Ulrich Tippenhauer

EINE PROJEKTIONSMETHODE FÜR DAS BIHARMONISCHE PROBLEM

preprint no. 5

Universität Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik
Pfaffenbergstraße, D-675 Kaiserslautern
Juni 1979

EINE PROJEKTIONSMETHODE FÜR DAS BIHARMONISCHE PROBLEM

Ulrich Tippenhauer

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be open, bounded and convex. The solution of the biharmonic equation is constructed using the orthogonal projector P from $L^2(\Omega)$ onto the subspace X of harmonic functions in Ω. For a rectangular domain Ω, the projector P can be given explicitly by the decomposition of X as in the paper of ARONSZAJN - BROWN - BUTCHER [3] . Using tensor products one can carry over this construction to domains which consist of the cartesian product of circles, ellipses, and rectangles. With the partial sums of the series, that represents P, one can give approximate solutions to the exact solution of the biharmonic equation. A combination of this method and the finite element method leads to approximate solutions of $O(h^2)$ convergence in the Sobolev space $W_2^2(\Omega)$.

Die Lösung des biharmonischen Randwertproblems wird mit dem orthogonalen Projektor von $L^2(\Omega)$ auf den Unterraum der harmonischen Funktionen dargestellt. Dazu werden im 1. Paragraphen Paare von orthogonalen Projektoren $P_i : H \to H_i, (i=1,2)$ betrachtet, wobei $H_i \subset H$ abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraumes H sind mit $H_1 \cap H_2 = \langle 0 \rangle$. Der orthogonale Projektor P von H auf $\overline{H_1 + H_2}^H$ läßt sich mit Hilfe von P_1 und P_2 konstruieren, falls der Winkel φ zwischen H_1 und H_2 positiv ist; man vergleiche ARONSZAJN [2] und ARONSZAJN - BROWN - BUTCHER [3]. Die dabei auftretenden Partialsummen bieten sich als Approximationen von P in der Operatornorm an, da sie sich mit $\cos(\varphi)$ gut abschätzen lassen. Im 2. Paragraphen gehen wir auf das biharmonische Randwertproblem ein. Die Lösung $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ wird zunächst im homogenen Fall mit dem Projektor P von $L^2(\Omega)$ auf den Unterraum der harmonischen Funktionen konstruiert, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und konvex ist. Dabei werden Resultate von GRISVARD [6,7] verwendet. In dem inhomogenen Fall läßt sich die Lösung $u \in W_2^2(\Omega)$ ebenfalls mit P konstruieren, wobei aber die explizite Kenntnis einer Funktion $w \in W_2^2(\Omega)$ vorausgesetzt wird, welche den Randbedingungen genügt; in diesem Zusammenhang sei auf ARONSZAJN - SZEPTYCKI [4] verwiesen. Im 3. Paragraphen wird der orthogonale Projektor P konstruiert für den Fall, daß $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck ist. Dabei wird für den Unterraum der harmonischen Funktionen die Darstellung in der Arbeit [3] herangezogen. Mit den Abschätzungen für die Winkel zwischen den dabei auftretenden Summanden erhält man gute Abschätzungen für die Approximation von P durch die erwähnten Partialsummen. Diese Methode läßt sich unter Verwendung von Tensorprodukten - etwa nach MURRAY - v. NEUMANN [11] - auf Quader übertragen. Ebenso ergeben sich für Gebiete, die aus kartesischen Produkten von Kreisen, Ellipsen und Rechtecken bestehen, die gleichen Konstruktionen für den Projektor P. Auch in diesen Fällen kann die Lösung des entsprechenden Randwertproblems wie in §2 dargestellt werden. Im 4. Paragraphen werden mit Hilfe der Partialsummen $R^{(n)}$, die bei der Darstellung des Projektors P auftreten, approximative Lösungen für das biharmonische Randwertproblem angegeben und Fehlerabschätzungen hergeleitet. Eine Kombination mit den bei der Methode der finiten Elemente verwendeten $S_h^{k,r}$ - Systeme führt bei geeigneter Koppelung von h und dem Index n der Partialsumme $R^{(n)}$ zu approximativen Lösungen, welche quadratische Konvergenzordnung in der Norm des Sobolevraumes $W_2^2(\Omega)$ aufweisen.

§1 Paare von orthogonalen Projektoren

Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$; $H_i \subset H$, $(i=1,2)$, seien abgeschlossene Unterräume mit der Eigenschaft

(1.1) $$H_1 \cap H_2 = \langle 0 \rangle.$$

Mit Hilfe der orthogonalen Projektoren $P_i : H \to H_i$ soll der orthogonale Projektor

$$P : H \to H_1 \oplus H_2$$

konstruiert werden, wobei $H_1 \oplus H_2 := \overline{H_1 + H_2}^H$ und

$$H_1 + H_2 := \langle h_1 + h_2 : h_i \in H_i,\ i=1,2 \rangle$$

ist. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß $H_1 \oplus H_2$ nicht notwendig die direkte orthogonale Summe ist. Der Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zwischen den Unterräumen H_1 und H_2 wird bekanntlich durch die Beziehung

