Gleichung (2.2) sogar ein Bochner Integral. Sei nun $1 < p < \infty$. Dann existiert nach Folgerung 1.2.16 das Pettis Integral in Gleichung (2.2), denn nach Proposition 2.1.5 liegt $x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$ in L_p für alle $x^* \in X^*$ und der Poissonkern P_a liegt in L_q. Zudem besitzt $x^* \circ \phi$ für jedes $x^* \in X^*$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f_{x^*} \in L_p$ und es folgt mit der Rechenregel 1.3.9 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a(x^* \circ \phi)(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\int_{-\infty}^{\infty} P_a(t-u)f_{x^*}(u)\,du\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x^*}(u)\int_{-\infty}^{\infty} P_a(u-t)g(t)\,dt\,du\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(u)\,d(x^* \circ \phi)(u).\end{aligned}$$

Da an beiden Enden dieser Gleichungskette das beliebig gewählte lineare Funktional x^* vor das Integral gezogen werden kann, folgt die Behauptung. $\equiv$

Als nächstes wird die Frage erörtert, wie die Poisson Transformation beziehungsweise die Poisson-Stieltjes Transformation invertiert werden kann. Dazu ist es sinnvoll, die Poisson Transformierte einer $L_p(X)$-Funktion f wie im Beweis von Proposition 2.1.5 als Faltung aufzufassen, d.h. $\mathcal{P}f(a + ib) = (P_a * f)(b)$.

Proposition 2.1.7

(i) *Ist $f \in L_\infty$ stetig im Punkt b_0, so gilt $\lim_{z\to ib_0} \mathcal{P}f(z) = f(b_0)$.*

(ii) *Sei $1 \le p \le \infty$ und $f \in Y_p(X)$, dann gilt $\lim_{a\to 0} \|\mathcal{P}_a f - f\|_{Y_p} = 0$.*

(iii) *Ist $f \in L_\infty(X)$, so gilt für alle $g \in L_1(X)$*

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathcal{P}_a f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt.$$

(iv) *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\phi \in PV_p(X)$, dann gilt für alle $g \in Y_q$*

$$\lim_{a\to 0} \mathrm{P}{\sim}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,d\phi(t).$$

Beweis (i) Für jedes $a > 0$ ist das Integral über den Poisson Kern P_a gleich Eins und daher folgt $\int_{-\infty}^{\infty} P_a(t)f(t_0)\,dt = f(t_0)$. Weiter läßt sich der Poisson Kern P_a nach Lemma 2.1.1 darstellen durch $P_a(t) = a^{-1}P_1(t/a)$. Demnach gilt für alle $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}f(z) - f(b_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t)(f(t) - f(b_0))\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a^{-1}P_1(t/a)(f(b-t) - f(b_0))\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_1(t)(f(b-at) - f(b_0))\,dt.
\end{aligned}$$

Konvergiert nun $z \to ib_0$, so konvergiert $a \to 0$ und $b \to b_0$ und da f als stetig in b_0 vorausgesetzt war, zieht dies für jedes $t \in \mathbf{R}$ die Konvergenz $\lim_{z\to ib_0} f(b-at)-f(b_0) = 0$ nach sich. Zudem wird der Integrand am rechten Ende der Gleichungskette durch die L_1-Funktion $P_1{\cdot}2\|f\|_\infty$ dominiert. Somit kann der Satz von der dominierten Konvergenz angewendet werden und es ergibt sich die Behauptung $\lim_{z\to ib_0} \mathcal{P}f(z) = f(b_0)$.

(ii) Zum Beweis wird daran erinnert (siehe Proposition 1.2.11), daß die durch $T(t)f(s) = f(s-t)$ definierte Familie der Translationen $T(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ stark stetig in $Y_p(X)$ ist und die Faltung $P_a * f$ die Darstellung $P_a * f = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(t)T(t)f\,dt$ besitzt. Die reelle Hilfsfunktion h sei definiert durch $h(t) = \|T(-t)f - f\|_{Y_p}$. Mit dieser Bezeichnung folgt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_a f - f\|_{Y_p} &= \Big\|\int_{-\infty}^{\infty} P_a(t)(T(t)f - f)\,dt\Big\|_{Y_p} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} P_a(t)\|T(t)f - f\|_{Y_p}\,dt = (P_a * h)(0).
\end{aligned}$$

Da h nach Proposition 1.2.11 im Punkt 0 stetig ist, gilt nach Aussage (i) dieser Proposition $\lim_{a\to 0} P_a * h(0) = h(0) = 0$. Das beweist $\lim_{a\to 0} \|\mathcal{P}_a f - f\|_{Y_p} = 0$.

(iii) Es genügt nachzuweisen, daß für jedes $g \in L_1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathcal{P}_a f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)f(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Ist dieser Nachweis erbracht, so folgt nämlich wegen $\lim_{a\to 0} \|\mathcal{P}_a g - g\|_{L_1} = 0$ die Konvergenz

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathcal{P}_a f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt.$$

Die Gültigkeit der Gleichung (2.3) ist leicht einzusehen, da für alle $x^* \in X^*$ unter Zuhilfenahme des Satzes von Fubini gefolgert werden kann

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(t)(x^* \circ \mathcal{P}_a f)(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\int_{-\infty}^{\infty} P_a(t-s)(x^* \circ f)(s)\,ds\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_a(s-t)g(t)\,dt(x^* \circ f)(s)\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{P}_a g)(s)(x^* \circ f)(s)\,ds,
\end{aligned}$$

und das lineare Funktional x^* kann an beiden Enden dieser Gleichungskette vor das Integral gezogen werden.

(iv) Lemma 2.1.6 besagt, daß für jedes $g \in Y_q$ gilt

$$\mathrm{P}\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\,d\phi(t).$$

Da in (ii) bereits für jedes $g \in Y_q$ die Konvergenz $\lim_{a\to 0}\mathcal{P}_a g = g$ in der Norm in Y_q nachgewiesen wurde, folgt

$$\lim_{a\to 0}\mathrm{P}\!\sim\!\!\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt = \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a g(t)\,d\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,d\phi(t).$$

$\equiv$

Ist f stetig und beschränkt in $\mathbf{R}$, so konvergiert $\mathcal{P}f(z)$ gegen $f(t)$ für $z \to it$, wie soeben gezeigt wurde. Folglich ist die durch

$$F(a+ib) = \begin{cases} \mathcal{P}_a f(b), & \text{falls } a > 0, \\ f(b), & \text{falls } a = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $F : \overline{\mathbf{C}}_+ \to X$ stetig und beschränkt in $\overline{\mathbf{C}}_+$ sowie harmonisch in $\mathbf{C}_+$. Die Funktion f liefert demnach die Werte der stetigen Fortsetzung von $\mathcal{P}f$ auf den Rand von $\overline{\mathbf{C}}_+$ und es liegt nahe, f als Funktion der *Randwerte* von $\mathcal{P}f$ zu bezeichnen. Diese Bezeichnung wird im folgenden auch für Funktionen $f \in L_p(X)$ benutzt, d.h. ist $f \in L_p(X)$, so nennen wir f die Funktion der Randwerte von $\mathcal{P}f$. Ist dagegen $\phi \in PV_p(X)$, so wird ϕ Funktion der *integrierten Randwerte* von $\widetilde{\mathcal{P}}\phi$ genannt. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, weil für $f \in L_p(X)$ gilt: f ist die Funktion der Randwerte von $\mathcal{P}f$ und das unbestimmte Integral $\mathcal{I}f$ von f ist die Funktion der integrierten Randwerte von $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{I}f)$.

Folgerung 2.1.8 *Sei $1 < p \le \infty$. Ist $\phi \in PV_p(X)$, so gilt $\phi(s) = \lim_{a\to 0}\int_0^s \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt$ $(-\infty < s < \infty)$.*

Beweis Für jedes $s \in \mathbf{R}$ gilt die Gleichung $\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_s(t)\,d\phi(t)$ und die charakteristische Funktion χ_s ist eine L_q-Funktion. Da $p > 1$ vorausgesetzt ist, folgt aus Proposition 2.1.7 (iv)

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_s(t)\,d\phi(t) = \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_s(t)\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt = \lim_{a\to 0}\int_0^s \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi(t)\,dt.$$

$\equiv$

Da jede Funktion von beschränkter p-Variation insbesondere von beschränkter p-Semivariation ist, gilt die Umkehrformel 2.1.7 (iv) auch für Funktionen von beschränkter p-Variation und es ist eine natürliche Frage, ob die stärkere Eigenschaft der beschränkten p-Variation eine stärkere Konvergenzaussage zuläßt? Um eine Antwort auf diese Frage zu bekommen, muß zuerst präzisiert werden, wie eine solche stärkere Konvergenz aussehen könnte. Naheliegend ist der Gedanke, sich dabei am $L_p(X)$-Fall zu orientieren.

Es sei $p > 1$, $f \in L_p(X)$ und $\phi \in V_p(X)$ sei definiert durch $\phi(s) = \int_0^s f(t)\,dt$, d.h. $\phi = \mathcal{I}f$. Dann, so wurde in Lemma 1.3.2 gezeigt, ist $\|f\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p}$ und für alle $g \in L_q$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,d\phi(t)$. Diese Gleichung gilt insbesondere wenn $g = P_a$ gewählt wird und es folgt $\mathcal{P}_a f = \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$. In diesem Fall konvergiert also $\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$ in der L_p-Norm gegen f. Da der Operator $\mathcal{I} : L_p(X) \to V_p(X)$ eine Isometrie ist, konvergiert folglich $\mathcal{I}(\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi)$ in der V_p-Norm gegen $\mathcal{I}f = \phi$. Gilt diese Konvergenz auch, wenn ϕ keine Radon-Nikodym Ableitung besitzt, d.h. gilt in jedem Fall $\lim_{a\to 0} \mathcal{I}(\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi) = \phi$ in der Norm in $V_p(X)$?

Diese Frage muß negativ beantwortet werden. Ist nämlich $\phi \in V_p(X)$ derart, daß $\mathcal{I}(\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi)$ gegen ϕ konvergiert bezüglich der V_p-Norm, so ist die Folge $(\mathcal{I}(\mathcal{P}_a\phi))_{a>0}$ insbesondere eine Cauchyfolge in $V_p(X)$ für $a \to 0$. Da der Operator $\mathcal{I}$ eine Isometrie ist, muß demnach die Folge $(\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi)_{a>0}$ eine Cauchyfolge in $L_p(X)$ sein für $a \to 0$. Aber der Raum $L_p(X)$ ist vollständig, und deshalb konvergiert diese Folge gegen eine $L_p(X)$-Funktion f in der L_p-Norm. Unter diesen Umständen muß f eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ sein. Diese Überlegung zeigt, daß $\lim_{a\to 0} \mathcal{I}(\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi) = \phi$ genau dann gilt, wenn ϕ eine Radon-Nikodym Ableitung besitzt.

2.1.2 Randwerte harmonischer Funktionen in $h_p(X)$

Bisher war der Ausgangspunkt der Untersuchung eine $L_p(X)$- bzw. $V_p(X)$-Funktion und durch die Poisson bzw. die Poisson-Stieltjes Transformation wurde eine auf der rechten Halbebene harmonische Funktion definiert, die Gegenstand der Untersuchung war. Es stellt sich nun umgekehrt die Frage, ob eine gegebene harmonische Funktion F immer darstellbar ist als Poisson Transformation einer Funktion der Randwerte oder zumindest als Poisson-Stieltjes Transformation einer Funktion der integrierten Randwerte. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen besteht in dem Nachweis, daß jede Funktion $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ eine Funktion der integrierten Randwerte $\phi \in V_p(X)$ besitzt. Dieser Satz 2.1.14 ist das banachraumwertige Analogon des Satzes, daß jede skalarwertige Funktion $F \in h_p(\mathbf{C}_+)$ eine Funktion der Randwerte $f \in L_p$ für $p > 1$ und eine Funktion der integrierten Randwerte $\phi \in V_1$ für $p = 1$ besitzt (siehe Garnett [17]).

Wir betrachten zuerst den Fall einer auf der abgeschlossenen Halbebene stetigen und beschränkten und auf der offenen Halbebene harmonischen Funktion.

Proposition 2.1.9 *Sei $F : \overline{\mathbf{C}}_+ \to X$ eine auf der abgeschlossenen Halbebene stetige und beschränkte und auf der offenen Halbebene harmonische Funktion. Dann ist F die Poisson Transformierte ihrer Randwerte, d.h. es gilt*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)F(it)\,dt \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Beweis Die Funktion $G : \overline{\mathbf{C}}_+ \to X$ sei definiert durch

$$G(a+ib) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t)F(it)\,dt, & \text{falls } a > 0, \\ F(ib), & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Dann ist G aufgrund von Proposition 2.1.7 (i) stetig und beschränkt in der abgeschlossenen Halbebene und harmonisch in der offenen rechten Halbebene. Nach den Voraussetzungen an F gilt entsprechend: Die Differenz $G - F$ ist stetig und beschränkt in der abgeschlossenen Halbebene und harmonisch in der offenen rechten Halbebene. Es bezeichne $\mathbf{C}_-$ die linke offene komplexe Halbebene, d.h. $\mathbf{C}_- = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Wird H in der ganzen komplexen Ebene definiert durch

$$H(z) = \begin{cases} G(z) - F(z), & \text{falls } z \in \overline{\mathbf{C}}_+, \\ F(-\overline{z}) - G(-\overline{z}), & \text{falls } z \in \mathbf{C}_-, \end{cases}$$

so ist H stetig in $\mathbf{C}$. Da $F - G$ harmonisch in $\mathbf{C}_+$ ist, ist die so definierte Funktion H harmonisch in $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$. Demnach gilt aufgrund der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen 1.4.18 für alle $z \in \mathbf{C}_- \cup \mathbf{C}_+$ und für alle $0 < r < |\mathrm{Re}(z)|$

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Liegt z auf der imaginären Achse, so folgt für jedes $r > 0$

$$H(z) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

wegen $H(z+re^{i\theta}) = -H(z-re^{-i\theta})$ für $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Somit besitzt H in der ganzen komplexen Ebene die Mittelwerteigenschaft und ist somit nach Folgerung 1.4.18 harmonisch in $\mathbf{C}$. Der Satz von Liouville für harmonische Funktionen 1.4.19 besagt, daß harmonische und beschränkte Funktionen in $\mathbf{C}$ konstant sind. Folglich ist $H(z) = H(0) = 0$ für alle $z \in \mathbf{C}$. Insbesondere gilt $F(z) = G(z)$ in der rechten Halbebene, was zu zeigen war.

≡

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen wird mit einigen Lemmas vorbereitet.

Lemma 2.1.10 *Die Familie der Poissonkerne $(P_a)_{a>0}$ besitzt die folgende Halbgruppeneigenschaft: Für alle positiven a und a_1 gilt $P_a * P_{a_1} = P_{a+a_1}$.*

Beweis Sei $a > 0$ und die Funktion $G_a : \overline{\mathbf{C}}_+ \to \mathbf{R}$ sei definiert durch $G_a(a_1 + ib) = P_{a+a_1}(b)$. Dann ist G_a harmonisch und beschränkt in der rechten Halbebene. Folglich läßt sich G_a nach Proposition 2.1.9 darstellen als Poisson Transformation ihrer Werte auf der imaginären Achse, d.h. für $a_1 > 0$ und $b \in \mathbf{R}$ gilt

$$\begin{aligned} P_{a+a_1}(b) &= G_a(a_1 + ib) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{a_1}(b - t) G_a(it)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{a_1}(b - t) P_a(t)\, dt = (P_a * P_{a_1})(b). \end{aligned}$$

≡

Der Beweis des folgenden Lemmas für den skalarwertigen Fall findet sich in [17] und kann für den banachraumwertigen Fall mit dem einzigen Unterschied übernommen werden, daß Betragstriche durch Normstriche ersetzt werden.

Lemma 2.1.11 *Ist $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$, so gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$ die Abschätzung $\|F(z)\| \leq C\frac{\|F\|_{h_p}}{\mathrm{Re}(z)^{1/p}}$, mit einer von F und z unabhängigen Konstante C. Insbesondere ist F für alle $a > 0$ auf der um a nach rechts verschobenen abgeschlossenen Halbebene $a + \overline{\mathbf{C}}_+$ beschränkt.*

Beweis Ist F harmonisch in der rechten Halbebene, so besitzt F die Mittelwerteigenschaft und daher kann $\|F(z)\|^p$ unter Zuhilfenahme der Hölderschen Ungleichung abgeschätzt werden durch

$$\|F(z)\|^p \le \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^p \Big(\int_0^{2\pi} \|F(z+re^{i\theta})\|\,d\theta\Big)^p \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|F(z+re^{i\theta})\|^p\,d\theta. \qquad (2.4)$$

Diese Abschätzung gilt für alle positiven r, welche kleiner sind als der Realteil von z, da für solche r der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt z in der rechten Halbebene enthalten ist. Sei $0 < s < \mathrm{Re}(z)$. Die Ungleichung (2.4) wird nun auf beiden Seiten mit r multipliziert und dann wird auf beiden Seiten das Integral bezüglich r in den Grenzen 0 bis s gebildet. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{2}\|F(z)\|^p &\le \int_0^s \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|F(z+re^{i\theta})\|^p\,d\theta\,dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{K_s(z)} \|F(u)\|^p\,du \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}(z)-s}^{\mathrm{Re}(z)+s}\int_{\mathrm{Im}(z)-s}^{\mathrm{Im}(z)+s} \|F(a+ib)\|^p\,db\,da \\
&\le \frac{s}{\pi}\|F\|_{h_p}^p.
\end{aligned}$$

Wird diese Ungleichung nach $\|F(z)\|$ aufgelöst und das Supremum über alle $0 < s < \mathrm{Re}(z)$ genommen, so ergibt sich die Behauptung mit der Konstante $C = (\frac{2}{\pi})^{1/p}$. $\equiv$

Eine Funktion $g : \Omega \to \mathbf{R}$, welche für alle $z \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z)} \subseteq \Omega$ der Abschätzung

$$g(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

genügt, wird *subharmonisch* in Ω genannt. Die Ungleichung (2.4) beweist das folgende Lemma.

Lemma 2.1.12 *Ist $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$, so ist die Funktion $z \mapsto \|F(z)\|^p$ subharmonisch in $\mathbf{C}_+$.*

Lemma 2.1.13 (i) *Eine Teilmenge $M \subseteq Y$ eines Banachraums Y ist total in Y, wenn für jedes lineare Funktional $y^* \in Y^*$ aus $y^*_{|M} = 0$ folgt $y^* = 0$.*

(ii) *Die Menge $\{P_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ ist in jedem der Räume L_q für $1 \le q < \infty$ und C_0 total.*

Beweis (i) Bewiesen wird die zu (i) äquivalente Aussage: Ist M nicht total in Y, so gibt es ein nicht triviales lineares Funktional y^* auf Y^* mit $y^*_{|M} = 0$. Sei also M nicht total in Y, d.h. es ist $Y \ne \overline{\mathrm{Lin}(M)}$. Betrachtet wird der Quotientenraum $\widehat{Y} = Y/\overline{\mathrm{Lin}(M)}$ mit der Norm $\|\widehat{y}\| = \inf_{y \in \widehat{y}} \|y\|$. Dieser Raum ist nach [20] ein Banachraum und die Quotientenabbildung $Q : Y \to \widehat{Y}$, die jedem $y \in Y$ seine Restklasse $\widehat{y}$ zuordnet, ist stetig. Da M nicht total ist, ist $\widehat{Y}$ nicht trivial. Nach dem Banachschen Fortsetzungssatz gibt es demnach ein nicht triviales lineares Funktional z^* auf $\widehat{Y}$. Durch $y^* = z^* \circ Q$ wird nun ein lineares Funktional mit den folgenden Eigenschaften auf Y definiert:

(1) $y^* \neq 0$, denn es gibt ein $\hat{y} \in \widehat{Y}$ mit $z^*(\hat{y}) \neq 0$ und somit $y^*(y) = z^*(\widehat{y}) \neq 0$.

(2) $y^*|M = 0$, denn $m \in M$ impliziert $\widehat{m} = 0$ in $\widehat{Y}$ und also $y^*(m) = z^*(0) = 0$.

Das gesuchte lineare Funktional y ist somit gefunden.

(ii) Zum Beweis wird gezeigt, daß die Menge $\{P_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ die Voraussetzungen aus (i) erfüllt. Sei zuerst $1 \leq q < \infty$ und $g \in L_p = L_q^*$. Ist $0 = \langle g, P_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)g(t)\,dt$ für alle $z \in \mathbf{C}_+$, so bedeutet dies, daß die Poisson Transformierte von g trivial ist. Nach Proposition 2.1.7 impliziert dies jedoch $g = 0$.

Ist $\phi \in V_1 = C_0^*$ und gilt $0 = \langle \phi, P_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\,d\phi(t)$, so bedeutet dies, daß die Poisson-Stieltjes Transformierte von ϕ trivial ist und dies impliziert nach Proposition 2.1.7(iv) $\phi = 0$. $\equiv$

Nun sind wir in der Lage, den in der Einführung zu diesem Paragraphen angekündigten Satz zu beweisen. Im Beweis dieses Satzes wird zum ersten Mal deutlich, worin die Stärke der im ersten Kapitel vorgestellten Proposition 1.3.26 zur Konvergenz in $V_p(X)$ und ihrer Folgerung 1.3.27 besteht.

Satz 2.1.14 *Es sei $F : \mathbf{C}_+ \to X$ eine in der rechten Halbebene harmonische Funktion. F ist genau dann die Poisson-Stieltjes Transformierte einer Funktion $\phi \in V_p(X)$, falls $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$. In diesem Fall gilt $\|\phi\|_{V_p} = \|F\|_{h_p}$. Die Poisson-Stieltjes Transformation*

$$\widetilde{\mathcal{P}} : V_p(X) \to h_p(\mathbf{C}_+, X)$$

ist also ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis Ist $F = \widetilde{\mathcal{P}}\phi$ mit einem $\phi \in V_p(X)$, so wurde in Proposition 2.1.5 bereits $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $\|F_a\|_{h_p} \leq \|\phi\|_{V_p}$ nachgewiesen.

Sei also $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$. Für $a > 0$ wird die um a nach links verschobene Funktion $G_a : \overline{\mathbf{C}}_+ \to X$ betrachtet, d.h. $G_a(z) = F(a + z)$ $(z \in \overline{\mathbf{C}}_+)$. Diese Funktion ist offensichtlich stetig in der abgeschlossenen rechten Halbebene und harmonisch in der offenen rechten Halbebene. Nach Lemma 2.1.11 ist G_a zudem beschränkt in $\overline{\mathbf{C}}_+$. Aufgrund von Proposition 2.1.9 läßt sich G_a folglich darstellen durch die Poisson Transformierte ihrer Randfunktion, es gilt also für $z \in \mathbf{C}_+$

$$F(a + z) = G_a(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)G_a(it)\,dt.$$

Da F stetig in der rechten Halbebene ist, existiert der Grenzwert $\lim_{a\to 0} F(a+z) = F(z)$ auf der linken Seite dieser Gleichung für jedes z in der rechten Halbebene. Wird dieses Ergebnis mit der Aussage (ii) aus Lemma 2.1.13 kombiniert, so ergibt sich:

(1) $\{P_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ ist total in Y_q.

(2) $\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)G_a(t)\,dt = F(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}_+$.

Dies sind genau die Voraussetzungen, die Folgerung 1.3.27 erfordert. Demnach existiert ein $\phi \in V_p(X)$ so, daß für alle $g \in Y_q$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,d\phi(t) = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)G_a(t)\,dt.$$

Wird speziell $g = P_z$ gewählt, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\,d\phi(t) = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)G_a(t)\,dt = F(z).$$

Somit erweist sich F als Poisson Transformierte von ϕ. Darüberhinaus stellt Folgerung 1.3.27 die Abschätzung $\|\phi\|_{V_p} \leq \sup_{a>0} \|G_a\|_{h_p} \leq \|F\|_{h_p}$ sicher. $\equiv$

Die nächste Folgerung klärt die Frage, welche Bedingungen an X gestellt werden müssen, damit jede Funktion $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ eine Randfunktion in $L_p(X)$ besitzt.

Folgerung 2.1.15 *Sei $1 < p \leq \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Poisson Transformation $\mathcal{P} : L_p(X) \to h_p(\mathbf{C}_+, X)$ ist ein isometrischer Isomorphismus, also insbesondere surjektiv.*

(ii) *Der Banachraum X besitzt die Radon-Nikodym Eigenschaft.*

Beweis Aufgrund von Proposition 1.3.33 bzw. 1.3.34 genügt es zu zeigen, daß (i) äquivalent ist zu der Aussage, daß jede Funktion $\phi \in V_p(X)$ eine Radon-Nikodym Ableitung in $L_p(X)$ besitzt. Zuerst gelte also (i) und es sei $\phi \in V_p(X)$. Dann ist $\widetilde{\mathcal{P}}\phi \in h_p(X)$ nach Proposition 2.1.5. Folglich gibt es, da (i) vorausgesetzt ist, eine Funktion $f \in L_p(X)$ mit $\widetilde{\mathcal{P}}\phi = \mathcal{P}f$. Betrachten wir für $x^* \in X^*$ wieder die Radon-Nikodym Ableitung g_{x^*} von $x^* \circ \phi$, so besagt die Rechenregel 1.3.9 für alle $z \in \mathbf{C}_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) g_{x^*}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\,d(x^* \circ \phi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)(x^* \circ f)(t)\,dt.$$

Da die Poisson Transformation injektiv ist, impliziert diese Gleichung $g_{x^*} = x^* \circ f$ und für alle $t \in \mathbf{R}$ folgt

$$\langle x^*, \int_0^t f(u)\,du\rangle = \int_0^t g_{x^*}(u)\,du = \langle x^*, \phi(t)\rangle.$$

Folglich ist $f \in L_p(X)$ die Radon-Nikodym Ableitung von ϕ.

Umgekehrt besitze nun jedes $\phi \in V_p(X)$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p(X)$. Aus Satz 2.1.14 folgt, daß die Poisson Transformation isometrisch ist und es bleibt nur noch die Surjektivität nachzuweisen. Sei also $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$. Dann besitzt F eine Funktion der integrierten Randwerte $\phi \in V_p(X)$. Diese Funktion ϕ wiederum besitzt eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p(X)$. Ein weiteres Mal kommt die Rechenregel 1.3.9 zum Einsatz und für alle $z \in \mathbf{C}_+$ folgt

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\,d\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f(t)\,dt,$$

was nichts anderes als $F = \mathcal{P}f$ bedeutet. $\equiv$

Beispiel 2.1.16 Sei $1 \leq r \leq \infty$. Betrachtet werde die Abbildung $F : \mathbf{C}_+ \to L_r$, die jedem z aus der rechten Halbebene den Poisson Kern P_z zuordnet. Im Beispiel 2.1.3 wurde bereits nachgerechnet, daß diese Funktion harmonisch in der rechten Halbebene ist. Besitzt diese Funktion eine Randfunktion in V_p für ein $1 \leq p \leq \infty$? Um diese Frage zu beantworten, muß zuallererst nachgeprüft werden, ob die L_p-Norm von F entlang senkrechter Linien in der rechten Halbebene endlich ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, solange $p < \infty$. Denn es ist $\|F(a+ib)\|_{L_r} = \|F(a)\|_{L_r}$ für alle $a > 0$, da $F(a+ib)$ durch Translation aus $F(a)$ hervorgeht. Somit ist die Norm der Abbildung F konstant auf senkrechten Linien, sie kann folglich entlang solcher Linien für $p < \infty$ nicht p-integrierbar sein.

Aber es gilt natürlich $\|F_a\|_{L_\infty(L_r)} = \|F(a)\|_{L_r}$ ist endlich für alle $a > 0$. Um entscheiden zu können, ob auch $\sup_{a>0} \|F_a\|_{L_\infty}$ beschränkt ist, muß $\|F(a)\|_{L_r}$ genauer berechnet werden. Es gilt

$$\|F(a)\|_{L_r} = \|P_a\|_{L_r} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |a^{-1}P_1(t/a)|^r \, dt\Big)^{1/r} = a^{-1/s}\|P_1\|_{L_r},$$

wobei $1/r + 1/s = 1$. Das Supremum über alle $a > 0$ auf der rechten Seite dieser Gleichung ist offensichtlich genau dann endlich, wenn $s = \infty$, also $r = 1$.

Mit Satz 2.1.14 folgt aus den bisherigen Überlegungen, daß die durch $F(z) = P_z$ definierte Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to L_q$ genau dann eine Randfunktion $\phi \in V_p(L_r)$ besitzt, wenn $r = 1$ und $p = \infty$.

Wie sieht nun in diesem Fall die Randfunktion aus? Es ist die denkbar einfache Funktion $\phi : \mathbf{R} \to L_1$, die durch $\phi(t) = \chi_t$ gegeben ist. Dies verdeutlicht die folgende Gleichung, welche nach Beispiel 1.3.8 richtig ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) \, d\phi(t) = P_z = F(z).$$

Kehren wir noch einmal zum Fall $r > 1$ zurück. Auch in diesem Fall ist die durch $\phi(t) = \chi_t$ definierte Funktion eine auf $\mathbf{R}$ definierte Abbildung, deren Werte im Raum L_r liegen. Offensichtlich ist aber ϕ nicht Lipschitz stetig. Denn sonst, so der Umkehrschluß, wäre wieder $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) \, d\phi(t)$ und es würde $\sup_{a>0} \|F_z\|_{L_\infty(L_r)} < \infty$ folgen, was aber nicht der Fall ist. Trotzdem ist nicht alles verloren. Denn ϕ ist von beschränkter s-Semivariation, wie in Beispiel 1.3.8 gezeigt wurde und wieder gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$ die Darstellung $P_z = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) \, d\chi_t$.

Das obige Beispiel macht deutlich, daß harmonische Funktionen existieren, deren Funktion der Randwerte nicht von beschränkter p-Variation, wohl aber von beschränkter p-Semivariation ist, was spätestens seit Proposition 2.1.5 keine Überraschung mehr ist. Eine Charakterisierung solcher Funktionen gibt der folgende Satz.

Satz 2.1.17 *Sei $1 < p < \infty$ und $F : \mathbf{C}_+ \to X$ sei eine auf der rechten Halbebene harmonische Funktion. F ist genau dann Poisson-Stieltjes Transformation einer Funktion $\phi \in PV_p(X)$, falls*

$$\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_p} < \infty. \tag{2.5}$$

In diesem Fall ist $\|\phi\|_{PV_p} = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_p}$.

Beweis Sei zuerst $F = \widetilde{\mathcal{P}}\phi$ mit einem $\phi \in PV_p(X)$. Die Gültigkeit von Gleichung (2.5) sowie die Abschätzung $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_p} \leq \|\phi\|_{V_p}$, wurde bereits in Proposition 2.1.5 bewiesen.

Sei nun $F : \mathbf{C}_+ \to X$ eine harmonische Funktion, welche die Bedingung (2.5) erfüllt und es sei $M = \sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_p}$. Dann ist für alle $x^* \in X^*$ die Abbildung $x^* \circ F$ eine skalarwertige harmonische Funktion mit $\|x^* \circ F\|_{h_p} \leq M\|x^*\|$. Es existiert demnach aufgrund der vorangegangenen Folgerung 2.1.15 eine eindeutig bestimmte Funktion $f_{x^*} \in L_p$ mit $\|f_{x^*}\|_{L_p} \leq M\|x^*\|$ und

$$(x^* \circ F)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f_{x^*}(t)\, dt \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Betrachtet werde nun der Operator $S : X^* \to L_p$, der jedem $x^* \in X^*$ die Funktion der Randwerte f_{x^*} von $x^* \circ F$ zuordnet. Dieser Operator ist offensichtlich linear und die Abschätzung $\|f_{x^*}\|_{L_p} \leq M\|x^*\|$ besagt, daß die Norm von S beschränkt ist durch M. Also ist auch die Norm des zu S dualen Operators $S^* : L_q \to X^{**}$ durch M beschränkt. Zudem gilt für alle $x^* \in X^*$ und alle $z \in \mathbf{C}_+$

$$\langle x^*, S^* P_z \rangle = \langle Sx^*, P_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f_{x^*}(t)\, dt = \langle x^*, F(z) \rangle.$$

Demzufolge ist für alle z in der rechten Halbebene $S^* P_z = F(z) \in X$. Da nach Lemma 2.1.13 die Menge $\{P_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ dicht in L_q ist, nimmt S^* folglich alle seine Werte in X an. Nun kann der Repräsentationssatz 1.3.5 angewandt werden. Dieser sichert die Existenz einer repräsentierenden Funktion $\phi \in PV_p(X)$ von S^* mit $\|\phi\|_{PV_p} = \|S^*\| \leq M$ und es folgt

$$F(z) = S^* P_z = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\, d\phi(t) \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

$\equiv$

Die Fälle $p = \infty$ und $p = 1$ wurden im soeben bewiesenen Satz absichtlich ausgespart, jedoch aus unterschiedlichen Gründen. Ist $p = \infty$, so stimmen die Funktionen von beschränkter p-Variation und diejenigen von beschränkter p-Semivariation überein. Somit gilt der eben bewiesene Satz auch für $p = \infty$, er liefert jedoch gegenüber Satz 2.1.14 keine neuen Informationen.

