UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

OPTIMIERUNGSVERFAHREN FÜR WIRTSCHAFTLICHE PROBLEME
–
DER NATUR(WISSENSCHAFT) ABGESCHAUT

Horst W. Hamacher

Preprint Nr. 236

FACHBEREICH MATHEMATIK

OPTIMIERUNGSVERFAHREN FÜR WIRTSCHAFTLICHE PROBLEME

–

DER NATUR(WISSENSCHAFT) ABGESCHAUT

Horst W. Hamacher

Preprint Nr. 236

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Erwin–Schrödinger–Straße
6750 Kaiserslautern

Januar 1993

Optimierungsverfahren für wirtschaftliche Probleme
-
der Natur(wissenschaft) abgeschaut

von

Dr. Horst W. Hamacher*
Professor für Wirtschaftsmathematik

Fachbereich Mathematik
und
Zentrum für Techno- und Wirtschaftsmathematik

Universität Kaiserslautern

Zusammenfassung:

Es wird anhand von Beispielen, an denen der Autor in der Vergangenheit gearbeitet hat, gezeigt, wie man Modelle der exakten Naturwissenschaften auf wirtschaftliche Probleme anwenden kann. Insbesondere wird diskutiert, wo Grenzen dieser Übertragbarkeit liegen. Die Arbeit ist eine Zusammenfassung eines Vortrags, der im SS 1992 im Rahmen des Studium Generale an der Universität Kaiserslautern gehalten wurde. Entsprechend richtet

* Die Arbeit des Autors wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

1. Einführung in die Thematik

Bevor wir über einen möglichen Zusammenhang zwischen Natur und Naturwissenschaften einerseits, und Optimierung wirtschaftlicher Probleme andererseits reden, soll versucht werden, diese Begriffe zu klären:

In Broc71 wird der Begriff der Wirtschaft wie folgt definiert:

> "**Wirtschaft** dient innerhalb des menschlichen Daseins der materiellen Erhaltung und Sicherung des Lebens des einzelnen (...) oder einer Vielheit von Menschen (...). Ihr Ursprung ist die Spannung zwischen der Unbegrenztheit der menschlichen Bedürfnisse und der Knappheit der zu ihrer Befriedigung zur Verfügung stehenden Mittel; (...). Die Wirtschaft ist objektiv gesehen der Inbegriff aller Opfer, Bemühungen, Institutionen und Maßnahmen, die der Überwindung der Spannung zwischen Bedarf und Deckung dienen, wobei sie nicht wie die Technik das Maximum, sondern das Optimum, d.h. die bestmögliche Lösung anstrebt; subjektiv äußert sie sich als das **Wirtschaften** der Menschen (ihre wirtschaftlichen Handlungen und Tätigkeiten) mit dem Ziel, (...), die naturgegebenen Knappheiten an Gütern zu verringern. (...)"

Die Wirtschaftsmathematik hat die Aufgabe beim Wirtschaften der Menschen zu helfen, indem sie **mathematische Modelle** der wirtschaftlichen Gegebenheiten und der Zielvorgaben erstellt, d.h. Annäherungen der Wirklichkeit mit Hilfe der Mathematik. Hier werden wir uns auf das Modell der (mathematischen) Optimierung konzentrieren, das in Broc71 wie folgt erklärt ist:

> "**Optimierung**, Aufsuchen des kleinsten *(Minimierung)* oder größten *(Maximierung)* Wertes einer mathematischen Funktion *(Zielfunktion, Objektfunktion)* in einem bestimmten, durch Nebenbedingungen, oft in Form von Gleichungen oder Ungleichungen beschriebenen (zulässigen) Bereich.(...) Optimierungsaufgaben haben große Bedeutung besonders in den Wirtschaftswissenschaften (...). In den Wirtschaftswissenschaften hat die Optimierung die Bedeutung von "bestmöglicher" Zielerreichung, wobei die Ziele unterschiedlich sein können, z.T. auch miteinander konkurrieren (Zielkonflikte). Die Optimierung kommt dann als Kompromiß zwischen mehreren Zielen zustande. (...)"

Als Beispiel betrachten wir das Problem, die Evakuierung eines Hauses zu planen. (Daß dies tatsächlich ein Problem der Wirtschaft ist, scheint vielleicht auf den ersten Blick ungewöhnlich, ist aber sicherlich aufgrund der oben gegebenen Begriffsdefinition richtig: Ein Evakuierungsplan dient offensichtlich der "materiellen Erhaltung und Sicherung der Leben" der Hausbewohner.) Die wirtschaftlichen Gegebenheiten in diesem Beispiel sind die architektonischen Eigenschaften des Hauses (z.B. Größe der Räume, Lage der Räume zueinander), die Anzahl der Bewohner in den einzelnen Räumen, usw. Die Zielvorgabe besteht darin, das Haus möglichst schnell zu evakuieren. Wir werden ein Optimierungsmodell für dieses Problem später ausführlich besprechen.

Als nächstes wenden wir uns den Begriffen Natur und Naturwissenschaften zu. In Broc71 finden wir die folgende Definition:

> "**Natur**, (...),der gesamte Kosmos mit seiner Materie und seinen Kräften, Veränderungen und Gesetzlichkeiten. Die **Naturwissenschaften** erforschen die Natur als Gegenstand der Erfahrung, die Philosophie sucht sie metaphysisch zu deuten. Zur Natur werden nicht nur das Stoffliche, sondern auch die Naturkräfte und das Verhalten der Lebewesen gerechnet.
> Man unterscheidet zwischen der belebten Natur (Organismen) und der unbelebten Natur

(Mineralien, Wasser, Luft). (...)"

Offensichtlich ist nach dieser Definition der Mensch, und damit auch das Verhalten des Menschen ein Teil der Natur. Also ist das Wirtschaften selber ebenfalls ein Teil der Natur und wir erhalten eine Darstellung des Naturbegriffs wie in Bild 1.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir über Optimierungsverfahren sprechen, die der Natur abgeschaut sind. "Abschauen" ist dabei die Übertragung von Erfahrungen von einem Bereich auf einen anderen, fremden Bereich. Wir beschränken uns dabei im folgenden beim Naturbegriff auf den schraffierten Bereich aus Bild 1.

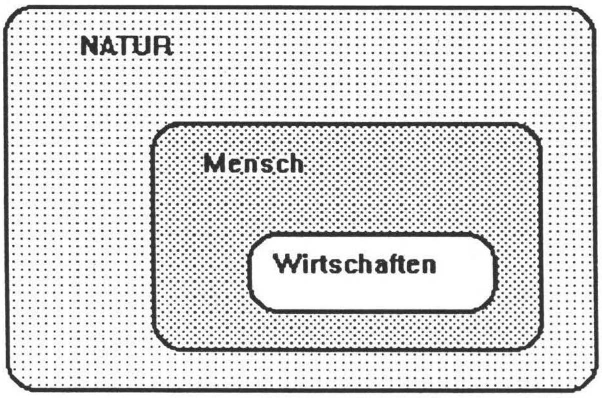


Bild 1: Der Mensch und das Wirtschaften als Teil der Natur. Verfahren aus der Natur und den Naturwissenschaften, die wir hier betrachten, stammen aus den schraffierten Bereichen.

Die naheliegende Frage ist die, was die so definierten Begriffe Natur und Optimierung miteinander zu tun haben. Dazu die Zeugenaussagen einiger bekannter geschichtlicher Persönlichkeiten.

Dante Alighieri (1265-1321) stellte fest:

"Alles Überflüssige mißfällt Gott und der Natur. Alles, was Gott und der Natur mißfällt, ist schlecht."

Wenn der Natur "Überfluß mißfällt", heißt dies umgekehrt, daß sie bei ihrer Organisation mit den zur Verfügung stehenden Mitteln "optimal" umgeht. Stellt man sich auf den Standpunkt der exakten Naturwissenschaft im Sinne von Galilei (1564-1642) und Newton ((1643-1727), die die gegenständliche Welt nach Maß, Zahl und Gewicht erfassen will, so heißt dies, daß in der Natur Optimierungsprinzipien (im oben definierten mathematischen Sinne) nachweisbar sein müssen.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) glaubte in der Natur das folgende **Wirkungsprinzip** erkannt zu haben:

"Wenn sich in der Natur etwas ändert, so ist der für diese Änderung erforderliche Aufwand kleinstmöglich oder größtmöglich."

Ähnlich äußert sich **Leonard Euler (1707-1783)**, der feststellt:

"Da aber die Gestalt des ganzen Universums höchst vollkommen ist, entworfen vom weisesten Schöpfer, so geschieht in der Welt nichts, ohne daß sich irgendwo eine Maximums- oder Minimumsregel zeigt."

