
Interner Bericht

**Arithmetische Operationen
auf Bezierflächen**

Thomas Schreiber

224 /92

Fachbereich Informatik

Universität Kaiserslautern · Postfach 3049 · D-6750 Kaiserslautern

Interner Bericht

Arithmetische Operationen auf Bezierflächen

Thomas Schreiber

224 /92

Universität Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
Postfach 3049
D-6750 Kaiserslautern

Juni 1992

AG Graphische Datenverarbeitung und Computergeometrie
Prof. Dr. H. Hagen

Arithmetische Operationen auf Bezierflächen

Thomas Schreiber

Universität Kaiserslautern

Fachbereich Informatik

Postfach 3049

D-6750 Kaiserslautern

E-Mail: schreib@informatik.uni-kl.de

1. Einleitung

In der CAGD Literatur werden häufig Ableitungen und Graderhöhungen von Bezierkurven und -flächen wiederum in Bezierform angegeben [1][2][3][6]. Meistens werden diese Darstellungen nur für theoretische Betrachtungen verwendet, z.B. geometrischer Deutung von Stetigkeiten zwischen angrenzenden Flächenstücken. Für praktische Anwendungen reicht die Menge der Operationen jedoch nicht aus.

Farouki und Rajan [4] zeigten, daß die Resultate arithmetischer Operationen, wie Addition und Multiplikation auf Bezierkurven auch als Bezierkurven darstellbar sind. Hier werden wir die Operationen auf polynomiale und rationale Tensorprodukt Bezierflächen und Flächen über Dreiecken ausdehnen. Eine Erweiterung auf rationale Flächen ermöglicht insbesondere die Ausführung einer Division, wie sie für viele Anwendungen benötigt wird.

Das Rechnen mit Flächen hat im Gegensatz zu punktweisen Auswertungen den Vorteil gleichzeitig mit Hilfe von notwendigen Bedingungen an das entstandene Beziernetz sichere Ergebnisabschätzungen angeben zu können. Diese lassen sich für adaptive Verfahren nutzen und sind insbesondere dort wichtig, wo es auf exakte Aussagen über das Verhalten von Flächen ankommt, wie z.B. bei der Qualitätsanalyse von Freiformflächen [5]. Mit Hilfe der hier vorgestellten Operationen läßt sich u.a. an Vorzeichenwechseln erkennen, ob eine zu untersuchende Bezierfläche konvex ist oder nicht (siehe Kapitel 4). Außerdem können Fehler, die bei punktweisen Auswertungen auf Gittern mit großer Maschenweite entstehen, vermieden werden.

Nachdem in Kapitel 2 die zum Verständnis nötigen Definitionen und Schreibweisen erläutert wurden, werden in Kapitel 3 die grundlegenden Operationen für eine Arithmetik auf Bezierflächen beschrieben. Dabei werden Formeln angegeben, die die Bezierpunkte und Gewichte der Ergebnisfläche aus denen der Operandenflächen bestimmen. Durch Aneinanderreihung und Verkettung einzelner Operationen lassen sich dann komplexe Berechnungen mit der gesamten Fläche ausführen. Zum Schluß werden in Kapitel 4 einige Beispiele aus dem Bereich der Qualitätsanalyse von Freiformflächen angegeben.

2. Definitionen

Im folgenden werden kurz die zum Verständnis nötigen Schreibweisen und Definitionen erläutert.

Vektoren werden fett geschrieben, z.B. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und Flächen mit Großbuchstaben (häufig mit Angabe des Grades) bezeichnet; z.B. ist $\mathbf{X}^{mn}(u, v)$ eine parametrische Tensorprodukt Bezierfläche vom Grad m in u -Richtung und Grad n in v -Richtung und $\mathbf{X}^m(\mathbf{u})$ ist eine über einem dreieckigen Parametergebiet definierte Bezierfläche (im folgenden Bezierdreieck genannt) vom Grad m mit baryzentrischen Koordinaten $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$.

Mit $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ wird das Skalar- und mit $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} bezeichnet. $\mathbf{a}\mathbf{b}$ ist die komponentenweise Multiplikation zweier Vektoren, also $\mathbf{a}\mathbf{b} = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)^T$. Für Flächen werden dieselben Schreibweisen verwendet.

Eine *Tensorprodukt Bezierfläche* (kurz: TPB) $\mathbf{X}^{mn}(u, v)$ ist definiert durch:

$$\mathbf{X}^{mn}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (2.1)$$

und eine *rationale Tensorprodukt Bezierfläche* (kurz: RTPB) $\mathbf{X}^{mn}(u, v)$ durch:

$$\mathbf{X}^{mn}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{ij} b_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}. \quad (2.2)$$

Die Punkte b_{ij} werden *Bezierpunkte* und die β_{ij} Gewichte genannt. Die Bezierpunkte bilden ein *Beziernetz*, in dessen konvexer Hülle die Fläche bei positiven Gewichten liegt. Basispolynome sind die *Bernsteinpolynome*:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{mit } i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Ein *Bezierdreieck* (kurz: BDR) $\mathbf{X}^m(\mathbf{u})$ vom Grad m ist gegeben durch:

$$\mathbf{X}^m(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=m} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^m(\mathbf{u}). \quad (2.4)$$

Analog ist das *rationale Bezierdreieck* (kurz: RBDR) $\mathbf{X}^m(\mathbf{u})$ definiert:

$$\mathbf{X}^m(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=m} \beta_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^m(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=m} \beta_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^m(\mathbf{u})} \quad (2.5)$$

mit den *baryzentrischen Koordinaten* $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$, ($u + v + w = 1$) bezüglich eines zugehörigen Parameterdreiecks und $\mathbf{i} = (i, j, k)^T$, mit $|\mathbf{i}| = m$ als $i + j + k = m$ und $i, j, k \geq 0$. Die Punkte $b_{\mathbf{i}}$ werden wieder *Bezierpunkte* und die $\beta_{\mathbf{i}}$ Gewichte genannt. Die Basispolynome sind die *verallgemeinerten Bernsteinpolynome*:

$$B_{\mathbf{i}}^m(\mathbf{u}) = \binom{m}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k = \frac{m!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad \text{mit } |\mathbf{i}| = m. \quad (2.6)$$

Die Formeln und Berechnungen vereinfachen sich durch Verwendung der sogenannten *skalierten Bezierpunkte* erheblich. Man erhält sie durch Multiplikation der Bezierpunkte mit den entsprechenden Binomialkoeffizienten der Bernsteinpolynome [4]. Bei Bezierdreiecken spricht man auch von einer modifizierten Bernstein-Bezier Darstellung [12]. Es ist jedoch nicht ratsam die Flächen in dieser Basis weiter zu verarbeiten, z.B. Auswertungen mit dem Casteljau-Algorithmus vorzunehmen, da dort die konvexe-Hüllen-Eigenschaft nicht gilt und so die Stabilität dieser Algorithmen nicht weiter gewährleistet ist. Vor der Auswertung ist daher eine Rücktransformation in die Bernstein-Bezierbasis vorzunehmen.