Anders liegt die Sache im Fall $p = 1$. Hier wird die Aussage des Satzes falsch, wie das unten ausgeführte Beispiel 2.1.19 belegt. In diesem Fall gilt jedoch die folgende Aussage.

Proposition 2.1.18 *Sei $F : \mathbf{C}_+ \to X$ eine harmonische Funktion. Es gilt*

$$\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_1} < \infty$$

genau dann, wenn ein stetiger Operator $T : C_0 \to X$ existiert mit

$$F(z) = T(P_z) \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Beweis Sei zuerst $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_1} < \infty$. Dann existiert nach Satz 2.1.14 für jedes $x^* \in X^*$ eine eindeutig bestimmte Funktion $\phi_{x^*} \in V_1$ mit $\|\phi\|_{x^*} = \|x^* \circ F\|_{h_1}$ und $x^* \circ F = \widetilde{\mathcal{P}}(x^* \circ \phi)$. Somit ist der durch $Sx^* = \phi_{x^*}$ definierte Operator $S : X^* \to V_1$ beschränkt. Sei T die Einschränkung des zu S dualen Operators $S^* : C_0^{**} = V_1^* \to X^{**}$ auf C_0. Dann gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$ und $x^* \in X^*$

$$\langle x^*, TP_z \rangle = \langle Sx^*, P_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t)\, d\phi_{x^*}(t) = \langle x^*, F(z) \rangle.$$

Folglich ist $TP_z = F(z)$ und insbesondere folgt $TP_z \in X$. Da die Menge $\{P_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ nach Lemma 2.1.13 total in C_0 ist, nimmt der Operator seine Werte in X an, d.h. $T : C_0 \to X$ mit $TP_z = F(z)$ ist der gesuchte Operator.

Sei umgekehrt ein Operator $T : C_0 \to X$ gegeben mit $F(z) = TP_z$ $(z \in \mathbf{C}_+)$. Ist $x^* \in X^*$, so kann $T^*x^* \in C_0$ mit einer Funktion $\psi \in V_1$ identifiziert werden und es gilt $\|\psi\|_{V_1} = \|T^*x^*\|_{C_0^*}$. Zudem besagt Lemma 1.3.21

$$|\langle T^*x^*, f\rangle| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, d\mathrm{Var}_\psi(t) \qquad (f \in C_0).$$

Es ergibt sich folglich mit Proposition 2.1.5

$$\begin{aligned}
\|x^* \circ F\|_{h_1} &= \sup_{a>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x^*, TP_{a+ib}\rangle|\, db \\
&= \sup_{a>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle T^*x^*, P_{a+ib}\rangle|\, db \\
&\le \sup_{a>0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t)\, d\mathrm{Var}_\psi(t)\, db \\
&= \sup_{a>0} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{P}}_a \mathrm{Var}_\psi(b)\, db \\
&\le \|\widetilde{\mathcal{P}} \mathrm{Var}_\psi\|_{h_1} \\
&\le \|\mathrm{Var}_\psi\|_{V_1} \\
&\le \|T\| \|x^*\|.
\end{aligned}$$

$\equiv$

Die soeben bewiesene Proposition reduziert die Frage nach der Existenz einer Funktion der integrierten Randwerte $\phi \in PV_1(X)$ für F auf die Frage nach der Existenz einer repräsentierenden Funktion $\phi \in PV_1(X)$ für den Operator T. Eine genauere Untersuchung dieser Frage findet sich in [39].

Abgeschlossen wird dieser Paragraph mit dem angekündigten Beispiel einer harmonischen Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to X$ mit $\sup_{x^* \in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_1} < \infty$, welche keine Funktion der integrierten Randwerte in $PV_1(X)$ besitzt.

Beispiel 2.1.19 Der zugrunde liegende Banachraum ist c_0 und $F : \mathbf{C}_+ \to c_0$ sei definiert durch $F(z)_n = P_z(1/n) - P_z(-1/n)$, wobei $F(z)_n$ die Projektion von $F(z)$ auf die n-te Komponente bedeutet. Jede der Funktionen $z \mapsto F(z)_n$ ist harmonisch in $\mathbf{C}_+$ und somit ist F schwach harmonisch in $\mathbf{C}_+$. Mit Folgerung 1.4.17 folgt daher, daß $F : \mathbf{C}_+ \to X$ harmonisch ist. Außerdem gilt $F(z) = TP_z$ für alle $z \in \mathbf{C}_+$, wobei $T : C_0 \to c_0$ definiert ist durch

$$(Tf)_n = f(1/n) - f(-1/n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Doch wie in Beispiel 1.3.14 kann gezeigt werden, daß T keine repräsentierende Funktion $\phi \in PV_1(X)$ besitzt. Somit kann keine Funktion $\phi \in PV_1(X)$ existieren mit $F = \tilde{\mathcal{P}}\phi$.

2.1.3 Inversion der Operatoren $\mathcal{P}_a$ in $L_p(X)$

Im folgenden bezeichnet $Y_p(X)$ wieder den Raum $L_p(X)$, falls $1 \leq p < \infty$ und den Raum $C_0(X)$, falls $p = \infty$. Sei $a > 0$ und $g \in Y_p(X)$. In diesem Paragraphen werden Bedingungen an g gesucht, welche hinreichend und notwendig für die Existenz eines $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ mit $F(a + ib) = g(b)$ $(-\infty < b < \infty)$ sind. Eine äquivalente Formulierung dieser Fragestellung ist schnell ausgemacht. Denn existiert ein solches F, so besitzt F nach Satz 2.1.14 eine integrierte Randfunktion $\phi \in V_p(X)$ und es gilt für alle $b \in \mathbf{R}$

$$g(b) = F(a + ib) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b - t)\, d\phi(t) = \tilde{\mathcal{P}}_a\phi(b).$$

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines $\phi \in V_p(X)$ mit $g = \tilde{\mathcal{P}}_a\phi$ die Existenz eines $F \in h_p(X)$ mit $g(b) = F(a + ib)$. Die oben gestellte Frage ist demnach äquivalent zu der Frage, welche Bedingungen an g hinreichend und notwendig dafür sind, daß ein $\phi \in V_p(X)$ existiert mit $g = \tilde{\mathcal{P}}_a\phi$.

Bevor solche Bedingungen gesucht werden, ist es sinnvoll, nach einer Inversionsformel für den Operator $\mathcal{P}_a : Y_p(X) \to Y_p(X)$ zu suchen. Die folgenden Überlegungen deuten an, wie eine solche Inversionsformel gefunden werden kann.

Wir betrachten die Familie $(\mathcal{P}_a)_{a \geq 0}$ von Operatoren auf $Y_p(X)$, wobei $\mathcal{P}_0 = \mathrm{Id}$ gesetzt wird. In Lemma 2.1.10 und Proposition 2.1.7 (ii) wurde gezeigt, daß diese Operatorfamilie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Für $a_1, a_2 > 0$ und $f \in Y_p(X)$ gilt $\mathcal{P}_{a_1}\mathcal{P}_{a_2}f = P_{a_1} * P_{a_2} * f = P_{a_1+a_2} * f = \mathcal{P}_{a_1+a_2}f$ und folglich $\mathcal{P}_{a_1}\mathcal{P}_{a_2} = \mathcal{P}_{a_1+a_2}$.

(2) Für alle $a > 0$ und $f \in Y_p(X)$ gilt $\lim_{a\to 0}\mathcal{P}_a f = f$, d.h. die Abbildung, die jedem $a > 0$ den Operator $\mathcal{P}_a$ zuordnet, ist stark stetig im Punkt 0.

Die Punkte (1) und (2) besagen, daß $(\mathcal{P}_a)_{a\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe von Operatoren in $Y_p(X)$ ist. Diese Halbgruppe wird im weiteren *Poisson Halbgruppe* genannt. Als C_0-Halbgruppe besitzt sie einen Erzeuger $A : D(A) \to Y_p(X)$, $D(A) \subseteq Y_p(X)$. Läßt man formale Bedenken beiseite, so kann $\mathcal{P}_a$ mit e^{aA} identifiziert werden und entsprechend invertiert e^{-aA} den Operator $\mathcal{P}_a = e^{aA}$. Wir versuchen deshalb, dem Ausdruck e^{-aA} einen Sinn zugeben. Ist z eine komplexe Zahl, so gilt die Formel

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{az}{n}\Big)^n e^{az} = 1.$$

Wird in dieser Formel A anstelle von z und $\mathcal{P}_a$ anstelle von e^{az} geschrieben, so ergibt sich die folgende Aussage.

Proposition 2.1.20 *Sei $f \in Y_p(X)$. Dann ist $\mathcal{P}_a f \in D(A^n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{aA}{n}\Big)^n \mathcal{P}_a f = f. \tag{2.6}$$

Wie üblich ist diese Konvergenz zu verstehen bezüglich der Norm in $Y_p(X)$.

Der Beweis dieser Proposition wird in mehrere Schritte aufgeteilt. Zuerst wird der Erzeuger A der Poisson Halbgruppe näher bestimmt. Es sei daran erinnert (siehe Seite 74), daß für den Erzeuger B einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ von Operatoren in einem Banachraum Y gilt

$$\begin{aligned} D(B) &= \{y \in Y : \lim_{t\to 0} t^{-1}(T(t)y - y) \text{ existiert}\} \quad \text{und} \\ By &= \lim_{t\to 0} t^{-1}(T(t)y - y) \text{ für } y \in D(A). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Erzeugers A der Poisson Halbgruppe wird für jedes $a > 0$ die Funktion $R_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$R_a(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^2}.$$

Mit dieser Festsetzung gilt nämlich:

Proposition 2.1.21 *Für jedes $a > 0$, $f \in Y_p(X)$ und $n \in \mathbf{N}$ ist $\mathcal{P}_a f \in D(A^n)$ und es gilt*

$$A^n \mathcal{P}_a f = \underbrace{R_{a/n} * \cdots * R_{a/n}}_{n} * f. \tag{2.7}$$

Beweis Zunächst wird der Nachweis für $n = 1$ geführt. Es ist also zu zeigen, daß für alle $a > 0$ und $f \in Y_p(X)$ der Grenzwert $\lim_{h\to 0} h^{-1}(\mathcal{P}_h \mathcal{P}_a f - \mathcal{P}_a f)$ bezüglich der Norm in $Y_p(X)$ existiert und mit $R_a * f$ übereinstimmt. Es ist

$$h^{-1}(\mathcal{P}_h \mathcal{P}_a f - \mathcal{P}_a f) = h^{-1}(P_{a+h} - P_a) * f.$$

Demnach genügt es

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(P_{a+h} - P_a) = R_a \tag{2.8}$$

in der Norm in L_1 nachzuweisen. In jedem Fall gilt für alle $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(P_{a+h}(t) - P_a(t)) = \frac{d}{da} \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2} = R_a(t)$$

und folglich

$$P_a(t) = \int_0^a R_u(t)\, du = \Big(\int_0^a R_u du\Big)(t),$$

wobei das Integral $\int_0^a R_u\, du$ ein Bochner Integral in L_1 ist. Somit ist

$$\|h^{-1}(P_{a+h} - P_a) - R_a\|_{L_1} = \Big\|h^{-1} \int_a^{a+h} R_u - R_a\, du\Big\|_{L_1} \leq \sup_{a<u<a+h} \|R_u - R_a\|_{L_1}.$$

Doch mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt $\lim_{h\to 0}\sup_{a<u<a+h}\|R_u - R_a\|_{L_1} = 0$ und die Gleichung (2.8) ist bewiesen.

Die Behauptung ist also für $n = 1$ nachgewiesen. Ist nun $n > 1$, so folgt die Behauptung mit einem Induktionsargument. Denn angenommen $\mathcal{P}_a f$ liegt im Definitionsbereich von A^{n-1} und für $A^{n-1}f$ gilt die Formel (2.7). Dann ist

$$\begin{aligned} A^n\mathcal{P}_a f &= A^{n-1}A\mathcal{P}_{a/n}\mathcal{P}_{a(1-1/n)}f \\ &= A^{n-1}R_{a/n} * P_{a(1-1/n)} * f \\ &= A^{n-1}P_{a(1-1/n)} * R_{a/n} * f \\ &= \underbrace{R_{a/n} * \cdots * R_{a/n}}_{n-1} * R_{a/n} * f. \end{aligned}$$

$\equiv$

Ein erster Schritt auf dem Weg zum Beweis der Inversionsformel (2.6) ist nun gemacht. Denn ist $a > 0$ gegeben, so ist nun bekannt, daß $\mathcal{P}_a f$ für alle natürlichen Zahlen n im Definitionsbereich von A^n liegt. Desweiteren kann $(1-\frac{aA}{n})^n\mathcal{P}_a f$ wie folgt berechnet werden.

$$\Big(1-\frac{aA}{n}\Big)^n\mathcal{P}_a f = \Big(1-\frac{aA}{n}\Big)^n\mathcal{P}_{a/n}^n f = \underbrace{\Big(P_{a/n}-\frac{a}{n}R_{a/n}\Big) * \cdots * \Big(P_{a/n}-\frac{a}{n}R_{a/n}\Big)}_{n} * f.$$

Hier wurde ausgenutzt, daß A mit $\mathcal{P}_{\frac{a}{n}}$ vertauschbar ist (siehe z.B. [18]). Wird nun $e_{a,n} \in L_1$ definiert durch

$$e_{a,n} = \underbrace{(P_{a/n}-\frac{a}{n}R_{a/n}) * \cdots * (P_{a/n}-\frac{a}{n}R_{a/n})}_{n},$$

so läßt sich $(1-\frac{aA}{n})^n\mathcal{P}_a f$ einfacher schreiben als

$$\Big(1-\frac{aA}{n}\Big)^n\mathcal{P}_a f = e_{a,n} * f$$

Der Beweis von Proposition 2.1.20 ist somit reduziert auf den Beweis, daß für alle $f \in L_p(X)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} e_{a,n} * f = f$$

in der Norm in $Y_p(X)$. Der Schlüssel zu diesem Beweis ist das folgende Lemma. In diesem Lemma bezeichnet $\widehat{g}$ die Fourier Transformierte von g für $g \in L_1$, d.h. für $s \in \mathbf{R}$ ist $\widehat{g}(s)$ definiert durch

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}g(t)\,dt.$$

Wir werden anstelle von $\widehat{g}$ auch die Schreibweise $\mathcal{F}g$ für die Fourier Transformierte von g benutzen.

Lemma 2.1.22 *Sei (e_n) eine Folge in L_1, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|e_n\|_{L_1} < \infty$.

(ii) *Für alle* $s \in \mathbf{R}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_n(s) = 1$.

Dann gilt für alle $f \in C_0$ *und alle* $s \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} e_n * f(s) = f(s).$$

Beweis Der Beweis greift auf folgende Eigenschaften der Fourier Transformation zurück:

(1) Die Fourier Transformation ist ein beschränkter Operator von L_1 nach C_0 mit Norm Eins. Die Norm der Fourier Transformation sowie die Tatsache, daß die Fourier Transformierte einer L_1-Funktion stetig ist, sind leicht nachzurechnen. Daß die Fourier Transformierte einer L_1-Funktion im Unendlichen verschwindet, ist die Aussage des Riemann-Lebesgue Lemmas.

(2) Sind $f, g \in L_1$, so ist die Fourier Transformierte der Faltung von f und g das Produkt der Fourier Transformierten von f und g, d.h. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

(3) Ist $g \in C_0 \cap L_1$ und gilt zudem $\widehat{g} \in L_1$, so läßt sich g durch die Formel

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\widehat{g}(s)\,ds \qquad (-\infty < t < \infty)$$

aus der Fourier Transformierten von g zurückgewinnen.

(4) Die Menge $\{g \in C_0 \cap L_1 : \widehat{g} \in L_1\}$ ist eine dichte Teilmenge von C_0.

Zum Beweis der Eigenschaften (1)-(3) sei auf [35] verwiesen. Die Eigenschaft (4) folgt aus der Tatsache, daß die Menge der Poisson Kerne $\{P_z : z \in \mathbf{C}\} \subseteq C_0 \cap L_1$ laut Lemma 2.1.13 total in C_0 ist und für alle $z \in \mathbf{C}_+$ liegt $\widehat{P}_z$ in L_1.

Nun zum eigentlichen Beweis. Sei zuerst $f \in C_0 \cap L_1$ eine Funktion mit $\widehat{f} \in L_1$. Dann ist auch $e_n * f \in C_0 \cap L_1$. Außerdem ist

$$\widehat{e_n * f}(s) = \widehat{e}_n(s)\widehat{f}(s)$$

und da $\widehat{e}_n$ beschränkt und $\widehat{f}$ absolut integrierbar ist, folgt $\widehat{e_n * f} \in L_1$. Somit kann auf $e_n * f$ die Inversionsformel (3) für die Fourier Transformation angewendet werden und es ergibt sich

$$e_n * f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\widehat{e_n * f}(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\widehat{e}_n(s)\widehat{f}(s)\,ds.$$

Sei $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|e_n\|_{L_1} = M$. Nach Voraussetzung ist $M < \infty$ und also gilt $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\widehat{e}_n\|_\infty \leq M < \infty$ wegen der Eigenschaft (1) der Fourier Transformation. Jede der Funktionen $g_n(s) = e^{its}\widehat{e}_n(s)\widehat{f}(s)$ wird also dominiert durch die Funktion $h = M|\widehat{f}|$ und diese Funktion liegt in L_1 nach Voraussetzung. Zudem konvergiert die Folge (g_n) punktweise gegen $g(s) = e^{its}\widehat{f}(s)$ für $n \to \infty$, da $\lim_{n\to\infty} e_n(s) = 1$ für alle $s \in \mathbf{R}$ vorausgesetzt ist. Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert also

$$\lim_{n\to\infty} e_n * f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\widehat{e}_n(s)\widehat{f}(s)\,ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\widehat{f}(s)\,ds = f(t).$$

In dieser Gleichungskette ist das letzte Gleichheitszeichen wiederum durch die Inversionsformel (3) gerechtfertigt. Die Behauptung ist somit bewiesen für alle $f \in C_0 \cap L_1$, deren Fourier Transformierte in L_1 liegt.

Sei nun $f \in C_0$ beliebig und $t \in \mathbf{R}$. Dann gibt es aufgrund von (4) eine Folge (f_k) von Funktionen $f_k \in C_0 \cap L_1$ mit $\widehat{f}_k \in L_1$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann wird $k \in \mathbf{N}$ gewählt mit $\|f - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Zu diesem k gibt es nun ein $n_0 \in \mathbf{N}$ so, daß für alle $n > n_0$ gilt $|e_n * f_k(t) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist für $n > n_0$

$$\begin{aligned} |e_n * f(t) - f(t)| &\leq |e_n * f(t) - e_n * f_k(t)| + |e_n * f_k(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f(t)| \\ &\leq (M+1)\|f - f_k\|_\infty + |e_n * f_k(t) - f_k(t)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies beweist für jedes $f \in C_0$ und $t \in \mathbf{R}$ die Konvergenz von $e_n * f(t)$ gegen $f(t)$ für $n \to \infty$. $\equiv$

Aus diesem Lemma ergibt sich nun die für den Beweis von Proposition 2.1.20 entscheidende Folgerung.

Folgerung 2.1.23 *Sei (e_n) eine Folge positiver Funktionen in L_1 und für alle $s \in \mathbf{R}$ gelte* $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_n(s) = 1$. *Dann gilt für alle $f \in Y_p(X)$*

$$\lim_{n\to\infty} e_n * f = f$$

in der Norm in $Y_p(X)$.

Beweis Ist (e_n) eine Folge positiver Funktionen in L_1, so gilt

$$\|e_n\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)\,dt = \widehat{e}_n(0).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_n(0) = 1$ ist die Folge $(\widehat{e}_n(0))$ beschränkt und also ist (e_n) eine in L_1 beschränkte Folge. Da zudem für alle $s \in \mathbf{R}$ vorausgesetzt ist $\lim_{n\to\infty} e_n(s) = 1$, erfüllt die Folge (e_n) die Voraussetzungen von Lemma 2.1.22.

Sei $f \in Y_p(X)$. Um den Nachweis $\lim_{n\to\infty} e_n * f = f$ zu führen, muß $\lim_{n\to\infty} \|e_n * f - f\|_{Y_p} = 0$ bewiesen werden. Eine erste Abschätzung für $\|e_n * f - f\|_{Y_p}$ ergibt sich wie folgt aufgrund der Positivität der e_n:

$$\begin{aligned} \|e_n * f - f\|_{Y_p} &\leq \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} e_n(u)(T(u)f - f)\,du \Big\|_{Y_p} + \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} e_n(u) f\,du - f \Big\|_{Y_p} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e_n(u)\|T(u)f - f\|_{Y_p}\,du + \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e_n(u)\,du - 1 \Big| \|f\|_{Y_p}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand im letzten Term dieser Ungleichungskette macht keine Schwierigkeiten, denn es ist

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} e_n(u)\,du - 1 \Big| \|f\|_{L_p} = |\widehat{e}_n(0) - 1| \|f\|_{L_p}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty}\widehat{e}_n(0)=1$ konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für $n\to\infty$. Der Nachweis, daß auch der erste Summand

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(u)\|T(u)f-f\|_{L_p}\,du \tag{2.9}$$

gegen Null konvergiert, wird nun geführt.

Die Funktion $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sei definiert durch $g(u)=\|T(-u)f-f\|_{Y_p}-2\|f\|_{Y_p}$. Zunächst wird $g\in C_0$ nachgewiesen. Dazu muß die Existenz und die Übereinstimmung der Grenzwerte $\lim_{u\to\infty}g(u)$ und $\lim_{u\to-\infty}g(u)$ gezeigt werden. In der Tat gilt $\lim_{|u|\to\infty}\|T(u)f-f\|_{Y_p}=2\|f\|_{Y_p}$. Das ist folgendermaßen einzusehen: Sei $\varepsilon>0$. Dann gibt es $v_0>0$ so, daß für alle v mit $v>v_0$ gilt

$$\|\chi_{[-\infty,v]}f\|_{Y_p}\geq\|f\|_{Y_p}-\varepsilon \quad\text{und}\quad \|\chi_{[-v,\infty]}f\|_{Y_p}\geq\|f\|_{Y_p}-\varepsilon.$$

Somit ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\|T(2v)\chi_{[-v,\infty)}f-\chi_{(-\infty,v)}f\|_{Y_p} &= \|T(2v)\chi_{[-v,\infty)}f\|_{L_p}+\|\chi_{(-\infty,v)}f\|_{Y_p}\\ &= \|\chi_{[-v,\infty)}f\|_{L_p}+\|\chi_{(-\infty,v)}f\|_{Y_p}\geq 2\|f\|_{Y_p}-2\varepsilon,\end{aligned}$$

da die Träger der Funktionen $T(2v)\chi_{[-v,\infty)}f$ und $\chi_{(-\infty,v)}f$ disjunkt sind. Weiter gilt

$$\|T(2v)\chi_{(-\infty,-v)}f-\chi_{(v,\infty)}f\|_{Y_p}\leq\|\chi_{(-\infty,-v)}f\|_{L_p}+\|\chi_{(v,\infty)}f\|_{Y_p}\leq 2\varepsilon.$$

Aus diesen Abschätzungen ersieht man die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}&\|T(2v)f-f\|_{Y_p}\\ \geq\ &\|T(2v)\chi_{[-v,\infty)}f-\chi_{[-\infty,v)}f\|_{Y_p}-\|T(2v)\chi_{(-\infty,-v)}f-\chi_{[v,\infty)}f\|_{Y_p}\\ \geq\ &2\|f\|_{Y_p}-2\varepsilon-2\varepsilon=2\|f\|_{Y_p}-4\varepsilon.\end{aligned}$$

Für $v>v_0$ ist demnach $2\|f\|_{Y_p}-\|T(v)f-f\|_{Y_p}\leq 4\varepsilon$. Da in jedem Fall

$$\|T(u)f-f\|_{Y_p}\leq\|T(u)f\|_{Y_p}+\|f\|_{Y_p}=2\|f\|_{Y_p}$$

gilt, ist die Konvergenz $\lim_{u\to\infty}\|T(u)f-f\|_{Y_p}=2\|f\|_{Y_p}$ somit erwiesen. Der Beweis der Aussage $\lim_{u\to-\infty}\|T(u)f-f\|_{Y_p}=2\|f\|_{Y_p}$ verläuft völlig analog.

Auf die Funktion g kann nun das Lemma 2.1.22 angewendet werden, es gilt folglich $\lim_{n\to\infty}e_n*g(0)=g(0)=-2\|f\|_{L_p}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_n(u)\|(T(u)f-f\|_{L_p}\,du\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_n(u)(\|(T(u)f-f\|_{L_p}-2\|f\|_{L_p})\,du+\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_n(u)2\|f\|_{L_p}\,du\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_n(u)g(-u)\,du+2\lim_{n\to\infty}\widehat{e}_n(0)\|f\|_{L_p}\\ =\ &\lim_{n\to\infty}e_n*g(0)+2\|f\|_{Y_p}=0.\end{aligned}$$

Das beweist die Konvergenz des Ausdrucks (2.9) gegen Null für $n\to\infty$.

$\equiv$

Beweis (von Proposition 2.1.20) Sei $a > 0$. Der Beweis von Proposition 2.1.20 ist nach den bisherigen Überlegungen reduziert auf den Nachweis, daß die Folge $(e_{a,n})$ die Voraussetzungen der vorangegangenen Folgerung 2.1.23 erfüllt. Die Positivität der Funktionen $e_{a,n}$ ist wie folgt einzusehen: Es ist

$$e_{a,n} = \underbrace{(P_{a/n} - \frac{a}{n}R_{a/n}) * \cdots * (P_{a/n} - \frac{a}{n}R_{a/n})}_{n}.$$

Da das Faltungsprodukt zweier positiver Funktionen positiv ist, genügt demnach der Nachweis der Positivität von $P_{a/n} - \frac{a}{n}R_{a/n}$. Diese Positivität wird durch die folgende einfache Rechnung bestätigt. Sei $t \in \mathbf{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} P_{a/n}(t) - \frac{a}{n}R_{a/n}(t) &= \frac{a/n}{t^2+(a/n)^2} - \frac{a}{n}\frac{t^2-(a/n)^2}{(t^2+(a/n)^2)^2} \\ &= \frac{a}{n}\frac{t^2+(a/n)^2-(t^2-(a/n)^2)}{(t^2+(a/n)^2)^2} \\ &= \frac{a}{n}\frac{2(a/n)^2}{(t^2+(a/n)^2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Als nächstes gilt es $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_{a,n}(s) = 0$ für alle $s \in \mathbf{R}$ nachzuweisen. Da die Fourier Transformation der Faltung zweier Funktionen das Produkt der Fourier Transformierten dieser Funktionen ist, gilt

$$\widehat{e}_{a,n}(s) = \mathcal{F}\Big(P_{a/n} - \frac{a}{n}R_{a/n}\Big)^n(s) \qquad (-\infty < s < \infty).$$

Zur Berechnung der Fourier Transformierten von $P_{a/n}$ und $R_{a/n}$ werden verschiedene Rechenregeln für die Fourier und die Hilbert Transformation benötigt, die in [11] zu finden sind: Sei $h \in L_1$ und $s \in \mathbf{R}$.

(1) Ist $b > 0$ und $h_b(t) = h(bt)$, so gilt $\mathcal{F}h_b(s) = b^{-1}\mathcal{F}h(s/b)$.

(2) Sei h differenzierbar und es gelte $h' \in L_1$. Dann ist $\mathcal{F}h'(s) = is\mathcal{F}h(s)$.

(3) Es bezeichne $\mathcal{H}h$ die Hilbert Transformierte von h, d.h. für fast alle $t \in \mathbf{R}$ ist $\mathcal{H}h(t) = \lim_{\delta\to 0}\int_{|u|>\delta} \frac{h(t-u)}{u}\, du$. Dann ist $\mathcal{F}\mathcal{H}h(s) = -i\operatorname{sgn}(s)\mathcal{F}h(s)$.

(4) Ist $b > 0$, so gilt $\mathcal{H}h_b(t) = (\mathcal{H}h)_b(t)$.

Desweiteren ist bekannt (siehe wieder [11])

$$\mathcal{F}P_1(s) = e^{-|s|} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}P_1(t) = \frac{t}{1+t^2} \qquad (-\infty < s,t < \infty).$$

Die Fourier Transformierte von $P_{a/n}$ ergibt sich nun sehr einfach wegen $P_{a/n}(t) = \frac{n}{a}P_1(\frac{ta}{n})$ aus (1)

$$\mathcal{F}P_{a/n} = \frac{n}{a}\frac{a}{n}\mathcal{F}P_1\Big(\frac{as}{n}\Big) = e^{-\frac{a}{n}|s|}. \tag{2.10}$$

Die Ableitung der Funktion $Q_a(t) = \frac{t}{t^2+a^2}$ hat die Gestalt

$$Q_a'(t) = \frac{a^2 - t^2}{(t^2+a^2)^2} = -R_a(t)$$

und aus $Q_a(t) = \frac{1}{a}Q_1(t/a)$ sowie $P_a(t) = \frac{1}{a}P_1(t/a)$ ergibt sich mit (3) und (4)

$$\mathcal{H}P_a(t) = Q_a(t).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}R_{a/n}(s) &= \mathcal{F}(-Q'_{a/n})(s) = -is\mathcal{F}Q_{a/n}(s) \\ &= -is\mathcal{F}\mathcal{H}P_{a/n}(s) = (-is)(-i\text{sgn}(s))\mathcal{F}P_{a/n}(s) = -|s|e^{-\frac{a}{n}|s|}.\end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung (2.10) zeigt sich schließlich

$$\mathcal{F}e_{a,n}(s) = \mathcal{F}\Big(P_{a/n} - \frac{a}{n}R_{a/n}\Big)^n(s) = \Big(e^{-\frac{a}{n}|s|} + \frac{a}{n}|s|e^{-\frac{a}{n}|s|}\Big)^n = \Big(1 + \frac{a|s|}{n}\Big)^n e^{-a|s|}$$

und also folgt $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_{a,n}(s) = 1$. $\equiv$

An dieser Stelle scheint es angebracht, noch einmal zu rekapitulieren, was bewiesen wurde. Sei $f \in Y_p(X)$ und es sei $g = \mathcal{P}_a f$. Dann ist $g \in D(A^n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{aA}{n}\Big)^n g = f. \tag{2.11}$$

Diese Formel sieht zwar schön aus, aber sie taugt nicht viel. Denn angenommen, es ist ein $g \in Y_p(X)$ gegeben, von dem bekannt ist, daß ein $f \in Y_p(X)$ existiert mit $g = \mathcal{P}_a f$ und mit Hilfe der Inversionsformel (2.11) soll f bestimmt werden. Dann muß $\big(1-\frac{aA}{n}\big)^n g$ für alle $n \in \mathbf{N}$ berechnet werden. Doch zur Berechnung von $A^n g$ ist es notwendig die Funktion f zu kennen, welche ja erst bestimmt werden soll.

Dieses Problem kann folgendermaßen umgangen werden. Sei wieder $g = \mathcal{P}_a f$ mit $f \in Y_p(X)$. Dann wird zuerst $h = \mathcal{P}_a g$ betrachtet. Wegen $h = \mathcal{P}_a\mathcal{P}_a f = \mathcal{P}_{2a} f$ kann f auch aus h mit der Inversionsformel 2.11

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{2aA}{n}\Big)^n h = f$$

bestimmt werden. Doch $\big(1 - \frac{2aA}{n}\big)^n h$ kann nun aus g errechnet werden, ohne Kenntnis von der Funktion f zu besitzen, denn es gilt

$$\Big(1 - \frac{2aA}{n}\Big)^n h = \Big(1 - \frac{2aA}{n}\Big)^n \mathcal{P}^n_{a/n} g = \underbrace{\Big(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\Big) * \cdots * \Big(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\Big)}_{n} * g.$$

Soeben wurde also bewiesen:

Folgerung 2.1.24 *Sei $f \in Y_p(X)$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\right) * \cdots * \left(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\right)}_{n} * \mathcal{P}_a f = f$$

und diese Konvergenz ist zu verstehen in der Norm in $Y_p(X)$.

Aus Proposition 2.1.20 folgt, daß die Operatoren $\mathcal{P}_a : Y_p \to Y_p$ allesamt injektiv sind und hieraus ergibt sich unmittelbar eine weitere Folgerung, die im nächsten Paragraphen von Bedeutung sein wird.

