

---

# Interner Bericht

---

**Partikelgestützte Triangulierung  
skelettbasierter impliziter Flächen**

Hans-Christian Rodrian, Peter Schüller,  
Hardy Mook

280/96

---

## Fachbereich Informatik

---

Universität Kaiserslautern - Postfach 3049 - D-67653 Kaiserslautern

# **Partikelgestützte Triangulierung skelettbasierter impliziter Flächen**

Hans-Christian Rodrian, Peter Schüller,  
Hardy Moock

280/96

Universität Kaiserslautern  
Fachbereich Informatik  
Postfach 3049  
D-67653 Kaiserslautern

03. April 1996

AG Graphische Datenverarbeitung und Computergeometrie  
Prof. Dr. Hans Hagen

# Partikelgestützte Triangulierung skelettbasierter impliziter Flächen

Hans-Christian Rodrian, Peter Schüller,  
Hardy Moock

## 1. Zusammenfassung

*Skelettbasierte implizite Flächen haben aufgrund ihrer Fähigkeit, durch automatisches Verschmelzen aus wenigen, einfachen Primitiven komplexe Strukturen zu formen, für Modellierung, Visualisierung und Animation zunehmend an Bedeutung gewonnen. Eine wesentliche Schwierigkeit beim Einsatz impliziter Flächen ist nach wie vor eine effiziente Visualisierung der resultierenden Objekte. In der vorliegenden Arbeit werden die grundlegenden Ideen einer Methode zur partikelgestützten Triangulierung skelettbasierter impliziter Flächen beschrieben, die die Vorteile einer partikelgestützten Abtastung impliziter Flächen mit der polygonalen Darstellung durch Dreiecke kombiniert. Der Algorithmus ist in der Lage, effizient auf dynamische Veränderungen der Gestalt sowie das Auseinanderreißen nicht allzu komplexer implizit gegebener Objekte zu reagieren. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die Triangulierung krümmungsadaptiv zu gestalten, um bei gleichbleibender Darstellungsqualität eine Reduktion der Dreiecksanzahl zu erreichen.*

## 2. Einleitung

In den letzten Jahren haben skelettbasierte implizite Flächen in der Computergraphik sowohl für die Modellierung wie auch für die Animation zunehmend an Bedeutung gewonnen. Begründet wird dieser Trend sicherlich vor allem durch die Einfachheit mit der weiche, deformierbare Körper wie z.B. organische Strukturen mit Hilfe dieses Modellierungsparadigmas visualisiert werden können.

Ein wesentliches Problem des impliziten Ansatzes jedoch liegt in der Berechnung der Oberflächen für die Bildschirmdarstellung. Ray-Tracing liefert zwar qualitativ hochwertige Bilder, ist jedoch durch die aufwendige Berechnung der Strahlschnitte mit der Oberfläche der impliziten Modelle verhältnismäßig langsam. Eine Polygonalisierung bzw. Triangulierung der Objekte und anschließendes Standard-Rendern der Polygone bietet zwar den Vorteil, nach vollzogener Polygonalisierung sehr schnell verschiedene Ansichten der impliziten Flächen generieren zu können, ist jedoch durch die für die Polygonalisierung benötigten langen Rechenzeiten für das interaktive Modellieren nur bedingt geeignet.

Ein relativ neuer Ansatz zur Überwindung dieser Problematik beruht auf einer partikelbasierten Abtastung der impliziten Flächen. Zu diesem Zweck wird eine Menge frei beweglicher Partikel dazu gebracht, der sich verändernden Gestalt und Lage der darzustellenden Oberfläche zu folgen. Parallel dazu wird durch die Einführung gegenseitiger Abstoßungskräfte eine annähernde Gleichverteilung der Teilchen auf der Oberfläche erreicht. Stellt man nun jedes einzelne Partikel als kleine Scheibe in der Tangentialebene der impliziten Fläche dar, so ergibt sich ein recht guter Eindruck vom Aussehen des Modells. Bei nicht zu hoher Teilchenanzahl ermöglicht diese Technik interaktives Arbeiten mit skelettbasierten impliziten Flächen.