(1.2) $$\cos(\varphi) = \sup \frac{|(h_1|h_2)|}{\|h_1\| \, \|h_2\|}, \quad h_i \in H_i,\ h_i \neq 0$$

definiert, wobei $(.|.)$ das Skalarprodukt auf H und $\|.\| = (.|.)^{1/2}$ bezeichnet. Wir beweisen zunächst das folgende

<u>LEMMA 1.1</u> Seien $h_i \in H_i$, $(i=1,2)$; dann gelten die folgenden Ungleichungen :

(I) $$|(h_1|h_2)| \leq \|h_1\| \, \|h_2\| \cos(\varphi)$$

(II) $$\|P_j h_i\| \leq \|h_i\| \cdot \cos(\varphi), \quad i \neq j,\ (j=1,2)$$

(III) $$\sin(\varphi) \cdot \|h_i\| \leq \|h_1 + h_2\|, \quad (i=1,2).$$

<u>BEWEIS :</u> (I) ergibt sich unmittelbar aus (1.2); für $h_i \in H_i$, $h_i \neq 0$

gilt zunächst : $\cos(\varphi) \geq \frac{|(h_1|h_2)|}{\|h_1\| \|h_2\|}$. Ist etwa $h_1 = 0$, so gilt (I) trivialerweise.

Die Beziehung (II) erhält man für $i \neq j$ aus $(P_j h_i | h_i) = \|P_j h_i\|^2 \leq \|P_j h_i\| \|h_i\| \cos(\varphi)$, falls $P_j h_i \neq 0$ ist; ist $P_j h_i = 0$, so gilt ebenfalls (II).

Ist $h_i = 0$, so gilt (III) trivialerweise. Sei $h_i \neq 0$; dann ergibt sich mit Hilfe von (II) die Beziehung

$$\|h_i\|^2 \sin^2(\varphi) \leq \|h_i\|^2 - \|P_j h_i\|^2 .$$

Da nun $\|h_i\|^2 - \|P_j h_i\|^2 \leq \|h_i + h_j\|^2$ gilt, erhält man (III).

Wir untersuchen nun den Fall, in dem

$$H_1 \oplus H_2 = H_1 + H_2 \tag{1.3}$$

gilt. Im Zusammenhang mit Banachräumen wurde von KOBER [8] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für (1.3) angegeben. Wir werden mit Hilfe des Winkels φ zwischen H_1 und H_2 eine entsprechende Aussage beweisen :

SATZ 1.1 Die Beziehung (1.3) gilt genau dann, wenn $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ist.

BEWEIS : Gelte $H_1 \oplus H_2 = H_1 + H_2$; $h \in H_1 + H_2$ besitzt also eine eindeutige Darstellung $h = h_1 + h_2$ mit $h_i \in H_i$. Durch

$$T : H_1 + H_2 \ni h \to Th := h_1 \in H_1$$

wird ein stetiger linearer Operator definiert. Also gilt für alle Elemente $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$: $\|h_1\| \leq \|T\| \cdot \|h_1 + h_2\|$. D.h. es ist $\|T\|^{-1} \in (0,1]$. Sei φ der Winkel zwischen H_1 und H_2; gemäß (1.2) ist $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die größte Zahl, für die

$$\cos(\varphi) \geq \frac{|(h_1|h_2)|}{\|h_1\| \|h_2\|}$$

und somit $\|h_1 + h_2\| \geq \|h_1\| \sin(\varphi)$ gilt, $(h_1 \neq 0, h_2 \neq 0)$. Nun ist $\sin(\alpha) = \|T\|^{-1}$ mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\sin(\varphi) \geq \sin(\alpha)$; also ist $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Sei nun $\varphi \in (0,\frac{\pi}{2}]$ und $\{h_n\}$ eine Folge in $H_1 + H_2$, welche die Gestalt $h_n = h_{1,n} + h_{2,n}$ besitzt. Dann ist

$$\|h_{1,n} - h_{1,m}\| \leq \{\sin(\varphi)\}^{-1} \cdot \|h_n - h_m\|.$$

Ist also $\lim_{m,n\to\infty}\{h_n - h_m\} = 0$ in $H_1 + H_2$, so erhalten wir zunächst $\lim_{n\to\infty} h_{1,n} = h_1 \in H_1$ und völlig analog $\lim_{n\to\infty} h_{2,n} = h_2 \in H_2$. Damit konvergiert die Folge $\{h_n\}$ gegen das Element $h := h_1 + h_2 \in H_1 + H_2$. Folglich gilt $H_1 + H_2 = \overline{H_1 + H_2}^H = H_1 \oplus H_2$.