Folgerung 2.1.25 *Sei $a > 0$. Dann ist die Menge $\{P_{a+ib} : -\infty < b < \infty\}$ total in Y_p.*

Beweis Der Beweis wird mit Hilfe von Lemma 2.1.13 (i) geführt. Sei $g \in L_q \subset Y_p^*$ und es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t)g(t)\,dt = 0$ für alle $b \in \mathbf{R}$. Dann ist $P_a * g = 0$ und also folgt für alle $f \in Y_p$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(-t)\,dt = g * f(0) = \lim_{n\to\infty} e_{a,n} * P_a * (g * f)(0) = \lim_{n\to\infty} e_{a,n} * (P_a * g) * f(0) = 0.$$

Hier wurde ausgenutzt, daß für alle $g \in L_q$ und $f \in Y_p$ gilt $g * f \in C_0$ (siehe z.B. [11]) und somit kann auf $g * f$ das Lemma 2.1.22 angewendet werden, da die Folge $(e_{a,n})$ den Voraussetzungen dieses Lemmas genügt. Insgesamt folgt $g = 0$. $\equiv$

2.1.4 Eine Charakterisierung der Räume $h_p(X)$

Nun wird die Frage beantwortet, die anfangs des letzten Paragraphen gestellt wurde: Sei $a > 0$. Welche Bedingungen an eine Funktion $g \in L_p(X)$ sind hinreichend und notwendig für die Existenz eines $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ mit $F(a+ib) = g(b)$ für $-\infty < b < \infty$? Sei $d_{a,n}$ definiert durch

$$d_{a,n} = \underbrace{\left(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\right) * \left(P_{a/n} - \frac{2a}{n}R_{a/n}\right)}_{n}.$$

Mit dieser Bezeichnung lautet die Antwort auf die oben gestellt Frage wie folgt:

Satz 2.1.26 *Sei $a > 0$ und $g \in L_p(X)$. Genau dann existiert ein $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ mit $g(b) = F(a+ib)$ für $-\infty < b < \infty$, falls*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|d_{a,n} * g\|_{L_p} < \infty. \tag{2.12}$$

In diesem Fall ist $\|F\|_{h_p} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|d_{a,n} * g\|_{L_p}$.

Beweis Zuerst wird angenommen, daß ein $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$ existiert mit $g = F_a$. Dann gilt für alle $a_1 > 0$

$$P_{a_1} * g = P_{a_1} * F_a = F_{a+a_1} = P_a * F_{a_1}.$$

Da $d_{a,n} * P_a$ mit $e_{a,n}$ übereinstimmt, gilt wegen $\|e_{a,n}\|_{L_1} \leq 1$

$$\|d_{a,n} * P_{a_1} * g\|_{L_p} = \|d_{a_n} * P_a * F_{a_1}\|_{L_p} = \|e_{a,n} * F_{a_1}\|_{L_p} \leq \|F_{a_1}\|_{L_p}.$$

Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbf{N}$ wegen $d_{a,n} \in L_1$ und $\lim_{a_1 \to 0} P_{a_1} * g = g$

$$\|d_{a,n} * g\|_{L_p} = \lim_{a_1 \to 0} \|d_{a,n} * P_{a_1} * g\|_{L_p} \leq \|F\|_{h_p}.$$

Sei nun umgekehrt $g \in L_p(X)$ mit $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|d_{a,n} * g\|_{L_p} = M < \infty$. Für alle $b, t \in \mathbf{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{2a+ib}(t)(d_{a,n} * g)(t)\,dt \quad = \quad P_{2a} * d_{a,n} * g(b) = \int_{-\infty}^{\infty} (d_{a,n} * P_{2a})(t) g(b-t)\,dt.$$

Wegen $P_{2a} = \mathcal{P}_a P_a$ und $P_a \in Y_q$ folgt mit der Umkehrformel 2.1.24

$$\lim_{n \to \infty} d_{a,n} * P_{2a} = P_a$$

und diese Konvergenz erfolgt in der L_q-Norm. Somit ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2a+ib}(t)(d_{a,n} * g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(t) g(b-t)\,dt = P_a * g(b). \tag{2.13}$$

Zudem ist nach Folgerung 2.1.25 die Menge $\{P_{2a+ib} : -\infty < b < \infty\}$ total in Y_q und die Folge $d_{a,n} * g$ ist nach Voraussetzung beschränkt in Y_q durch M. Also kann die Folgerung 1.3.27 auf die Folge $(d_{a,n} * g)$ angewendet werden. Demnach existiert ein $\phi \in V_p(X)$ mit $\|\phi\|_{V_p} \leq M$ derart, daß für alle $h \in Y_q$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)(d_{a,n} * g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,d\phi(t).$$

Wird speziell $h = P_a$ gewählt, so folgt mit Gleichung (2.13)

$$\mathcal{P}_a g(b) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2a+ib}(t)(d_{a,n} * g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_{2a+ib}(t)\,d\phi(t) = \mathcal{P}_a \widetilde{\mathcal{P}}_a \phi(b).$$

Hieraus ergibt sich wegen der Injektivität des Operators $\mathcal{P}_a$ die Gleichung $g = \widetilde{\mathcal{P}}_a \phi$ und somit ist $F = \widetilde{\mathcal{P}} \phi$ die gesuchte $h_p(\mathbf{C}_+, X)$-Funktion. $\equiv$

Die Aussage des vorangegangenen Satzes kann unter der zusätzlichen Bedingung in X, die Radon-Nikodym Eigenschaft zu besitzen, verschärft werden. Es gilt nämlich:

Folgerung 2.1.27 *Sei $a > 0$ und $1 < p < \infty$. Für einen Banachraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Zu jedem $g \in L_p(X)$ mit $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|d_{a,n} * g\|_{L_p} < \infty$ existiert ein $f \in L_p(X)$ mit $g = \mathcal{P}_a f$.*

(ii) *Der Banachraum X besitzt die Radon-Nikodym Eigenschaft.*

Beweis Wie im Beweis von Folgerung 2.1.15 wird auch hier gezeigt, daß (i) äquivalent ist zur Existenz einer Radon-Nikodym Ableitung für jedes $\phi \in V_p(X)$. Es gelte also (i) und es sei $\phi \in V_p(X)$. Dann erfüllt $\widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$ die Bedingung (2.12). Folglich existiert ein $f \in L_p(X)$ mit $\mathcal{P}_a f = \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$ und dies impliziert, daß f eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ ist.

Umgekehrt besitze jedes $\phi \in V_p(X)$ eine Radon-Nikodym Ableitung $f \in L_p(X)$. Ist nun $g \in L_p(X)$ eine Funktion, welche die Bedingung (2.12) erfüllt, so gibt es nach Satz 2.1.26 und Satz 2.1.14 ein $\phi \in V_p(X)$ mit $g = \widetilde{\mathcal{P}}_a\phi$. Wegen der Rechenregel 1.3.9 impliziert dies $g = \mathcal{P}_a f$, wobei f die nach Voraussetzung existierende Radon-Nikodym Ableitung von ϕ ist. $\equiv$

Die „schwache Version“ des oben bewiesenen Satzes 2.1.26 lautet:

Satz 2.1.28 *Sei $1 < p \leq \infty$, $a > 0$ und $g : \mathbf{R} \to X$ sei meßbar. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $x^* \in X^*$ ist $x^* \circ g \in L_p$ und es gilt*

$$M = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{x^*\in U_{X^*}} \|d_{a,n} * (x^* \circ g)\|_{L_p} < \infty.$$

(ii) *Es existiert eine harmonische Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to X$ mit*

$$M = \sup_{x\in U_{X^*}} \|x^* \circ F\|_{h_p} < \infty$$

und für alle $b \in \mathbf{R}$ gilt $F(a + ib) = g(b)$.

Beweis Der Beweis verläuft nach demselben Muster wie der Beweis von Satz 2.1.17. Zuerst gelte (i). Dann existiert nach Folgerung 2.1.27 für jedes $x^* \in X^*$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f_{x^*} \in L_p$ mit $\|f_{x^*}\|_{L_p} \leq M\|x^*\|$ und

$$x^* \circ g = \mathcal{P}_a f_{x^*}.$$

Der Operator $S : X^* \to L_p$ sei definiert durch $Sx^* = f_{x^*}$. Dieser Operator ist linear und seine Norm ist durch M beschränkt. Folglich läßt sich auch die Norm des zu S dualen Operators $S^* : L_q \to X^{**}$ abschätzen durch M. Außerdem gilt für alle $x^* \in X^*$ und $b \in \mathbf{R}$

$$\langle x^*, S^*P_{a+ib}\rangle = \langle Sx^*, P_{a+ib}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t) f_{x^*}(t)\, dt = \mathcal{P}_a f_{x^*}(b) = \langle x^*, g(b)\rangle.$$

Folglich gilt $S^*P_{a+ib} = g(b)$ und insbesondere liegt S^*P_{a+ib} in X. Da die Menge $\{P_{a+ib} : -\infty < b < \infty\}$ dicht in L_q ist, bleibt dem Operator S^* nichts anderes übrig, als alle seine Werte in X anzunehmen. Nach Proposition 1.3.5 existiert nun eine repräsentierende Funktion $\phi \in PV_p(X)$ von S^* mit $\|\phi\|_{PV_p} = \|S^*\| \leq M$ und für alle $b \in \mathbf{R}$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t)\, d\phi(t) = S^*P_{a+ib} = g(b).$$

Setzen wir also $F = \widetilde{\mathcal{P}}\phi$, so erfüllt F die Bedingung (ii).

Wird (ii) vorausgesetzt, so folgt (i) direkt aus Satz 2.1.26, indem für jedes $x^* \in X^*$ die Funktion $x^* \circ g$ betrachtet wird. $\equiv$

2.1.5 Hardyräume holomorpher Funktionen und die komplexe Laplace Transformation

Jede holomorphe Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to X$ mit

$$\sup_{a>0} \|F_a\|_{L_p} < \infty$$

liegt im Raum $h_p(\mathbf{C}_+, X)$, da holomorphe Funktionen harmonisch sind. Der Teilraum der holomorphen Funktionen in $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ wird mit $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ bezeichnet und die Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ werden *Hardyräume holomorpher Funktionen* genannt. Der Satz 2.1.14 besagt, daß $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ durch die Poisson-Stieltjes Transformation mit $V_p(X)$ identifiziert werden kann. Folglich kann $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ mit einem Teilraum von $V_p(X)$ identifiziert werden. Eine erste Charakterisierung dieses Teilraums für $1 \leq p \leq 2$ gibt die folgende Proposition 2.1.29. Später (siehe Proposition 2.2.20) wird eine zweite Charakterisierung dieses Teilraums gegeben. Beide Resultate beruhen auf den entsprechenden skalarwertige Ergebnissen. In der folgenden Proposition ist dieses skalarwertige Ergebnis eine Variante des Satzes von Paley-Wiener (siehe [17]).

Proposition 2.1.29 *Sei $1 < p \leq 2$ und $\phi \in V_p(X)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\tilde{\mathcal{P}}\phi \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$.

(ii) *Für jedes $x^* \in X^*$ gilt für fast alle $s < 0$*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{ist}\, d(x^* \circ \phi)(t) = 0.$$

Beweis Die angesprochene Variante des Satzes von Paley und Wiener besagt, daß für $f \in L_p$ die Aussagen

$$\mathcal{P}f \in H_p(\mathbf{C}_+)$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{ist} f(t)\, dt = 0 \qquad \text{für fast alle } s < 0$$

äquivalent sind. Für $x^* \in X^*$ bezeichne wieder $f_{x^*} \in L_p$ die Radon-Nikodym Ableitung von $x^* \circ \phi$. Dann ergibt sich die folgende Kette äquivalenter Aussagen:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{P}}\phi \in H_p(\mathbf{C}_+, X) \\
\Leftrightarrow\ & \tilde{\mathcal{P}}\phi \text{ ist holomorph in } \mathbf{C}_+ \\
\Leftrightarrow\ & \tilde{\mathcal{P}}\phi \text{ ist schwach holomorph in } \mathbf{C}_+ \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für alle } x^* \in X^* \text{ ist } \mathcal{P}f_{x^*} \text{ holomorph in } \mathbf{C}_+ \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für jedes } x^* \in X^* \text{ gilt für fast alle } s < 0\text{: } \lim_{N\to\infty} \textstyle\int_{-N}^{N} e^{-ist} f_{x^*}(t)\, dt = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für jedes } x^* \in X^* \text{ gilt für fast alle } s < 0\text{: } \lim_{N\to\infty} \textstyle\int_{-N}^{N} e^{-ist}\, d(x^* \circ \phi)(t) = 0
\end{aligned}$$

≡

Im Zusammenhang mit der Untersuchung von L_p-Flüssen ist die Frage von Interesse, wann eine gegebene holomorphe Funktion $F : \mathbf{C}_+ \to X$ die komplexe Laplace Transformierte einer Funktion $f : (0, \infty) \to X$ ist. Ist $1 < q \leq 2$ und werden zusätzliche

Bedingungen an den Banachraum X gestellt, so existiert für jedes $F \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$ eine Funktion $f \in L_p(X)$ derart, daß F die komplexe Laplace Transformierte von f ist. Dies ist die Aussage der weiter unten folgenden Proposition 2.1.30. Zum Beweis dieser Proposition werden einige Ergebnisse über die banachraumwertige Fourier Transformation benötigt, die als nächstes vorgestellt werden.

Die Fourier Transformierte $\mathcal{F}f$ einer Funktion $f \in L_1(\mathbf{R})$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt \qquad (-\infty < s < \infty). \tag{2.14}$$

Bekanntlich ist die Fourier Transformation ein beschränkter Operator $\mathcal{F} : L_1(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$. Der Satz von Plancherel besagt darüberhinaus, daß für alle $f \in L_1 \cap L_2(\mathbf{R})$ gilt $\|\mathcal{F}f\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$. Da $L_1 \cap L_2(\mathbf{R})$ ein dichter Teilraum von $L_2(\mathbf{R})$ ist, kann die Fourier Transformation isometrisch und eindeutig zu einem Operator $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$ fortgesetzt werden. Weiter liefert der Interpolationssatz von Riesz-Thorin für $1 < q < 2$, daß der auf $L_1 \cap L_q(\mathbf{R})$ durch (2.14) definierte Operator eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $\mathcal{F} : L_q(\mathbf{R}) \to L_p(\mathbf{R})$ besitzt. Diese Eigenschaften der Fourier Transformation können z.B. bei Katznelson [23] nachgelesen werden.

Die Situation ändert sich grundlegend, wenn die Fourier Transformation auf banachraumwertigen L_q-Räumen betrachtet wird. Für $f \in L_1(\mathbf{R}, X)$ wird $\mathcal{F}f$ zwar wieder durch das Integral in (2.14) definiert. Bestehen bleibt auch die Beschränktheit des Operators $\mathcal{F} : L_1(\mathbf{R}, X) \to L_\infty(\mathbf{R}, X)$, wie man sehr leicht nachrechnet. Doch die Fortsetzbarkeit der Fourier Transformation auf $L_1 \cap L_2(\mathbf{R}, X)$ zu einem stetigen Operator $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}, X) \to L_2(\mathbf{R}, X)$ ist dann und nur dann möglich, wenn X isomorph zu einem Hilbertraum ist. Das ist die Aussage des Satzes von Kwapien [24].

Peetre [31] untersuchte die Frage, für welche Banachräume X die Fourier Transformation eine stetige Fortsetzung $\mathcal{F} : L_q(\mathbf{R}, X) \to L_p(\mathbf{R}, X)$ besitzt. Für solche Banachräume wurde die folgende Bezeichnung eingeführt: Der Banachraum X wird Banachraum mit *Fourier Typ (q)* genannt, falls die auf $L_1 \cap L_q(\mathbf{R}, X)$ durch (2.14) definierte Fourier Transformation stetig fortsetzbar ist zu $\mathcal{F} : L_q(\mathbf{R}, X) \to L_p(\mathbf{R}, X)$. Mit dieser Bezeichnung gilt:

(1) Jeder Banachraum ist vom Fourier Typ (1).

(2) Ein Banachraum ist genau dann vom Fourier Typ (2), wenn er isomorph zu einem Hilbertraum ist (siehe [24]).

(3) Für jedes $1 < q < 2$ sind die Banachräume $L_q(\mathbf{R})$ und $L_p(\mathbf{R})$ vom Fourier Typ (q) (siehe [31]).

Proposition 2.1.30 *Sei $1 < q \leq 2$ und X sei ein Banachraum vom Fourier Typ (q). Bezeichnet M die Norm der Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_q(\mathbf{R}, X) \to L_p(\mathbf{R}, X)$, so gilt: Zu jedem $F \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$ existiert ein $g \in L_p((0, \infty), X)$ mit $\|g\|_{L_p} \leq \frac{M}{2\pi}\|F\|_{H_q}$ und*

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt \qquad (z \in \mathbf{C}_+),$$

d.h. F ist die komplexe Laplace Transformierte von g.

Beweis 1. Schritt: Zuerst wird der folgende Spezialfall betrachtet: Sei $F \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$ und es existiere ein $\omega > 0$ so, daß F holomorph fortsetzbar ist auf die um ω nach links verschobene rechte Halbebene $-\omega + \mathbf{C}_+$ und es gelte

$$\sup_{a>-\omega} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \|F(a+ib)\|^q \, db \Big)^{1/q} = N < \infty.$$

Die holomorphe Fortsetzung wurde hier mit demselben Buchstaben F bezeichnet. Sei $f \in L_q(\mathbf{R}, X)$ gegeben durch $f(t) = F(it)$. Nach Satz 2.1.14 gilt $\|f\|_{L_q} = \|F\|_{H_q(\mathbf{C}_+)}$, insbesondere liegt f in L_q. Weil X nach Voraussetzung vom Fourier Typ (q) ist, kann für $0 < s < \infty$ festgesetzt werden $g(s) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f(-s)$ und es folgt

$$\|g\|_{L_p(0,\infty)} \leq \frac{M}{2\pi}\|F\|_{H_q(\mathbf{C}_+)}.$$

Als nächstes wird gezeigt, daß F die komplexe Laplace Transformierte von g ist. Für $n \in \mathbf{N}$ sei f_n gegeben durch $f_n = \chi_{[-n,n]}f$ und g_n sei definiert durch $g_n(s) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f_n(-s)$ $(0 < s < \infty)$. Da f_n in $L_1 \cap L_q(\mathbf{R}, X)$ liegt, kann g_n durch das Fourier Integral

$$g_n(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ist} f(t)\, dt \qquad (0 \leq s < \infty)$$

berechnet werden. Die Folge (f_n) konvergiert in $L_q(\mathbf{R}, X)$ gegen f, so daß wegen der Stetigkeit der Fourier Transformation die Folge (g_n) in $L_p([0,\infty), X)$ gegen g konvergiert. Folglich gilt für $z \in \mathbf{C}_+$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-zs} g(s)\, ds &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-zs} g_n(s)\, ds \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{s(iu-z)} f(u)\, du\, ds = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\frac{f(u)}{z-iu}\, du.\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, daß der Grenzwert am rechten Ende dieser Gleichungskette mit $F(z)$ übereinstimmt. Der Pfad $\Gamma(n) = (\Gamma_1(n), \Gamma_2(n))$ setze sich aus den beiden folgenden Pfaden zusammen:

$$\Gamma_1 = (iu : -n \leq u \leq n) \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = (ne^{-i\theta} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$$

Da $\Gamma(n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ ein negativ orientierter, geschlossener Pfad im Holomorphiebereich von F ist, folgt mit der Cauchyschen Integralformel 1.4.4 für alle z im Inneren des von $\Gamma(n)$ umrandeten Gebietes

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(n)}\frac{F(\nu)}{z-\nu}\, d\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{n} i\frac{F(iu)}{z-iu}\, du - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ine^{-i\theta}\frac{F(ne^{-i\theta})}{z-ne^{-i\theta}}\, d\theta. \quad (2.15)$$

Nach Lemma 2.1.11 läßt sich F an der Stelle $ne^{-i\theta}$ abschätzen durch $\|F(ne^{-i\theta})\| \leq Cn^{-1/p}\cos(\theta)^{-1/p}$, wobei C eine von F und z unabhängige Konstante ist. Es ergibt sich also

$$\Big\| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ine^{-i\theta}\frac{F(ne^{-i\theta})}{z-ne^{-i\theta}}\, d\theta \Big\| \leq \sup_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} \frac{n}{|z-ne^{i\theta}|}\cdot Cn^{-1/p}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)^{-1/p}\, d\theta.$$

Für n gegen unendlich konvergiert dieser Ausdruck gegen Null, da $2 \leq p < \infty$ vorausgesetzt ist. Mit Gleichung (2.15) folgt daher die Behauptung

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \frac{f(u)}{z - iu}\, du = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

2. Schritt: Sei nun $F \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$ beliebig. Dann wird für jedes $a > 0$ die Funktion $H_a : \mathbf{C}_+ \to X$ definiert durch $H_a(z) = F(a + z)$. Die Funktionen H_a liegen alle in $H_q(\mathbf{C}_+, X)$ und sie erfüllen darüberhinaus die anfangs des ersten Schritts gemachte Zusatzbedingung. Also existiert für jedes $a > 0$ eine Funktion $g_a \in L_p([0,\infty), X)$ mit $\|g_a\|_{L_p} \leq \frac{M}{2\pi}\|H_a\|_{H_q} \leq \frac{M}{2\pi}\|F\|_{H_q}$ und

$$H_a(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g_a(t)\, dt \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Es liegt nun die folgende Situation vor:

(1) $F(z) = \lim_{a\to 0} H_a(z) = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty e^{-zt} g_a(t)\, dt$.

(2) Die Menge $\{e_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ der durch $e_z(t) = e^{-zt}$ definierten Funktionen ist total in $L_q([0,\infty))$.

Also kann die Folgerung 1.3.27 über die Konvergenz in $L_p(X)$ angewendet werden, d.h. es existiert ein $\phi \in V_p([0,\infty), X)$ mit $\|\phi\|_{V_p} \leq \sup_{a>0} \|g_a\|_{L_p} \leq \frac{M}{2\pi}\|F\|_{H_q}$ und

$$F(z) = \lim_{a\to 0} H_a(z) = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty e^{-zt} g_a(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\phi(t) \qquad (z \in \mathbf{C}_+).$$

Es bleibt zu zeigen, daß ϕ eine Radon-Nikodym Ableitung besitzt. Sind $a_1, a_2 > 0$, so gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$ mit $\mathrm{Re}(z) > \max(a_1, a_2)$

$$\int_0^\infty e^{-zt} e^{a_1 t} g_{a_1}(t)\, dt = H_{a_1}(z - a_1) = F(z) = H_{a_2}(z - a_2) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{a_2 t} g_{a_2}(t)\, dt.$$

Aufgrund der Injektivität der Laplace Transformation folgt aus dieser Gleichung, daß die durch $g(t) = e^{at} g_a(t)$ definierte Funktion $g : [0,\infty) \to X$ von $a > 0$ unabhängig ist. Zudem gilt für alle $z \in \mathbf{C}_+$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, d\phi(t) = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty e^{-zt} g_a(t)\, dt = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty e^{-(z+a)t} g(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt.$$

Ein weiteres Mal wird ausgenutzt, daß die Menge $\{e_z : z \in \mathbf{C}_+\}$ total in $L_q([0,\infty))$ ist und es ergibt sich

$$\phi(s) = \int_0^\infty \chi_{[0,s)}(t)\, d\phi(t) = \int_0^\infty \chi_{[0,s)}(t) g(t)\, dt = \int_0^s g(t)\, dt.$$

Somit folgt schließlich für alle $z \in \mathbf{C}_+$ aufgrund der Rechenregel 1.3.9

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\phi(t) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt.$$

$\equiv$

Aus den bisherigen Ergebnissen lassen sich unmittelbar zwei Bedingungen an die Resolvente eines abgeschlossenen Operators A gewinnen, welche sicherstellen, daß A Erzeuger eines L_p-Flusses ist.

Folgerung 2.1.31 *Sei $1 < q \leq 2$ und X sei ein Banachraum mit Fourier Typ (q). Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf X, dessen Resolventenmenge die rechte Halbebene enthält und es werde $\rho_x(z) = R(z,A)x$ gesetzt. Gilt für alle $x \in X$*

$$\rho_x \in H_q(\mathbf{C}_+, X),$$

so erzeugt A einen L_p-Fluß.

Beweis Ist $\rho_x \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$ für alle $x \in X$, so existiert unter den angegebenen Voraussetzungen nach Proposition 2.1.30 ein $Tx \in L_p((0,\infty), X)$ derart, daß ρ_x die komplexe Laplace Transformierte von Tx ist. Nach Proposition 1.5.7 reicht dies aus, um $T : X \to L_p(X)$ als L_p-Fluß mit Erzeuger A zu identifizieren. $\equiv$

Die nächste Folgerung macht sich die Charakterisierung 2.1.26 von $h_q(\mathbf{C}_+, X)$-Funktionen zunutze.

Folgerung 2.1.32 *Sei $1 < q \leq 2$ und X sei ein Banachraum mit Fourier Typ (q). Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf X, dessen Resolventenmenge die rechte Halbebene enthält und es werde $\rho_x(z) = R(z,A)x$ gesetzt. Gibt es ein $a > 0$ so, daß für alle $x \in X$ gilt*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|d_{a,n} * \rho_{x,a}\|_{L_q} < \infty, \tag{2.16}$$

so erzeugt A einen L_p-Fluß.

Beweis Nach Satz 2.1.26 ist die Bedingung (2.16) für jedes $x \in X$ äquivalent zu $\rho_x \in h_q(\mathbf{C}_+, X)$. Da die Holomorphie von ρ_x in $\mathbf{C}_+$ vorausgesetzt wurde, impliziert die Bedingung (2.16) folglich $\rho_x \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$. Somit erzeugt A nach Folgerung 2.1.31 einen L_p-Fluß. $\equiv$

2.1.6 Anmerkungen zu Hardyräumen vektorwertiger Funktionen

Obwohl das in Folgerung 2.1.15 vorgestellte Ergebnis zu Randfunktionen harmonischer Funktionen im skalaren Fall seit langem bekannt sind, gibt es entsprechende vektorwertige Varianten erst seit jüngerer Zeit. Im Jahr 1982 veröffentlichten Bukhvalov und Danilevich [9] einen Artikel, in welchem sie Randwerte harmonischer Funktionen in $h_p(X)$ identifizieren mit Funktionen, welche ihre Werte im Bidual X^{**} von X annehmen. Leider ist für viele Banachräume X der Bidualraum völlig unbekannt, so z. B. für Räume stetiger Funktionen oder Räume von Operatoren zwischen Banachräumen. Blasco [5] veröffentlichte 1987 eine Arbeit, in welcher er Randwerte harmonischer Funktionen in $h_p(X)$ mit Operatoren $T : L_q \to X$ identifiziert. Repräsentiert man diese Operatoren durch Funktionen von beschränkter p-Variation bzw. beschränkter p-Semivariation, so ergibt sich der in Satz 2.1.14 vorgestellte Zusammenhang zwischen Funktionen in $h_p(X)$ und ihren integrierten Randwerten. Diesen Weg beschritt Blasco [6] in einem nachfolgenden Artikel mit dem Unterschied, daß er die Operatoren durch

Vektormaße von beschränkter p-Variation bzw. beschränkter Semivariation repräsentierte. Die im Paragraphen „Randwerte harmonischer Funktionen in $h_p(X)$“ gegebene Darstellung ist daher zum großen Teil von Blascos Arbeit beeinflußt. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen in dieser Arbeit auf der einen Seite und den Ergebnissen von Bukhvalov und Danilevich sowie Blaso auf der anderen Seite besteht in dem betrachteten Definitionsbereich der harmonischen Funktionen: In den bisherigen Arbeiten zu Randwerten vektorwertiger harmonischer Funktionen wurden ausschließlich Funktionen auf der Kreisscheibe in den Blick genommen. Dies gilt sowohl für die oben zitierten Artikel als auch für weitere Arbeiten (z. B. von Hensgen [19] oder Ricker [34]), welche banachraumwertige harmonische Funktionen zum Gegenstand der Untersuchung haben.

Hardyräume vektorwertiger holomorpher Funktionen auf der rechten Halbebene wurden hauptsächlich im Zusammenhang mit der Lösung des (ACP) untersucht. In diesen Untersuchungen wird meistens von dem Spezialfall ausgegangen, daß die zu untersuchende holomorphe Funktion die Resolvente eines Operators ist. Dies ist z. B. bei Tanaka [37], van Nerven, Straub und Weis [27] oder auch in klassischen Büchern zu Halbgruppen von Operatoren der Fall, sobald holomorphe Halbgruppen Gegenstand der Untersuchung sind (siehe z.B. Goldstein [18]). In den meisten Fällen ist diese zusätzliche Information jedoch keine Hilfe beim Beweis der entsprechenden Sätze. Dies wird deutlich, wenn man sich die Folgerungen 2.1.31 und 2.1.32 ansieht: Entscheidend ist der in Proposition 1.5.7 gegebene Zusammenhang zwischen der Resolvente eines Operators A und dem von A erzeugten L_p-Fluß via Laplace Transformation. Ist dieser Zusammenhang hergestellt, bekommt man die Folgerungen 2.1.31 und 2.1.32 für L_p-Lösungen des (ACP) durch Satz 2.1.26 und Proposition 2.1.30 geschenkt.

Die Ergebnisse aus den Paragraphen „Poisson Kerne“ und „Randwerte harmonischer Funktionen in $h_p(X)$“ sind Verallgemeinerungen bekannter Aussagen für skalarwertige Funktionen auf den banachraumwertigen Fall. Im Unterschied dazu ist die in Proposition 2.1.20 gegebene Inversionsformel für den Operator $\mathcal{P}_a$ und die Charakterisierung Satz 2.1.26 des Bildes dieser Transformation auch für den skalarwertigen Fall neu. Der Gedanke, die Transformation $\mathcal{P}_a$ in L_p mit Hilfe des Erzeugers der Poisson Halbgruppe zu invertieren, wurde bereits von Pollard [32] ausgeführt. Er konnte dabei auf bereits bekannte Ergebnisse von Okikiolu [29] zurückgreifen, der den Erzeuger A der Poisson Halbgruppe als die Komposition des Differentialoperators $\frac{d}{dt}$ mit der Hilbert Transformation $\mathcal{H}$ erkannte, d. h. $A = \frac{d}{dt} \circ \mathcal{H}$. In dieser Arbeit mußte eine andere Beschreibung des Erzeugers der Poisson Halbgruppe gefunden werden, da die Hilbert Transformation auf $L_p(X)$ nur definiert ist, falls X isomorph zu einem UMD-Raum ist (siehe [8] und [10]).

Das für den Beweis von Proposition 2.1.20 entscheidende Werkzeug ist das Lemma 2.1.22, welches in einem gewissen Sinn eine Aussage über Stetigkeitseigenschaften der inversen Fourier Transformation macht. Denn in diesem Lemma wird von der punktweisen Konvergenz der Folge $(\hat{e}_n)$ im „Fourierraum“ auf eine Konvergenz der Folge (e_n) geschlossen. Welcher Art ist nun diese Konvergenz der Folge (e_n) und in welchem Raum findet sie statt? Die Antwort ist recht einfach: Es handelt sich um die schwach*-Konvergenz im Dualraum von C_0. Denn ist $f \in C_0$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) f_-(0-t)\, dt = \lim_{n\to\infty} e_n * f_-(0) = f(0),$$

d.h. die Folge (e_n) konvergiert in der schwach*-Topologie von C_0^* gegen das Punktfunktional im Punkt 0. Ist umgekehrt (e_n) eine Folge in L_1, welche schwach* gegen das Punktfunktional im Punkt 0 konvergiert, so folgt für alle $s \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} e_n * f(s) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) f(s-t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) f_s(t)\, dt = f_s(0) = f(s),$$

wobei $f_s(t) = f(s-t)$ gesetzt wird. Diese Überlegungen werfen die Frage auf, ob punktweise Konvergenz im „Fourierraum“ immer die schwach*-Konvergenz im Dualraum von C_0 impliziert? Da C_0^* mit dem Raum V_1 identifiziert werden kann, ergibt sich die folgende Vermutung.

Vermutung: *Sei $\phi \in V_1$ und (e_n) eine Folge in L_1, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|e_n\|_{L_1} < \infty$.

(ii) *Für alle $s \in \mathbf{R}$ gilt* $\lim_{n\to\infty} \widehat{e}_n(s) = \widehat{\phi}(s)$, *wobei $\widehat{\phi}$ die Fourier-Stieltjes Transformierte von ϕ bezeichnet (siehe etwa [23]).*

Dann gilt für alle $f \in C_0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\phi(t).$$

2.2 Hardyräume sektorieller holomorpher Funktionen

Sei $0 < \alpha < \pi$. Eine auf einem Sektor $\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbf{C} : z \neq 0, |\arg(z)| < \alpha\}$ holomorphe Funktion heißt *sektorielle holomorphe Funktion* oder präziser gesagt α-sektorielle holomorphe Funktion.

Ist $f : \Sigma_\alpha \to X$ eine nicht notwendigerweise holomorphe Funktion, so wird für $|\theta| < \alpha$ die Funktion $f_\theta : (0,\infty) \to X$ definiert durch $f_\theta(t) = f(te^{i\theta})$.

Definition 2.2.1 Sei $1 \leq p < \infty$. Der Raum $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ besteht aus allen α-sektoriellen holomorphen Funktionen $f : \Sigma_\alpha \to X$, für welche die Norm

$$\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)} = \sup_{|\theta|<\alpha} \|f_\theta\|_{L_p} = \sup_{|\theta|<\alpha} \Big(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p\, dt \Big)^{1/p}$$

beschränkt ist. $H_\infty(\Sigma_\alpha, X)$ ist der Raum der beschränkten α-sektoriellen holomorphen Funktionen. Die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ heißen *Hardyräume sektorieller holomorpher Funktionen.*

Hardyräume sektorieller holomorpher Funktionen stehen in einem engen Zusammenhang mit α-holomorphen L_p-Flüssen, wie die folgende Umformulierung der Definition 1.5.9 α-holomorpher L_p-Flüsse zeigt: Ein L_p-Fluß $T : X \to L_p(X)$ mit Erzeuger A ist ein α-holomorpher L_p-Fluß, falls gilt:

(i) $\mathrm{Bild}(T) \subseteq H_p(\Sigma_\alpha, X)$, d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine Fortsetzung von Tx zu einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion, die wegen ihrer Eindeutigkeit wieder mit Tx bezeichnet werden kann.