In vielen potentiellen Anwendungsbereichen für skelettbasierte implizite Flächen wie z.B. bei der Menschmodellierung in Medizin und Technik kann jedoch auf eine genaue Visualisierung der Oberflächen während des Modellierungs- bzw. Animationsvorganges nicht verzichtet werden, d.h. in diesen Fällen ist die Repräsentation der Modelle auf die oben beschriebene Weise nicht ausreichend.

Im Hinblick auf diese Problemstellung wird in der vorliegenden Arbeit eine neue Methode vorgestellt, die die Vorteile der partikelbasierten Abtastung für die Triangulierung der darzustellenden Objekte nutzt. Zu diesem Zweck werden die sich auf die Oberfläche bewegendenden Partikel durch Federn miteinander verbunden. Das daraus resultierende Federnetzwerk liefert eine Triangulierung, die sich eng um die Modelle schmiegt und in der Lage ist, auch auf extreme Gestaltveränderungen wie das Auseinanderreißen eines Objektes zu reagieren.

### 3. Abtastung skelettbasierter impliziter Flächen

#### 3.1. Skelettbasierte implizite Flächen

Skelettbasierte implizite Flächen haben sich in den letzten Jahren vor allem aufgrund ihrer Eigenschaft, durch automatisches Verschmelzen einfacher Primitive das Formen komplexer Strukturen zu ermöglichen, als mächtiges Modellierungs- und Visualisierungswerkzeug erwiesen [PIS95], [RBMH95].

Unter einer skelettbasierten impliziten Fläche verstehen wir die Isofläche  $A(F, I)$  zum Isowert  $I$  in einem Potentialfeld  $F: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$ , das durch die Überlagerung von einem oder mehreren durch einzelne Skelett-Elemente  $i$  generierte Einzelfelder  $f^i$  gegeben ist:

$$A(F, I) = \{x \mid F(x) = I\} \quad (1)$$

Im allgemeinen wird hierbei als Überlagerungsfunktion für die Felder der Skelett-Elemente eine einfache Summation verwendet; es sind jedoch eine Vielzahl weiterer Überlagerungsfunktionen wie gewichtete Summation, Maximumsbildung etc. denkbar.

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x) \quad (2)$$

Die Konstruktion der Einzelfelder  $f^i$  erfolgt üblicherweise durch die Kombination einer Einflußfunktion  $e: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  mit einem Abstandsmaß  $d: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$  zum jeweiligen Skelett-Element. Grundsätzlich kann jedes beliebige geometrische Primitiv als Skelett-Element dienen, der Einfachheit halber beschränkt man sich jedoch oft auf punkt- oder linienförmige Primitive bzw. Polygonzüge.

Das wachsende Interesse an skelettbasierten impliziten Flächen hat in den letzten Jahren zur Entwicklung einer Fülle verschiedener Einfluß- und Überblendfunktionen und damit verschiedenartigster Formen impliziter Objekte geführt. Gemeinsames Merkmal all dieser Modellierungsprimitive ist das zugrundeliegende geometrische Skelett, das beim Modellieren und Animieren der Szenen eine einfache Gestaltkontrolle erlaubt.

#### 3.2. Repräsentation impliziter Flächen mit Hilfe von Partikeln

Die Schwierigkeit einer effizienten Darstellung skelettbasierter impliziter Flächen ist insbesondere dann ein Problem, wenn Objekte, deren Gestalt sich zeitabhängig ändert, in Echtzeit dargestellt werden sollen.

1994 stellten Witkin und Heckbert ein partikelbasiertes Abtastverfahren vor, das zumindest bei nicht allzu komplexen Modellen interaktives Arbeiten ermöglicht [WH94]. Darüber hinaus erlaubt es, mit Hilfe einer Menge von wählbaren Kontrollpunkten die Gestalt der impliziten Fläche zu kontrollieren. Die Methode basiert auf einer Menge frei beweglicher Partikel, die den sich bewegenden bzw. sich verändernden implizit definierten Oberflächen der Objekte folgen. Gegenseitige Abstoßung der Teilchen sorgt dabei für deren annähernde Gleichverteilung auf der Oberfläche. Am Bildschirm werden die Partikel als kleine Scheiben in der Tangentialebene der impliziten Fläche dargestellt, wodurch ein recht guter Eindruck von der Form der Modelle vermittelt werden kann.