Im Hinblick auf die Konstruktion des orthogonalen Projektors $P : H \to H_1 \oplus H_2$ erhalten wir das folgende

<u>LEMMA 1.2</u> Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} &[(P - P_1)(P - P_2)]^n + (P_2P_1)^n - P \\ (1.4) \qquad &= -\sum_{j=1}^{n} \{P_1(P_2P_1)^{j-1} + P_2(P_1P_2)^{j-1} - (P_1P_2)^j - (P_2P_1)^j\} \end{aligned}$$

<u>BEWEIS :</u> Für die orthogonalen Projektoren $P_i : H \to H_i$, $(i = 1,2)$ und $P : H \to H_1 \oplus H_2$ gilt zunächst :

$$\begin{cases} P_i = P_iP = PP_i = P_i^2 \\ P_i(P - P_i) = (P - P_i)P_i = 0 \end{cases}$$

Mit $Q := (P - P_1)(P - P_2)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$Q^n = Q^{n-1}(P - P_1 - P_2 + P_1P_2) \;;$$

folglich ergibt sich

$$Q^nP_1 = Q^{n-1}P_1P_2P_1 - Q^{n-1}P_2P_1.$$

Wir zeigen nun, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$(1.5) \qquad Q^nP_1 = (P_1 - id)(P_2P_1)^n$$

gilt :

Induktionsbeginn : Sei $n = 1$. Dann ist

$$QP_1 = (P - P_1)(P - P_2)P_1 = (P_1 - id)(P_2P_1).$$

Induktionsvoraussetzung : Für $n = k$ gelte

$$Q^kP_1 = (P_1 - id)(P_2P_1)^k.$$

Induktionsschluß : Sei $n = k+1$. Es ist dann

$$\begin{aligned} Q^{k+1}P_1 &= Q(Q^kP_1) \\ &= (P - P_1)(P - P_2)(P_1 - id)(P_2P_1)^k \\ &= P_1P_2P_1(P_2P_1)^k - P_2P_1(P_2P_1)^k \\ &= (P_1 - id)(P_2P_1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Wir können nun (1.4) nachweisen. Für $n \geq 2$ gilt nämlich :

$$\begin{aligned} Q^n &= Q^{n-1}P - Q^{n-1}P_2 - Q^{n-1}P_1 + Q^{n-1}(P_1P_2) \\ &= Q^{n-1} - (P_1 - id)(P_2P_1)^{n-1} + (P_1 - id)(P_2P_1)^{n-1}(P_1P_2) \\ &= Q^{n-1} + (P_2P_1)^{n-1} - P_1(P_2P_1)^{n-1} - P_2(P_1P_2)^{n-1} + (P_1P_2)^n \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=2}^{n} Q^j = \sum_{j=2}^{n} Q^{j-1} + \sum_{j=2}^{n} \{(P_1P_2)^j + (P_2P_1)^{j-1} - P_2(P_1P_2)^{j-1} - P_1(P_2P_1)^{j-1}\} ;$$

die Subtraktion von $\sum_{j=2}^{n-1} Q^j$ liefert nun (1.4).

LEMMA 1.3 Für $\varphi \in (0,\frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(P_2P_1)^n = 0 \tag{1.5}$$

in der Operatornorm.

BEWEIS : Wir benutzen die Beziehung (II) in dem Lemma 1.1. Sei $h \in H$; dann ist

$$\begin{aligned} \|(P_2P_1)^n h\| &= \|P_2P_1(P_2P_1)^{n-1}h\| \\ &\leqq \|P_1 h\| \{\cos(\varphi)\}^{2n-1} \\ &\leqq \|h\| \{\cos(\varphi)\}^{2n-1}, \end{aligned}$$

also $\|(P_2P_1)^n\| \leqq \{\cos(\varphi)\}^{2n-1}$. Somit gilt (1.5).

Der orthogonale Projektor $P : H \to H_1 \oplus H_2$ läßt sich nun folgendermaßen konstruieren :

SATZ 1.1 Ist $\varphi \in (0,\frac{\pi}{2}]$, so gilt

$$P = \sum_{j=1}^{\infty}\{P_1(P_2P_1)^{j-1} + P_2(P_1P_2)^{j-1} - (P_1P_2)^j - (P_2P_1)^j\}, \tag{1.6}$$

wobei diese Reihe in der Operatornorm konvergiert.

BEWEIS : Aus der Beziehung (1.4) ergibt sich zunächst für $n \geqq 2$:

$$\|P - \sum_{j=1}^{n}\{P_1(P_2P_1)^{j-1} + P_2(P_1P_2)^{j-1} - (P_1P_2)^j - (P_2P_1)^j\}\| \leqq$$

$$\|(P_1P_2)^n\| + \|\{(P - P_1)(P - P_2)\}^n\|$$

Gemäß Lemma 1.3 gilt $\|(P_1P_2)^n\| \leqq \{\cos(\varphi)\}^{2n-1}$. Wir bezeichnen mit $H_i^{\perp}$ das orthogonale Komplement zu H_i in $H_1 \oplus H_2$. Dann ist $(P - P_i) : H \to H_i^{\perp}$, $(i = 1,2)$ orthogonaler Projektor; die Idempotenz und Symmetrie von $(P - P_i)$ läßt sich sofort verifizieren. Sei $\gamma \in [0,\frac{\pi}{2}]$ der Winkel zwischen $H_1^{\perp}$ und $H_2^{\perp}$; dann gilt $\gamma = \varphi$, wie aus der Beziehung (1.2) unmittelbar abzulesen ist.