Die skalierte Darstellung der Bezierpunkte und Gewichte wird zur besseren Unterscheidung mit einer Tilde gekennzeichnet. Es gilt:

$$\tilde{b}_{ij} = \binom{m}{i} \binom{n}{j} b_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{b}_i = \binom{m}{i} b_i. \quad (2.7)$$

Im rationalen Fall werden die Binomialkoeffizienten nur an die Gewichte multipliziert:

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij}, \quad \tilde{\beta}_{ij} = \binom{m}{i} \binom{n}{j} \beta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{b}_i = b_i, \quad \tilde{\beta}_i = \binom{m}{i} \beta_i. \quad (2.8)$$

Weitere Informationen über Bezierflächen und Bernsteinpolynome findet man z.B. in [1], [2], [3] und [6].

3. Operationen auf Bezierflächen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für eine Arithmetik auf Bezierflächen beschrieben. Es werden Formeln angegeben, die die Bezierpunkte und Gewichte der Ergebnisfläche aus denen der Operandenflächen bestimmen.

Grundlegend ist dabei, daß die Multiplikation zweier Bernsteinpolynome wieder als ein Bernsteinpolynom dargestellt werden kann:

$$B_i^m(t) B_j^n(t) = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(t). \quad (3.1)$$

Beweis: Mit Definition (2.3) der Bernsteinpolynome folgt:

$$\begin{aligned} B_i^m(t) B_j^n(t) &= \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \binom{m}{i} \binom{n}{j} t^{i+j} (1-t)^{m+n-i-j} \\ &= \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} \binom{m+n}{i+j} t^{i+j} (1-t)^{m+n-(i+j)} = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(t) \end{aligned}$$

□

Damit gilt für die Multiplikation der Bernsteinpolynome zweier Tensorprodukt Bezierflächen:

$$B_i^m(u)B_j^n(v)B_k^p(u)B_l^q(v) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{p}{k}\binom{q}{l}}{\binom{m+p}{i+k}\binom{n+q}{j+l}} B_{i+k}^{m+p}(u)B_{j+l}^{n+q}(v). \quad (3.2)$$

Für die verallgemeinerten Bernsteinpolynome gilt entsprechend:

$$B_i^m(u)B_j^n(u) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(u). \quad (3.3)$$

Die Beweise für (3.2) und (3.3) können leicht durch Nachrechnen (analog zu (3.1)) erbracht werden.

Wie man in Kapitel 2 sieht, ergeben sich die polynomialen Bezierflächen als Spezialfall der rationalen genau dann, wenn alle Gewichte gleich sind. Deshalb würde es ausreichen Formeln und Beweise nur für den allgemeineren rationalen Fall anzugeben. Da jedoch der Grad der Ergebnisfläche bei vielen Operationen auf polynomialen Flächen erheblich geringer ist als auf rationalen (man denke z.B. an Ableitungen), werden diese Fälle getrennt betrachtet.

Bei Operationen zwischen polynomialen und rationalen Flächen wird die polynomiale als rationale angesehen, z.B. mit allen Gewichten gleich 1.

3.1 Operationen auf polynomialen Bezierflächen

3.1.1 Multiplikation

Multipliziert man zwei Bezierflächen miteinander, läßt sich das Ergebnis wiederum als Bezierfläche darstellen. Die skalierten Bezierpunkte \tilde{c}_{pq} einer TPB $C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v)$, die aus der komponentenweisen Multiplikation zweier TPB $A^{m_1, n_1}(u, v)B^{m_2, n_2}(u, v)$ entstehen, berechnen sich folgendermaßen (die Benennung der Punkte korrespondiert dabei mit denen der zugehörigen Fläche):

$$\tilde{c}_{pq} = \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij}\tilde{b}_{kl} \quad (3.4)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Beweis: Mit Definition (2.1) folgt:

$$A^{m_1, n_1}(u, v)B^{m_2, n_2}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{n_1} a_{ij} B_i^{m_1}(u) B_j^{n_1}(v) \sum_{k=0}^{m_2} \sum_{l=0}^{n_2} b_{kl} B_k^{m_2}(u) B_l^{n_2}(v)$$

weiter folgt mit (3.2) und Hineinziehen von Faktoren in die inneren Summen:

$$= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{m_2} \sum_{l=0}^{n_2} a_{ij} b_{kl} \frac{\binom{m_1}{i} \binom{n_1}{j} \binom{m_2}{k} \binom{n_2}{l}}{\binom{m_1+m_2}{i+k} \binom{n_1+n_2}{j+l}} B_{i+k}^{m_1+m_2}(u) B_{j+l}^{n_1+n_2}(v)$$

mit skalierten Bezierpunkten (2.7) und Zusammenfassung von Summen (mit $p = i + k$, $q = j + l$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^{m_1+m_2} \sum_{q=0}^{n_1+n_2} \frac{1}{\binom{m_1+m_2}{p} \binom{n_1+n_2}{q}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij} \tilde{b}_{kl} B_p^{m_1+m_2}(u) B_q^{n_1+n_2}(v) \\ &= \sum_{p=0}^{m_1+m_2} \sum_{q=0}^{n_1+n_2} c_{pq} B_p^{m_1+m_2}(u) B_q^{n_1+n_2}(v) = C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) \end{aligned}$$

Mit der Darstellung von c_{pq} in skaliert Form folgt die Behauptung. \square

Für die Multiplikation zweier BDR $C^{m+n}(u) = A^m(u)B^n(u)$ berechnen sich die skalierten Bezierpunkte der Ergebnisfläche aus:

$$\tilde{c}_k = \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{a}_i \tilde{b}_j \quad (3.5)$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$ und $|k| = m + n$.

