UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Mathematik als Vehikel der Philosophie und Weltanschauung

Knut Radbruch

Preprint Nr. 259

ISSN 0943-8874

FACHBEREICH MATHEMATIK

Mathematik als Vehikel der Philosophie und Weltanschauung

Knut Radbruch

Preprint Nr. 259

ISSN 0943-8874

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger Straße
67663 Kaiserslautern

Januar 1995

Mathematik als Vehikel der Philosophie und Weltanschauung[1]

Knut Radbruch (Kaiserslautern)

1. Einstimmung

Mutmaßungen über Philosophie und Weltanschauung

Im neuesten Brockhaus kann man exemplarisch den Unterschied von *Bildung* und *Umgang* erlernen, indem man das Stichwort „Vehikel" aufschlägt. Es wird dort nämlich zwischen einer bildungssprachlichen und einer umgangssprachlichen Deutung bzw. Semantik unterschieden: umgangssprachlich ist demnach das Vehikel ein *klappriges, altes Fahrzeug,* hingegen ist es bildungssprachlich ein *Mittel, durch das etwas deutlich, wirksam wird* oder auch ein *Hilfsmittel.* Auf einer Lehrerfortbildungstagung ist jeder Referent auf Bildung festgelegt; somit ist mein Thema in der Weise zu verstehen, daß ich die Frage entfalten und beantworten möchte, ob und gegebenenfalls wie die Mathematik bei der Entwicklung und Ausgestaltung von Philosophie und Weltanschauung wirksam gewesen ist. Wir fragen also nach Einflüssen, Impulsen, Anregungen - evtl. auch Hemmnissen und Belastungen -, welche Philosophie und Weltanschauung der Mathematik zu verdanken haben. Dazu seien einige grundsätzliche Bemerkungen über Philosophie und Weltanschauung an den Anfang gestellt.

Meine Auffassung von Philosophie läßt sich recht griffig durch vier miteinander zusammenhängende Aktivitäten umschreiben. Philosophie leistet Kritik, Interpretation, Orientierung und Reflexion.

a) Philosophie leistet Kritik - Kritik an kulturellen Situationen, an lebensweltlichen Tendenzen, an Entwicklungen von Wissenschaften. Dazu bedarf es der philosophischen Beobachtung, der radikalen Nachfrage, der detaillierten Analyse.

---

[1] Überarbeitete und erweiterte Fassung eines Vortrags, der am 15.12.1994 in der Bayerischen Akademie für Lehrerfortbildung gehalten wurde.

b) Philosophie wagt Interpretation, indem sie Zusammenhänge und Beziehungen sowohl transparent macht als auch neu herstellt - Zusammenhänge zwischen Theorie und Praxis, zwischen verschiedenen Weisen der Praxis, zwischen verschiedenen Formen des Wissens und der Theorie. Diese Interpretation resultiert aus einer kreativen Deutung der von der Kritik zuvor bereitgestellten Analyse.

c) Philosophie zielt auf Orientierung, und dies im Medium der Vernunft. Hierzu muß die Philosophie Integrationskraft entfalten und dabei Erfahrungen und Kenntnisse entlang der zuvor geleisteten Interpretation in einen Begründungszusammenhang bringen, aus dem sich in folgerichtiger Weise ein verständiges und praktikables Arrangement in der Welt ableiten läßt. In diesem Sinne zielt Philosophie auf Weltorientierung - allerdings nicht Weltorientierung in Form einer allgemein gültigen Vorschrift optimalen Denkens und Handelns, sondern Weltorientierung durch Bereitstellung eines Rahmens transparenter Alternativen möglichen Denkens und Handelns.

d) Philosophie bedarf der Reflexion, weil alles menschliche Denken und Handeln notwendigerweise relativ und niemals endgültig bzw. universell ist. Im Hinblick auf die zuvor genannten drei Eckpfeiler der Philosophie besagt dies: Jede Kritik muß sich zwangsläufig auf einen kleinen Ausschnitt vorfindlicher Situationen beschränken, sie erfaßt also auch nicht entfernt das Ganze. Keine Interpretation erreicht endgültige Klärung der komplexen Zusammenhänge und Beziehungen. Alle Orientierungen haben hypothetischen oder modalen Charakter. Durch Reflexion entgeht Philosophie der Gefahr unzulässiger Endgültigkeit und Abgeschlossenheit, weil sie das jeweils Erreichte in größere Zusammenhänge einrückt und dadurch - gleichsam aus umfassenderer Sicht oder auf einer höheren Stufe - erneut für Kritik öffnet.

Von der Philosophie nun zur Weltanschauung.

In seiner „Kritik der Urteilskraft" mahnt uns Kant, *„die Welt als ein nach Zwecken zusammenhängendes Ganze und als System von Endursachen anzusehen."* [B 413] Die Überschrift des Paragraphen, in welchem sich diese Sätze bei Kant finden, lautet Ethikotheologie. Im heutigen Sprachgebrauch kann man sagen, daß Kant hier in seiner 1790 erschienenen „Kritik der Urteilskraft" Aufgaben und Ziele einer jeden Weltanschauung präzisiert hat. Welche Vorstellung haben wir heute - gut zweihundert Jahre später - von diesem Begriff?

Nach heutiger Auffassung besteht jede Weltanschauung aus einem Verbund dreier Arten von Prinzipien, nämlich aus

(i) Strukturprinzipien für die Welt im Ganzen

(ii) Ordnungsprinzipien für Teilbereiche der Welt

(iii) Verhaltensprinzipien für die Menschen in der Welt.

Dabei handelt es sich nicht um eine Strukturhierarchie; keineswegs werden zunächst Strukturprinzipien für die Welt aufgestellt und daraus dann Ordnungsprinzipien und Verhaltensprinzipien abgeleitet. Die Prinzipien bilden wirklich einen Verbund, bei dem jeder der drei Konstituenten einerseits die anderen beeinflußt, andererseits aber auch von ihnen geprägt wird.

Durch eine Begriffsanalyse des Wortes Weltanschauung gewinnen wir weitere Charakteristika. Weltanschauung ist ein zusammengesetzter Begriff; wofür steht dabei Welt, was meint Anschauung?

Unter Welt ist mitnichten nur der Kosmos zu verstehen. Vielmehr gehören auch Geschichte, Sprache, Musik, bildende Künste usw. dazu, also alles überhaupt Seiende. Und Anschauung meint hier in gar keinem Fall ein kontemplatives, rein rezeptives Betrachten, gemeint ist vielmehr das Ergebnis kreativer und produktiver Beobachtung; jeder Weltanschauung haftet auch etwas Spekulatives an. Nicht passives, sondern aktives Schauen ist gemeint. Folglich verwundert es nicht, daß in der Vergangenheit oft alternative, miteinander konkurrierende Weltanschauungen vertreten wurden.

Aus den skizzenhaften Charakterisierungen folgt unmittelbar, daß sich Philosophie und Weltanschauung nicht unabhängig voneinander entwickeln und ausformen, vielmehr gibt es Einflüsse und Anregungen in beiden Richtungen. Auf einen grundlegenden Unterschied sei jedoch mit Nachdruck hingewiesen. Die Philosophie ist uns überliefert in Texten, etwa in Platons Dialogen, Kants Kritik der reinen Vernunft oder Hegels Phänomenologie des Geistes. Für die Fixierung und Tradierung von Weltanschauungen gibt es kein Medium, welches den Part der Schrift bei der Philosophie übernehmen könnte. Zwar sind umfangreiche Bücher **über** Weltanschauungen geschrieben worden, quasi als Sekundärliteratur. Genannt seien die „Psychologie der Weltanschauungen" von Karl Jaspers und die fünfbändige „Geschichte der abendländischen Weltanschauungen" von Hans Meyer. Aber die Weltanschauungen selbst realisieren sich in aller Regel gerade nicht in der Schriftlichkeit; die Verschriftlichung von Weltanschauungen ist fast immer ein sekundärer, retrospektiver Prozeß. Die primäre Herausbildung von Weltanschauungen vollzieht sich in den zahlreichen Konstituenten einer Kultur: in der Malerei, in der Architektur, in der Musik, in der Literatur usw. Und auch in diesen Medien zeigt sich Weltanschauung meist nicht explizit, wird nicht eigens thematisiert. Vielmehr muß die zugrundeliegende Weltanschauung aus sekundären Effekten, aus implizit wirksamen Impulsen rekonstruiert werden.

2. Besinnung auf den Ursprung einer Orientierung an Mathematik

Pythagoreische Weltanschauung und Platons Philosophie

Die Pythagoreer lebten in Süditalien etwa zwischen 520 v. Chr. und 450 v. Chr.; sie verstanden sich als eine Art Glaubensgemeinschaft mit recht straffen Vorschriften der Lebensgestaltung. Wir verdanken ihnen wesentliche Beiträge zur Arithmetik, Geometrie, Harmonik und Astronomie - also zum Quadrivium.

Für die Pythagoreer waren die Sterne Götter, welche unser Schicksal entscheidend beeinflussen, und zwar nach strengen Regeln. Deshalb bemühten sie sich um eine wissenschaftliche Beschreibung der Planetenbewegung - Astronomie als Hilfswissenschaft für Theologie bzw. Astrologie. Bei dem stoischen Philosophen Geminos von Rhodos - er lebte etwa 75 v. Chr. - heißt es: *„Es liegt nämlich der gesamten Astronomie die Annahme zu Grunde, daß die Sonne, der Mond und die fünf Planeten sich erstens mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, zweitens in kreisförmigen Bahnen und drittens in einer Bewegung des Weltalls entgegengesetzten Richtung bewegen. Die Pythagoreer waren die ersten, welche an derartige Untersuchungen herantraten und für die Sonne, den Mond und die fünf Planeten kreisförmige und gleichmäßige Bewegungen annahmen."* [v. d. Waerden, 1977, S.14] Den Planetenbewegungen wurden also geometrische Formen und arithmetische Beziehungen zugesprochen.

Auch in die Harmonik trugen die Pythagoreer mathematische Ordnungsprinzipien hinein. Ausgangspunkt der pythagoreischen Harmonielehre ist die Zuordnung von Proportionen zu Grundintervallen. So wurden zugeordnet

der Oktave	die Proportion	2:1
der Quinte	die Proportion	3:2
der Quarte	die Proportion	4:3

Diese Zuordnung ist nun - und darin liegt der besondere Pfiff - so vorgenommen, daß der Zusammensetzung der Intervalle [Quinte + Quarte = Oktave] das Produkt der zugehörigen Proportionen [(3:2)·(4:3) = (2:1)] entspricht. Das Charakteristische des pythagoreischen Denkens besteht darin, daß mit den einzelnen Zuordnungen zugleich die Gesetzmäßigkeit der vielen Zuordnungen gegeben wird. Ausgehend von den genannten Basiszuordnungen baut sich nun die Harmonielehre der Pythagoreer auf. Über Quinte - Quarte = Ganzton und die dem Ganzton zugeordnete Proportion (3:2):(4:3) = (9:8) gelangt man rasch zur pythagoreischen Stimmung.

Aus der Tragweite mathematischer Ordnungsprinzipien in so verschiedenen Bereichen wie Musik und Astronomie schlossen die Pythagoreer nun auf mathematische Strukturprinzipien der Welt im Ganzen und machten damit Mathematik zum Fundament bzw. Leitprinzip ihrer Weltanschauung. Sie waren überzeugt davon, daß der Schöpfer die Welt nach geometrischem Muster und gemäß arithmetischen Gesetzmäßigkeiten geschaffen hat. Der Pythagoreer Philolaos beschreibt diese Überzeugung in enthusiastischer Weise: *„Denn groß und vollkommen vollendet und alles bewirkend und göttlichen und himmlischen sowie menschlichen Lebens Anfang sowie Anteil nehmende Führerin ist die Kraft der Zahl..."* [Die Vorsokratiker I, S.145ff]. Und Aristoteles berichtet über die Pythagoreer: *„... da sie dazu noch in den Zahlen die Affektionen und Verhältnisse der Harmonien erblickten, weil sie also glaubten, alle anderen Dinge glichen in ihrer ganzen Natur nach den Zahlen und die Zahlen seien das Erste in der ganzen Natur, nahmen sie an, daß die Elemente der Zahlen die Elemente aller Dinge seien ..."* [Metaphysik 985b/986a] Konsequenterweise war bei den Pythagoreern Bemühung um Mathematik und Beschäftigung mit Mathematik zugleich Dienst am Göttlichen, also Gottesdienst.