Wir können also wieder die Beziehung (II) in dem Lemma 1.1 an - wenden und erhalten somit

$$\|\{(P - P_1)(P - P_2)\}^n\| \leq \{\cos(\varphi)\}^{2n-1}.$$

Also gilt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \|P - \sum_{j=1}^{n} \{P_1(P_2P_1)^{j-1} + P_2(P_1P_2)^{j-1} - (P_1P_2)^j - (P_2P_1)^j\}\| = 0$$

Bemerkung : Im folgenden werden wir häufig von der Abschätzung

$$(1.7)\quad \begin{aligned} &\|P - \sum_{j=1}^{n}\{P_1(P_2P_1)^{j-1} + P_2(P_1P_2)^{j-1} - (P_1P_2)^j - (P_2P_1)^j\}\| \\ &\leq 2\,\{\cos(\varphi)\}^{2n-1} \end{aligned}$$

Gebrauch machen.

KOROLLAR 1.1 Sei $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Für alle Elemente $h \in H$ gilt

$$(1.8)\quad \max\{\|P_1h\|, \|P_2h\|\} \leq \|Ph\| \leq \sin(\varphi)^{-2}\{\|P_1h\| + \|P_2h\|\}$$

BEWEIS : (1.6) läßt sich in der folgenden Form schreiben :

$$(1.9)\quad P = \sum_{j=0}^{\infty} (id - P_2)(P_1P_2)^jP_1 + \sum_{j=0}^{\infty} (id - P_1)(P_2P_1)^jP_2,$$

da $\|(id - P_2)(P_1P_2)^jP_1\| \leq \{\cos(\varphi)\}^{2j} < 1$ und $\|(id - P_1)(P_2P_1)^jP_2\| \leq \{\cos(\varphi)\}^{2j} < 1$ ist. Dann erhält man

$$\|Ph\| \leq \{\|P_1h\| + \|P_2h\|\} \sum_{j=0}^{\infty}\{\cos(\varphi)\}^{2j} = \sin(\varphi)^{-2}\{\|P_1h\| + \|P_2h\|\}$$

Da $P_ih \in H_i \subset H_1 \oplus H_2$, $(i = 1,2)$ ist, folgt $\|P_ih\| \leq \|Ph\|$; also ergibt sich (1.8).

Die Abschätzungen (1.7) und (1.8) führen im Falle der Anwendung auch dann zu guten Resultaten, wenn man für den Winkel zwischen H_1 und H_2 selbst nur über eine geeignete Abschätzung verfügt.

§2 Das biharmonische Randwertproblem

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, beschränkte, konvexe Teilmenge. Man verifiziert dann sofort, daß der Rand $\partial\Omega$ von Ω ein Lipschitz - rand ist; vgl. ADAMS [1]. $W_2^2(\Omega)$ sei der Sobolevraum über $\mathbb{R}$; d.h. $W_2^2(\Omega)$ ist der $\mathbb{R}$ - Vektorraum aller auf Ω definierten reellwer - tigen Funktionen u, deren Ableitungen $D^i u$, $|i| \leq 2$ im distributio - nellen Sinne Elemente des Raumes $L^2(\Omega)$ sind, wobei $L^2(\Omega)$ der $\mathbb{R}$ - Vektorraum der reellwertigen, auf Ω quadratintegrierbaren Funk - tionen ist. $W_2^2(\Omega)$ wird - wie üblich - mit dem Skalarprodukt

$$(u|v)_2 := \sum_{|i| \leq 2} (D^i u | D^i v)_{L^2(\Omega)}$$

versehen. $W_2^{2-j-1/2}(\partial\Omega)$, $(j = 0,1)$, seien die mit der durch lo - kale Koordinaten definierten Sobolevschen Struktur versehenen $\mathbb{R}$ - Vektorräume von reellwertigen Funktionen, welche auf $\partial\Omega$ de - finiert sind, wobei $\partial\Omega$ i.a. C^2 - regulär ist. Die Spuroperatoren

$$\gamma_j : W_2^2(\Omega) \ni u \to \gamma_j u := \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \in W_2^{2-j-1/2}(\partial\Omega)$$

$(j = 0,1)$ sind stetig, linear und surjektiv; $\partial/\partial n$ bezeichnet die Ableitung in Richtung der nach "außen" weisenden Normale. Wir betrachten zunächst das homogene Randwertproblem

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = f \in L^2(\Omega) \text{ in } \Omega \\ \gamma_0 u = \gamma_1 u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Sei nun $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W_2^k(\Omega)}$, $(k = 1,2)$ und

$$V := W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Auf V wird nun durch

$$(u|v)_V := (\Delta u | \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt definiert derart, daß die Normen $\|.\|_V$ und $\|.\|_2$

$= (.|.)_2^{1/2}$ äquivalent sind. Damit ist

$$\Delta : V \to L^2(\Omega) \tag{2.2}$$

eine isometrische Isomorphie; man vergleiche hierzu GRISVARD [6, 7]. Über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu dem Randwertproblem (2.1) läßt sich folgende Aussage beweisen :