Beweis: analog zu (3.4) \square

Bemerkungen:

1. Die Graderhöhung einer Bezierfläche kann durch eine spezielle Multiplikation erreicht werden. Durch das Verfahren der Graderhöhung wird eine Kurve oder Fläche mit Basispolynomen höheren Grades als nötig beschrieben. Die Kurve/Fläche selbst wird dabei nicht verändert. Die skalierten Bezierpunkte \tilde{b}_{pq} einer Tensorprodukt Bezierfläche $X^{m+r, n+s}(u, v)$, die durch eine Graderhöhung um den Grad r in u -Richtung und um einen Grad s in v -Richtung aus der zu erhöhenden Fläche $X^{mn}(u, v)$ mit den skalierten Bezierpunkten \tilde{a}_{ij} entstehen, lauten:

$$\tilde{b}_{pq} = \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij} \binom{r}{k} \binom{s}{l} \quad (3.6)$$

mit $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq k \leq r$, $0 \leq l \leq s$, $p=0, 1, \dots, m+r$ und $q=0, 1, \dots, n+s$.

Entsprechend berechnen sich die Bezierpunkte \tilde{b}_k eines um den Grad r erhöhten Bezierdreiecks:

$$\tilde{b}_k = \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{a}_i \binom{r}{j} \quad (3.7)$$

mit $|\mathbf{i}| = m$, $|\mathbf{j}| = r$ und $|\mathbf{k}| = m + r$.

Beweis: Für die Graderhöhung wird die Fläche X mit

$$Y^{r,s}(u, v) = \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^s B_k^r(u) B_l^s(v) \equiv 1$$

bzw. mit

$$Y^r(u) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(u) \equiv 1$$

multipliziert, wobei alle Bezierpunkte der Fläche Y gleich Eins sind. Die Binomialkoeffizienten in (3.6) und (3.7) entsprechen der skalierten Darstellung des Vektors $(1, 1, 1)^T$. Da in beiden Fällen auch der Multiplikant Y Eins ist, verändert die Graderhöhung die eigentliche Fläche nicht. Mit (3.4) und (3.5) folgen dann die Behauptungen. \square

2. Die Formeln gelten für beliebige Parametrisierungen, jedoch sollten beide Flächen A und B dieselbe Parametrisierung besitzen.
3. Analog zur Multiplikation von Konstanten mit Vektoren lassen sich auch funktionswertige mit vektorwertigen Flächen multiplizieren.

3.1.2 Division

Zur Division zweier Bezierflächen, muß die Divisorfläche stets eine funktionswertige Bezierfläche sein (man kann nicht durch Vektoren dividieren!). Im Gegensatz zur Division in [4], ist das Ergebnis hier immer eine rationale Bezierfläche.

Sind beide Flächen polynomial, so müssen sie zur Division dieselben Grade haben (für TPB dieselben Grade in u - und in v -Richtung). Dies kann immer durch eine entsprechende Graderhöhung mit Hilfe von (3.6) bzw. (3.7) erreicht werden. Damit berechnen sich die neuen Bezierpunkte und Gewichte für die TPB $C^{mn}(u, v) = A^{mn}(u, v)/B^{mn}(u, v)$ aus:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{a_{ij}}{b_{ij}} \\ \gamma_{ij} &= b_{ij} \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit $i=0, 1, \dots, m$ und $j=0, 1, \dots, n$.

Analog erhält man für die BDR $C^m(u) = A^m(u)/B^m(u)$ die Bezierpunkte und Gewichte:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{a_i}{b_i} \\ \gamma_i &= b_i \end{aligned} \tag{3.9}$$

mit $|\mathbf{i}| = m$.

Beweis: Der Beweis ist trivial. Er folgt direkt aus den Rechenregeln für Summen. \square

Bemerkung:

Nach Zusammenfassen von Graderhöhung und Division erhält man für $C^{mn}(u, v) = A^{m_1, n_1}(u, v)/B^{m_2, n_2}(u, v)$ mit $m = \max(m_1, m_2)$ und $n = \max(n_1, n_2)$:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij} \binom{m-m_1}{k} \binom{n-n_1}{l} \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{b}_{kl} \binom{m-m_2}{i} \binom{n-n_2}{j}\end{aligned}\quad (3.10)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p=0, 1, \dots, m$ und $q=0, 1, \dots, n$.

Analog erhält man für Bezierdreiecke $C^l(u) = A^m(u)/B^n(u)$ mit $l = \max(m, n)$:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_k} \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{a}_i \binom{l-m}{j} \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{b}_j \binom{l-n}{i}\end{aligned}\quad (3.11)$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$ und $|k| = l$.

Die Formeln (3.10) und (3.11) folgen aus der Kombination von (3.6), (3.7) mit (3.8) und (3.9).

3.1.3 Addition/Subtraktion

Genau wie zur Division müssen die Grade der Operandenflächen vor der Addition und Subtraktion durch eine entsprechende Graderhöhung angeglichen werden.

Für TPB $C^{mn}(u, v) = A^{mn}(u, v) \pm B^{mn}(u, v)$ gilt:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (3.12)$$

mit $i=0, 1, \dots, m$ und $j=0, 1, \dots, n$.

Für BDR $C^l(u) = A^l(u) \pm B^l(u)$ gilt entsprechend:

$$c_i = a_i \pm b_i \quad (3.13)$$

mit $|i| = l$.

Beweis: Der Beweis ist trivial, er folgt direkt aus den Rechenregeln für Summen. \square

Bemerkung:

Nach Zusammenfassen der Graderhöhung mit der Addition bzw. Subtraktion erhält man analog zu (3.10) und (3.11):

$$\tilde{c}_{pq} = \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij} \binom{m-m_1}{k} \binom{n-n_1}{l} \pm \tilde{b}_{kl} \binom{m-m_2}{i} \binom{n-n_2}{j} \quad (3.14)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p=0,1,\dots,m$, $q=0,1,\dots,n$ und mit $m = \max(m_1, m_2)$ und $n = \max(n_1, n_2)$.

Analog erhält man für Bezierdreiecke:

$$\tilde{c}_k = \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{a}_i \binom{l-m}{j} \pm \tilde{b}_j \binom{l-n}{i} \quad (3.15)$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$, $|k| = l$ und $l = \max(m, n)$.