(ii) Für jedes β mit $|\beta| < \alpha$ ist der durch $T_\beta x(t) = Tx(te^{i\beta})$ definierte Operator $T_\beta : X \to L_p((0,\infty), X)$ ein L_p-Fluß und dieser wird von $e^{i\beta}A$ erzeugt.

Dieser Zusammenhang gestattet es, Ergebnisse über Hardyräume sektorieller holomorpher Funktionen zur Beantwortung der folgenden Fragen zu nutzen:

(1) Die Bedingung (i) der Definition α-holomorpher L_p-Flüsse stellt sicher, daß für jedes $x \in X$ eine milde Lösung des (ACP) zum Anfangswert x existiert, welche in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ liegt. Impliziert diese Bedingung bereits, daß $T_\beta x$ für $|\beta| < \alpha$ eine milde Lösung des (ACP) $u' = e^{i\beta}Au$ mit Anfangswert $u(0) = x$ ist?

(2) Die Bedingung (ii) fordert, daß $e^{i\beta}A$ für jeden Winkel β, dessen Betrag kleiner als α ist, einen L_p-Fluß erzeugt. Was passiert in den Fällen $\beta = \alpha$ und $\beta = -\alpha$?

(3) Ein zentraler Satz in der Theorie der C_0-Halbgruppen ist der Satz von Hille-Yosida (siehe etwa [18]), der Bedingungen an die Resolvente eines Operators A angibt, die hinreichend und notwendig dafür sind, daß A Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist. Eine entsprechende Charakterisierung vom Hille-Yosida Typ für die Erzeuger von L_p-Flüssen wird in [41] gegeben. Welche Resolventenbedingungen charakterisieren die Erzeuger α-holomorpher L_p-Flüsse?

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ stimmt der Sektor Σ_α mit der rechten offenen Halbebene $\mathbf{C}_+$ überein. Ist von Hardyräumen auf der rechten Halbebene die Rede, so ist üblicherweise der Teilraum $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ der holomorphen Funktionen von $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ gemeint, d.h. man definiert $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ als den Raum derjenigen holomorphen Funktionen $F : \mathbf{C}_+ \to X$, für welche die Norm

$$\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} = \sup_{a>0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \|F(a+ib)\|^p \, db \Big)^{1/p}$$

beschränkt ist. Dagegen bezeichnet $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ den Raum der holomorphen Funktion $G : \mathbf{C}_+ \to X$, für welche die Norm

$$\|G\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} = \sup_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\infty} \|G(te^{i\theta})\|^p \, dt \Big)^{1/p}$$

beschränkt ist. Es drängt sich an dieser Stelle die Frage auf, ob die Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ übereinstimmen und ob die jeweiligen Normen auf diesen Räumen äquivalent sind? Der nächste Paragraph gibt eine positive Antwort auf diese Frage. Eine andere Formulierung dieses Sachverhaltes besagt

$$(H_p(\mathbf{C}_+, X), \|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}) \simeq (H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X), \|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}), \tag{2.17}$$

wobei diese Isomorphie als Isomorphie zwischen normierten komplexen Vektorräumen zu verstehen ist. Außerdem ist leicht einzusehen (siehe Lemma 2.2.2 weiter unten), daß

$H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und $H_p(\Sigma_\beta, X)$ für jede Wahl $0 < \alpha, \beta < \pi$ isometrisch isomorph sind. Demnach folgt für alle $0 < \alpha < \pi$, sobald die Isomorphie (2.17) bewiesen ist,

$$(H_p(\mathbf{C}_+, X), \|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}) \simeq (H_p(\Sigma_\alpha, X), \|\cdot\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}). \tag{2.18}$$

Im Abschnitt „Hardyräume vektorwertiger Funktionen " wurde die Struktur der Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ untersucht. Die Ergebnisse dieses Abschnitts können demnach wegen der Isomorphie (2.18) für die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ übernommen werden. Insbesondere wird es möglich sein, jeder $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion eine „integrierte Randfunktion" von beschränkter p-Variation zuzuordnen. Die Eigenschaften dieser „integrierten Randfunktion" ermöglichen dann eine Beantwortung der Frage (2). Dies wird im Paragraphen „Randfunktionen α-sektorieller holomorpher Funktionen" behandelt.

Anschließend werden zwei weitere interessante Konsequenzen aus der Äquivalenz dieser Normen gezogen. Zum einen wird ein Paley-Wiener ähnlicher Satz für Hilberträume bewiesen. Zum anderen werden die Dualräume von $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ für Banachräume X mit Radon-Nikodym Eigenschaft bestimmt.

Im letzten Paragraphen dieses Abschnitts wird die Laplace-Stieltjes Transformation auf $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ untersucht und eine Charakterisierung des Bildes dieser Transformation angegeben. Die Ergebnisse dieser Untersuchung ermöglichen eine Beantwortung der oben gestellten Fragen (1) und (3).

2.2.1 Die Äquivalenz zweier Normen für holomorphe Funktionen in der rechten Halbebene

Für $z \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ und $s \in \mathbf{R}$ wird $z^s = |z|^s e^{is\arg(z)}$ gesetzt. Seien $0 < \alpha, \beta < \pi$ und $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Dann wird $A_{\alpha,\beta} f : \Sigma_\beta \to X$ definiert durch

$$A_{\alpha,\beta} f(z) = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{1/p} z^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{\beta}-1)} f\Big(z^{\frac{\alpha}{\beta}}\Big).$$

Weil für jedes $z \in \Sigma_\beta$ die komplexe Zahl $z^{\frac{\alpha}{\beta}}$ in Σ_α liegt, ist diese Definition sinnvoll. Darüberhinaus gilt: Die Abbildung $z \mapsto z^s$ ist für jedes $s \in \mathbf{R}$ holomorph in $\mathbf{C} \setminus [0, \infty)$, also ist sie insbesondere holomorph in Σ_β, da die Sektoren Σ_β für alle $0 < \beta < \pi$ in $\mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ enthalten sind. Da durch Verknüpfung und Multiplikation holomorpher Funktionen wieder holomorphe Funktionen entstehen, ist $A_{\alpha,\beta} f : \Sigma_\beta \to X$ eine holomorphe Funktion.

Lemma 2.2.2 *Für jedes $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ ist $A_{\alpha,\beta} f \in H_p(\Sigma_\beta, X)$, und der Operator $A_{\alpha,\beta} : H_p(\Sigma_\alpha, X) \to H_p(\Sigma_\beta, X)$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Zudem sind die Operatoren $A_{\alpha,\beta}$ und $A_{\beta,\alpha}$ zueinander invers.*

Beweis Sei $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Es wurde bereits vermerkt, daß $A_{\alpha,\beta} f$ holomorph in Σ_β ist. Die leichte Rechnung

$$\|A_{\alpha,\beta} f\|^p_{H_p(\Sigma_\beta)} = \sup_{|\gamma|<\beta} \int_0^\infty \|A_{\alpha,\beta} f(re^{i\gamma})\|^p \, dr$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{|\gamma|<\beta} \int_0^\infty \Big\| \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{1/p} (re^{i\gamma})^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{\beta}-1)} f\Big((re^{i\gamma})^{\frac{\alpha}{\beta}}\Big) \Big\|^p \, dr \\
&= \sup_{|\gamma|<\alpha} \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \|f(r^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{i\gamma})\|^p \, dr \\
&= \sup_{|\gamma|<\alpha} \int_0^\infty \|f(ue^{i\gamma})\|^p \, du \\
&= \|f\|^p_{H_p(\Sigma_\alpha)}
\end{aligned}
$$

zeigt, daß die Normen $\|A_{\alpha,\beta} f\|_{H_p(\Sigma_\beta)}$ und $\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}$ für $p < \infty$ übereinstimmen. Im Fall $p = \infty$ ist die Übereinstimmung der Normen klar.

Zum Nachweis von $A^{-1}_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$ wird $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und $z \in \Sigma_\alpha$ gewählt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(A_{\beta,\alpha} \circ A_{\alpha,\beta} f)(z) &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/p} z^{\frac{1}{p}(\frac{\beta}{\alpha}-1)} (A_{\alpha,\beta} f)\Big(z^{\frac{\beta}{\alpha}}\Big) \\
&= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/p} z^{\frac{1}{p}(\frac{\beta}{\alpha}-1)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/p} \Big(z^{\frac{\beta}{\alpha}}\Big)^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{\beta}-1)} f\Big((z^{\frac{\beta}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{\beta}}\Big) = f(z).
\end{aligned}
$$

Also ist $A_{\beta,\alpha} \circ A_{\alpha,\beta} = Id_{H_p(\Sigma_\alpha)}$ und aus Symmetriegründen folgt $A_{\alpha,\beta} \circ A_{\beta,\alpha} = Id_{H_p(\Sigma_\beta)}$.
$\equiv$

Die Abschätzung für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen, die im folgenden Lemma bewiesen wird, ist im weiteren Verlauf dieses Abschnitts ein unerläßliches Hilfsmittel. Sie wird zum Nachweis einer Cauchyschen Integralformel für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen (siehe Proposition 2.2.4 weiter unten) benötigt. Diese Integralformel wiederum ist notwendig im Beweis der in diesem Abschnitt zentralen Sätze 2.2.9 und 2.3.7. Diese Abschätzung übernimmt für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen die Rolle, welche die Abschätzung in Lemma 2.1.11 für $H_p(\mathbf{C}_+, X)$-Funktionen spielt. An dieser Stelle wird die Vereinbarung getroffen, daß die Schreibweise $z = re^{i\theta}$ für $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ immer $\theta = \arg(z)$ beinhaltet.

Lemma 2.2.3 *Sei $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \pi$ und $F \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Dann gilt für jedes $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$*

$$
\|F(z)\| \le \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}}.
$$

Beweis Sobald die Behauptung für komplexwertige Funktionen in $H_p(\Sigma_\alpha)$ nachgewiesen ist, folgt für banachraumwertige $F \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$

$$
\begin{aligned}
\|F(z)\| &= \sup_{x^* \in U_{X^*}} |(x^* \circ F)(z)| \\
&\le \sup_{x^* \in U_{X^*}} \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{\|x^* \circ F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}} \le \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}}.
\end{aligned}
$$

Von nun an sei also $F \in H_p(\Sigma_\alpha)$.

1. Schritt Zunächst sei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $z = re^{i\theta} \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}}$. Dann ist $r^{1/p}\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p} = \mathrm{Re}(z)^{1/p}$. Demnach gilt es

$$|F(z)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}}{\mathrm{Re}(z)^{1/p}}$$

nachzuweisen. Weil F holomorph in $\Sigma_{\frac{\pi}{2}}$ ist, ist die Funktion $z \mapsto |F(z)|^p$ subharmonisch in $\Sigma_{\frac{\pi}{2}}$ (siehe Lemma 2.1.12) und somit

$$\int_0^{2\pi} |F(z + re^{i\gamma})|^p \, d\gamma \geq 2\pi |F(z)|^p \qquad (0 < r < \mathrm{Re}(z)). \tag{2.19}$$

Sei $0 < s < \mathrm{Re}(z)$ und es sei $A = [0, s] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbf{R}^2$. Weiter sei $g : A \to \mathbf{R}^2$ definiert durch $g(r, \phi) = (|z + re^{i\phi}|, \arg(z + re^{i\phi}))$. Dann ist $g : A \to B = \mathrm{Bild}(g)$ bijektiv, stetig differenzierbar und die Jacobi Determinante J_g von g berechnet sich zu $J_g(r, \phi) = \frac{r}{z + re^{i\phi}}$. Wird $G : B \to \mathbf{R}$ durch $G(t, \theta) = |F(te^{i\theta})|^p$ definiert, so ergibt Integration durch Substitution

$$\begin{aligned}
\int_B |F(te^{i\theta})|^p d(t, \theta) &= \int_B G(t, \theta) \, d(t, \theta) \\
&= \int_A G(g(r, \phi)) |J_g(r, \phi)| \, d(r, \phi) \\
&= \int_A |F(z + re^{i\phi})|^p |J_g(r, \phi)| \, d(r, \phi).
\end{aligned}$$

Die Jacobi Determinante von g läßt sich nach unten abschätzen durch $|J_g(r, \phi)| \geq \frac{r}{2|z|}$ und mit Ungleichung (2.19) folgt

$$\begin{aligned}
\int_B |F(te^{i\theta})|^p \, d(t, \theta) &\geq \int_0^s \int_0^{2\pi} |F(z + re^{i\phi})|^p \frac{r}{2|z|} \, d\phi \, dr \\
&\geq 2\pi \frac{|F(z)|^p}{2|z|} \int_0^s r \, dr \qquad (2.20) \\
&= \frac{\pi s^2}{2|z|} |F(z)|^p.
\end{aligned}$$

Andererseits kann das Integral $\int_B |F(te^{i\theta})|^p \, d(t, \theta)$ wie folgt nach oben abgeschätzt werden: Ist $(t, \theta) \in B$, so ist $te^{i\theta}$ enthalten im Kreis mit Radius s und Mittelpunkt z. Es folgt daher $\arg(z) - \arcsin(\frac{s}{|z|}) \leq \theta \leq \arg(z) + \arcsin(\frac{s}{|z|})$. Nun ist aber $0 < \frac{s}{|z|} < 1$ und somit gilt $\arcsin(\frac{s}{|z|}) \leq \frac{\pi}{2}\frac{s}{|z|}$. Weil $|F(te^{i\theta})|^p$ positiv ist, wird der Wert des Integrals $\int_B |F(te^{i\theta})|^p \, d(t, \theta)$ vergrößert, wenn der Integrationsbereich vergrößert wird. Demnach folgt

$$\begin{aligned}
\int_B |F(te^{i\theta})|^p \; d(t, \theta) &\leq \int_0^\infty \int_{\arg(z) - \frac{s}{|z|}}^{\arg(z) + \frac{s}{|z|}} |F(te^{i\theta})|^p \, d\theta dt \\
&\leq \int_{\arg(z) - \frac{s}{|z|}}^{\arg(z) + \frac{s}{|z|}} \|F\|^p_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \, d\theta \qquad (2.21) \\
&= \frac{2s}{|z|} \|F\|^p_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichungen (2.20) und (2.21) liefern nun

$$\frac{\pi s^2}{2|z|}|F(z)|^p \leq \frac{2s}{|z|}\|F\|^p_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle s mit $0 < s < \mathrm{Re}(z)$ und sie besteht daher auch im Grenzfall $s \to \mathrm{Re}(z)$. Das zeigt

$$|F(z)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}}{\mathrm{Re}(z)^{1/p}}. \tag{2.22}$$

<u>2. Schritt</u> Nun sei $0 < \alpha < \pi$ beliebig und $F \in H_p(\Sigma_\alpha)$. Wird $G = A_{\alpha,\frac{\pi}{2}}F$ gesetzt, so folgt $\|G\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} = \|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}$ wegen des vorangegangenen Lemmas 2.2.2. Demnach besagt die im ersten Schritt bewiesene Ungleichung (2.22)

$$|G(z)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|G\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}}{\mathrm{Re}(z)^{1/p}} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{\mathrm{Re}(z)^{1/p}}.$$

Also ist für $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$

$$\begin{aligned} |F(z)| &= |(A_{\frac{\pi}{2},\alpha}G)(z)| = \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/p} \left|z^{1/p(\frac{\pi}{2\alpha}-1)}\right| \left|G\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right)\right| \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/p} r^{1/p(\frac{\pi}{2\alpha}-1)} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p\cdot\frac{\pi}{2\alpha}}\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\cdot\theta)^{1/p}} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p}\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\cdot\theta)^{1/p}}. \end{aligned}$$

≡

Mit Hilfe der soeben gewonnenen Abschätzung läßt sich eine Vereinfachung der Cauchyschen Integralformel für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen beweisen. Zuvor benötigen wir die folgende Notation:

Für $-\pi < \gamma < \pi$ und $0 < r < s < \infty$ sei

$$\Gamma_\gamma(r,s) = (te^{i\gamma} : r \leq t \leq s)$$

und $\Gamma_\gamma(s,r) = -\Gamma_\gamma(r,s)$. Ist $|\gamma| < \alpha$ und $F : \Sigma_\alpha \to X$, so wird

$$\int_{\Gamma_\gamma} F(u)\,du = \lim_{r\to 0, s\to\infty} \int_{\Gamma_\gamma(r,s)} F(u)\,du$$

gesetzt, sofern dieser Grenzwert existiert. Weiter sei $\widetilde{\Gamma}_\gamma = (-\Gamma_{-\gamma}, \Gamma_\gamma)$ für $\gamma > 0$ und es wird

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_\gamma} F(u)\,du = \int_{\Gamma_\gamma} F(u)\,du - \int_{\Gamma_{-\gamma}} F(u)\,du$$

gesetzt. Für $-\pi < \gamma_1 < \gamma_2 < \pi$ und $r > 0$ sei

$$\Delta_r(\gamma_1,\gamma_2) = (re^{i\theta} : \gamma_1 < \theta < \gamma_2)$$

und $\Delta_r(\gamma_2,\gamma_1) = -\Delta(\gamma_1,\gamma_2)$. Wir werden häufig ausnutzen, daß

$$\Gamma = (\Gamma_{\gamma_1}(s,r), \Delta_r(\gamma_1,\gamma_2), \Gamma_{\gamma_2}(r,s), \Delta_s(\gamma_2,\gamma_1))$$

ein geschlossener, negativ orientierter Pfad ist.

Proposition 2.2.4 *Sei $0 < \gamma < \alpha < \pi$ und $F : \Sigma_\alpha \to X$ sei holomorph in Σ_α. Es existiere ein $C > 0$ sowie $1 < p < \infty$ so, daß für alle $z \in \overline{\Sigma_\gamma}$ die Abschätzung $\|F(z)\| \leq \frac{C}{|z|^{1/p}}$ besteht. Dann gilt für jedes $z \in \Sigma_\gamma$*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_\gamma} \frac{F(u)}{z-u}\, du.$$

Beweis Wir betrachten für $0 < r < s < \infty$ und $0 < \gamma < \alpha$ den geschlossenen, negativ orientierten Pfad

$$\Gamma(r,s) = (\Gamma_{-\gamma}(s,r), \Delta_r(-\gamma,\gamma), \Gamma_\gamma(r,s), \Delta_s(\gamma,-\gamma)).$$

Da Σ_α sternförmig und somit einfach zusammenhängend ist (siehe Lemma 1.4.3), folgt mit der Integralformel von Cauchy für alle $0 < r < |z| < s < \infty$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r,s)} \frac{F(u)}{z-u}\, du.$$

Wegen

$$\int_{\Delta_s(\gamma,-\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du = - \int_{\Delta_s(-\gamma,\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du$$

gilt es also

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Delta_r(-\gamma,\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du = 0 = \lim_{s\to\infty} \int_{\Delta_s(-\gamma,\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du$$

nachzuweisen. Sei $r \neq |z|$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{\Delta_r(-\gamma,\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du \Big\| &= \Big\| \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{F(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} ire^{i\theta}\, d\theta \Big\| \\ &\leq 2\gamma \cdot \frac{r}{|r-|z||} \cdot \frac{C}{r^{1/p}} \\ &= 2\gamma \cdot \frac{r^{1-1/p}}{|r-|z||} \cdot C \end{aligned} \tag{2.23}$$

und die rechte Seite konvergiert gegen Null für $r \to 0$, da $p > 1$, und sie konvergiert gegen Null für $r \to \infty$, da $p < \infty$. $\equiv$

Folgerung 2.2.5 *Sei $0 < \alpha < \pi$, $1 < p < \infty$ und $F \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Dann gilt für jeden Winkel $0 < \gamma < \alpha$ und jedes $z \in \Sigma_\gamma$*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_\gamma} \frac{F(u)}{z-u}\, du$$

Beweis Ist $0 < \gamma < \alpha$ so gilt nach Lemma 2.2.3 für jedes $z = re^{i\theta} \in \overline{\Sigma_\gamma}$

$$\|F(z)\| \leq \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/p}.$$

Die Voraussetzungen an F aus Proposition 2.2.4 sind also mit

$$C = \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{\|F\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\gamma)^{1/p}}$$

erfüllt. $\equiv$

Proposition 2.2.4 ist im Fall $p = 1$ nicht haltbar, weil der Term (2.23) in diesem Fall nicht gegen Null konvergiert für $r \to 0$. Aus dem Beweis von Proposition 2.2.4 ist jedoch ersichtlich, daß die folgende Variante der Cauchyschen Integralformel gilt.

Proposition 2.2.6 *Sei $0 < \gamma < \alpha < \pi$, $F : \Sigma_\alpha \to X$ sei holomorph in Σ_α und es existiere ein $C > 0$ so, daß für alle $z \in \overline{\Sigma_\gamma}$ die Abschätzung $\|F(z)\| \leq \frac{C}{|z|}$ besteht. Dann gilt für jedes $z \in \Sigma_\gamma$*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega(r,\gamma)} \frac{F(u)}{z-u}\, du,$$

wobei $\Omega(r,\gamma) = (\Gamma_{-\gamma}(\infty, r), \Delta_r(-\gamma,\gamma), \Gamma_\gamma(r,\infty))$.

Die zentrale Aussage dieses Paragraphen ist die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$. Der Beweis dieser Äquivalenz erfordert neben der soeben bewiesenen Abwandlung der Cauchyschen Integralformel für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen die folgenden beiden Ergebnisse aus der harmonischen Analysis.

Das erste Ergebnis betrifft die konjugierte Poisson Transformation. Für $p < \infty$ und $f \in L_p(\mathbf{R})$ ist die konjugierte Poisson Transformierte $\mathcal{Q}f : \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$ definiert durch

$$\mathcal{Q}f(a+ib) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b-t}{(b-t)^2 + a^2} f(t)\, dt.$$

Dieses Integral existiert für alle $a + ib \in \mathbf{C}_+$, da die Funktion, die jedem reellen t den Wert $\frac{b-t}{(b-t)^2+a^2}$ zuordnet, für $q > 1$ eine L_q-Funktion ist. Darüber hinaus gilt:

Proposition 2.2.7 *Sei $1 < p < \infty$. Für jedes $f \in L_p$ ist $\mathcal{Q}f \in h_p(\mathbf{C}_+)$ und die konjugierte Poisson Transformation $\mathcal{Q} : L_p(\mathbf{R}) \to h_p(\mathbf{C}_+)$ ist ein beschränkter Operator.*

Beweis Der Beweis beruht auf den beiden folgenden Ergebnissen, die schon im Beweis von Proposition 2.1.20 bemüht wurden.

(1) Die Hilbert Transformation ist ein stetiger Operator in $L_p(\mathbf{R})$ für $1 < p < \infty$.

(2) Für $a > 0$ und $f \in L_p(\mathbf{R})$ gilt $Q_a * f = \mathcal{H}(P_a * f)$, wobei Q_a definiert ist durch $Q_a(t) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+a^2}$ $(-\infty < t < \infty)$.

Bezeichnet $\|\mathcal{H}\|_p$ die Norm der Hilbert Transformation in $L_p(\mathbf{R})$, so folgt aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}f\|_{h_p} &= \sup_{a>0} \|Q_a * f\|_{L_p} = \sup_{a>0} \|\mathcal{H}(P_a * f)\|_{L_p} \\ &\leq \|\mathcal{H}\|_p \|\mathcal{P}f\|_{h_p} = \|\mathcal{H}\|_p \|f\|_{L_p}. \end{aligned}$$

$\equiv$

Als nächstes wird ein Ergebnis zitiert (siehe [17]), welches eine Aussage über die *nichttangentiale Maximalfunktion* h_α^* einer $h_p(\mathbf{C}_+)$-Funktion macht. Sei $h \in h_p(\mathbf{C}_+)$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dann wird $h_\alpha^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$h_\alpha^*(t) = \sup_{z \in it + \Sigma_\alpha} |h(z)|.$$

Proposition 2.2.8 *Sei $1 < p < \infty$ und $0 < \alpha < \pi$. Dann gibt es eine Konstante $B(\alpha, p)$ so, daß für alle $h \in h_p(\mathbf{C}_+)$ gilt*

$$\|h_\alpha^*\|_{L_p} \leq B(\alpha, p) \|h\|_{h_p}.$$

Die Vorbereitungen zum Beweis der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ sind nun abgeschlossen.

Satz 2.2.9 *Sei $1 < p \leq \infty$. Die Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ stimmen überein und die Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ sind äquivalent, d.h. die Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ sind vermöge der identischen Abbildung isomorph.*

Beweis Im Fall $p = \infty$ gibt es nichts zu zeigen. Sei also $1 < p < \infty$. Der Beweis gliedert sich in vier Schritte. Die ersten beiden Schritte dienen für $F \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ dem Nachweis der Ungleichung

$$\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \leq 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}.$$

In den Schritten 3 und 4 wird der Nachweis der Abschätzung

$$\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq C\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \quad \text{mit einem } C > 0$$

erbracht, wobei im 3. Schritt der skalarwertige und im 4. Schritt der banachraumwertige Fall behandelt wird.

1. Schritt: Sei also zunächst $F \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})$ komplexwertig. Für $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ wird $F_\beta = A_{\frac{\pi}{2},\beta} F$ gesetzt. Dann ist $F_\beta \in H_p(\Sigma_\beta)$ nach Lemma 2.2.2. Somit liegt die durch $f_\beta(t) = F_\beta(it)$ auf $\mathbf{R}$ definierte Funktion in L_p und es gilt $\|f_\beta\|_{L_p} \leq 2\|F_\beta\|_{H_p(\Sigma_\beta)} = 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$.

Für $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$ kann $F_\beta(z)$ mit der Cauchyschen Integralformel 2.2.5 für $H_p(\Sigma_\beta, \mathbf{C})$-Funktionen berechnet werden:

$$\begin{aligned} F_\beta(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_{\frac{\pi}{2}}} \frac{F_\beta(u)}{z - u} \, du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\beta(it)}{a + i(b-t)} \cdot i \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a - i(b-t)}{a^2 + (b-t)^2} f_\beta(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{P} f_\beta)(z) - \frac{i}{2}(\mathcal{Q} f_\beta)(z). \end{aligned}$$

Nun besagt Proposition 2.2.7, daß für alle $f \in L_p$ die Ungleichung $\|\mathcal{Q}f\|_{h_p} \leq \|\mathcal{Q}\|\|f\|_{L_p}$ besteht, und aus Proposition 2.1.5 (i) ist $\|\mathcal{P}f\|_{h_p} \leq \|f\|_{L_p}$ bekannt. Somit folgt

$$\|F_\beta\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \leq \frac{1}{2}(1+\|\mathcal{Q}\|)\|f_\beta\|_{L_p} \leq \frac{1}{2}(1+\|\mathcal{Q}\|)\|F_\beta\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}.$$

Insbesondere ist $F_\beta \in H_p(\mathbf{C}_+)$. Also besitzt F_β eine Randfunktion in L_p nach Folgerung 2.1.15, und da für alle $t \neq 0$ gilt $\lim_{a\to 0} F_\beta(a+it) = f_\beta(t)$, muß f_β diese Randfunktion sein, d.h.

$$F_\beta = \mathcal{P} f_\beta. \tag{2.24}$$

<u>2. Schritt:</u> Sei nun $F \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ banachraumwertig. Für $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ wird wiederum die Funktion $F_\beta = A_{\frac{\pi}{2},\beta}F$ betrachtet und für $t \in \mathbf{R}$ wird wieder $f_\beta(t) = F_\beta(it)$ gesetzt. Dann gilt nach (2.24) für jedes $x^* \in X^*$ und jedes $z = a+ib \in \mathbf{C}_+$

$$x^*(F_\beta(a+ib)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t)(x^* \circ f_\beta)(t)\,dt. \tag{2.25}$$

Nun ist aber

$$\|f_\beta\|_{L_p} \leq 2\|F_\beta\|_{H_p(\Sigma_\beta)} = 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}, \tag{2.26}$$

und daher existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t) f_\beta(t)\,dt$ als Bochner Integral. Folglich gilt

$$F_\beta(a+ib) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t) f_\beta(t)\,dt.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun mit Hilfe der Folgerung 1.3.27 über die Konvergenz von Folgen in $L_p(X)$ die Existenz eines $\phi \in V_p(X)$ nachweisen mit

$$F(a+ib) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b-t)\,d\phi(t), \tag{2.27}$$

denn es gilt:

(1) $\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} P_{a+ib}(t) f_\beta(t)\,dt = \lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}} F_\beta(a+ib) = F(a+ib) \qquad (a+ib \in \mathbf{C}_+)$.

(2) Die Familie $(f_\beta)_{\frac{\pi}{2}<\beta<\pi}$ ist in $L_p(X)$ beschränkt, denn für alle zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegenen Winkel β besagt Ungleichung (2.26) die Gültigkeit von $\|f_\beta\|_{L_p} \leq 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$.

(3) Die Menge $\{P_{a+ib} : a+ib \in \mathbf{C}_+\}$ ist total in L_q nach Lemma 2.1.13(ii).

Folgerung 1.3.27 sichert also die Existenz eines $\phi \in V_p(X)$ mit

$$\|\phi\|_{V_p} \leq \sup_{\frac{\pi}{2}<\beta<\pi} \|f_\beta\|_{L_p} \leq 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$$

so, daß für alle $h \in L_q$ gilt

$$\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f_\beta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\phi(t).$$

Wird $h = P_{a+ib}$ gewählt, so folgt die Gleichung (2.27). Bis hierher wurde also gezeigt, daß F die Poisson-Stieltjes Transformierte eines ϕ von beschränkter p-Variation mit $\|\phi\|_{V_p} \leq 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ ist. Aus Proposition 2.1.5 (iii) folgt daher $\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \leq \|\phi\|_{V_p} \leq 2\|F\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$.

3. Schritt: Als nächstes wird gezeigt, daß mit der Konstante $C = B(p, \frac{3\pi}{4})$ aus Proposition 2.2.8 für alle nicht notwendigerweise holomorphen $F \in h_p(\mathbf{C}_+)$ die Ungleichung

$$\|F\|_{h_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq C\|F\|_{h_p(\mathbf{C}_+)} \tag{2.28}$$

besteht. Zu zeigen ist für alle γ mit $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(te^{i\gamma})|^p \, dt \leq B\Big(p, \frac{3\pi}{4}\Big)^p \|F\|_{h_p(\mathbf{C}_+)}. \tag{2.29}$$

Sei zuerst $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Wird $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ gesetzt, so gilt $te^{i\gamma} \in it + \Sigma_\alpha$ für alle $t \in \mathbf{R}$. Somit läßt sich $|F(te^{i\gamma})|$ durch die nichttangentiale Maximalfunktion F^*_α im Punkt t abschätzen, d.h. für alle reellen t gilt $|F(te^{i\gamma})| \leq F^*_\alpha(t)$. Mit Proposition 2.2.8 folgt nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(te^{i\gamma})|^p \, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F^*_\alpha(t)|^p \, dt \leq B(p, \alpha)\|F\|_{h_p(\mathbf{C}_+)}$$

und somit ist die Ungleichung (2.29) für nicht negative Winkel γ bewiesen. Die Abschätzung für $-\frac{\pi}{2} < \gamma < 0$ verläuft völlig analog.

4. Schritt: Sei nun $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$. Dann gibt es nach Satz 2.1.14 ein $\phi \in V_p(X)$ mit $\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} = \|\phi\|_{V_p}$ so, daß für alle $a + ib \in \mathbf{C}_+$ gilt

$$F(a + ib) = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b - t) \, d\phi(t).$$

Nach Proposition 1.3.13 existiert eine Funktion $g \in L_p(\mathbf{R})$ mit $\|g\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p}$ derart, daß für alle $h \in L_q(\mathbf{R})$ die Ungleichung

$$\Big\| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \, d\phi(t) \Big\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| g(t) \, dt.$$

besteht. Sei $G(a + ib) = (\mathcal{P}g)(a + ib)$ für $a + ib \in \mathbf{C}_+$. Dann ist zum einen

$$\|F(a + ib)\| = \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b - t) \, d\phi(t) \Big\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} P_a(b - t) g(t) \, dt = G(a + ib), \tag{2.30}$$

und zum anderen ist $G \in h_p(\mathbf{C}_+)$ mit

$$\|G\|_{h_p(\mathbf{C}_+)} = \|g\|_{L_p} = \|\phi\|_{V_p} = \|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}.$$

Nach Schritt 3 gilt also $\|G\|_{h_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq B(p, \frac{3\pi}{4})\|F\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$, und mit (2.30) ergibt sich für $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\infty} \|F(te^{i\gamma})\|^p \, dt \leq \int_0^{\infty} G(re^{i\gamma})^p \, dt \leq B\Big(p, \frac{3\pi}{4}\Big)^p \|F\|^p_{H_p(\mathbf{C}_+)}.$$

Der Übergang zum Supremum über alle γ mit $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ liefert schließlich die Abschätzung (2.28) auch für banachraumwertige $F \in h_p(\mathbf{C}_+, X)$. $\equiv$

Kenntnisse über die Hardyräume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ lassen sich wegen des eben bewiesenen Satzes nun ohne Schwierigkeiten auf die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ übertragen, da ja laut Lemma 2.2.2 die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ zueinander isomorph sind.