Die Verwendung individueller Abstoßungsradien sowie einer Heuristik für das Hinzufügen bzw. Entfernen von Partikeln ermöglicht bei einfachen Modellen ein fast interaktives Vorgehen.

Voraussetzung für die Anwendung der Methode ist eine durch eine differenzierbare Funktion  $F$  gegebene implizite Fläche:

$$F(x, q(t)) = 0 \quad (3)$$

wobei  $x$  ein Punkt im Raum und  $q(t)$  ein Vektor mit  $m$  zeitveränderlichen Formparametern ist.

Eine Menge von  $n$  beweglichen Partikeln befindet sich zur Zeit  $t_0$  auf der impliziten Fläche, wenn gilt:

$$F^i = F(p^i(t_0), q(t_0)) = 0 \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4)$$

wobei  $p^i(t)$  die Trajektorie des  $i$ -ten Partikels ist.

Damit die Partikel der Fläche folgen, müssen die folgenden  $n$  linearen Nebenbedingungen erfüllt sein:

$$\dot{F}^i = \dot{F}_x^i \dot{p}^i + F_q \dot{q} = 0 \quad \forall t \geq t_0, 1 \leq i \leq n. \quad (5)$$

Hierbei sind  $\dot{F}^i$  die Ableitung von  $F^i$  nach der Zeit  $t$ ,  $F_x^i$  und  $F_q$  die Ableitungen von  $F^i$  nach der Position des Partikels  $x$  bzw. den Formparametern  $q$  und  $\dot{p}^i$  und  $\dot{q}$  die Ableitungen von  $p^i$  und  $q$  nach der Zeit.

Um numerische Instabilitäten auszugleichen, führten Witkin und Heckbert zusätzlich einen Feedback-Term ein:

$$C^i(p^i, \dot{p}^i, q, \dot{q}) = F_x^i \dot{p}^i + F_q \dot{q} + \phi F^i = 0. \quad (6)$$

Die erforderlichen Richtungs- bzw. Geschwindigkeitsvektoren, um die Partikel der Oberfläche des impliziten Modells nachzuführen, ergeben sich durch Minimierung der folgenden quadratischen Funktion  $G$  bezüglich  $\dot{p}^i$  unter Berücksichtigung der oben angegebenen Nebenbedingungen  $C^i$ :

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\dot{p}^i - P^i|^2, \quad (7)$$

wobei  $P^i$  ein vorgegebener Zielwert für  $\dot{p}^i$  ist.

Das Optimierungsproblem wird mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren gelöst. Dazu muß gelten

$$G_{\dot{p}^i} + \sum_j \lambda^j C_{\dot{p}^i}^j = \dot{p}^i - P^i + \lambda^i F_x^i = 0.$$

Durch Auflösen nach den Partikelgeschwindigkeiten unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen erhält man

$$\dot{p}^i = P^i - \frac{F_x^i P^i + F_q \dot{q} + \phi F^i}{F_x^i F_x^i} F_x^i. \quad (8)$$

Nun müssen noch die Zielgeschwindigkeiten  $P^i$  so bestimmt werden, daß die Partikel sich möglichst gleichmäßig auf der Oberfläche verteilen.

Zu diesem Zweck werden je zwei Partikeln  $i$  und  $j$  Energien der Form

$$E^{ij} = \alpha \exp\left(-\frac{|r^{ij}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{mit} \quad r^{ij} = (p^i - p^j) \quad (9)$$

zugeordnet und die Zielgeschwindigkeit eines Partikels proportional zum Gradienten der auf dieses Partikel wirkenden Energien gewählt:

$$P^i = -\sigma^2 E_{p^i}^i = \sum_{j=1}^n r^{ij} E^{ij}. \quad (10)$$

Die Teilchenbewegung wird mittels folgendem Iterationsschema berechnet:

- Bestimmung der Zielgeschwindigkeiten  $P^i$  nach (10)
- Festlegung der Teilchengeschwindigkeiten  $\dot{p}^i$  mit Formel (8)
- Kalkulation der neuen Teilchenpositionen unter Verwendung eines Euler-Schrittes:

$$p^i(t + \Delta t) = p^i(t) + \Delta t \dot{p}^i(t) \quad (11)$$

- Entfernen bzw. Hinzufügen von Teilchen in Gebieten mit zu hoher bzw. zu niedriger Teilchendichte.