3.1.4 Skalar- und Vektorprodukt

Das Skalar- und Vektorprodukt ist nur auf Vektoren definiert. Deshalb müssen auch hier die Bezierflächen vektorwertig sein. Für die Bezierpunkte der Ergebnisfläche des Skalarproduktes zweier TPB $\langle A^{m_1, n_1}, B^{m_2, n_2} \rangle = C^{m_1+m_2, n_1+n_2}$ ergibt sich:

$$\tilde{c}_{pq} = \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \langle \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{kl} \rangle \quad (3.16)$$

und für die Bezierpunkte des Vektorproduktes $A^{m_1, n_1} \times B^{m_2, n_2} = C^{m_1+m_2, n_1+n_2}$:

$$\tilde{c}_{pq} = \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{a}_{ij} \times \tilde{b}_{kl} \quad (3.17)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Für das Skalar- und Vektorprodukt zweier BDR gilt entsprechend:

$$\tilde{c}_k = \sum_{|i|+|j|=|k|} \langle \tilde{a}_i, \tilde{b}_j \rangle \quad (3.18)$$

und

$$\tilde{c}_k = \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{a}_i \times \tilde{b}_j \quad (3.19)$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$ und $|k| = m + n$.

Beweis: Die Beweise werden analog zu (3.4) unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für das Skalar- und Vektorprodukt geführt. \square

Beachte, daß die Ergebnisfläche des Skalarproduktes eine funktionswertige Fläche ist.

3.2 Operationen auf rationalen Bezierflächen

Da die Division in jedem Fall eine rationale Ergebnisfläche liefert, ist es notwendig die Operationen auf rationale Bezierflächen auszudehnen, falls eine Division für die Berechnungen erforderlich ist. Sie lassen sich jedoch auf Operationen mit polynomialen Flächen zurückführen. Dazu zerlegt man die rationale Fläche in polynomiale Zähler- und Nenner-Bezierflächen:

$$A^{m,n}(u,v) = \frac{Z^{m,n}(u,v)}{N^{m,n}(u,v)}$$

mit den Bezierpunkten:

$$z_{ij} = \alpha_{ij} a_{ij}$$

$$n_{ij} = \alpha_{ij}$$

für $0 \leq i \leq m$ und $0 \leq j \leq n$.

Die Ergebnisse werden der Vollständigkeit halber (ohne Beweis) in den folgenden Abschnitten angegeben.

3.2.1 Multiplikation

Die Formeln (3.4) bzw. (3.5) und damit auch die Graderhöhung (3.6) und (3.7) lassen sich auch auf homogene Koordinaten anwenden. Damit ergeben sich die Bezierpunkte und Gewichte der Ergebnisfläche

$$C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u,v) = A^{m_1, n_1}(u,v) B^{m_2, n_2}(u,v)$$

aus (die Benennungen der Gewichte korrespondiert ebenfalls wie die der Bezierpunkte mit denen der Flächen):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} \tilde{a}_{ij} \tilde{b}_{kl} \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Für RBDR $C^{m+n}(u) = A^m(u)B^n(u)$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{|\mathbf{i}|+|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j \tilde{a}_i \tilde{b}_j \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|\mathbf{i}|+|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j\end{aligned}\tag{3.21}$$

mit $|\mathbf{i}| = m$, $|\mathbf{j}| = n$ und $|\mathbf{k}| = m + n$.

3.2.2 Division

Für die Fläche, die sich aus der Division zweier RBTP

$$C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) = A^{m_1, n_1}(u, v) / B^{m_2, n_2}(u, v)$$

ergibt, berechnen sich die skalierten Bezierpunkte und Gewichte aus:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} \tilde{a}_{ij} \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} \tilde{b}_{kl}\end{aligned}\tag{3.22}$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Für die Division zweier RBDR $C^{m+n}(u) = A^m(u) / B^n(u)$ gilt analog:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{|\mathbf{i}|+|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j \tilde{a}_i \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|\mathbf{i}|+|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j \tilde{b}_j\end{aligned}\tag{3.23}$$

mit $|\mathbf{i}| = m$, $|\mathbf{j}| = n$ und $|\mathbf{k}| = m + n$.

Beachte, daß sich im Gegensatz zu 3.1.2 der Grad der Ergebnisfläche der Division zweier rationaler Flächen aus der Addition der Grade beider Flächen ergibt, d.h. für den rationalen Fall größer ist, als für den polynomialen.

3.2.3 Addition/Subtraktion

Für die Addition bzw. Subtraktion zweier RTPB $C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) = A^{m_1, n_1}(u, v) \pm B^{m_2, n_2}(u, v)$ gilt für skalierte Bezierpunkte und Gewichte:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} (\tilde{a}_{ij} \pm \tilde{b}_{kl}) \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl}\end{aligned}\quad (3.24)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Entsprechend gilt für RBDR $C^{m+n}(u) = A^m(u) \pm B^n(u)$:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j (\tilde{a}_i \pm \tilde{b}_j) \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j\end{aligned}\quad (3.25)$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$ und $|k| = m + n$.

Beachte, daß sich hier, im Gegensatz zur Addition und Subtraktion polynomialer Bezierflächen, der Grad der Ergebnisfläche aus der Addition der Grade der Operandenflächen bestimmt, also auch größer ist, als im polynomialen Fall.

3.2.4 Skalar- und Vektorprodukt

Die Bezierpunkte und Gewichte der Ergebnisfläche für das Skalarprodukt der RTPB $C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) = \langle A^{m_1, n_1}(u, v), B^{m_2, n_2}(u, v) \rangle$ lauten:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} \langle \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{kl} \rangle \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl}\end{aligned}\quad (3.26)$$

und für das Vektorprodukt $C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) = A^{m_1, n_1}(u, v) \times B^{m_2, n_2}(u, v)$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_{pq}} \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl} (\tilde{a}_{ij} \times \tilde{b}_{kl}) \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{\substack{i+k=p \\ j+l=q}} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\beta}_{kl}\end{aligned}\quad (3.27)$$

mit $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq n_1$, $0 \leq k \leq m_2$, $0 \leq l \leq n_2$, $p = 0, 1, \dots, m_1 + m_2$ und $q = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$.

