UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Zur Approximation des Einheitskreises mit zufälligen Polygonen

Rüdiger Brombeer, Karl-Heinz Küfer und E. Sindambiwe

Preprint Nr. 255

ISSN 0943-8874

FACHBEREICH MATHEMATIK

Zur Approximation des Einheitskreises mit zufälligen Polygonen

Rüdiger Brombeer, Karl-Heinz Küfer und E. Sindambiwe

Preprint Nr. 255

ISSN 0943-8874

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger Straße
67663 Kaiserslautern

Juli 1994

Zur Approximation des Einheitskreises mit zufälligen Polygonen

R. Brombeer, K.-H. Küfer, E. Sindambiwe,
Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Str., 67663 Kaiserslautern

Unserem akademischen Lehrer Prof. Dr. H. Brakhage
gewidmet aus Anlaß seiner Emeritierung

1 Einführung und Resultate

Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig und in gleicher Weise verteilten Vektoren im Einheitskreis K der reellen Zahlenebene. Ferner seien $A_n := \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \geq 3$, die n-Abschnitte der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $X_n := \mathrm{kh}(A_n)$ deren konvexe Hüllen. Die Mengen X_n sind in diesem Sinne zufällige Polygone in K. Eine wichtige Fragestellung in der stochastischen Approximationstheorie ist das Verhalten des Volumendefektes

$$\Delta(X_n) = \mathrm{V}(K \setminus X_n) = \pi - \mathrm{V}(X_n) \tag{1}$$

im Wahrscheinlichkeitsmittel. Dabei bezeichnet $\mathrm{V}(B)$ das Lebesgue-Volumen von $B \subset K$. $\Delta(X_n)$ ist ein Maß für den Approximationsfehler, wenn K durch X_n genähert wird.

Erste systematische asymptotische Untersuchungen des Abklingverhaltens des Erwartungswertes $\mathrm{E}(\Delta(X_n))$ für $n \to \infty$ und in K gleichverteilte Vektoren a_i gehen auf Rényi und Sulanke [12] zurück. Affentranger [1] gibt in diesem Spezialfall Rekursionsformeln für $\mathrm{E}(\Delta(X_n))$ an, welche explizite Auswertungen des Erwartungswertes für kleine n ermöglichen. Carnal [4] verallgemeinert Rényis und Sulankes asymptotisches Resultat auf rotationssymmetrische Verteilungen mit regulär variierendem Verhalten am Rand des Einheitskreises. Ein Grenzfall dieser Verteilungsklasse ist die Gleichverteilung auf ∂K, welche von Müller [11] bzw. Küfer [9] untersucht wird. Bárány und Larman [2] studieren das asymptotische Verhalten des Volumendefektes $\Delta_C(X_n) = \mathrm{V}(C \setminus X_n)$ für beliebige konvexe Mengen C mit festem Volumen bei gleichverteilten a_i in C. Der Spezialfall des Einheitskreises K ist dabei von besonderem Interesse, da K unter allen konvexen Mengen gleichen Volumens am schlechtesten approximiert wird, wie Groemer [5] zeigte. Alle genannten Resultate über den Erwartungswert $\mathrm{E}(\Delta(X_n))$ wurden mittlerweile auf $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, übertragen. Einen Überblick über die umfangreiche Literatur kann man den Übersichtsartikeln von Buchta [3], Gruber [7], Schneider [13], Weil und Wieacker [14] oder der Dissertation von Hueter [8] entnehmen.

Neben dem Erwartungswert interessiert vor allem die Varianz $\mathrm{Var}(\Delta(X_n))$ des Volumendefektes $\Delta(X_n)$, da der Erwartungswert allein keine Auskunft darüber gibt, wie typisch das zu erwartende Abklingverhalten von $\Delta(X_n)$ für eine feste Folge zufälliger Polytope ist. Ein erstes Resultat zur Varianz von $\Delta(X_n)$ bzw. $V(X_n)$ im Falle von in K gleichverteilten Daten wurde von Groeneboom [6] angegeben. Groeneboom untersucht das asymptotische Verhalten des Eckenprozesses von X_n und gewinnt Resultate über den Erwartungswert von $V(X_n)$ mit Hilfe der Efron-Gleichung. Groeneebooms Ergebnisse werden von Hueter [8] auf $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, verallgemeinert. Im Falle $d = 2$ und der Gleichverteilung in K können mit ähnlichen Methoden asymptotische Schranken für $\mathrm{Var}(V(X_n))$ angegeben werden, wie es bei Hueter [8] dargestellt wird. Einen systematischen Zugang zu Varianzen von Polytopvariablen in allgemeinerem Zusammenhang findet man in Küfer [9]. Dort werden unter anderem für rotationssymmetrische Verteilungen mit regulär variierendem Abklingverhalten am Rand der d-dimensionalen Einheitskugel asymptotische obere Schranken für die Varianz von $V(X_n)$ angegeben. Für die gleiche Verteilungsklasse wird verschärfend in Küfer [10] bewiesen, daß der Quotient $\frac{\mathrm{Var}(\Delta(X_n))}{\mathrm{E}^2(\Delta(X_n))}$ für $n \to \infty$ algebraisch gegen 0 strebt. Hieraus folgt mit Hilfe der Monotonie der Folge $(\Delta(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, daß fast sicher gilt:

$$\Delta(X_n) = \mathrm{E}(\Delta(X_n))(1 + o(1)), \; n \to \infty. \tag{2}$$

Mit anderen Worten: die Grenzverteilung des Volumendefektes $\Delta(X_n)$, $n \to \infty$, ist eine $0-1-$Verteilung. Also stellt sich für eine zufällige Folge von Polytopen das zu erwartende Abklingverhalten mit Wahrscheinlichkeit 1 ein. Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis ist eine weitere Verschärfung der asymptotischen Schranke von $\mathrm{Var}(V(X_n))$ gegenüber der in den Arbeiten [6,8,9] angegebenen.

Für manche wichtige Fragestellung aus der Praxis kommt man mit asymptotischen Resultaten jedoch nicht aus, sondern benötigt Abschätzungen bzw. Einschließungen für die Varianz, insbesondere auch für kleine n. Diese werden etwa dazu gebraucht, um mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung quantitative Aussagen über die Wahrscheinlichkeit vorgegebener relativer Abweichungen vom Erwartungswert zu erhalten. Von Interesse ist die Angabe von n-Konfidenzbereichen, d.h. die Angabe von $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß sich für $n \geq n_0$ eine vorgegebene Approximationsgüte mit einer fest gewählten Wahrscheinlichkeit einstellt. Zwar läßt sich diese Fragestellung auch allein mit Hilfe des Erwartungswertes und der Markoff-Ungleichung behandeln, aber dies führt im allgemeinen zu deutlichen Überschätzungen von n_0. Bei bekannter Varianz läßt sich als stärkeres Hilfsmittel die Tschebyscheff-Ungleichung verwenden, wodurch die erzielten Resultate signifikant verbessert werden.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Varianz von $\Delta(X_n)$ beziehungsweise mit der Varianz von $V(X_n)$ bei auf ∂K gleichverteilten Vektoren $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. In diesem einfachen Spezialfall ist es möglich, eine Reihendarstellung anzugeben, aus welcher sich asymptotische Darstellungen, aber auch für alle n gültige obere und untere Schranken für die Varianz herleiten lassen. Auf dieser Grundlage werden Resultate zu den oben genannten praktischen Fragestellungen angegeben. Als theoretischer Aspekt sei erwähnt, daß die hier vorgelegten Resultate bestätigen, daß sich die in Küfer [10] angegebene asymptotische Schranke für die Varianz bezüglich ihres Abklingverhaltens in n im allgemeinen nicht verbessern läßt.

Bevor wir unser Hauptergebnis über $\mathrm{Var}(\Delta(X_n)) = \mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n))$ formulieren, geben wir eine explizite Formel für $\mathrm{E}(\mathrm{V}(X_n))$ an.

Satz 1: *Für auf ∂K gleichverteilte Vektoren und $n \geq 3$ gilt:*

$$\mathrm{E}(\mathrm{V}(X_n)) = n!\pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(n+2k)!} = \frac{n!}{4\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2\pi)^{-2k}}{(n-2-2k)!}. \tag{3}$$

Die linke Seite von (3) wird in [9] bewiesen, die rechte Gleichung ergibt sich, indem man die Reihe in (3) als Rest der Sinus- bzw. Kosinusreihe an der Stelle 2π interpretiert. Bei der numerischen Auswertung von (3) ist die endliche Darstellung lediglich für kleine n der Reihe vorzuziehen, da wegen des alternierenden Vorzeichens und des schnellen Wachstums der Summanden die Gefahr von Auslöschung besteht. Die Reihe in (3) ist für alle $n \geq 3$ eine Leibnizreihe, und somit liefert für $j \in \mathbb{N}_0$ die Partialsumme der Summanden mit Index $0 \leq k \leq 2j$ jeweils eine obere Schranke und die Partialsumme der Summanden mit Index $0 \leq k \leq 2j+1$ jeweils eine untere Schranke. Im Falle der Varianz erhält man:

Satz 2: *Für auf ∂K gleichverteilte Vektoren und $n \geq 3$ gilt:*

$$\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n)) = n!\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(n+2k+1)!} f(n,k) \tag{4}$$

mit Koeffizienten $f(n,k)$,

$$f(n,k) := 2^{2k+1} - 2(k+1)^2 - g(n,k), \tag{5}$$

wobei

$$g(n,k) := (n+2k+1) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{2j} (1 + \frac{2(k-j)}{n+i}) - 1 \right). \tag{6}$$