Das Verfahren von Witkin und Heckbert ist nicht geeignet, um implizite Flächen mit unendlicher Ausdehnung darzustellen. Darüber hinaus liefert es bei Flächen mit Singularitäten oder Selbstdurchdringungen eine schlechte Abtastung in der Nähe der kritischen Stellen. Aus diesem Grund ergänzten Saupe und Ruhl den Algorithmus um die Verwendung von Clipping-Volumen und eine Anpassung der Abstoßungsradien an den Gradienten der Oberfläche [SR95]. Als zusätzliche Erweiterungsmöglichkeit wurde von ihnen eine krümmungsabhängige Wahl der Abstoßungsradien vorgeschlagen.

#### 4. Teilchenbasierte Triangulierung skelettbasierter impliziter Flächen

Viele potentielle Anwendungsbereiche skelettbasierter impliziter Flächen erfordern eine interaktive, qualitativ hochwertige Darstellung der Modelle. So blieben bisher z.B. im Bereich der Menschmodellierung Aspekte wie Bewegungssimulation und Operationsplanung dem Einsatz skelettbasierter impliziter Flächen weitgehend verschlossen, obwohl sich diese durch ihr beachtliches Potential zur Abbildung organischer Strukturen für diese Aufgabe geradezu anbieten.

Vor diesem Hintergrund wurde eine Technik entwickelt, die die Vorteile der partikelgestützten Abtastung mit einer zeitveränderlichen Triangulierung verbindet. Die Triangulierung wird durch ein Feder Netzwerk modelliert, bei dem die Kanten der Dreiecke jeweils einer Feder entsprechen und die Eckpunkte der Dreiecke einer Menge von Partikeln, die analog zu [WH94] der Fläche nachgeführt werden.

## 4.1. Federmodell

Im Gegensatz zu der bei [WH94] verwendeten gegenseitigen Abstoßung aller Partikel wird bei dem hier vorgestellten Verfahren eine Federkraft zwischen je zwei benachbarten Teilchen simuliert, die sowohl abstoßend wie auch anziehend wirken kann:

$$S^{ij} = S^{ji} = \rho \frac{R - |r^{ij}|}{R}, \quad (12)$$

wobei  $R$  die Ruhfederlänge,  $\rho$  eine globale Federkonstante und  $|r^{ij}|$  den Abstand der beiden Teilchen bezeichnen.

Analog zu [WH94] ist auch bei diesem Ansatz die Federkraft zwischen den Partikeln skalierungsunabhängig, d.h. bei gleicher Skalierung sowohl der Fläche (und damit der Lage der Teilchen im Raum) wie auch der Ruhfederlänge  $R$  bleibt die Energie zwischen je zwei Partikeln unverändert.

## 4.2. Oberflächentriangulierung durch ein Federnetzwerk

Bei einer Änderung der impliziten Fläche werden die Partikel in den Eckpunkten der Dreiecke ausgehend von einer geeigneten Start-Triangulierung mit Hilfe des obigen Iterationsschemas der sich verändernden Oberfläche des impliziten Modells nachgeführt. Der Ablauf eines einzelnen Iterationsschrittes wird nun jedoch durch die Interaktion der Federn statt durch die gegenseitige Abstoßung der Partikel bestimmt.

Zu diesem Zweck wird die Zielgeschwindigkeit  $P^i$  entsprechend des Ansatzes

$$P^i = \sum_{j=1}^n r^{ij} S^{ij} = \sum_{j=1}^n r^{ij} \rho \left( \frac{R - |r^{ij}|}{R} \right) \quad (13)$$

gewählt.

In der Grundversion des Verfahrens sind die Ruhelängen  $R$  aller Federn während des gesamten Ablaufs konstant. Dadurch ergibt sich bei Erreichen des Kräftegleichgewichtes im Federnetzwerk eine annähernde Gleichverteilung der Abtastpunkte und demzufolge etwa gleich große Dreiecke auf der impliziten Fläche.