Für das Skalarprodukt $C^{m+n}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{A}^m(\mathbf{u}), \mathbf{B}^n(\mathbf{u}) \rangle$ und Vektorprodukt $C^{m+n}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}^m(\mathbf{u}) \times \mathbf{B}^n(\mathbf{u})$ zweier RBDR gilt analog:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_k} \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j \langle \tilde{\mathbf{a}}_i, \tilde{\mathbf{b}}_j \rangle \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j\end{aligned}\tag{3.28}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{\tilde{\gamma}_k} \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j (\tilde{\mathbf{a}}_i \times \tilde{\mathbf{b}}_j) \\ \tilde{\gamma}_k &= \sum_{|i|+|j|=|k|} \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j\end{aligned}\tag{3.29}$$

mit $|i| = m$, $|j| = n$ und $|k| = m + n$.

Beachte, daß das Skalarprodukt eine funktionswertige Fläche liefert.

3.3 Differentiation und Integration von Bezierflächen

Die Differentiation und Integration werden in der Standardliteratur (z.B. [1][2][3][6]) ausgiebig behandelt (Integration nur für polynomiale Bezierkurven und -flächen). Sie sollen deshalb hier nicht weiter erläutert werden. Es sei nur angemerkt, daß sich die Ableitungen rationaler Flächen auf die Operationen: Ableitung, Multiplikation, Division und Subtraktion polynomialer Flächen zurückführen lassen (auch bei höheren und gemischten Ableitungen kommt man mit einer einzigen Division aus!).

4. Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel werden einige Beispiele für die Anwendung einer Arithmetik auf Bezierflächen gegeben. Die Beispiele kommen aus dem Bereich der Qualitätsanalyse von Freiformflächen. Siehe dazu auch [5].

4.1 Gaußkrümmung

Starke Krümmungsänderungen insbesondere Vorzeichenwechsel der Gaußkrümmung sind für viele Freiformflächen im CAD/CAM-Bereich nicht wünschenswert. Zur Visualisierung der Gaußkrümmung war es bisher üblich die Krümmung der zu untersuchenden Fläche an diskreten Punkten auszuwerten und anschließend durch eine Interpolationsfläche

zu approximieren. Dabei können bei zu geringer Abtastung der Fläche oder schlechter Approximation Fehler entstehen.

Im folgenden wird gezeigt, wie die Gaußkrümmung von Tensorprodukt Bezierflächen exakt als eine funktionswertige rationale Tensorprodukt Bezierfläche dargestellt werden kann. Die zu untersuchende Fläche sei $X^{mn}(u, v)$. Für die Fläche der Gaußkrümmung $K^{pq}(u, v)$ gilt nach [7][8]:

$$K^{pq}(u, v) = \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^2} \quad (4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle \\ F &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle \\ G &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle \\ L &= \langle X_{uu}(u, v), Y(u, v) \rangle \\ M &= \langle X_{uv}(u, v), Y(u, v) \rangle \\ N &= \langle X_{vv}(u, v), Y(u, v) \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

dabei ist $X_u(u, v)$ die 1. Ableitung, $X_{uu}(u, v)$ die 2. Ableitung von $X(u, v)$ in Parameter- richtung u , $X_v(u, v)$, $X_{vv}(u, v)$ und $X_{uv}(u, v)$ sind entsprechende Ableitungen. $Y(u, v)$ ist die Normalenfläche:

$$Y(u, v) = X_u(u, v) \times X_v(u, v). \quad (4.3)$$

$K^{pq}(u, v)$ ist eine funktionswertige RTPB mit positiven Gewichten! Die Fläche liegt also in der konvexen Hülle des Beziernetzes. Daher kann aus dem Beziernetz von $K^{pq}(u, v)$ ein Intervall für die Werte der Gaußschen Krümmung angegeben werden.

Mit Hilfe der bei der Berechnung der Gaußkrümmungsfläche entstandenen Zwischen- flächen L , N und M kann zusätzlich (ohne größeren Aufwand) eine Klassifizierung der zu untersuchenden Fläche durchgeführt werden. Damit lassen sich z.B. Ebenen von Zylindern unterscheiden.

$X^{mn}(u, v)$ besteht nur aus

elliptischen Punkten		$LN - M^2 > 0$
hyperbolischen Punkten		$LN - M^2 < 0$
ebenen Punkten (Flachpunkten)	falls	$L = N = M = 0$
parabolischen Punkten		sonst

(4.4)

für alle Parameterwerte (u, v) gilt.

Beachte, daß für rationale Flächen $X^{mn}(u, v)$ die Klassifizierung allein mit den Zähler- polynomen von L , M und N vorgenommen werden kann, d.h. zur Klassifizierung nach (4.4) braucht lediglich eine Nullstellenanalyse von polynomialen Bezierflächen durchgeführt werden. In der Regel reichen einige Unterteilungen und Vorzeichenbetrachtungen von Bezierpunkten aus, um eine Fläche als konvex bzw. nicht konvex zu klassifizieren.

Beispiel:

Als Beispielfläche wird die folgende oft benutzte Fläche [11] gewählt. Es ist eine bikubische Tensorprodukt Bezierfläche mit den Bezierpunkten:

$$\begin{array}{llll} b_{00} = (0, 0, 0)^T & b_{01} = (1, 0, 1)^T & b_{02} = (2, 0, 2)^T & b_{03} = (3, 0, 0)^T \\ b_{10} = (0, 1, 2)^T & b_{11} = (1, 1, 2)^T & b_{12} = (2, 1, 2)^T & b_{13} = (3, 1, 1)^T \\ b_{20} = (0, 2, 1)^T & b_{21} = (1, 2, 2)^T & b_{22} = (2, 2, 2)^T & b_{23} = (3, 2, 2)^T \\ b_{30} = (0, 3, 0)^T & b_{31} = (1, 3, 2)^T & b_{32} = (2, 3, 1)^T & b_{33} = (3, 3, 0)^T \end{array}$$

Das Besondere an dieser Fläche ist, daß alle Parameterlinien konvex sind, die Fläche selbst jedoch nicht.

In Abbildung 1 ist die zu untersuchende Fläche mit Linien konstanter Gaußscher Krümmung dargestellt. Abbildung 2 zeigt die Fläche der Gaußkrümmung $K^{pq}(u, v)$ mit Höhenlinien. Die Linien mit verschwindender Krümmung $K^{pq} = 0$ sind fett gezeichnet.