Wir führen den Beweis für Satz 2 im zweiten Abschnitt. In zu (3) analoger Weise können endliche Summendarstellungen für die Varianz hergeleitet werden, worauf wir hier verzichten, da die endlichen Summen aus den schon beim Erwartungswert genannten Gründen nur für kleine n brauchbar sind. Da offenbar $g(n,k) = \mathcal{O}(1)$ für $n \to \infty$, erhält man:

Folgerung 1: *Für $n \to \infty$ gilt:*

$$\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n)) = 160\pi^6 n^{-5} + \mathcal{O}(n^{-6}). \tag{7}$$

Der asymptotische Hauptterm in (7) für $\mathrm{Var}(\Delta(X_n))$ bestätigt, daß die in Küfer [10] angegebene asymptotische Schranke für $n \to \infty$ innerhalb der Klasse der am Rande der d-dimensionalen Einheitskugel regulär variierenden Verteilungen im allgemeinen bezüglich der Ordnung in n nicht zu verbessern ist. Numerische Experimente zeigen allerdings, daß der angegebene asymptotische Hauptterm für moderate n die Varianz erheblich überschätzt. Zu einer realistischeren Schätzung gelangt man, wenn man folgende Eigenschaften der $f(n,k)$ verifiziert: $g(n,k)$ in (6) ist offensichtlich monoton fallend in n. Also ist $f(n,k)$ monoton wachsend und somit $f(n,k) \geq f(3,k)$, wobei für $k \geq 4$:

$$f(3,k) \geq 2^{2k+1}\left(1 - \frac{48}{(5+2k)(3+k)}\right) \geq \frac{9}{10}2^{2k}. \tag{8}$$

Aus der Abschätzung $f(n,k+1) \leq 3 \cdot 2^{2k+1} + f(n,k)$ und der bereits erwähnten Monotonie der $f(n,k)$ erhält man mit (8):

$$\frac{f(n,k+1)}{f(n,k)} \leq \frac{3 \cdot 2^{2k+1} + f(3,k)}{f(3,k)} \leq 8 \tag{9}$$

für $k \geq 4$ und $n \geq 3$. Mit dieser Abschätzung erschließt man den Leibniz-Charakter der Reihe (4) für $k \geq 4$ und $n \geq 9$. Für kleinere n auf numerische Resultate gestützt, ergibt sich:

Folgerung 2: *Bezeichnet man die Partialsumme der ersten j Summanden der Reihe* (4) *mit $s_j(n)$, so gilt für $n \geq 3$ und $i \geq 1$:*

$$s_{2i}(n) \leq \mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n)) \leq s_{2i-1}(n). \tag{10}$$

Die gute Qualität der Einschließung selbst für kleine i wird durch die Tafel 1 dokumentiert, für die $i = 2$ gewählt wurde. Die Zahlen der Tafel sind Abschnitte der tatsächlichen Werte.

n	$s_4(n)$	$\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n))$	$s_3(n)$
3	-3.72205e+1	1.470273e-1	2.317603e+1
4	-1.02040e+1	2.530296e-1	5.867736e+0
5	-2.95032e+0	2.757334e-1	1.803943e+0
6	-8.42406e-1	2.533818e-1	7.158301e-1
7	-1.89692e-1	2.154661e-1	3.690070e-1
8	1.523298e-2	1.764340e-1	2.316557e-1
9	7.353668e-2	1.418728e-1	1.631546e-1
10	8.259755e-2	1.132102e-1	1.219205e-1
11	7.578534e-2	9.017899e-2	9.393724e-2
12	6.488850e-2	7.195193e-2	7.365103e-2
13	5.401786e-2	5.761861e-2	5.841941e-2
14	4.446303e-2	4.636228e-2	4.675406e-2
15	3.647480e-2	3.750784e-2	3.770608e-3
20	1.409970e-2	1.417108e-2	1.418098e-2
30	2.940245e-3	2.941433e-3	2.941530e-3
40	8.675027e-3	8.675559e-3	8.675588e-3
50	3.220894e-4	3.220938e-4	3.220939e-4
75	4.964132e-5	4.964136e-5	4.964136e-5
100	1.268000e-5	1.268000e-5	1.268000e-5

Tafel 1: Varianz $\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n))$ mit Einschließung

Als erste Anwendung unserer Einschließung der Varianz sei die Möglichkeit genannt, mittels der Tschebyscheff-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit einer gegebenen maximalen relativen Abweichung des Volumens $V(X_n)$ vom zu erwartenden Volumen $E(V(X_n))$ abzuschätzen. Es gilt:

$$\Pr\left(\left|\frac{V(X_n)}{E(V(X_n))} - 1\right| \leq \eta\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(V(X_n))}{\eta^2 \pi^2}. \tag{11}$$