Um eine gewisse Abtastrate der Oberfläche sicherzustellen und gleichzeitig degenerierte Dreiecke zu vermeiden, wird zusätzlich eine Heuristik für das automatische Einfügen oder Entfernen von Federn des Federnetzwerks eingesetzt. Grundlage hierfür bilden die folgenden Kriterien:

1) Eine Feder wird immer dann entfernt, wenn sie zu stark gestaucht ist, d.h.

$$\frac{|r^{ij}|}{R} < D_{\min}, \quad (14)$$

wobei  $D_{\min}$  eine vorgegebene minimale Dehnung (= maximale Stauchung) bezeichnet.

Dazu werden die Endpunkte der betreffenden Kante (Feder) zu einem Punkt in der Mitte der Kante zusammengezogen und die daraus resultierenden entarteten Dreiecke eliminiert, indem die beiden überflüssigen Federn aus dem Netzwerk entfernt werden (Bild 1).



Bild 1: Entfernen einer zu stark gestauchten Feder

2) Eine Feder wird immer dann durch mehrere neue Federn ersetzt, wenn sie zu stark gedehnt ist, d.h.

$$\frac{|r^{ij}|}{R} > D_{max}, \quad (15)$$

wobei  $D_{max}$  eine vorgegebene maximale Dehnung bezeichnet.

Um die Spannung im Netz zu reduzieren, wird zunächst ein neues Teilchen in der Mitte der zu stark gedehnten Feder eingeführt und diese dadurch in zwei kürzere Federn zerlegt. Anschließend wird die Triangulierung um zwei weitere Federn ergänzt, die das neue Teilchen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten der betreffenden alten Dreiecke verbinden, so daß anstelle der zwei alten vier neue Dreiecke entstehen (Bild 2).



Bild 2: Einfügen neuer Federn anstelle einer stark gedehnten Feder

3) Markierte Federn dürfen weder entfernt noch aufgetrennt werden.

Um ein Oszillieren zwischen Entfernen und Einfügen von Kanten bzw. Federn zu vermeiden, werden nach dem Einfügen oder Entfernen alle von diesem Vorgang unmittelbar betroffenen Kanten markiert. Diese Markierungen werden im nächsten Iterationsschritt wieder entfernt, so daß sie nur für die Dauer des unmittelbar anschließenden Iterationsschrittes wirksam sind.

4) Kanten, deren Länge sich noch merklich ändert, d.h.

$$\left| |r^{ij}|_{alt} - |r^{ij}| \right| > \epsilon R \quad (16)$$

dürfen weder entfernt noch aufgetrennt werden.

Das Iterationsverfahren wird nun analog dem von Witkin und Heckbert vorgestellten Algorithmus durchgeführt.



### 4.3. Krümmungsadaptive Triangulierung

Bei impliziten Flächen mit stark variierender Oberflächenkrümmung ist eine adaptive Triangulierung wünschenswert, um die Anzahl der notwendigen Dreiecke bei gleichbleibender Darstellungsqualität zu minimieren.

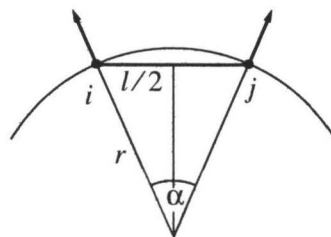
Läßt man bei obigem Ansatz das Variieren der Ruhfederlänge pro Iterationsschritt und Feder zu, so kann eine Anpassung der Dreiecksgröße an die Oberflächenkrümmung erreicht werden. Als Maß für die Krümmung bietet sich hierbei der leicht zu berechnende Kosinus des Winkels  $\alpha$  zwischen den Gradienten der Feldfunktion in den beiden Endpunkten einer Feder an.

Um eine gleichmäßige Triangulierung im Hinblick auf die Krümmung der impliziten Fläche zu erreichen, muß lediglich dafür gesorgt werden, daß dieses Krümmungsmaß für alle Federn einen annähernd gleichen Wert annimmt.