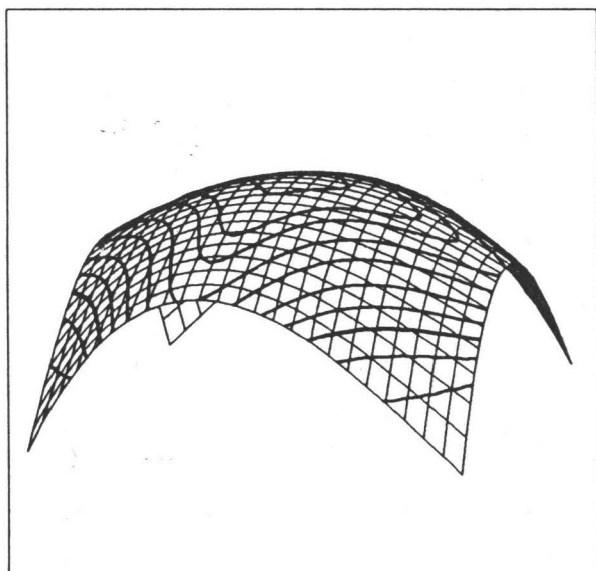


Abb. 1: Beispielfläche mit Isolinien $K^{pq}(u, v) = \text{const.}$

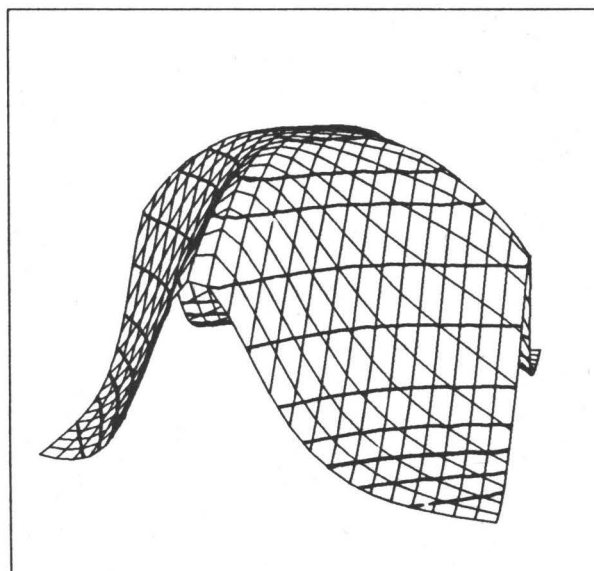


Abb. 2: Gaußkrümmungsfläche mit Höhenlinien

Bei der Qualitätsanalyse spielt die Erkennung sogenannter Nabel- und Flachpunkte eine große Rolle. Die Punkte einer Fläche, in denen die Krümmungen aller Normalschnitte übereinstimmen, werden *Nabelpunkte* oder *Umbilikalpunkte* genannt. Falls sie existieren, liegen sie genau dort, wo beide Hauptkrümmungen denselben Wert annehmen. Eine Bedingung dafür ist:

$$\kappa_1 - \kappa_2 = (EN + GL - 2FM)^2 - 4(LN - M^2)(EG - F^2) = 0. \quad (4.5)$$

Ein *Flachpunkt* ist ein spezieller Nabelpunkt. In ihm verschwinden beide Hauptkrümmungen. Für Flachpunkte gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (EN + GL - 2FM)^2 - 2(LN - M^2)(EG - F^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow L^2 + M^2 + N^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Abbildung 3 zeigt die Beispielfläche mit Isolinien $\kappa_1 - \kappa_2 = \text{const.}$ und Abbildung 4 die zugehörige *Nabelpunktfläche*, während Abbildung 5 und 6 die Beispielfläche mit $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \text{const.}$ und die zugehörige *Flachpunktfläche* zeigen. Die Beispielfläche besitzt keinen Nabelpunkt.

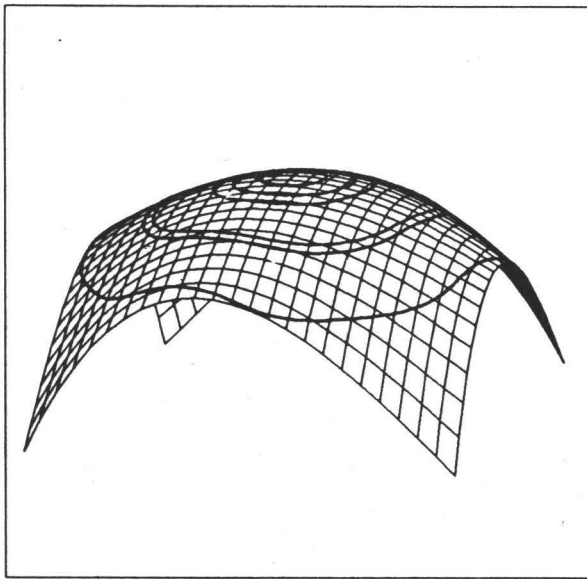


Abb. 3: Beispielfläche mit Isolinien
 $\kappa_1 - \kappa_2 = \text{const.}$

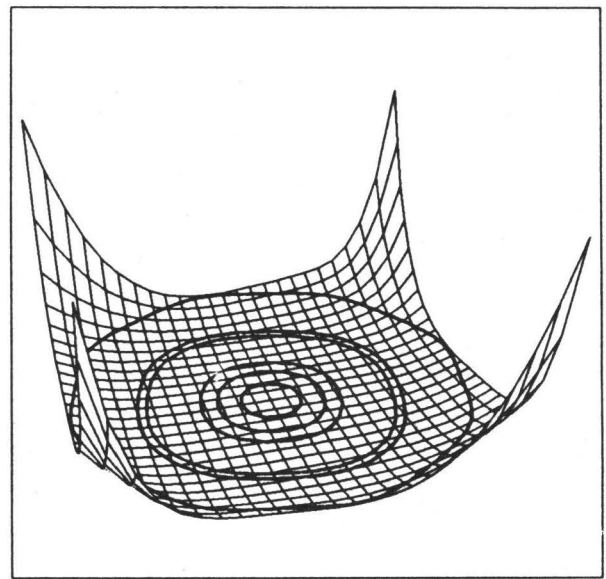


Abb. 4: Nabelpunktfläche
mit Höhenlinien

Bemerkung:

Sowohl die Gaußkrümmungsfläche als auch die Nabelpunktfläche und die Flachpunktfläche lassen sich gut durch eine Colormap-Abbildung auf die zu untersuchende Fläche oder über deren Parametergebiet visualisieren.

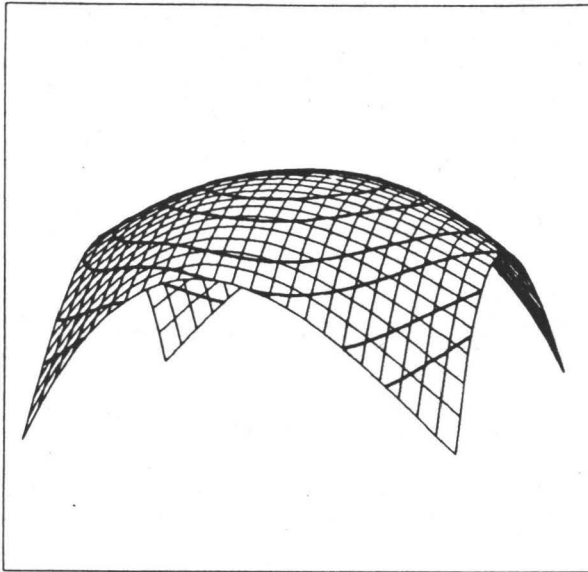


Abb. 5: Beispielfläche mit Isolinien
 $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \text{const.}$

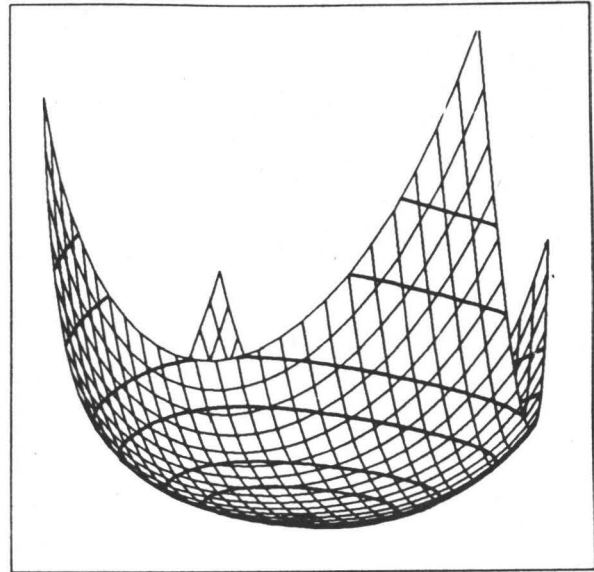
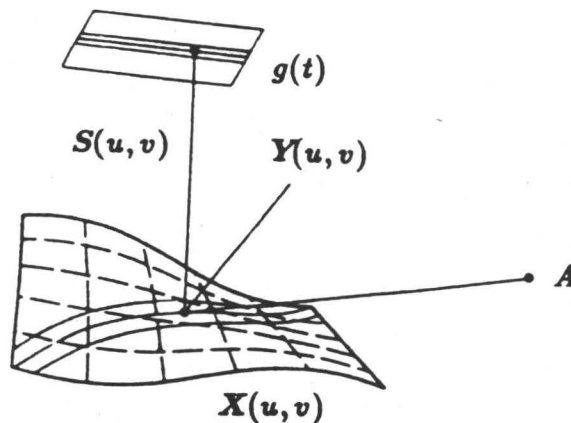


Abb. 6: Flachpunktfläche
 mit Höhenlinien

4.2 Reflexionslinien

Die Kurven, die sich durch die Reflexion von Lichtgeraden auf einer Fläche ergeben, nennt man *Reflexionslinien* [5][8]. Es lassen sich unerwünschte Krümmungsbereiche (z.B. Beulen in der Fläche) durch Unregelmäßigkeiten im Reflexionslinienbild paralleler Lichtgeraden erkennen. Sprünge in den Reflexionslinien weisen auf eine nicht G^1 -stetige und Knicke auf eine nicht G^2 -stetige Fläche hin.



Reflexionslinienanalyse

Die Ermittlung der Reflexionslinien durch eine punktweise Auswertung oder durch Lösung nicht linearer Gleichungssysteme ist oft schwierig. Mit Hilfe der Arithmetik auf Bezierflächen kann die Berechnung einer Reflexionslinie auf eine Nullstellenbestimmung

einer nicht parametrischen TPB zurückgeführt werden.

Sei $X^{mn}(u, v)$ die zu untersuchende Fläche und B der Betrachtungspunkt, dann berechnet sich die Fläche der reflektierenden Strahlen $S(u, v)$ durch:

$$S(u, v) = \frac{2Y(u, v) \langle B(u, v), Y(u, v) \rangle}{\langle Y(u, v), Y(u, v) \rangle} - B(u, v) \quad (4.7)$$

mit $B(u, v) = B - X(u, v)$ und der Normalenfläche $Y(u, v)$.

Die reflektierenden Strahlen schneiden die Lichtgerade $g(t) : L + tl$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \det |S(u, v), A(u, v), l| = 0 \\ &\iff \langle S(u, v) \times A(u, v), l \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit $A(u, v) = X(u, v) - L$ gilt.

Abbildung 7 zeigt eine C^0 -stetige und Abbildung 8 eine C^2 -stetige Bezierfläche mit jeweils drei Reflexionslinien. Die Fläche besteht aus zwei Flächenstücken, deren Grenze in Abbildung 7 deutlich zu erkennen ist.

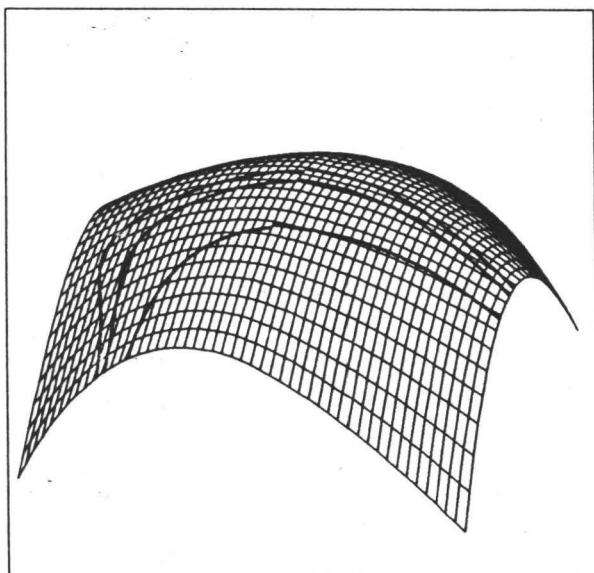


Abb. 7: C^0 -stetige Bezierfläche mit 3 Reflexionslinien

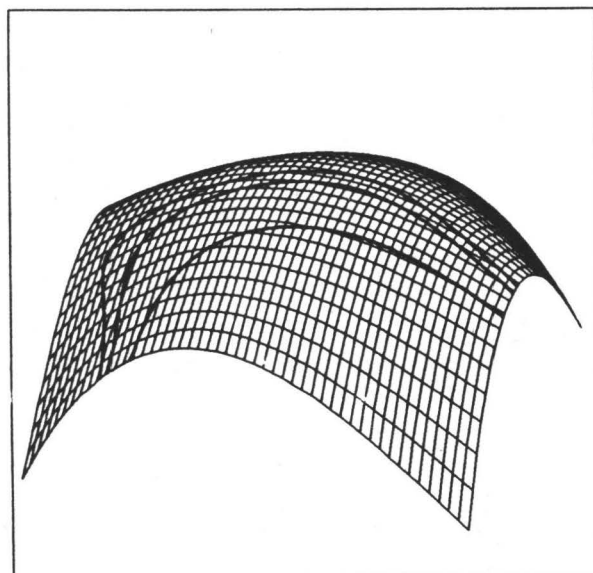


Abb. 8: C^2 -stetige Bezierfläche mit 3 Reflexionslinien

5. Implementierung

Die angegebenen Formeln zur Berechnung der Bezierpunkte und Gewichte der Ergebnisbezierflächen eignen sich nicht zur direkten Implementierung. Wie die Indizes der Summen direkt berechnet werden können, wird am Beispiel der komponentenweisen Multiplikation gezeigt. Für TPB $C^{m_1+m_2, n_1+n_2}(u, v) = A^{m_1, n_1}(u, v)$ und $B^{m_2, n_2}(u, v)$ gilt:

$$\tilde{c}_{kl} = \sum_{i=\max(0, k-m_2)}^{\min(k, m_1)} \sum_{j=\max(0, l-n_2)}^{\min(l, n_1)} \tilde{a}_{ij} \tilde{b}_{k-i, l-j}$$

mit $k=0, 1, \dots, m_1+m_2$ und $l=0, 1, \dots, n_1+n_2$.

Analog gilt für BDR $C^{m+n}(\mathbf{u}) = A^m(\mathbf{u})B^n(\mathbf{u})$:

$$\tilde{c}_{m+n-k, k-l, l} = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, m)} \sum_{j=\max(0, l-(k-i))}^{\min(i, l)} \tilde{a}_{m-i, i-j, j} \tilde{b}_{n-(k-i), (k-i)-(l-j), l-j}$$

mit $0 \leq k \leq m+n$ und $0 \leq l \leq k$.

Diese Schreibweise wurde wegen der oft langen und unlesbaren Indizes nicht verwendet.

Zusätzlich zu den arithmetischen Operationen wurden Routinen zur symbolischen Verarbeitung implementiert. Damit können Formeln in symbolischer Form angegeben werden, die die Bezierpunkte der Ergebnisfläche in Abhängigkeit von denen der Eingabeflächen ausdrücken. Diese Ausdrücke werden jedoch schon nach wenigen Schachtelungen recht groß.

6. Zusammenfassung

In diesem Bericht wurde gezeigt, wie sich die Resultate arithmetischer Operationen auf Bezierflächen wiederum in Bezierform darstellen lassen. Dadurch werden exakte Repräsentationen komplizierter Berechnungen auf Bezierflächen ermöglicht. Insbesondere können wegen der angenehmen Eigenschaften der Bernstein-Bezierform qualitative Aussagen und Abschätzungen gemacht werden, wie sie bisher nicht möglich waren. Zudem lassen sich viele Probleme auf numerisch stabile Nullstellenberechnungen zurückführen.

Man erkaufte sich diese Vorteile jedoch durch hohe Flächengrade. Punktweise Casteljau-Auswertungen und Unterteilungen der Ergebnisflächen sind daher oft zeitaufwendig. Hoschek et. al. [7] geben Verfahren an, mit denen bikubische C^0 -stetige oder biquintische C^1 -stetige Approximationsflächen mit beliebiger Genauigkeit bzgl. einer vorgegebenen zu approximierenden Punktmenge bestimmt werden können. Diese Flächen liefern für die Visualisierung gute Ergebnisse.

Literatur

- [1] W. Böhm, G. Farin, J. Kahmann: *A survey of curve and surface methods in CAGD*, CAGD 1 (1984) 1–60.
- [2] G. Farin: *Triangular Bernstein-Bezier patches*, CAGD 3 (1986) 83–127.
- [3] G. Farin: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press 1991.
- [4] R. T. Farouki, V.T. Rajan: *Algorithms for polynomials in Bernstein form*, CAGD 5 (1988) 1–26.
- [5] H. Hagen, T. Schreiber, E. Gschwind: *Methods for Surface Interrogation*, Proc. Visualization '90, 187–193, (1990).
- [6] J. Hoschek, D. Lasser: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, Teubner, 1989.
- [7] J. Hoschek, F. J. Schneider, P. Wassum: *Optimal approximate conversion of spline surfaces*, CAGD 6 (1989) 293–306.
- [8] R. Klass: *Correction of Local Surface Irregularities using Reflection Lines*, CAD 12, 73–77, (1980).
- [9] E. Kreyszig: *Differentialgeometrie*, Leipzig, 1968.
- [10] M. Lipschutz: *Differentialgeometrie*, McGraw-Hill, 1980.
- [11] H.-J. Schelske: *Lokale Glättung segmentierter Bezierkurven und Bezierflächen*, Dissertation, TH Darmstadt 1984.
- [12] I. L. Schumaker, W. Volk: *Efficient evaluation of multivariate polynomials*, CAGD 3 (1986) 149–154.