Proposition 2.2.10 (i) *Für* $1 \le p \le \infty$ *ist* $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ *ein Banachraum.*
(ii) *Für* $1 < p \le \infty$ *und* $0 < \alpha < \pi$ *ist* $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ *ein Banachraum.*

Beweis Es genügt nachzuweisen, daß $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ ein Banachraum ist. Sei (F_n) ein Cauchyfolge in $H_p(\mathbf{C}_+, X)$. Dann besitzt (F_n) zumindest im Hardyraum der harmonischen Funktionen $h_p(\mathbf{C}_+, X)$ einen Grenzwert F und zu zeigen bleibt, daß F in $\mathbf{C}_+$ holomorph ist. Sei $x^* \in X^*$. Dann gilt natürlich $\lim_{n\to\infty} x^* \circ F_n = x^* \circ F$ in $h_p(\mathbf{C}_+)$. Aber die Funktionen $x^* \circ F_n$ liegen allesamt im Raum $H_p(\mathbf{C}_+)$ der holomorphen Funktionen und dieser Raum ist bekanntlich ein Banachraum (siehe z.B. [17]). Somit liegt auch $x^* \circ F$ in diesem Raum und ist insbesondere holomorph in $\mathbf{C}_+$. Folglich ist F schwach holomorph in $\mathbf{C}_+$ und die Holomorphie von F in der rechten Halbebene wird nun von Folgerung 1.4.9 impliziert. $\equiv$

2.2.2 Randwerte sektorieller holomorpher Funktionen

Ist $F \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$, so existiert eine eindeutig bestimmte integrierte Randfunktion $\phi \in V_p(I, X)$, d.h. F ist die Poisson-Stieltjes Transformierte von ϕ. Dies ist das zentrale Ergebnis des Paragraphen über Randwerte harmonischer Funktionen. In Satz 2.2.9 wurde bewiesen, daß für $p > 1$ und alle zwischen 0 und π gelegenen Winkel α die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ isomorph zu $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ sind. Dies legt die Vermutung nahe, daß für jedes $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ eine „integrierte Randfunktion“ existiert. Bevor diese Vermutung diskutiert werden kann, ist es unumgänglich zu klären, was die integrierte Randfunktion einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion sein soll. Und es scheint schwierig, die auf der Poisson-Stieltjes Transformation basierende Definition für $H_p(\mathbf{C}_+, X)$-Funktionen zu übernehmen. Erfolgversprechender ist eine Verallgemeinerung der folgenden Darstellung integrierter Randwerte, welche man erhält, wenn Folgerung 2.1.8 mit Satz 2.1.14 kombiniert wird.

Satz 2.2.11 *Sei* $F \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$. *Dann existiert für alle* $s > 0$ *der Grenzwert*

$$\phi(s) = \lim_{a\to 0} \int_0^s F_a(t)\,dt \tag{2.31}$$

und die Funktion ϕ *ist von beschränkter p-Variation mit* $\|\phi\|_{V_p} = \|F\|_{H_p}$. *Darüberhinaus gilt:*

(i) *Für alle* $h \in L_q$ *ist* $\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) F_a(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,d\phi(t)$.

(ii) *Besitzt* ϕ *eine Radon-Nikodym Ableitung* f, *so ist* $\lim_{a\to 0} F_a = f$ *in der Norm in* $L_p(X)$.

Wie üblich ist hier $F_a(t) = F(a+it)$ gesetzt.

Sei nun $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Es ist das Ziel, ähnlich wie in Gleichung (2.31) eine Funktion ψ von beschränkter p-Variation zu definieren. Dabei ist es naheliegend, sich für $0 < \eta < \alpha$ die durch

$$G_\eta(t) = G(|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta})$$

auf $\mathbf{R}$ definierten Funktionen G_η anzusehen. Grob gesagt gilt in der Tat, daß der obige Satz richtig bleibt, wenn anstelle von $F \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$ eine Funktion $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ betrachtet wird und die kartesischen Koordinaten „$a + ib$“ konsequent durch Polarkoordinaten „$|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta}$“ ersetzt werden.

Satz 2.2.12 *Sei $1 < p \leq \infty$ und $0 < \alpha < \pi$. Ist $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$, so existiert für alle $t \in \mathbf{R}$ der Grenzwert*

$$\psi(t) = \lim_{\eta \to \alpha} \int_0^t G_\eta(u)\, du \tag{2.32}$$

und die Funktion ψ ist von beschränkter p-Variation. Darüberhinaus gilt:

(i) *Für alle $h \in L_q$ ist $\lim_{\eta\to\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) G_\eta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, d\psi(t)$.*

(ii) *Ist $p < \infty$ und besitzt ψ eine Radon-Nikodym Ableitung g, so ist $g = \lim_{\eta\to\alpha} G_\eta$ in der L_p-Norm.*

Die Funktion ψ in Gleichung (2.32) wird integrierte Randfunktion von $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ genannt. Besitzt ψ eine Radon-Nikodym Ableitung g, so heißt g Randfunktion von G.

Beweis Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte.

1. Schritt: Sei zuerst $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $G \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$. Dann ist $G \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$ nach Satz 2.2.9 und aufgrund von Satz 2.1.14 ist bekannt, daß eine integrierte Randfunktion $\psi \in V_p(X)$ von G existiert. Sei $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$. Dann gibt es $t \in \mathbf{R}$ und $0 \leq \eta < \frac{\pi}{2}$ mit $z = |t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta}$. Die Pfade $\Gamma_1(z)$, $\Gamma_2(z)$ sowie $\Gamma_3(z)$ seien nun definiert durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(z) &= (se^{i\mathrm{sgn}(t)\eta} : 0 \leq s \leq |t|),\\
\Gamma_2(z) &= (s : 0 \leq s \leq a),\\
\Gamma_3(z) &= (a + i\mathrm{sgn}(t)s : 0 \leq s \leq |b|).
\end{aligned}$$

Dann ist $(\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z))$ ein geschlossener Pfad in $\overline{\mathbf{C}}_+$. Da G holomorph in $\mathbf{C}_+$ ist und die Abschätzung $\|G(z)\| \leq K\mathrm{Re}(z)^{-1/p}$ erfüllt, gilt aufgrund des Satzes von Cauchy

$$\begin{aligned}
&\int_0^t G_\eta(s)\, ds \mathrm{sgn}(t) e^{-i\mathrm{sgn}(t)\eta} \int_{\Gamma_1(z)} G(\nu)\, d\nu\\
= \;& \mathrm{sgn}(t) e^{-i\mathrm{sgn}(t)\eta} \Big(\int_{\Gamma_2(z)} G(\nu)\, d\nu + \int_{\Gamma_3(z)} G(\nu)\, d\nu \Big)\\
= \;& \mathrm{sgn}(t) e^{-i\mathrm{sgn}(t)\eta} \Big(\int_0^a G(s)\, ds + i \int_0^b G(a+is)\, ds \Big).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Nun sei $t \in \mathbf{R}$ fest und $z(\eta) = |t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta} = a(\eta) + ib(\eta)$. Konvergiert η gegen $\frac{\pi}{2}$, so konvergiert $\mathrm{Re}(z(\eta))$ gegen t. Folglich gilt nach Gleichung (2.31)

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}} i\mathrm{sgn}(t)e^{-i\mathrm{sgn}(t)\eta}\int_0^{b(\eta)} G(a(\eta)+is)\,ds \\ = & \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\int_0^t G(a(\eta)+is)\,ds - \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\int_{b(\eta)}^t G(a(\eta)+is)\,ds \\ = & \psi(t), \end{aligned}$$

da $\left\|\int_{b(\eta)}^t G(a(\eta)+is)\,ds\right\| \leq |t-b(\eta)|^{\frac{1}{q}}\|G\|_{H_p}$ und $\lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}|t-b(\eta)| = 0$. Der andere Summand $\int_0^{a(\eta)} G(s)\,ds$ in (2.33) konvergiert wegen $\|G(s)\| \leq K\mathrm{Re}(s)^{-1/p}$ gegen Null für $\eta \to \frac{\pi}{2}$. Die Gleichung (2.32) ist somit für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nachgewiesen. Da die Funktionen $\{\chi_t : t \in \mathbf{R}\}$ total in L_q sind, ist (i) eine direkte Konsequenz aus (2.32).

2. Schritt: Sei nun α ein beliebiger zwischen 0 und π gelegener Winkel und es sei $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Um das Ergebnis des ersten Schritts ausnützen zu können, wird die Funktion $F = A_{\alpha,\frac{\pi}{2}}G \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ mit integrierter Randfunktion $\phi \in V_p(X)$ betrachtet. Dann gilt für $0 < \eta < \alpha$ und $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} G_\eta(t) &= A_{\frac{\pi}{2},\alpha}F(|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta}) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/p}(|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta})^{\frac{1}{p}(\frac{\pi}{2\alpha}-1)}F\Big((|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta})^{\frac{\pi}{2\alpha}}\Big) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/p}(|t|e^{i\mathrm{sgn}(t)\eta})^{\frac{1}{p}(\frac{\pi}{2\alpha}-1)}F_{\eta\frac{\pi}{2\alpha}}(\mathrm{sgn}(t)|t|^{\frac{\pi}{2\alpha}}). \end{aligned}$$

Für $h : \mathbf{R} \to Y$, Y ein Banachraum, sei $Bh : \mathbf{R} \to Y$ definiert durch

$$Bh(t) = \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/p}|t|^{\frac{1}{p}(\frac{\pi}{2\alpha}-1)}h(\mathrm{sgn}(t)|t|^{\frac{\pi}{2\alpha}})$$

und $Ch : \mathbf{R} \to Y$ sei definiert durch

$$Ch(t) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{q}}|t|^{\frac{1}{q}(\frac{2\alpha}{\pi}-1)}h(\mathrm{sgn}(t)|t|^{\frac{2\alpha}{\pi}}).$$

Die so definierten Operatoren B und C sind isometrische Isomorphismen auf $L_p(Y)$. Weiter wird $d_\eta(t) = e^{i\mathrm{sgn}(t)\frac{\eta}{p}(\frac{\pi}{2\alpha}-1)}$ gesetzt. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für alle $h \in L_q$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)G_\eta(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)d_\eta(t)\,(BF_{\eta\frac{\pi}{2\alpha}})(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d_\eta(u)\,(Ch)(u)F_{\eta\frac{\pi}{2\alpha}}(u)\,du. \end{aligned}$$

Konvergiert nun η gegen α, so konvergiert $\eta\frac{\pi}{2\alpha}$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Folglich besagt der erste Schritt

$$\lim_{\eta\to\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)G_\eta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} d_\alpha(t)\,Ch(u)\,d\phi(u). \tag{2.34}$$

Da der Grenzwert $\lim_{\eta\to\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)G_\eta(t)\,dt$ für alle $h \in L_q$ existiert und da die L_p-Normen der Funktionen G_η gleichmäßig beschränkt sind, kann der Konvergenzsatz für

$L_p(X)$-Funktionen 1.3.27 angewendet werden und es folgt die Existenz eines $\psi \in V_p(X)$ mit

$$\lim_{\eta\to\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)G_\eta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,d\psi(t) \qquad (h \in L_q).$$

Somit ist die Behauptung (i) erwiesen. Insbesondere gilt für alle $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{\eta\to\alpha} \int_0^t G_\eta(u)\,du = \int_0^t d\psi(u) = \psi(t).$$

<u>3. Schritt:</u> Die Aussage (ii) wird zuerst für den Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bewiesen. Sei also $F \in H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ und F besitze eine Randwertefunktion $f \in L_p(X)$. Dann läßt sich F_θ für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} F_\theta(t) &= \mathcal{P}f(|t|e^{i\operatorname{sgn}(t)\theta}) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|\cos(\theta)}{(t\sin(\theta)-u)^2 + t^2\cos^2(\theta)} f(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\theta)}{(\sin(\theta)-u)^2 + \cos^2(\theta)} \operatorname{sgn}(t)f(tu)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{e^{i\theta}}(u)\operatorname{sgn}(t)f(tu)\,du. \end{aligned}$$

Für festes $u \in \mathbf{R}$ sei der Operator $S(u) : L_p(X) \to L_p(X)$ definiert durch $S(u)f(t) = \operatorname{sgn}(t)f(ut)$. Dann gilt

$$\|S(u)f\|_{L_p} = |u|^{-1/p}\|f\|_{L_p} \tag{2.35}$$

und somit ist die Abbildung, die jedem $u \in \mathbf{R}$ das Element $P_{e^{i\theta}}(u)S(u)f \in L_p(X)$ zuordnet, Bochner integrierbar, falls nachgewiesen wird, daß die Abbildung $u \mapsto S(u)f$ für jedes $f \in L_p(X)$ in allen von Null verschiedenen Punkten stetig und somit meßbar ist. Doch es ist leicht einzusehen, daß diese Abbildung in $u \neq 0$ stetig ist, falls f eine einfache Funktion ist. Genau wie beim Beweis der Stetigkeit der Funktion, die jeder reellen Zahl t die Translation $T(t)$ zuordnet (siehe Proposition 1.2.11), folgt hieraus die Stetigkeit dieser Abbildung für alle $f \in L_p(X)$ in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Proposition 1.2.12 besagt nun $F_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} P_{e^{i\theta}}(u)S(u)f\,du$, wobei dieses Integral als Bochner Integral in $L_p(X)$ aufzufassen ist. Somit ergibt sich

$$\|f - F_\theta\|_{L_p} \leq \int_{-\infty}^{\infty} P_{e^{i\theta}}(u)\|S(u)f - f\|_{L_p}\,du \tag{2.36}$$

und es ist zu zeigen, daß das Integral auf der rechten Seite dieser Ungleichung gegen Null konvergiert für $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und $g(u) = \|S(u)f - f\|_{L_p}$. Dann ist $g(u) \leq 1 + u^{-1/p}$ wegen (2.35) und $\|f - F_\theta\|_{L_p} \leq \mathcal{P}g(e^{i\theta})$ wegen (2.36). Zusätzlich wird die Funktion $g_\varepsilon = (1 - \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]})g$ betrachtet. Diese ist beschränkt und stetig im Punkt 1 und es gilt $g_\varepsilon(1) = g(1) = \|S(1)f - f\|_{L_p} = 0$. Aufgrund von Proposition 2.1.7 (i) gilt demnach

$$\lim_{z\to i} \mathcal{P}g_\varepsilon(z) = g_\varepsilon(1) = 0.$$

Es gibt folglich ein $\delta > 0$ so, daß für alle $z \in \mathbf{C}_+$ mit $|z - i| < \delta$ gilt $|\mathcal{P}g_\varepsilon| < \varepsilon$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|f - F_\theta\|_{L_p} &\leq |\mathcal{P}g_\varepsilon(z)| + |\mathcal{P}g_\varepsilon(z) - \mathcal{P}g(z)| \\ &\leq \varepsilon + |\mathcal{P}(g_\varepsilon - g)(z)|. \end{aligned}$$

Weil $g(t) - g_\varepsilon(t) = 0$ für $|t| \geq \varepsilon$ und $g(t) - g_\varepsilon(t) = g(t)$ für $|t| < \varepsilon$ ergibt sich darüberhinaus die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(g - g_\varepsilon)|(z) &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P_z(t) g(t)\, dt \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1 + t^{-1/p}\, dt \\ &\leq 2\varepsilon + q\varepsilon^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Also ist $\|f - F_\theta\|_{L_p} \leq 3\varepsilon + 2q\varepsilon^{\frac{1}{q}}$, falls nur θ so gewählt wird, daß $|e^{i\theta} - 1| < \delta$. Das beweist (ii) für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4. Schritt: Nun sei wieder $0 < \alpha < \pi$ beliebig. Für $G \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ sei $\psi \in V_p(X)$ gegeben mit

$$\lim_{\eta \to \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) G_\eta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, d\psi(t) \qquad (h \in L_q). \tag{2.37}$$

Weiter sei $g \in L_p(X)$ eine Radon-Nikodym Ableitung von ψ und $\phi \in V_p(X)$ sei die integrierte Randfunktion von $F = A_{\alpha,\frac{\pi}{2}} G \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$. Für alle $h, \widetilde{h} \in L_q$ gilt

$$d_{-\alpha} C^{-1} h = \widetilde{h} \Leftrightarrow h = d_\alpha C \widetilde{h}$$

und es folgt mit den Gleichungen (2.34) und (2.37)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, d\phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d_\alpha(t) C\widetilde{h}(t)\, d\phi(t) \\ &= \lim_{\eta \to \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(t) G_\eta(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(t)\, d\psi(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(t) g(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d_{-\alpha}(t) C^{-1} h(t) g(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) d_{-\alpha}(t) B^{-1} g(t)\, dt. \end{aligned}$$

Wird also $f = d_{-\alpha} B^{-1} g$ gesetzt, so ist $f \in L_p(X)$ und wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, d\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t)\, dt \qquad (h \in L_q)$$

ist f eine Radon-Nikodym Ableitung von ϕ. Nach Schritt 3 gilt folglich $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} F_\theta = f$. Da die Abbildung $B : L_p(X) \to L_p(X)$ stetig ist, folgt

$$\lim_{\eta \to \alpha} G_\eta = \lim_{\eta \to \alpha} (A_{\frac{\pi}{2},\alpha} F)_\eta = \lim_{\eta \to \alpha} d_\alpha B(F_{\eta \frac{\pi}{2\alpha}}) = d_\alpha B f = g,$$

was zu zeigen war. $\equiv$

Die soeben bewiesene Proposition hat eine für holomorphe L_p-Flüsse interessante Konsequenz, welche die Frage (2) auf Seite 114 beantwortet.

Satz 2.2.13 *Sei $1 < p \leq \infty$. Ist A Erzeuger eines α-holomorphen L_p-Flusses, so ist jeder der Operatoren $e^{i\alpha}A$ und $e^{-i\alpha}A$ Erzeuger eines L_p-Flusses.*

Beweis Sei A Erzeuger des α-holomorphen L_p-Flusses T. Die Definition der α-holomorphen L_p-Flüsse besagt, daß $T_\beta : X \to L_p(X)$ definiert durch $T_\beta x(t) = Tx(te^{i\beta})$ für alle β mit $|\beta| < \alpha$ ein L_p-Fluß ist, welcher von $e^{i\beta}A$ erzeugt wird. Dies wird im Verlauf des Beweises ohne weiteren Kommentar ausgenutzt.

Sei $x \in X$. Dann ist $Tx \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und als erstes wird gezeigt, daß $T : X \to H_p(\Sigma_\alpha, X)$ stetig ist. Da $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ ein Banachraum ist, genügt es, die Abgeschlossenheit von T nachzuweisen, um dann den Satz vom abgeschlossenen Graphen anzuwenden. Sei also (x_n) eine in X konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und die Bildfolge (Tx_n) sei in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ konvergent gegen die Funktion f. Da T als α-holomorpher L_p-Fluß insbesondere ein L_p-Fluß und somit stetig ist, gilt in jedem Fall $Tx_{|(0,\infty)} = f_{|(0,\infty)}$. Stimmen zwei im Sektor Σ_α holomorphe Funktionen jedoch auf der positiven reellen Halbachse überein, so stimmen sie im gesamten Sektor überein. Dies zeigt $Tx = f$ und beweist die Abgeschlossenheit von T.

Nach Satz 2.1.14 gibt es zu $Tx \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ eine eindeutig bestimmte integrierte Randfunktion $S_\alpha x \in V_p(X)$ mit $\|S_\alpha x\|_{V_p} \leq \|Tx\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}$ und

$$S_\alpha x(t) = \lim_{\beta\to\alpha} \int_0^t T_\beta x(u)\, du \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{2.38}$$

und es gilt $\|S_\alpha x\|_{V_p} \leq \|Tx\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}$. Für $x \in D(A)$ und $t > 0$ werde $T_\alpha x(t)$ definiert durch $T_\alpha x(t) = x + e^{i\alpha} S_\alpha Ax(t)$. Wird Lemma 1.5.8 mit Proposition 1.2.8 kombiniert, so folgt

$$\lim_{\beta\to\alpha} A \int_0^t T_\beta x(u)\, du = \lim_{\beta\to\alpha} \int_0^t T_\beta Ax(u)\, du = S_\alpha Ax(t)$$

und also

$$\lim_{\beta\to\alpha} T_\beta x(t) = \lim_{\beta\to\alpha} x + e^{i\beta} A \int_0^t T_\beta x(u)\, du = x + e^{i\alpha} S_\alpha Ax(t) = T_\alpha x(t).$$

Die Abgeschlossenheit von A liefert nun

$$T_\alpha x(t) = \lim_{\beta\to\alpha} x + e^{i\beta} A \int_0^t T_\beta x(u)\, du = x + e^{i\alpha} A \int_0^t T_\alpha x(u)\, du. \tag{2.39}$$

Dies zeigt, daß $T_\alpha x$ eine milde Lösung des (ACP) mit Operator $e^{i\alpha}A$ zum Anfangswert x ist. Sei $S_\beta x(t) = \int_0^t T_\beta x(u)\, du$. Dann folgt mit Gleichung (2.38) für alle $t > 0$

$$S_\alpha x = \lim_{\beta\to\alpha} \int_0^t T_\beta x(u)\, du = \int_0^t T_\alpha x(u)\, du.$$

Wegen $S_\alpha x \in V_p(X)$ ergibt sich mit Proposition 1.3.12 (i) $T_\alpha x \in L_p(X)$ und es gilt

$$\|T_\alpha x\|_{L_p} = \|S_\alpha x\|_{V_p} \leq \|Tx\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}.$$

Somit folgt aus der oben bewiesenen Beschränktheit des Operators $T : X \to H_p(\Sigma_\alpha, X)$ die Beschränktheit von $T_\alpha : D(A) \to L_p(X)$. Da $D(A)$ nach Voraussetzung dicht in X

ist, läßt sich T_α eindeutig stetig und linear fortsetzen zu einem auf dem gesamten Raum X definierten Operator $T_\alpha : X \to L_p(X)$. Dieser Operator ist der von $e^{i\alpha}A$ erzeugte L_p-Fluß, denn: Ist $x \in D(A)$, so besagt (2.39), daß Tx eine milde Lösung des (ACP) mit Operator $e^{i\alpha}A$ zum Anfangswert x ist. Sei nun $x \in X$ beliebig und (x_n) sei eine Folge in $D(A)$, welche gegen x konvergiert. Dann folgt für fast alle $t > 0$

$$T_\alpha x(t) = \lim_{n\to\infty} T_\alpha x_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_n + A\int_0^t T_\alpha x_n(u)\,du = x + A\int_0^t T_\alpha x(u)\,du.$$

Das Gleichheitszeichen zwischen dem dritten und vierten Term dieser Gleichungskette ist abermals gerechtfertigt wegen der Abgeschlossenheit von A, da die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \int_0^t T_\alpha x_n(u)\,du$ und $\lim_{n\to\infty} A\int_0^t T_\alpha x_n(u)\,du$ existieren und weil

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t T_\alpha x_n(u)\,du = \lim_{n\to\infty} S_\alpha x_n(t) = S_\alpha x(t)$$

für $0 < t < \infty$.

Der Nachweis, daß $e^{-i\alpha}A$ einen L_p-Fluß erzeugt, verläuft völlig analog. $\equiv$

2.2.3 Eine vektorwertige Variante des Satzes von Paley und Wiener

Der Satz von Paley und Wiener [30] besagt, daß die komplexe Laplace Transformierte einen Isomorphismus zwischen $L_2((0,\infty))$ und $H_2(\mathbf{C}_+)$ vermittelt. Der Beweis dieses Satzes macht intensiven Gebrauch von der Tatsache, daß die Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$ ein Isomorphismus ist. Wie bereits diskutiert wurde, existiert die Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}, X) \to L_2(\mathbf{R}, X)$ genau dann, wenn X isomorph zu einem Hilbertraum ist und in diesem Fall ist sie ebenfalls ein Isomorphismus auf $L_2(\mathbf{R}, X)$. Das ist die Aussage des Satzes von Kwapien [24]. Es ist also zu vermuten, daß das banachraumwertige Analogon des Paley-Wienerschen Satzes ebenfalls richtig ist, wenn X isomorph zu einem Hilbertraum ist. Wir haben bereits aus Kwapiens Satz gefolgert (siehe Proposition 2.1.30 mit $p = 2$), daß jede Funktion $F \in H_2(\mathbf{C}_+, X)$ die komplexe Laplace Transformation einer $L_2((0,\infty), X)$-Funktion ist, sofern X zu einem Hilbertraum isomorph ist, d.h. die Surjektivität der komplexen Laplace Transformation $\mathcal{L} : L_2((0,\infty), X) \to H_2(\mathbf{C}_+, X)$ wurde für diesen Fall bereits nachgewiesen. Darüber hinaus gilt auch die Umkehrung, d.h. falls die banachraumwertige Variante des Satzes von Paley und Wiener in X wahr ist, so ist X bereits isomorph zu einem Hilbertraum. Diese und weitere Überlegungen sind in der folgenden Proposition zusammengefaßt.

Proposition 2.2.14 *Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist isomorph zu einem Hilbertraum.*

(ii) *Die Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}, X) \to L_2(\mathbf{R}, X)$ ist ein Isomorphismus.*

(iii) *Die komplexe Laplace Transformation $\mathcal{L} : L_2((0,\infty), X) \to H_2(\mathbf{C}_+, X)$ ist ein Isomorphismus.*

(iv) *Die komplexe Laplace Transformation* $\mathcal{L} : L_2((0,\infty),X) \to H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}},X)$ *ist ein Isomorphismus.*

(v) *Sei* $0 < \alpha < \pi$. *Die Abbildung, die jedem* $f \in L_2((0,\infty),X)$ *die durch*

$$F(z) = z^{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2\alpha}-1)} \int_0^\infty e^{-z^{\frac{\pi}{2\alpha}}t} f(t)\, dt \tag{2.40}$$

definierte Funktion $F : \Sigma_\alpha \to X$ *zuordnet, ist ein Isomorphismus zwischen* $L_2((0,\infty),X)$ *und* $H_2(\Sigma_\alpha,X)$.

Beweis Zuerst werden die einfachen Äquivalenzen abgehakt. Die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(ii) ist die Aussage des Satzes von Kwapien und (iii)$\Leftrightarrow$(iv) ist eine Konsequenz aus der Isomorphie zwischen $H_2(\mathbf{C}_+,X)$ und $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}},X)$, die in Satz 2.2.9 bewiesen wurde. Zum Beweis von (iv)$\Leftrightarrow$(v) werde die komplexe Laplace Transformierte von $f \in L_2((0,\infty),X)$ mit G bezeichnet und F sei definiert wie in (2.40). Dann rechnet man leicht $F = A_{\frac{\pi}{2},\alpha}G$ nach. Somit ist die in (2.40) definierte Abbildung die Verknüpfung von $A_{\frac{\pi}{2},\alpha}$ mit der komplexen Laplace Transformation. Da $A_{\frac{\pi}{2},\alpha}$ ein Isomorphismus ist, ist diese Verknüpfung genau dann ein Isomorphismus, falls die komplexe Laplace Transformation ein Isomorphismus ist.

Zu zeigen bleibt die Äquivalenz (ii)$\Leftrightarrow$(iii). Zuerst wird angenommen, daß die Fourier Transformation ein Isomorphismus auf $L_2(\mathbf{R},X)$ mit Operatornorm M ist. Sei $f \in L_2((0,\infty),X)$. Dann ist für $z = a+ib \in \mathbf{C}_+$

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-ibt}\chi_{[0,\infty)}(t)e^{-at}f(t)\, dt = \mathcal{F}g_a(b),$$

wobei $g_a(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)e^{-at}f(t)$ gesetzt wird. Demnach ist $F_a = \mathcal{F}g_a$. Offensichtlich gilt $\|g_a\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2}$ für jedes $a > 0$ und folglich

$$\|F\|_{H_2(\mathbf{C}_+)} = \sup_{a>0} \|F_a\|_{L_2} = \sup_{a>0} \|\mathcal{F}g_a\|_{L_2} \le M \sup_{a>0} \|g_a\|_{L_2} \le M\|f\|_{L_2}.$$

Die Surjektivität der komplexen Laplace Transformation ist gerade die Aussage von Proposition 2.1.30 für $p = 2$. Somit ist die Implikation (ii)$\Rightarrow$(iii) bewiesen.

Umgekehrt gelte nun (iii) und es sei M die Operatornorm der komplexen Laplace Transformation. Es genügt, die Stetigkeit der Fourier Transformation auf $L_2(\mathbf{R},X)$ nachzuweisen. Daß $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist, folgt dann aus $\mathcal{F}^{-1}g(s) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}g(-s)$. Sei zuerst $g \in L_1 \cap L_2(\mathbf{R},X)$ eine Funktion, deren Träger in $(0,\infty)$ enthalten ist, und F bezeichne die komplexe Laplace Transformierte von g. Die einfache Abschätzung

$$\|F(z)\| \le \int_{-\infty}^\infty |e^{-zt}|\|g(t)\|\, dt \le \|g\|_{L_1} \qquad (\mathrm{Re}(z) \ge 0)$$

zeigt, daß $F : \overline{\mathbf{C}}_+ \to X$ eine auf der abgeschlossenen rechten Halbebene beschränkte Funktion ist. Zudem folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz für alle $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{z\to it} F(z) = \lim_{z\to it} \int_0^\infty e^{-zu} f(u)\, du = \int_0^\infty e^{-itu} f(u)\, du = F(it) = \mathcal{F}g(t).$$

Somit erweist sich F als stetig auf der abgeschlossenen rechten Halbebene. Zudem ist F nach Proposition 1.5.1 holomorph auf der rechten offenen Halbebene und folglich ist F die Poisson Transformierte ihrer Randfunktion $\mathcal{F}g$, wie in Proposition 2.1.9 gezeigt wurde. Folgerung 2.1.15 besagt also

$$\|\mathcal{F}g\|_{L_2} = \|F\|_{H_2(\mathbf{C}_+)} \leq M\|g\|_{L_2}.$$

Sei nun $g \in L_1 \cap L_2(\mathbf{R}, X)$ eine Funktion, deren Träger nach links beschränkt ist durch d. Wird $g_d(t) = g(t+d)$ $(0 < t < \infty)$ festgesetzt, so läßt sich die Fourier Transformierte von g darstellen als

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(s) &= \int_d^\infty e^{-ist} g(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-is(t+d)} g(t+d)\,dt \\ &= e^{-isd}\int_0^\infty e^{-ist} g_d(t)\,dt = e^{-isd}\mathcal{F}g_d(s).\end{aligned}$$

Da der Träger von g_d in $(0,\infty)$ enthalten ist, wurde bereits $\|\mathcal{F}g_d\|_{L_2} \leq M\|g_d\|_{L_2}$ nachgewiesen. Offensichtlich gilt ebenfalls $\|g_d\|_{L_2} = \|g\|_{L_2}$. Somit folgt $\|\mathcal{F}g\|_{L_2} \leq M\|g\|_{L_2}$. Bis hierher wurde also $\|\mathcal{F}g\|_{L_2} \leq M\|g\|_{L_2}$ für alle $g \in L_1 \cap L_2(\mathbf{R}, X)$, deren Träger nach links beschränkt ist, nachgewiesen. Doch die Menge dieser Funktionen ist aufgrund von Proposition 1.2.10 dicht in $L_2(\mathbf{R}, X)$, so daß die Fourier Transformation eine eindeutig bestimmte stetige und lineare Fortsetzung auf den ganzen Raum $L_2(\mathbf{R}, X)$ besitzt. $\equiv$

Zum Schluß dieses Paragraphen wird gezeigt, was vom Satz von Paley und Wiener übrigbleibt, wenn auf die Voraussetzung an X verzichtet wird, isomorph zu einem Hilbertraum zu sein. Diese Überlegung deutet zugleich den Grundgedanken des anschließenden letzten Abschnitts an.

Proposition 2.2.15 *Es gibt eine Konstante $C > 0$ so, daß für jeden Winkel $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ und jedes $f \in L_2(X)$ die komplexe Laplace Transformierte $\mathcal{L}f$ von f der Ungleichung*

$$\|\mathcal{L}f\|_{H_2(\Sigma_\beta)} \leq C\frac{\|f\|_{L_2}}{\cos(\beta)^{\frac{1}{2}}}$$

genügt.

Beweis Sei zuerst $X = \mathbf{C}$. Dann besagt (iv) der obigen Variante des Satzes von Paley und Wiener, daß eine Konstante C so existiert, daß für jedes $g \in L_2$ gilt

$$\|\mathcal{L}g\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq C\|g\|_{L_2}.$$

Insbesondere ist die L_2-Norm der reellen Laplace Transformierten von g beschränkt durch $C\|g\|_{L_2}$. Sei nun X ein beliebiger Banachraum und $f \in L_2(X)$. Dann gilt für $re^{i\theta} \in \Sigma_\beta$

$$\|\mathcal{L}f(re^{i\theta})\| \leq \int_0^\infty |e^{-re^{i\theta}t}|\|f(t)\|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-r\cos(\theta)t}\|f(t)\|\,dt.$$

Wird $g(t) = \|f(t)\|$ gesetzt, so gilt also $\|\mathcal{L}f(re^{i\theta})\| \le \mathcal{L}g(r\cos(\theta))$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}f\|_{H_2(\Sigma_\beta)} &= \sup_{|\theta|<\beta} \|(\mathcal{L}f)_\theta\|_{L_2} \le \sup_{|\theta|<\beta} \Big(\int_0^\infty \mathcal{L}g(r\cos(\theta))^2\,dr\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{|\theta|<\beta} \cos(\theta)^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}g\|_{L_2} \le \cos(\beta)^{-\frac{1}{2}} C\|g\|_{L_2} = C\frac{\|f\|_{L_2}}{\cos(\beta)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

$\equiv$

2.2.4 Dualität in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$

Ist $p < \infty$, so ist der Dualraum des Hardyraums $H_p(\mathbf{C}_+)$ isomorph zum Quotientenraum $L_q/H_q(\mathbf{C}_+)$. Diese Tatsache basiert auf der folgenden Überlegung: Sei Y ein Banachraum und Y_0 sei ein abgeschlossener Teilraum von Y. Dann ist aufgrund des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach die Abbildung $Y^* \to Y_0^*$, die jedem linearen Funktional auf Y seine Einschränkung auf Y_0 zuordnet, surjektiv. Desweiteren stimmt der Kern dieser Abbildung mit dem durch

$$Y_0^\perp = \{y^* \in Y^* : y^*_{|Y_0} = 0\}$$

definierten Teilraum von Y^* überein. Demnach ist Y_0^* isomorph zum Quotientenraum $Y^*/Y^\perp$.