Sei  $\cos \beta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \cos \alpha_j$  der Mittelwert der Maße für die Oberflächenkrümmung entlang der einzelnen Federn  $j$ , so wird versucht, lokal den Abstand  $|\cos \alpha - \cos \beta|$  zu minimieren.

Wir gehen dabei entsprechend folgender Überlegung vor:

Wenn die zu triangulierende Oberfläche eine Kugel mit Radius  $r$  ist, so ergibt sich bei Betrachtung einer einzelnen Feder folgende Situation:



wobei  $l$  die Länge der Feder bezeichnet.

Es gilt nun:

$$r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2}. \quad (17)$$

Wir erhalten daraus

$$\frac{l^2}{4r^2} + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1. \quad (18)$$

Gesucht ist nun die Längendifferenz  $\Delta$ , um die die Feder verändert werden muß, damit die Gradienten der Feldfunktion in den Eckpunkten der Feder den Durchschnittswinkel  $\beta$  einschließen.

Entsprechend (18) gilt für diesen Fall:

$$\frac{(l + \Delta)^2}{4r^2} + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1. \quad (19)$$

Aus (18) und (19) erhalten wir:

$$\frac{(l + \Delta)^2}{l^2} = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (20)$$

Mit

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}$$

ergibt sich schließlich

$$\Delta = l \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}} - 1 \right). \quad (21)$$

Die ermittelte Längendifferenz  $\Delta$  ist in dieser Form nur für exakte Kugeloberflächen gültig. Um die Triangulierung der Krümmung der in der Praxis auftretenden impliziten Flächen anzupassen, wird zur Annäherung der Winkel  $\alpha_i$  die Federlänge jeweils nur um einen Bruchteil von  $\Delta$  verlängert:

$$l_{\text{neu}} = l + \vartheta \Delta, \quad \vartheta \in [0,1]. \quad (22)$$

Um bei der Triangulierung von Objekten mit starken Krümmungsunterschieden entlang ihrer Oberfläche allzu große Differenzen in der Länge der einzelnen Federn (und damit unschöne Triangulierungen) zu vermeiden, werden die Federlängen begrenzt:

$$(R - \lambda) \leq l_{\text{neu}} \leq (R + \lambda). \quad (23)$$

Bei den bisherigen Tests hat sich gezeigt, daß die geschilderte Vorgehensweise eine ausreichend schnelle Krümmungsadaption gewährleistet ohne dabei die Stabilität des Triangulierungsmechanismus zu beeinträchtigen.

#### 4.4. Anpassung der Triangulierung bei Veränderungen der Topologie

Eine wesentliche Stärke skelettbasierter impliziter Flächen besteht in ihrer Fähigkeit, je nach Entfernung ihrer Skelette automatisch miteinander zu verschmelzen bzw. sich aufzutrennen.

So wünschenswert dieses Verhalten insbesondere für Animationen ist, so schwierig gestaltet sich das Anpassen einer partikelgestützten Triangulierung an solche Topologieänderungen. Das Auftrennen eines Objektes bedeutet nämlich, daß die Triangulierung ebenfalls in zwei separate Teile aufgespalten werden muß. Das Verschmelzen zweier Objekte hingegen erfordert die Vereinigung ihrer Triangulierungen.

In dieser Arbeit werden Mechanismen vorgestellt, um das Aufspalten von Objekten zu behandeln.

Zerfällt eine implizite Fläche in zwei unzusammenhängende Komponenten, so muß sich das Dreiecksnetz analog verhalten. Grundsätzlich ist es schwierig, ein solches Auftrennen skelettbasierter impliziter Flächen zu erkennen. Im konkreten Fall besteht das Problem in:

- der Elimination von Dreiecken, deren Eckpunkte nicht mehr auf der Fläche liegen
- der Aufspaltung der Dreiecke, die Federn enthalten, deren Endpunkte auf getrennten Flächenkomponenten liegen.