In den Spalten von Tafel 2 geben wir für einige ausgewählte Wahrscheinlichkeitsniveaus p und relative Abweichungen η Werte $n_0 = n_0(\eta, p)$ mit der folgenden Eigenschaft an: Für $n \geq n_0$ ist die relative Abweichung von $V(X_n)$ mit Wahrscheinlichkeit p nicht größer als η. Diese n bilden einen sogenannten n-Konfidenzbereich für relative Abweichungen von $E(V(X_n))$. Zur Erstellung der Tafel wurde die Varianz durch s_{51} abgeschätzt.

	$\eta = 0.3$	$\eta = 0.2$	$\eta = 0.1$	$\eta = 0.05$	$\eta = 0.01$
p=0.500	8	11	16	22	46
p=0.750	10	13	19	26	54
p=0.900	13	16	23	32	65
p=0.990	24	29	40	55	106
p=0.999	41	49	65	88	170

Tafel 2: n-Konfidenzbereiche für relative Abweichungen von $E(V(X_n))$

Die Werte der Tafel zeigen, daß selbst kleine relative Abweichungen vom zu erwartenden Volumen schon für vergleichsweise kleine n recht unwahrscheinlich sind. Der Erwartungswert gibt also auch für kleine n das typische Verhalten der $V(X_n)$ zutreffend wieder.

Für die approximationstheoretische Fragestellung sind n-Konfidenzbereiche für die relative Abweichung des Volumens $V(X_n)$ vom Kreisvolumen π von Interesse. Diese kann man einerseits mittels der Markoff-Ungleichung

$$\Pr\left(\left|\frac{V(X_n)}{\pi} - 1\right| \leq \eta\right) \geq 1 - \frac{E(\Delta(X_n))}{\eta \pi} \tag{12}$$

unter ausschließlichem Ausnutzen des Erwartungswertes und andererseits mit der Tschebyscheff-Ungleichung

$$\Pr\left(\left|\frac{V(X_n)}{\pi} - 1\right| \leq \eta\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(V(X_n)) + E^2(\Delta(X_n))}{\eta^2 \pi^2} \tag{13}$$

unter Einbeziehung der Varianz erhalten. Für einige ausgewählte Wahrscheinlichkeitsniveaus p und relative Abweichungen η gibt Tafel 3 diejenigen $n_0 = n_0(\eta, p)$ an, ab welchen das Niveau p garantiert ist. Der linke Eintrag in den η-Spalten gibt jeweils die mit (12) ermittelte Schranke an, der rechte Eintrag jeweils die mit (13) errechnete. Varianz und Erwartungswert werden durch Partialsummen, welche gleichzeitig obere Schranken sind, genähert. Die Berechnung der Tafelwerte geschah auf der Grundlage von Partialsummen mit jeweils mindestens 50 Summanden.

	$\eta = 0.3$		$\eta = 0.2$		$\eta = 0.1$		$\eta = 0.05$		$\eta = 0.01$	
p=0.500	14	12	18	16	26	23	38	33	88	75
p=0.750	21	15	26	19	38	28	55	40	125	90
p=0.900	35	20	43	25	62	35	88	50	198	111
p=0.990	114	36	139	45	198	63	280	90	627	200
p=0.999	362	65	443	80	627	113	888	159	1986	355

Tafel 3: n-Konfidenzbereiche für die Approximation von K

Die angegebenen n-Werte zeigen, daß die sich allein auf den Erwartungswert stützende Abschätzung (12) das tatsächlich erreichte Wahrscheinlichkeitsniveau deutlich unterschätzt, was zu überhöhten Schranken für n führt. Die Abschätzung unter Einbeziehung des zweiten Moments mit Hilfe von (13) führt zu signifikant besseren Ergebnissen, die nahe an empirische Erfahrungswerte herankommen, welche man mit statistischen Untersuchungen gewinnen kann.

Abschließend bemerken wir, daß ähnlich gute Einschließungen der Varianz im Falle höherer Dimensionen oder allgemeinerer Verteilungen nicht zu erwarten sind. Jedoch ist es sicherlich möglich, bereits vorliegende asymptotische Aussagen durch echte Abschätzungen nach oben zu ergänzen, welche auch für moderate n brauchbar sind.