Wird diese Überlegung angewendet auf den Raum $Y = L_p$ und $Y_0 = H_p(\mathbf{C}_+)$, so ergibt sich $H_p(\mathbf{C}_+)^* \simeq L_q/H_p(\mathbf{C}_+)^\perp$. Zudem gilt nach Garnett [17]:

Lemma 2.2.16 *Ist $1 \le p < \infty$, so ist $H_p(\mathbf{C}_+)^\perp = H_q(\mathbf{C}_+)$.*

Dies beweist die Isomorphie von $H_p(\mathbf{C}_+)$ und $L_q/H_q(\mathbf{C}_+)$. Sollen diese Überlegungen für die vektorwertigen Räume $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ entsprechend durchgeführt werden, so gibt es folgendes zu tun:

(1) Es ist ein Banachraum Y zu finden, in welchem $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ als abgeschlossener Teilraum enthalten ist.

(2) Der Dualraum dieses Banachraums Y muß bestimmt werden.

(3) Der Raum $H_p(\mathbf{C}_+, X)^\perp$ ist zu bestimmen.

Als Banachraum Y bietet sich der Raum $V_p(X)$ der Funktionen von beschränkter p-Variation an, in welchem $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ enthalten ist, wenn man eine Funktion mit ihren integrierten Randwerten identifiziert. Doch der Punkt (2) bereitet in diesem Fall einiges Kopfzerbrechen. Wie sieht der Dualraum von $V_p(X)$ aus? Auf diese Frage kann hier keine Antwort gegeben werden. Die Situation wird jedoch erheblich einfacher, wenn X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt. Denn dann besitzt jede $H_p(\mathbf{C}_+, X)$-Funktion laut Folgerung 2.1.15 eine Randwertefunktion in $L_p(X)$ und $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ kann als Teilraum von $L_p(X)$ aufgefaßt werden.

Zudem läßt sich der Dualraum von $L_p(X)$ für $p < \infty$ mit einem wohlbekannten Raum identifizieren, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 2.2.17 *Ist $1 \leq p < \infty$, so ist der Dualraum von $L_p(I, X)$ isometrisch isomorph zu $V_q(I, X^*)$.*

Beweis Zuerst gilt es, jeder Funktion $\phi : I \to X^*$ von beschränkter q-Variation ein lineares Funktional τ_ϕ auf $L_p(I, X)$ zuzuordnen. Ist $f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{[a_k, b_k)}$ eine einfache Funktion in $S(I, X)$, so wird

$$\tau_\phi(f) = \sum_{k=1}^n \langle \phi(b_k) - \phi(a_k), x_k \rangle$$

festgesetzt. Unter Zuhilfenahme von Proposition 1.3.5 und Lemma 1.3.10 kann dann

$$\begin{aligned} |\tau_\phi(f)| &\leq \sum_{k=1}^n \|\phi(b_k) - \phi(a_k)\| \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n (\mathrm{Var}_\phi(b_k) - \mathrm{Var}_\phi(a_k)) \|x_k\| \\ &= \int_I \|f\|(t) \, d\mathrm{Var}_\phi(t) \\ &\leq \|f\|_{L_p} \|\phi\|_{V_q} \end{aligned}$$

gefolgert werden. Da der Raum $S(I, X)$ in $L_p(I, X)$ dicht ist (siehe Proposition 1.2.10), kann τ_ϕ eindeutig linear und unter Beibehaltung der Norm auf den gesamten Raum $L_p(I, X)$ fortgesetzt werden. Auf diese Weise definiert ϕ ein lineares Funktional τ_ϕ auf $L_p(I, X)$ mit $\|\tau_\phi\| \leq \|\phi\|_{V_q}$.

Ist umgekehrt ein lineares Funktional τ auf $L_p(I, X)$ gegeben, so wird ein Operator $T : L_q(I) \to X^*$ wie folgt definiert: Für $f \in L_q(I)$ und $x \in X$ wird $Tf(x) = \tau(x \otimes f)$ festgesetzt. Hier wurde die Schreibweise $x \otimes f(t) = f(t)x$ $(t \in I)$ benutzt. Dieser Operator T ist offensichtlich stetig. Darüberhinaus ist seine Dinculeanu Norm beschränkt durch die Norm von τ. Um dies einzusehen sei $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k, b_k)}$ eine einfache Funktion mit $\|f\|_{L_p} = 1$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existieren $x_k \in U_X$ mit

$$|c_k| \|T\chi_{[a_k, b_k)}\| \leq |c_k| \langle T\chi_{[a_k, b_k)}, x_k \rangle + \frac{\varepsilon}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |c_k| \|T\chi_{[a_k, b_k)}\| &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n |c_k| \tau(x_k \otimes \chi_{[a_k, b_k)}) \\ &= \varepsilon + \tau\Big(\sum_{k=1}^n x_k \otimes |c_k| \chi_{[a_k, b_k)} \Big) \\ &\leq \varepsilon + \|\tau\| \Big\| \sum_{k=1}^n x_k \otimes |c_k| \chi_{[a_k, b_k)} \Big\|_{L_p} \\ &\leq \varepsilon + \|\tau\| \|f\|_{L_p} \\ &= \varepsilon + \|\tau\|. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|||T||| \leq \|\tau\|$.

Es gibt demnach (siehe Proposition 1.3.13) ein $\phi : I \to X^*$ dessen q-Variation von $\|\tau\|$ beschränkt ist und welches T repräsentiert. Zudem gilt für das durch ϕ auf $L_p(I, X)$ definierte lineare Funktional τ_ϕ

$$\tau_\phi(x \otimes \chi_{[a,b)}) = \langle \phi(b) - \phi(a), x \rangle = \langle T\chi_{[a,b)}, x \rangle = \tau(x \otimes \chi_{[a,b)}).$$

Da die Menge $\{x\chi_{[a,b)} : a, b \in I, a < b, x \in X\}$ total in $L_p(I, X)$ ist, müssen die linearen Funktionale τ und τ_ϕ auf $L_p(I, X)$ übereinstimmen. Die Abbildung, die jedem ϕ das lineare Funktional τ_ϕ zuordnet, ist demnach eine Isometrie zwischen $V_q(I, X)$ und $L_p(I, X)^*$, was zu zeigen war. $\equiv$

Es bereitet nun keine Schwierigkeit mehr, $V_q(X^*)/H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$ mit dem Dualraum von $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ zu identifizieren, falls X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt.

Proposition 2.2.18 *Sei $1 < p < \infty$ und X besitze die Radon-Nikodym Eigenschaft. Dann gilt $H_p(\mathbf{C}_+, X)^* \simeq V_q(X^*)/H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$.*

Beweis Besitzt der Banachraum X die Radon-Nikodym Eigenschaft, so existiert für jedes $F \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$ eine Randfunktion $F_0 \in L_p(X)$ und wir fassen im weiteren Verlauf dieses Beweises $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ als Teilraum von $L_p(X)$ auf, indem wir die Funktion $F \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$ mit ihrer Randfunktion $F_0 \in L_p(X)$ identifizieren. Da $V_q(X^*)$ bereits als Dualraum von $L_p(X)$ entlarvt ist, bleibt aufgrund der Vorüberlegungen nur noch $H_p(\mathbf{C}_+, X)^\perp = H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$ nachzuweisen. Hierbei wird ein $G^* \in H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$ wieder über seine Randfunktion $\psi \in V_q(X^*)$ mit einem Element in $H_p(\mathbf{C}_+, X)^*$ identifiziert.

Sei zuerst ein $G^* \in H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$ mit Randfunktion $\phi^* \in V_q(X^*)$ gegeben und τ_{ϕ^*} sei das durch ϕ^* auf $L_p(X)$ definierte lineare Funktional. Dann muß

$$\tau_{\phi^*}(F_0) = 0 \quad \text{für alle } F \in H_p(\mathbf{C}_+, X) \tag{2.41}$$

nachgewiesen werden. Zuerst überlegt man sich, daß für alle $a > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle F_0(t), G_a^*(t) \rangle \, dt = 0. \tag{2.42}$$

Denn die Funktion $z \mapsto \langle F(z), G(a + z) \rangle$ ist holomorph in $\mathbf{C}_+$ nach Lemma 1.4.11. Zudem folgt aus der Hölderschen Ungleichung, daß diese Funktion in $H_1(\mathbf{C}_+)$ liegt. Außerdem ist die Funktion $t \mapsto \langle F_0(t), G_a(t) \rangle$ die Funktion der Randwerte dieser H_1-Funktion. Somit folgt die Gültigkeit von (2.42) aus Garnetts Lemma [17], II.3.7. Wenn also für alle $f \in L_p(X)$

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), G_a^*(t) \rangle \, dt = \tau_{\phi^*}(f) \tag{2.43}$$

nachgewiesen werden kann, so folgt (2.41), und $G^* \in H_p(\mathbf{C}_+, X)^\perp$ ist bewiesen. Aber diese Konvergenz gilt zumindest für alle Funktionen der Form $f = \sum_{k=1}^n x_k \otimes f_k$ mit $x_k \in X$ und $f_k \in L_p$, denn wegen Proposition 2.1.7 (iv) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), G_a^*(t) \rangle \, dt &= \lim_{a \to 0} \sum_{k=1}^n \langle x_k, \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) G_a^*(t) \, dt \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x_k, \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \, d\phi^*(t) \rangle. \end{aligned}$$

Die Familie $(G_a^*)_{a>0}$, aufgefaßt als Familie linearer Funktionale auf $L_p(X)$, konvergiert also punktweise gegen das lineare Funktional ϕ^* auf der dichten Teilmenge $X \otimes L_p$ von $L_p(X)$. Darüberhinaus ist diese Familie gleichmäßig normbeschränkt durch $\|G^*\|_{H_q}$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ergibt sich die zu beweisende Konvergenz (2.43) also für alle $f \in L_p(X)$. Insgesamt beweist dies $H_q(\mathbf{C}_+, X^*) \subseteq H_p(\mathbf{C}_+, X)^\perp$.

Sei nun umgekehrt $\phi^* \in H_p(\mathbf{C}_+, X)^\perp$ eine X^*-wertige Funktion von beschränkter q-Variation und $G^* \in h_q(\mathbf{C}_+, X^*)$ sei die harmonische Funktion, die ϕ^* als Funktion der Randwerte besitzt. Es gilt zu zeigen, daß G^* holomorph in $\mathbf{C}_+$ ist. Aufgrund von Proposition 1.4.8 reicht es nachzuweisen, daß für jedes $x \in X$ die durch $G_x^*(z) = \langle G^*(z), x\rangle$ definierte Funktion $G_x^* : \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$ holomorph ist, denn $X \subseteq X^{**}$ ist ein X^*-normierender Teilraum. Ist $f \in L_p$ Randfunktion einer H_p-Funktion und ist $x \in X$, so ist $\tau_{\phi^*}(x \otimes f) = 0$ nach Lemma 2.2.16. Nun überlegt man sich leicht

$$\tau_{\phi^*}(x \otimes f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\langle \phi^*(t), x\rangle.$$

Da die Abbildung $t \mapsto \langle \phi^*(t), x\rangle$ eine komplexwertige Funktion von beschränkter q-Variation ist, besitzt sie eine Radon-Nikodym Ableitung $g_x \in L_q$ und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_x(t)\, dt = \tau_\psi(x \otimes f) = 0.$$

Zudem ist g_x die Funktion der Randwerte von G_x. Dies zeigt $G_x \in H_p(\mathbf{C}_+)^\perp$. Doch nach Lemma 2.2.16 ist $H_p(\mathbf{C}_+)^\perp = H_q(\mathbf{C}_+)$. Somit liegt G_x in $H_q(\mathbf{C}_+)$. Insbesondere ist G_x eine in $\mathbf{C}_+$ holomorphe Funktion. $\equiv$

Da nun der Dualraum von $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ bestimmt ist, ist die entsprechende Arbeit auch für die Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ $(1 < p < \infty, 0 < \alpha < \pi)$ geleistet, denn diese sind isomorph zu $H_p(\mathbf{C}_+, X)$. Es gilt demnach $H_p(\Sigma_\alpha, X)^* \simeq V_q(X^*)/H_q(\mathbf{C}_+, X^*)$, falls X die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt. Doch es ist natürlich auch $H_p(\mathbf{C}_+, X^*)$ isomorph zu $H_p(\Sigma_\alpha, X^*)$ nach Lemma 2.2.2 und Satz 2.2.9. Demnach wurde gezeigt:

Folgerung 2.2.19 *Sei $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \pi$ und der Banachraum X besitze die Radon-Nikodym Eigenschaft. Dann ist $H_p(\Sigma_\alpha, X)^* \simeq V_q(X^*)/H_q(\Sigma_\alpha, X^*)$.*

Dieser Paragraph wird mit einer Charakterisierung der Hardyräume holomorpher Funktionen abgeschlossen, welche sich aus $H_p(\mathbf{C}_+)^\perp = H_q(\mathbf{C}_+)$ für $p < \infty$ ergibt.

Proposition 2.2.20 *Sei $1 < q \leq \infty$ und $\phi \in V_q(X)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\widetilde{\mathcal{P}}\phi \in H_q(\mathbf{C}_+, X)$.

(ii) *Für alle $g \in H_p(\mathbf{C}_+)$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, d\phi(t) = 0$.*

Beweis Für $x^* \in X^*$ bezeichne $f_{x^*} \in L_q$ die Radon-Nikodym Ableitung von $x^* \circ \phi$. Dann gilt nach Folgerung 1.4.9 und Lemma 2.2.16

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{P}}\phi \in H_q(\mathbf{C}_+, X) \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für alle } x^* \in X^* \text{ ist } x^* \circ \widetilde{\mathcal{P}}\phi \in H_q(\mathbf{C}_+) \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für alle } x^* \in X^* \text{ und alle } g \in H_p(\mathbf{C}_+) \text{ ist } \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_{x^*}(t)\, dt = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für alle } g \in H_p(\mathbf{C}_+, X) \text{ ist } \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, d\phi(t) = 0.
\end{aligned}$$

$\equiv$

2.3 Laplace Transformation holomorpher Funktionen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wann eine gegebene Funktion Laplace Transformierte einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion ist. Das bedeutet konkret: Gegeben sei ein zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegener Winkel α und eine Funktion $F : (0, \infty) \to X$. Welche Bedingungen an F sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ mit $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ für $0 < s < \infty$? Wir werden diese Frage nicht für den Fall $p = 1$ untersuchen. Den Grund dafür liefert das weiter unten folgende Beispiel 2.3.8. In diesem Abschnitt ist immer $p > 1$. Entsprechend gilt für die zu p konjugierte Zahl q immer $q < \infty$.

Eine erste notwendige Bedingung für F, Laplace Transformierte einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion zu sein, ist die holomorphe Fortsetzbarkeit von F auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Dies ist das Ergebnis des ersten kurzen Paragraphen dieses Abschnitts. Im zweiten Paragraphen geben wir eine Charakterisierung der Laplace Transformierten α-sektorieller holomorpher Funktionen, welche auf jedem echten Teilsektor von Σ_α beschränkt sind, und im dritten Paragraphen dieses Abschnitts wird ein entsprechendes Ergebnis für die Laplace Transformierten von $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen vorgestellt. Im vierten und letzten Paragraphen wird eine Vereinfachung des Hauptergebnisses 2.3.7 diskutiert.

2.3.1 Holomorphe Fortsetzbarkeit

In diesem Paragraphen wird der Nachweis geführt, daß sich die Laplace Transformierten von $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen holomorph auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ fortsetzen lassen. Zum Nachweis dieser holomorphen Fortsetzbarkeit sei an die folgenden Bezeichnungen erinnert:

Ist η ein zwischen $-\pi$ und π gelegener Winkel, so wird

$$\Gamma_\eta = (te^{i\eta} : 0 < t < \infty)$$

definiert. Weiter bezeichne

$$\Gamma_\eta(r, R) = (te^{i\eta} : r \le t \le R)$$

und $\Gamma_\eta(R, r) = -\Gamma_\eta(r, R)$. Bei dieser Schreibweise ist auch $R = \infty$ zugelassen und in diesem Fall bedeutet $\Gamma_\eta(r, \infty) = (te^{i\eta} : r \le t < \infty)$. Ist $r > 0$ und sind η und ϕ zwei zwischen $-\pi$ und π liegende Winkel mit $\eta < \phi$, so ist

$$\Delta_r(\eta, \phi) = (re^{i\theta} : \eta \le \theta \le \phi)$$

und $\Delta_r(\phi, \eta) = -\Delta_r(\eta, \phi)$.

Es sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ist $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$, so heißt jeder zwischen $-\alpha$ und α gelegene Winkel η, für den die Ungleichung $|\arg(z) + \eta| < \frac{\pi}{2}$ besteht, *α-zulässiger Winkel* für z. Sofern

Klarheit über den zugrunde liegenden Winkel α besteht, wird η kurz zulässiger Winkel für z genannt.

Sei $f : \Sigma_\alpha \to X$ eine holomorphe Funktion, welche auf Σ_α der Abschätzung

$$\|f(u)\| \leq \frac{K}{|u|^{1/p}} \tag{2.44}$$

mit einem $K > 0$ und einem $p > 1$ genügt. Ist $z = re^{i\phi} \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ und ist η ein α-zulässiger Winkel für z, so existiert das Integral

$$\mathcal{L}f(z,\eta) = \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu} f(u)\, du,$$

denn es gilt die Abschätzung

$$\Big\| \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu} f(u)\, dt \Big\| \leq \int_0^\infty e^{-|z| r \cos(\phi+\eta)} \|f(re^{i\eta})\|\, dr < \infty. \tag{2.45}$$

Bei dieser Abschätzung ist entscheidend, daß $\cos(\phi+\eta)$ positiv ist, was gerade dadurch erreicht wird, daß der Winkel η zulässig für z gewählt wird. Zudem muß η zwischen $-\alpha$ und α und liegen, damit der Pfad Γ_η im Definitionsbereich von f verläuft.

Über die Existenz des Integrals (2.45) hinaus gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.3.1 *Sei $f : \Sigma_\alpha \to X$ holomorph und f genüge der Abschätzung (2.44). Ist $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ und sind η_1 und η_2 zwei zulässige Winkel für z, so gilt $\mathcal{L}f(z,\eta_1) = \mathcal{L}f(z,\eta_2)$.*

Beweis Ohne die Allgemeinheit zu beschränken kann $\eta_1 < \eta_2$ angenommen werden. Zum einen ist

$$\mathcal{L}f(z,\eta_i) = \int_{\Gamma_{\eta_i}} e^{-zu} f(u)\, du = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_{\Gamma_{\eta_i}(r,R)} e^{-zu} f(u)\, du \qquad (i = 1,2)$$

und zum anderen gilt aufgrund des Satzes von Cauchy

$$\int_{\Gamma_{\eta_1}(r,R)} + \int_{\Delta_R(\eta_1,\eta_2)} e^{-zu} f(u)\, du = \int_{\Gamma_{\eta_2}(r,R)} + \int_{\Delta_r(\eta_1,\eta_2)} e^{-zu} f(u)\, du.$$

Die Behauptung folgt also, falls nachgewiesen wird, daß $\int_{\Delta_s(\eta_1,\eta_2)} e^{-zu} f(u)\, du$ sowohl für $s \to 0$ als für $s \to \infty$ gegen Null konvergiert. Sei $\phi = \max(|\arg(z) + \eta_1|, |\arg(z) + \eta_2|)$. Dann gilt für alle $\theta \in [\eta_1, \eta_2]$ die Ungleichung $0 < \cos(\phi) \leq \cos(\arg(z) + \theta)$. Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\Big\| \int_{\Delta_s(\eta_1,\eta_2)} e^{-zu} f(u)\, du \Big\| \leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} s e^{|z| s \cos(\arg(z)+\theta)} \|f(se^{i\theta})\|\, d\theta \leq K s^{1/q} (\eta_2 - \eta_1) e^{-|z| s \cos(\phi)}.$$

Wegen $1/q > 0$ konvergiert die rechte Seite dieser Ungleichung gegen Null für $s \to 0$ und $\cos(\phi) > 0$ bewirkt die Konvergenz der rechten Seite gegen Null für $s \to \infty$. $\equiv$

Da $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen laut Lemma 2.2.3 der Abschätzung (2.44) genügen, ergibt sich aus dem vorangegangenen Lemma 2.3.1 das folgende Lemma.

Lemma 2.3.2 *Sei $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Ist $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ und sind η_1 und η_2 zwei zulässige Winkel für z, so gilt $\mathcal{L}f(z, \eta_1) = \mathcal{L}f(z, \eta_2)$.*

Für jedes $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ existiert mindestens ein für z zulässiger Winkel η, und das vorangegangene Lemma ermöglicht die Festsetzung

$$\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}f(z, \eta) = \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu} f(u)\, du.$$

Auf diese Weise wird eine Funktion $\mathcal{L}f : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X$ definiert. Da die Bezeichnung $\mathcal{L}f$ bereits für die Laplace Transformierte von f benutzt wurde, muß sichergestellt werden, daß die beiden verschiedenen Definitionen auf der rechten Halbebene $\mathbf{C}_+$ dasselbe liefern. Dies ist der Fall, da 0 für jedes $z \in \mathbf{C}_+$ ein zulässiger Winkel ist und $\int_{\Gamma_0} e^{-zu} f(u)\, du = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$.

Nun sei η ein zwischen α und $-\alpha$ gelegener Winkel. Dann ist die Menge aller $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$, für die η ein zulässiger Winkel ist, gerade die um $-\eta$ gedrehte Halbebene $e^{-i\eta}\mathbf{C}_+$. Somit definiert $g_\eta(z) = \mathcal{L}f(z, \eta)$ eine Funktion $g_\eta : e^{-i\eta}\mathbf{C}_+ \to X$. Mit Proposition 1.4.13 folgt, daß g_η holomorph in der um $-\eta$ gedrehten Halbebene ist. Zudem stimmt g_η auf $e^{-i\eta}\mathbf{C}_+$ mit f überein. Also ist $\mathcal{L}f$ holomorph in der um $-\eta$ gedrehten Halbebene. Da η beliebig zwischen $-\alpha$ und α gewählt wurde, ist f folglich holomorph in der Vereinigung $\bigcup_{-\alpha<\eta<\alpha} e^{-i\eta}\mathbf{C}_+$. Doch diese Vereinigung ist nichts anderes als der gesamte Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Es wurde also bewiesen:

Proposition 2.3.3 *Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und es sei $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Dann besitzt die Laplace Transformierte von f eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$.*

Diese ersten Überlegungen zur Laplace Transformation α-sektorieller holomorpher Funktionen ermöglichen bereits die Beantwortung der anfangs des Abschnitts „Hardyräume sektorieller holomorpher Funktionen“ gestellten Frage (1).

Proposition 2.3.4 *Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und T ein L_p-Fluß. Dann sind gleichwertig:*

(i) *T ist α-holomorpher L_p-Fluß.*

(ii) *Für jedes $x \in X$ gilt $Tx \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$.*

Beweis Ein Blick auf die Definition α-holomorpher L_p-Flüsse zeigt, daß es bei der Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) nichts zu zeigen gibt. Es gelte also (ii). Sei $|\theta| < \alpha$. Dann ist θ für jedes $s > 0$ ein zulässiger Winkel. Da $R(e^{-i\theta}, A)x$ laut Proposition 1.5.7 mit der Laplace Transformierten von Tx an der Stelle $e^{-i\theta}s$ übereinstimmt, besagt Lemma 2.3.2

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} T_\theta x(t)\, dt &= e^{-i\theta} e^{i\theta} \int_0^\infty e^{e^{-i\theta} s e^{i\theta} t} Tx(e^{i\theta}t)\, dt \\
&= e^{-i\theta} (\mathcal{L}Tx)(e^{-i\theta}s, \theta) \\
&= e^{-i\theta} (\mathcal{L}Tx)(e^{-i\theta}s, 0) \\
&= e^{-i\theta} R(e^{-i\theta}s, A)x \\
&= R(s, e^{i\theta}A)x.
\end{aligned}$$

Folglich stimmt die Resolvente von $e^{i\theta}A$ auf $(0,\infty)$ mit der Laplace Transformierten von T_θ überein, was $e^{i\theta}A$ nach Proposition 1.5.7 als Erzeuger des L_p-Flusses T_θ entlarvt.

$\equiv$

Die holomorphe Fortsetzbarkeit einer Funktion F auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ ist notwendig für F, um Laplace Transformierte einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion zu sein. Öffensichtlich ist diese Bedingung jedoch nicht hinreichend. Eine notwendige und hinreichende Bedingung kann am einfachsten für den Fall $p = \infty$ gefunden werden.

2.3.2 Die Laplace Transformation in $H_\infty(\Sigma_\alpha, X)$

Der Titel dieses Paragraphen hält nicht ganz, was er verspricht. Denn charakterisiert werden nicht die Laplace Transformierten beschränkter α-sektorieller holomorpher Funktionen, sondern die Laplace Transformierten α-sektorieller holomorpher Funktionen, welche auf jedem echten Teilsektor beschränkt sind. Kurzum, es gilt der folgende Satz.

Satz 2.3.5 *Gegeben sei eine Funktion $\widetilde{F} : (0,\infty) \to X$. Dann sind gleichwertig:*

(i) *Es gibt eine α-sektorielle holomorphe Funktion $f : \Sigma_\alpha \to X$ mit*

$$\sup_{z\in\Sigma_\beta} \|f(z)\| < \infty \qquad \text{für alle } 0 < \beta < \alpha \tag{2.46}$$

und $\widetilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ für $0 < s < \infty$.

(ii) *Es gibt eine $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion $F : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X$ mit*

$$\sup_{z\in\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}} \|zF(z)\| < \infty \quad \text{für alle } 0 < \beta < \alpha \tag{2.47}$$

und $\widetilde{F}(s) = F(s)$ für $0 < s < \infty$.

Beweis <u>1. Schritt:</u> Es gelte (i), d.h. $\widetilde{F}$ ist Laplace Transformierte einer α-sektoriellen holomorphen Funktion f, welche auf jedem echten Teilsektor von Σ_α beschränkt ist. Sei $0 < \beta < \alpha$. Dann ist die komplexe Laplace Transformierte $F = \mathcal{L}f$ von f nach Proposition 2.3.3 eine holomorphe Fortsetzung der reellen Laplace Transformierten $\widetilde{F}$ auf den Sektor $\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$. Also besitzt $\widetilde{F}$ eine holomorphe Fortsetzung auf die Vereinigung $\bigcup_{0<\beta<\alpha} \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$. Doch die Vereinigung dieser Sektoren stimmt mit $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ überein. Somit ist die holomorphe Fortsetzbarkeit von $\widetilde{F}$ auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ erwiesen.

<u>2. Schritt:</u> Nachzuweisen bleibt die Ungleichung (2.47). Zur Abkürzung schreiben wir $k(\beta) = \sup_{z\in\Sigma_\beta} \|f(z)\|$ für $0 < \beta < \alpha$. Sei $z \in \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$. Da f auf jedem echten Teilsektor von Σ_α beschränkt ist, gilt $f \in H_\infty(\Sigma_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, X)$. Ist $\arg(z) < 0$, so wird $\eta = \frac{\alpha+3\beta}{4}$ gesetzt, und ist $\arg(z) > 0$, so wird $\eta = -\frac{\alpha+3\beta}{4}$ gewählt. In jedem Fall gilt für diese Wahl von η

$$|\eta| < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{und} \quad |\arg(z) + \eta| < \frac{\pi}{2} - \frac{(\alpha-\beta)}{4}$$

und somit ist η ein $\frac{\alpha+\beta}{2}$-zulässiger Winkel für z. Folglich kann $zF(z)$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
\|zF(z)\| &= \|z\mathcal{L}f(z,\eta)\| \\
&\leq |z| \int_0^\infty e^{-|z|r\cos(\arg(z)+\eta)} \|f(re^{i\eta})\|\,dr \\
&\leq \cos(\arg(z)+\eta)^{-1} k\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big) \\
&\leq \cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha-\beta}{4}\Big) k\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big) \\
&= \sin\Big(\frac{\alpha-\beta}{4}\Big) k\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Das beweist $\sup_{z\in\Sigma_\beta} \|zF(z)\| < \infty$.

<u>3. Schritt:</u> Nun gelte umgekehrt (ii) und es werde $K(\beta) = \sup_{z\in\Sigma_\beta} \|zF(z)\|$ gesetzt. Für $0 < r < R$ und $|\eta| < \pi$ wird der Pfad $\Omega(r,R,\eta)$ definiert durch

$$\Omega(r,R,\eta) = (\Gamma_{-\eta}(R,r), \Delta_r(-\eta,\eta), \Gamma_\eta(r,R))$$

und anstelle von $\Omega(r,\infty,\eta)$ wird $\Omega(r,\eta)$ geschrieben.

Ist $r > 0$, $z \in \Sigma_\alpha$ und ist η ein Winkel mit

$$|\eta| < \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad |\arg(z)+\eta|, |\arg(z)-\eta| > \frac{\pi}{2}, \tag{2.48}$$

so wird

$$f(z,r,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega(r,\eta)} e^{zu} F(u)\,du \tag{2.49}$$

festgesetzt. Die nächsten Schritte bestehen darin zu zeigen, daß das Integral in (2.49) existiert und sowohl von $r > 0$ als auch von η unabhängig ist. Gleichzeitig wird eine obere Schranke für die Norm dieses Integrals gewonnen.

Das Integral $\int_{\Delta_r(-\eta,\eta)} e^{zu}F(u)\,du$ existiert, weil Γ_2 ein endlicher Pfad ist. Wird $|\eta| < |\arg(z)| + \frac{\pi}{2}$ beachtet, so ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\Big\| \int_{\Delta_r(-\eta,\eta)} e^{zu}F(u)\,du \Big\| \leq \int_{-\eta}^{\eta} e^{|z|r\cos(\arg(z)+\theta)} r \|F(re^{i\theta})\|\,d\theta \leq 2\eta K(\eta). \tag{2.50}$$

Für das Integral über $\Gamma_\eta(r,\infty)$ gilt

$$\int_{\Gamma_\eta(r,\infty)} e^{zu}F(u)\,du = \int_r^\infty e^{zte^{i\eta}} e^{i\eta} F(te^{i\eta})\,dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung konvergiert absolut, wegen

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \Big\| e^{zte^{i\eta}} e^{i\eta} F(te^{i\eta}) \Big\|\,dt &\leq K(\eta) \int_r^\infty t^{-1} e^{|z|t\cos(\arg(z)+\eta)}\,dt \\
&\leq K(\eta) r^{-1} |z|^{-1} |\cos(\arg(z)+\eta)|^{-1} e^{|z|\cos(\arg(z)+\eta)r}
\end{aligned}$$

und es ergibt sich zusätzlich die Abschätzung

$$\Big\| \int_{\Gamma_\eta(r,\infty)} e^{zu}F(u)\,du \Big\| \leq K(\eta) r^{-1} |z|^{-1} |\cos(\arg(z)+\eta)|^{-1}. \tag{2.51}$$

Analog ergibt sich die Konvergenz des Integrals über den Pfad $\Gamma_{-\eta}(\infty, r)$ sowie die Abschätzung

$$\Big\| \int_{\Gamma_{-\eta}(\infty,r)} e^{zu} f(u)\, du \Big\| \leq K(\eta) r^{-1} |z|^{-1} |\cos(\arg(z) + \eta)|^{-1}. \tag{2.52}$$

Hierbei gilt es zu beachten, daß aufgrund der Wahl des Winkels η sowohl $\cos(\arg(z)+\eta)$ als auch $\cos(\arg(z) - \eta)$ negativ sind. Insgesamt ist also die Existenz des Integrals in (2.49) bestätigt.

Die Unabhängigkeit von $f(z, r, \eta)$ vom Radius $r > 0$ bei festem Winkel η folgt aufgrund des Satzes von Cauchy aus der Holomorphie von F auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$, da für zwei verschiedene Radien r_1 und r_2 die Pfade $\Omega(r_1, \eta)$ und $\Omega(r_2, \eta)$ sich nur durch einen geschlossenen Pfad im Inneren des Holomorphiegebietes von F unterscheiden.