Hierzu wird in jedem Iterationsschritt auf folgende Art und Weise vorgegangen:

1) Federn, für die die folgenden Kriterien gelten, werden markiert und dürfen im weiteren Verlauf nicht mehr zerteilt werden:

- Der Mittelpunkt der Feder liegt außerhalb der Fläche, was bei impliziten Flächen leicht zu erkennen ist:

$$F\left(\frac{p^i + p^j}{2}\right) < I \quad (24)$$

- Der Winkel zwischen den Gradienten der impliziten Fläche in den Eckpunkten ist größer als  $90^\circ$  oder

der Winkel  $\gamma$  zwischen einem Gradienten und der Feder bildet einen spitzen Winkel, d.h.  $\gamma < eps$ .

Aufgrund dieser Vorgehensweise befinden sich nach einigen Iterationsschritten nur noch stark gedehnte Federn, deren Eckpunkte jeweils auf gegenüberliegenden Flächenteilen liegen, zwischen unzusammenhängenden Objekten (Bild 3c).

2) In allen Dreiecken, die genau zwei markierte Kanten besitzen, wird die dritte Kante speziell gekennzeichnet und ihre Ruhelänge stark verringert. Auch diese Kanten dürfen nicht mehr unterteilt werden (siehe Pfeile in Bild 3c). Die betreffenden Federn ziehen sich nun stark zusammen, so daß der Bereich, in dem die Verbindungskanten auf das Flächenteil stoßen, eingeschnürt wird (Bild 3d). Unterschreitet die Länge dieser Federn eine vorgegebene untere Schranke, so werden sie aus der Triangulierung entfernt.

Diese Maßnahme führt im allgemeinen zu einer erheblichen Reduktion der Anzahl aufzuspaltender Dreiecke.

3) Es wird untersucht, ob eine endliche Folge von Dreiecken  $T_i$  mit Kanten  $E_{i1} \dots E_{i3}$ , Ecken  $V_{i1} \dots V_{i3}$  und Gradienten  $N_{i1} \dots N_{i3}$  in den Eckpunkten existiert, für die die folgenden Kriterien zutreffen:

$\forall T_i \exists k, \tilde{k}, l \in \{1, 2, 3\}$  so daß für  $V_{ik}, V_{i\tilde{k}}$  und  $E_{ik} = \overline{V_{ik}V_{i\tilde{k}}}$  gilt:

$$\begin{aligned} 1) \quad & E_{ik} = E_{(i+1)l} \\ 2) \quad & F\left(\frac{V_{ik} + V_{i\tilde{k}}}{2}\right) < (I + \varepsilon_1) \\ 3) \quad & \frac{\langle N_{ik}, N_{i\tilde{k}} \rangle}{|N_{ik}| |N_{i\tilde{k}}|} < \varepsilon_2 \\ 4) \quad & E_{lk} = E_{nl} \end{aligned} \quad (25)$$

d.h. zwei aufeinanderfolgende Dreiecke teilen sich jeweils eine Kante, der Mittelpunkt der gemeinsamen Kanten hat einen gewissen Abstand von der Oberfläche und die Gradienten in den Eckpunkten der gemeinsamen Kanten haben deutlich unterschiedliche Richtungen.

Zusätzlich darf kein Dreieck in der Folge doppelt vorkommen.

Existiert eine solche Folge von Dreiecken, so kann davon ausgegangen werden, daß diese Dreiecke zwei eigentlich zu trennende Objekte miteinander verbinden (siehe Bild 4b).

Die Triangulierung wird nun aufgetrennt, indem die gemeinsame Kante zwischen je zwei Dreiecken der Folge in der Mitte unterteilt wird (siehe gestrichelte Trennlinie in Bild 4c). Die Dreiecksfolge zerfällt dadurch in zwei Randpolygonzüge, von denen jeweils die Bruchstücke der zerteilten Kanten ausgehen. Die Triangulierung wurde also in zwei Teile zerschnitten, die entlang der Schnittkanten zunächst noch offen sind. Um die Triangulierung zu schließen, wird auf jeder Seite in der Mitte des Lochs ein neues Partikel eingefügt, mit dem die in zwei Hälften geteilten Federn sternförmig verbunden werden (siehe Pfeile in Bild 4d).

Der Algorithmus sorgt nun automatisch dafür, daß die neu eingefügten Partikel auf die Oberfläche wandern und die zerschnittenen Federn wieder eine korrekte Länge annehmen.