2 Beweis des Hauptresultates

Zur Formulierung unserer Überlegungen übernehmen wir im wesentlichen die Notation aus den Arbeiten von Küfer [9,10]. Eine Menge $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ von Punkten auf der Kreislinie ∂K heißt nichtentartet, falls jede zweielementige Teilmenge $A_I = \{a_i \in A_n | i \in I\}$, $I \subset \{1, \dots, n\}$ zweielementige Indexmenge, linear unabhängig ist. Anderenfalls heißt A_n entartet. Entartete Mengen bilden bei identisch auf ∂K gleichverteilten Punkten eine Nullmenge. Es genügt also, im folgenden nichtentartete Mengen zu betrachten. Jeder zweielementigen Teilmenge $A_I \subset A_n$ ist die Strecke $S_I := \mathrm{kh}(A_I)$ zugeordnet. S_I kann Kante von X_n sein oder nicht. Ist H_I die S_I enthaltende Gerade, so zerlegt H_I die Ebene in zwei zueinander komplementäre abgeschlossene Halbräume $H_I^{(1)}$ und $H_I^{(2)}$, wobei $0 \in H_I^{(1)}$. Wir unterscheiden zwei Typen von Kanten: S_I heißt Kante 1. Art von X_n, falls $A_n \subset H_I^{(1)}$; ist $A_n \subset H_I^{(2)}$, so heißt S_I Kante 2. Art. Ist A_n weder in $H_I^{(1)}$ noch in $H_I^{(2)}$ vollständig enthalten, so ist S_I keine Kante des Polygons X_n. Schließlich verwenden wir für beliebige Mengen $B \subset A_n$ und $i = 1, 2$ die Bezeichnung $\chi_i(B, I)$ als Indikatorfunktional für das Ereignis $B \subset H_I^{(i)}$. Mit dieser Notation gilt die bekannte Darstellung

$$\mathrm{V}(X_n) = \sum_I (\chi_1(A_n, I) - \chi_2(A_n, I))\mathrm{V}(\tilde{S}_I), \tag{14}$$

wobei $\tilde{S}_I := \mathrm{kh}(S_I \cup \{0\})$. Zur Berechnung der Varianz $\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n))$,

$$\mathrm{Var}(\mathrm{V}(X_n)) = \mathrm{E}(\mathrm{V}^2(X_n)) - \mathrm{E}^2(\mathrm{V}(X_n)), \tag{15}$$

benötigen wir zunächst eine Darstellung von $V^2(X_n)$. Es gilt mit (14):

$$V^2(X_n) = \sum_{I,J} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} \chi_i(A_n, I) \chi_j(A_n, J) V(\tilde{S}_I) V(\tilde{S}_J). \tag{16}$$

Wegen der identischen, unabhängigen Verteilung der Vektoren a_i hängt der Erwartungswert der Summanden der Doppelsumme aus (16) nur von i, j, n und der Anzahl k der in I und J gleichzeitig enthaltenen Indizes ab. Bezeichnet q_k die Anzahl der Paare (I, J) zweielementiger Teilmengen I, J von $\{1, \ldots, n\}$ mit $|I \cap J| = k$, so gilt für $k = 0, 1, 2$:

$$q_k = \binom{n}{k} \binom{n-k}{2-k} \binom{n-2}{2-k}. \tag{17}$$

Somit erhalten wir aus (16)

$$E(V^2(X_n)) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} q_k e_{i,j,k}^{(n)}, \tag{18}$$

wobei wir abkürzend notieren:

$$e_{i,j,k}^{(n)} := E_k(\chi_i(A_n, I) \chi_j(A_n, J) V(\tilde{S}_I) V(\tilde{S}_J)). \tag{19}$$

Der Index k beim Erwartungswert bedeutet, daß I und J beliebige, aber jeweils fest gewählte Indexmengen mit $|I \cap J| = k$ sind. Diese Bezeichnungsweise wird auch im folgenden benutzt. Es ist naheliegend, die Größe $e_k(V(X_n))$,

$$e_k(V(X_n)) := q_k \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} e_{i,j,k}^{(n)}, \tag{20}$$

einzuführen, sodaß $E(V^2(X_n)) = e_0(V(X_n)) + e_1(V(X_n)) + e_2(V(X_n))$. $e_k(V(X_n))$ repräsentiert den Beitrag der Paare (I, J) mit $|I \cap J| = k$. Für die $e_k(V(X_n))$ gelten folgende, im Abschnitt 3 zu beweisende Darstellungen:

Hilfssatz: *Für $n \geq 3$ gilt:*

$$e_2(V(X_n)) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \int_0^1 (1-t)^{n-2} \sin^2 2\pi t \, dt, \tag{21}$$

$$e_1(V(X_n)) = \binom{n}{2} (n-2) \int_0^1 (1-t)^{n-3} \int_0^t \sin 2\pi(t-s) \sin 2\pi s \, ds \, dt, \tag{22}$$

$$e_0(V(X_n)) = \frac{n-3}{2} e_1(V(X_n)). \tag{23}$$

Nach Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktionen in (21) bzw. (22) und Ausintegrieren der resultierenden Summanden ergibt sich:

$$\mathrm{E}(\mathrm{V}^2(X_n)) = n!\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(n+2k+1)!}(2^{2k+1} + (k+1)(n-1)). \tag{24}$$

Mit (15) und der Reihendarstellung von $\mathrm{E}(\mathrm{V}(X_n))$ aus Satz 1 erhält man die in Satz 2 behauptete Darstellung (4), wenn man beachtet, daß für $f(n,k)$ aus (5) gilt: $f(n,k) = 0$ für $k = 0, 1$ und $n \geq 3$.

3 Beweis des Hilfssatzes

Zum Beweis des Hilfssatzes aus Abschnitt 2 leiten wir einfache Integraldarstellungen für die Größen $e_{i,j,k}^{(n)}$ her. Wir behandeln zunächst den Spezialfall $k = 2$, weil dort einfacherweise die Indexmengen I und J identisch sind. Wegen der unabhängigen, identischen Verteilung der Vektoren a_i erhält man

$$e_{i,j,2}^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{E}(\Pr(A_n \subset H_I^{(i)})\, \mathrm{V}^2(\tilde{S}_I)) & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}. \tag{25}$$

Für $i \neq j$ ergibt sich 0, da S_I für nichtentartete Mengen A_n nicht gleichzeitig Randsimplex 1. und 2. Art sein kann. Bezeichnet h_I den Abstand der Geraden H_I vom Ursprung, so gilt mit dem Satz von Bayes

$$e_{i,i,2}^{(n)} = \int_0^1 \Pr(A_n \subset H_I^{(i)} |\, h)\, \mathrm{E}(\mathrm{V}^2(\tilde{S}_I)|\, h)\, dP(h), \tag{26}$$

wobei

$$P(h) := \Pr(h_I \leq h) \tag{27}$$

und $(\cdot\,|\, h)$ jeweils abkürzend für die Bedingung $(\cdot\,|\, h_I = h)$ steht. Da $A_I \subset \partial K$, hängt $V(\tilde{S}_I)$ nur von h_I ab; also gilt:

$$\mathrm{E}(\mathrm{V}^2(\tilde{S}_I)\,|\, h) = h^2(1-h^2). \tag{28}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$G(h) := \Pr(a \in H_I^{(2)} |\, h) = 1 - \Pr(a \in H_I^{(1)} |\, h) \tag{29}$$

ein, so gilt wegen der identischen, unabhängigen Verteilung der a_i

$$\Pr(A_n \subset H_I^{(i)} |\, h) = \begin{cases} (1-G(h))^{n-2} & ; i = 1 \\ G^{n-2}(h) & ; i = 2 \end{cases}. \tag{30}$$

Die Größe G läßt sich leicht mit einer geometrischen Überlegung bestimmen. Liegt a in $H_I^{(2)}$, so liegt a, vom Ursprung aus betrachtet, jenseits der Geraden H_I auf dem Kreisbogen zwischen den beiden Punkten aus A_I. Wegen der Rotationssymmetrie der Verteilung gleicht G dem Längenanteil des Kreisbogens zwischen den beiden

Punkten aus A_I am vollen Kreisumfang. Dieser hängt offenbar nur von $h = h_I$ ab. Wir erhalten:

$$G(h) = \frac{\arccos h}{\pi}. \tag{31}$$

Zur vollständigen Auswertung von (26) benötigen wir noch eine explizite Darstellung von $P(h)$. Sei o.B.d.A. $I = \{1,2\}$. Ist a_1 auf der Kreislinie gewählt, so ist $h_I \leq h$, falls a_2 auf einem der beiden Segmente liegt, welche durch die von a_1 ausgehenden Tangenten an einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius h entstehen. Also stimmt $P(h)$ mit dem Längenanteil der beiden Kreissegmente am Umfang des Vollkreises überein. Es ist also

$$P(h) = 1 - 2G(h). \tag{32}$$

Wegen (20) und (25) ist $e_2(\mathrm{V}(X_n)) = e^{(n)}_{1,1,2} + e^{(n)}_{2,2,2}$. Aus (20) erhalten wir mit (26) unter Berücksichtigung von (30), (28) und (32):

$$e_2(\mathrm{V}(X_n)) = 2q_2 \int_0^1 ((1 - G(h))^{n-2} + G^{n-2}(h))h^2(1 - h^2)dG(h). \tag{33}$$

Substituiert man $G(h) = t$, so erhält man aus (33) und (17):

$$e_2(\mathrm{V}(X_n)) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \int_0^{1/2} ((1 - t)^{n-2} + t^{n-2}) \sin^2 2\pi t dt. \tag{34}$$

Das im Hilfssatz angegebene Resultat (21) erhält man durch Ausnutzen von Symmetrien der Darstellung (34).
Folgt man für die verbleibenden Fälle $k = 0$ und $k = 1$ der Vorgehensweise des schon behandelten Falles $k = 2$, so erhält man aus (19) zunächst

$$e^{(n)}_{i,j,k} = \mathrm{E}_k(\Pr(A_n \subset H^{(i)}_I \cap H^{(j)}_J)\mathrm{V}(\tilde{S}_I)\mathrm{V}(\tilde{S}_J)),\ k = 1,2. \tag{35}$$

Mit dem Satz von Bayes ergibt sich

$$e^{(n)}_{i,j,k} = \int_0^1\int_0^1 \Pr_k(A_n \subset H^{(i)}_I \cap H^{(j)}_J | h_1, h_2)\mathrm{E}_k(\mathrm{V}(\tilde{S}_I)\mathrm{V}(\tilde{S}_J)|h_1, h_2)dP_k(h_1, h_2), \tag{36}$$

wobei $(\cdot\,|\,h_1, h_2)$ abkürzend für $(\cdot\,|\,h_I = h_1, h_J = h_2)$ steht und

$$P_k(h_1, h_2) := \Pr_k(h_I \leq h_1, h_J \leq h_2). \tag{37}$$

Wir zeigen zunächst, daß für $k = 0, 1$ gilt:

$$dP_k(h_1, h_2) = dP(h_1)dP(h_2). \tag{38}$$

Für $k = 0$ ist (38) offensichtlich richtig, da h_I und h_J in diesem Fall unabhängige Zufallsvariablen sind. Für $k = 1$ gilt:

$$P_1(h_1, h_2) = \int_0^{h_2} \Pr_1(h_I \leq h_1\,|\,h_J = h')dP(h'). \tag{39}$$

Seien nun o.B.d.A. $I = \{1,2\}$ und $J = \{2,3\}$. Da der A_I und A_J gemeinsame Punkt a_2 auf der Kreislinie ∂K liegt, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit in (39) von h' unabhängig. Also haben wir

$$\Pr_1(h_I \leq h_1 \mid h_J = h') = P(h_1), \tag{40}$$

woraus die behauptete Identität (38) folgt. Da $\mathrm{V}(\tilde{S}_I)$ und $\mathrm{V}(\tilde{S}_J)$ nur von h_I bzw. h_J abhängen, gilt:

$$\mathrm{E}_k(\mathrm{V}(\tilde{S}_I)\mathrm{V}(\tilde{S}_J) \mid h_1, h_2) = h_1\sqrt{1-h_1^2}\, h_2\sqrt{1-h_2^2}. \tag{41}$$

Wir substituieren nun in (36) $G(h_1) = s$ und $G(h_2) = t$ und erhalten:

$$e_{i,j,k}^{(n)} = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \Pr_k(A_n \subset H_I^{(i)} \cap H_J^{(j)} \mid h_1(s), h_2(t)) \sin 2\pi s \sin 2\pi t ds dt. \tag{42}$$

Es bleibt die Berechnung von $\Pr_k(A_n \subset H_I^{(i)} \cap H_J^{(j)} \mid h_1, h_2)$ für $k = 0, 1$. Es gilt für $h_2 \geq h_1$ und $k = 0$:

$$\Pr_0(A_n \subset H_I^{(i)} \cap H_J^{(j)} \mid h_1, h_2) = \begin{cases} (1 - G(h_1) - G(h_2))^{n-3} & ; \ i = j = 1 \\ (G(h_1) - G(h_2))^{n-3} & ; \ i = 2, j = 1 \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases} . \tag{43}$$

Wir zeigen die Behauptung exemplarisch für $i = j = 1$: Seien o.B.d.A. $I = \{1,2\}$ und $J = \{3,4\}$. Ist A_J auf ∂K gewählt, so muß $A_I \subset H_J^{(1)}$ gelten, das heißt, die Gerade H_I hat mit S_J im Inneren von K keinen Schnittpunkt. Dies bedeutet, daß das Lot von 0 auf H_I im Winkelbereich zwischen den Loten von 0 auf die von a_3 bzw. a_4 ausgehenden Tangenten an den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius h_1 liegen muß. Aufgrund der Rotationssymmetrie der Verteilung der a_i ist der auf 1 normierte Normalenvektor von H_I auf ∂K gleichverteilt. Also entspricht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Lotvektor von H_I im angegebenen Winkelbereich liegt, dem Anteil des Winkelbereichs am Vollwinkel. Somit ergibt sich:

$$\Pr_0(A_I \subset H_I^{(1)}, A_J \subset H_J^{(1)} \mid h_1, h_2) = 1 - G(h_1) - G(h_2). \tag{44}$$

Die verbleibenden Punkte aus $A_n \setminus A_{I\cup J}$ dürfen nicht auf den von H_I und H_J abgeschnittenen Kreisbögen liegen. Wegen der Gleichverteilung auf ∂K ergibt sich:

$$\Pr_0(A_n \setminus A_{I\cup J} \subset H_I^{(1)} \cap H_J^{(1)} \mid h_1, h_2) = (1 - G(h_1) - G(h_2))^{n-4}. \tag{45}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Produkt aus den beiden Wahrscheinlichkeiten (44) und (45), womit die Behauptung bewiesen ist. Der zweite Fall $i = 2, j = 1$ in (43) ergibt sich in analoger Weise; alle übrigen Fälle können nicht auftreten, wie man sich leicht überlegt. Schließlich gilt für $k = 1$ und $h_2 \geq h_1$:

$$\Pr_1(A_n \subset H_I^{(i)} \cap H_J^{(j)} | h_1, h_2) = \frac{1}{2} \begin{cases} (1 - G(h_1) - G(h_2))^{n-3} & ; \ i = j = 1 \\ (G(h_1) - G(h_2))^{n-3} & ; \ i = 2, j = 1 \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases} . \tag{46}$$

Die Terme $(1-G(h_1)-G(h_2))^{n-3}$ bzw. $(G(h_1)-G(h_2))^{n-3}$ erhält man wie für $k=0$ aus dem Beitrag der Punkte aus $A_n \setminus A_{I \cup J}$. Es bleibt zu zeigen, daß für $i=j=1$ und $i=2$ und $j=1$ gilt:

$$\Pr_1(A_I \subset H_I^{(i)}, A_J \subset H_J^{(j)} \mid h_1, h_2) = \tfrac{1}{2}. \tag{47}$$

Dies sieht man so ein: Seien o.B.d.A. $I=\{1,2\}$ und $J=\{2,3\}$. Ist A_J gewählt, so muß $a_1 \in \partial K$ auf einer von a_2 ausgehenden Tangente an den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius h_1 liegen. Wegen der Rotationssymmetrie sind die beiden möglichen Schnittpunkte gleichwahrscheinlich, womit sich die angegebene Wahrscheinlichkeit 1/2 erklärt. Setzt man (44) bzw. (47) in (42) ein, so erhält man:

$$e_1(\mathrm{V}(X_n)) = \frac{q_1}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}((1-s-t)^{n-3}-|s-t|^{n-3})\sin 2\pi s \sin 2\pi t\, ds dt, \tag{48}$$

$$e_0(\mathrm{V}(X_n)) = q_0\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}((1-s-t)^{n-3}-|s-t|^{n-3})\sin 2\pi s \sin 2\pi t\, ds dt. \tag{49}$$

Die im Hilfssatz angegebenen Formeln (22) und (23) ergeben sich sodann aus (17) und Symmetrieüberlegungen.

Literatur

[1] Affentranger, F.: Expected Volume of a Random Polytope in a Ball. J. Microscopy (1988) 277-287

[2] Bárány, I., Larman, D.G.: Convex Bodies, Economic Cap Covering, Random Polytopes. Mathematika 35 (1988) 274-291

[3] Buchta, C.: Zufällige Polyeder – eine Übersicht. In: Zahlentheoretische Analysis. Seminar. Hlawka et al. (ed.) (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1114). Springer, New York Berlin, Heidelberg 1985

[4] Carnal, H.: Die konvexe Hülle von n rotationssymmetrisch verteilten Punkten. ZWVG 15 (1970) 168-179

[5] Groemer, H.: On the Mean Value of the Volume of a Random Polytope in a Convex Set. Pac. J. Math. 25 (1974) 86-90

[6] Groeneboom, P.: Limit Theorems for Convex Hulls. Prob. Th. Rel. Fields 79 (1988) 327-368

[7] Gruber, P. M.: Approximation of Convex Bodies by Polytopes. Rend. Circ. Mat. Palermo 3 (1982) 195-225

[8] Hueter, I.: The Convex Hull of n Random Points and its Vertex Process. Dissertation, Universität Bern (1992)

[9] Küfer, K-H.: Asymptotische Varianzanalyse in der stochastischen Polyedertheorie. Dissertation, Universität Kaiserslautern (1992)

[10] Küfer, K-H.: On the Approximation of a Ball by Random Polytopes. Preprint Nr. 250, Universität Kaiserslautern (1994), erscheint in J. Appl. Prob.

[11] Müller , J. S.: Approximation of the Ball by Random polytopes. Journal of Approximation Theory 63 (1990) 198-209

[12] Rényi, A., Sulanke, R.: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten I. ZWVG 2 (1963) 78-84

[13] Scheider, R.: Random Approximation of a Convex Set. J. Microscopy 151 (1988) 211-227

[14] Weil, W., Wieacker, J. A.: Stochastic geometry. In: Handbook of Convex Geometry. Gruber, P. M., Wills, J. M. (eds.) North-Holland, Amsterdam 1993