Sei nun $r > 0$ fest und η_1, η_2 seien zwei Winkel, welche die Ungleichungen (2.48) erfüllen. Weiter wird o.B.d.A $\eta_2 < \eta_1$ angenommen. Wegen

$$f(z, r, \eta_i) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega(r,R,\eta_i)} e^{zu} f(u)\, du \qquad (i = 1, 2)$$

genügt es zu zeigen

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Omega(r,R,\eta_1)} - \int_{\Omega(r,R,\eta_2)} e^{zu} f(u)\, du = 0. \tag{2.53}$$

Für $R > r$ unterscheiden sich die Pfade $\Omega(r, R, \eta_1)$ und $\Omega(r, R, \eta_2)$ nur durch einen Pfad, welcher zusammengesetzt ist aus einem geschlossenen Pfad sowie den Pfaden $\Delta_R(-\eta_1, -\eta_2)$ und $\Delta_R(\eta_2, \eta_1)$. Folglich gilt aufgrund des Satzes von Cauchy

$$\int_{\Omega(r,R,\eta_1)} - \int_{\Omega(r,R,\eta_2)} e^{zu} f(u)\, du = \int_{\Delta_R(-\eta_1,-\eta_2)} + \int_{\Delta_R(\eta_2,\eta_1)} e^{zu} f(u)\, du.$$

Das Integral über $\Delta_R(\eta_2, \eta_1)$ genügt der Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{\Delta_R(\eta_1,\eta_2)} e^{zu} f(u)\, du \Big\| &\leq \int_{\eta_2}^{\eta_1} e^{|z|R\cos(\arg(z)+\theta)} \|F(Re^{i\theta})\|\, d\theta \\ &\leq R^{-1} \int_{\eta_2}^{\eta_1} \|RF(Re^{i\theta})\|\, d\theta \\ &\leq R^{-1}(\eta_1 - \eta_2) K\Big(\arg(z) + \frac{\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Der Wert auf der rechten Seite dieser Ungleichung konvergiert offensichtlich gegen 0 für $R \to \infty$ und folglich ist die Konvergenz des Integrals auf der linken Seite dieser Ungleichung gegen 0 für $R \to \infty$ erwiesen. Mit einer analogen Argumentation verifiziert man $\lim_{R\to\infty} \int_{\Delta_R(-\eta_1,-\eta_2)} e^{zu} f(u)\, du = 0$. Somit ist die Gültigkeit von (2.53) erwiesen und das Etappenziel $f(z, r, \eta_1) = f(z, r, \eta_2)$ ist erreicht.

Sei nun $z \in \Sigma_\alpha$ beliebig. Dann gibt es einen Winkel η, welcher die Bedingung (2.48) erfüllt und es wird

$$f(z) = f(z, r, \eta)$$

gesetzt, wobei $r > 0$ beliebig gewählt wird. Diese Festsetzung macht Sinn, da $f(z)$ nicht von der speziellen Wahl des Winkels η abhängt. Sei nun $0 < \beta < \alpha$. Dann ist

$\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ein zwischen α und β gelegener Winkel und man überlegt sich leicht, daß für alle $z \in \Sigma_\beta$ die Bedingung (2.48) erfüllt ist. Für $z \in \Sigma_\beta$ besitzt $f(z)$ demnach die Darstellung $f(z) = f(z, r, \eta)$, wobei $r > 0$ beliebig ist. Folglich sichert Proposition 1.4.13 die Holomorphie von f in Σ_β. Doch β war ein beliebiger zwischen 0 und α gelegener Winkel und demnach ist f holomorph in Σ_α.

4. Schritt: Als nächstes muß die Beschränktheit von f in Σ_β nachgewiesen werden. Ist $z \in \Sigma_\beta$, so gilt mit $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ die Darstellung $f(z) = f(z, |z|^{-1}, \eta)$. Daher kann $\|f(z)\|$ unter Einsatz der Ungleichungen (2.50),(2.51) und (2.52) abgeschätzt werden durch

$$\|f(z)\| \leq 2K(\eta)\Big(\sin\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^{-1} + \eta\Big).$$

5. Schritt: Schließlich bleibt zu zeigen, daß $\widetilde{F} = F_{|(0,\infty)}$ die komplexe Laplace Transformierte von f ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jede positive reelle Zahl s gilt $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$. Ist dies bewiesen, so stimmt die auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ holomorphe komplexe Laplace Transformation von f auf diesem Sektor mit der $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektoriellen holomorphen Funktion F überein, da die holomorphe Fortsetzung einer auf der positiven reellen Halbachse definierten Funktion auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ eindeutig ist. Sei $s > 0$. Dann wird ein beliebiger zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + \alpha$ liegender Winkel η und ein Radius r mit $0 < r < s$ gewählt. Dann ist die Bedingung (2.48) mit $z = s$ erfüllt und also ist $f(t) = f(t, r, \eta)$. Somit liefert der Satz von Fubini zusammen mit der Variante 2.2.5 der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega(r,\eta)} e^{tu} F(u)\, du dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega(r,\eta)} F(u) \int_0^\infty et(u-s)\, dt du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega(r,\eta)} \frac{F(u)}{s-u}\, du \\
&= F(s).
\end{aligned}$$

$\equiv$

Die Formulierung von Satz 2.3.5 wirft die Frage auf, ob die Aussage des Satzes richtig bleibt, wenn die Bedingung (2.46) durch

$$\sup_{z\in\Sigma_\alpha} \|f(z)\|$$

und die Bedingung (2.47) durch

$$\sup_{z\in\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}} \|zF(z)\|$$

ersetzt wird? In anderen Worten lautet die Frage: Ist die komplexe Laplace-Stieltjes Transformation $\widetilde{\mathcal{L}}$ definiert durch $\widetilde{\mathcal{L}}f(z) = z\mathcal{L}f(z)$ ein Isomorphismus von $H_\infty(\Sigma_\alpha, X)$ auf $H_\infty(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, X)$? Diese Frage selbst im skalaren Fall verneint werden, wie das folgenden Beispiel zeigt.

Beispiel 2.3.6 Sei α ein beliebiger zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegener Winkel und $f : \Sigma_\alpha \to \mathbf{C}$ sei definiert durch

$$f(z) = e^{-ze^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}} \qquad (z \in \Sigma_\alpha).$$

Offensichtlich ist f eine beschränkte α-sektorielle holomorphe Funktion. Die Laplace Transformierte von f läßt sich einfach berechnen, denn es ist für $s > 0$

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-te^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}}\, dt = \left(s + e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}\right)^{-1}.$$

Die eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung von $\mathcal{L}f$ auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ ist also gegeben durch $\mathcal{L}f(u) = \left(u + e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}\right)$ für $u \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Folglich hat $u\mathcal{L}f(u)$ eine Singularität an der Stelle $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \in \overline{\Sigma}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Dies beweist, daß die Laplace-Stieltjes Transformierte von f nicht beschränkt und holomorph auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ fortgesetzt werden kann.

2.3.3 Die Laplace Transformation in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$

In diesem Paragraphen wird das Pendant zu Satz 2.3.5 für $1 < p < \infty$ vorgestellt. Wie im Fall $p = \infty$ wird auch für $1 < p < \infty$ keine Charakterisierung derjenigen Funktionen angegeben, welche Laplace Transformierte von $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen sind, sondern bewiesen wird der folgende Satz.

Satz 2.3.7 *Sei $1 < p < \infty$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Für eine Funktion $\widetilde{F} : (0,\infty) \to X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt eine α-sektorielle holomorphe Funktion $f : \Sigma_\alpha \to X$ mit*

$$\sup_{|\theta|<\beta} \left(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p\, dt\right)^{1/p} < \infty \qquad \text{für alle } 0 < \beta < \alpha \tag{2.54}$$

und $\widetilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ für $0 < s < \infty$.

(ii) *Es gibt eine $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion $F : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X$ mit*

$$\sup_{|\theta|<\beta+\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \|t^{1-\frac{2}{p}} F(te^{i\theta})\|^p\, dt\right)^{1/p} < \infty \qquad \text{für alle } 0 < \beta < \alpha \tag{2.55}$$

und $\widetilde{F}(s) = F(s)$ für $0 < s < \infty$.

Der Beweis dieses Satzes erfordert einige Vorarbeiten. Zuvor geben wir jedoch ein einfaches Beispiel, welches belegt, daß Satz 2.3.7 im Fall $p = 1$ selbst für $X = \mathbf{C}$ falsch ist.

Beispiel 2.3.8 Es sei $f(z) = e^{-z}$. Offensichtlich ist $f \in H_1(\Sigma_\alpha)$ für alle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Winkel α. Zudem ist leicht einzusehen, daß die Laplace Transformierte von f die auf $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ holomorphe Funktion $F(z) = \frac{1}{z+1}$ ist. Offensichtlich liegt die Funktion, die jedem $z \in \Sigma_\beta$ den Wert $z^{-1}F(z)$ zuordnet, für keinen zwischen 0 und π gelegenen Winkel β in $H_1(\Sigma_\beta)$, denn es ist sogar $\int_0^\infty |t^{-1}F(t)|\, dt = \infty$.

Für den Rest dieses Paragraphen sei $1 < p < \infty$. Der Beweis von Satz 2.3.7 wird in die Beweise der folgenden fünf Aussagen aufgeteilt, welche den Schritten 1-5 aus dem Beweis von Satz 2.3.5 entsprechen, wo der Fall $p = \infty$ behandelt wurde.

(1) Erfüllt $\widetilde{F}$ die Bedingung (i), so kann $\widetilde{F}$ holomorph auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ fortgesetzt werden. Diese Aussage wurde bereits im ersten Paragraphen dieses Abschnitts bewiesen.

(2) Die $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Fortsetzung F von $\widetilde{F}$ erfüllt die Abschätzung (2.55). Dieser Beweis wird durch Lemma 2.3.11 (i) vorbereitet.

(3) Erfüllt $\widetilde{F}$ die Bedingung von Satz 2.3.7 (ii), so kann aus der $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektoriellen Funktion F, welche $\widetilde{F}$ fortsetzt, eindeutig eine α-sektorielle holomorphe Funktion f konstruiert werden.

(4) Die Funktion f genügt der Abschätzung (2.54). Dieser Beweis wird durch Lemma 2.3.11 (ii) vorbereitet.

(5) Die Funktion F ist die Laplace Transformierte von f. Der Beweis dieser Behauptung beruht auf der Variante 2.2.5 der Cauchyschen Integralformel.

Zunächst werden einige weitere Notationen benötigt. Im folgenden sind neben den Räumen $L_p(X)$ die Räume $L_p(\frac{dt}{t^2}, X)$ von Interesse. Der Raum $L_p(\frac{dt}{t^2}, X)$ besteht aus allen Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f : (0, \infty) \to X$, für welche die Norm

$$\|f\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} = \Big(\int_0^\infty \|f(t)\|^p \, \frac{dt}{t^2} \Big)^{1/p}$$

endlich ist. $L_p(\frac{dt}{t^2}, X)$ ist ein Banachraum, da durch die Festsetzung $Bf(t) = t^{-2/p} f(t)$ ein isometrischer Isomorphismus $B : L_p(\frac{dt}{t^2}, X) \to L_p(X)$ definiert wird. Weiter werde mit $H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ der Raum aller α-sektoriellen holomorphen Funktionen $f : \Sigma_\alpha \to X$ bezeichnet, welche

$$\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})} = \sup_{|\theta|<\alpha} \|f_\theta\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} = \sup_{|\theta|<\alpha} \Big(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p \, \frac{dt}{t^2} \Big)^{1/p} < \infty$$

erfüllen. Auch $H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ ist für jedes zwischen 0 und π gelegene α ein Banachraum. Denn die Abbildung, die jedem $f \in H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ die durch $F(z) = z^{-\frac{2}{p}} f(z)$ definierte Funktion $F \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ zuordnet, ist ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Und $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ ist laut Proposition 2.2.10 ein Banachraum. Die isometrische Isomorphie der Räume $H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und $H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ liefert auch die folgende Abschätzung für $H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$-Funktionen, welche der Abschätzung in Lemma 2.2.3 für $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktionen entspricht.

Lemma 2.3.9 *Es sei $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \pi$ und $f \in H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$. Dann gilt für alle $-\alpha < \theta < \alpha$ und $r > 0$*

$$\|f(re^{i\theta})\| \le \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{r^{1/p} \|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})}}{\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}}.$$

Beweis Ist $f \in H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$, so liegt die durch $g(z) = z^{\frac{p}{2}} f(z)$ definierte Funktion g in $H_p(\Sigma_\alpha, X)$, und die jeweiligen Normen stimmen überein. Somit ergibt sich aus Lemma 2.2.3 für $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$

$$\begin{aligned}\|f(z)\| &= r^{\frac{2}{p}} \|g(z)\| \\ &\leq r^{\frac{2}{p}} \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{\|g\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}}{r^{1/p} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}} = \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/p} \frac{r^{1/p} \|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})}}{\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}}.\end{aligned}$$

≡

Für $f \in L_p(X)$ und $z \in \mathbf{C}_+$ wird die *Laplace-Stieltjes Transformierte* $\widetilde{\mathcal{L}} f$ von f an der Stelle z definiert durch

$$\widetilde{\mathcal{L}} f(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Der Laplace-Stieltjes Transformation auf $L_p(X)$ wird die folgende Transformation $\widetilde{\mathcal{L}}_*$ auf $L_p(\frac{dt}{t^2}, X)$ zur Seite gestellt. Für $g \in L_p(\frac{dt}{t^2}, X)$ und $z \in \mathbf{C}_+$ wird festgesetzt

$$\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{g(t)}{t}\, dt. \tag{2.56}$$

Daß dieses Integral unter den angegebenen Voraussetzungen existiert, folgt aus der Hölderschen Ungleichung bezüglich des Maßes $\frac{dt}{t^2}$. Denn ist $p < \infty$, so ist $q > 1$ und somit folgt für $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}_+$

$$\int_0^\infty |te^{-zt}|^q \, \frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty t^{q-2} e^{-q\cos(\theta)t}\, dt < \infty,$$

weil $q - 2 > -1$ und $\cos(\theta) > 0$. Folglich ergibt sich mit der Bezeichnung $\tilde{e}_z(t) = te^{-zt}$

$$\int_0^\infty \|e^{-zt} \frac{f(t)}{t}\|\, dt \leq \Big\|e_z\Big\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})} \|f\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} < \infty$$

und somit existiert das Integral in (2.56) als Bochner Integral.

Das nachfolgende Lemma 2.3.11 wird mit Hilfe des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz in der Form bewiesen, wie sie z.B. in Garnett [17] zu finden ist.

Proposition 2.3.10 *Seien (M, μ) und (N, ν) Maßräume. Weiter sei T eine lineare Abbildung von $L_1(\mu) + L_\infty(\mu)$ in den Raum der ν-meßbaren Funktionen und es existieren Konstanten $A > 0$ und $B > 0$ so, daß gilt:*

(i) $\nu\{t : |Tf((t)| > \lambda\} \leq A \frac{\|f\|_{L_1(\mu)}}{\lambda}$ *für alle* $f \in L_1(\mu)$.

(ii) $\|Tf\|_{L_\infty(\nu)} \leq B \|f\|_{L_\infty(\mu)}$ *für alle* $f \in L_\infty(\mu)$.

Dann gibt es für jedes $1 < p < \infty$ eine nur von A, B und p abhängige Konstante $C(p)$ mit

$$\|Tf\|_{L_p} \leq C(p) \|f\|_{L_p} \qquad (f \in L_p(\mu)).$$

Lemma 2.3.11 *Für jedes $1 < p < \infty$ existiert eine Konstante $C(p)$ so, daß für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt:*

(i) *Für alle $f \in L_p(X)$ besteht die Ungleichung*

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}f\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} \leq \frac{C(p)}{\cos(\alpha)^{1/q}}\|f\|_{L_p}.$$

(ii) *Für alle $g \in L_q(\frac{dt}{t^2}, X)$ besteht die Ungleichung*

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_* g\|_{L_q} \leq \frac{C(p)}{\cos(\alpha)^{1/q}}\|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}.$$

Beweis (i) 1. Schritt: Zum Beweis von (i) wird zuerst der Interpolationssatz von Marcinkiewicz auf den Operator T definiert durch $Tf(s) = s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ angewandt. Dabei ist der Maßraum (M,μ) die positive reelle Halbachse versehen mit dem Lebesgue Maß und der Maßraum (N,ν) ist die positive reelle Halbachse versehen mit dem durch $\nu(E) = \int_E \frac{dt}{t^2}$ auf den Lebesgue meßbaren Mengen definierten Maß. Es ist sofort einzusehen, daß der Operator T eine lineare Abbildung von $L_1(\mu) + L_\infty(\mu)$ in den Raum der ν-meßbaren Funktionen ist. Nachzuprüfen bleibt, daß T die Bedingungen (i) und (ii) des Interpolationssatzes 2.3.10 erfüllt. Die Gültigkeit der Bedingung (ii) des Interpolationssatzes ist sofort einzusehen, denn für $f \in L_\infty(\mu)$ gilt

$$\|Tf\|_{L_\infty(\nu)} = \sup_{s\in(0,\infty)} s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \leq \|f\|_{L_\infty(\nu)}.$$

Sei $f \in L_1$ und es sei $\lambda > 0$. Die Menge E_λ werde definiert als $E_\lambda = \{r : |Tf(r) > \lambda\}$ und es sei $s \in E_\lambda$. Weil dann

$$|Tf(s)| \leq s\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \leq s\|f\|_{L_1}$$

gilt, kann $\lambda < |Tf(s)| \leq s\|f\|_{L_1}$ gefolgert werden. Somit ist $s > \frac{\lambda}{\|f\|_{L_1}}$. Wird mit F_λ die Menge $\{r : r > \frac{\lambda}{\|f\|_{L_1}}\}$ bezeichnet, so besagt die letzte Ungleichung $E_\lambda \subseteq F_\lambda$. Dies liefert die Ungleichung

$$\nu(E_\lambda) \leq \nu(F_\lambda) = \int_{\frac{\lambda}{\|f\|_{L_1}}}^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{\|f\|_{L_1}}{\lambda}.$$

Folglich erfüllt T auch die Bedingung (ii) des Interpolationssatzes. Demnach gibt es für jedes $1 < p \leq \infty$ eine Konstante $C(p)$ so, daß für alle $f \in L_p$ gilt

$$\|Tf\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} \leq C(p)\|f\|_{L_p}. \tag{2.57}$$

2. Schritt: Es sei nun $f \in L_p(X)$ und die Funktion $\|f\|$ sei auf der positiven reellen Halbachse definiert durch $\|f\|(t) = \|f(t)\|$. Dann ergibt sich für $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{L}}f(z)\| &\leq |z|\int_0^\infty |e^{-zt}|\|f(t)\|\,dt \\ &\leq r\int_0^\infty e^{-r\cos(\theta)t}\|f\|(t)\,dt = \cos(\theta)^{-1}(T\|f\|)(r\cos(\theta)).\end{aligned}$$

Dies ergibt wegen der Ungleichung (2.57) für $|\theta| < \alpha$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}f(re^{i\theta})\|^p \frac{dr}{r^2} &\leq \cos(\theta)^{-p} \int_0^\infty |(T\|f\|)(r\cos(\theta))|^p \frac{dr}{r^2} \\ &\leq \cos(\theta)^{1-p} \int_0^\infty |(T\|f\|)(u)|^p \frac{du}{u^2} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)^{p-1}} C(p)^p \|f\|_{L_p}^p.\end{aligned}$$

Wird auf beiden Seiten dieser Ungleichung die p-te Wurzel gezogen, so ergibt sich die Behauptung (i).

3. Schritt: Zum Beweis von (ii) wird zuerst gezeigt, daß der auf $L_q(\frac{dt}{t^2})$ durch $T^*f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt$ definierte Operator T^* der zu T duale Operator $T^* : L_q(\nu) \to L_q(\mu)$ ist. Um dies einzusehen wird $g \in L_q(\nu)$ und $f \in L_p(\mu)$ gewählt. Dann besagt der Satz von Fubini

$$\begin{aligned}(Tf,g) &= \int_0^\infty g(s)\cdot s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \frac{ds}{s^2} \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-st}\frac{g(s)}{s}\,dsdt = (f, T^*g).\end{aligned}$$

Da die Norm des dualen Operators T^* mit der Norm von T übereinstimmt, gilt also $\|T^*g\|_{L_q} \leq C(p)\|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}$.

4. Schritt: Dieser Schritt ist dem 2. Schritt sehr ähnlich. Sei $f \in L_q(\frac{dt}{t^2}, X)$ und es sei $z = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$. Dann

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_* f(z)\| \leq \int_0^\infty e^{-r\cos(\theta)t}\frac{\|f\|(t)}{t}\,dt = (T^*\|f\|)(r\cos(\theta)).$$

Also folgt für $|\theta| < \alpha$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}_* f(re^{i\theta})\|^q\,dr &\leq \int_0^\infty |(T^*\|f\|)(r\cos(\theta))|^q\,dr \\ &= \cos(\theta)^{-1}\int_0^\infty |T^*\|f\|(u)|^q\,du \leq \cos(\alpha)^{-1} C(p)^q \|f\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}^q.\end{aligned}$$

Nun ergibt sich (ii), wenn auf beiden Seiten dieser Ungleichung die q-te Wurzel gezogen wird. $\equiv$

Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ist $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$, so besitzt die komplexe Laplace Transformierte von f eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Dies wurde im ersten Paragraphen dieses Abschnitts gezeigt. Demnach besitzt auch die komplexe Laplace-Stieltjes Transformierte $\widetilde{\mathcal{L}}f$ jeder $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion f eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Mit einer sehr ähnlichen Argumentation zeigt man, daß für jedes $g \in H_q(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ die Funktion $\widetilde{\mathcal{L}}_* g$ eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ besitzt. Um dies einzusehen wird für jedes $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ und jeden α-zulässigen Winkel η für z definiert

$$\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z,\eta) = \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu}\frac{g(u)}{u}\,du.$$

Dieses Integral existiert unter den angegebenen Voraussetzungen, denn wird $h : \Sigma_\alpha \to X$ definiert durch $h(u) = g(u)/u$, so gilt

$$\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta) = \widetilde{\mathcal{L}} h(z, \eta).$$

Doch $\widetilde{\mathcal{L}} h(z, \eta)$ existiert aufgrund der Abschätzung 2.3.9, da $\|h(u)\|$ für $u = re^{i\theta} \in \Sigma_\alpha$ der Abschätzung

$$\|h(u)\| \le \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/p} \frac{r^{1/p} \|g\|_{H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})}}{\cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}} |z|^{-1} = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/p} \frac{\|g\|_{H_p(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})}}{r^{1/q} \cos(\frac{\pi}{2\alpha}\theta)^{1/p}} \tag{2.58}$$

genügt. Zudem hängt auch $\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta)$ nicht vom Winkel η ab, denn sind η_1 und η_2 zwei für z zulässige Winkel, so besagt Lemma 2.3.1

$$\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta_1) = \widetilde{\mathcal{L}} h(z, \eta_1) = \widetilde{\mathcal{L}} h(z, \eta_2) = \widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta_2).$$

Hier ist zu beachten, daß Lemma 2.3.1 wegen der Abschätzung 2.3.9 auf die Funktion angewendet werden kann. Dieses letzte Ergebnis wird in dem folgenden Lemma festgehalten.

Lemma 2.3.12 *Ist $z \in \Sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$ und sind η_1 und η_2 zwei zulässige Winkel für z, so gilt $\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta_1) = \widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta_2)$.*

Da $\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z, \eta)$ nicht vom speziell gewählten Winkel η abhängt, ist es möglich $\widetilde{\mathcal{L}}_* g$ auf den gesamten Sektor $\Sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$ fortzusetzen. Diese Fortsetzung wird wieder mit $\widetilde{\mathcal{L}}_* g$ bezeichnet. Auch hier sei erwähnt, daß $\widetilde{\mathcal{L}}_* f$ auf $\mathbf{C}_+$ mit der durch (2.56) definierten Funktion übereinstimmt.

Lemma 2.3.13 *Sei $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.*

(i) *Für alle $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ gilt die Abschätzung*

$$\|\widetilde{\mathcal{L}} f\|_{H_p(\Sigma_{\beta + \frac{\pi}{2}}, \frac{dt}{t^2})} \le \frac{C(p)}{\sin(\alpha - \beta)^{1/q}} \|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}.$$

(ii) *Für alle $g \in H_q(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ gilt die Abschätzung*

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_* g\|_{H_q(\Sigma_{\beta + \frac{\pi}{2}})} \le \frac{C(p)}{\sin(\alpha - \beta)^{1/q}} \|g\|_{H_q(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2})}.$$

Beweis (i) Sei $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$ und es sei $|\eta| < \alpha$. Mit Ω_η werde das Intervall $\Omega_\eta = (-\frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta) - \eta, \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) - \eta)$ bezeichnet. Dann ist η für alle $z = re^{i\theta}$ mit $\theta \in \Omega_\eta$ und $r > 0$ ein zulässiger Winkel. Somit besitzt $\widetilde{\mathcal{L}} f(z)$ für solche z die Darstellung

$$\widetilde{\mathcal{L}} f(z) = z \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu} f(u)\, du = re^{i(\theta + \eta)} \int_0^\infty e^{-rte^{i(\theta+\eta)}} f(te^{i\eta})\, dt. \tag{2.59}$$

Bezeichnet wieder f_η die durch $f_\eta(t) = f(te^{i\eta})$ auf $(0,\infty)$ definierte Funktion, so bedeutet Gleichung (2.59) gerade $\widetilde{\mathcal{L}}f(z) = \widetilde{\mathcal{L}}f_\eta(re^{i(\eta+\theta)})$. Aus Lemma 2.3.11 (i) folgt daher wegen $|\eta+\theta| < \frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}f(re^{i\theta})\|^p \frac{dr}{r^2} &= \int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}f_\eta(re^{i(\eta+\theta)})\|^p \frac{dr}{r^2} \leq \frac{C(p)^p}{\cos(\eta+\theta)^{p/q}}\|f_\eta\|_{L_p}^p \\ &\leq \frac{C(p)^p}{\cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta))^{p/q}}\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}^p = \frac{C(p)^p}{\sin(\alpha-\beta)^{p/q}}\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}^p.\end{aligned}$$

Nun ist aber $\bigcup_{|\eta|<\alpha}\Omega_\eta = (-\beta-\frac{\pi}{2}, \beta+\frac{\pi}{2})$, und somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{L}}f\|_{H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}},\frac{dt}{t^2})} &= \sup_{|\gamma|<\beta+\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}f(re^{i\gamma})\|^p \frac{dr}{r^2}\Big)^{1/p} \\ &= \sup_{|\eta|<\alpha}\sup_{\theta\in\Omega_\eta} \Big(\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}f(re^{i\gamma})\|^p \frac{dr}{r^2}\Big)^{1/p} \leq \frac{C(p)}{\sin(\alpha-\beta)^{1/q}}\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}.\end{aligned}$$

(ii) Der Beweis von (ii) ist dem von (i) sehr ähnlich. Es sei $g \in H_q(\Sigma_\alpha, \frac{dt}{t^2}, X)$ und $|\eta| < \alpha$. Ist $z = re^{i\theta}$ mit $\theta \in \Omega_\eta$ und $r > 0$, so ergibt sich für $\widetilde{\mathcal{L}}_*g(z)$ die Darstellung

$$\widetilde{\mathcal{L}}_*g(z) = \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu}\frac{g(u)}{u}\,du = \int_0^\infty e^{-rte^{i(\eta+\theta)}}\frac{g(te^{i\eta})}{t}\,dt.$$

Diese Gleichung besagt $\widetilde{\mathcal{L}}_*g(re^{i\theta}) = \widetilde{\mathcal{L}}_*g_\eta(re^{i(\eta+\theta)})$. Somit folgt aus Lemma 2.3.11 (ii)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}_*g(re^{i\theta})\|^q\,dr &= \int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}_*g_\eta(re^{i(\eta+\theta)})\|^q\,dr \leq \frac{C(p)^q}{\cos(\eta+\theta)}\|g_\eta\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})} \\ &\leq \frac{C(p)^q}{\cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta))}\|g\|_{H_q(\Sigma_\alpha,\frac{dt}{t^2})} = \frac{C(p)^q}{\sin(\alpha-\beta)}\|g\|_{H_q(\Sigma_\alpha,\frac{dt}{t^2})}.\end{aligned}$$

Wegen $\bigcup_{|\eta|<\alpha}\Omega_\eta = (-\beta-\frac{\pi}{2}, \beta+\frac{\pi}{2})$ folgt also

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{L}}_*g\|_{H_q(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}})} &= \sup_{|\gamma|<\beta+\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}_*g(re^{i\gamma})\|^q\,dr\Big)^{1/q} \\ &= \sup_{|\eta|<\alpha}\sup_{\theta\in\Omega_\eta} \Big(\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}}_*g(re^{i\gamma})\|^q\,dr\Big)^{1/q} \leq \frac{C(p)}{\sin(\alpha-\beta)^{1/q}}\|g\|_{H_q(\Sigma_\alpha,\frac{dt}{t^2})}.\end{aligned}$$

$\equiv$

Die Vorbereitungen zum Beweis des zentralen Satzes 2.3.7 dieses Paragraphen sind nun abgeschlossen.

Beweis (von Satz 2.3.7) Zuerst wird die Implikation (i)$\Rightarrow$ (ii) bewiesen. Sei also $\widetilde{F} : (0,\infty) \to X$ die Laplace Transformierte der α-sektoriellen holomorphen Funktion f und für alle $0 < \beta < \alpha$ gelte $\sup_{|\theta|<\beta}\big(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p\,dt\big)^{1/p} < \infty$.

<u>1. Schritt:</u> Da f die Bedingung (2.54) erfüllt, gilt $f_{|\Sigma_\beta} \in H_p(\Sigma_\beta, X)$ für alle $0 < \beta < \alpha$. Nach Proposition 2.3.3 besitzt die Laplace Transformierte von f eine eindeutig

bestimmte holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$. Also läßt sich die Laplace Transformierte eindeutig fortsetzen zu einer holomorphen Funktion F auf der Vereinigung $\bigcup_{0<\beta<\alpha} \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}} = \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Diese $(\alpha+\frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion F setzt $\widetilde{F}$ fort.

<u>2. Schritt:</u> Ist $0 < \beta < \alpha$, so wird ein beliebiger echt zwischen β und α gelegener Winkel γ gewählt. Dann ist $f_{|\Sigma_\gamma} \in H_p(\Sigma_\gamma, X)$ nach Voraussetzung. Wegen $|\theta| < \beta + \frac{\pi}{2}$ und $\beta < \gamma < \alpha$ folgt somit aus Lemma 2.3.13 (i)

$$\int_0^\infty \|r^{1-\frac{2}{p}} F(re^{i\theta})\|^p \, dr = \int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{L}} f(re^{i\theta})\|^p \frac{dr}{r^2} \leq \frac{C(p)}{\sin(\gamma-\beta)^{1/q}} \|f\|_{H_p(\Sigma_\gamma)}.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nicht von θ abhängt, ist auch das Supremum über alle θ mit $|\theta| < \beta + \frac{\pi}{2}$ der linken Seite durch die rechte Seite beschränkt. Somit ist (ii) nachgewiesen.

<u>3. Schritt:</u> Es gelte nun (ii), d.h. es gibt eine $(\alpha+\frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion F, welche (2.55) erfüllt und $\widetilde{F}$ fortsetzt. Da F die Bedingung (2.55) erfüllt, liegt die durch $G(z) = zF(z)$ auf $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ definierte Funktion G für alle $0 < \beta < \alpha$ in $H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}, \frac{dt}{t^2})$. Zur Konstruktion von f werden die folgenden beiden Funktionen G_- und G_+ betrachtet: Für $u \in \Sigma_\alpha$ wird definiert

$$G_-(u) = G(-iu) \quad \text{und} \quad G_+(u) = G(iu).$$

Offensichtlich gilt für alle $0 < \beta < \alpha$

$$G_-, G_+ \in H_p(\Sigma_\beta, \frac{dt}{t^2}, X)$$

und die $H_p(\Sigma_\beta, \frac{dt}{t^2})$-Normen von G_- und G_+ sind beschränkt durch die $H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}, \frac{dt}{t^2})$-Norm von G. Sei $0 < \beta < \alpha$ und $z \in \Sigma_\beta$. Dann sind $-iz, iz \in \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ und somit kann definiert werden

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}(\widetilde{\mathcal{L}}_* G_+(-iz) - \widetilde{\mathcal{L}}_* G_-(iz)).$$

Die so definierte Funktion ist holomorph in Σ_β für alle $0 < \beta < \alpha$ und somit ist sie auch holomorph in Σ_α.

<u>4. Schritt:</u> Sei nun γ ein echt zwischen β und α gelegener Winkel. Dann kann aus dem zuletzt bewiesenen Lemma 2.3.13 (ii) gefolgert werden

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_p(\Sigma_\beta)} &\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\|\widetilde{\mathcal{L}}_* G_+\|_{H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}})} + \|\widetilde{\mathcal{L}}_* G_-\|_{H_p(\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}})}\Big) \\ &\leq \frac{1}{\pi}\frac{C(p)}{\sin(\gamma-\beta)^{1/q}} \|G\|_{H_p(\Sigma_{\gamma+\frac{\pi}{2}}, \frac{dt}{t^2})}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß f die Bedingung (2.54) erfüllt.