Die Auszeichnung der Wissenschaft Mathematik als Basis einer allgemeinen Weltanschauung hat Rang, Ansehen und Entwicklung der Mathematik in der Antike außerordentlich stark gefördert. Diese Koppelung von Mathematik und Weltanschauung induziert aber natürlich auch wechselseitige Anfälligkeit. Die an Geometrie und Arithmetik orientierte Weltanschauung der Pythagoreer geriet in eine tiefe Krise, als in der Mathematik die Inkommensurabilität entdeckt wurde. Diese Beobachtung bestand ja eigentlich nur darin, daß innerhalb der Mathematik gewisse Relationen nicht durch natürliche Zahlen beschrieben werden können und führte später zur Proportionenlehre. Aber die These, daß alle vom Schöpfer gestifteten

Verhältnisse durch Zahlen beschrieben werden können, war erschüttert; die pythagoreische Weltanschauung erfuhr einen herben Rückschlag, die Beziehung zum Schöpfer war empfindlich gestört. Über den pythagoreischen Philosophen und Mathematiker Hippasos wird berichtet, er sei bei einem Schiffsunglück ums Leben gekommen und von seinen Glaubensbrüdern sei dies als Strafe Gottes gedeutet worden. Hippasos hatte sich nämlich beim „Gottesdienst“ schlecht benommen; er hatte die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks ausgeplaudert.

Die auf Mathematik gegründete Weltanschauung der Pythagoreer wurde mit gewissen Modifikationen von Platon übernommen. Das Vertrauen in die universelle Kraft der Zahlen nimmt in seinem Dialog Politeia teilweise allerdings skurrile Formen an: *„Es hat aber das göttliche Erzeugte einen Umlauf, welche eine vollkommene Zahl umfaßt, das menschliche aber eine Zahl, in welcher, als der ersten, Vermehrungen - hervorgebrachte und hervorbringende - nachdem sie drei Zwischenräume und vier Glieder von teils ähnlich und unähnlich, teils überschüssig und abgängig machenden Zahlen empfangen haben, alles gegeneinander meßbar und ausdrückbar darstellen; wovon dann die vierdrittige Wurzel, mit der fünf zusammengespannt und dreimal vermehrt, zwei Harmonien darstellt, die eine gleichvielmal gleiche, hundert ebensovielmal, die andere, gleichlängig zwar der länglichen, aber von hundert Zahlen von den aussprechbaren Durchmessern der fünf jeder um eins verkürzt, unaussprechbaren aber zwei und von hundert Würfeln der drei. Diese gesamte geometrische Zahl entscheidet hierüber, über bessere und schlechtere Zeugungen; und wenn aus Unkenntnis dieser eure Wächter den Jünglingen Bräute zugesellen zur Unzeit, so wird das Kinder geben, die weder wohlgeartet sind noch wohlbeglückt.“* [Politeia 546b-d] Was hier geometrische Zahl genannt wird, heißt in der Sekundärliteratur meist Hochzeitszahl. Ob diese Zahl durch Platons Beschreibung eindeutig festgelegt ist, darüber sind die Philologen uneins. In jedem Fall bestätigt diese Passage aus Platons Staat zusammen mit den bislang erörterten Beispielen unsere Kennzeichnung einer Weltanschauung als Verbund, und zwar als Verbund von Strukturprinzipien der Welt im Ganzen, von Ordnungsprinzipien in Teilbereichen, von Verhaltensprinzipien in der Gemeinschaft.

Bei Platon werden erstmals Mathematik und Philosophie in einen umfassenden Beziehungs- und Begründungszusammenhang gebracht. Sowohl seine Dialoge als auch seine ungeschriebene Lehre enthalten Aufschlüsse und Einsichten in die

Interdependenz von Mathematik und Philosophie, welche durch den Reichtum der aufgezeigten Bezüge und die innere Konsequenz der vielfältigen Wechselbeziehungen als Maßstab für jede Begegnung von Mathematik und Philosophie Gültigkeit haben. Ich schildere hier zunächst Platons philosophischen Zugriff auf die Mathematik seiner Zeit und widme mich anschließend der Vehikel-Funktion von Mathematik für Platons Philosophie.

Am Beispiel der Mathematik wurde in der klassischen Antike eine neue Art von Wissen und damit die Möglichkeit von Wissenschaft überhaupt entdeckt. Worin bestand die grundlegende Neuerung? In der babylonischen Geometrie werden durchaus anspruchsvolle, jedoch stets konkrete und praxisorientierte Aufgaben zusammen mit der Lösung in Gestalt einer detaillierten Rechenvorschrift präsentiert. In der Geometrie des Thales hingegen werden Behauptungen von bis dahin nicht gekannter Allgemeinheit aufgestellt: "In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß." "Jeder Kreis wird durch jeden seiner Durchmesser halbiert." Diese völlig neuartigen Aussagen erhalten darüberhinaus den Status begründeten Wissens, denn sie werden bewiesen und damit werden erstmals in der abendländischen Geschichte Aussagen mit einem völlig neuen, zuvor nicht gekannten Wahrheitsanspruch gemacht.
Doch nun setzt philosophische Kritik ein, indem radikal nachgefragt wird, wovon die thaletische Geometrie eigentlich handelt. In den geometrischen Aussagen ist die Rede von Kreisen, Dreiecken, Winkeln usw. und es handelt sich stets um Gleichheitsbehauptungen. Für welche Objekte sind die Sätze des Thales gültig und was bedeutet darin Gleichheit? Diese Kritik, von Platon zunächst meisterhaft vorgetragen, wurde ebenfalls von Platon in eine Interpretation übergeführt. Sein genialer Einfall besteht darin, mit den mathematischen Ideen einen Bereich intelligiblen Seins zu postulieren; die Sätze der thaletischen Geometrie, so sagt er, gelten für die Idee des Kreises, die Idee des Dreiecks und zwar bezüglich der Idee der Gleichheit. Im Anschluß an diese neue Interpretation gewinnt nun die Mathematik für Platon eine doppelte Orientierungsfunktion, nämlich sowohl für die Philosophie als auch für die lebensweltliche Praxis.
Die Orientierungsfunktion der Mathematik für die Menschen in dem von ihm entworfenen utopischen Staat hat Platon mit kaum zu überbietender Deutlichkeit herausgearbeitet. Nicht nur Philosophen, sondern auch Staatsmänner, Kaufleute, Handwerker - kurz: alle Bürger - gewinnen durch Unterricht und Studien in Rechenkunst

und Meßkunst das Vermögen zu pragmatischer Orientierung im Alltag: *„Denn auf Haushaltung und auf Staatsverwaltung und auf alle Künste hat kein einziger Unterrichtsgegenstand so großen Einfluß wie die Beschäftigung mit den Zahlen.“* [Nomoi 747b]

Platon bleibt nicht gefangen im Erreichten. Mittels Reflexion weist er auf Grenzen hin und verleiht dabei insbesondere der Mathematik neue Impulse. Gerade weil sich die Mathematik als Orientierungsdisziplin in mehrfacher Hinsicht bewährt hat, muß sie seiner Meinung nach inhaltlich weiter vorangetrieben und in ihrem Bestand begrifflich restrukturiert werden. Der Aristotelesschüler Dikaiarch berichtet über die Blütezeit der Platonischen Akademie: *"Wirklich zu erkennen war in jener Zeit auch ein großer Fortschritt der mathematischen Wissenschaften, wobei Platon die baumeisterliche Leitung hatte und Aufgaben stellte, die dann die Mathematiker mit Eifer erforschten. Daher erreichten auf diese Weise damals zuerst die (allgemeine) Maßtheorie und die Probleme der Definitionen einen Höhepunkt, indem Eudoxos und seine Schüler die ursprünglichen (altertümlichen) Ansätze des Hippokrates (von Chios) vollständig erneuerten. Es machte aber (im besonderen) auch die Geometrie einen großen Fortschritt. Denn man schuf sowohl die (Methode der) Analysis als auch die Hilfsannahme der Möglichkeitsbestimmungen (Dihorismoi); und insbesondere brachten sie die Geometrie ein großes Stück voran."* [Gaiser, 1988, S.152]

Reflexion über den aktuellen Stand der Disziplin mündet also wieder in Kritik und führt dann weiter zu neuartiger Interpretation und Orientierung. Daran schließt sich dann naturgemäß wieder Reflexion an.

Ganz offensichtlich waren die mathematischen Ideen die ersten „Ideen“ Platons; die Überzeugungskraft dieser philosophischen Antwort auf die Mathematik hat ihn jedoch angeregt, zunächst die Problemstellung und dann auch den Lösungsweg auf andere Bereiche, insbesondere auf das Sein als Gegenstand philosophischer Untersuchung, zu übertragen. Er fragt allgemein nach der Beziehung zwischen empirischer Wahrnehmung und theoretischer Aussage und entwickelt mit seiner Ideenlehre eine Antwort nach dem Muster seiner Philosophie der Mathematik. Patzig meint: *„Wir können annehmen, daß Platon am Beispiel der Geometrie etwas aufgegangen ist, das er in der Ideenlehre festhielt.“* [Patzig, 1980, S.126] Und Mittelstraß spricht von einer *„Orientierungsfunktion, die die Konzeption zumal geometrischer Ideen im Rahmen der Genese der Ideenlehre hat.“* [Mittelstraß, 1985, S.406] Hier fungiert doch Mathematik nun wirklich als Vehikel für Philosophie im bildungssprachlichen Sinn. Eine systematische und zusammenfassende Darstellung seiner Ideenlehre hat Platon zu keiner Zeit gegeben oder auch nur geplant. Er hat in seine Dialoge lediglich fragmentarische Andeutungen der Ideenlehre eingearbeitet; dabei hat er jedoch immer wieder das Schema Kritik - Interpretation - Orientierung - Reflexion verwendet.

3. Ein zeitloses Leitmotiv für Philosophie und Weltanschauung

Maß - Zahl - Gewicht

Wenn Seiendes nicht nur als Kollektiv beziehungsloser Entitäten zur Kenntnis genommen, sondern als Gefüge bzw. Struktur begrifflich beschrieben oder anschaulich dargestellt werden soll, bedarf es dazu kognitiver Prinzipien. Als derartige Ordnungsprinzipien fungieren Maß, Zahl und Gewicht seit mehr als zweitausend Jahren in fast allen kulturellen Bereichen. z.B. in Philosophie, Weltanschauung, Religion, Musik, Malerei, Literatur usw. Dabei zeigt sich immer wieder - oft explizit, mitunter aber auch nur implizit - ein enger Zusammenhang mit mathematischen Disziplinen. Wir schildern hier exemplarisch einige Stationen jener Entwicklung und achten insbesondere auf unterschiedliche Aspekte des Bezugs zur Mathematik.

Im Dialog Philebos weist Platon den drei genannten Prinzipien eine zentrale Rolle zu: *„Zum Beispiel, wenn jemand aus allen Künsten die Rechenkunst und Meßkunst und die Waagekunst ausscheidet, so ist es, geradeheraus zu sagen, nur etwas Geringfügiges, was von einer jeden dann noch übrigbleibt."* [Philebos 55e] Es muß beachtet werden, daß mit Künsten hier keinesweg nur die schönen Künste, sondern auch Handwerkskunst, Kriegskunst usw. gemeint sind. Bei Platon dienen Maß, Zahl und Gewicht somit in allen Teilbereichen als Ordnungsprinzipien. An einer anderen Stelle weist Platon insbesondere auf deren Präzisionscharakter hin: *„Haben sich nun nicht Messen, Zählen und Wägen als die dienstlichen Hilfsmittel hiergegen erwiesen, so daß das scheinbare Größere oder Kleinere oder Mehrere und Schwerere nicht in uns aufkommt, sondern das Rechnende, Messende und Wägende?"* [Politeia 602d] Auch die Regierung sollte sich, so meint Platon, die Prinzipien zueigen machen: *„Denn da es zwei Gleichheiten gibt, die zwar mit demselben Namen bezeichnet werden, in der Tat aber in vielen Hinsichten einander fast entgegengesetzt sind, so ist* *jeder Staat und Gesetzgeber vermögend, die eine derselben, die auf Maß, Gewicht und Zahl begründete, bei den Ehrungen einzuführen ...“* [Nomoi 757b]

Für Platon sind Maß, Zahl und Gewicht offensichtlich sowohl Strukturprinzipien für die Welt im Ganzen, als auch Ordnungsprinzipien für Teilbereiche und normative Verhaltensprinzipien für die Bürger. Immer wieder leitet er daraus didaktische Funktionen für Bildung und Ausbildung ab, insbesondere für die dem Maß zugehörige Geometrie und die zur Zahl gehörige Arithmetik. *„Denn offenbar ist die Meßkunst die Kenntnis des immer Seienden. Also, Bester, wäre sie auch ... ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung ... So sehr als möglich müssen wir also, sprach ich, darauf halten, daß dir die Leute in deinem Schönstaate der Geometrie nicht unkundig seien.“* [Politeia 527b]. *„Hast du wohl dies schon bemerkt, wie die, welche von Natur Zahlenkünstler sind, auch in allen anderen Kenntnissen sich schnell fassend zeigen, die von Natur Langsamen aber, wenn sie im Rechnen unterrichtet und geübt sind, sollten sie auch keinen andern Nutzen daraus ziehen, wenigstens darin alle gewinnen, daß sie in schneller Fassungskraft sich selbst übertreffen.“* [Politeia 526b]. Dem Gewicht ordnet Platon keine Wissenschaft zu, die in seiner Philosophie und Pädagogik eine zu Geometrie oder Arithmetik vergleichbare Position einnehmen würde.

In den Weisheitsbüchern Salomos fungieren Maß, Zahl und Gewicht als Strukturprinzipien der Welt im Ganzen, und zwar sind es Prinzipien, von denen sich der Schöpfer hat leiten lassen: *„Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti - Du hast alles geordnet nach Maß, Zahl und Gewicht.“* [Salomos Buch der Weisheit XI, 21]. Diese Anbindung der drei Prinzipien an religiöse Überlegungen wird von mehreren Denkern des Mittelalters aufgegriffen. Insbesondere Augustin, Albert der Große, Thomas von Aquin und Bonaventura haben entlang Maß, Zahl und Gewicht jenen Ordo-Gedanken entfaltet, der für fast ein Jahrtausend eine metaphysisch orientierte Philosophie und Weltanschauung geprägt hat. [vgl. Krings, 1982]. Bei Nikolaus von Kues findet ein Bedeutungswandel des Gewichts-Prinzips statt, indem im Rückgang zur pythagoreischen Denkweise das Gewicht der Musik zugeordnet wird. *„In bewunderungswürdiger Ordnung sind deshalb die Elemente von Gott gegründet, der alles nach Zahl, Gewicht und Maß geschaffen hat. Die Zahl bezieht sich auf die Arithmetik, das Gewicht auf die Musik, das Maß auf die Geometrie.“* [N. v. Kues, 1967, S.111] Unangetastet bleibt jedoch die zentrale Rolle der Mathematik für die Weltanschauung: *„Daher haben bedeutende Männer, wenn sie irgendetwas*

Großes ausgesprochen haben, es in mathematischem Gleichnis begründet.“ [N. v. Kues, 1973, S.51]

Durch Descartes werden die Ordo-Prinzipien wieder aus ihrer Bindung an feste Disziplinen befreit und zur Basis einer „mathesis universalis“ gemacht. In den „Regulae ad directionem ingenii“ erklärt er, *„daß nur all das, worin Ordnung und Maß untersucht wird, zur Mathematik gehört, und es nicht darauf ankommt, ob ein solches Maß in Zahlen, Figuren, Sternen, Tönen ... zu suchen ist, und daß es demnach eine allgemeine Wissenschaft geben müsse, die all das entwickelt, was bezüglich Ordnung und Maß, noch ohne einem besondern Gegenstand zugesprochen zu sein, zum Problem gemacht werden kann, und daß sie mit einem gar nicht weit hergeholten, sondern schon gewohnten und in Gebrauch befindlichen Namen als »Mathesis Universalis« bezeichnet wird.".* [Descartes, 1979, S.88] Hier leistet offensichtlich die vom Maß, Zahl und Gewicht getragene Weltanschauung Geburtshilfe für eine neue Wissenschaftsauffassung und insbesondere für eine neue mathematische Disziplin, nämlich die „Mathesis Universalis.“

Analoge Pläne entwirft Leibniz mit der von ihm projektierten „Characteristica Universalis“, in der *„man jedem Gegenstand seine bestimmte charakteristische Zahl beilegen kann.“* [Leibniz, 1966, S.30] Die ausgearbeitete Theorie wird, so hofft er, *„alle Fragen insgesamt auf Zahlen reduzieren und so eine Art von Statik darstellen, vermöge deren die Vernunftgründe gewogen werden können.“* [S.37] Den Weg zu dieser allgemeinen Charakteristik beginnt Leibniz mit den drei Ordnungsprinzipien Maß, Zahl und Gewicht, doch setzt er schon am Anfang recht eigenwillige Prioritäten: *„Ein altes Wort besagt, Gott habe alles nach Gewicht, Maß und Zahl geschaffen. Manches aber kann nicht gewogen werden: nämlich all das, dem keine Kraft oder Potenz zukommt, manches auch weist keine Teile auf und entzieht sich somit der Messung. Dagegen gibt es nichts, das der Zahl nicht unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt, und die Arithmetik eine Art Statik des Universums, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen.“* [S.30]

Der bedeutendste Reformpädagoge des 17. Jahrhunderts, Comenius, hat in seinen allgemeinen Bildungskanon ebenfalls Maß, Zahl und Gewicht als Leitprinzipien aufgenommen: *„Weil aber die Grundlage für dies alles das Mathematische ist und weil die Wurzeln aller unserer Überlegungen im Zählen, Messen und Wiegen liegen,.... müssen in allen Muttersprach-(Volks-) Schulen Arithmetik, Geometrie und*

Statik in umfassender Weise behandelt werden." [Comenius, 1965, S.317] Für Comenius besitzen Jugendliche einen angeborenen, intuitiven Zugang zu diesen Unterrichtsgegenständen: *„Gib einem Knaben ein Lineal, einen Zirkel, eine Waage, Zahl- und Maßzeichen - du wirst über vieles zu staunen haben!"* [S.285]
Es versteht sich von selbst, daß die auf Maß, Zahl und Gewicht gegründete Weltanschauung insbesondere die Entwicklung der exakten Naturwissenschaften wesentlich mitbestimmt hat. Darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden. Vielmehr möchte ich einige Spuren dieser Ordnungsprinzipien in den Geisteswissenschaften aufzeigen und damit insbesondere die Universalität der entsprechenden Weltanschauung deutlich machen.
Im Jahr 1619 erschien Johann Valentin Andreaes utopischer Roman „Christianopolis", in welchem ein idealer Staat geschildert wird. Die Ausbildung der Jugend findet in einer Schule statt, welche in acht "Auditorien" unterteilt ist. Der Mathematik wird dabei eine entscheidende Bildungsfunktion zugewiesen: *"Das dritte Auditorium hat seinen Namen nach der Arithmetik, der Schatzmeisterin allen Scharfsinns. Unendliche Schätze vertraute ihr der an, der Einer und Drei zugleich ist. Betrachtet man die menschliche Arbeit, so gibt es keinen Wissenszweig, dem nicht sie eine außerordentliche Hilfe leistete ... Man kann sagen, wer die Arithmetik nicht kennt, weiß gar nichts."* [Andreae, 1975, S.88] Zunächst einmal ist bemerkenswert, daß Andreae bei der Schilderung der mathematischen Wissenschaften mit Arithmetik beginnt; hier knüpft er offenbar an pythagoreisches Gedankengut an. Er stellt aber auch den pragmatischen Nutzen dieser mathematischen Disziplin für den Alltag heraus, indem er auf ihren Beitrag zur *"Erleichterung der Dinge des täglichen Lebens"* [S.89] hinweist. Die Geometrie wird sodann als leibliche Schwester der Arithmetik eingeführt; sie hat gegenüber der Arithmetik den Vorteil der Anschauung und ist deshalb *"dem Gebrauch durch den Menschen besser angepaßt"* [S.89] Der Algebra wird keine mit Geometrie und Arithmetik gleichrangige Bedeutung zugesprochen. Andreae gibt hierfür eine rein didaktische Begründung, denn seiner Meinung nach erfordert Algebra einen besonders ausgeprägten Scharfsinn, welchen er nicht von allen Bürgern erwartet. Im vierten Auditorium folgt auf die Mathematik die Musik, jedoch gilt: *"Man kann dort nicht eintreten, bevor man nicht das Studium der Arithmetik und Geometrie durchlaufen hat."* [S.91] Das klassische Quadrivium wird komplettiert durch die Astronomie im fünften Auditorium. Zum Abschluß seiner Ausführungen über Mathematik greift Andreae zwei der drei traditionellen Ordo-

Prinzipien explizit auf: *„Diejenigen aber, die älter an Jahren sind, gelangen noch höher hinauf, da auch Gott seine Zahlen und Maße hat, die zu betrachten dem Menschen ziemt. Denn jener höchste Baumeister hat keineswegs dieses Weltgebäude aufs Geratewohl geschaffen, sondern es mit Maßen, Zahlen und Verhältnissen sehr weise angereichert."* [S.90]

Nicht nur in der Literatur, sondern auch in der Literaturtheorie fanden die Ordo-Prinzipien Berücksichtigung. Johann Christoph Gottsched lieferte in seinem 1730 erschienenen „Versuch einer Critischen Dichtkunst vor die Deutschen" eine originelle Poetik und leistete damit einen wichtigen Beitrag zur neuen Ästhetik im Zeitalter der Aufklärung. Zentrale Begriffe bei Gottsched sind Schönheit und Geschmack. Dabei entwickelt er seine Theorie der Schönheit entlang des Begriffstrios Maß - Zahl - Gewicht. *"Die Schönheit eines künstlichen Werkes beruht nicht auf einem leeren Dünkel, sondern hat ihren festen und notwendigen Grund in der Natur der Dinge. Gott hat alles nach Zahl, Maß und Gewicht geschaffen. Die natürlichen Dinge sind schön; und wenn also die Kunst auch was Schönes hervorbringen will, muß sie dem Muster der Natur nachahmen. Das genaue Verhältnis, die Ordnung und richtige Abmessung aller Teile, daraus ein Ding besteht, ist die Quelle aller Schönheit."* [Gottsched, 1972, S.70]. Mathematik und Schönheit haben hier den gleichen Ursprung, nämlich Gottes Schöpfungsprinzipien Zahl, Maß und Gewicht. Auch in der Poetik gibt es für Gottsched in genauer Analogie zur Mathematik innere Notwendigkeit, allgemeine Schlußregeln, zwingende Demonstrationen. Nur die Ausformung fällt ein wenig anders aus, insbesondere ist sie anspruchsvoller: *"Alle diese Künstler, wenn sie anders geschickte Leute sind, werden haarklein zu zeigen wissen, was vor eine natürliche Notwendigkeit in dem allen steckt, und den Grund ihrer Regeln, in der Empfindung und gesunden Vernunft entdecken. In der Beredsamkeit und Poesie geht es nicht anders. Kann hier gleich das Verhältnis nicht mit Zahlen und Linien ausgedrücket, mit Zirkel und Lineal abgemessen und so handgreiflich gemacht werden, als in den andern Dingen, wo man durch Hülfe der Geometrie alles sehr ins Licht setzen kann: so folgt doch deswegen noch nicht, daß hier alles willkürlich sei. Unsre Gedanken sind so vieler Harmonie, Ordnung, Abmessung und Verhältnis fähig, als Figuren und Töne. Nur es gehören scharfsinnigere Köpfe dazu, die Schönheiten solcher Dinge, die man weder fühlen noch greifen kann, recht auszugrübeln, und in ihren ersten Quellen zu untersuchen."* [Gottsched, 1972, S.71]

Dies ist aber nun wirklich eine Poetik im Geiste der Mathematik. Übrigens hat Gottsched der Mathematik auch in lyrischer Gestalt ein Kompliment gemacht:

> Ich weis, gelehrter Freund! du liebst die Wissenschaft,
> Du kennst des Menschen Geist, des Körpers Bau und Kraft,
> Die Pracht des Erdenballs, des Himmels Wunderwerke,
> und schliessest dann daraus des Schöpfers Macht und Stärke.
> Du siehst Natur und Welt mit andern Augen an,
> Als mancher, der nichts denkt, als was er greifen kan;
> Und findest mit Vernunft, in jedem Körnchen Sandes,
> Die sonnenklare Spur des ewigen Verstandes.
> Euclides, den du liebst, hat dich geschickt gemacht,
> Die Schönheit dieser Welt, an Ordnung, Glanz und Pracht,
> Nach Maaß, Gewicht und Zahl zu prüfen, zu ergründen,
> Und täglich größre Lust in dem Bemühn zu finden.
> [Gottsched, 1736, S.616]

Von den Schriftstellern wurden die Ordo-Prinzipien in recht unterschiedlicher Intention aufgenommen. Bei Hölderlin wirken sie beruhigend und disziplinierend. In seinem Roman Hyperion lesen wir: *„Bald führte mein Adamas in die Heroenwelt des Plutarch, bald in das Zauberland der griechischen Götter mich ein, bald ordnet' und beruhigt' er mit Zahl und Maas das jugendliche Treiben ...“* [Hölderlin, 1957, S.14] In Musils „Mann ohne Eigenschaften“ geht es um eine Analyse der Bedingungen für neue Entdeckungen: *„Sieht man ... zu, welche Eigenschaften es sind, die zu Entdeckungen führen, so gewahrt man Freiheit von übernommener Rücksicht und Hemmung, Mut ... und eine Verehrung für Maß und Zahl, die der schärfste Ausdruck des Mißtrauens für alles Ungewisse ist.“* [Musil, 1978, S.303]
An den Schluß unserer Ausführungen über Maß, Zahl und Gewicht plazieren wir ein Gedicht des Druckers, Rechenmeisters und Stadtschreibers in Oppenheim, Jacob Köbel, welches Adam Riese [genauer: Ries] als Vorrede in die 10. Auflage seines 2. Rechenbuches, erschienen 1532, übernommen hat.

Pythagoras
Der ſagt furwar
All ding/durch zal werd offenbar.
Drumb/ſch mich an/verſchmche mich nit
Durch leſs mich vor/das ich dich bit/
Vnd merck/zum anfanck/meine leer/
zu Rechens kunſt/dadurch dich ker.
Inn zal/ynn Maſs/vnd ynn Gewicht/
All ding von Gott ſein zugericht.
Klerlichen Salomon das ſagt/
On zal/on maſs/Gott nicht behagt.
Beſchreibt vns auch Sanct Auguſtin/
Vnd mandt vns vleiſſig ynn den ſyn.
Sich ſol kein menſch nichts vnderſtehen/
Kein Göttlich/weltlich kunſt begehn.
On Rechens art durch ware zal/
Bewert iſt das ynn manchem fal.
Ein menſch dem zal verborgen iſt/
Leichtlich der verfurt wird mit liſt.
Dis nym zu hertzen/bit ich ſeer/
Vnd yeder ſein Kind Rechen leer.
Wie es gegen Gott vnd welt ſich halt/
So werden wir ynn Ehren alt.
Numerio

Vorrede in der 10. Auflage des „2. Rechenbuchs“ von Adam Ries, aus dem Rechenbuch von Jakob Kobel (Köbel) übernommen

Kopie aus Becker, 1994, S.42]

4. Ein oft gelobtes und ebenso oft gescholtenes mathematisches Methodenideal

more geometrico

Im Jahre 1677 erschien postum Spinozas „Ethica ordine geometrico demonstrata“. In der Präsentations- und Argumentationsweise orientiert sich der Autor dabei an Euklids Elementen. Euklid beginnt mit Definitionen, Axiomen und Postulaten; dann folgen die durchnumerierten Lehrsätze mit Beweis. Allerdings spricht Euklid weder von „Lehrsatz“ noch von „Beweis“. Spinoza stellt Begriffsbestimmungen und Grundsätze an den Anfang; dann folgen die genauestens durchnumerierten und auch explizit so benannten Lehrsätze. Nach dem philologisch erprobten Verfahren des Parallelstellenvergleichs stellen wir einige Passagen von Euklid und von Spinoza nebeneinander.

Euklid	Spinoza
Die Elemente	*Die Ethik*
Definitionen 1. Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat.	*Begriffsbestimmungen* 1. Unter *Ursache seiner selbst* verstehe ich dasjenige, dessen Wesen die Existenz notwendig einschließt, oder dasjenige, dessen Natur nicht anders als existierend gedacht werden kann.
5. Eine *Fläche* ist, was nur Länge und Breite hat.	6. Unter *Gott* verstehe ich das absolute unendliche Sein, das heißt die Substanz, die aus unendlich vielen Attributen besteht, deren jedes ewige und unendliche Wesenheit ausdrückt.
Axiome	*Grundsätze*
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich. 8. Das Ganze ist größer als der Teil.	I. Alles was ist, ist entweder in sich oder in einem anderen. IV. Die Erkenntnis der Wirkung hängt ab von der Erkenntnis der Ursache und schließt diese ein.

In den Definitionen bei Euklid sowie den Begriffsbestimmungen bei Spinoza werden Grundbegriffe definiert, mit denen im weiteren Verlauf des Textes gearbeitet wird. Die Axiome bzw. Grundsätze bestehen aus unbewiesenen oder auch unbeweisbaren Aussagen, deren Wahrheit vorausgesetzt wird. Daran schließen sich die Lehrsätze an; wir geben hier zwei Beispiele aus Spinozas Ethik:

„Elfter Lehrsatz

Gott oder die Substanz, die aus unendlich vielen Attributen besteht, deren jedes ein ewiges unendliches Wesen ausdrückt, existiert notwendig.

Beweis. Wer diesen Satz verneint, der denke sich - wenn er's vermag - Gott existiere nicht. Dann schließt also (nach Grunds. VII) sein Wesen die Existenz nicht ein. Doch das ist (nach Lehrs. 7) widersinnig: also existiert Gott notwendig. - W.z.b.w.

...

Vierunddreißigster Lehrsatz

Gottes Macht ist sein Wesen selbst.

Beweis. Denn aus der bloßen Notwendigkeit des göttlichen Wesens folgt, daß Gott die Ursache seiner selbst (nach Lehrs. 11) und (nach Lehrs. 16 und dessen Folges.) allere Dinge ist. Folglich ist die Macht Gottes, kraft deren er selbst und alles ist und handelt, sein eigenes Wesen selbst. - W.z.b.w."

Bei Spinoza werden für zahlreiche Lehrsätze mehrere Beweise gegeben. Das ist für den heutigen Leser mathematischer Lehrbücher keineswegs ungewohnt; doch muß gesehen werden, daß eine derartige Darstellung bei Euklid nicht zu finden ist - hier geht Spinoza ganz bewußt neue Wege.

Wie ist nun Spinozas Präsentation eines religiösen Inhalts more geometrico zu verstehen? Spinoza ist sich des Unterschieds von Mathematik einerseits sowie Philosophie und Religion andererseits voll bewußt. Er sieht aber auch Gemeinsamkeiten, und zwar in der Argumentationsstruktur. Alle Lehrsätze in Euklids Elementen lassen sich deduktiv aus den Definitionen, Axiomen und Postulaten folgern. Sätze und Beweise entfalten also - legen frei - machen transparent, was in dem Anfang zwar enthalten, aber zunächst noch verborgen ist. Spinoza geht es um diese Übereinstimmung von Mathematik und Theologie: daß alle Wahrheit schon im Anfang, also im Axiomensystem, enthalten ist. Folgerichtig sind für ihn Euklids Elemente optimales Vorbild für eine angemessene Präsentation seiner Ethik. Wissenschaftstheoretisch liegt Euklids Elementen und Spinozas Ethik die Auffassung zugrunde, daß jede Erkenntnis an Voraussetzungen gebunden ist. Übereinstimmung besteht in der Form des „voraus" und des „setzen".

Spinozas „more geometrico" entsprach dem damaligen Zeitgeist und dokumentiert sowohl den neuen Aufschwung, welche die Mathematik in der Renaissance erfahren hatte als auch den Siegeszug der von Galilei begründeten exakten Naturwissenschaft. So verwundert es nicht, daß diese Präsentationsform seinerzeit in fast allen Bereichen zum Vorbild wurde: in der Ökonomie, in der Rechtssprechung, in der Medizin, in der Philosophie, in der Politik, recht häufig auch in der Theologie.

Ein besonders kreativer und eloquenter Fürsprecher mathematischer Methoden und Darstellungsformen außerhalb der Mathematik war Christian Wolff: *„Insonderheit beweise ich mit gantz klaren Exempeln, daß auch ausser der Mathematick die Beweise am allerbesten auf eben solche Art, wie man in der Geometrie verfähret,* *eingerichtet werden können, wenn nemlich der Erweiß in lauter Schlüsse oder Syllogismus gebracht und zergliedert wird, und dieses so lange dauret, bis die Förder- oder Ober-Sätze (praemissae) entweder Grund-Sätze (axiomata) oder selbst Definitionen sind."* [Wolff, 1755, S.624] Für Wolff kann sich kaum ein Bereich dem mathematischen Zugriff entziehen, da *„der größte Teil der irdischen Glückseligkeit auf der Mathematick erbauet sey, und ohne sie keine Republick wohl bestellt werden kann."* [Wolff, 1710, Vorrede] Für ihn war dieses Vorgehen auch natürlich und angemessen, denn er war überzeugt, *„daß die Art zu gedenken selbst in mathematische Demonstrationen mit der gemeinen Art zu denken im menschlichen Leben völlig überein kommet."*

Es wurden aber schon im 18. Jahrhundert auch Stimmen laut, die gegen die Dominanz dieser Methode, also die Ordnung und Präsentation des Wissens more geometrico, opponierten. 1754 veröffentlichte Georg Friedrich Meier seine „Anfangsgründe aller schönen Wissenschaften". Darin entfaltet er eine allgemeine Ästhetik als Lehre sinnlicher Erkenntnis in den Künsten. Er nimmt dabei eine klare Trennung vor zwischen einer rationalen Vernunfterkenntnis und einer sinnlich-anschaulichen Erkenntnis in der Kunst. Gilt in der Vernunfterkenntnis mittels demonstrativer Schlußweisen abgeleitete Wahrheit als Ziel, so korreliert ihr in der Kunst Vollkommenheit, die ihrerseits Schönheit induziert. Der charakteristische Unterschied zu Gottsched und Wolff besteht in einer Zurücknahme der Dominanz mathematischer Orientierungsmuster. Dieses Vorgehen wird für Meier durch die Natur des Menschen erzwungen: *"Die allerwenigsten Menschen sind so geistig, daß sie eine bloße strenge mathematische Demonstration einsehen könten. Die allermeisten Menschen können ohne sinliche Bilder nichts begreifen, wenigstens finden sie an der nackenden Wahrheit kein Vergnügen ... Die strengen Demonstranten fechten so gewaltig, daß man sich ihnen auf Gnade und Ungnade ergeben mus. Ein Aestheticus macht Eroberungen, und man freuet sich, daß man überwunden worden."* [Meier, 1754, S.22/23] Meier weicht dem Versuch einer präzisen Fassung seiner zentralen Begriffe Vollkommenheit und Schönheit nicht aus. *"Wenn viele Dinge den hinreichenden Grund von einem enthalten, so stimmen sie miteinander überein, und diese Übereinstimmung nent man die Vollkommenheit. Da nun die Schönheit eine Vollkommenheit ist ..."* [Meier, 1754, S.40] Vollkommenheit und Schönheit unterliegen durchaus einem Regelwerk, doch die ästhetischen Regeln unterscheiden sich von den logischen Regeln. Meier macht keinen Hehl daraus, daß für ihn die Mannigfaltigkeit der ästhetischen Regeln eine Überlegenheit der Kunst gegenüber der Wissenschaft zur Folge hat, wo wenige und einfache Regeln völlig ausreichen. *"In der Vernunftlehre kan man, die*

mathematische Methode, durch Regeln so genau bestimmen, daß wenig oder gar nichts in derselben willkührlich bleibt, das rührt aber daher, weil diese Methode einfach ist ..." [Meier, 1759, S.288] In der Kunst liegen die Dinge ungleich komplizierter, denn hier gibt es unendlich viele ästhetische Regeln. *"Die Naturen der schönen Geister, ihrer Leser und Zuhörer, und der Sachen, wovon sie handeln, sind auf eine unendliche Art von einander unterschieden. Da sich nun die ästhetische Methode, nach allen diesen Dingen richten muß, so gibt es unendliche Verschiedenheiten in dieser Methode."* [Meier, 1759, S.287]
Das Hauptanliegen Meiers besteht offensichtlich darin, daß er die Kunst aus der methodischen Umklammerung durch die mathematische Demonstration befreien und ihr eigene Produktions- und Beurteilungsregeln verschaffen möchte. Bemerkenswert ist dabei, daß er mit rezeptionsästhetischen Begründungen argumentiert und in diesem Zusammenhang die Produktionsästhetik aus dem Spiel läßt. Er verweist auf den Leser und Zuhörer und traut den meisten Menschen nicht zu, eine Demonstration nach streng mathematischem Vorbild zu durchschauen.
Dieser Protest gegen die Beweisführung more geometrico in der Kunst läßt sich übrigens an der literarischen Karriere eines mathematischen Topos recht auffällig durch mehr als zwei Jahrhunderte verfolgen. In der 1758 erschienenen Mathematikgeschichte von Montucla wird berichtet, der Mathematiker Roberval habe im Anschluß an ein Theaterstück gefragt: qu'est-ce que cela prouve? Dieses "qu'est-ce que cela prouve" wurde seither in der Literatur immer wieder verwendet, mehrfach modifiziert, mitunter auch parodiert. So schildert Diderot 1775 in einer Satire einen Geometer als einen Mann, der von Jugend auf die Angewohnheit hat, am Ende einer jeden Seite zu schreiben: qu'est-ce que cela prouve.
Zwischen 1773 und 1776 erschien die vierbändige „Lebensgeschichte Tobias Knauts, des Weisen, sonst der Stammler genannt“ von Johann Carl Wezel. Auch darin findet sich eine bissige Parodie auf die mathematische Beweismethode. *„Meinen kürzesten, deutlichsten, bündigsten Beweis will ich, wie in allen Sachen, also auch hier gebrauchen. In gehöriger Form steht er also:*

1. Mir ist es unbegreiflich
2. .....
3. .....
4. .... und so ins unendliche fort.

Den will ich doch sehen, der wider diesen Beweis etwas einzuwenden weis! Vielleicht könnten einige schwergläubige Leute, denen die Wahrheit niemals Wahrheit ist, wenn sie nicht in dem nemlichen Kleide erscheint, in welchem sie sie alle Tage sehen - . Vielleicht könnten solche, sage ich, bey der vorhergehenden Deducktion gravitätisch sich beym Kinne fassen, und mit einer verachtenden vielbedeutenden Mine denken oder sagen: Qu'est ce que celà prouve?“ [Wezel, 1773, S.18/19].

Auch Arthur Schopenhauer hat offensichtlich in der Mathematikgeschichte von Montucla gelesen. In seinem zuerst 1819 erschienenen Hauptwerk „Die Welt als Wille und Vorstellung" erläutert er die Unverträglichkeit mathematischer und künstlerischer Denkweise. Für ihn *„hat die Erfahrung bestätigt, daß große Genien in der Kunst zur Mathematik keine Fähigkeit haben."* [Schopenhauer, 1982, S.270] Analog bleibt dem Mathematiker die Welt der Kunst verschlossen: *„Aus demselben oben angegebenen Grunde erklärt sich die ebenso bekannte Tatsache, daß umgekehrt ausgezeichnete Mathematiker wenig Empfänglichkeit für die Werke der schönen Kunst haben, was sich besonders naiv ausspricht in der bekannten Anekdote von jenem französischen Mathematiker, der nach Durchlesung der Iphigenia von Racine achselzuckend fragte: Qu'est-ce-que cela prouve?"* [S.271]
Auch Goethe weist auf sein Studium jener berühmten französischen Mathematikgeschichte hin. In den Tag- und Jahres-Heften notiert er 1806: *„Um so viel als mir gegeben sein möchte, an die Mathematik heranzugehen, las ich Montuclas Histoire des Mathematiques..."* [Goethe, 1986, S.171] Ob er die Roberval-Anekdote direkt aus Montucla übernommen hat oder aus Schopenhauers Hauptwerk, konnte bislang nicht geklärt werden. Goethe hat sich mehrfach anerkennend über Schopenhauer geäußert und dessen „Welt als Wille und Vorstellung" schon bald nach der ersten Veröffentlichung gelesen. In einem kurzen Essay „Entstehung der biographischen Annalen" weist Goethe darauf hin, daß man eine Autobiographie nicht erst in hohem Alter beginnen solle: *„wir müssen eigentlich noch nah genug an unseren Irrtümern und Fehlern stehn, um sie liebenswürdig und in dem Grade reizend zu finden ... Rücken wir weiter ins Leben hinein, so gewinnt das alles ein anderes Ansehen und man kommt zuletzt beinahe in den Fall, wie jener Geometer nach Endigung eines Theaterstückes auszurufen: was soll denn das aber beweisen?"* [Goethe, 1986, S.573]
Franz Grillparzer fühlte sich durch die bereits zitierte Passage aus Schopenhauers Welt als Wille und Vorstellung ebenfalls angesprochen. Er notiert 1820 in seinen Studienheften: *„Anekdote von jenem französischen Mathematiker, der nach Durchlesung von Racines Iphigenia achselzuckend fragte: qu'est-ce que cela prouve?"* [Grillparzer, 1914, S.333] Siebenundzwanzig Jahre später greift Grillparzer dieses Thema erneut auf und verbindet dabei in einfallsreich ironischer Weise seine Kritik an der Argumentation per more geometrico mit spöttischen Anmerkungen zu einer typisch deutschen Denkweise.

Franz Grillparzer

Gründlichkeit

Wie viel, im Reich des Geistes gar,
hängt ab von Ort und Zeit,
Was falsch einst, gilt uns heut für wahr,
Für dumm, was sonst gescheit.

Und mancher, den die eigne Zeit
Verspottet und verlacht,
Lebt' er in unsern Tagen, heut,
Sein Glück wär' längst gemacht.

So jener Mathematikus
Im heiteren Paris,
Setzt ins Theater nie den Fuß,
Da Zahlen nur gewiß.

Doch einst die Freunde brachten ihn
Ins Schauspielhaus mit Glück,
Man gab ein Schauspiel von Racine,
Des Meisters Meisterstück.

Da wird denn rings Begeistrung laut,
Man weint, man klatscht, man tobt,
Was man gehört, was man geschaut,
Wird e i n e s Munds gelobt.

Nur unser Mathematikus
Sah stieren Augs das Spiel,
Als ihn der Freunde Schar am Schluß
Befragt: wie's ihm gefiel,

Ob ihn ergriff der Dichtung Macht,
Des Unglücks Jammerruf?
Doch er erwidert mit Bedacht:
"Mais qu'est-ce que cela prouve?"

Da tönt Gelächter rings umher,
Das Wort durchläuft die Stadt,
Und ein Jahrhundert oder mehr
Lacht sich die Welt nicht satt.

O armer Mann, du kamst zu früh
Und nicht am rechten Ort;
In unsers Deutschlands Angst und Müh'
Erkennt man erst dein Wort,

Wo man Ideen nur begehrt,
Von Glut und Reiz entfernt,
Man, bis zum Halse schon gelehrt,
Noch im Theater lernt -

Dort ruft ein jeder Kritikus,
Was auch der Dichter schuf,
Wie jener Mathematikus
"Mais qu'est-ce que cela prouve?"

[Grillparzer, 1932, S.222/223]

Weitere vierzig Jahre später geht Nietzsche auf die Roberval-Anekdote erneut ein, gibt ihr aber einen grundlegend neuen Gehalt. Kaum erklärbar und recht unverständlich ist Nietzsches Wechsel von Racines Iphigenia zu Goethes Iphigenie, jedoch wird dadurch die zentrale Botschaft jener Passage in der „Fröhlichen Wissenschaft" nicht beeinflußt, welche die Überschrift „Griechischer Geschmack" trägt: *»Was ist Schönes daran?« sagte jener Feldmesser nach einer Aufführung der Iphigenie - »es wird nichts darin bewiesen!« Sollten die Griechen so fern von diesem Geschmacke gewesen sein? Bei Sophokles jedenfalls wird »alles bewiesen«.* [Nietzsche, 1980, S.437] Hier zeigt sich in der Bindung von Beweis und Schönheit eine völlig neue literarische Ästhetik und zugleich im Rahmen dieser Ästhetik eine neuartige Auffassung vom Beweis.

Einige Jahre danach trägt der Mathematiker Kronecker auf dem 29. Stiftungsfest des Mathematischen Vereins der Universität Berlin vor und erklärt dort: *„Wir Mathematiker sind echte, berufene Dichter; uns liegt nur noch der Beweis für das Gedichtete ob!"*

Schließlich meint Brecht 1936 in einem Beitrag über Lyrik und Logik: *„Ein Mathematiker sagte, als er Goethes Iphigenie gesehen hatte: Gut, aber was beweist das? Der Satz war nicht am Platz, aber er ist es gegenüber Tausenden und Tausenden von Gedichten. Aufgefordert, solche Gedichte zu kritisieren, gerät man in Verlegenheit, da ist sozusagen nichts zum Kritisieren da, höchstens, daß sie geschrieben und daß sie gedruckt wurden. Man kann die Ansprüche unseres Mathematikers nicht vollständig ablehnen, nur weil er sie an ein Werk gestellt hat, das sie befriedigen kann. Man kann ihm sagen, was die Iphigenie beweist, und wenn man es von irgendeinem Werk nicht sagen kann, so ist es kein bedeutendes Werk."* [Brecht, 1993, S.188] Damit verrät sich Brecht als Leser Nietzsches - auch bei ihm sah der Mathematiker Goethes Iphigenie und nicht Racines Iphigenia. Darüberhinaus knüpft er klar und deutlich an Nietzsches Ästhetik an. Auch weist er darauf hin, daß es in verschiedenen Disziplinen unterschiedliche Auffassungen vom Beweis gibt, die nicht miteinander kompatibel sind: *„Angenommen, unser Mathematiker wäre vor ein Gedicht geführt worden, das den pythagoreischen Lehrsatz bewiesen hätte, würde er dann behauptet haben, dieses Gedicht beweise was? Vielleicht, aber wir hätten ihm vielleicht widersprochen, ebenso, wie wir ihm widersprachen, als er behauptete, die «Iphigenie» beweise nichts."* [S.189] Hier mündet die Diskussion des „Que-est-ce que cela prouve?" in die umfassendere Frage nach der Wahrheit sowie der didaktischen Funktion des Beweises für die Wahrheitsproblematik.

5. Im Fadenkreuz von Lebensphilosophie und Weltanschauung

Der Mathematikunterricht

"Die Lehrer der verschiedenen mathematischen Übungen begannen ihren Kursus, mit wenigen Ausnahmen, durch einige magere Worte über den Sinn des Titels und begannen dann unaufhaltsam die Sache selbst, vorwärtsschreitend, ohne umzusehen, ob einer mit dem Verständnis zurückbleibe oder nicht. Daher gab es unter vierzig Schülern vielleicht höchstens drei, welche von dem Gegenstande am Schlusse eine wirkliche Rechenschaft geben konnten, solche, deren Neigungen und Fähigkeiten er entsprach. Die übrigen schleppten sich entweder mit mühseliger Aufmerksamkeit und angstvollem Fleiße von Stunde zu Stunde, ohne je recht klar zu sein, oder sie ließen gleich im Anfange die Hoffnung sinken und sich regelmäßig bestrafen." [Keller, 1978, S.168/169]

Wie sich hier Gottfried Keller Mitte des vorigen Jahrhunderts in der ersten Fassung seines Bildungsromans "Der grüne Heinrich" über den Mathematikunterricht äußert, läßt aufhorchen. Keine zwei Jahrhunderte zuvor hatte Andreae eine geradezu enthusiastische Schilderung der mathematischen Ausbildung in "Christianopolis" gegeben. Davon war jetzt nichts mehr übriggeblieben. Und Kellers massiver Vorwurf gegen die Mathematiklehrer sollte kein literarischer Einzelfall bleiben.

Im Frühjahr 1891 beendete Frank Wedekind die Arbeit an seiner Kindertragödie „Frühlings Erwachen". Darin werden Sorgen und Nöte vierzehnjähriger Schülerinnen und Schüler thematisiert. Weder Schule noch Elternhaus geben orientierende Hilfe für jene Fragen, welche die Jugendlichen bewegen. Eine falsche Sexualmoral der Gesellschaft und eine lebensfremde Schulwirklichkeit werden von Wedekind an den Pranger gestellt. Für zwei Vierzehnjährige endet die Orientierungslosigkeit tödlich. Wendla Bergmann stirbt an den Folgen einer Abtreibung; Moritz Stiefel beendet sein Leben mit einem Schuß in den Kopf. Ein Bündel von Motiven kommt für diesen Freitod in Betracht. Dazu gehört auch die Mathematik. Ein letztes, längeres Gespräch vor seinem Freitod führt der Gymnasiast Moritz Stiefel mit der ebenso lebensfrohen wie lebenserfahrenen Ilse. Durch einen Hinweis auf noch nicht erledigte Hausaufgaben drängt Moritz recht unvermittelt zum Aufbruch: *„Ich muß zurück. - Ich habe noch die Sassaniden, die Bergpredigt und das Parallelepipedon auf dem Gewissen - Gute Nacht, Ilse!"* [Wedekind, 1992, S.42] Wir begegnen Ilse erst auf dem Friedhof anläßlich der Beerdigung von Moritz wieder; sie vertraut dort der

Schülerin Martha an: *„Und ich weiß auch den Grund, Martha“* [S.51] Auf Marthas Nachfrage erwähnt Ilse nun aber weder die persische Dynastie noch die Bergpredigt, sondern gibt eine kurze, klare Begründung für den Freitod: *„Parallelepipedon! Aber sag es niemandem.“* Die Reduktion der drei Unterrichtsfächer Geschichte, Religion und Mathematik aus jenem Gespräch mit Moritz auf die Mathematik ganz allein bei der Antwort an Martha kann kein Zufall sein. Wenn es einen Grund für die Verzweiflugstat im Umfeld der Schule gibt, dann - so läßt uns Wedekind wissen - waren es Probleme mit dem Mathematikunterricht.

Ein ganzes Bündel geistiger Strömungen in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hatte mit fast schon zwingender Konsequenz zur Folge, daß um die Wende zum 20. Jahrhundert der Jugendliche bei den Schriftstellern zu einem dominanten Thema avancierte. Die Herausbildung einer Kinder- und Jugendpsychologie hatte den Blick auf die Psyche junger Menschen gelenkt. Die allgemeine Kritik an tradierten Normen und Werten der Kultur galt insbesondere dem Bildungswesen. Nietzsches Kreation und Anklage des Bildungsphilisters entsprach exakt dem damaligen Zeitgeist. Auch die Schulen verloren zunehmend an Ansehen; sowohl Inhalte als auch Organisationsformen des Unterrichts wurden als überholt und nicht mehr zeitgemäß beurteilt. Da immer schon drängende Probleme der Gesellschaft von den Schriftstellern aufgegriffen und thematisiert wurden, fand damals folgerichtig der Jugendliche die ihm gebührende Berücksichtigung in der Literatur. Meist wurden dabei junge Menschen geschildert, die durch gesellschaftliche oder institutionelle Zwänge, also fremdbestimmt, daran gehindert werden, sich ihren natürlichen Anlagen und Neigungen gemäß zu entwickeln. Als Schauplatz des Geschehens bot sich die Schule an, doch ist damit über die inhaltliche Anbindung an bestimmte Schulfächer noch nicht entschieden. Deshalb erscheint es im Rückblick denn doch recht aussagekräftig, daß die Schriftsteller damals jugendliche Nöte, Krisen und Katastrophen bevorzugt bei der Mathematik ansiedelten. Dies gilt für "Freund Hein" von Emil Strauß ebenso wie für Hermann Hesses "Unterm Rad" und Robert Musils "Die Verwirrungen des Zöglings Törless".

Bei allen Unterschieden in der Konzeption und Durchführung sind doch typische Gemeinsamkeiten in der Argumentation und Intention deutlich zu erkennen. Ein zentrales Anliegen in allen drei Romanen gilt dem Problem, ob die unterrichtliche Behandlung von Mathematik eine sinnvolle Vorbereitung auf das spätere Leben sei bzw. sein könne. So fragt sich Törleß, worin denn eine angemessene *"Vorbereitung* *für das Leben"* bestehe und Musil läßt uns wissen: *"Gerade an die Mathematik hatte er dabei gedacht;"* [Musil, 1978a, S.73] Da Törleß im Mathematikunterricht keine überzeugende Antwort erfährt, wendet er sich in einem persönlichen Gespräch an seinen Mathematiklehrer, welcher ihm jedoch erklärt: *"Auf der elementaren Stufe des Unterrichts, auf der Sie sich noch befinden, hält es schwer, für vieles, das man berühren muß, die richtige Erklärung zu geben."* [S.77] Diese Auskunft ist für den ratsuchenden und verzweifelten jungen Törleß natürlich höchst unbefriedigend. Mit ähnlichen, für einen Schüler kaum einsichtigen Argumenten und Vertröstungen auf spätere Zeiten wird auch Hans Giebenrath konfrontiert: *"... in der Mathematik wurde der Hauptnachdruck auf komplizierte Schlußrechnungen gelegt. Dieselben seien, wie der Lehrer häufig betonte, zwar scheinbar ohne Wert fürs spätere Studium und Leben, jedoch eben nur scheinbar. In Wirklichkeit waren sie sehr wichtig, ja wichtiger als manche Hauptfächer, denn sie bilden die logischen Fähigkeiten aus und sind die Grundlage alles klaren, nüchternen und erfolgreichen Denkens."* [Hesse, 1982, S.10] Und Heinrich Lindner, der schon mehrfach wegen ungenügender Leistungen in der Mathematik nicht versetzt wurde, klagt verbittert und verzweifelt an: *"Täglich ... Mathematik, die mir nie etwas nützen wird, die mir stets fremd bleiben und vier Wochen nach dem Abiturium in Grund und Boden hinein vergessen sein wird - ist das keine Verschwendung?!"* [Strauß, 1982, S.217] Inhalt und Methode des Unterrichts in Mathematik werden von Musil, Hesse und Strauß daraufhin befragt, ob damit eine sinnvolle und angemessen orientierende Hinführung auf die Alltagswelt vermittelt wird, oder ob es sich hier um einen institutionalisierten und sachlich nicht gerechtfertigten Selbstzweck handelt. Diese Problematik hat in jenen Jahren nicht nur die Schriftsteller beschäftigt. Es ist dieselbe Zeit, in der sich Felix Klein unermüdlich für eine durchgreifende Reform sowohl des mathematischen Unterrichts als auch der Ausbildung künftiger Mathematiklehrer einsetzte, wobei sein Hauptaugenmerk einer stärkeren Berücksichtigung der Anwendungen von Mathematik galt.

Törleß, Hans Giebenrath und Heinrich Lindner zerbrechen schließlich an einer Schulwirklichkeit, die für sie keinerlei Zusammenhang mit der Lebenswirklichkeit erkennen läßt. Von ihren Autoren werden ihnen jeweils Partner zur Seite gestellt, die demonstrieren, mit welcher Einstellung man gegen die Schule, insbesondere gegen den Mathematikunterricht, bestehen kann. Eine ausgewogene Mischung von Aufmüpfigkeit und gespielter Unterwürfigkeit, von intellektueller Aggressivität und scheinbarer Anpassung sind in Kombination mit einem ausgeprägten Selbstbe-

wußtsein beste Voraussetzungen, um ungeschoren davonzukommen. Heinrich Lindners Klassenkamerad Notwang bietet Hilfe an: *"Ich werde dir in Mathematik helfen, wie ich kann, jede Antwort einblasen, jede schriftliche Arbeit zustecken ... Es geht mir ins eigene Herzfleisch, zu denken, daß diese Banausen dich schon um ein Jahr gebracht haben! Schlag ein! Es ist nichts als Verteidigung! Selbsterhaltung!"* [Strauß, 1982, S.173/174] Mit einem speziellen Banausen gedenkt Notwang noch besonders abzurechnen: *"Aber rächen werd' ich mich an diesem vertrockneten Logarithmus ... und will diesen Formelritter blamieren, daß ihn noch die Erdschollen auf seinem Sarg auslachen sollen!"* [Strauß, 1982, S.214/215]
Von Hermann Hesse werden dem Leser die Antipoden direkt einander gegenübergestellt: *"Es gab auch ungleiche Paare. Für das ungleichste galten Hermann Heilner und Hans Giebenrath, der Leichtsinnige und der Gewissenhafte, der Dichter und der Streber."* [Hesse, 1982, S.73] Eine eigenartige Mischung aus Fremdheit und Gemeinsamkeit verbindet das Genie und den Musterknaben. Im Unterschied zu Notwang macht Hermann Heilner die Mathematik zwar zu schaffen, jedoch entwickelt er tragfähige Abwehrmechanismen: *"Für Heilner gab es nichts Abstraktes, nichts, was er sich nicht hätte vorstellen und mit Phantasiefarben bemalen können. Wo das nicht ging, ließ er alles mit Unlust liegen. Die Mathematik war ihm eine mit hinterlistigen Rätseln beladene Sphinx, deren kühler, böser Blick ihre Opfer bannte, und er wich dem Ungeheuer in großem Bogen aus."* [S.74]
Törleß erörtert seine Bedenken an den nicht transparenten Grundlagen der Mathematik mit Beineberg, der wie im Alltag auch gegenüber der Wissenschaft einen recht pragmatischen Standpunkt einnimmt, dabei ist er *"ganz fest davon überzeugt, daß die Sache einen Haken hat."* [Musil, 1978a, S.81] Aber solange die Bemühungen der Mathematiker brauchbare Resultate und verwertbare Anwendungen liefern, hält er Grübeleien über die Grundlagen für überflüssig. Er geht sogar noch einen Schritt weiter, denn er ist überzeugt, daß die Grundlagenproblematik überhaupt nicht befriedigend geklärt werden kann: *"Ich glaube, wenn man allzu gewissenhaft wäre, so gäbe es keine Mathematik."* [S.73]

Der literarische Protest gegen den Mathematikunterricht hat mit den geschilderten drei Romanen aus den ersten Jahren unseres Jahrhunderts keineswegs seinen Abschluß gefunden. Nur ein einziger weiterer Beleg sei angeführt, der einerseits an Schärfe kaum noch zu überbieten ist, andererseits durch einen Hinweis auf frühere

Zeiten durchaus Anregungen für eine differenzierte Betrachtungsweise enthält. Alfred Döblin erklärt in seiner 1928 unter dem Titel "Erster Rückblick" veröffentlichten Autobiographie: *"Eine lächerliche Sache überhaupt, diese Mathematik auf den Schulen. Für die meisten wertlos, ein abseitiges Gedankenspiel, eine Qual, weil ohne Anschauung, ohne Ziel, ohne Bindung mit einem Leben. Man soll diese Art Abstraktion verbieten oder in die Akademien schicken. Übrigens nur diese Art Mathematik, die Mathematik von heute. Früher war es eine großartige Sache, das Geheimnis von der Zahl, eine Religion."* [Döblin, 1986, S.152] Der vernichtenden Kritik des Mathematikunterrichts seiner Zeit läßt Döblin die Erinnerung an die bedeutsame Rolle der Mathematik in der Vergangenheit folgen; man denke zum Beispiel an die Pythagoreer oder an Andreaes Christianopolis. War die Mathematik in früheren Zeiten eine „großartige Sache“, so ist sie nach Meinung des Autors in unserem Jahrhundert zu einer Belastung für die Gesellschaft geworden. Diese Behauptung ist, zumal in der von Döblin vorgetragenen scharfen Formulierung, ohne Frage übertrieben, und ein Verbot der Mathematik an unseren Schulen hätte fatale Konsequenzen. Aber es wird doch auch, insbesondere durch den Hinweis auf frühere Zeiten, die Frage aufgeworfen, ob und gegebenenfalls wie die Mathematik in der Gegenwart als Vehikel für Philosophie und Weltanschauung geeignet sei. Diese Frage soll im nächsten Abschnitt aufgegriffen werden.

6. Ausblick

Was uns fehlt: eine zeitgemäße Philosophie der Mathematik

Abschließend sollen jetzt noch die gegenwärtigen Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie erörtert werden. Dabei lassen wir uns von dem im ersten Abschnitt bereitgestellten Begriffs-Quartett Kritik, Interpretation, Orientierung und Reflexion leiten.

Philosophische Kritik an der gegenwärtigen Mathematik hat in jedem Fall zwei Aspekte zu berücksichtigen: das Problem der Wahrheit mathematischer Aussagen und die zunehmende Unzugänglichkeit der Mathematik für Nichtmathematiker.

Immer wieder hat man gemeint, daß die Aussagen der Mathematik den Status absoluter, unerschütterlicher und zeitloser Wahrheit haben. Unter dieser Annahme gehören einmal erzielte Resultate für alle Zeiten zum Bestand. Den Grund für die Überzeugung, daß in der Mathematik ausschließlich objektiv gültige Wahrheiten erzielt werden, sah man im Beweis; in der transparenten und reproduzierbaren Argumentation mittels eines Beweises glaubte man die Wahrheit in dieser Wissenschaft abgesichert zu haben. Nun hat aber schon Aristoteles in seiner Analytik mit aller Deutlichkeit herausgearbeitet, daß durch einen Beweis lediglich die Korrektheit der Schlußweise und dies auch nur im Rahmen akzeptierter Regeln des Schließens nachgewiesen wird. Weder über den Wahrheitscharakter der Prämisse noch über den der Konklusion gibt der beide verbindende Beweis irgendeine Auskunft. Diese früh gewonnene Einsicht ist allzu oft in Vergessenheit geraten, wenn sie auch heute zum unbestrittenen Inventar jeder Philosophie der Mathematik gehört. Danach leistet ein Beweis lediglich eine Verschiebung der Wahrheitsfrage und in keinem Fall eine Entscheidung. Dieser Verlagerungsprozeß hat in Abhängigkeit vom philosophischen Standpunkt unterschiedlichen Effekt.

In den ersten drei Jahrzehnten unseres Jahrhunderts konkurrierten verschiedene Philosophien der Mathematik miteinander: Formalismus, Logizismus und Intuitionismus. Im Formalismus besteht Mathematik aus einem von aller Semantik freien syntaktischen Spiel ganz analog zum Schachspiel. Nach vorab festgelegten Regeln werden Formeln ineinander übergeführt. Jeder Formel in der Mathematik entspricht eine Spielstellung beim Schach und jedem Zug hier entspricht ein Übergang zur nächsten Formel dort. Bei dieser Auffassung werden Wahrheit und syntaktische Widerspruchsfreiheit gleichgesetzt. Beim Logizismus hingegen wird Wahrheit in der Mathematik als Sonderfall allgemeiner logischer Wahrheit und dementsprechend Mathematik als spezielle Ausformung von Logik angesehen. Beim Intuitionismus schließlich ist Mathematik gebunden an finite Konstruktionen oder im Prinzip finite Re-Konstruktion, womit die Wahrheitsfrage völlig ins Finite eingebettet wird. Ein Beweis nun verlagert die Wahrheitsfrage im Formalismus innerhalb der Mathematik, im Logizismus von der Mathematik in die Logik, im Intuitionismus aus der Mathematik heraus in die Wiederholbarkeit von Konstruktionen. Ende der siebziger Jahre setzte massive philosophische Kritik an allen geschilderten Auffassungen von Mathematik ein. Hersh schrieb: *"The present impasse in mathematical philosophy is the aftermath of the great period of foundationist controversies from Frege and Russell through Brouwer, Hilbert and Gödel. What is needed now is a new beginning, not a continuation of the various schools of logicism, formalism or intuitionism."* [Hersh, 1979, S.31] Ganz analog äußerte sich Feferman: *"What is the nature of the conceptual content of mathematics? I agree with the critics of the traditional positions of logicism, formalism, platonism and constructivism, that each of these has failed to give us a satisfactory, convincing answer to that."* [Feferman, 1985, S.249]

Die philosophische Kritik hat zu dem Ergebnis geführt, daß die Entscheidung sowohl über den Gegenstandscharakter als auch über den Wahrheitscharakter von Mathematik eingebunden ist in äußerst komplexe soziale Systeme. Mathematik ist nach heutiger Auffassung keine Textwissenschaft mit absoluter Wahrheit sondern eine Kontextwissenschaft mit relativer Wahrheit. Man bezeichnet diese Wissenschaftsauffassung gern als sozialen Konstruktivismus. Für die Mathematik stellt dieser ohne Frage eine echte Alternative dar zu den philosophischen Erklärungsversuchen aus dem ersten Drittel unseres Jahrhunderts.

Wenden wir uns nun dem zweiten Aspekt zu, also der ständig wachsenden Unzugänglichkeit von Mathematik für Nichtmathematiker.

Das Problem des Umgangs mit Mathematik, und dies meint natürlich die Frage nach dem angemessenen und sachgerechten Umgang mit Mathematik, ist vermutlich selten zuvor so brisant und vielschichtig gewesen wie in der Gegenwart. Denn noch nie war der Anteil an Nichtmathematikern, die Mathematik in irgendeiner Form verwenden, so groß wie heute. Mithin trifft die Frage nach dem adäquaten Umgang mit Mathematik nicht nur die Mathematik selbst, vielmehr ist Kritik durch die Philosophie im Gewand radikaler Nachfrage angezeigt. Eine gefährliche Reziprozität tritt immer deutlicher in Erscheinung: Während einerseits Gehalt und Gestalt der Mathematik dem Nichtmathematiker immer unzugänglicher werden, muß von ihm andererseits Mathematik zunehmend häufiger direkt oder indirekt in Gebrauch genommen werden. Damit ist die Balance zwischen mathematischem Wissen und dem Umgang mit diesem Wissen empfindlich gestört. Genau an dieser Stelle kommen die philosophischen Begriffe "Verfügungswissen" und "Orientierungswissen" ins Spiel. [vgl. Mittelstraß, 1982, S.16 und Radbruch, 1991, S.330]

Das Verfügungswissen tritt in Gestalt von Aussagen oder Handlungsanweisungen auf, es wird in der Regel in die Form von propositionalen Aussagen oder Rezepten gebracht. Es handelt sich um Aussagen über etwas oder Anleitungen für etwas. Jedes solche Verfügungswissen ist objektivierbar und ohne Rest übertragbar.

Diesem Verfügungswissen steht das Orientierungswissen zur Seite, welches als Vorbild oder eben als Orientierung nur implizit zur Geltung kommt. Orientierungswissen ist wirksam in der Form von Fähigkeiten, Einsichten, Kompetenzen - und es kann nicht, wie Verfügungswissen, als objektiver Gegenstand übertragen oder vermittelt werden. Aus diesem Grund wird es häufig geringer eingestuft und insbesondere in der Lehre weniger beachtet als Verfügungswissen. Doch darf in diesem Zusammenhang nicht übersehen werden, daß dem Menschen die Wirklichkeit bevorzugt durch Orientierungswissen und nur zu einem geringen Teil per Verfügungswissen zugänglich ist. Mittelstraß hat in seinem Festvortrag auf dem fünften internationalen Leibniz-Kongreß treffend festgestellt, daß "*Leibniz erkannt hat, was wir oft zu vergessen scheinen ... daß nämlich Verfügungswissen, d.h. ein positives Wissen, mit dem wir über die Welt verfügen und Orientierungswissen, d.h. ein regulatives Wissen um begründete Ziele und Zwecke, mit dem wir uns in der Welt und in unserem eigenen Leben orientieren, zusammengehören*". [Mittelstraß, 1989, S.285] Dem kann ohne Einschränkung zugestimmt werden. Nun gilt aber gerade in der Mathematik, daß ein Wissen nicht per se entweder Verfügungswissen oder Orientierungswissen ist. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Formen des Wissens wird sowohl durch die wissenschaftliche Umgebung als auch durch den sozialen Kontext bestimmt. Hier liegt ein Defizit der Wissenschaftsdidaktik vor, der es bislang nicht gelungen ist, Veränderungskriterien oder Überführungsstrategien bereitzustellen. In jedem Fall dürfte nicht eine Vermehrung, sondern eine Umstrukturierung des Wissens erforderlich sein - nicht die Entdeckung neuer Erkenntnisse, sondern die Freilegung der Antriebe und Voraussetzungen für bereits verfügbares Wissen ist das Ziel - nicht eine Ausdehnung des Wissens steht auf dem Stundenplan, sondern eine Umwandlung in Richtung auf die Anfänge und Keimzellen.

Diese Kritik führt nun direkt in eine philosophische Interpretation gegenwärtiger Mathematik. Bis in die Mitte unseres Jahrhunderts hat man sich in dieser Hinsicht immer wieder neu bemüht, eine philosophische Begründung der Mathematik zu erreichen. Dabei fragte man stets nach den Gegenständen der Mathematik, insbesondere nach deren ontologischem Status. Seither stellt man sich die im Anspruch bescheidenere, was eine Lösung betrifft jedoch keineswegs einfachere Aufgabe nach einer philosophischen Beschreibung von Mathematik. Eine derartige Vorgehensweise der Philosophie hatte schon Aristoteles angeregt; in seiner Metaphysik lesen wir: *"Nicht ob es die Zahlen gibt, sondern wie es die Zahlen gibt, das allein ist unsere Frage."* [Martin, 1956, S.30]

Die traditionelle Kernfrage nach den Entitäten der Mathematik wird also neuerdings umgedeutet und uminterpretiert in eine Frage nach der deskriptiven Leistung heutiger Mathematik. Die Antwort hierauf wird nun in der Regel so gegeben, daß Mathematik gar nicht von primär verfügbaren oder geschaffenen Gegenständen handelt, sondern daß Mathematiker vielmehr nur Formen von Gegenständen, Handlungen und Situationen zusammen mit den möglichen Weisen der Verständigung über diese Formen untersuchen. In der kommunikativen Ebene werden diese Formen in der Tat wie Gegenstände behandelt und gehandelt, und zwar meist in der begrifflichen Gestalt von Strukturen, doch die genuine mathematische Leistung besteht in der Auszeichnung des Formtyps. Dabei handelt es sich um differenzierte menschliche Handlungs- und Sichtweisen, affektive und kognitive Aktivitäten, die sich im Lebensalltag sowohl ständig wiederholen als auch bewähren und deren invarianter Kern begrifflich präzisiert wird. So führt die Form des Zählens zu den Objekten der elementaren Arithmetik, die typisch menschliche Aktivität des Ordnens gibt Anlaß für eine mathematische Theorie der Ordnungen, eine Analyse des Schätzens führt zur Stochastik, die kognitive Leistung des Zusammenfassens steht Pate für Mengentheorie, das natürliche Argumentieren bringt die mathematische Logik auf den Weg, die Beobachtung von Bewegung ist Ursprung der Analysis, aus dem Messen resultiert die Theorie metrischer Räume, das Zusammensetzen und Arrangieren initiiert die Kombinatorik, der Blick für Symmetrie motiviert die Gruppentheorie. Der entscheidende Aspekt dieser Sichtweise besteht darin, daß jeweils typische menschliche Aktivitäten und Verhaltensweisen Anlaß für mathematische Begriffsbildungen und Theorien sind. Konzeption und Konstitution von Mathematik sind somit abhängig von Erfahrung, ohne dieser jedoch ausgeliefert zu sein. Man nennt diese philosophische Auffassung deshalb auch gern Quasi-Empirismus. Diese Anbindung an menschliche Erfahrung hat nun im wahrsten Sinne des Wortes eine Humanisierung von Mathematik zur Folge. Mathematik ist ihrem Ursprung nach nicht ein absolut freies und unverbindliches Spiel, sie erwächst vielmehr aus sozialen Grundverhaltensweisen des Menschen. Dies sollte insbesondere in solchen Zeiten nicht vergessen werden, in denen Spezialisten der Mathematikerzunft durch ihr Verhalten und Auftreten ein anderes Bild von Mathematik vermitteln.

Umgang mit und Einstellung zur Mathematik sollten, und dies führt dann von der Interpretation zur Orientierung, künftig stärker als bisher von einer Besinnung auf die natürlichen, prämathematischen Ursprünge geprägt sein. Die noch so erfolgreiche Manipulation mit den effizienten mathematischen Verfahren und Methoden legitimiert Mathematik zwar als Verfügungswissen, doch dürfen darüber die eigentlichen Ursprünge nicht in Vergessenheit geraten. Mathematik ist ihrem Wesen nach angelegt durch eine Mannigfaltigkeit typischer menschlicher Weisen vielfältiger Orientierung in der Wirklichkeit. Diese natürliche Quelle mathematischen Denkens und Handelns ist deshalb zugleich die alleinige Basis von Mathematik als Orientierungswissen.

Eine detaillierte Reflexion über den gegenwärtigen Bestand philosophischer Einsicht in Mathematik als Wissenschaft würde die Überwindung der dogmatischen Positionen Formalismus, Logizismus, Intuitionismus zugunsten sozialer und allgemeiner kognitiver Betrachtungsweisen als bedeutsamen Fortschritt ausweisen, es kämen jedoch darüberhinaus auch diverse offene Probleme und Fragen zum Vorschein. Nur einige Beispiele seien exemplarisch genannt. Sowohl in der reinen wie auch in der anwendungsbezogenen Mathematik gibt es gegenwärtig wesentlich mehr Forschungsfelder als in naher Zukunft erfolgversprechend bearbeitet werden können. Nach welchen Kriterien soll hier eine Auswahl vorgenommen werden, welche Bereiche sollen durch Forschungsförderung berücksichtigt werden? Mit den neuen Instrumentarien Personalcomputer und Großrechenanlagen sind für die Mathematik ohne Frage neue Horizonte geöffnet worden; doch gibt es auch eine Vielzahl neuer, unvorhergesehener Probleme. Von einem ausgewogenen Umgang mit diesen neuen Hilfsmitteln sind wir derzeit noch weit entfernt.

In den zurückliegenden zweieinhalbtausend Jahren haben neue Paradigmen der Mathematik stets fruchtbare globale Impulse für die Philosophie zur Folge gehabt. In der Gegenwart steht eine umfassende Integration von Mathematik als einem neuen Typus von Wissenschaft in die Philosophie noch aus. Es kann nicht ausgeschlossen werden, daß hierzu auch neue Weisen philosophischen Denkens und Handelns entfaltet werden müssen. Auf jeden Fall wirkt sich in diesem Zusammenhang das Desiderat einer überzeugenden Philosophie der Mathematik äußerst nachteilig aus. Als dringende Aufgabe ergibt sich somit die Entfaltung einer zeitgemäßen Philosophie der Mathematik, allerdings nicht in Gestalt einer akademischen Disziplin für Spezialisten sondern als universelle, in gewissem Sinne volkstümliche

Philosophie der Mathematik. In der Vergangenheit hat es analoge Situationen mehrfach gegeben; sie führten stets zu radikaler Nachfrage, subtiler Analyse, sorgsamer Bestandsaufnahme. Ähnliches verlangen Gegenwart und Zukunft von uns - das nächste Kapitel der Philosophie, insbesondere einer Philosophie der Mathematik, muß wieder unter der Überschrift "Kritik" gedacht und geschrieben werden. Erst im Anschluß daran darf man sich um eine Antwort auf die Frage bemühen, ob und wie Mathematik in unserer Zeit als Vehikel der Philosophie und Weltanschauung fungieren kann.

Literatur

J. V. Andreae: Christianopolis. Aus dem Lateinischen übersetzt, kommentiert und mit einem Nachwort herausgegeben von U. Biesterfeld; Reclam jun., Stuttgart 1975

Aristoteles: Metaphysik. Übersetzt und herausgegeben von F. F. Schwarz; Reclam jun., Stuttgart 1970

G. Becker: Das Rechnen mit Münze, Maß und Gewicht seit Adam Ries (Materialien & Studien zur Alltagsgeschichte und Volkskultur Niedersachsens, Heft 21); Museumsdorf Cloppenburg 1994

B. Brecht: Werke. Große kommentierte Berliner und Frankfurter Ausgabe Bd. 22.1; Suhrkamp, Frankfurt/M. 1993

J. A. Comenius: Pampaedia. Lat. Text und deutsche Übersetzung. Hrsg. von D. Tschizewskij in Gemeinschaft mit H. Geissler und K. Schaller; Quelle & Meyer, Hedelberg 1965

R.Descartes: Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft, Hrsg. v. L.Gäbe, (Philosophische Bibliothek 262b); Meiner, Hamburg 1979

Die Vorsokratiker I. Auswahl der Fragmente, Übersetzung und Erläuterungen von J. Mansfeld; Reclam jun., Stuttgart 1983

A. Döblin: Schriften zu Leben und Werk; Walter, Olten und Freiburg/Br. 1986

P. Ernest: The Philosophy of Mathematics Education; The Falmer Press, London 1991

S. Feferman: Working Foundations; Synthese Bd. 62 (1985), S. 229-254

K. Gaiser: Platons Zusammenschau der mathematischen Wissenschaften; Antike und Abendland Bd. 32 (1986), S.89-124

K. Gaiser: Philodems Academica; frommann-holzboog, Stuttgart - Bad Cannstatt 1988

J. W. Goethe: Sämtliche Werke Bd. 14 (Münchner Ausgabe). Autobiographische Schriften der frühen Zwanzigerjahre; Hanser, München 1986

J.. Chr. Gottsched: Gedichte, gesammlet und hrsg. von J. J. Schwabe, Leipzig 1736

J. Chr. Gottsched: Schriften zur Literatur, Hrsg. v. H. Steinmetz; Reclam, Stuttgart 1972

Fr. Grillparzer: Sämtliche Werke. Historisch-kritische Gesamtausgabe. Bd. I 10 Gedichte Erster Teil; Schroll % Co, Wien 1932

Fr. Grillparzer: Werke. Hrsg. v. A. Sauer, 2. Abth., 7. Bd-., Wien und Leipzig 1914

R. Hersh: Some proposals for reviving the philosophy of mathematics; Advances in Mathematics Bd. 31 (1979), S.31-50

H. Hesse: Unterm Rad (st 52); 17. Aufl. Suhrkamp, Frankfurt/M. 1982

Fr. Hölderlin: Sämtliche Werke Werke. (Große Stuttgarter Ausgabe). Hrsg. von F. Beißner, Band 3; Kohlhammer, Stuttgart 1957

I. Kant: Werke Bd. 1-10. Hrsg. von W. Weischedel; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1983

G. Keller: Sämtliche Werke und ausgewählte Briefe. Hrsg. von C. Heselhaus, Erster Band; 4. Aufl. Hanser, München 1978

H. Krings: Ordo. Philosophisch-historische Grundlegung einer abendländischen Idee, 2. Aufl.; Meiner, Hamburg 1982

N.v.Kues: Die belehrte Unwissenheit Buch II, Hrsg. v. P. Wilpert (Philosophische Bibliothek 264b); Meiner, Hamburg 1967

N. v. Kues: Dreiergespräch über das Können-Ist, Hrsg. v. R. Steiger (Philosophische Bibliothek 285); Meiner, Hamburg 1973

S. MacLane: Mathematics - Form and Function; Springer, New York 1986

G. W. Leibniz: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. Übers. von A. Buchenau, hrsg. von E. Cassirer Band I (Philosophische Bibliothek 107); Meiner, Hamburg 1966

G. Martin: Klassische Ontologie der Zahl (Kantstudien. Ergänzungshefte 70); Universitätsverlag, Köln 1956

G.F. Meier: Anfangsgründe aller schönen Wissenschaften Teil I; Hemmerde, Halle 1754 [Reprint: Olms, Hildesheim 1976]

G. F. Meier: Anfangsgründe aller schönen Wissenschaften Teil III; Hemmerde, Halle 1759 [Reprint: Olms, Hildesheim 1976]

J. Mittelstraß: Wissenschaft als Lebensform (stw 376); Suhrkamp, Frankfurt/M. 1982

J. Mittelstraß: Die geometrischen Wurzeln der Platonischen Ideenlehre; Gymnasium Bd. 92(1985), S.399-418

J. Mittelstraß: Philosophie in einer Leibniz-Welt; in: V. Internationaler Leibniz-Kongreß, Vorträge II. Teil, Hannover 1989, S.275-288

R. Musil: Gesammelte Werke, Hrsg. v. A. Frisé Bd. I: Der Mann ohne Eigenschaften; Rowohlt, Reinbek 1978

R. Musil: Gesammelte Werke, Hrsg. v. A. Frisé Bd. II: Prosa und Stücke, Kleine Prosa, Aphorismen, Autobiographisches, Essays und Rechen, Kritik; Rowohlt, Reinbek 1978a

Fr. Nietzsche: Sämtliche Werke. Kritische Studienausgabe in 15 Bänden. Hrsg. von G. Colli und M. Montinari, Band 3; DTV, München 1980

G. Patzig: Tatsachen, Normen, Sätze. Aufsätze und Vorträge; Reclam jun., Stuttgart 1980

Platon: Sämtliche Werke Bd.1-6, Hrsg. v. W.F. Otto - E. Grassi - G. Plamböck [Rowohlts Klassiker]; Rowohlt, Hamburg 1957ff.

K. Radbruch: Mathematik in den Geisteswissenschaften; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1989

K. Radbruch: Die Vielfalt der Mathematik in den Geisteswissenschaften; MNU Bd. 44 (1991), S.323-331

K. Radbruch: Mathematik à la Philosophie - Philosophie à la Mathematik: Ein historischer Überblick. Mathematische Semesterberichte Bd. 38 (1991), S.18-57

K. Radbruch: Philosophische Spuren in Geschichte und Didaktik der Mathematik; Mathematische Semesterberichte Bd. 40 (1993), S. 1-27

K. Radbruch: Literatur als Medium einer Kulturgeschichte der Mathematik. Erscheint 1995 in der Zeitschrift NTM

E. Scheibe: Calculemus! Das Problem der Anwendung von Logik und Mathematik; in: Leibniz' Auseinandersetzung mit Vorgängern und Zeitgenossen, Hrsg. v. I. Marchlewitz u. A. Heinekamp; Stuttgart 1990

J. Schillemeit: Der Geometer und die Dichtung. Philologische Arabeske über eine literarische Anekdote. In: Aspete der Goethezeit, Hrsg. von S. A. Corngold u.a.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1977

A. Schopenhauer: Sämtliche Werke. Hrsg. von W. F. v. Löhneysen Band I; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1982

Spinoza: Die Ethik. Schriften und Briefe. Hrsg. von F. Bülow (Kröners Taschenausgabe 24); Kröner, Stuttgat 1982

E. Strauß: Freund Hein. Eine Lebensgeschichte; Schweier, Kirchheim/Teck 1982

B. L. v.d. Waerden: Die vier Wissenschaften der Pythagoreer. In: Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften. Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften. Vorträge Nr. 268; Westdeutscher Verlag, Opladen 1977

F. Wedekind: Frühlings Erwachen. Eine Kindertragödie; Reclam jun., Stuttgart 1992

Ch. Wolff: Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften I-IV; 7. Aufl. Frankfurt u. Leipzig 1750-57 [Reprint: Olms, Hildesheim 1973]

Ch. Wolff: Ausführliche Nachricht von seinen eigenen Schriften, die er in deutscher Sprache von den verschiedenen Theilen der Welt-Weißheit herausgegeben; 2. Aufl. Frankfurt 1733 [Reprint: Olms, Hildesheim 1973]

Ch. Wolff: Übrige theils noch gefundene kleine Schriften und Einzelne Betrachtungen zur Verbesserung der Wissenschaften; Halle 1755

Ch. Wolff: Vernüftige Gedancken Von des Menschen Thun und Lassen, Zu Beförderung ihrer Glückseeligkeit, den Liebhabern der Wahrheit mitgetheilet (Deutsche Ethik); 2. Aufl. Halle 1747 [Reprint: Olms, Hildesheim 1976]