SATZ 2.1 Zu jeder Funktion $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine Lösung $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ zu (2.1).
BEWEIS : Sei $f \in L^2(\Omega)$; da $\mathring{W}_2^2(\Omega) \subset V$, wird durch

$$F : \mathscr{D}(\Omega) \ni \varphi \to \langle\varphi, F\rangle := (f|\varphi)_{L^2(\Omega)} \in \mathbb{R}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathring{W}_2^2(\Omega)$ definiert. Also existiert genau ein Element $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$(\Delta u|\Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} = (f|\varphi)_{L^2(\Omega)}$$

Da $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, ergibt sich mit der Greenschen Formel - $\partial\Omega$ ist Lipschitzrand - sofort die Behauptung.

Für die eindeutig bestimmte Lösung u zu dem Randwertproblem (2.1) gilt unter den obigen Voraussetzungen an Ω

$$u \in W_2^3(\Omega) \cap \mathring{W}_2^2(\Omega).$$

Dieses Resultat ergibt sich aus der Arbeit von KONTRAT'EV [9]. Da $k = 2 > \frac{n}{2} = 1$ ist, gilt nach dem Satz von RELLICH - KONDRACHOV, daß der Raum $W_2^2(\Omega)$ kompakt in $C_B^O(\Omega)$ eingebettet ist, wobei $C_B^O(\Omega)$ der $\mathbb{R}$ - Vektorraum der auf Ω definierten reellwertigen Funktionen ist, welche stetig und beschränkt sind. Insbesondere ist also die Lösung zu (2.1) aus $C_B^O(\Omega)$.

Es soll nun die Lösung zu dem Randwertproblem (2.1) konstruktiv angegeben werden. Bekanntlich ist der $\mathbb{R}$ - Vektorraum

(2.3) $$X := \{u \in C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega) : \Delta u = 0\}$$

der in $L^2(\Omega)$ enthaltenen harmonischen Funktionen abgeschlossen; vgl. MICHLIN [10]. D.h. $L^2(\Omega)$ läßt sich darstellen als

$$L^2(\Omega) = X \oplus X^{\perp}.$$

Sei nun $G := \Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to V$ der Greensche Operator; dieser ist - wegen (2.2) - eine isometrische Isomorphie. Wir beweisen zu - nächst das

<u>LEMMA 2.1</u> Es gilt $G(X^{\perp}) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$.
<u>BEWEIS :</u> Sei $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Für alle Funktionen $h \in X$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= (u|\Delta h)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_1 u|\gamma_0 h)_{L^2(\partial\Omega)} - (\gamma_0 u|\gamma_1 h)_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= (\Delta u|h)_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Also ist $\Delta u \in X^{\perp}$ und damit $u \in G(X^{\perp})$. Sei $u \in G(X^{\perp}) \subset V = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; für alle $h \in X$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u|h)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u|\Delta h)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_1 u|\gamma_0 h)_{L^2(\partial\Omega)} - (\gamma_0 u|\gamma_1 h)_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

und folglich $\gamma_0 u = \gamma_1 u = 0$; also gilt : $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$.

Sei nun

$$P : L^2(\Omega) \to X$$

der orthogonale Projektor. Mit diesem erhalten wir nun

<u>SATZ 2.2</u> $u := G(id - P)Gf$ ist die Lösung zu dem Randwertproblem (2.1).
<u>BEWEIS :</u> Zunächst ergibt sich $\Delta u = (id - P)Gf \in X^{\perp}$ und somit nach

Lemma 2.1 : $u \in G(X^{\perp}) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Weiter ist $\Delta^2 u = f - \Delta PGf = f$. Also ist u die Lösung zu (2.1).

KOROLLAR 2.1 Eine Funktion $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ ist genau dann Lösung des Randwertproblems (2.1), wenn u Lösung des Systems

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \Delta u = v \text{ in } \Omega \\ \gamma_0 u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \\ \Delta v = f \in L^2(\Omega) \text{ in } \Omega \\ (v|h)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ , } (h \in X) \end{cases}$$

ist.

BEWEIS : Sei u Lösung von (2.1). Dann erhalten wir mit der Funk - tion $u = G(id - P)Gf$: $\Delta^2 u = f \in L^2(\Omega)$ in Ω, $\gamma_0 u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $(\Delta u|h)_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle $h \in X$, da $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ ist. D.h. u ist Lösung von (2.4). Sei nun u eine Lösung des Systems (2.4); dann gilt $\Delta^2 u = \Delta v = f \in L^2(\Omega)$ in Ω, $\gamma_0 u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $0 = (\Delta u|h)_{L^2(\Omega)} = (u|\Delta h)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_1 u|\gamma_0 h)_{L^2(\partial\Omega)}$ für alle $h \in X$.

Somit ist $\gamma_1 u = 0$ auf $\partial\Omega$ und u Lösung des Randwertproblems (2.1).