<u>5. Schritt:</u> Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß $\widetilde{F}$ die Laplace Transformierte von f ist. Dazu betrachten wir uns die Konstruktion von $f(t)$ für positive reelle t etwas genauer. Sei η ein beliebiger echt zwischen 0 und α gelegener Winkel. Dann ist η ein zulässiger Winkel für $-it$ und $-\eta$ ist ein zulässiger Winkel für it. Somit gilt

$$\widetilde{\mathcal{L}}_* G_+(-it) = \widetilde{\mathcal{L}}_* G_+(-it, \eta) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathcal{L}}_* G_-(it) = \widetilde{\mathcal{L}}_* G_-(it, -\eta)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\widetilde{\mathcal{L}}_* G_+(-it) - \widetilde{\mathcal{L}}_* G_-(it)\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\Gamma_\eta} e^{-(-it)u}\frac{G_+(u)}{u}\,du - \int_{\Gamma_{-\eta}} e^{-(it)u}\frac{G_-(u)}{u}\,du\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\eta+\frac{\pi}{2}}} + \int_{-\Gamma_{-\eta-\frac{\pi}{2}}} e^{tu}F(u)\,du. \end{aligned}$$

Nun bezeichne wieder $\widetilde{\Gamma}_\eta$ den zusammengesetzten Pfad $(-\Gamma_{-\eta-\frac{\pi}{2}}, \Gamma_{\eta+\frac{\pi}{2}})$. Der Satz von Fubini zusammen mit der Variante 2.2.5 der Cauchyschen Integralformel ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-st}\int_{\widetilde{\Gamma}_\eta} e^{tu}F(u)\,du\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_\eta} F(u)\int_0^\infty e^{-t(s-u)}\,dt\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_\eta}\frac{F(u)}{s-u}\,du = F(s), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ≡

Es schließt sich nun die obligatorische Folgerung für L_p-Flüsse des soeben bewiesenen Satzes an. Diese Folgerung beantwortet die anfangs dieses Abschnitts gestellte Frage (3).

Satz 2.3.14 *Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und A ein abgeschlossener dicht definierter Operator auf X. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für jeden Winkel $0 < \beta < \alpha$ erzeugt A einen β-holomorphen L_p-Fluß.*

(ii) *Der Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ ist in der Resolventenmenge von A enthalten und für alle $0 < \beta < \alpha$ sowie $x \in X$ gilt*

$$\sup_{|\theta|<\beta}\Big(\int_0^\infty \|t^{1-2/p}R(te^{i\theta}, A)x\|^p\,dt\Big)^{1/p} < \infty.$$

Beweis Es gelte (i). Zuerst ist $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \subseteq \rho(A)$ nachzuweisen. Sei also $z \in \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Dann gibt es einen Winkel θ mit $|\theta| < \alpha$ so, daß $e^{i\theta}z$ in der rechten Halbebene $\mathbf{C}_+$ liegt. Die Definition holomorpher L_p-Flüsse besagt, daß $e^{i\theta}A$ einen L_p-Fluß erzeugt und somit enthält die Resolventenmenge von $e^{i\theta}A$ laut Proposition 1.5.7 die rechte Halbebene $\mathbf{C}_+$. Folglich existiert

$$e^{i\theta}R(e^{i\theta}z, e^{i\theta}A) = R(z, A).$$

Weiter ist aus der Definition holomorpher L_p-Flüsse 1.5.9 bekannt,

$$Tx \in H_p(\Sigma_\beta, X) \qquad \text{für alle } 0 < \beta < \alpha.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}(Tx)$ nach Satz 2.3.7 eine $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion. Diese Funktion stimmt auf dem gesamten Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ mit auf x angewendeten Resolvente von A überein, denn laut Proposition 1.5.7 stimmen diese beiden Funktionen auf der positiven reellen Halbachse überein. Doch zwei $(\alpha+\frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktionen, die auf $(0,\infty)$ gleich sind, stimmen auf dem gesamten Sektor $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ überein . Somit folgt (ii) aus Satz 2.3.7.

Nun werde (ii) vorausgesetzt. Dann gibt es nach Satz 2.3.7 für jedes $x \in X$ eine α-sektorielle holomorphe Funktion Tx mit $\mathcal{L}Tx(s) = R(s,A)x$. Folglich ist T wegen Proposition 1.5.7 der von A erzeugte L_p-Fluß. Zudem liegt Tx für jeden Winkel $0 < \beta < \alpha$ in $H_p(\Sigma_\beta, X)$. Diese Eigenschaften genügen laut Proposition 2.3.4 bereits, um T als β-holomorphen L_p-Fluß zu entlarven. $\equiv$

2.3.4 Banachräume mit Fourier-Stieltjes Typ

Es ist eine natürliche Frage, unter welchen zusätzlichen Bedingungen an X der Satz 2.3.7 richtig bleibt, wenn in (i) die Bedingung (2.54) durch

$$\sup_{|\theta|<\alpha} \Big(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p \, dt \Big)^{1/p} < \infty \tag{2.60}$$

ersetzt wird und wenn in (ii) anstelle von (2.55) die Bedingung

$$\sup_{|\theta|<\alpha+\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\infty \|r^{1-2/p} F(te^{i\theta})\|^p \, dt \Big)^{1/p} < \infty \tag{2.61}$$

gesetzt wird. Wir untersuchen also in diesem Paragraphen die Frage, unter welchen Bedingungen an X die folgende „Vereinfachung" von Satz 2.3.7 wahr ist:

Sei $1 < p < \infty$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Für eine Funktion $\widetilde{F} : (0,\infty) \to X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Es gibt eine α-sektorielle holomorphe Funktion $f : \Sigma_\alpha \to X$ mit*

$$\sup_{|\theta|<\alpha} \Big(\int_0^\infty \|f(te^{i\theta})\|^p \, dt \Big)^{1/p} < \infty$$

und $\widetilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$ für $0 < s < \infty$.

(ii) *Es gibt eine $(\alpha+\frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion $F : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X$ mit*

$$\sup_{|\theta|<\alpha+\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\infty \|t^{1-\frac{2}{p}} F(te^{i\theta})\|^p \, dt \Big)^{1/p} < \infty$$

und $\widetilde{F}(s) = F(s)$ für $0 < s < \infty$.

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir diese Aussage kurz als „Vereinfachung von Satz 2.3.7" oder nach kürzer als „Vereinfachung". Wenn die Abhängigkeit der „Vereinfachung" von p betont werden soll, wird die Bezeichnung „p-Vereinfachung" benutzt.

Im Beispiel 2.3.6 wurde bereits gezeigt, daß die entsprechende „Vereinfachung" von Satz 2.3.5 für $p = \infty$ in keinem Fall richtig ist. Hier diskutieren wir zunächst die „Vereinfachung" für den Fall $p = 2$. In diesem Fall stimmt die Bedingung (2.61) mit

$$\sup_{|\theta|<\alpha+\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\infty \|F(re^{i\theta})\|^2 \, dr \Big)^{1/2} < \infty$$

überein und die „Vereinfachung“ besagt somit, daß die Laplace Transformation

$$\mathcal{L} : H_2(\Sigma_\alpha, X) \to H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, X)$$

ein Isomorphismus ist. Dies ist richtig, sofern X isomorph zu einem Hilbertraum ist, wie die folgende Proposition bestätigt.

Proposition 2.3.15 *Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und X sei isomorph zu einem Hilbertraum. Dann ist die Laplace Transformation $\mathcal{L} : H_2(\Sigma_\alpha, X) \to H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, X)$ ein Isomorphismus.*

Beweis Der Beweis dieser Proposition beruht darauf, daß die Laplace Transformation ein Isomorphismus von $L_2((0,\infty), X)$ auf $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ ist, sofern X zu einem Hilbertraum isomorph ist. Dies wurde in Proposition 2.2.14 bewiesen. Wir fixieren deshalb zu Beginn des Beweises $M > 0$ mit

$$M^{-1}\|g\|_{L_2} \leq \|\mathcal{L}g\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq M\|g\|_{L_2} \qquad (g \in L_2((0,\infty), X)).$$

Sei zuerst $f \in H_2(\Sigma_\alpha, X)$. Dann ist $\mathcal{L}f : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X$ eine $(\alpha + \frac{\pi}{2})$-sektorielle holomorphe Funktion laut Proposition 2.3.3 und es bleibt nur noch

$$\sup_{|\theta|<\alpha+\frac{\pi}{2}} \|(\mathcal{L}f)_\theta\|_{L_2} < \infty$$

nachzuweisen. Sei also $|\theta| < \alpha + \frac{\pi}{2}$. Dann gibt es einen Winkel η mit $|\eta| < \alpha$ so, daß η für jedes z der Form $z = re^{i\theta}$ mit $r > 0$ ein zulässiger Winkel ist. Folglich gilt

$$\mathcal{L}f(re^{i\theta}) = \mathcal{L}f(re^{i\theta}, \eta) = \int_{\Gamma_\eta} e^{re^{i\theta}u} f(u)\,du = e^{i\eta}\int_0^\infty e^{re^{i(\theta+\eta)}t} f_\eta(t)\,dt = e^{i\eta}\mathcal{L}f_\eta(re^{i(\theta+\eta)}).$$

Es gilt $|\theta + \eta| < \frac{\pi}{2}$, denn η ist ein für $re^{i\theta}$ zulässiger Winkel, und folglich

$$\|\mathcal{L}f_\theta\|_{L_2} \leq \|\mathcal{L}f_\eta\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq M\|f_\eta\|_{L_2} \leq M\|f\|_{H_2(\Sigma_\alpha)}.$$

Sei nun $F \in H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, X)$. Dann ist aus Satz 2.3.7 bereits bekannt, daß eine α-sektorielle holomorphe Funktion $f : \Sigma_\alpha \to X$ existiert mit $F = \mathcal{L}f$. Nachzuweisen bleibt nur

$$\sup_{|\theta|<\alpha} \|f_\theta\|_{L_2} < \infty.$$

Ist $|\eta| < \alpha$, so besitzt $F(z)$ für alle z aus der um $-\eta$ gedrehten rechten Halbebene $e^{-i\eta}\mathbf{C}_+$ die Darstellung

$$F(z) = \int_{\Gamma_\eta} e^{-zu} f(u)\,du = e^{i\eta}\int_0^\infty e^{-ze^{i\eta}t} f(te^{i\eta})\,dt = e^{i\eta}\mathcal{L}f_\eta(ze^{i\eta}).$$

Wird die Hilfsfunktion $H_\eta : \Sigma_{\frac{\pi}{2}} \to X$ definiert durch $H_\eta(z) = F(ze^{-i\eta})$, so ist $\|H_\eta\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq \|F\|_{H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}})}$ und für alle $z \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}}$ gilt

$$H_\eta(z) = F(ze^{-i\eta}) = \mathrm{e}^{i\eta}\mathcal{L}f_\eta(z)$$

und folglich
$$\|f_\eta\|_{L_2} \leq M\|H_\eta\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq M\|F\|_{H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}})}.$$

$\equiv$

In dem soeben geführten Beweis war die Isomorphie der Laplace Transformation von $L_2((0,\infty),X)$ auf $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}},X)$ von zentraler Bedeutung und diese Isomorphie beruht auf der Isomorphie der Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R},X) \to L_2(\mathbf{R},X)$ (siehe Proposition 2.2.14). Sollen Aussagen über die „Vereinfachung“ für $p \neq 2$ gemacht werden, so hilft die Fourier Transformation nicht weiter. Dies liegt daran, daß die Aussage der „Vereinfachung“ nur im Fall $p = 2$ äquivalent zur Isomorphie der Laplace Transformation $\mathcal{L} : H_2(\Sigma_\alpha,X) \to H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}},X)$ ist. Im Fall $p \neq 2$ tritt an die Stelle der Laplace Transformation die Laplace-Stieltjes Transformation und die Stelle der Fourier Transformation die Fourier-Stieltjes Transformation.

Es sei daran erinnert, daß die Fourier Transformation $\mathcal{F} : L_1(\mathbf{R},X) \to C(\mathbf{R},X)$ definiert ist durch
$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)\,dt.$$
Entsprechend wird die *Fourier-Stieltjes Transformation* $\tilde{\mathcal{F}} : L_1(\mathbf{R},X) \to C(\mathbf{R},X)$ durch
$$\tilde{\mathcal{F}}f(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)\,dt$$
definiert.

Definition 2.3.16 Sei $1 \leq p \leq \infty$. Ein Banachraum X besitzt *Fourier-Stieltjes Typ* (p), falls die Fourier-Stieltjes Transformation $\tilde{\mathcal{L}}F : L_1(\mathbf{R},X) \cap L_p(\mathbf{R},X) \to C(\mathbf{R},X)$ stetig fortsetzbar ist zu einem Operator
$$\tilde{\mathcal{L}} : L_p(\mathbf{R},X) \to L_p\Big(\mathbf{R},\frac{dt}{t^2},X\Big).$$

Die bisherigen Überlegungen zeigen, daß X genau dann Fourier-Stieltjes Typ (2) besitzt, falls X Fourier Typ (2) besitzt und dies ist nach Kwapiens Satz [24] genau dann der Fall, wenn X isomorph zu einem Hilbertraum ist. Im Fall $p = 1$ ist die Situation eine völlig andere. Während jeder Banachraum Fourier Typ (1) besitzt, besitzt kein Banachraum Fourier-Stieltjes Typ (1). Dies wird am Beispiel der L_1-Funktion f, definiert durch $f(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)e^{-t}$, sofort klar. Denn die Fourier-Stieltjes Transformierte dieser Funktion ist $\tilde{\mathcal{F}}f(s) = \frac{s}{1+is}$ und somit liegt $\tilde{\mathcal{F}}f$ nicht in $L_1(\mathbf{R},\frac{dt}{t^2})$.

Doch der Beweis von Lemma 2.3.11 (i) kann nachgemacht werden um zu zeigen, daß die Fourier-Stieltjes Transformation die folgende Bedingung erfüllt.

Proposition 2.3.17 *Für jedes $f \in L_1(\mathbf{R},X)$ und $\lambda > 0$ gilt*
$$\nu\{s \in \mathbf{R} : \|\tilde{\mathcal{F}}f(s)\| > \lambda\} < \frac{\|f\|_{L_1}}{\lambda},$$
wobei ν das durch $\nu(E) = \int_E \frac{dt}{t^2}$ definierte Maß auf den Lebesgue meßbaren Teilmengen der positiven reellen Halbachse ist.

Somit folgt mit der banachraumwertigen Variante des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz (siehe [12]) für $1 < p < 2$ die Stetigkeit der Fourier-Stieltjes Transformation

$$\widetilde{\mathcal{F}} : L_p(\mathbf{R}, X) \to L_p(\mathbf{R}, \frac{dt}{t^2}, X),$$

sofern X isomorph zu einem Hilbertraum ist. Völlig ungeklärt ist dagegen die Frage, ob es Banachräume mit Fourier-Stieltjes Typ (p) für $1 < p < 2$ gibt, die nicht isomorph zu einem Hilbertraum sind. Ebenfalls offen ist die Frage, ob für $2 < p < \infty$ Banachräume mit Fourier-Stieltjes Typ (p) existieren.

Besitzt der Banachraum X Fourier-Stieltjes Typ (p), so gilt die Implikation (i)⇒(ii) der „p-Vereinfachung". Dies ist eine der beiden Aussagen des folgenden Satzes 2.3.18. Die zweite Aussage dieses Satzes sichert die Implikation (ii)⇒(i) der „q-Vereinfachung" unter der Voraussetzung, daß X^* Fourier-Stieltjes Typ (p) besitzt.

Satz 2.3.18 *Sei* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(i) *Der Banachraum X besitze Fourier-Stieltjes Typ (p). Dann impliziert die Bedingung (i) der „p-Vereinfachung" die Bedingung (ii) der „p-Vereinfachung".*

(ii) *Der Dualraum X^* von X besitze Banach-Stieltjes Typ (p). Dann impliziert die Bedingung (ii) der „q-Vereinfachung" die Bedingung (i) der „q-Vereinfachung".*

Beweis Es sei $K > 0$ so gewählt, daß für alle $G \in H_p(\mathbf{C}_+, X)$ gilt

$$K^{-1}\|G\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \leq \|G\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \leq K\|G\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}. \tag{2.62}$$

Ein solches K existiert, da die Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ laut Satz 2.2.9 äquivalent sind.

(i) Da X Fourier-Stieltjes Typ (p) besitzt, ist die Fourier-Stieltjes Transformation $\widetilde{\mathcal{L}} : L_p(\mathbf{R}, X) \to L_p(\mathbf{R}, \frac{dt}{t^2}, X)$ stetig und ihre Norm sei M. Sei nun $f \in H_p(\Sigma_\alpha, X)$. Als nächstes werden viele Funktionen definiert. Sei $-\alpha < \theta < \alpha$ und $a \geq 0$. Dann wird festgesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
F : \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to X & \text{durch} & F(z) = z^{1-\frac{2}{p}}\mathcal{L}f(z) \\
H_\theta : \overline{\mathbf{C}}_+ \setminus \{0\} \to X & \text{durch} & H_\theta(z) = F(e^{i\theta}z) \\
H_{\theta,a} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to X & \text{durch} & H_{\theta,a}(b) = H_\theta(a+ib) \\
g_a : (0,\infty) \to X & \text{durch} & g_a(t) = e^{-at}f(t) \\
g_{\theta,a} : (0,\infty) \to X & \text{durch} & g_{\theta,a}(t) = e^{-at}f(e^{-i\theta}t) \\
h_{\theta,a} : \mathbf{R} \to X & \text{durch} & h_{\theta,a}(b) = e^{-2i\theta/p}(ib)^{-2/p}\, i\,\widetilde{\mathcal{F}}g_{\theta,a}(b)
\end{array}$$

Für $z = a + ib \in \mathbf{C}_+$ gilt

$$\begin{aligned}
H_{\theta,a}(b) &= (e^{i\theta}z)^{1-2/p}F(e^{i\theta}z) \\
&= (e^{i\theta}z)^{1-2/p}\int_{\Gamma_{-\theta}} e^{-e^{i\theta}zu}f(u)\,du \\
&= (e^{i\theta}z)^{1-2/p}e^{-i\theta}\int_0^\infty e^{-zt}f(e^{-i\theta}t)\,dt \\
&= e^{-2i\theta/p}z^{1-2/p}b^{-1}b\int_0^\infty e^{-ibt}e^{-at}f(e^{-i\theta}t)\,dt \\
&= e^{-2i\theta/p}(a+ib)^{1-2/p}b^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}g_{\theta,a}(b).
\end{aligned}$$

Da für $b \neq 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{a\to 0} H_{\theta,a}(b) = H_\theta(ib) \quad \text{und} \quad \lim_{a\to 0}(a+ib)^{1-2/p} b^{-1} = (ib)^{-2/p} i$$

existieren, folgt

$$H_\theta(ib) = e^{-2i\theta/p}(ib)^{-2/p} i \lim_{a\to 0} \widetilde{\mathcal{F}} g_{\theta,a}(b) = \lim_{a\to 0} h_{\theta,a}(b).$$

Weiter gilt $\lim_{a\to 0} g_{\theta,a} = g_{\theta,0}$ in der L_p-Norm. Da die Fourier-Stieltjes Transformation stetig, ist zieht dies die Konvergenz $\lim_{a\to 0} \widetilde{\mathcal{F}} g_{\theta,a} = \widetilde{\mathcal{F}} g_{\theta,0}$ bezüglich der $L_p(\frac{dt}{t^2})$-Norm nach sich. Folglich gilt $\lim_{a\to 0} h_{\theta,a} = h_{\theta,0}$ und diese Konvergenz erfolgt bezüglich der L_p-Norm. Andererseits gilt nach Proposition 2.1.7 $\lim_{a\to 0} H_{\theta,a} = H_{\theta,0}$ in der Norm in L_p. Insgesamt ergibt sich also $H_{\theta,0} = h_{\theta,0}$ und wir erhalten die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|H_\theta\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} &= \|H_{\theta,0}\|_{L_p} = \|h_\theta\|_{L_p} = \\ &= \|\widetilde{\mathcal{F}} g_{\theta,0}\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} \le M\|g_{\theta,0}\|_{L_p} \le M\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned} \|F\|_{H_p(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}})} &= \sup_{|\theta|<\alpha} \|H_\theta\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})} \\ &\le \sup_{|\theta|<\alpha} K\|H_\theta\|_{H_p(\mathbf{C}_+)} \\ &\le KM\|f\|_{H_p(\Sigma_\alpha)}. \end{aligned}$$

Somit ist der Beweis von (i) vollständig.

(ii) Da X^* Fourier-Stieltjes Typ (p) besitzt, ist die Fourier-Stieltjes Transformation $\widetilde{\mathcal{L}} : L_p(\mathbf{R}, X^*) \to L_p(\mathbf{R}, \frac{dt}{t^2}, X^*)$ stetig und ihre Norm sei M^*. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit des Operators $\widetilde{\mathcal{L}}_* : L_q((0,\infty), \frac{dt}{t^2}, X) \to H_q(\mathbf{C}_+, X)$. Es sei daran erinnert, daß gilt $\widetilde{\mathcal{L}}_* g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{g(t)}{t}\, dt$. Sei also $g \in L_q((0,\infty), \frac{dt}{t^2}, X)$ und es sei $G = \widetilde{\mathcal{L}}_* g$. Dann ist $G_a(b) = \int_0^\infty e^{-ibt} e^{-at} \frac{g(t)}{t}\, dt$ und es muß $\|G_a\|_{L_q} \le M^* \|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}$ nachgewiesen werden. Die Funktion G_a definiert einen Operator

$$T_a : S(0,\infty) \to X, \qquad \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)} \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \int_{a_k}^{b_k} G_a(b)\, db.$$

Von diesem Operator werden wir $|||T_a||| \le M^* \|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}$ nachweisen, wobei $S(0,\infty)$ mit der L_p-Norm versehen ist. Ist dieser Nachweis erbracht, so folgt die Stetigkeit von T_a und nach Proposition 1.3.13 ergibt sich

$$\|G_a\|_{L_q} = \|\mathcal{I} G_a\|_{V_q} = |||T_a||| \le M^* \|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}.$$

Sei also $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k,b_k)} \in S(0,\infty)$ mit $\|f\|_{L_p} = 1$. Es werden lineare Funktionale $x_1^*, \ldots, x_n^* \in U_{X^*}$ gewählt mit $\|T_a \chi_{[a_k,b_k)}\| = \langle x_k^*, T_a \chi_{[a_k,b_k)} \rangle$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \|T_a \chi_{[a_k,b_k)}\| = \sum_{k=1}^n |c_k| \langle x_k^*, \int_{a_k}^{b_k} G_a(b)\, dt \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} |c_k| \int_{a_k}^{b_k} \int_0^\infty e^{-ibt} e^{-at} \frac{(x_k^* \circ g)(t)}{t}\, dt\, db \\
&= \int_0^\infty \left\langle t \int_0^\infty e^{-ibt} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \chi_{[a_k,b_k)}(b) x_k^*\, db, g(t) \right\rangle \frac{dt}{t^2} \\
&= \int_0^\infty \langle \tilde{\mathcal{F}} h(t), g(t) \rangle \frac{dt}{t^2},
\end{aligned}$$

wobei $h = \sum_{k=1}^n |c_k| \chi_{[a_k,b_k)} x_k^*$ gesetzt wird. Nun ist aber $\|h\|_{L_p} = \|f\|_{L_p} = 1$ und also $\|\tilde{\mathcal{F}} h\|_{L_p(\frac{dt}{t^2})} \leq M^*$. Folglich ist

$$\int_0^\infty \langle \tilde{\mathcal{F}} h(t), g(t) \rangle \frac{dt}{t^2} \leq M^* \|g\|_{L_q(\frac{dt}{t^2})}.$$

Bis hierher wurde die Stetigkeit des Operators $\tilde{\mathcal{L}}_* : L_p((0,\infty), \frac{dt}{t^2}, X) \to H_p(\mathbf{C}_+, X)$ nachgewiesen. Wegen der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_p(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ ergibt sich also die Stetigkeit des Operators

$$\tilde{\mathcal{L}}_* : L_p((0,\infty), \frac{dt}{t^2}, X) \to H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X).$$

Ein Blick auf die Konstruktion der Funktion G_- und G_+ im Beweis von Satz 2.3.7 macht klar, daß aus dieser Stetigkeit die Behauptung (ii) folgt. $\equiv$

Das Ergebnis (ii) des Satzes 2.3.18 ermöglicht nun eine partielle Antwort auf die am Ende des ersten Kapitels gestellte Frage nach der Charakterisierung α-holomorpher L_q-Flüsse.

Folgerung 2.3.19 *Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf X und der Dualraum X^* von X habe Fourier-Stieltjes Typ (p). Ist $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ in der Resolventenmenge von A enthalten und liegt die durch $\rho_x(z) = z^{1-2/p} R(z,A)x$ definierte Funktion ρ_x für jedes $x \in X$ in $H_q(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, X)$, so erzeugt A einen α-holomorphen L_p-Fluß.*

Beweis Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die Funktion $R(z,A)x$ für jedes $x \in X$ die Laplace Transformierte einer $H_p(\Sigma_\alpha, X)$-Funktion laut Satz 2.3.18. Dies genügt nach Proposition 2.3.4 jedoch zum Nachweis, daß A Erzeuger eines α-holomorphen L_p-Flusses ist. $\equiv$

Bemerkung 2.3.20 Wie in Proposition 2.3.15 gezeigt wurde, kann mit Hilfe des Satzes von Paley und Wiener auf die Isomorphie der komplexen Laplace Transformation

$$\mathcal{L} : H_2(\Sigma_\alpha) \to H_2(\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}) \tag{2.63}$$

geschlossen werden. Genau dies taten Držbašjan und Martirosjan [16] in ihrem 1975 erschienenen Artikel „Theorems of Paley-Wiener and Müntz-Szász type“. Zum Nachweis der Isomorphie (2.63) unter Zuhilfenahme des Satzes von Paley und Wiener wird die

Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_2(\mathbf{C}_+)}$ und $\|\cdot\|_{H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})}$ benötigt. Diese Äquivalenz wurde von Držbašjan bereits in [15] bewiesen. Von dem Wissen um die Äquivalenz der Normen in den Räumen $H_2(\mathbf{C}_+)$ und $H_2(\Sigma_{\frac{\pi}{2}})$ skalarwertiger Funktionen, war es kein großer Schritt mehr zu der Vermutung, diese Äquivalenz sei richtig in den Räumen $H_p(\mathbf{C}_+, X)$ und $H_p(\Sigma_{\frac{\pi}{2}}, X)$ für alle $1 < p \leq \infty$ und alle Banachräume X (siehe Satz 2.2.9).

Völlig unabhängig von der Äquivalenz dieser Normen lassen sich die Hauptsätze 2.3.5 im Fall $p = \infty$ und 2.3.7 im Fall $1 < p < \infty$ beweisen. Satz 2.3.5 wurde erstmals 1979 von Sova [36] vorgestellt. In der Zwischenzeit wurde er einige Male neu bewiesen, so z.B. von Neubrander [28], Arendt, Hieber und Neubrander [2] oder Prüß [33]. Von Weis stammt der Gedanke, das Ergebnis aus Satz 2.3.5 für den Fall $p = \infty$ mit dem Ergebnis von Držbašjan und Martirosjan für den Fall $p = 2$ zu kombinieren, oder besser gesagt, zwischen diesen beiden Ergebnissen zu interpolieren. Dies sollte dann zu der Aussage von Satz 2.3.7 für $2 < p < \infty$ führen. Erfreulicherweise ließ sich diese Aussage sogar für alle $p > 1$ beweisen.

Literaturverzeichnis

[1] W. Arendt, Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, *Israel J. Math.* **59** (1987), 327-352.

[2] W. Arendt, M. Hieber und F. Neubrander, „The Laplace Transform in Banach Spaces and Evolution Equations“, Monograph in Vorbereitung.

[3] S. Axler, P. Bourdon und W. Ramsey, „Harmonic Function Theory “, Springer Verlag, New York, 1992.

[4] B. Bäumer und F. Neubrander, Laplace transform methods for evolution equations, *in* „Seminar Notes in Functional Analysis and Partial Differential Equations“, Louisina State University, Baton Rouge, 1994.

[5] J. Blasco, Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators, *Studia Math.* **86** (1987), 19-33.

[6] J. Blasco, Boundary values of functions in vectorvalued Hardy spaces and geometry of Banach spaces, *J. of Funct. Analysis* **78** (1988), 346-364.

[7] S. Bochner und A.E. Taylor, Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, *Ann. of Math. (2)* **39** (1938), 913-944.

[8] J. Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, *Ark. Mat.* **22** (1983), 163-168.

[9] A. Bukhvalov and A.A. Danilevich, Properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, *Math. Notes* **32** (1982), 104-110.

[10] D.L. Burkholder, A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions, *in* Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honour of Anthony Zygmund, Chicago, 1981.

[11] P.L. Butzer und R.J. Nessel, „Fourier Analysis and Approximation“, Vol. 1. Birkhäuser Verlag, Basel, 1971.

[12] M. Defant, „Zur vektorwertigen Hilberttransformation“, Dissertation, Kiel, 1986.

[13] J. Diestel and J.J. Uhl, „Vector measures“, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[14] N. Dinculeanu, „Vector measures“, Pergamon Press, New York, 1967.

[15] M.M. Držbašjan „Integral transforms and representations of functions in the complex domain“, Nauka, Moskau, 1966.

[16] M.M. Držbašjan und V.M. Martirosjan, Theorems of Paley-Wiener and Müntz-Szász type, *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 1559-1563.

[17] J.B. Garnett, „Bounded Analytic Functions“, Academic Press, New York, 1981.

[18] J. Goldstein, „Semigroups of Linear Operators and Applications“, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[19] W. Hensgen, Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions, *Archiv der Mathematik* **57** (1991), 88-96.

[20] H. Heuser, „Funktionalanalysis“, B.G. Teubner, 3. Aufl. Stuttgart, 1992.

[21] E. Hille und R.S. Phillips, „Functional analysis and semi-groups“, Amer. Math. Soc. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc., rev. ed., Providence, 1957.

[22] K. Hoffman, „Banach Spaces of Analytic Funktions“, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[23] Y. Katznelson, „An Introduction to Harmonic Analysis“, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[24] S. Kwapien, Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, *Studia Math.* **44** (1972), 583-595.

[25] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, „Classical Banach Spaces I & II“, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[26] I.P. Natanson, „Theory of Functions of a Real Variable“, Volume II, Frederick Ungar, New York, 1960.

[27] J.M.A.M. van Nerven, B. Straub und L. Weis, On the asymptotic behaviour of a semigroup of linear operators, *in* „Seminar Notes in Functional Analysis and Partial Differential Equations“, Louisina State University, Baton Rouge, 1993.

[28] F. Neubrander, Abstract elliptic operators, analytic interpolation semigroups, and Laplace transforms of analytic functions, *in* Semesterbericht Funktionalanalysis, Universität Tübingen, 1989.

[29] G.O. Okikiolu, On the infinitesimal generator of the Poisson operator, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **62** (1966), 713-718.

[30] R.E.A.C. Paley und N. Wiener, „Fourier Transforms in the Complex Domain“, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 19, New York, 1934.

[31] J. Peetre, Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeur vectorielles, *Rend. Sem. Univ. Padova* **42** (1969), 15-26.

[32] H. Pollard, The Poisson transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955), 541-550.

[33] J. Prüss, „Evolutionary Integral Equations and Applications“, Birkhäuser, Basel, 1993.

[34] W.J. Ricker, Characterization of Poisson integrals of vector-valued functions and measures on the unit circle, *Hokkaido Math. J.* **16** (1987), 29-42.

[35] W. Rudin, „Real and Complex Analysis“, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[36] M. Sova, The Laplace transform of vector valued-analytic functions, *Casopis pro pestovani matematiky* **104** (1979), 267-280.

[37] N. Tanaka, Holomorphic C-semigroups and holomorphic semigroups, Semigroup Forum **38** (1989), 253-261.

[38] E. Teske, „On the Inversion of the Vector-valued Laplace transform“, Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 1993.

[39] P. Vieten und L. Weis, Functions of bounded semivariation and classical integral transforms, *in* „Seminar Notes in Functional Analysis and Partial Differential Equations“, Louisina State University, Baton Rouge, 1993.

[40] L. Weis, The inversion of the vector-valued Laplace transform in $L_p(X)$-spaces, *in* „Proc. of the Conf. on Diff. Eq. in Banach Spaces“, Bologna 1991; North Holland, 1993.

[41] L. Weis, L_p-flows, *in* „Seminar Notes in Functional Analysis and Partial Differential Equations“, Louisiana State University, Baton Rouge, 1992.

[42] D.V. Widder, „The Laplace transform“, Princeton University Press, Princeton, 1941.

Symbolliste

Index

Wissenschaftlicher Werdegang

Persönliche Daten

Name:	Vieten
Vorname:	Peter
Wohnort:	Kaiserslautern
Geburtsort:	Niederwenigern
Geburtsdatum:	17.01.1964

Schulbildung

1970-1974	Grundschule in Singen (Htwl.)
1974-1983	Friedrich-Wöhler-Gymnasium in Singen

Studium

1984-1991	Universität Kaiserslautern Mathematik mit Nebenfach Elektrotechnik

Beruflicher Werdegang

1986-1990	Wissenschaftliche Hilfskraft im Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
1991-1993	Promotionsstipendium nach LGFG
1992-1993	Forschungsaufenthalt in Baton Rouge (USA)
seit April 1993	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern