UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

PHILOSOPHISCHE SPUREN IN GESCHICHTE UND DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Knut Radbruch

Preprint Nr. 224

FACHBEREICH MATHEMATIK

PHILOSOPHISCHE SPUREN IN GESCHICHTE UND DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Knut Radbruch

Preprint Nr. 224

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Erwin–Schrödinger–Straße
6750 Kaiserslautern

Juni 1992

Philosophische Spuren in Geschichte und Didaktik der Mathematik[1]

Knut Radbruch, Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern,
Erwin–Schrödinger–Straße, 6750 Kaiserslautern

Zusammenfassung: Jede Wissenschaft entfaltet sich in einem Spannungsverhältnis zu ihren Nachbardisziplinen. In diesem Beitrag wird insbesondere das Disziplinenpaar Mathematik–Philosophie in den Blick genommen. Dies geschieht entlang der Leitfrage, ob und gegebenenfalls wie Philosophie auf die Entwicklung und Ausformung der Mathematik Einfluß genommen hat. Dazu wird nach philosophischen Spuren in der Mathematik gefragt, wobei jene historischen Konstellationen bevorzugt betrachtet werden, die eine grundlegende Änderung im Mathematikverständnis erbracht haben. Deshalb gilt das Hauptinteresse dieser Untersuchung dem Verhältnis von Philosophie und Mathematik in der klassischen Antike, bei Kant und in der Gegenwart.

In einem äußerst gehaltvollen und auch heute noch sehr lesenswerten Aufsatz "Mathematik und Antike" stellt Toeplitz 1925 die Frage, *"ob einmal im Dasein der Mathematik die Philosophie bestimmend in sie eingegriffen hat, ihre eigentliche, definitive Gestalt gebildet hat, oder ob sie auch diese ganz aus sich gewonnen hat"*? (Toeplitz [1925] S.202) Dieser Frage soll hier nachgegangen werden. Dabei ist jedoch eine kleine Einschränkung bzw. Korrektur von Beginn an geboten. Ganz aus sich allein hat die Mathematik ihre definitive Gestalt sicher nicht entfaltet und ausgeformt. Denn keine Disziplin entwickelt sich ausschließlich nach internen Kriterien und Bedingungen; vielmehr steht jede Wissenschaft in einem Spannungsverhältnis zu benachbarten Disziplinen. Dies trifft wegen ihrer exzeptionellen Position zwischen Natur– und Geisteswissenschaften in besonderem Maße für die Mathematik zu. Aber hier soll nicht das unübersichtliche Geflecht aller externen Einflüsse auf die Entwicklung der Mathematik in den Blick genommen werden, sondern wir verfolgen einzig und allein solche Spuren in Geschichte und Didaktik der Mathematik, die von der Philosophie gelegt wurden. Eine derartige Spurensicherung und –deutung kann hier nicht für die gesamte Mathematik von den Anfängen bis in unsere Zeit lückenlos geführt werden; ein exemplarisches Vorgehen

[1]Erweiterte Fassung eines Vortrags, der am 16. Juni 1992 im "Kolloquium über Geschichte und Didaktik der Mathematik" am Mathematischen Institut der Universität Münster gehalten wurde.

ist unerläßlich. Die klassische Antike wird gewählt, weil die in jenen drei Jahrhunderten gelegten Spuren teilweise bis in die Gegenwart hinein wirksam geblieben sind. Die von Kant vollzogene Kopernikanische Wende der Denkart darf nicht fehlen, weil sie einen durch nichts zu ersetzenden Verständnishorizont für die Mathematik des 19. und 20. Jahrhunderts bildet. Schließlich versteht es sich von selbst, daß die aktuelle Gegenwart mit einbezogen werden muß. Somit ergeben sich die folgenden drei Unterabschnitte.

1. Vernunftehe mit Folgen:
   Mathematik und Philosophie in der klassischen Antike.
2. Zweiseitige Emanzipation:
   Mathematik und Philosophie im Anschluß an Kant.
3. Unübersichtliche Polygamie:
   Vielfalt der Philosophie und Pluralität der Mathematik in der Gegenwart.

1. Vernunftehe mit Folgen: Mathematik und Philosophie in der klassischen Antike

Am Beispiel der Mathematik wurde in der klassischen Antike eine neue Art von Wissen, und damit zugleich die Möglichkeit von Wissenschaft überhaupt, entdeckt. Worin bestand die grundlegende Neuerung, worin zeigte sich der charakteristische Unterschied gegenüber der traditionsreichen orientalischen Mathematik?

In der babylonischen Geometrie werden durchaus anspruchsvolle, jedoch stets konkrete und praxisorientierte Aufgaben zusammen mit der Lösung in Gestalt einer detaillierten Rechenvorschrift präsentiert. Zum Beispiel wird die Diagonale eines rechteckigen Tores berechnet und dabei (unausgesprochen natürlich) mit dem Gehalt des Satzes von Pythagoras argumentiert. Ganz analog wird eine Leiter an eine Wand gelehnt und die Höhe der Leiterspitze in Abhängigkeit des Abstandes von Wand und Fußpunkt der Leiter untersucht. Dabei fehlt jeder Hinweis auf eine Begründung, jede Andeutung auch nur eines Beweises. Einziges Wahrheitskriterium ist offensichtlich die pragmatische Bewährung in der Praxis.

In der Thaletischen Geometrie hingegen werden Behauptungen von bis dahin nicht gekannter Allgemeinheit aufgestellt: *"Heil dem alten Thales, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind,..."*. (Proklos S. 341/342) Über das Theorem von der Gleichheit der Scheitelwinkel an sich schneidenden Geraden heißt es bei Proklos: *"Es [das Theorem] wurde, wie Eudemos berichtet, von Thales zuerst entdeckt, des wissenschaftlichen Beweises aber vom Verfasser der "Elemente" für wert erachtet"*. (Proklos S. 374) Statt von Tordiagonalen und Leitern ist hier von Geraden die Rede; die Inspektion in Form einer ausgeführten Lösung wird durch den Hinweis ersetzt, daß Thales "erkannt" und "entdeckt" habe. Proklos stellt mit Blick auf Euklids Elemente auch schon den Unterschied zwischen Entdeckung und Beweis einer Aussage heraus. Es besteht heute Konsens, daß bereits Thales für seine neuen geometrischen Theoreme Beweise gegeben hat, die sich jedoch grundlegend von jener Art und Weise, wie in den Elementen bewiesen wird, unterscheiden. Darauf kommen wir noch zurück. Weitere Sätze, die Thales zugeschrieben werden, lauten: Der Kreis wird durch jeden seiner Durchmesser halbiert. Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind gleich. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

Man darf davon ausgehen, daß in der Folgezeit weitere geometrische Sätze dieses allgemeinen Charakters erarbeitet worden sind. Es ist aber keineswegs so, daß sich diese neue Thaletische Geometrie von Anfang an im Wirkungsbereich der Philosophie befunden hätte; es bestand für die Mathematik zunächst einmal auch keinerlei Anlaß, auf die Philosophie zuzugehen. Darüberhinaus ist die axiomatische Karriere dieser Geometrie, wie sie schon bald in Euklids Elementen einen frühen Höhepunkt erreichte, mitnichten bereits in ihre Wiege mit hineingelegt worden.

Beim Fortgang dieser Geometrie traten jedoch mehrere Probleme auf den Plan, die innerhalb der neuen Disziplin nicht gelöst werden konnten, die vielmehr auf Lösungen von außen, insbesondere durch die Philosophie, drängten. Zur gleichen Zeit entwickelte sich die vorplatonische Philosophie unabhängig von der Thaletischen Geometrie, doch gelangte man auch hier an Grenzen, die aus der Philosophie heraus nicht überwunden werden konnten, die vielmehr auf einen externen Impuls, möglicherweise von der Mathematik, hoffen ließen. In dieser Weise reiften sowohl in der Mathematik als auch in der Philosophie Bereitschaft und Notwendigkeit wechselseitiger Förderung und Forderung. Die damit ermöglichte und vorbereitete Vernunftehe von Philosophie und Mathematik wurde dann von Plato vollzogen und anschließend von Aristoteles kritisch gewürdigt und modifiziert. Es soll hier zunächst ausgeführt werden, inwiefern sich während der Entfaltung der Geometrie aus ihr selbst heraus die Notwendigkeit nach einer Liaison mit der Philosophie ergab.

Der Sophist Protagoras übte Kritik an den Aussagen der Geometer, indem er darauf hinwies, daß die Erfahrung im Widerspruch zu zentralen geometrischen Behauptungen stehe. Aristoteles berichtet darüber: "*Denn die sinnlich erfaßbaren Linien sind nicht derartig, wie der Geometer von ihnen spricht. Nichts sinnlich Erfaßbares nämlich ist in dieser Weise gerade oder rund; denn der Kreis berührt nicht in einem Punkt das*

Lineal, sondern in der Art, wie das Protagoras im Rahmen seiner Widerlegung der Geometer erörtert hat." (Metaphysik 987b/998a) Wovon also handelte die Thaletische Geometrie? Über welche Arten von Dreiecken, Geraden, Winkeln und in bezug auf welche Gleichheit wurden hier allgemeingültige Aussagen formuliert? Die Wahrheit der neuen theoretischen Sätze wurde nicht bezweifelt; die Frage nach ihrem Geltungsbereich konnte jedoch mit mathematischen Begriffen und Denkformen nicht beantwortet werden. Hier wurde erstmals, jedoch keineswegs zum letzten Mal in der Geschichte abendländischer Wissenschaft, ein eklatantes Defizit sichtbar: Gesucht wurden die theoretischen Gegenstände zu bereits vorhandenen theoretischen Sätzen. Es ist dies ein wichtiger, jedoch nicht der einzige Teilaspekt jener umfassenden Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit von theoretischer Wissenschaft überhaupt und deren Bezug zur Praxis. Eine Antwort hierauf kann nur von der Philosophie erwartet werden.

Leider sind die Beweise, welche Thales für seine neuen Theoreme gegeben hat, nicht überliefert. Es gilt jedoch als sehr wahrscheinlich, daß er Spiegelungs– bzw. Klappargumente verwendet hat, die den Sachverhalt direkt als evident erscheinen lassen; die Richtigkeit wird also aufgezeigt, erwiesen, sichtbar gemacht. In heutiger Systematik würde man hier von einer Vorform des phänomenologischen Beweises sprechen; daneben gibt es noch den logischen sowie den dialektischen Beweis. (vgl. z.B. Jaspers [1991]) Es spricht vieles dafür, daß sowohl in der Thaletischen Geometrie als auch in der Pythagoreischen Arithmetik weder mit logischen noch mit dialektischen Beweisen, sondern ausschließlich mit phänomenologischen Argumenten geschlossen wurde. Jedoch gelangte die phänomenologisch–anschauliche Überzeugungskraft schon bald an unüberwindliche Grenzen; so entzog sich die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats jeglichem phänomenologischen Zugriff. Szabo hat überzeugend herausgearbeitet, daß genau an dieser Stelle, und zwar zum ersten Mal, der logische Beweis Eingang in die Mathematik fand. (Szabo [1969], [1984]) Doch würde sich hieraus allein keine Begründung für die Dominanz der logischen Beweisform in Euklids Elementen ableiten lassen. Es ist kaum anzunehmen, daß innerhalb der griechischen Mathematik dialektische Beweise überhaupt versucht worden sind, doch wurde die Beweiskraft dialektischen Argumentierens mit den Aporien des Zenon gerade am Beispiel der Mathematik nachhaltig in Frage gestellt; ein völliger Verzicht auf dialektisches Vorgehen drängte sich auf. Damit war der Weg geebnet für das methodische Instrumentarium des indirekten Beweises, das jedoch seine volle Tragweite nur im logischen Kontext und nicht im phänomenologischen Rahmen entfalten konnte. Unterstützung für eine stärkere Berücksichtigung des Beweisverfahrens durch Widerspruch lieferte die Philosophie des Parmenides. *"Entweder ist es* *oder es ist nicht; und entschieden worden ist ja, den einen Weg als unerkennbar und unbenennbar aufzugeben, da er kein wahrer Weg ist, während es den anderen Weg gibt und dieser auch wirklich stimmt."* (Vorsokratiker I S. 319/320)

Diese geschilderte Ausgangssituation fand Plato vor, von dem Gadamer sagt, *"daß es eben erst die platonische Denkleistung war, der wir verdanken, daß wir sagen können, was Mathematik ist."* (Gadamer [1982] S. 229) Hier ist Skepsis angezeigt; was Mathematik ist, können wir auch nach einem intensiven Studium von Platos geschriebener und ungeschriebener Lehre nicht sagen. Jedoch lernen wir bei Plato, und dies ist mehr als genug, daß wir überzeugend und transparent fragen können, was Mathematik ist. Das ist möglich, weil Plato Mathematik und Philosophie in einen Begründungszusammenhang bringt und darüberhinaus mit bewunderungswürdigem Weitblick die Frage nach der Mathematik als ein System von Teilfragen auffaßt. Im Hinblick auf eine transparente Darstellung strukturieren und systematisieren wir diesen Platonischen Problemkomplex durch sieben Fragen. Man kann die Geschichte einer Philosophie der Mathematik auffassen als fortwährende Auseinandersetzung mit diesem Bündel von Fragen und der steten Suche nach neuen Möglichkeiten, sie zu beantworten. Plato selbst gab eine erste, äußerst geniale Antwort. Aber es liegt in der Natur der Sache, daß es nicht bei dieser einen Lösung blieb. Wir schildern zunächst das System der Fragen und skizzieren dann jeweils Platos Antworten.

a) Frage nach dem Gegenstandsbereich Thaletischer Geometrie:
Über welche Kreise, Dreiecke, Geraden, Winkel und in bezug auf welche Gleichheit wird hier etwas ausgesagt?

b) Frage nach dem Wahrheitscharakter von Geometrie und Arithmetik:
Bedarf jede Wahrheit eines Beweises und welche Argumentationen werden als Beweis anerkannt?

c) Frage nach der Bindung von Theorie und Praxis:
Warum sind Aussagen der theoretischen Mathematik auf die Wirklichkeit anwendbar?

d) Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit mathematischer Erkenntnis:
Wie kann der Mensch mathematische Aussagen wahrnehmen und als solche akzeptieren?

e) Frage nach dem Umgang mit Mathematik:
Welches sind die angemessenen Formen des Gebrauchs mathematischen Wissens?

f) Frage nach einer globalen Systematik der gesamten Mathematik:
Läßt sich die Mathematik als Ganzes unter einheitlichen Gesichtspunkten strukturieren und zusammenfassen?

g) Frage nach dem Stellenwert von Mathematik innerhalb der Kultur:
Welche spezifische Bedeutung hat die Mathematik als eine von vielen Kulturleistungen?

Sowohl für die Fragen als auch für mögliche Antworten gilt, daß sie nicht nur isoliert voneinander betrachtet werden dürfen; erst im Verbund gewinnen sie ihre wahre Bedeutung.

Doch nun zu Platos Antworten!

a) Frage nach dem Gegenstandsbereich.

Was schon in der Geometriekritik des Protagoras anklang, wird auch von Plato und später von Aristoteles wiederholt deutlich ausgesprochen, daß nämlich Mathematik nicht von sichtbaren und mit den Sinnen wahrnehmbaren Objekten handelt. "*Jeder in der Wirklichkeit gezeichnete oder abgerundete Kreis ist mit dem dem fünften Widersprechenden erfüllt. Denn allerwärts streift er an das Gerade. Aber der Kreis an sich, behaupten wir, begreift weder viel noch wenig von der entgegengesetzten Beschaffenheit in sich.*" (Briefe 343a) "*Auch daß sie sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer auf diese ihre Reden beziehen, unerachtet sie nicht von diesen handeln, sondern von jenen, dem diese gleichen, und um des Vierecks selbst willen und seiner Diagonale ihre Beweise führen...*" (Politeia 510d) ... *wie etwa die Geometer von einer Linie, die nicht einen Fuß lang ist, annehmen, sie sei einen Fuß lang.*" (Metaphysik 1089a) Mit den Sinnen wahrnehmbare Kreise, Geraden, Winkel – im Sand, auf der Wiese, an der Mauer – sind also nicht die Gegenstände der Thaletischen Geometrie; sie können es auch gar nicht sein, da ihnen etwas Ungenaues, Widersprüchliches anhaftet. Platos genialer Einfall besteht nun darin, daß er mit den Ideen einen abstrakten Bereich postuliert und diese neue Ideenwelt als Schauplatz der Geometrie erklärt. Die Theoreme der Thaletischen Geometrie, so sagt er, gelten für die Idee des Dreiecks, die Idee des Winkels und zwar bezüglich der Idee der Gleichheit; die Mathematiker sprechen von gezeichneten Linien, meinen aber deren Idee. Mit den Ideen liefert Plato also nachträglich die theoretischen Gegenstände für zuvor bereitgestellte theoretische Sätze. Die Erklärungskraft dieser Lehre von den mathematischen Ideen war für Plato so überzeugend, daß er nach diesem Muster auch Ideen in völlig anderen Bereichen, etwa dem der Tugenden, einführte; Mittelstraß spricht deshalb von einer "*Orientierungsfunktion, die die Konzeption zumal geometrischer Ideen im Rahmen der Genese der Ideenlehre hat.*" (Mittelstraß [1985], S.406) Die erste überzeugende Antwort auf die Frage, womit sich Geometrie befaßt, ist also eingebettet in eine umfassende philosophische Theorie. Andererseits kam diese Ideenlehre Platos durch eine Reflektion über die Objekte der Geometrie auf den Weg; Mathematik und Philosophie sind hier also untrennbar aneinander gebunden.

b) Frage nach dem Wahrheitscharakter.

Auch das Problem der Wahrheit von Mathematik wird von Plato in eine globale philosophische Theorie eingebettet. Dabei nimmt er eine wichtige und folgenreiche Trennung vor, indem er zwischen "Wahrheit von Mathematik" und "Wahrheit in der Mathematik" sorgsam unterscheidet. Dem Mathematiker (im engeren Sinne) obliegt die immanente Wahrheit, die auf dem Weg von den Grundbegriffen und Voraussetzungen zu den Theoremen, also durch den mathematischen Beweis, gewonnen wird. Eine Reflektion oder gar Rechtfertigung der Eingangsdaten und Annahmen ist nicht Aufgabe dieses Mathematikers: *"Denn ich denke, du weißt, daß die, welche sich mit der Meßkunst und den Rechnungen und dergleichen abgeben, das Gerade und Ungerade und die Gestalten und die drei Arten der Winkel und was dem sonst verwandt ist in jeder Verfahrensart voraussetzend, nachdem sie dies als wissend zugrunde gelegt, keine Rechenschaft weiter darüber weder sich noch anderen geben zu müssen glauben, als sei dies schon allen deutlich, sondern hiervon beginnend gleich das Weitere ausführen..."* (Politeia 510 c/d) Der Mathematiker ist hier also für die Durchführung und Ausgestaltung, nicht jedoch für die Konzeption und Architektur seiner Wissenschaft zuständig; diese zuletzt genannte, und natürlich ranghöhere Aufgabe weist Plato dem Philosophen – genauer: dem Dialektiker – zu. Der Dialektiker bemüht sich um "Wahrheit von Mathematik", indem er *"die Voraussetzungen nicht zu Anfängen, sondern wahrhaft zu Voraussetzungen macht..."* (Politeia 511 b) Die von Plato hier erstmals angemeldete Option der Philosophie, Fundierungsinstanz der Mathematik zu sein, ist von fast allen Philosophen in der Nachfolge Platos aufrecht erhalten worden. Sein Schüler Aristoteles spricht dies klar und deutlich aus: *"Doch man muß nun die Frage erörtern, ob es Aufgabe <u>einer</u> Wissenschaft oder verschiedener Wissenschaften ist, von den in der Mathematik so genannten Axiomen und vom Wesen zu handeln. Aber offenkundig ist die Erforschung dieser Axiome Aufgabe <u>einer</u> Wissenschaft, und zwar der des Philosophen; ... Aus diesem Grund übernimmt es auch kein Fachwissenschaftler, über die Axiome auszusagen, ob sie wahr sind oder nicht, weder der Geometer noch der Arithmetiker..."* (Metaphysik 1005a) Fichte äußert sich in seiner Wissenschaftslehre ähnlich deutlich: *"... es soll nur anerkannt werden, daß diese* [*die Mathematik*]*, so wie alle übrigen Wissenschaften sollen wissen, daß sie nicht die ersten sind und nicht selbstständig, sondern daß die Principien ihrer eigenen Möglichkeit* *in einer anderen, höheren Wissenschaft liegen."* (Fichte [1986], S.30) Schließlich sei noch Heidegger zitiert, der ganz analog meint: *"Was Mathematik sei, läßt sich niemals mathematisch ausmachen ... In dem Augenblick, wo die Frage nach der Wissenschaft überhaupt, d.h. immer zugleich nach den bestimmten möglichen Wissenschaften gestellt wird, tritt der Fragende in einen neuen Bereich mit anderen Beweisansprüchen und Beweisformen, als die sind, die in den Wissenschaften für geläufig gelten. Es ist der Bereich der Philosophie ... Eine Wissenschaft ist nur so weit wissenschaftlich, d.h. über eine bloße Technik hinaus echtes Wissen, als sie philosophisch ist."* (Heidegger [1961], S.372) Dem ist hinzuzufügen, daß die Philosophen den in der geschilderten Weise erhobenen Anspruch bis ins 19. Jahrhundert hinein in etwa einzulösen in der Lage waren. In unserem Jahrhundert ist dies leider nicht mehr der Fall; ob die Schuld hierfür in der Philosophie oder Mathematik oder auch anderswo zu suchen ist, soll im dritten Abschnitt dieses Beitrags analysiert werden.

c) Frage nach der Bindung von Theorie und Praxis.

Diese Frage stellt sich nach dem Vorangehenden jetzt neu als Frage nach dem Verhältnis des Bereichs der mathematischen Ideen zur realen Sinnenwelt oder auch nach der Beziehung der intelligiblen Welt der Mathematika zur sensiblen Wirklichkeit. Nach Plato besteht hier ein Urbild–Abbild–Verhältnis. Das mathematische Dreieck ist Urbild aller realen Dreiecke, die realen Dreiecke sind Abbild der Idee des Dreiecks. Diese Entsprechung von Urbild und Abbild ist treu bzw. verträglich in dem Sinne, daß die Theoreme der Mathematik auf die Wirklichkeit übertragen bzw. in sie hineinprojiziert werden können, daß sie hier jedoch nur mit approximativer Genauigkeit gelten. Die pragmatische Bewährung mathematischer Verfahren wird also von der orientalischen in die griechische Mathematik übernommen, die Funktionsfähigkeit der Rechenvorschriften wird jedoch jetzt durch eine philosophische Theorie begründet. Plato hat, das ist immer wieder betont worden, die Mathematik hoch geschätzt; doch hat er auch immer wieder vor Überheblichkeit gegenüber der Praxis gewarnt. Im Dialog Philebos mahnt er die Meßkünstler, neben den mathematischen Figuren auch deren Abbildern in der sensiblen Welt Aufmerksamkeit zu schenken. *"Sokrates: Wird der nun wohl Erkenntnis genug haben, wenn er von der göttlichen Kugel und dem Kreise selbst den Begriff hat, diese menschliche Kugel hier aber und diese Kreise nicht kennt.? Protarchos: Da käme ja, o Sokrates, ein lächerlicher Zustand heraus, wenn wir nur die göttlichen Erkenntnisse allein innehätten."* (Philebos 62a)

d) Frage nach der mathematischen Erkenntnis.

Plato hat innerhalb seiner gesamten Philosophie keine eigenständige Erkenntnistheorie entworfen oder gar entwickelt. Die Bedingungen der Möglichkeit mathematischer Erkenntnis versteckt er in seiner Anamnesislehre und weist sich in diesem Zusammenhang als überzeugter Platoniker aus. Die mathematische Wahrheit steht im Medium der mathematischen Ideenwelt unwandelbar und unabhänderlich in lückenloser Vollkommenheit bereit, und zwar bevor der Mensch sich Teile davon im bewußten und gezielten Zugriff erarbeitet. Mathematische Wahrheiten werden ent–deckt bzw. wahr–genommen und nicht erfunden oder geschaffen. Damit dieses Entdecken überhaupt zu mathematischer Einsicht und Erkenntnis führen kann, muß das entsprechende Wissen schon latent in jedermans Vernunft angelegt sein. Konsequenterweise besteht für Plato jedes Lernen von Mathematik in einem Wiedererinnern. Daraus resultiert die anspruchsvolle Aufgabe für die Lehre, beim Lernenden blockierende Vorurteile abzubauen, Scheinwissen als solches zu entlarven, mit Hebammendiensten den Weg zur Bewußtmachung und Wiedererinnerung zu stützen. Besonders eindrucksvoll demonstriert Plato seine diesbezügliche Auffassung in der Sklavenszene des Menon. (vgl. Gaiser [1955] und Winter [1989]) Im Dialog mit Sokrates wird einem der Mathematik unkundigen Sklaven die mathematische Erkenntnis bewußt, daß das Quadrat über der Diagonalen eines gegebenen Quadrats doppelt so groß ist wie die Anfangsfigur. Dem Sklaven wird diese Erkenntnis der Quadratverdopplung nicht mitgeteilt, sondern sie ist, wie das Gespräch mit Sokrates deutlich macht, bereits latent in ihm angelegt; es bedarf nur der geschickten Hilfe und Führung durch Sokrates, dieses verborgene Wissen per Wiedererinnerung ins Bewußtsein zu heben.

e) Frage nach dem Umgang mit Mathematik.

Es geht hier nicht erneut um Anwendung von Mathematik, sondern gefragt wird nach der Bedeutung mathematischen Wissens für den Menschen, nach der Einstellung zu eigenen und allgemeinen mathematischen Kenntnissen, nach der Art und Weise, wie über solche Kenntnisse verfügt wird und wie sie in Gebrauch genommen werden. Bereits die Erörterung der Frage nach dem Wahrheitscharakter ergab, daß bei Plato die Wissenschaft Mathematik in einem arbeitsteiligen Prozeß von zwei Gruppen von Wissenschaftlern gestaltet und entfaltet wird, den Dialektikern und den Mathematikern im engeren Sinne. Natürlich ist es nicht nur zulässig, sondern sogar erwünscht, daß zumindest einige Personen doppelte Kompetenz besitzen und beiden Gruppen zugehören. Der Dialektiker ist für die Konstitution der mathematischen Grundbegriffe und für die Präzisierung und Begründung der Voraussetzungen zuständig. Sodann bearbeitet der mathematische Fachwissenschaftler dies vom Dialektiker bereitgestellte Material allein unter dem Folgerungsaspekt und unabhängig von jeglichen Rechtfertigungszwängen. Die dabei erzielten Resultate werden danach wieder dem Dialektiker zur Verfügung gestellt, damit dieser das neu gewonnene Wissen in Gebrauch nimmt und in das bereits vorhandene Wissen integriert: *"Keine Art der Jagd aber, sprach er, geht doch auf etwas weiteres als eben auf das Erjagen und Einfangen. Haben sie aber eingefangen, was sie jagten: so sind sie selbst nicht imstande, es zu gebrauchen; sondern die Jäger und Fischer übergeben es den Köchen, die Meßkünstler aber und Rechner und Sternkundigen – denn auch diese sind Jagende, weil sie ja ihre Figuren und Zahlenreihen nicht machen, sondern diese sind schon, und sie finden sie nur auf wie sie sind –; wie also nun diese auch nicht selbst verstehen, sie zu gebrauchen, sondern nur zu jagen: so übergeben sie, so viele ihrer nicht ganz unverständig sind, ihre Erfindungen den Dialektikern, um Gebrauch davon zu machen."* (Euthydemos 290 b/c)

Am Beispiel der Mathematik weist Plato immer wieder darauf hin, daß es mindestens zwei grundsätzlich verschiedene Formen des Wissens gibt. (vgl. Wieland [1982]) Da ist einmal jenes Wissen, das in Form von Aussagen bzw. als propositionales Wissen auftritt, wie etwa die Theoreme in Geometrie und Arithmetik. Hier wird eine Aussage über etwas gemacht und in dieser Weise wird das entsprechende Wissen transportierbar, verfügbar – man spricht auch von Verfügungswissen (vgl. Mittelstraß [1989], Radbruch [1991]); dieses wird mitgeteilt als "Ich weiß, daß ...". Daneben gibt es das Gebrauchs– oder Orientierungswissen, das sich als Kompetenz, Dispositionsvermögen und Urteilsfähigkeit zeigt; diese Art des Wissens teilt sich in der Form "Ich weiß, wie ..." mit. Plato hat zu keiner Zeit Zweifel darüber aufkommen lassen, daß er Orientierungswissen höher einstuft als Verfügungswissen; deshalb steht bei ihm auch der Dialektiker in höherem Ansehen als der Meßkünstler und Rechenkünstler. Denn der Dialektiker ist für die Konzeption der Wissenschaft Mathematik zuständig, er liefert den Rahmen, in dem dann der Fachwissenschaftler propositionales Wissen erarbeitet und zur Verfügung stellt. Im Idealfall sind beide Qualifikationen vereint: "Einer solchen Erkenntnis also bedürfen wir ..., in welcher das Hervorbringen und das Gebrauchenwissen des Hervorgebrachten beides zusammenfällt." (Euthydemos 289b)

f) Frage nach einer Systematik der Mathematik.

Die gesamte bisherige Erörterung einiger Teilaspekte von Platos Mathematikverständnis hatte in bezug auf das Verhältnis von Philosophie und Mathematik eine gemeinsame Intention und Argumentationsrichtung. Mit philosophischen Denkformen wurde an zuvor bereitgestellte und somit vorab verfügbare Mathematik herangegangen. Alle Bemühungen zielten auf ein besseres Verständnis von Mathematik, jedoch wurde in den binnendynamischen Gang der Wissenschaft Mathematik nicht steuernd eingegriffen. Die Frage, ob Plato überhaupt genügend mathematische Kompetenz besaß, um den Gang der mathematischer Forschung und Entwicklung sinnvoll zu beeinflussen, ist in der Vergangenheit, nicht zuletzt wegen der unvollständigen Quellenlage, immer wieder kontrovers diskutiert worden. Toeplitz meint 1925: *"Plato hat natürlich keine mathematischen Entdeckungen gemacht ... aber Plato hat der Mathematik die allgemeinen Direktiven gegeben, die axiomatische Struktur der Elemente ... sind Platos Werk; die großen Mathematiker seines Kreises, Theätet und Eudoxus, haben die sogenannte Euklidische Mathematik unter seinem Einfluß geschaffen."* (Toeplitz [1925] S.201) Und 1927 fügte Becker hinzu: *"Plato führte erst die durchgreifende Reform durch, die uns die axiomatische Methode und die Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion schenkte."* (Becker [1973] S.250) Überzeugende Quellen, welche ihre Hypothesen gestützt hätten, konnten damals weder Toeplitz noch Becker benennen. Insofern hatte Szabo leichtes Spiel, als er die Führungsrolle Platos energisch bestritt. (vgl. etwa Szabo [1969] und Szabo [1984]) Vor wenigen Jahren hat nun aber Gaiser eine neue, wichtige Quelle erschlossen. In einem Bericht des Aristotelesschülers Dikaiarch erfahren wir über die Blütezeit in der Akademie um Plato: *"Es war aber auch ein großer Fortschritt der mathematischen Wissenschaften in jener Zeit zu erkennen, wobei Plato die baumeisterliche Leitung hatte und die Aufgaben stellte, die dann die Mathematiker mit Eifer erforschten. Daher erreichten auf diese Weise damals zuerst ihren Höhepunkt die (allgemeine) Maßtheorie und die Probleme der Definitionen, indem Eudoxos die ursprünglichen (altertümlichen) des Hippokrates (von Chios) vollständig erneuerte. Es machte aber (im besonderen) auch die Geometrie einen großen Fortschritt. Denn damals entstanden sowohl die Methode der Analysis als auch die der Dihorismoi (Möglichkeitsbestimmungen); aber auch insgesamt brachten sie die Geometrie ein großes Stück voran."* (Gaiser [1988] S.152) Aus dieser Passage geht zweifelsfrei hervor, daß Plato zumindest für eine globale Systematisierung bzw. eine synoptische Rekonstruktion der damaligen Mathematik die baumeisterliche Leitung hatte, daß ihm also die Rolle des Architekten zukam. Damit werden nicht nur die Auffassungen von Töplitz und Becker posthum bestätigt, sondern es wird hier auch vollends klar, daß und wie Plato aus philosophischem Antrieb in die Entwicklung der Mathematik gravierend eingegriffen hat. Deshalb konnte Gaiser aus der Dikaiarch–Quelle den Schluß ziehen, *"daß Platos Forderung eines systematischen, definitorisch–axiomatischen Ausbaus der Mathematik von den Spezialisten nicht als unsinnige oder überflüssige Bevormundung, sondern als sachgemäßes Programm aufgefaßt wurde – um so mehr, da sich Platos Erwartung erfüllte: Die Systematisierung und Axiomatisierung der mathematischen Wissenschaften gelang damals in rasch aufeinanderfolgenden Schritten. Die für die Arithmetik und die Geometrie erzielten Ergebnisse sind in die Architektonik der entsprechenden Bücher von Euklids Elementen eingegangen: Euklids Definitionen, Postulate und Axiome entsprechen methodisch und sachlich dem platonischen Programm;"* (Gaiser [1986] S.120/121) Wir wollen diese philosophischen Spuren in den Elementen Euklids noch etwas genauer aufspüren und analysieren.

Am Anfang griechischer Geometrie und Arithmetik werden einzelne Erkenntnisse isoliert voneinander oder doch zumindest nur schwach aneinandergekoppelt gewonnen worden sein. Ein zunächst kleiner Vorrat an neuem Wissen wurde bereitgestellt. Zum Erkennen gehören nun aber stets auch Aktivitäten wie unterscheiden, trennen, zusammenfassen, ordnen. Es dürfte auch damals recht bald das Bedürfnis nach einer Ordnung, einer Systematik oder auch übersichtlichen Rekonstruktion des wachsenden Wissensvorrats entstanden sein. Nun gab es und gibt es verschiedene mögliche Prinzipien für eine Systematisierung, nämlich phänomenologische, logische und dialektische. (vgl. Jaspers [1991]) Zu Beginn der griechischen Mathematik war keineswegs ausgemacht, nach welchem Muster diese neue Wissenschaft systematisiert werden würde. Dem Bericht des Dikaiarch entnehmen wir, daß und wie Plato sich für die logische Systematik eingesetzt und damit die Struktur der Elemente Euklids also ganz wesentlich mitbestimmt hat. Zum einen hat er den Mathematikern seiner Zeit die Methode der Analysis nahegelegt oder sogar aufgezwungen und diese besteht darin, *"daß ein komplexer Sachverhalt auf möglichst einfache und primär gewisse Voraussetzungen, Bedingungen, Ursachen zurückgeführt wird."* (Gaiser [1986] S.119) In Platos Akademie wurden also endgültig die Weichen gestellt für die axiomatisch–deduktive Binnenstruktur der Elemente. Weiter ist bei Dikaiarch die Rede von der Möglichkeitsbestimmung bzw. der Methode der Dihorismoi. Hier liegt der Grund für den konstruktiven Charakter der Elemente, der sich darin zeigt, daß zahlreiche Definitionen auf eine im Prinzip mögliche Handlung bzw. Ausführung gegründet werden, eben auf eine Konstruktion. Das sei an einem Beispiel verdeutlicht. In der Pythagoreischen Arithmetik werden gerade und ungerade Zahlen durch zwei

Sorten von Kieselsteinen unterschieden; bei gleicher Anzahl beider Sorten handelt es sich um eine gerade Zahl, während bei einer ungeraden Zahl die Anzahlen (um den allein zugelassenen Unterschied Eins) differieren. Es ist dies eine phänomenologisch–anschauliche Charakterisierung. In Euklids Elementen findet sich jedoch eine konstruktive Kennzeichnung: *"Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt."* (VII Buch, Def. 6) Nachdem Platos Anteil am Stil der Elemente deutlich geworden ist, sollte noch die Frage nach seinen Motiven gestellt werden. Die folgende Antwort von Gaiser hierauf mag etwas kühn klingen, doch abwegig ist sie in keinem Fall: *"Die Mathematik konnte der philosophischen Dialektik um so besser als Modell– und Vergewisserungsbereich dienen, je vollständiger die mathematischen Ordnungen selbst erforscht und je systematischer ihre einfachen Voraussetzungen herausgearbeitet waren ... Plato mußte also Wert darauf legen, daß die elementaren Grundvoraussetzungen der einzelnen mathematischen Wissenschaften festgestellt wurden. Deswegen ... forderte er die Axiomatisierung der mathematischen Wissenschaften."* (Gaiser [1986], S.120) Daraus ergäbe sich folgendes Spurenknäuel. Die philosophischen Spuren in der griechischen Mathematik sind deshalb gelegt, damit die entlang dieser Spuren systematisierte Mathematik ihrerseits als Idealspur für die Entfaltung der griechischen Philosophie fungieren kann.

g) Frage nach der Mathematik im Kontext der Kultur.

Auf die Orientierungsfunktion, die Plato der Mathematik in bezug auf die Philosophie zugewiesen hat, wurde bereits hingewiesen. Die strukturelle Synopsis der mathematischen Wissenschaften stellt ein Modell für die ontologische Struktur des unwandelbaren Seins dar. Daraus leitet Plato eine Schlüsselrolle für die Mathematik im Rahmen seiner globalen pädagogischen Konzeption ab: *"Wie jenes Gemeinsame, dessen alle Künste und Verständnisse und Wissenschaften noch dazu bedürfen, was auch jeder mit zuerst lernen muß ... Jenes Schlichte, sprach ich, die eins und zwei und drei zu verstehen; ich nenne es aber, um es kurz zusammenzufassen, Zahl und Rechnung. Oder ist es damit nicht so, daß jegliche Kunst und Wissenschaft daran teilnehmen muß?"* (Politeia 522c) *"Denn auf Haushaltung und auf Staatsverwaltung und auf alle Künste hat kein einziger Unterrichtsgegenstand so großen Einfluß wie die Beschäftigung mit den Zahlen..."* (Nomoi 747b) Der Mathematikunterricht vermittelt also ein Basiswissen für sämtliche Staatsmänner, Wissenschaftler und Handwerker. Deshalb profitiert jeder von einer Beschäftigung mit Geometrie und Arithmetik, freilich je nach Begabung unterschiedlich. (Politeia 526b) Ihre besondere Bestimmung gewinnt die Mathematik aber auch in didaktischer Hinsicht als Vorbereitung für den Übergang vom Werden zum Sein, *"jene Auffahrt, welche wir eben die wahre Philosophie nennen wollen"* (Politeia 521c) und als

Kompaß auf dem Weg zu den Tugenden, insbesondere zum Guten als höchster Tugend.

Bei der vielschichtigen Verzahnung von Mathematik und Philosophie in der klassischen Antike konnten auch negative Einflüsse der Disziplinen aufeinander nicht ausbleiben. Hier sei lediglich durch zwei Beispiele daran erinnert, wie die Entwicklung der Mathematik durch deren Anbindung an die Philosophie gehemmt wurde.

In der gesamten griechischen Mathematik fehlt die Zahl Null. Eine überzeugende Erklärung dafür gibt Plato in seinem Dialog Sophistes (238 a/b):

Fremder:	*Wollen wir aber auch zugeben, es sei möglich, daß dem Nichtseienden irgendein Seiendes zukäme?*
Theaitetos:	*Wie sollten wir!*
Fremder:	*Alle Zahl insgesamt setzen wir doch als seiend?*
Theaitetos:	*Wenn anders irgend etwas als seiend zu setzen ist.*
Fremder:	*So dürfen wir denn nicht wagen, weder eine Mehrheit von Zahl, noch auch die Eins dem Nichtseienden beizulegen.*
Theaitetos:	*Freilich täten wir nicht recht daran, wie es scheint, dies zu wagen nach dem, was unsere Rede aussagt.*

In der durch Parmenides begründeten und von Plato ohne Einschränkung übernommenen Tradition bezog sich Wissenschaft ausschließlich auf unwandelbar Seiendes, über wandelbares Sein konnten nur Meinungen geäußert werden und das Nichtseiende war völlig tabu. Nun bedeutete Zahl stets Anzahl, und zwar Anzahl von etwas, also eine quantitative Aussage über einen Ausschnitt des Seins. Innerhalb dieses Wissenschaftsparadigmas blieb für die Zahl Null wirklich kein Platz; Mugler spricht vom Schatten des Parmenides, dessen philosophisches Postulat an dieser Stelle und auf zahlreichen anderen Gebieten eine im Prinzip mögliche Entwicklung antiker Wissenschaft verhindert hat. Erst in Kulturen, die in philosophischen und religiösen Denkformen die Negation des Seins mit erfaßten, konnte die Null als Zahl fixiert werden. In der Tat wird bei den Indern die Zahl Null durch Worte beschrieben, welche die Leere bezeichnen: sūnya bedeutet leer, abweisend. Und die Araber benennen die Null durch al–sifr, was so viel wie das Leersein oder die Leere bedeutet. (Tropfke [1980], S.16/17) Erst auf diesem Umweg gelangt die Null im späten Mittelalter nach Mitteleuropa. Doch dauert es auch danach mehrere Jahrhunderte, bis sie sich in der mitteleuropäischen Mathematik völlig etabliert hat. Noch zu Beginn des 18. Jahrhunderts heißt es im Mathematischen Lexikon von Christian Wolff: "*Zero, Cyphra, eine Nulle – Heisset in der Arithmetick das Zeichen 0, dadurch wir nichts andeuten. Man brauchet es die leeren Stellen zuerfüllen, in welchen keine Zahl stehet. Z.E. 1 bedeutet in der dritten Stelle hundert: damit ich nun weiß, daß es in der dritten Stelle stehe, wenn es keine andere Zahlen neben sich hat; so werden zwey Nullen angehänget. Daher wird hundert also geschrieben: 100.*" (Wolff [1716] S. 1486) Das Zeichen 0 tritt zwar im Positionssystem auf, steht jedoch nicht für eine Zahl.

Ergänzend sei noch darauf hingewiesen, daß im Fortgang des Sophistes das Fehlen der Zahl Null als Begründung für jedwede sinnvolle Aussage über das Nichtsseiende fungiert. Die damit gewonnene Symmetrie zwischen Mathematik und Philosophie zeigt einmal mehr die enge Bindung und das harmonische Verhältnis dieser beiden Disziplinen bei den Griechen.

Toth gebührt das Verdienst, durch sorgfältige Quellenstudien transparent gemacht zu haben, daß spätestens zur Zeit des Aristoteles die prinzipielle Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien in mathematischer Hinsicht erkannt war. In der Ersten Analytik (66a) heißt es "*So folgt z.B., daß die Parallelen zusammentreffen, sowohl wenn der Innenwinkel größer ist als der Außenwinkel, als auch, wenn das Dreieck mehr als zwei rechte Winkel hat.*" Hier wird also eine Aussage über elliptische Geometrie vorweggenommen. Darüberhinaus war Aristoteles offensichtlich die Möglichkeit von drei grundsätzlich unterschiedlichen Geometrien bekannt, denn in der Zweiten Analytik (90a) schreibt er: "*Das Wissen aber ist ein solches entweder schlechthin und geht nicht auf die außerwesentlichen Bestimmungen des Objekts oder es geht auf sie, also etwa dahin, daß drei Winkel zwei rechten gleich oder größer oder kleiner sind.*" Mit seiner in der Zweiten Analytik ausgearbeiteten Wissenschaftslehre stellt Aristoteles überdies das methodische Instrumentarium bereit, eine Theorie als Folgerungssystem aus Axiomen zu entfalten; die Wahrheit der Folgerungen ist dabei stets relativ in bezug auf die Wahrheit der Axiome. Diese Relativität von Wahrheit erläutert Aristoteles in der Eudemischen Ethik (1222b) ebenfalls an der Winkelsumme im Dreieck: "*Wenn nämlich daraus, daß das Dreieck als Winkelsumme zwei Rechte hat mit Notwendigkeit folgt, daß die des Vierecks vier Rechte beträgt, so ist klar, daß die Ursache dafür die Winkelsumme des Dreiecks ist. Gibt man aber die Möglichkeit zu, daß das Dreieck sich ändert, so muß notwendig sich auch das Viereck ändern: ein Dreieck von drei rechten Winkeln hätte ein Viereck von sechs, eines von vier ein solches von acht zur Folge.*"

Es waren also zur Zeit des Aristoteles alle Möglichkeiten gegeben, nicht–euklidische Geometrien als Theorie zu entfalten. Dennoch wurde kein Schritt in diese Richtung gegangen. Der Grund dafür liegt in dem ontologischen Rahmen, in den die griechischen Philosophen alle Geometrie eingefügt hatten. Geometrie war dem Gehalt nach eine Lehre von unwandelbar Seiendem; hier hat die Winkelsumme im Dreieck einen bestimmten Wert und aus plausiblen Gründen entschied man sich für die euklidische Welt. Alternative Geometrien waren zwar im methodischen Aufbau möglich, dem Inhalt nach jedoch nicht: *"Wenn man aber meint, daß die Parallelen sich schneiden, so ist das in einer Art geometrisch, in einer anderen Art ungeometrisch."* (Zweite Analytik 77b) Die beiden Arten sind Methode und Gehalt.

Hösle hat die Vermutung geäußert, daß Aristoteles seine Kenntnisse über die Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien während seines Aufenthalts in Platos Akademie erworben hat. Um diese Vermutung zu erhärten, hat er nach entsprechenden Hinweisen in Platos Schriften und Platos ungeschriebenen Lehren gesucht. Überzeugend sind die dabei erzielten Resultate nicht. Es gibt wohl nur eine aussagekräftige Passage in den Dialogen: *"Denn ich denke, du weißt, daß die, welche sich mit der Meßkunst und den Rechnungen und dergleichen abgeben, das Gerade und Ungerade und die Gestalten und die drei Arten der Winkel und was dem sonst verwandt ist in jeder Verfahrensart voraussetzend ..."* (Politeia 510c) Ob die drei Arten der Winkel hier wirklich, wie in der Zweiten Analytik, für die drei Möglichkeiten der Winkelsumme im Dreieck stehen, erscheint denn doch recht zweifelhaft. So steht Hösles These, daß die Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien schon Plato bekannt war, auf recht unsicheren Füßen. Gaiser schrieb mir kurz vor seinem viel zu frühen Tod: *"Ich wollte, daß Hösle recht hätte, aber philologisch gesehen reichen die Texte zu einem Beweis schwerlich aus."* Jedoch spätestens bei Aristoteles hat die Philosophie der Geometrie so schwere ontologische Fesseln angelegt, daß die Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien für mehr als zwei Jahrtausende nicht genutzt werden konnte.

2. Zweiseitige Emanzipation: Mathematik und Philosophie im Anschluß an Kant

In diesem gegenüber dem vorangehenden Abschnitt wesentlich kürzeren zweiten Teil soll herausgearbeitet werden, daß durch Kant eine echte Alternative zur klassischen Antike bereitgestellt wird sowohl in der Auffassung von Mathematik als auch in deren Verhältnis zur Philosophie.

In der Vorrede zur zweiten Auflage seiner Kritik der reinen Vernunft nimmt Kant explizit Bezug auf die Thaletische Geometrie: "*Dem ersten, der den gleichschenkligen Triangel demonstrierte, (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben,) dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sah, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellete, (durch Konstruktion) hervorbringen müsse, und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, er der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe gemäß selbst in sie gelegt hat.*" (B XI–XII) In dieser Passage sind schon nahezu alle zentralen Ideen Kants im Hinblick auf Mathematik deutlich angesprochen; auch der Unterschied oder gar Gegensatz zu Platos Auffassung tritt klar hervor. Die Kopernikanische Wende der Denkart wird hier am Exempel der Mathematik vorgeführt. Worin besteht diese Wende?

Plato fragt am Beispiel der Geometrie primär nach den Gegenständen; seine mit den Ideen des Dreiecks, der Geraden usw. gegebene Antwort ortet den Gegenstandsbereich in einer intelligiblen Welt, zu der menschliche Vernunft durch Fügung des Schöpfers per Anamnesis Zugang findet. Kant hingegen fragt zum Auftakt nach der Erkenntnis; produktive Aktivität menschlicher Vernunft steht am Beginn jeder wissenschaftlichen Bemühung – dies geht schon aus dem von Kant verwendeten Vokabular hervor: selbst, hineindenken, darstellen, hervorbringen, beilegen, Konstruktion. Für Plato wird Mathematik ent–deckt, wahr–genommen; für Kant hingegen ist Mathematik das Resultat konstruktiver, schöpferischer Produktivität durch menschliche Vernunft. Der ontologischen Fundierung von Mathematik mit dem Primat des Gegenstands gegenüber der Erkenntnis wird als Alternative eine gnoseologische Grundlage mit dem Primat der Erkenntnis gegenüber dem Gegenstand zur Seite gestellt.

Der produktiven Erkenntnisweise in der Mathematik muß Kant im weiteren Verlauf besondere Aufmerksamkeit schenken. Denn ganz im Sinne von Kants Richtermetapher darf der Mathematiker ohne Frage nicht beliebig konstruieren. Und in der Tat: "*So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.*" (B 730) Diese ebenso knappe wie klare Rangordnung wird von Kant insbesondere für die Mathematik als Richtschnur konsequent beibehalten und befolgt. Bereits in seiner Dissertation aus dem Jahr 1770 stellt er eine Definition von reiner Mathematik bereit, die auch für seine spätere kritische Philosophie Gültigkeit behält: "*Demnach ist die reine Mathematik, welche die Form aller unserer sinnlichen Erkenntnis erörtert, das Werkzeug zu einer jeden anschauenden und deutlichen Erkenntnis; und weil* *ihre Gegenstände nicht allein formale Gründe aller Anschauung, sondern selber ursprüngliche Anschauungen sind, bietet sie eine ganz wahre Erkenntnis und zugleich das Urbild höchster Evidenz in anderen."* (Von der Form der Sinnen– und Verstandeswelt und ihren Gründen §12) In der Kritik der reinen Vernunft wird die Interpretation des Begriffs in diesem Kontext nachgeliefert und dabei zugleich die grundsätzliche Differenz zur Philosophie ausgesprochen: "*Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen."* (B741) Bei Kant sind die Bedingungen für die Möglichkeit mathematischer Erkenntnis identisch mit den Bedingungen für die Möglichkeit jener Gegenstände, von denen Mathematik handelt. Objektkonstitution und Erkenntnisvermögen kommen gemeinsam auf den Weg; dabei gebührt jedoch der Spontaneität und Produktivkraft einer auf Erkenntnis abzielenden Vernunft Priorität und also die führende Rolle.

Zugleich wird schon hier deutlich, daß und wie Kant die beiden Wissenschaften Philosophie und Mathematik klar gegeneinander absetzt. Der Gleichklang der Themen und Methoden, die Parallelität der Entfaltung, wie wir sie für das Disziplinenpaar Mathematik–Philosophie bei Plato kennen gelernt haben, findet hier keinerlei Entsprechung. Ganz im Gegenteil: Im radikalen und unerbittlichen Nachweis der grundlegenden Unterschiede versucht Kant sowohl die Mathematik als auch die Philosophie ihrer eigentlichen Bestimmung anzunähern – Selbstverwirklichung beider Partner durch zweiseitige Emanzipation. Dennoch kann und muß man auch bei Kant von vielfältigen philosophischen Spuren in seinem Mathematikverständnis sprechen. Und auch in der Mathematik selbst hinterläßt diese Philosophie ihre Spuren. Dies sei an einem Beispiel demonstriert. Den komplexen Zahlen wurde in der Mathematik lange Zeit nur eingeschränktes Hausrecht eingeräumt, allenfalls ein Sonderstatus zugebilligt. Descartes spricht noch von wahren und falschen Wurzeln einer Gleichung; Euler stellt mögliche und unmögliche Zahlen einander gegenüber: "*Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0 oder aber 0 selbst sind, ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß sie unmögliche Zahlen sind. Dieser Umstand führt uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach unmöglich sind und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind."* (Vollständige Anleitung zur Algebra 143) Die Bindung an die Anschauung, wie sie bei Kant für die Charakterisierung von Mathematik vorgenommen wird, hat offensichtlich Gauß angeregt, den komplexen Zahlen eine philosophisch und wissenschaftstheoretisch nicht anfechtbare Aufenthaltserlaubnis in der Mathematik zu verschaffen. Man kann nicht sagen, daß Gauß ein glühender Verehrer Kants gewesen sei; in einem Brief vom 1.11.1844 schreibt er an Schumacher: "*seine* [Kants] *Distinction zwischen analytischen und synthetischen Sätzen ist meines Erachtens eine solche, die entweder nur auf eine Trivialität hinausläuft oder falsch ist.*" Doch in einer Arbeit aus dem Jahre 1831 verraten schon Wortwahl und Formulierung den direkten Bezug zu Kant. Die Verwendung komplexer Zahlen in der Theorie der biquadratischen Reste nimmt Gauß zum Anlaß, auf den möglichen Irrtum hinzuweisen, "*dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne.*" (Gauß Werke II S.174) Dem widerspricht er energisch: "*Nichts würde unbegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig,...*" Es folgt die Darstellung der komplexen Zahlen in der nach ihm benannten Zahlenebene, an die sich als Resümee anschließt: "*Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von* $\sqrt{-1}$ *vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.*"

Natürlich erschöpft sich Wissenschaft auch bei Kant nicht in der Konstitution von Gegenständen und der Einführung von Begriffen, denn "*aus einem bloßen Begriffe lassen sich keine Sätze, die über den Begriff hinausgehen, ziehen.*" (B 40/41) "*Folglich sind alle mathematischen Begriffe für sich nicht Erkenntnisse;*" (B 147) Es bedarf also einer methodischen Systematisierung des bereitgestellten Materials, oder, wie Kant es ausdrückt, einer Synthesis der Mannigfaltigkeit von Begriffen zu einer Einheit. Genau wie in der klassischen Antike stehen dafür auch in diesem Rahmen mit der phänomenologischen, der dialektischen und der logischen Systematik drei Konkurrenten zur Wahl. Der Kantforscher Martin hat mit Sorgfalt und Umsicht herausgearbeitet, daß wegen der Konstituierung von Mathematik durch synthetische Aussagen, die a priori gewonnen werden, Kants Wahl mit zwingender Notwendigkeit auf die logisch–deduktive, axiomatisch ausgerichtete Systematik fallen mußte. In dieser Hinsicht stimmen Kant und Plato im Ergebnis zwar überein, doch könnte die in beiden Fällen gegebene Begründung kaum unterschiedlicher geführt werden; auch sehr verschiedenartige Spuren und Fährten enden mitunter bei ein und demselben Ziel.

Schließlich findet auch die Frage nach der Bindung von Theorie und Praxis in Kants Philosophie der Mathematik eine klare Antwort. Nach Kant zielt Erfahrung ausschließlich auf Erscheinungen, nicht jedoch auf Dinge an sich. Während die reine Mathematik innerhalb der transzendentalen Ästhetik abgehandelt wird, ist für die Anwendung von Mathematik auf Erfahrung die transzendentale Analytik zuständig. Dort wird nun ausgeführt, daß und wie Erscheinungen der Form nach Anschauungen in Raum und Zeit enthalten und alle Anschauungen ihrerseits extensive Größen sind. Durch eine sukzessive Synthese der produktiven Einbildungskraft kann nun weiter Geometrie auf den Raum sowie Arithmetik auf die quantitativ erfaßten Größen angewandt werden. Die Bedingungen der Möglichkeit reiner Mathematik stehen in Korrespondenz zu den Bedingungen der Möglichkeit von Anwendungen in der Praxis. Kant macht diese Korrespondenz von reiner und empirischer Anschauung im transzendentalen Grundsatz der Mathematik der Erscheinungen fest: *"Dieser transzendentale Grundsatz der Mathematik der Erscheinungen gibt unserem Erkenntnis a priori große Erweiterung. Denn er ist es allein, welcher die reine Mathematik in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung anwendbar macht, welches ohne diesen Grundsatz nicht so von selbst erhellen möchte, ja auch manchen Widerspruch veranlasset hat. Erscheinungen sind keine Dinge an sich selbst. Die empirische Anschauung ist nur durch die reine (des Raums und der Zeit) möglich;"* (B 206)

3. Unübersichtliche Polygamie: Vielfalt der Philosophie und Pluralität der Mathematik in der Gegenwart

Die Bemühungen um eine philosophische Fundierung von Mathematik und damit zugleich um eine Überwindung der Grundlagenkrise der Mathematik im ersten Drittel unseres Jahrhunderts haben ihren Ursprung und Anlaß in den mengentheoretischen Antinomien, die um die Jahrhundertwende aufgedeckt wurden und verständlicherweise nicht nur unter Mathematikern für Irritation sorgten. Die philosophische Herausforderung, welche ohne Frage in den Antinomien steckt, soll hier nicht heruntergespielt werden. Dennoch hat die Focussierung auf dieses eine Problem die Entwicklung und Entfaltung einer umfassenden Philosophie der Mathematik in unserem Jahrhundert ganz wesentlich gehemmt, wenn nicht gar verhindert. Durch die Antinomien ergab sich zwingend, daß das Problem der Wahrheit in der Mathematik neu durchdacht werden mußte. Doch wurden während der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts innerhalb der Mathematik Einsichten gewonnen und Beobachtungen gemacht, die sämtliche tradierten Antworten auf alle im ersten Abschnitt präzisierten sieben Fragen zu einer Philosophie der Mathematik in ihrer Erklärungskraft stark erschütterten. Deshalb ist es bedauerlich, daß durch eine Isolierung des Antinomienproblems und der Wahrheitsfrage jede Möglichkeit einer globalen Lösung und Betrachtungsweise blockiert wurde. Hier soll und kann keine Korrektur der Geschichte vorgenommen werden. Deshalb skizzieren wir zunächst die Kontroverse um das Wahrheitsproblem in der Mathematik, wie sie von 1900 bis etwa 1930 ausgetragen wurde. Daran anschließend wird erläutert, daß und inwiefern die Wahrheitsfrage lediglich eins von zahlreichen neuen Problemen ist, welche aus der Mathematik des vorigen Jahrhunderts übernommen werden mußten und nur mit philosophischen Denkformen geklärt und in ein adäquates Mathematikverständnis eingebunden werden konnten. Damit wird dann zugleich die Basis geschaffen für eine philosophische Erörterung gegenwärtiger Mathematik.

Im Anschluß an die Paradoxien hat man drei extrem unterschiedliche Versuche unternommen, der Mathematik die verlorengegangene universelle und intersubjektive Wahrheit in einem neuen Rahmen zurückzugeben, indem jeweils spezielle Wahrheitskonzeptionen zugrunde gelegt wurden. Dies führt zu drei verschiedenen Auffassungen von Mathematik überhaupt, welche durch die Aufkleber Formalismus, Logizismus und Intuitionismus gekennzeichnet werden.

Beim Formalismus wird Wahrheit in der Mathematik mit syntaktischer Widerspruchsfreiheit gleichgesetzt. Damit diese Identifikation überhaupt sinnvoll ist, muß ihr die Auffassung von Mathematik als einer rein syntaktischen Denkleistung vorausgehen. In der Tat hat Weyl sehr hübsch ausgeführt, daß in diesem Kontext Mathematik ein von aller Semantik freies Spiel nach Regeln ist, vergleichbar etwa dem Schachspiel. Den Figuren beim Schach entsprechen Symbole in der Mathematik und die Aufstellung auf dem Brett zu Beginn einer Partie steht in Korrespondenz zu einem System von Formeln, also einem Axiomensystem. Nach festen Regeln wird das Spiel von Zug zu Zug vorangetrieben, analog werden nach Regeln für das Schließen die Formeln in andere übergeführt. Einer Spielstellung beim Schach entspricht ein System abgeleiteter Formeln. Das Schachspiel ist widerspruchsfrei; in der Mathematik haben nur solche Spiele Hausrecht, deren Widerspruchsfreiheit nachweisbar ist. Hilbert hat lange gehofft, diese Widerspruchsfreiheit in weitreichender Allgemeinheit beweisen zu können; Gödel zeigte die Grenzen dieses Vorhabens auf. Aber auch andere Bedenken wurden vorgetragen. Weyl meinte: *"Soll aber Mathematik eine ernsthafte Kulturangelegenheit bleiben, so muß sich* *nun doch mit diesem Formelspiel irgendein Sinn verknüpfen."* (Weyl Werke II S.450) Und Hersh schrieb recht bissig: *"Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all."* (Hersh [1979] S.32) Diese Doppelgänger–Mentalität der Mathematiker hat übrigens fatale didaktische Konsequenzen gehabt. Denn es ist noch gar nicht so lange her, daß sich die Verantwortlichen der Konzeption des Mathematikunterrichts an den Sonntagsreden und nicht an der Werktagsarbeit der professionellen Mathematiker orientiert haben.

Eine ganz andere Antwort auf die Antinomien bietet der Logizismus. Hier wird Wahrheit in der Mathematik als Sonderfall allgemeiner logischer Wahrheit und dementsprechend Mathematik als Spezialfall der Logik postuliert. Als erster hat Frege diesen Weg vorgeschlagen, später hat sich Russell intensiv um einen Ausbau bemüht. Dem ganzen Lösungsversuch liegt natürlich die Überzeugung zugrunde, daß die Paradoxien im Kern nicht mathematischer, sondern logischer Natur sind. Für die Entwicklung der Logik hat die logizistische Auffassung wertvolle Impulse vermittelt, für eine Philosophie der Mathematik erweist sie sich als zu eng. Schon einfache mathematische Sachverhalte nehmen im Gewand der Logik eine völlig undurchsichtige Gestalt an. Intuition und Anschauung, zwei ständig von jedem Mathematiker gebrauchte Aktivitäten, lassen sich hier überhaupt nicht integrieren. An Werktagen arbeitet kaum ein Mathematiker in der Welt des Logizismus und auch am Sonntag präsentiert er seine Resultate nicht in dessen Sprache.

Der Intuitionismus zeichnet sich gegenüber den beiden bereits geschilderten Positionen insbesondere dadurch aus, daß eine präzise Auffassung von Mathematik am Anfang steht, welche eine Antwort auf die Wahrheitsfrage bereits enthält. Mathematik als Wissenschaft ist hier gebunden an finite Konstruktion oder an im Prinzip finite Re–Konstruktion. Aktual unendliche Gesamtheiten sind nicht zugelassen. Überdies wird das "tertium non datur" in seiner klassischen allgemeinen Form als universelle Schlußregel nicht akzeptiert, so daß also insbesondere Widerspruchsbeweise zum Nachweis der Existenz ausscheiden. Es existiert das und nur das, was sich in endlich vielen Schritten konstruieren läßt. Im Intuitionismus können somit zahlreiche Argumentationsformen aus der tradierten Mathematik nicht übernommen werden. Der funktionentheoretische Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra ist kein Beweis im Sinne des Intuitionismus; hierfür gibt es jedoch intuitionistische Beweise. Bei anderen Sätzen ist dies ganz sicher nicht möglich. Dennoch haben Brouwer, Heyting und deren Nachfolger einen beachtlichen Bestand an intuitionistisch fundierter Mathematik entwickelt; zugleich wird damit der Konstruktivismus, ein umfangreiches Teilgebiet gegenwärtiger Mathematik, vorbereitet.

Es ist müßig, die genannten Lösungsversuche, also Formalismus, Logizismus und Intuitionismus gegeneinander ausspielen zu wollen oder gar eine Rangordnung anzustreben. Denn es handelt sich um drei höchst unterschiedliche, jedoch nicht im Detail miteinander vergleichbare Antworten auf eine bestimmte Situation innerhalb der Mathematik, nämlich die mit den Antinomien neu aktualisierte Wahrheitsproblematik. Diese spezielle Problematik sollte ohnehin nicht isoliert gesehen werden. Denn in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ergaben sich innerhalb der Mathematik noch andere Konstellationen und Situationen, die eine gründliche Analyse des Wissenschaftsstatus von Mathematik und damit auch neue Antworten auf die im ersten Abschnitt bereitgestellten Grundfragen zur Mathematik erzwangen.

Im Jahr 1888 publizierte Hilbert in einer Arbeit zur Invariantentheorie einen neuartigen "reinen" Existenzbeweis. Es geht dabei um den Nachweis einer endlichen Basis und Hilberts Beweis enthält keinerlei Fingerzeig, wie eine solche Basis konkret gewonnen werden könnte. Offensichtlich war sich Hilbert bewußt, daß er mit seinem Beweis Neuland betrat und korrespondierte deshalb mit Cayley. Der englische Mathematiker beglückwünschte Hilbert zu seinem Resultat, meldete aber Bedenken an, ob Hilberts Beweis wirklich ein Beweis sei. Wesentlich schroffer äußerte sich Gordon in einem Brief an Klein: *"Der Fehler liegt nicht an der Form, dem würde sich sonst leicht abhelfen lassen; er liegt aber viel tiefer. Hilbert hat es verschmäht seine Gedanken nach formalen Regeln aus einander zu legen; er meint, es genüge, dass niemand seinem Beweise widerspricht, dann wäre schon alles in Ordnung. Damit kann er Niemanden belehren;"* (Briefwechsel S.65) Hilbert rechtfertigt sich in einem Brief an Klein mit aller Ausführlichkeit und schildert seine Bemühungen um Anerkennung des Beweises: *"Seitdem habe ich mit mehreren Mathematikern über diesen Satz und seinen Beweis mich mündlich unterhalten und mit einigen (Cayley und Netto) correspondirt. Stets habe ich es hierbei im Auge gehabt, Erfahrungen zu sammeln darüber, welche Punkte dem Hörer oder Leser die meisten Schwierigkeiten verursachen. Diese Erfahrungen habe ich insbesondere zu verwerten* *gesucht, als ich meinen Zuhörern im Colleg gegen Mitte dieses Semesters den Beweis vortrug. Auch habe ich mich durch persönliche Rücksprache mit einem meiner Zuhörer davon überzeugt, daß der Beweis verstanden worden ist."* (Briefwechsel S.64) Dieses Beispiel zeigt in aller Deutlichkeit, daß auch und gerade in der Mathematik neue Formen des Beweisens keineswegs problemlos von der Gemeinschaft der Mathematiker akzeptiert werden. Was ein Beweis ist und was nicht – das läßt sich keineswegs ein für alle Mal fixieren.Dasselbe gilt für die Frage, ob eine Aussage im Rahmen der Mathematik überhaupt bewiesen werden muß. Auch dazu sei ein Exempel in Erinnerung gerufen.

In seiner vierten Arbeit über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten arbeitet Cantor 1883 erstmals mit dem Begriff der wohlgeordneten Menge. *"Daß es immer möglich ist, jede wohldefinierte Menge in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Arbeit zurückkommen."* (Cantor Werke S.169) Cantor spricht hier von einem Denkgesetz; ein Beweis erscheint ihm nicht notwendig. Sein Versprechen, in einer späteren Arbeit darauf zurückzukommen, hat er übrigens nicht eingelöst. Dennoch wird ihm nachgesagt, daß er in späteren Jahren seine Ansicht dahingehend geändert hat, es handle sich beim Wohlordnungssatz nicht um ein Denkgesetz, sondern um ein Theorem der Mathematik, für den ein Beweis geführt werden müsse. So blieb es Hilbert vorbehalten, in seinem Pariser Vortrag, quasi als Anhang zum Kontinuumproblem, einen Beweis anzumahnen: *"Es erscheint mir höchst wünschenswert, einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung..."* (Hilbertsche Probleme S.36) Wenige Jahre später gelang Zermelo ein Beweis unter Verwendung des Auswahlprinzips. Nicht nur die Akzeptanz neuer Beweisformen, sondern auch die Beweisnotwendigkeit neuer Aussagen unterliegt also in der Mathematik einem dynamischen Prozeß.

Im Jahr 1871 nimmt Dedekind mit seinen Idealen völlig neuartige mathematische Objekte in den Blick, macht sie zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen und entwickelt sogleich eine umfangreiche Theorie der Ideale. Vorbereitet wird die Definition durch Betrachtung aller Vielfachen eines Elements μ in einem Ring, also des von μ erzeugten Hauptideals. Es schließt sich die Beobachtung an, daß die beiden Eigenschaften der Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und der Absorbtion bzgl. der Multiplikation mit Ringelementen auch anderen Teilmengen des Rings zukommt. Dann fährt Dedekind fort: *"Diese Erscheinung veranlasst uns, von der Existenz einer Zahl μ, durch welches ein* *solches System $\mathfrak{m}$ erzeugt werden könnte, ganz abzusehen und lediglich an den Eigenschaften I und II festzuhalten, welche an sich einen vollkommenen klaren und bestimmten, von der Existenz einer erzeugenden Zahl μ unabhängigen Sinn haben. Jedes System $\mathfrak{m}$, welches diese beiden Eigenschaften besitzt, wollen wir ein Ideal nennen..."* (Dirichlet [1893] S.551) Die Definition von Teilmengen durch charakteristische Eigenschaften bricht mit der Tradition, die sich an der expliziten Kennzeichnung als einzigem Prinzip der Aussonderung orientiert hatte. Deshalb muß Dedekind auch für seine neuartige Definition werben und darauf hinweisen, daß die charakteristischen Eigenschaften "an sich einen vollkommenen klaren und bestimmten Sinn haben". Die Einführung neuartiger Objekte in die Mathematik ist keineswegs selbstverständlich; ihre Akzeptanz in der Gemeinschaft der Mathematiker muß mitunter genau so mühsam und hartnäckig erkämpft werden, wie dies bei neuartigen Beweisformen der Fall ist.

Auch die Frage nach der Bindung von Theorie und Praxis, also nach der Beziehung von reiner Mathematik zu deren Anwendung in der Wirklichkeit stellte sich im vorigen Jahrhundert neu. Dies ergab sich zwingend aus der Pluralisierung der Geometrie. Der euklidischen wurden die nicht–euklidischen Geometrien zur Seite gestellt; Riemann schuf mit seinen n–dimensionalen Mannigfaltigkeiten gleich ein umfangreiches Reservoir neuer Schauplätze für Geometrie. Von einer Konstruktion in reiner Anschauung oder einem transzendentalen Grundsatz, durch welchen Kant die reine Mathematik auf Erfahrung anwendbar werden ließ, konnte und kann hier keine Rede sein. Der bis dahin unbestrittene Modellcharakter von Mathematik für die Wirklichkeit wurde Makulatur; als Folge davon wurde der bis dato so unproblematische Begriff der Wirklichkeit selbst zum Problem. Schließlich mußten spätestens in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts auch die Probleme der Vermittlung und der Darstellung von Mathematik neu durchdacht werden, dies allein schon deshalb, weil die Zahl der Lernenden und damit auch der Lehrenden von Mathematik in relativ kurzer Zeit beachtlich zunahm. Es ist wiederholt darauf hingewiesen worden, daß die in jener Zeit entwickelte "neue Strenge" in der Analysis zu einem nicht unerheblichen Anteil ihre Impulse aus dieser Zunahme mathematischen Unterrichts erhalten hat.

Durch wenige Beispiele nur konnte aufgezeigt werden, daß die Entwicklung der Mathematik im vorigen Jahrhundert zwangsweise zu einer neuen Auffassung und einem veränderten Verständnis dieser Disziplin führen mußte. Die im ersten Abschnitt bereitgestellten Fragen zum Status und Charakter der Wissenschaft Mathematik mußten neu durchdacht werden, verlangten nach neuen Antworten. Zugleich ist deutlich geworden, daß die Eingrenzung auf die Wahrheitsfrage die Problemlage verfälschte; das hauptsächlich von Mathematikern getragene Trio Formalismus – Logizismus – Intuitionismus konnte somit keine global befriedigende Lösung anbieten. Die stürmische Entwicklung und Expansion der Mathematik in unserem Jahrhundert hat die Notwendigkeit einer überzeugenden Philosophie der Mathematik zwar zunehmend deutlich werden lassen, zugleich aber die Hoffnung auf eine befriedigende Lösung stark gedämpft.

Von der Philosophie her sind drei systematische Versuche unternommen worden, der Mathematik eine philosophische Heimat zu geben, doch mußten auch diese gut gemeinten Bemühungen scheitern, weil die jeweils zugrunde liegenden philosophischen Rahmenbedingungen der veränderten Mathematik nicht gerecht werden konnten. Husserl hat sich sehr differenziert und ausführlich mit Arithmetik, Geometrie und Logik befaßt, doch blieben seine philosophischen Einsichten in die Mathematik stets an Phänomenologie gebunden und mußten daher einseitig und folglich unvollständig bleiben. Cassirer hat die Mathematik mit Einfallsreichtum und Geschick in seine Philosophie der symbolischen Formen integriert; man kann Cassirers Schriften wertvolle Einsichten in den Symbolcharakter sogar der aktuellen Mathematik entnehmen, doch wird auch hier nur ein kleiner Ausschnitt der umfangreichen Problematik behandelt. Schließlich hat Carnap die Mathematik in seinen logischen Positivismus eingebaut, doch war auch dieser Versuch durch zu strenge philosophische Vorgaben von Beginn an belastet und somit als Philosophie der gesamten mathematischen Wissenschaft ungeeignet.

Deshalb ist Resignation ganz sicher mit im Spiel gewesen, wenn es von 1930 bis etwa 1980 unter Mathematikern nur zaghafte Bemühungen um eine Philosophie der Mathematik gab; die Mathematik selbst wurde während dieser Zeit weitgehend ohne philosophische Reflexion und Besinnung vorangetrieben. Erst seit etwa 10 Jahren wird in der Mathematik und also auch unter Beteiligung von Mathematikern wieder intensiver und engagierter über philosophische Aspekte diskutiert. Von diesen aktuellen Bemühungen soll hier abschließend berichtet werden.

Fast alle Diskutanten machen den Vorschlag, nicht mit einem theoretischen Entwurf, sondern mit einer Analyse der mathematischen Realität zu beginnen. *"It is reasonable to propose a new task for mathematical philosophy: not to seak indubitable truth, but to give an account of mathematical knowledge as it really is..."* (Hersh [1979] S.43) *"To develop a fresh view of the philosophy of mathematics, we begin by looking at* *the actual state of mathematics."* (MacLane [1984] S.463) Das ist ein gut gemeinter Rat, doch hat er auch seine Tücken: Es gibt recht viele Mathematiker und sie unterscheiden sich sowohl in ihrer mathematischen Arbeit als auch in ihrem Mathematikverständnis doch sehr voneinander. Deshalb wird jede zeitgemäße Philosophie der Mathematik die Pluralität gegenwärtiger Mathematik zu berücksichtigen haben; man sollte womöglich gar nicht mehr von "der Mathematik" sprechen, sondern wie in früheren Zeiten von "den mathematischen Wissenschaften". Hinzu kommt, daß sich nicht nur eine einzige Philosophie für philosophische Aspekte der Mathematik anbietet. Heutige und künftige Philosophie der Mathematik wird also die Pluralität der Mathematik mit der Vielfalt der Philosophie in einen Begründungszusammenhang bringen müssen. Die komplexe Problemlage einerseits und das heutige Wissenschaftsverständnis andererseits machen dabei von Beginn an jede Hoffnung auf eine für alle Beteiligten konsensfähige Lösung zunichte. Für jede der im ersten Abschnitt formulierten Grundfragen gibt es heute alternative Antworten; deshalb kann hier nur eine kleine Auswahl möglicher Ansätze zu einer zeitgemäßen Philosophie der Mathematik präsentiert werden.

a) Frage nach dem Gegenstandsbereich der Mathematik.

In einem viel beachteten Vortrag erklärte Bernays 1935, *"daß es keine Übertreibung ist, wenn man sagt, der Platonismus sei heute herrschend in der Mathematik."* (Bernays [1976] S.65) Der Platonismus beinhaltet, daß mathematische Objekte und deren Gesetzmäßigkeiten unabhängig von jeder wissenschaftlichen Aktivität gegeben und fixiert sind. Mathematik als Wissenschaft hat in diesem Kontext die Aufgabe, die zwar vorgegebene, aber zunächst verborgene Welt der Mathematik zu entdecken und begrifflich möglichst adäquat zu beschreiben.

Die an der aktuellen Diskussion beteiligten Mathematiker sprechen sich fast ausnahmslos gegen den Platonismus aus, und zwar meist mit so deutlichen Worten, wie man sie bei MacLane findet: *"Our view of Mathematics ... is, however, in sharp contrast to all variants of Platonism."* (MacLane [1986], S.447) Es hat also offensichtlich in neuerer Zeit ein Gesinnungswandel im Hinblick auf den Gegenstandsbereich der Mathematik stattgefunden. Dies ist auch schon daraus ablesbar, daß die Kernfrage nach den mathematischen Gegenständen heute weder als ontologische noch als gnoseologische Frage formuliert und aufgefaßt wird, sie wird vielmehr umgedeutet und uminterpretiert in eine Frage nach der deskriptiven Leistung heutiger Mathematik. (Scheibe [1990], S.207) Die Antwort hierauf wird nun in der Regel so gegeben, daß sich Mathematik gar nicht mit primär verfügbaren oder geschaffenen Gegenständen befaßt, sondern daß Mathematiker vielmehr nur Formen von Gegenständen, Handlungen und Situationen zusammen mit den möglichen Weisen der Verständigung über diese Formen untersuchen. In der kommunikativen Ebene werden diese Formen in der Tat wie Gegenstände behandelt und gehandelt, und zwar meist in der begrifflichen Gestalt von Strukturen, doch die genuine mathematische Leistung besteht in der Auszeichnung des Formtyps. So führt die Form des Zählens zu den Objekten der elementaren Arithmetik, eine Analyse des Schätzens mündet in die Stochastik, die kognitive Leistung des Zusammenfassens steht Modell für Mengenlehre und Kombinatorik, die Form des natürlichen Schließens und Argumentierens wird in der mathematischen Logik zum Gegenstand der Untersuchung. Es stehen also typische menschliche Aktivitäten Pate für mathematische Begriffsbildungen; damit ist Mathematik nicht sogleich eine empirische Wissenschaft, aber sie ist eben doch stark an der Empirie orientiert. Man plakatiert diese wissenschaftsphilosophische Einstellung deshalb als Quasi–Empirismus. Dieser Prozeß der Auszeichnung und Kennzeichnung von Formen als Folge intensiver Erfahrung wiederholt sich übrigens auch innerhalb der Mathematik. Der Umgang mit zahlreichen konkreten Gruppen führt zur neuen Form von "Gruppe überhaupt", also zum abstrakten Gruppenbegriff. Vertrautheit mit diversen algebraischen Strukturen wiederum bringt die Kategorie auf den Weg. Synchron mit der konzeptuellen Leistung erfolgt die sprachliche Fixierung durch Umgangs– und Symbolsprache. Deutlicher als in früheren Zeiten wird heute gesehen, daß jede Mathematik und auch jede Philosophie von Mathematik eingebunden sind sowohl in linguistische als auch in semiotischen Vorgaben. Dieser außermathematische Rahmen hat recht weitgehende Konsequenzen für die Mathematik selbst. In extremen Auffassungen wird die Mathematik entweder von der Linguistik absorbiert und ist ein reines Sprachspiel – etwa bei Wittgenstein – oder aber sie wird von der Semiotik vereinnahmt und erscheint als Teil– und Anwendungsgebiet allgemeiner Zeichenlehre. In jedem Fall gehört zur quasi–empiristischen Auffassung des mathematischen Gegenstandsbereichs die linguistisch–semiotische Komponente der Verständigung. Mathematik ist damit eingebunden in die soziale Wirklichkeit.

b) Frage nach dem Wahrheitscharakter.

Immer wieder hat man gemeint, daß die Aussagen der Mathematik den Status absoluter, unerschütterlicher und zeitloser Wahrheit haben. Unter dieser Annahme gehören einmal erzielte Resultate für immer zum Bestand; der Vorrat wissenschaftlicher Erkenntnisse in der Mathematik nimmt grundsätzlich zu. Den Grund für diese Überzeugung, daß in der Mathematik ausschließlich objektiv gültige Wahrheiten erzielt und akzeptiert werden, sah man im Beweis; in der transparenten und reproduzierbaren Argumentation mittels eines Beweises glaubte man die Wahrheit in dieser Wissenschaft abgesichert zu haben. Nun hat aber schon Aristoteles in seiner Analytik mit aller Deutlichkeit herausgearbeitet, daß durch einen Beweis lediglich die Korrektheit der Schlußweise und dies auch nur im Rahmen akzeptierter Regeln des Schließens nachgewiesen wird. Weder über den Wahrheitscharakter der Prämisse noch über den der Konklusion gibt der verbindende Beweis irgendeine Auskunft. Diese früh gewonnene Einsicht ist allzu oft in Vergessenheit geraten, wenn sie auch heute zum unbestrittenen Inventar jeder Philosophie der Mathematik gehört. Danach leistet ein Beweis lediglich eine Verschiebung der Wahrheitsfrage und in keinem Fall eine Entscheidung. Dieser Verlagerungsprozeß des Wahrheitsproblems hat je nach philosophischem Standpunkt unterschiedlichen Effekt. Im Formalismus bewirkt ein Beweis eine Verschiebung innerhalb der Mathematik, im Konstruktivismus verlagert der Beweis die Wahrheitsfrage aus der Mathematik hinaus. In beiden Fällen kann das Wahrheitsproblem weder mit der Methode noch nach den Kriterien mathematischen Schließens gelöst werden. Nochmals sei Heidegger zitiert: "*Will man über die Mathematik als Theorie etwas aussagen, dann muß man das Gegenstandsgebiet der Mathematik und ihre Vorstellungsweise verlassen. Man kann nie durch eine mathematische Berechnung ausmachen, was die Mathematik selbst ist.*" (Heidegger [1954] S.57) Nun gibt es in der Philosophie ein ganzes Spektrum von Wahrheitstheorien, die hier im Hinblick auf Mathematik befragt werden könnten. Doch befindet sich leider kein Anbieter auf diesem Markt, der eine komplette Theorie offeriert, die wie maßgeschneidert auf die Mathematik paßt. Deshalb konkurrieren alternative Wahrheitsauffassungen um Anerkennung in der Mathematik und bei den Mathematikern. Eine erste entscheidende Alternative besteht schon darin, ob sich die subjektive Wahrheit an der objektiven Wahrheit zu orientieren hat oder ob umgekehrt subjektive Wahrheiten primär gegeben sind und objektive Wahrheit nur über einen Verständigungsprozeß erreicht werden kann. Der zweite Lösungsweg wird von Schelling in seinen Vorlesungen über das akademische Studium vorgeschlagen: "*Wie die wahre Handlung diejenige ist, die gleichsam im Namen der ganzen Gattung geschehen könnte, so ist das wahre Wissen nur dasjenige, worin nicht das Individuum, sondern die Vernunft weiß. Es ist also notwendig, daß ... die Wissenschaft sich von Individuum zu Individuum mitteile.*" (Schelling [1974] S.18) Wahrheit von Wissenschaft ist also auf Kommunikation angewiesen, Wissenschaft selbst ist ein soziales Konstrukt. In vielen wissenschaftlichen Disziplinen hat eine solche Auffassung Tradition, in der Mathematik hat sie sich jedoch erst in neuester Zeit durchgesetzt. Sie wird für die mathematischen Wissenschaften insbesondere den Erfahrungen gerecht, die hier seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts gesammelt wurden. Denn sie erklärt nicht nur die Pluralität gegenwärtiger Mathematik, sondern sie berücksichtigt insbesondere auch den Prozeßcharakter und den Wandel wissenschaftlicher Akzeptanz. Gerade in der Mathematik hat die Diskussion um zulässige und unzulässige Beweise gezeigt, daß über Anerkennung und Ablehnung allein im sozialen Kontext der Wissenschaftler und nicht durch eine neutrale Instanz entschieden wird. Vor gut hundert Jahren wurde Hilberts reiner Existenzbeweis erst nach engagiert geführten Debatten akzeptiert, heute sind derartige Beweise für die Mehrheit der Mathematiker selbstverständlich und unproblematisch. Dafür ringen heute Computerbeweise und probabilistische Beweise um Anerkennung.

Die Entscheidung sowohl über den Gegenstandscharakter als auch über den Wahrheitscharakter ist also eingebunden in äußerst komplexe soziale Systeme. Welche Formen vorrangig durch mathematische Begriffe modelliert und von den Mathematikern in formale Sprachen und Strukturen gefaßt und analysiert werden, das ist auch ein normatives Problem der Gesellschaft. Dies trifft ebenso zu für die Beweistypen und Klassifikationsmuster, nach denen der Wissensvorrat systematisiert und in Theorien zusammengefügt wird. Man bezeichnet diese Wissenschaftsauffassung gern als sozialen Konstruktivismus. Für die Mathematik stellt dieser ganz ohne Frage eine zeitgemäße Alternative dar zu den philosophischen Erklärungsversuchen aus dem ersten Drittel unseres Jahrhunderts.

c) Frage nach der Bindung von Theorie und Praxis.

Die Bindung von Theorie und Praxis hat insbesondere in der Mathematik unseres Jahrhunderts sowohl in quantitativer als auch in qualitativer Hinsicht eine enorme Intensivierung erfahren. Nie zuvor wurden derart viele Teildisziplinen der Mathematik in so umfangreicher und unterschiedlicher Weise in der Praxis genutzt. Die prinzipielle Möglichkeit erfolgreicher Verwendung von Theorie in der Praxis ist philosophisch keineswegs einfach zu erklären, handelt sich dabei doch um *"das Resultat der Projektion einer unbekannten Ordnung in eine andere, die ein von uns selbst konstruiertes System ist, nach einem Projektionsprinzip, das sich unserer Kenntnis gleichfalls notwendig entzieht."* (Henrich [1982] S.79) Was nun die Mathematik betrifft, so dürfte hier der im Quasi–Empirismus vertretenen flexiblen Modellauffassung ein entscheidener Anteil am Aufschwung der Wechselbeziehung von Theorie und Praxis zukommen. Nicht die Wirklichkeit selbst steht Modell für mathematische Begriffsbildungen, sondern stattdessen ein Modell der Wirklichkeit – und beide Modellkonzeptionen werden gemeinsam und in Personalunion entworfen. Die Modellierung oder Modellbildung ist gegenwärtig ein expandierender Forschungsbereich innerhalb der Mathematik. Dabei haben natürlich durch den Einsatz von Großrechnern und den Zugriff auf künstliche Intelligenz die Entfaltungsmöglichkeiten in diesem Bereich eine enorme Steigerung erfahren. Schließlich kommt in diesem Zusammenhang auch das lange Zeit verschmähte Prinzip der pragmatischen Bewährung zu neuen Ehren.

d) Frage nach der mathematischen Erkenntnis

Schließt man sich der quasi–empiristischen Auffassung von Mathematik an, so lassen sich die Bedingungen für die Möglichkeit mathematischer Begriffsbildung recht überzeugend präzisieren. Obwohl für einen anderen Anlaß entworfen, können hier die folgenden Erkenntnis–Richtlinien von Kant den Weg weisen: *"So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen."* (B 730) Mit der Anschauung ist das Vermögen gegeben, in verschiedenen Situationen, Handlungen und Aktivitäten jeweils Gemeinsamkeiten wahrzunehmen und wiederzuerkennen. Die invarianten Formen dieser Abläufe oder Konstellationen werden in der Mathematik durch formale Begriffsbildungen fixiert und danach selbst zum Gegenstand der Untersuchung gemacht. Ein unentbehrliches Hilfsmittel hierbei und somit zweite Bedingung für die Möglichkeit von Mathematik ist die Sprache. Bloße Begriffsbildungen und partikulare Erkenntnisse sind noch nicht Wissenschaft; dazu bedarf es zusätzlich der Koordinationskraft von Ideen, durch welche die Begriffe in Theorien eingebunden werden.

Die unverzichtbare Einbindung in die Sprache als eine weitere soziale Bedingung der Möglichkeit von Mathematik ist erst in neuerer Zeit deutlich erkannt worden. Fallstudien zu dieser Sprachabhängigkeit führen dabei sogar in die klassische Antike zurück. Die Tatsache, daß die griechische Sprache mit Hilfe von Artikeln die Substantivierung gestattet, ist ohne Frage eine notwendige Bedingung für die Erneuerung der Mathematik in damaliger Zeit. In einer Sprache ohne Artikel hätte aus drei Kriegern nicht die Drei gewonnen werden können und wären gerade Wege nicht Anlaß gewesen für die Gerade.

In den letzten Jahren wurde mehrfach darauf hingewiesen, daß auch jede Vermittlung von Mathematik mit Blick auf die implizit oder explizit zugrunde liegenden Philosophien sowohl von Mathematik als auch von Erziehung gesehen werden muß. So erinnert Steiner daran, *"daß bestimmte philosophische und epistemologische Auffassungen von Mathematik eine wesentliche Rolle bei der Gestaltung des Mathematikunterrichts spielen."* (Steiner [1989] S.49) Bei Ernest wird im Anschluß an eine analoge Aussage aber auch darauf hingewiesen, daß die Einbindung des Mathematikunterrichts in philosophische Vorgaben keineswegs unproblematisch ist: *"Different philosophies of mathematics have widely differing outcomes in terms of educational practice. However the link* *is not straightforward, ..."* (Ernest [1991] S.111) In der Tat ist die gegenwärtige Mathematikdidaktik noch ein gutes Stück entfernt von einer erfolgreichen Umsetzung philosophischer Grundpositionen in handelnde Praxis. Hoffnungsvolle Ansätze sind vorhanden. So hat z. Bsp. Ernest die einzelnen Etappen von der natürlichen Sprache zur formalen Sprache der Mathematik in philosophisch–kognitiver Sicht recht überzeugend einer hierarchischen Ordnung unterworfen (Ernest [1987]). Gerade weil dies kein Einzelfall ist, erscheint eine Koordination und Synopse der diesbezüglichen Bemühungen dringend geboten. Sowohl in die Theorie als auch in die Praxis des Mathematikunterrichts müssen in naher Zukunft neue philosophische Spuren eingearbeitet werden.

e) Frage nach dem Umgang mit Mathematik.

Das Problem des Umgangs mit Mathematik, und dies meint natürlich die Frage nach dem angemessenen und sachgerechten Umgang mit Mathematik, ist vermutlich selten so brisant und vielschichtig gewesen, wie in der Gegenwart. Denn nie zuvor war der Anteil an Nichtmathematikern, die Mathematik in irgendeiner Form verwenden, so groß wie heute. Mithin trifft die Frage nach dem adäquaten Umgang mit Mathematik keineswegs nur die Mathematiker, sondern schlichtweg jeden. Eine gefährliche Reziprozität ist unübersehbar: Während einerseits Gehalt und Gestalt der Mathematik dem Nichtmathematiker immer unzugänglicher werden, muß von ihm andererseits Mathematik zunehmend häufiger direkt oder indirekt in Gebrauch genommen werden. Damit ist die Ballance zwischen mathematischem Wissen und dem Umgang mit diesem Wissen empfindlich gestört. Genau an dieser Stelle kommen die philosophischen Begriffe "Verfügungswissen" und "Orientierungswissen" ins Spiel.

Das Verfügungswissen tritt in Gestalt von Aussagen oder Handlungsanweisungen auf, es wird in der Regel in die Form von Sätzen oder Rezepten gebracht. Es handelt sich um Aussagen über etwas oder um Anleitungen für etwas. Jedes solche Verfügungswissen hat charakteristische Merkmale: Es ist objektivierbar und ohne Rest übertragbar.

Diesem Verfügungswissen steht das Orientierungswissen zur Seite, welches als Vorbild oder eben zur Orientierung nur implizit zur Geltung kommt. Orientierungswissen wird spürbar in Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kompetenzen – es kann nicht, wie Verfügungswissen als objektivierter Gegenstand übertragen werden. Aus diesem Grund wird es häufig geringer eingeschätzt und insbesondere in der Lehre weniger beachtet als Verfügungswissen. Doch darf in diesem Zusammenhang nicht übersehen werden, daß sich dem Menschen die Wirklichkeit im wesentlichen durch Orientierungswissen und nur zu einem kleinen Teil per Verfügungswissen erschließt. Mittelstraß hat in seinem Festvortrag auf dem letzten internationalen Leibniz–Kongreß treffend festgestellt, daß *"Leibniz* *erkannt [hat], was wir oft zu vergessen scheinen ... daß nämlich Verfügungswissen, d.h. ein positives Wissen um Ursachen, Wirkungen und Mittel, mit dem wir über die Welt verfügen, und ein Orientierungswissen, d.h. ein regulatives Wissen um begründete Ziele und Zwecke, mit dem wir uns in der Welt und in unserem eigenen Leben orientieren, zusammengehören."* (Mittelstraß [1989] S.285) Dem kann ohne Einschränkung zugestimmt werden. Nun gilt aber gerade in der Mathematik, daß ein Wissen nicht per se entweder Verfügungswissen oder Orientierungswissen ist. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Formen des Wissens wird sowohl durch die wissenschaftliche Umgebung als auch durch den sozialen Kontext bestimmt. Hier liegt ein Defizit der Wissenschaftsdidaktik vor, der es bislang nicht gelungen ist, Veränderungskriterien und Überführungsstrategien verschiedener Wissensformen bereitzustellen. Einen neuen Anlauf in dieser Richtung hat kürzlich eine Darmstädter Arbeitsgruppe unter der etwas unglücklich gewählten Überschrift "Allgemeine Mathematik" begonnen. Die Zielsetzung besteht genau in einer Stärkung von Mathematik als Orientierungswissen; deshalb wird als primäre Aufgabe genannt, Mathematik *"nach Mustern der allgemeinen Wahrnehmungs–, Denk– und Handlungsformen unserer Zivilisation aufzuarbeiten, zu restrukturieren."* (Poguntke – Wille [1986] S.284) Nicht eine Vermehrung des Wissens, sondern eine neue Binnenorganisation des Wissensbestands ist das Ziel; dadurch würden sich dann zwangsweise neue Möglichkeiten des Umgangs mit Wissen eröffnen. Dergleichen dürfte auch schon Study vorgeschwebt haben, als er 1884 anläßlich seiner Promotion die These einreichte: *"Man sollte weniger danach streben, die Grenzen der mathematischen Wissenschaften zu erweitern, als vielmehr danach, den bereits vorhandenen Stoff aus umfassenderen Gesichtspunkten zu betrachten."* (Engel [1931] S.140)

f) Frage nach einer Systematik der Mathematik.

Fast will es scheinen, als ob sich die Frage nach einer globalen Systematik gegenwärtiger Mathematik jeder Antwort verschließt. Läßt sich die heutige Mathematik trotz der schon angesprochenen Pluralität überhaupt unter einheitlichen Gesichtspunkten ordnen und zusammenfassen? Von welcher Art könnten dabei erkenntnisleitende Interessen und einheitsstiftende Kriterien sein? Es ist natürlich nicht an eine additive oder enzyklopädische Auflistung nach Klassifikationsmerkmalen gedacht, sondern gefragt wird nach einer Zusammenschau aller mathematischen Wissenschaften im Sinne Platos: *"Bei jeder geometrischen Figur und jedem Zahlengefüge und jeder Fügung einer Harmonie und der Gestirnumläufe muß die Übereinstimmung als eine einzige von allen aufscheinen für den, der nach rechter Art lernt und begreift. Sie wird aber erscheinen, wenn jemand, wie man* *sagt, richtig "auf eines blickend" lernt; denn ein einziges Band, das von Natur dies alles verbindet, wird denen aufscheinen, die alles durchdenken."* (Gaiser [1986] S.109)

Der Versuch, mit philosophischen Begriffen und Denkformen eine Zusammenschau aller heutigen mathematischen Wissenschaften zu leisten, müßte ohne Frage deren Vielheit als Einheit deuten. Wenn ich richtig sehe, gibt es auf dem Markt der Philosophie nur einen einzigen Anbieter mit Erfolgschancen, nämlich Hegels Philosophie der Logik. Diese Möglichkeit ist aber noch nicht ernsthaft geprüft worden.

Es gibt aber auch innermathematische Bemühungen, die Pluralität der Mathematik mit spezifisch mathematischen Begriffsbildungen zu strukturieren. In einem solchen System müßte insbesondere *"ein einziges Band, das Formalismus und Konstruktivismus verbindet, aufscheinen"*. Es gibt nicht *eine* Mathematik, sondern mehrere. Formalistische und konstruktivistische Mathematik differieren in so wesentlichen Fragen wie Begründungs–, Methoden– und Wahrheitsakzeptanz. Aber auch innerhalb der beiden genannten Mathematiken wirkt eine zweite Stufe der Pluralisierung, natürlich auf ganz unterschiedliche Art und Weise. Die Unabhängigkeitsresultate von Gödel und Cohen zeigten, daß es im Rahmen der formalistischen Mathematik keineswegs nur e i n Cantorsches Universum – oder wie Hilbert sagte: Paradies – gibt. Diese Erkenntnis hat verblüffende Konsequenzen: Die Kontinuumshypothese ist plötzlich keine absolute Hypothese mehr, sie als solche zu bestätigen oder zu falsifizieren, ergibt somit keinen Sinn.

Vor drei Jahren hat der Mathematiker J.L. Bell einen bemerkenswerten Aufsatz "From Absolut to Local Mathematics" veröffentlicht. Wie schon im Titel erkennbar, geht es hier um die Begriffe absolut und lokal in der Mathematik, genauer: in der formalistischen Mathematik. Dabei wird vorgeschlagen, die Resultate von Gödel und Cohen zum Anlaß für eine Pluralisierung des Cantorschen Universums zu nehmen. Mit Hilfe der mathematischen Topostheorie werden verschiedene Universa – sogenannte lokale Rahmen (local frameworks) für jeweils eine lokale Mathematik – in den Blick genommen. Das Cantorsche Universum ist dann nur eins von vielen Exemplaren, und die klassische Mathematik ist nur eine von möglichen Ausformungen. Diese Inflation von gleichberechtigten Mathematiken scheint jegliche Einheitshoffnung zunichte zu machen. Doch nun kommt der Clou: Fragt man nach den Gemeinsamkeiten in sämtlichen Universa, so bestimmt sich diese Invariante der Vielfalt gerade als Grundbestand der konstruktivistischen Mathematik. Die Pluralisierung innerhalb der formalistischen Mathematik führt also zu einer neuen Einheit der gesamten Mathematik.

g) Frage nach der Mathematik im Kontext der Kultur.

Eine überzeugende Antwort auf die Frage nach der Bedeutung von Mathematik als Wissenschaft für die Kultur der Gegenwart kann nicht gegeben werden. Die Problemlage ist ganz einfach zu komplex. Die Schlüsselrolle, welche der Mathematik in der klassischen Antike insbesondere in pädagogischer Hinsicht zukam, findet in der Gegenwart keine Entsprechung. Auf der anderen Seite wirkt die Mathematik auf funktionelle und instrumentelle Weise mit einer zuvor nie gekannten Intensität in fast alle Bereiche der Kultur hinein. Die von den Systemtheoretikern favorisierte "Anschlußfähigkeit" ist gegenwärtig vermutlich in keiner Disziplin so ausgeprägt wie in der Mathematik. Das Verständnis für die Gegenwart wird ganz sicher gestärkt durch historische Analysen; ein Vergleich mit charakteristischen Phasen der Vergangenheit und eine Rekonstruktion jener Entwicklung, welche zur aktuellen Situation geführt hat, lassen das Problem und die damit verbundene Aufgabe transparenter werden. Dies sollte insbesondere auch im Mathematikunterricht Berücksichtigung finden, etwa so, wie es eine Kommission des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts vor drei Jahren formuliert hat: *"An geeigneten Stellen soll Mathematik als Teil der geistesgeschichtlichen Entwicklung erkennbar werden, indem wechselseitige Beziehungen zwischen mathematischer Erkenntnis und der kulturhistorischen Situation herausgearbeitet werden."* Diese Empfehlung kann ohne Frage zumindest teilweise dadurch realisiert werden, daß vorhandene philosophische Spuren in der Mathematik gedeutet und neue philosophische Spuren in die Mathematik eingearbeitet werden.

Literatur

Aristoteles: Eudemische Ethik, Übers. u. Komment. v. F. Dirlmeier; Berlin 1969

Aristoteles: Metaphysik, Übers. u. Hrsg. v. F. F. Schwarz; Stuttgart 1970

Aristoteles: Lehre vom Schluß oder Erste Analytik (Organon III); Philosophische Bibliothek Bd. 10, Hamburg 1975

Aristoteles: Lehre vom Beweis oder Zweite Analytik (Organon IV); Philosophische Bibliothek Bd. 11, Hamburg 1975

Becker, O.: Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, 2. Aufl.; Tübingen 1973

Bell, J.L.: From absolute to local mathematics; Synthese Bd. 69 (1986), S.409–426

Bernays, P.: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik; Darmstadt 1976

Briefwechsel: Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918), Hrsg. v. G. Frei; Göttingen 1985

Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Hrsg. v. E. Zermelo; Berlin 1932

Dedekind, R.: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen; Supplement XI zu

Dirichlet, P.G.L.: Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl.; Braunschweig 1893

Engel, F.: Eduard Study; Jahresbericht der DMV, Bd. 40(1931), S.133–156

Ernest, P.: A model of the cognitive meaning of mathematical expressions; British Journal of educational Psychology Bd. 57(1987), S.343–370

Ernest, P.: The Philosophy of Mathematics Education; London 1991

Euklid: Die Elemente Buch I–XIII, Hrsg. von C. Thaer; Darmstadt 1980

Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra, Hrsg. v. H. Weber [Opera Omnia Series Prima I]; Leipzig 1911

Fichte, J.G.: Die Wissenschaftslehre; Philosophische Bibliothek Bd. 284, Hamburg 1986

Gadamer, H.–G.: Mathematik und Dialektik bei Plato; in "Physik, Philosophie und Politik", Festschrift für C.F. v. Weizsäcker zum 70. Geb., München 1982, S.229–244

Gaiser, K.: Platons Menon und die Akademie; Archiv für Geschichte der Philosophie, Bd. 46(1955), S.241–292

Gaiser, K.: Platons Zusammenschau der mathematischen Wissenschaften; Antike und Abendland Bd. 32 (1986), S.89–124

Gaiser, K.: Philodems Academica; Stuttgart – Bad Cannstadt 1988

Gauss, C.F.: Werke Bd. 2; Göttingen 1863

Goodman, N.D.: Modernizing the Philosophy of Mathematics; Synthese Bd.88 (1991), S.119–126

Heidegger, M.: Vorträge und Aufsätze, 3. Aufl.; Pfullingen 1967

Heidegger, M.: Nietzsche I; Pfullingen 1961

Henrich, D.: Fluchtlinien; Frankfurt/M. 1982

Hersh, R.: Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics; Advances in Mathematics Bd. 31(1979), S.31–50

Hilbertsche Probleme: Die Hilbertschen Probleme, erl. v. P.S. Alexandrov [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 252]; Leipzig 1971

Hösle, V.: Platons Grundlegung der Euklidizität der Geometrie; Philologus Bd. 126(1982), S.180–197

Jaspers, K.: Nachlaß zur Philosophischen Logik, Hrsg. von H. Saner u. M. Hänggi; München 1991

Kant, I.: Werke Bd. 1–10. Hrsg. v. W. Weischedel – Sonderausgabe; Darmstadt 1983

MacLane, S.: Mathematical Models: a Sketch for the Philosophy of Mathematics; The American Mathematical Monthly, Bd. 88(1984), S.462–471

MacLane, S.: Mathematics – Form and Function; New York 1986

Martin, G.: Immanuel Kant, 4. Aufl.; Berlin 1969

Mittelstraß, J.: Die geometrischen Wurzeln der Platonischen Ideenlehre; Gymnasium Bd. 92 (1985), S.399–418

Mittelstraß, J.: Philosophie in einer Leibniz–Welt; in: V. Internationaler Leibniz–Kongreß, Vorträge II. Teil, Hannover 1989, S.275–288

Mittelstraß, J.: Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft und der Aufgabe der Philosophie; Frankfurt/M. 1989

Mugler, Ch.: Der Schatten des Parmenides; Hermes Zeitschrift für klassische Philologie Bd. 103 (1975), S.144–154

Platon: Sämtliche Werke Bd. 1–6, Hrsg. von W.F. Otto – E. Grassi – G. Plamböck; Hamburg 1957ff

Poguntke, W. – Wille R.: Zur Restrukturierung der Ordnungstheorie; in: Mathematische Modellierung, hrsg. v. A.–M. Kempf u. F. Wille, Hamburg 1986, S.283–293

Proklus Diadochus: Euklid–Kommentar, hrsg. von M. Steck; Halle 1945

Radbruch, K.: Die Vielfalt der Mathematik in den Geisteswissenschaften; MNU Bd.44 (1991), S.323–331

Scheibe, E.: Calculemus! Das Problem der Anwendung von Logik und Mathematik; in "Leibniz' Auseinandersetzung mit Vorgängern und Zeitgenossen", Hrsg. v. I. Marchlewitz u. A. Heinekamp; Stuttgart 1990, S.200–216

Schelling, F.W.J.: Vorlesungen über die Methode des akademischen Studiums; Philosophische Bibliothek Bd. 275, Hamburg 1974

Steiner, H.–G.: Philosophische und epistemologische Aspekte der Mathematik und ihr Einfluß auf den Mathematikunterricht; Mathematische Semesterberichte Bd. 36 (1989), S.47–60

Szabo, A.: Anfänge der griechischen Mathematik; München 1969

Szabo, A.: How to explore the history of ancient mathematics; in "Methodology, Metaphysics and the History of Science", ed. R. Cohen and M. Wartofsky, Dordrecht 1984, S.283–294

Toeplitz, O.: Mathematik und Antike; Die Antike Bd. 1 (1925), S.175–203

Toth, I.: Geometria more ethico – Die Alternative: Euklidische oder nichteuklidische Geometrie bei Aristoteles und die axiomatische Grundlegung der euklidischen Geometrie; in ΠΡΙΣΜΑΤΑ, Festschrift für W. Hartner; Wiesbaden 1977, S.395–415

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik Bd. 1, 4. Aufl.; Berlin 1980

Vorsokratiker: Die Vorsokratiker I, Hrsg. v. J. Mansfeld; Stuttgart 1983

Weyl, H.: Gesammelte Abhandlungen Bd. II, Hrsg. v. K. Chandrasekharan; Berlin 1968

Wieland, W.: Plato und die Formen des Wissens; Göttingen 1982

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht; Braunschweig 1989

Wolff, Ch.: Mathematisches Lexicon; Leipzig 1716