Wir betrachten nun das inhomogene Randwertproblem

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = f \in L^2(\Omega) \text{ in } \Omega \\ \\ \gamma_0 u = g_0 \in W_2^{3/2}(\partial\Omega) \text{ auf } \partial\Omega \\ \\ \gamma_1 u = g_1 \in W_2^{1/2}(\partial\Omega) \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$w \in W_2^2(\Omega)$ sei eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(2.6) \qquad \begin{cases} \gamma_0 w = g_0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \\ \gamma_1 w = g_1 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Dann gilt für das Randwertproblem (2.5)

KOROLLAR 2.2 $u := G(id - P)(Gf - \Delta w) + w$ ist eindeutig bestimmte Lösung von (2.5).

BEWEIS : Es ist $u \in W_2^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= \Delta(id - P)(Gf - \Delta w) + \Delta^2 w \\ &= f - \Delta^2 w - \Delta PGf + \Delta P \Delta w + \Delta^2 w \\ &= f \text{ in } \Omega.\end{aligned}$$

Weiter gilt $\gamma_0 u = \gamma_0 w = g_0$ und $\gamma_1 u = \gamma_1 w = g_1$ auf $\partial\Omega$, da ja $G(id - P)(Gf - \Delta w) \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ ist. Also ist u eine Lösung des Randwertproblems (2.5).

Sei $\tilde{u} \in W_2^2(\Omega)$ eine weitere Lösung. Dann ist $u - \tilde{u} \in \mathring{W}_2^2(\Omega) \subset V$ und somit

$$\begin{aligned}\|u - \tilde{u}\|_V^2 &= \|\Delta(u - \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (\Delta^2(u - \tilde{u}) \mid (u - \tilde{u}))_{L^2(\Omega)} \\ &= (f - f \mid u - \tilde{u})_{L^2(\Omega)} \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

also $u = \tilde{u}$.

Die explizite Bestimmung der Lösung zu dem Randwertproblem (2.1) setzt also voraus, daß die Greensche Funktion zu dem Operator $G : L^2(\Omega) \to V$ und der orthogonale Projektor $P : L^2(\Omega) \to X$ bekannt sind; bei dem Randwertproblem (2.5) ist zur Bestimmung der Lösung darüberhinaus die Kenntnis einer Funktion $w \in W_2^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft (2.6) erforderlich. In dem folgenden Paragraphen gehen wir zunächst auf den Projektor P ein, wobei die Resultate des 1. Paragraphen von grundlegender Bedeutung sind.

§3 Der Raum der harmonischen Funktionen

Es seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$ und

$$\Omega := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : |x|<a, |y|<b\}$$

Der $\mathbb{R}$ - Vektorraum

$$X := \{u \in C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega) : \Delta u = 0\}$$

der in $L^2(\Omega)$ enthaltenen harmonischen Funktionen ist - wie schon bemerkt - abgeschlossen. ARONSZAJN gibt in der Arbeit [3] eine Zerlegung für X an, die es ermöglicht, den orthogonalen Projektor $P : L^2(\Omega) \to X$ zu konstruieren. Für $s = 0,1$ und $t = 0,1$ sei X_{st} der Unterraum aller Funktionen $h(x,y)$ aus X, welche die Parität s in x und t in y besitzen. Wie in [3] nachgewiesen wird, läßt sich X als direkte <u>orthogonale</u> Summe der Unterräume X_{st} darstellen :

$$X = \sum_{s=0}^{1} \sum_{t=0}^{1} X_{st} \tag{3.1}$$

$X_{st}^{(1)} \subset X_{st}$ sei der Unterraum aller Funktionen h, für die

$$\lim_{x\to\pm a} h(x,y) = 0$$

gleichmäßig in y auf den kompakten Teilmengen von $(-b,b)$ gilt. $X_{st}^{(2)} \subset X_{st}$ sei der Unterraum aller Funktionen h, für die

$$\lim_{y\to\pm b} h(x,y) = 0$$

gleichmäßig in x auf den kompakten Teilmengen von $(-a,a)$ gilt. Es ergibt sich dann folgende Darstellung für X_{st} :

$$X_{st} = X_{st}^{(1)} \oplus X_{st}^{(2)} . \tag{3.2}$$

Für den Winkel φ_{st} zwischen $X_{st}^{(1)}$ und $X_{st}^{(2)}$ läßt sich die Ab -

schätzung

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \cos(\varphi_{st}) \leq [c_s c_t]^{1/2} \\ c_0 \in (0,0.8],\ c_1 \in (0,\frac{2}{\pi}] \end{cases}$$

beweisen. Zu den Räumen $X_{st}^{(1)}$ und $X_{st}^{(2)}$ sind vollständige Ortho - normalsysteme bekannt; vgl. [3]. Bezeichnen wir sie mit $\{e_{st,n}^{(1)}\}$ und $\{e_{st,n}^{(2)}\}$, so besitzen die orthogonalen Projektoren

$$P_{st}^{(i)} : L^2(\Omega) \to X_{st}^{(i)}$$

(i = 1,2) die Darstellung :

$$(3.4)\qquad P_{st}^{(i)} f = \sum_{n=1}^{\infty} (f \mid e_{st,n}^{(i)})_{L^2(\Omega)}\, e_{st,n}^{(i)}.$$

Da sich X als direkte orthogonale Summe der Unterräume X_{st} dar - stellen läßt, erhalten wir für den orthogonalen Projektor

$$P : L^2(\Omega) \to X$$

zunächst

$$P = \sum_{s=0}^{1} \sum_{t=0}^{1} P_{st}$$

Jeder der orthogonalen Projektoren P_{st} läßt sich nun gemäß der Beziehung (1.6) in Satz 1.1 darstellen :

$$P_{st} = \sum_{j=1}^{\infty} \{P_{st}^{(1)}(P_{st}^{(2)}P_{st}^{(1)})^{j-1} + P_{st}^{(2)}(P_{st}^{(1)}P_{st}^{(2)})^{j-1} - (P_{st}^{(1)}P_{st}^{(2)})^{j} - (P_{st}^{(2)}P_{st}^{(1)})^{j}\}.$$

Bezeichnen wir die n-te Partialsumme in dieser Darstellung mit $R_{st}^{(n)}$, so ergibt sich aus (1.7) :

$$\| P_{st} - R_{st}^{(n)} \| \leq 2[c_s c_t]^{n-1/2}$$

wobei c_0 und c_1 die Konstanten in (3.3) sind. Approximieren wir nun den Projektor P durch

$$R^{(n)} := \sum_{s=0}^{1} \sum_{t=0}^{1} R_{st}^{(n)} ,$$

so ergibt sich

$$\| P - R^{(n)} \| \le \sum_{s=0}^{1} \sum_{t=0}^{1} 2[c_s c_t]^{n-1/2} . \tag{3.5}$$

Seien nun $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ Rechteckgebiete; bekanntlich läßt sich durch

$$u_1 \otimes u_2((x,y),(s,t)) := u_1(x,y) \cdot u_2(s,t)$$

das (kanonische) algebraische Tensorprodukt $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$ definieren, welches mit dem Skalarprodukt

$$(u_1 \otimes u_2 | v_1 \otimes v_2)_{L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)} := (u_1 | v_1)_{L^2(\Omega_1)} \cdot (u_2 | v_2)_{L^2(\Omega_2)}$$

versehen wird. Man vergleiche hierzu MURRAY - v. NEUMANN [11]. Dann ist $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ eine topologische Vervollständigung von $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$, d.h. $L^2(\Omega_1) \hat{\otimes} L^2(\Omega_2) = L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Wie in der Arbeit [3] ist es nun möglich, den orthogonalen Projektor P von $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ auf den abgeschlossenen Unterraum

$$X := \{u \in C^2(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap L^2(\Omega_1 \times \Omega_2) : D_x^2 u + D_y^2 u + D_s^2 u + D_t^2 u = 0\}$$

zu konstruieren und Abschätzungen vom Typ (3.5) herzuleiten. Für den Fall, daß $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis oder eine Ellipse ist, sind vollständige Orthonormalsysteme zu dem Unterraum der harmonischen Funktionen bekannt. Mit Hilfe der Tensorprodukte [11] gelingt dann ebenfalls die Konstruktion des orthogonalen Projektors P von $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ auf X. Insgesamt ergibt sich damit die Möglichkeit, Randwertprobleme für den Differentialoperator $\Delta^2 = (\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2)^2$ und die Spuroperatoren γ_i, $0 \le i \le 1$, unter dem gleichen Aspekt wie in §2 zu betrachten, wobei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist.

§4 Approximative Lösungen

Wir betrachten zunächst das homogene biharmonische Randwert - problem (2.1)

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \in L^2(\Omega) \text{ in } \Omega \\ \gamma_0 u = \gamma_1 u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Gemäß Satz 2.2 ist die Funktion $u = G(id - P)Gf$ eindeutig be - stimmte Lösung zu diesem Randwertproblem in $W_2^2(\Omega)$. Ist Ω ein Rechteckgebiet, so kann - wie in §3 dargelegt worden ist - der orthogonale Projektor $P : L^2(\Omega) \to X$ explizit konstruiert werden. Mit dem Operator $R^{(n)}$ erhalten wir in Verbindung von (3.5) den folgenden

SATZ 4.1 Sei u die Lösung zu dem Randwertproblem (2.1) und $v := G(id - R^{(n)})Gf$. Dann gilt :

$$(4.1) \qquad \|u - v\|_2 \leq C\ (0.8)^{2n-1}\ \|Gf\|_{L^2(\Omega)}$$

BEWEIS : Es ist

$$\begin{aligned} \|u - v\|_V &\leq \|(id - P)Gf - (id - R^{(n)})Gf\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|P - R^{(n)}\|\ \|Gf\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 8 \cdot (0.8)^{2n-1} \|Gf\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

wie aus (3.3) folgt. Da nun die Normen $\|.\|_V$ und $\|.\|_2$ auf $W_2^2(\Omega)$ äquivalent sind, ergibt sich (4.1).

Für das inhomogene Randwertproblem (2.5)

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \in L^2(\Omega) \text{ in } \Omega \\ \gamma_0 u = g_0 \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)\ ,\ \gamma_1 u = g_1 \in W_2^{1/2}(\partial\Omega) \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gilt gemäß Korollar 2.2, daß $u = G(id - P)(Gf - \Delta w) + w$ ein - deutig bestimmte Lösung ist, wobei $w \in W_2^2(\Omega)$ die Randbedingungen (2.6) erfüllt. Wir erhalten also das

KOROLLAR 4.1 Sei u die Lösung zu dem Randwertproblem (2.5) und $v := G(id - R^{(n)})(Gf - \Delta w) + w$. Dann gilt

$$\|u - v\|_2 \leq C\,(0.8)^{2n-1}\,\|Gf - w\|_{L^2(\Omega)} . \tag{4.2}$$

BEWEIS : Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|u - v\|_V &= \|(R^{(n)} - P)(Gf - w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 8 \cdot (0.8)^{2n-1}\,\|Gf - w\|_{L^2(\Omega)} , \end{aligned}$$

also (4.2).

Es sei nun $h \in (0,1)$ und $S_h^{2,r}$, $2<r$, ein endlichdimensionaler Unterraum von $W_2^2(\Omega)$ mit der folgenden Eigenschaft : Zu jeder Funktion $u \in W_2^r(\Omega)$ existiert eine Funktion $s \in S_h^{2,r}$ und eine Kon - stante $c \in \mathbb{R}_+$ so, daß

$$\|u - s\|_2 \leq c\,h^{r-2}\,\|u\|_r$$

gilt, wobei $\|.\|_r$ die Norm in $W_2^r(\Omega)$ bezeichnet; c ist unabhängig von h und u. Derartige (2,r) - Systeme werden von CIARLET [5] im Zusammenhang mit dem biharmonischen Problem betrachtet. Wendet man also die Methode der finiten Elemente bei der Appro - ximation von Gf an, so erhält man mit einem (0,2) - System

$$\|Gf - s\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,h^2\,\|f\|_{L^2(\Omega)} .$$

und den folgenden

SATZ 4.2 Sei $n \geq \frac{\ln(h)}{\ln(0.8)} + \frac{1}{2}$ und $v := G(id - R^{(n)})s$. Die Lösung zu dem homogenen Randwertproblem (2.1) läßt sich folgender -

maßen abschätzen, wobei C unabhängig von h und f ist :

$$(4.3) \qquad \|u - v\|_2 \leq C\,\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Gf\|_{L^2(\Omega)}\}\cdot h^2$$

BEWEIS : Für $\|PGf - R^{(n)}s\|_{L^2(\Omega)}$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|PGf - R^{(n)}s\|_{L^2} \leq \|P - R^{(n)}\|\|Gf\|_{L^2} + \|R^{(n)}(Gf - s)\|_{L^2}$$
$$\leq 8\cdot(0.8)^{2n-1}\|Gf\|_{L^2} + \|R^{(n)}\|c\cdot h^2\|f\|_{L^2}$$

Damit ergibt sich sofort (4.3).

Eine entsprechende Abschätzung ergibt sich für das inhomogene Randwertproblem mit einem (0,2) - System :

$$\|u - v\|_2 \leq C\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Gf\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}\}\cdot h^2$$

Weitere Einzelheiten zu der Kombination von $R^{(n)}$ und der Methode der finiten Elemente im Hinblick auf anwendungsbezogene Verfahren zur Approximation des biharmonischen Randwertproblems finden sich in der Arbeit von TIPPENHAUER [12].

LITERATUR

[1] ADAMS, R. A. : Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975

[2] ARONSZAJN, N. : Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 337 - 404

[3] ARONSZAJN, N., BROWN, R. D., BUTCHER, R. S. : Construction of the solution of boundary value problems for the biharmonic operator in a rectangle. Ann. Inst. Fourier 23, 3 (1973), 49 - 89

[4] ARONSZAJN, N., SZEPTYCKI, P. : Theory of Bessel potentials. Part IV. Ann. Inst. Fourier 25, 3 - 4 (1975), 27 - 69.

[5] CIARLET, P. G. : The finite element method for elliptic

problems. Studies in mathematics and its applications; V.4. North - Holland Publishing Company, Amsterdam 1978.

[6] GRISVARD, P. : Problème de Dirichlet dans un domaine non régulier. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, Série A 1615 - 1617

[7] GRISVARD, P. : Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyedre. Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, Vol. II. 1, 1975, 359 - 388

[8] KOBER, J. : A theorem on Banach spaces. Compositio Math. Vol. 7, 1939, 135 - 140

[9] KONTRAT'EV, V. A. : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Trudy Moskov. Mat. Obšč. 16, 209 - 292

[10] MICHLIN, S. G. : Lehrgang der mathematischen Physik, Akademie - Verlag Berlin 1972

[11] MURRAY, F. J., v. NEUMANN, J. : On rings of operators. Annals of Mathematics Vol. 37, No.1 (1936)

[12] TIPPENHAUER, U. : A combined approximation scheme for the biharmonic equation. To appear.