Mit diesen Formulierungen kommen wir der oben gegebenen Definition der mathematischen Optimierung noch näher als mit dem Zitat von Dante: Der Schritt, den wir an dieser Stelle noch machen müssen, ist der, nur solche Naturerscheinungen zu betrachten, bei denen wir den von der Natur betriebenen Aufwand mittels einer mathematischen Funktion messen, und die Rahmenbedingungen für Änderungen durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen beschreiben können. Dann kann man das Leibnitzsche Wirkungsprinzip (und analog das Eulersche Prinzip) auch so formulieren, daß

mathematisch beschreibbaren Änderungen der Natur den Prinzipien der mathematischen Optimierung gehorchen.

Ob die oben gemachte Forderung für die von uns betrachteten Naturerscheinungen als einschränkend empfunden wird, ist eine Frage des Standpunkts innerhalb der Naturwissenschaften. Wir werden in diesem Artikel nur solche Naturerscheinungen betrachten, für die diese Forderung erfüllt ist. Aus diesem Grund ist der Titel dieser Arbeit so gewählt, daß die Optimierungsverfahren von der Natur, aber eben auch von den mathematisierten Naturwissenschaften, abgeschaut sind. Die interessante Fragestellung, ob es auch eine "nicht-mathematisierte Naturwissenschaft" gibt, also die Frage nach der Berechtigung eines idealistischen neben einem materialistischen Ansatz in der Naturwissenschaft, wie er etwa zwischen Newton ((1643-1727) und Goethe (1749-1832) ausgetragen wurde, wird hier nicht behandelt.

In den nächsten Abschnitten werden wir jeweils Beispiele von Naturerscheinungen und deren mathematischer Modellierung vorstellen. Parallel dazu betrachten wir ein wirtschaftliches Problem und diskutieren dann Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen, indem wir das aus der Naturerscheinung abgeleitete Modell benutzen.

2 Reflexion von Licht - Roboteroptimierung

Die erste Naturerscheinung die wir näher untersuchen wollen ist die der Reflexion des Lichtes. Euklid (330- 270 v. Chr.) entdeckte das Naturgesetz mit dem erklärt werden kann, wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel reflektiert wird. Es gelten nämlich die folgenden beiden Regeln:

Reflexionsgesetz von Euklid:
① Einfallsebene und Ausfallsebene stimmen überein.
② Der Einfallswinkel eines Strahls ist gleich dem Ausfallswinkel.

Wir sind insbesondere an dem 2. Gesetz interessiert und nehmen der Einfachheit halber an, daß unser Spiegel eben (also nicht krummflächig) ist. Stellen wir den einfallenden

Strahl und den ausfallenden Strahl jeweils durch Halbgeraden dar, so erhalten wir als Einfallswinkel den Winkel α zwischen der ersten Halbgeraden und dem Spiegel und als Ausfallswinkel den Winkel β zwischen der zweiten Halbgeraden und dem Spiegel (vgl. Bild 2). Das zweite Reflexionsgesetz von Euklid besagt nun, daß immer $\alpha = \beta$ ist.

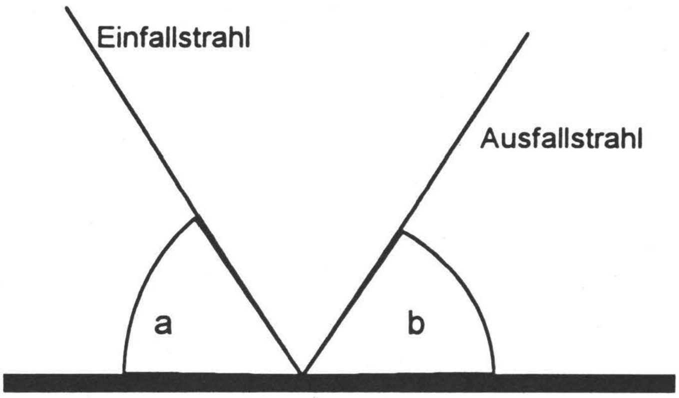


Bild 2: Das zweite Reflexionsgesetz:
Einfallswinkel α = Ausfallswinkel β

Das Reflexionsgesetz ist ein Gesetz, daß mathematisch, mit Hilfe der Geometrie, formuliert ist, so daß die Reflexion von Licht als Naturerscheinung die im Abschnitt 1 gemachte Forderung der mathematischen Beschreibbarkeit erfüllt. Die Frage, der wir jetzt nachgehen wollen ist, ob hinter der Naturerscheinung der Lichtreflexion ein Optimierungsprinzip steht.

Dies ist tatsächlich der Fall, denn aus dem 2. Reflexionsgesetz kann man das Optimierungsprinzip von Heron (ca. 100 n.Chr.) ableiten:

> Sucht man den kürzesten Weg von einem Punkt P zu einem Punkt Q, der einen Zwischenpunkt auf einer Geraden G hat, so ist dieser Weg dadurch gegeben ,daß man G als Spiegel auffaßt und den Weg auf den Einfallstrahl- bzw. Ausfallstrahl legt, der durch P und Q geht.

Bild 3a zeigt zwei Möglichkeiten von P nach Q zu kommen. Der dick dargestellte Weg mit Länge l_1+l_2 besteht aus den zwei Strecken PZ und ZQ, die mit G jeweils den gleichen Winkel bilden, ist also der Weg durch den Einfallstrahl und den Ausfallstrahl. Der zweite Weg, der aus den Strecken PZ' und Z'Q besteht, ist dünn gezeichnet und hat die Länge l_1' + l_2'. Da wir die Strecken PZ bzw. PZ' durch P'Z bzw. P'Z' ersetzen können, wobei P' der Spiegelbild von P (an G) ist, sieht man, daß $l_1+l_2 < l_1'+l_2'$. Also ist (PZ,ZQ) tatsächlich der kürzeste Weg von P nach Q, der einen Punkt von G enthält.

Bild a

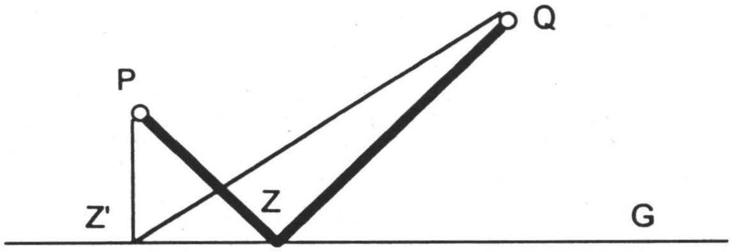
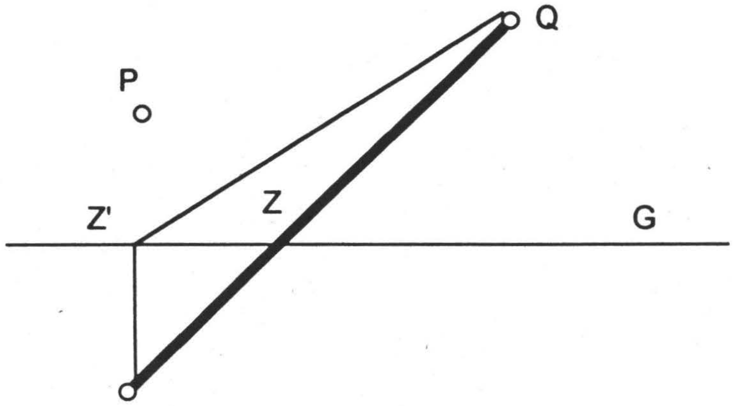


Bild b



P' = Spiegelbild von P

Bild 3: In Bild a sind zwei mögliche Wege von P nach Q über einen Punkt in G dargestellt Die Länge des dick dargestellten Weges (PZ,ZQ), der über den Ein-/Ausfallstrahl geht, ist deutlich kleiner als die Länge jedes anderen Weges. Dies wird klar, wenn man P durch sein Spiegelbild P' ersetzt (Bild b): Die Länge des Weges (PZ,ZQ) ist gleich der Länge des Weges (P'Z,ZQ) und die Länge des Weges (PZ',Z'Q) ist gleich der Länge des Weges (P'Z',Z'Q). Im Dreieck mit den Eckpunkten P', Z' und Q ist der direkte Weg von P' nach Q aber offensichtlich kürzer als der Umweg über Z'.

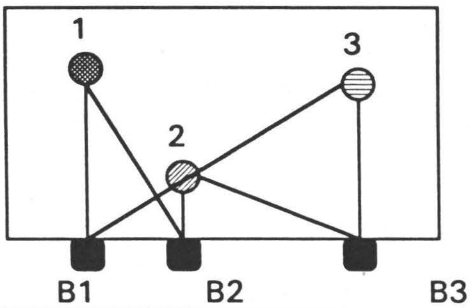
Als nächstes betrachten wir ein Problem aus der Wirtschaft, das zunächst von dem vorhergehenden völlig unabhängig zu sein scheint, den automatisierten Zusammenbau von Halbleiterplatten (im Folgenden mit PCB, für printed circuit board, abgekürzt). Wir denken uns dabei einen Roboterarm, mit dessen Hilfe wir den PCB mit elektronischen Bauteilen bestücken wollen. Der Arm kann dabei jeweils ein Teil halten und einbauen, muß nach dem Einbau des Teils jedoch das jeweils nächste Einbauteil in einem Behälter, der außerhalb von dem PCB steht, holen und dann einbauen. Dies wiederholt sich bis der PCB mit allen Teilen bestückt ist. Um den Produktionsdurchlauf möglichst groß zu machen (und damit die zur Verfügung stehenden Mittel wie Zeit, Geld, Energieverbrauch, etc. möglichst gut auszunutzen), ist folgendes Problem zu lösen:

Halbleiterproblem

Finde Standorte für die Behälter der einzelnen Teile, die die Gesamtlänge des Weges möglichst klein macht, den der Roboterarm zurücklegen muß.

Dies ist ein Optimierungsproblem im oben definierten Sinn: Die zu minimierende Zielfunktion ist die Länge des Roboterwegs. Die Nebenbedingungen geben algebraische Beschreibungen von Wegestücken an, die zwischen zwei Einbauplätzen den Rand des PCB berühren müssen.

Um das Halbleiterproblem lösen zu können, unterstellen wir, daß keine anderen unbestimmten Größen die Länge des Weges beeinflussen. Insbesondere nehmen wir an, daß die Einbaupunkte und die Einbaureihenfolge der elektronischen Teile festgelegt ist. Bild 4 zeigt ein kleines Beispiel einer Halbleiterplatte mit 3 Einbauteilen, die in der Reihenfolge (1,2,3) eingebaut werden sollen. Im Vergleich zwischen den Bildern 4a, 4b und 4b sieht man, wie die Gesamtlänge des Roboterwegs von der Auswahl der Standorte für die Behälter B1, B2 und B3 abhängt.



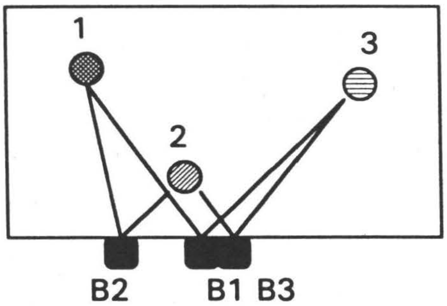


Bild a:

Bild b:

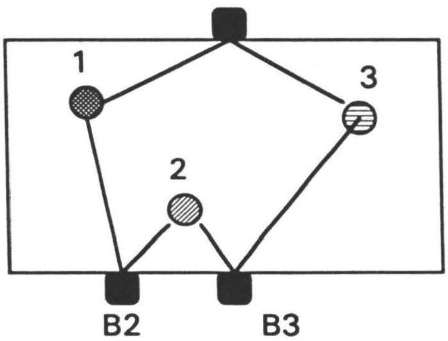


Bild c:

Bild 4: Drei Alternativen für die Standorte der Behälter B1, B2, B3. In der Alternative (b) sind die Standorte nach dem Heronschen Optimierungsprinzip der Lichtreflexion gewählt. Die Länge des Roboterwegs in (b) ist deutlich kürzer als in Alternative (a). In der Alternative (c) sieht man, daß man den Weg weiter verkürzen kann, wenn man auch den oberen Rand der PCB-Begrenzung als Standort zuläßt.

Was hat dieses wirtschaftliche Problem aber mit der mathematischen Beschreibung der Naturerscheinung "Lichtreflexion" zu tun? Nun, wenn wir, wie im Beispiel des Bildes 4 den Standort für B2 suchen, werden wir ihn unmittelbar an den Rand des PCB stellen (ansonsten verlängern wir den Weg unnötig). Außerdem ist der Standort so zu wählen, daß die Strecken (1,B2) und (B2,2) Einfall- bzw. Ausfallstrahl sind, denn sonst ist wieder der Weg von 1 nach 2 über den Standort von B2 nach dem Heronschen Optimierungprinzip nicht der kürzeste.

Wenn wir, wie in Bild 4a und 4b, alle Behälter unterhalb des PCB aufstellen wollen, fassen wir die Gerade durch den unteren Rand als "Spiegel" auf, an dem sich der Lichtstrahl von 1 derart spiegelt, daß der Ausfallstrahl den Punkt 2 enthält. Dies definiert uns nach Heron den bestmöglichen Standort für den Behälter B2. Analog erhalten wir die Standorte für die Behälter B3 (durch die Ein-/Ausfallstrahlen die 2 und 3 verbinden) und B1 (durch die Ein-/Ausfallstrahlen die 3 und 1 verbinden)

Läßt man auch die obere Seite des PCB als Standort zu, so muß man sich auch dort einen Spiegel denken und entsprechend optimale Standorte für die drei Behälter am oberen Rand bestimmen. Die jeweils bessere Alternative unterhalb und oberhalb des PCB wird dann gewählt. Auf diese Weise sieht man z.B. in Bild 4c, daß der Standort für Behälter B1 unterhalb des PCB durch den Standort oberhalb des PCB ersetzt werden sollte, was zu einer erheblichen Verkürzung des Roboterwegs führt.

Läßt man auch die rechten und linken Ränder als Standorte zu, so muß man jeweils drei weitere Male das Heronsche Prinzip anwenden, und unter den dann 4 Alternativen für jeden Behälterstandort die besten wählen.

Bei der Lösung des Halbleiterproblems hat das "Abschauen" eines geeigneten Optimierungsprinzips aus der Natur also sicherlich geholfen. Bevor der Leser[1] nun zu euphorisch wird, ein Wort der Warnung: Wir haben mit diesem Abschauen der Natur ein <u>Modell</u> des Problems gelöst, PCBs zu produzieren. Wie gut dieses Modell die wirtschaftliche Wirklichkeit beschreibt ist immer zu prüfen. So haben wir z.B. bei der Diskussion der Reflexionsgesetze, des Heronschen Optimierungsprinzips und bei der Anwendung auf die PCB Produktion immer vorausgesetzt (ohne dies jemals explizit zu sagen), daß die Entfernung zwischen zwei Punkten die Euklidische Entfernung ist. Dies ist bei der Betrachtung des Weges von Lichtstrahlen sicherlich berechtigt, bei der Untersuchung von Bewegungen eines Roboterarm aber nicht selbstverständlich. Tatsächlich bewegen sich Roboter oft parallel zu Koordinatenachsen, so daß die Länge durch die Summe der x-Abstände und der y-Abstände gegeben ist (vgl. Bild 5). Diese

[1] Ich werde im Verlauf dieser Arbeit die Leserin/den Leser jeweils geschlechtsspezifisch ansprechen, wobei ich hoffentlich in der gesamten Arbeiteine "faire" Verteilung zwischen männlichen und weiblichen Anreden haben werde.

Entfernung zwischen Punkten nennt man dann Rechteckentfernung.

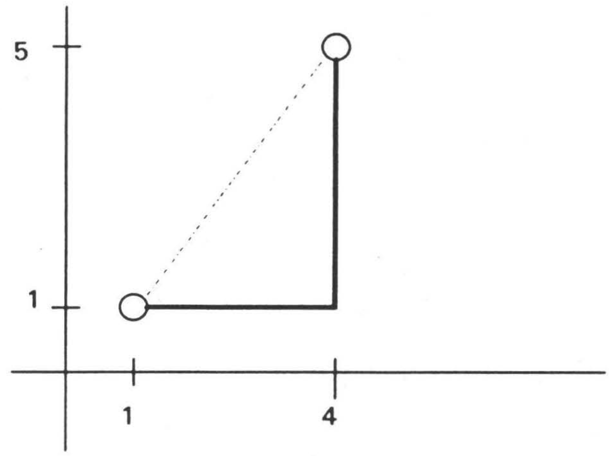


Bild 5: Die Euklidische Entfernung zwischen P=(1,1) und Q=(4,5) ist durch die Länge $\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2} = 5$ der direkten (gestrichelten) Verbindung zwischen P und Q gegeben. Die Rechteckentfernung ist die Summe der Längen der fett gezeichneten Strecken (4-1)+(5-1) = 7

Arbeitet man mit anderen Arten der Entfernungsmessung, so muß man die Standorte nach modifizierten "Reflexionsregeln" bestimmen. Die Darstellung dieser Alternativmodelle sprengt allerdings den Rahmen dieser Arbeit. Die Leserin möge weitere Details den Arbeiten FHLY93, FoHa93, HaNi92 und HaNi93 entnehmen.

3. Naturkreisläufe - Gütertransport

Die Natur ist voller Beispiel von Kreisläufen (vgl. Lotk56). Heraklid (536-470 v.Chr.) war wohl der erste, der einen solchen Kreislauf als Modell von Naturerscheinungen formuliert hat. Sein Modell ist in Bild 6 dargestellt.

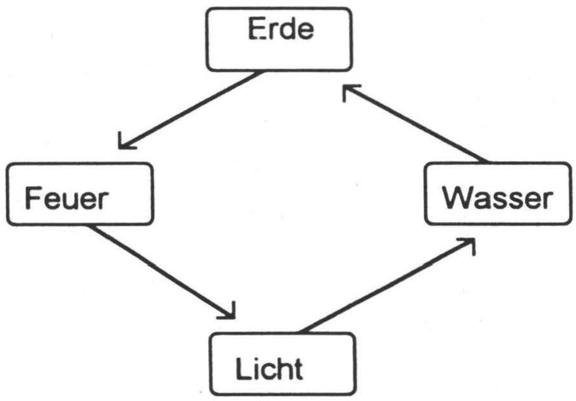


Bild 6: Der Heraklidsche Naturkreislauf

Bei dem Versuch, das Diagramm von Bild 6 zu interpretieren, sollte man sich jedoch davor hüten, die Begriffe "Erde, Feuer, Luft, Wasser" ausschließlich im Sinne der exakten Naturwissenschaften zu deuten; tatsächlich beinhalten diese Begriffe eine mystische Komponente, die für uns heute schwer nachzuvollziehen. Ein Gefühl für diese Komponente bekommt man, wenn man als Spezialfall des Diagramms aus Bild 6 das Heraklid Zitat

"Staub bist du und zu Staub wirst du wieder werden"

betrachtet, mit dem wir all ja einmal konfrontiert werden.

Wegen des mystischen Zusammenhangs des Heraklidschen Kreislaufs eignet er sich nicht für den von mir betrachteten Ansatz. In der Natur finden sich jedoch viele andere Beispiele meßbarer Kreisläufe:

Im globalen Wasserkreislauf der Erde betrachten wir, wie Wasser durch Verdampfung in die Atmosphäre und von dort durch Niederschlag wieder zurück auf die Erdoberfläche gelangt. Bild 7 zeigt eine vereinfachte Darstellung dieses globalen Wasserkreislaufs, die Lotk56 entnommen ist.

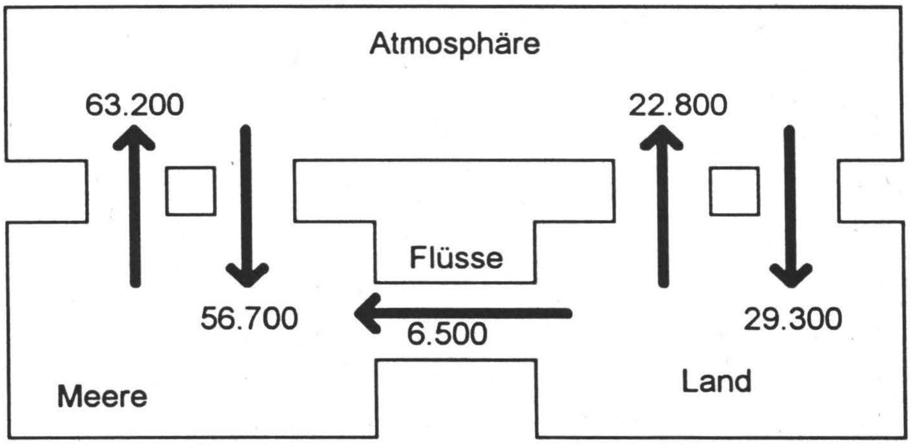


Bild 7: Globaler Wasserkreislauf
(Die Zahlen haben die Dimension Kubikmeilen pro Jahr)

Eine abstraktere, aber weniger suggestive Darstellung des globalen Wasserkreislaufs ergibt sich, wenn man die drei Speicher von Wasser, nämlich Land, Meere und Atmosphäre als **Knoten** eines **Netzwerks** ansieht. Diese Knoten sind durch (gerichtete) **Kanten** verbunden, die angeben, ob und in welcher Richtung Wasser transportiert werden kann. So bedeutet die Kante zwischen den Knoten "Land" und "Meere" den Transport von Wasser über Flüsse. Die Informationen, die in Bild 7 enthalten sind, können wir somit auch im Netzwerk des Bildes 8 darstellen.

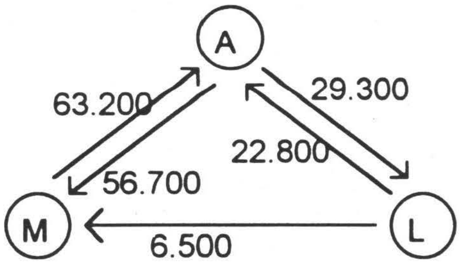


Bild 8: Netzwerkdarstellung des globalen Wasserkreislaufs.
(Die Abkürzungen A,L, M der Knoten stehen für Atmosphäre, Land, Meere)

In diesem Beispiel eines Netzwerkmodells erkennen wir am besten das Charakteristikum aller Naturkreisläufe:

> **Equilibriumprinzip**
> In jedem Knoten des Netzwerks, das den Naturkreislauf beschreibt, ist die Summe des einfließenden "Flusses" gleich der Summe des ausfließenden "Flusses"

Dabei ist das Wort "Fluß" in Anführungszeichen gesetzt, da es nun als Begriff benutzt wird, der beschreibt, daß eine zahlenmäßig erfaßbare Größe eines Stoffes vom Anfangsknoten des Netzwerks zum Endkonten transportiert wird. Im folgenden lasse ich die Anführungszeichen immer weg, so daß das Wort immer diese abstrakte Bedeutung hat.

Im Beispiel aus Bild 8 ist die Summe des einfließenden Flusses für Knoten A gleich 63.200 + 22.800 = 86.000, und sie Summe des ausfließenden Flusses ist gleich 56.700+29.300, also auch gleich 86.000.

Vermutlich am bekanntesten ist das Equilibriumprinzip in seiner Formulierung als Kirchhoffsche Regel (Kirchoff, 1824-1887) angewandt auf Netzwerke linearer elektrischer Leiter. Neben dem globalen Wasserkreislauf und den gerade erwähnten elektrischen Netzwerken treten in den Natur weitere Kreisläufe auf, z.B. lokale Wasserkreisläufe (innerhalb der Meere, im Menschen, in Pflanzen) und chemische Kreisläufe (Kohlenstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Phosphor) globaler und lokaler Art.

Die Netzwerkmodelle sind nicht nur zeichnerisch darstellbar, sondern können auch mathematisch mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden; das Equilibriumprinzip läßt sich dann als ein lineares Gleichungssystem darstellen. Sie sind höchst interessante mathematische Objekte der Mathematik, die in zahlreichen Büchern und Zeitschriften (auch unter dem Begriff "Graphentheorie") untersucht und angewandt werden.

Als wirtschaftliches Problem, das wir durch ein "der Natur abgeschautes" Verfahren lösen werden , untersuchen wir das Problem des Gütertransports in einem Schienennetzwerk. Zur Verdeutlichung des Problems betrachten wir wieder ein kleines Beispiel: Bild 8 zeigt ein Schienennetzwerk mit 4 Knoten. Der Knoten 1 ist der Ausgangsbahnhof, Knoten 4 ist der Zielbahnhof, und Knoten 2 und 3 sind Zwischenstationen. Eine Kante zwischen Knoten repräsentiert eine direkte Schienenverbindung zwischen den Endkonten der

Kante. Jede Kante ist mit einer Zahl bewertet, die die **Kapazität** der Schienenverbindung angibt, d.h. eine obere Schranke für die Anzahl von Gütern, die über diese direkte Schienenverbindung transportiert werden kann. (Die Kapazitäten können in Anzahl von Güterwaggons, Gewichtseinheiten, Volumeneinheiten, o.ä. gegeben sein.) Ein **(zulässiger) Fluß** in dem Netzwerk ist dann einer Bewertung der Kanten, die nicht größer als die Kapazität ist und einem zulässigen Gütertransport entspricht. Die letztere Bedingung bedeutet dabei, daß keine Flußeinheit während des Transports verloren geht.

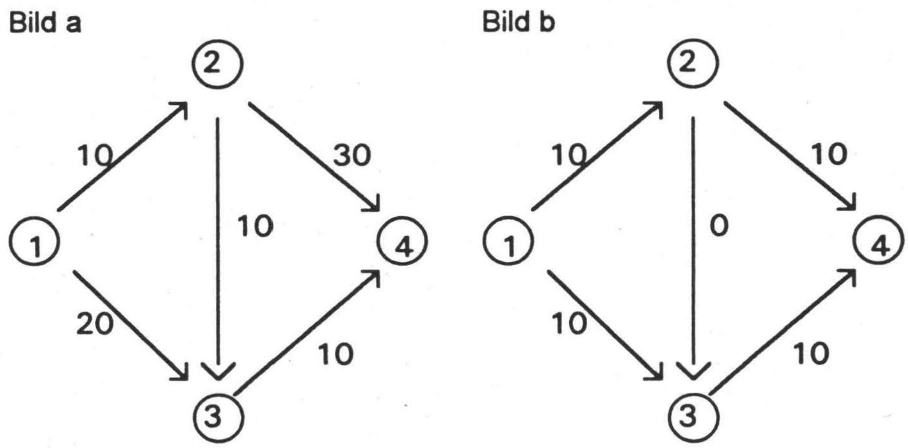


Bild 8: Ein Schienennetzwerk mit Ausgangsbahnhof 1, Zielbahnhof 4 und Kapazitäten auf den Kanten (Bild a). Ein möglicher Fluß, der einem zulässigen Gütertransport von 20 Einheiten entspricht ist in Bild b gezeigt.

Der Betreiber des Schienennetzwerks will nun wissen, wieviel Güter er auf seinem Schienennetzwerk vom Ausgangsbahnhof zum Zielbahnhof maximal verschicken kann.

Güterproblem
Maximiere die Gesamtmenge von Gütern, die zwischen Ausgangsbahnhof und Zielbahnhof unter Berücksichtigung der Kapazitäten verschickt werden können .

Dieses wirtschaftliche Problem in Ausgangspunkt eines äußerst erfolgreichen Arbeitsgebiets innerhalb der Mathematischen Optimierung, der Netzwerkflußtheorie (vgl. FoFu62). Interessanterweise benutzt man dabei in der Literatur durchgehend die Bezeichnungen "Quelle" und "Senke" für den Ausgangs- bzw. Zielknoten, was ja sehr deutlich auf den Naturzusammenhang hinweist.

Ein Verfahren zur Lösung des Güterproblems erhalten wir, indem wir das Netzwerk zunächst in ein Kreislauf-Netzwerk überführen. Dazu führen wir eine Kante von der Senke zur Quelle ein (im Beispiel also die Kante von 4 nach 1). Da im Gütertransport keine Flußeinheit verloren gehen kann, ist das Equilibriumprinzip für alle Knoten erfüllt, die nicht die Quelle oder die Senke sind. Weiter ist der aus der Quelle herausfließende Fluß gleich dem in die Senke hineinfließenden Fluß, so daß wir diesen Fluß über die neu eingeführte

Kante von der Senke zur Quelle zurückführen können. Damit gilt dann das Equilibriumprinzip in allen Knoten des Netzwerks. Gleichzeitig erfüllt die Kante von der Senke zur Quelle eine Meßfunktion, weil wir auf ihr die Anzahl der Einheiten des Gütertransports ablesen können (vgl. Bild 9).

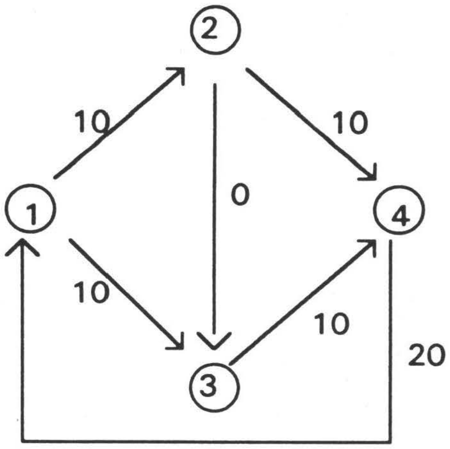


Bild 9: Kreislaufdarstellung des Flusses aus Bild 8b

Das Verfahren zur Lösung des Güterproblems ist nun eine einfache Imitation der Natur: Man stellt sich einfach vor, wie Wasser von der Quelle zur Senke fließt - unter Berücksichtigung des Equilibriumprinzips und der Kapazitätsbedingungen. Nach und nach füllen sich die Kanten, bis einige von ihnen **saturiert** sind, d.h. der Fluß auf diesen Kanten ist gleich der Kapazität. Das mögliche Fließen von Wasser wird im mathematischen Modell durch ein Markierungsverfahren im Netzwerk imitiert. Dieses Verfahren bricht ab, wenn alle Kanten eines **Schnittes** im Netzwerk saturiert ist, das ist eine Menge von Kanten, deren Wegnahme im Netzwerk die Quelle von der Senke trennt. Sind nun alle Kanten auf einem solchen Schnitt von einem Fluß saturiert, so kann kein weiterer Fluß von der Quelle zur Senke fließen so daß der auf diese Weise bestimmte Fluß der größtmögliche Fluß ist. Er repräsentiert dann eine optimale Lösung des Güterproblems.

Im Bild 9 bilden die Kanten (1,2) und (3,4) einen Schnitt. Denn, nehmen wir diese Kanten im Netzwerk weg, so können wir nicht mehr von der Quelle 1 zur Senke 4 kommen. Außerdem ist dieser Schnitt saturiert, da auf beiden Kanten des Schnitts Fluß=Kapazität =10 ist. Somit können wir folgern, daß der Fluß aus Bild 8b bzw. 9 ein maximaler Fluß ist, so daß man maximal 20 Einheiten von 1 nach 4 transportieren kann.

Während man in dem kleinen Beispiel von Bild 8 die Lösung des Güterproblems natürlich sehr schnell durch Probieren bekommt, ist das oben skizzierte Verfahren auch für Probleme mit riesigen Netzwerken äußerst schnell. Hier käme man mit Probieren natürlich nicht weiter.

Netzwerkflußprobleme werden sehr häufig zur Modellierung von anderen wirtschaftlichen Problemen benutzt (vgl. etwa AhMO92)

Eine dynamische Version des Problems ist in HaTu87 und ChHT88 bei der Modellierung von Gebäudeevakuierungen benutzt worden. Bild 10 zeigt den Ansatz der Modellierung anhand eines kleinen Beispiels.

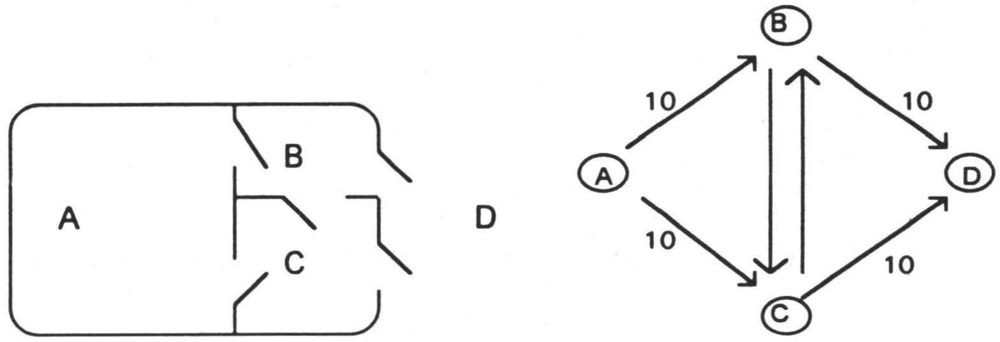


Bild 10: Plan eines Hauses mit Räumen A,B und C (D steht für "draußen", also das Ziel der Evakuierung) und zugehörigem Evakuierungsnetzwerk.

Kennt man die Anzahl der Bewohner, so muß der Fluß der Bewohner von den Räumen nach draußen geführt werden. Dies macht man im Evakuierungsnetzwerk durch Anwendung von Verfahren der dynamischen Netzwerkflußtheorie, indem man die Flußentwicklung über die Zeit verteilt beobachtet (vgl. HaTu87).

Meine Erfahrungen mit dem Evakuierungsmodell sind wieder ein sinnvoller Anlaß um davor zu warnen, Modelle mit der Wirklichkeit zu verwechseln: Bei der Anwendung des Modells auf ein spezielles Beispiel erhielten wir einen Evakuierungsplan, der zwei Gruppen von Menschen in entgegengesetzter Richtung über einen Korridor schicken wollte (im Beispiel aus Bild 10: Eine Gruppe soll von A nach B, die andere von B nach A gehen). Diese "Lösung" des Evakuierungsproblems ist, obwohl mathematisch richtig, in der Praxis natürlich völlig unbrauchbar. Eine kleine Modifikation des Modells (im mathematischen Modell: ein Übergang von reellen Zahlen zu Vektoren, vgl. HaTu87) stellt solche unerwünschten Phänomene ab.

4. Fortpflanzung - Entwurf von Kommunikationssysteme

An dieser Stelle möchte ich zunächst noch einmal das schon in Abschnitt 2 erwähnte Zitat von Dante wiederholen:

> "Alles Überflüssige mißfällt Gott und der Natur. Alles, was Gott und der Natur mißfällt ist schlecht."

Die Natur scheint jedoch voll zu sein von Beispielen, in denen Überfluß produziert wird. Ich möchte dies an drei Beispielen der Fortpflanzung klarmachen.

1. Beispiel: Geflecktes Knabenkraut
Das gefleckte Knabenkraut produziert 180 000 Samen pro Pflanze. Sinn dieses

Überflusses ist es sicherzustellen, daß zumindestens einige der Samen ein bestimmtes Pilzgeflecht als Keimboden erreichen, das das Knabenkraut braucht.

2. Beispiel: Frösche
Bei den Seefröschen legt ein Weibchen bis zu 10.000 Einer ab, die dann von dem Männchen besamt werden. Viele dieser Eier werden während der Metamorphose zum Frosch aufgefressen oder finden nicht die geeignete Umgebung, um sich weiter zu entwickeln. Von den meisten, die sich zu jungen Fröschen entwickeln werden wieder die meisten gefressen, so daß nur ein verschwindend kleiner Anteil des ursprünglichen "Einsatzes" tatsächlich erfolgreich ist.

3. Beispiel: Mensch
Das Ejakulat der männlichen Samenflüssigkeit enthält beim Menschen 200-300 Millionen Spermien. Der weibliche Körper enthält 35.000 Eier, von denen nur 400 jeweils einige wenige Tage zur Befruchtung zur Verfügung stehen. Die riesige Menge von Spermien trifft also im Regelfall nicht auf ein befruchtungsfähiges Ei.

Dieser offensichtliche Überfluß in der Fortpflanzung hat natürlich einen Sinn, wie in den vorhergehenden Beispielen (zumindestens in den ersten beiden) klar wurde. Dieses hinter der Fortpflanzung stehende Prinzip nennen wir das Greedy-Prinzip:

Greedy Prinzip Die größtmögliche verfügbare Resourcenmenge wird zu jedem Zeitpunkt eingesetzt, um ein größtmögliches Ziel zu erreichen

Im Falle der Fortpflanzung ist dabei das Ziel, möglichst viele Nachkommen zu haben, um die Erhaltung der Art zu sichern. Die maximale Bereitstellung von Resourcen wiegt dabei die fehlende Information über einen sinnvollen, kontrollierten Einsatz auf lange Sicht auf. Das Greedy-Prinzip ist immer eine lokale Entscheidung, die lokal maximiert, um ein globales Ziel zu maximieren.

So kann man in den vorhergehenden Beispielen durch Erhöhung des Informationsniveaus das Greedy-Prinzip durch ein sinnvolleres Verfahren ersetzen, wenn der Mensch mit seiner Intelligenz im Bereich der Natur eingreift: Unter experimentellen Bedingungen kann er etwa dafür sorgen, daß

1. jeder einzelne der 180.000 Samen des Knabenkrauts den geeigneten Keimboden bekommt, daß
2. Froscheier, Kaulquappen und junge Frösche davor geschützt werden als Nahrung für andere Tiere zu dienen, oder
3. menschliche Spermien auf ein befruchtungsfähiges Ei stoßen.

Im Teilbereich der Natur, das Verhaltensweisen der Menschen betrifft, finden wir ein interessantes Beispiel des Greedy-Prinzips, das unter dem Namen **Manchasterdoktrin** bekannt geworden ist

> Die Maximierung des individuellen Egoismus führt zu einer Maximierung des Wohls der Gemeinschaft.

Da das englische Wort "greedy" im Deutschen mit "gierig, gefräßig" übersetzt werden kann, ist die Manchasterdoktrin das geeignete Beispiel, um die Namenswahl für das

Optimierungsprinzip zu rechtfertigen. Die Manchasterdoktrin ist die extreme Umsetzung eines etwas abgeschwächten Greedy-Prinzips von Adam Smith (1723-1790), das Grundlage der sozialen Marktwirtschaft ist. In diesem sind Eingriffe des Staates zur Lenkung des Verhältnisse zwischen individuellem Egoismus und Gesamtwohl der Gemeinschaft zulässig.

Das Greedy-Prinzip kann man auch als Minimierungsregel formulieren:

> **Greedy-Prinzip (Minimierungs Form)**
> Treffe unter allen Entscheidungsalternativen jeweils diejenige, die möglichst geringe Anteile zu einem zu minimierenden Gesamtziel beiträgt

Das Studium des menschlichen Verhaltens legt noch eine weiteres, absurdes Greedy-Prinzip nahe, in dem man mit möglichst geringem Aufwand ein möglichst großes Ziel erreichen will. Da dies kein Optimierungsprinzip ist, sondern eher ein Faulheitsprinzip werde ich darauf im folgenden nicht eingehen.

Als wirtschaftliches Problem, bei dem wir das Greedy-Prinzip einsetzen werden, betrachten wir den Entwurf eines Kommunikationssystems. Der Einfachheit halber beschränken wir uns darauf, ein Telefonnetzwerk auf Kabelbasis zu betrachten. Wir nehmen an, daß wir grundsätzlich zwischen allen Teilnehmern direkte Verbindungen herstellen können. Zwischen Teilnehmern a und b verursacht eine solche direkte Verbindung Investitionskosten in Höhe von K(a,b). Dann stellt sich dem Planer des Kommunikationssystems das folgende Problem:

> **Kabelnetzwerkproblem**
> Entwerfe ein Kabelnetzwerk, so daß alle Teilnehmer paarweise miteinander sprechen können, und die Gesamtinvestitionskosten möglichst klein sind.

Bild 11 zeigt ein kleines Beispiel mit vier Teilnehmern und zwei möglichen Entwürfen.

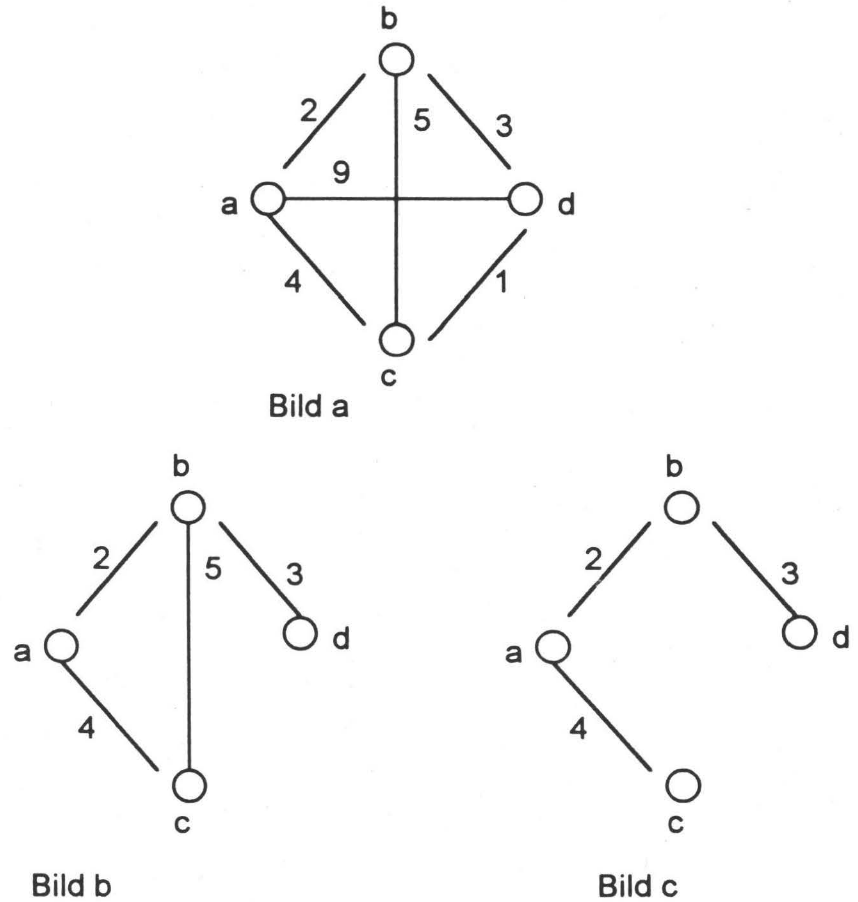


Bild 11: Ein Kabelnetzwerk für 4 Teilnehmer soll entworfen werden. Bild a stellt die Kosten für die direkten Verbindungen dar. Bilder b und c sind Entwürfe für Netzwerke mit Investitionskosten 14 bzw. 9, in denen alle Teilnehmer paarweise miteinander sprechen können. Offensichtlich ist Lösung c der Lösung b vorzuziehen, da in der Lösung b die direkte Verbindung zwischen 2 und 4 redundant ist und unnötige Kosten verursacht.

Das Beispiel zeigt auch einen möglichen allgemeinen Modellierungsansatz für das Kabelnetzwerkproblem auf:

Die Teilnehmer des Netzes werden als Konten eines **vollständigen Graphen** dargestellt, d.h. jedes Paar a,b von Knoten ist durch eine Kante (a,b) verbunden. Die Bewertung der Kante entspricht den Investitionskosten, die für die Errichtung der direkten Verbindung zwischen a und b zu zahlen sind. (vgl. Bild 11a)

Ein zulässiges Kabelnetz entspricht einer Auswahl von direkten Verbindungen, so daß alle Teilnehmer miteinander sprechen können. Im Graphen G ist dies eine Teilmenge der Kanten, so daß es für alle Knotenpaare a und b eine Folge von Kanten in dieser Teilmenge gibt, die a und b verbindet. (Bilder 11 b und c) Solche Kantenmengen beschreiben **spannende Untergraphen** von G (nicht weil sie so "spannend" für

Mathematiker sind - obwohl das auch der Fall ist -, sondern weil sie alle Knoten des Graphen G "aufspannen". Richtiger wäre also die Bezeichnung "aufspannender Untergraph, die aber in der Literatur selten benutzt wird). Die **Kosten** des spannenden Untergraphen ergeben sich durch die Summe der Kosten der einzelnen Kanten in dem Untergraphen.

Wie wir beim Übergang von Bild 11b zu 11c gesehen haben, tritt immer dann Redundanz in einem spannenden Untergraphen auf, wenn zwei Teilnehmer auf zwei verschiedene Arten miteinander verbunden werden können. Da unser Ziel ausschließlich die Minimierung der Gesamtkosten ist, können wir uns also darauf beschränken, **spannende Bäume** von G zu betrachten, d.h. spannende Untergraphen, in denen jedes Knotenpaar auf genau eine Art miteinander verbunden ist. Das mathematische Modell für das Kabelproblem, das wir lösen wollen ist also das folgende:

> **Minimaler Spannender Baum Problem (MSB Problem)**
> Finde in einem vollständigen Graphen einen spannenden Baum mit möglichst kleinen Kosten.

Es lohnt sich, darüber nachzudenken, daß das MSB Problem identisch ist mit dem Kabelnetzwerkproblem. Dies ist somit ein Beispiel für ein besonders gutes Modell.

Das MSB Problem kann durch die Anwendung des Greedy-Prinzips in seiner Minimierungs Form gelöst werden: Die lokale Entscheidung ist das Hinzufügen einer weiteren Kante zu einer vorhandenen Kantenmenge, die

1. nicht redundant ist (also nicht schon bisher verbundene Knoten noch einmal verbindet)
und
2. möglichst billig ist.

Man kann nun beweisen, daß mit der Anwendung des Greedy-Prinzips tatsächlich das MSB Problem - und damit das Kabelnetzwerkproblem - optimal gelöst ist. Bild 12 zeigt in einem Beispiel die Berechnung eines minimalen spannenden Baums

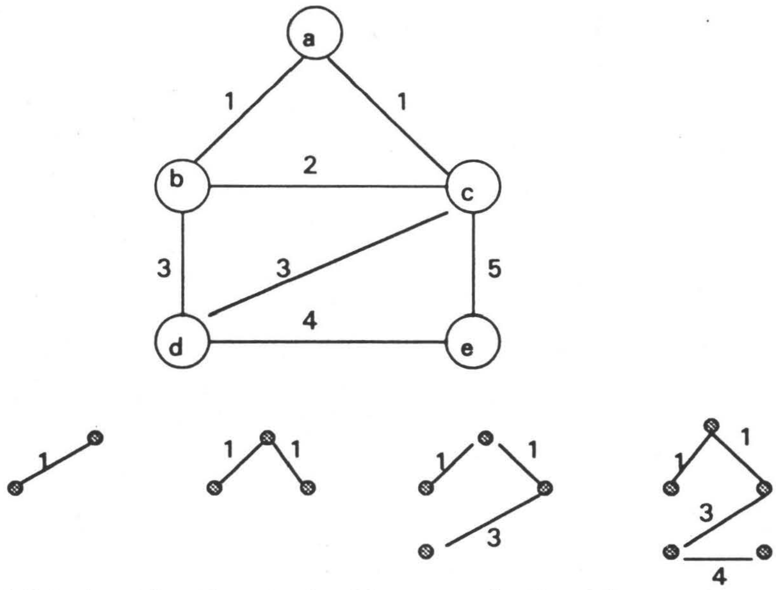


Bild 12: Ein Graph G (Kanten mit Gewichten, die größer als 10 sind, sind weggelassen, da sie nie in einem minimalen spannenden Baum sein werden) und die 4 verschiedenen Stufen des Greedy Verfahrens. In jeder Stufe wird jeweils die billigst noch nicht aufgenommene Kante hinzugefügt, die nicht redundant ist.

Die Tatsache, daß das Greedy-Prinzip tatsächlich zu einer optimalen Lösung führt ist irgendwie beruhigend, wenn man sich überlegt, wie Entscheidungen manchmal zustande kommen: Kann man in jedem Jahr immer nur ein Stück des Netzwerks aufbauen, so würde man mit der lokalen Entscheidung aufgrund der Politik des knappen Geldes auch langfristig genau das richtige tun. Daß dies nicht immer so ist, sondern vom Problem, das man lösen will, abhängt, sieht man an folgender Modifikation des Kabelproblems: Um die Sicherheit der Verbindung zu erhöhen verlangt man, daß jedes Paar von Teilnehmern auf mindesten zwei verschiedene Arten verbunden werden kann. (Fällt dann eine der Verbindungen aus, so kann die Kommunikation immer noch über die andere Verbindung aufrecht erhalten werden.)

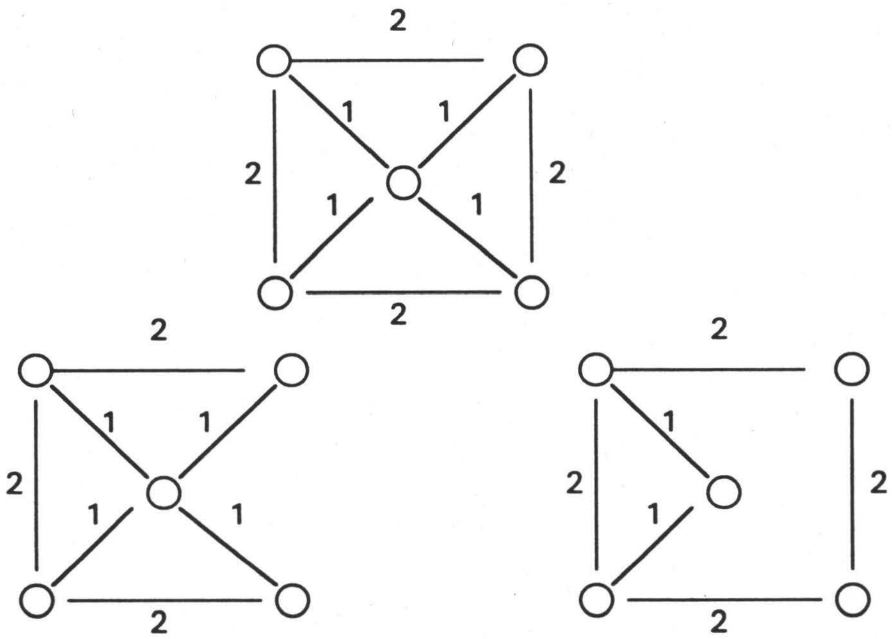


Bild 13: Ein Beispiel eines Graphen G (oben), in dem die Greedy Lösung (unten links) nicht optimal ist (die Lösung unten rechts ist besser)

Analog sieht man, daß man das Greedy-Prinzip nicht zur Bestimmung einer optimalen Lösung benutzen kann, wenn man nicht alle Teilnehmer durch einen Baum verbinden will sondern nur einige der Teilnehmer. Wenn diese Teilnehmer bekannt sind, ist das sich daraus ergebende Problem das bekannte **Steiner-Baum Problem** legt man sich nur auf die Anzahl der zu verbindenden Teilnehmer und die Anzahl für die Verbindung erlaubten Kanten fest, so ist dies das **K-Kardinalitäts Baum Problem** (FHJM92)

Wie schon in den vorhergehenden Abschnitten ziehen wir hieraus den Schluß, daß man bei der Anwendung von Verfahren der Natur auf wirtschaftliche Probleme jeweils sorgfältig prüfen muß, ob dies sinnvoll ist.

5. Zusammenfassung einiger weiterer Verfahren

Ich habe anhand von drei konkreten Beispielen gezeigt, wie Verfahren der Natur in Problemen der Wirtschaft eingesetzt werden können. Dabei habe ich mich auf wirtschaftliche Problem beschränkt, an denen ich in der Vergangenheit gearbeitet habe. In der Optimierungsliteratur findet man eine Fülle von weiteren Beispielen.

So gibt es eine Klasse von Verfahren, die man "genetische Algorithmen" nennt (vgl. Gold88). Diese Verfahren imitieren das "survival of the fittest" Prinzip von Darwin (1809-1882). Eine Menge von zulässigen Lösungen eines Optimierungsproblems wird dabei durch "Mutation", Reproduktion" und "Crossover" (alle diese Operationen werden mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie simuliert) über mehrere Stufen verändert, bis keine Verbesserung mehr eintritt. Solche Verfahren wurden mit gutem Erfolg bei der Stundenplangestaltung und der Planung von Systemen im öffentlichen Personennahverkehr eingesetzt.

"Simulated Annealing" Methoden schauen der Physik ein Modell für die Abkühlung von Festkörpern ab. Bei vorsichtigem Abkühlen hat dabei der Körper beim absoluten Nullpunkt das minimale Energieniveau erreicht und gibt ein "eingefrorenes" Bild der Struktur des Körpers. Ersetzt man nun die Energie durch eine zu minimierende Zielfunktion eines Optimierungsproblems, so kann man das sich so ergebende Verfahren auf verschiedene Optimierungsprobleme anwenden (vgl. LaAa88). Auch bei diesem Verfahren nutzt man entscheidend wahrscheinlichkeitstheoretischen Techniken aus.

In der Nichtlinearen Optimierung schließlich findet man verschiedene Verfahren, die dem Gravitationsgesetz nachgebildet sind. So wie eine Kugel, die man auf einem Berggipfel losläßt in den tiefsten Punkt der Nachbarschaft laufen wird, so "läuft" eine zulässige Lösung auf ein Minimum einer Funktion zu. Diese Verfahren sind sehr gut, wenn das Bild der Funktion "nur ein Tal hat", oder, in der Sprache der Mathematik, wenn die Zielfunktion konvex ist. Dann läuft die Kugel immer in den tiefsten Punkt (vgl. Bild 13).

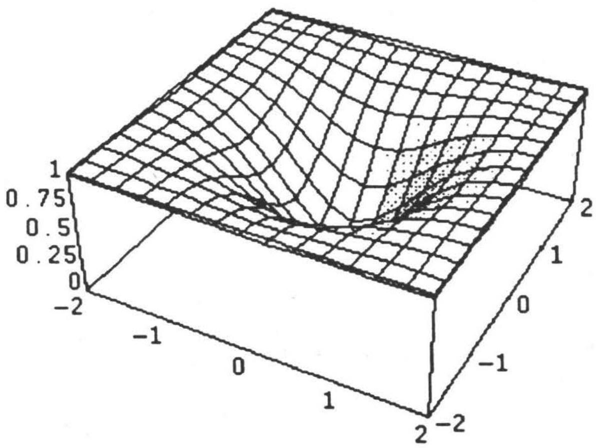


Bild 13: Beispiel einer konvexen Funktion. Eine losgelassene Kugel landet immer im Minimum.

In der mathematischen Optimierung simuliert man dieses Rollen einer Kugel dadurch, daß man für Variable Richtungen sucht, in denen sich bei Änderung der Variablen der Zeilfunktionswert verbessert, bis dies nicht mehr möglich ist. Dies läßt sich schön an den

Kontourlinien einer Funktion verdeutlichen (vgl. Bild 14).

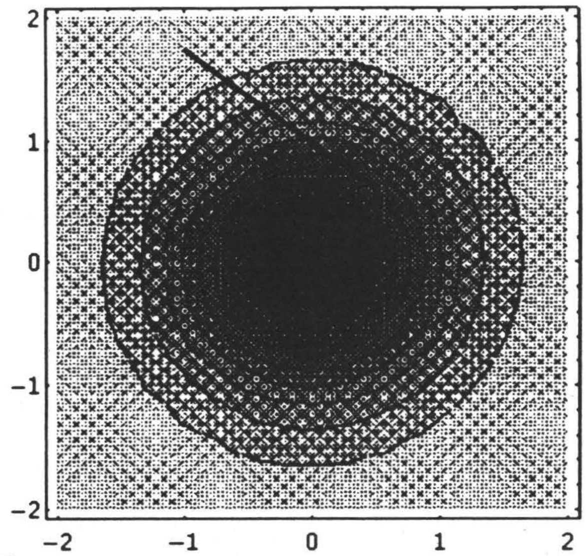


Bild 14: Kontourlinien der Funktion aus Bild 13. Der Zielfunktionswert einer Variablen verbessert sich entlang der eingezeichneten Gerade genauso, wie die Kugel im Bild 13 ins Tal laufen könnte.

Man sieht in Bild 14 auch, daß die "beste" Richtung zur Verbesserung der Zielfunktion direkt in das Minimum führen würde und nicht im Zick-Zack. Dies ist dann das **Verfahren des steilsten Abstiegs**, das in vielen nicht-linearen Optimierungsproblemen angewandt wird.

Literatur:

AhMO92
Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. und Orlin, J.B.: "Network FLows: Theory, Algorithms and Applications", Prentice-Hall (1992)

Broc71
Brockhaus Enzyklopädie, Siebzehnte Auflage des Grossen Brockhaus, F.A. Brockhaus, Wiesbaden (1971)

ChHT88
Choi, W.; H.W. Hamacher und S. Tufekci: "Network Flow Modelling of Building Evacuation Problems as Network with Side Constraints", European Journal of Operations Research (EJOR) 35 (1988), 98-110.

FHJM92
Fischetti, M., Hamacher, H.W., Jörnsten, K und Maffioli, F.: "Maximum Weighted k-Cardinality Trees", Research Report, Politecnico di Milano, eingereicht bei NETWORKS (1992)

FHLY93
Francis, R.L., Hamacher, H.W., Lee C.-Y. und Yeralan, S.: "On Automating Robotic Assembly Workplace Planning", erscheint in Transactions of Institute of Industrial Engineers (IIE) (1993).

FoFu62
Ford, L.R. und D.R. Fulkerson: "Flows in Networks", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962

FoHa93
Foulds, L.R. und Hamacher, H.W.: "Optimal Bin Location and Sequencing in Printed Circuit Board Assembly", erscheint in European Journal of Operations Research (1993).

Gold88
Goldberg, D.E.: "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", Addison Wesley (1988)

HaNi92
Hamacher, H.W. und Nickel, S.: "Restricted Planar Location Problems and Applications", Preprint Nr. 227, Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern (1992) (eingereicht bei Naval Research Logistics)

HaNi93
Hamacher, H.W. und Nickel, S.: "Combinatorial Algorithms for some 1-Facility median problems in the plane", erscheint in European Journal of Operations Research (1993)

HaTu87
Hamacher H.W. und S. Tufekci: "On the Use of Lexicographic Min Cost Flows in Evacuation Modelling", Naval Research Logistics 34 (1987), 487-5O3.

HiTr87
Stefan Hildebrandt und Anthony Tromba: "Panoptikum: Mathematische Grundmuster des Vollkommenen", Spektrum-der-Wissenschaften-Verlagsgesellschaft, Heidelberg (1987)

LaAa88
Laarhoven, P.J.M. van und Aarts, E.H.L.: "Simulated Annealing: Theory and Applications", Reidel Publ. Company, Doortrecht, Holland

Lotk56
Alfred J. Lotka: "Elements of Mathematical Biology", Dover Publications, Inc., NewYork (1956)