

---

# Interner Bericht

---

Optimale Gradreduktion  
von Kurven und Flächen  
in Bézierdarstellung

Thomas Schreiber und Jörg Braun

236/93

---

## Fachbereich Informatik

---

Universität Kaiserslautern · Postfach 3049 · D-67653 Kaiserslautern

Interner Bericht

Optimale Gradreduktion  
von Kurven und Flächen  
in Bézierdarstellung

Thomas Schreiber und Jörg Braun

236/93

Universität Kaiserslautern  
Fachbereich Informatik  
Postfach 3049  
D-67653 Kaiserslautern

November 1993

AG Graphische Datenverarbeitung und Computergeometrie  
Prof. Dr. H. Hagen

# Optimale Gradreduktion von Kurven und Flächen in Bézierdarstellung

Thomas Schreiber und Jörg Braun

Universität Kaiserslautern  
Fachbereich Informatik  
Postfach 3049  
D-67653 Kaiserslautern

## 1 Einleitung

In den Modellierungssystemen des CAD/CAM werden oft unterschiedliche Methoden zur mathematischen Beschreibung von Freiformkurven und -flächen eingesetzt. Als Basisfunktionen können sowohl Monome, Bernstein-Polynome, B-Spline-Basisfunktionen als auch nicht lineare Funktionen auftreten. In den einzelnen CAD-Systemen kann der maximal zulässige Grad dieser Basisfunktionen variieren. Müssen nun Daten zwischen verschiedenen CAD-Systemen ausgetauscht werden, so muß u.U. eine Basistransformation und/oder eine Gradanpassung durchgeführt werden. Diese Transformationen sind i.a. nicht exakt möglich. Hier sind geeignete, möglichst optimale Approximationen nötig.

Bisher wurden verschiedene Verfahren entwickelt. Das älteste geht zurück auf Forrest [Forr72]. Farin [FAR90] invertiert den Prozeß der Graderhöhung. Watkins und Worsey [Wat88] sowie Lachance [Lach88] reduzieren den Polynomgrad in der Tschebyscheff-Basis. Hoschek et al. [Hos89] sowie Plass und Stone [Plas83] approximieren die Kurve bzw. Fläche punktweise. Dadurch lassen sich alle Kurven- und Flächenrepräsentationen durch eine Bézier-Darstellung approximieren. Ein Approximationsfehler kann jedoch auch nur punktweise garantiert werden. Durch einen anschließenden Parameteriterationsprozeß läßt sich eine weitere Approximationsverbesserung erzielen. Eine solche Parameterkorrektur ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn die Parametrisierung der Approximationskurve bzw. -fläche frei gewählt werden kann. In Fällen, in denen die Funktionswerte der zu approximierenden Flächen bzgl. ihrer Parameterwerte mit anderen Flächen korrespondieren, darf keine Parameteränderung durchgeführt werden, wie z.B. bei der Approximation sogenannter Eigenschaftsflächen, die eine bestimmte Eigenschaft einer anderen Fläche, wie etwa die Gausskrümmung oder die Normalenrichtung darstellen.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur optimalen Gradreduktion von Bézierkurven und -flächen vorgestellt. Damit eine  $C^0$ -stetige Approximation innerhalb einer vom Benutzer vorgegebenen Fehlertoleranz durchgeführt werden kann, muß die Approximation mindestens eine Berührordnung ersten Grades mit der Originalkurve bzw. -fläche aufweisen. Mit Hilfe arithmetischer Operationen auf Bézierdarstellungen [Faro88],[Schr92] werden lineare Gleichungssysteme für eine optimale Belegung der freien Parameter aufgestellt, sowie eine Fehlerkurve bzw. -fläche in Bézierform berechnet, um die Einhaltung einer Fehlertoleranz zu gewährleisten.

## 2 Definitionen

Im folgenden werden kurz die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Definitionen und Schreibweisen erläutert. Zur Ergänzung siehe auch [FAR90], [HOS92].

Vektoren werden fett geschrieben, z.B.  $\mathbf{a} = (a^x, a^y, a^z)^T$  und Flächen mit Großbuchstaben (häufig mit Angabe des Grades) bezeichnet, z.B. steht  $X^{nm}(u, v)$  für eine parametrische Tensorprodukt-Bézierfläche vom Grad  $n$  in  $u$ -Richtung und Grad  $m$  in  $v$ -Richtung.  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren.

Eine Bézierkurve  $X^n(t)$  ist definiert durch

$$X^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i B_i^n(t) \quad (2.1)$$

wobei die *Bernsteinpolynome*  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  mit  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $t \in [0, 1]$ , die Basis der *Bézierdarstellung* bilden. Die  $a_i$  werden *Bézierpunkte* oder *Kontrollpunkte* der *Bézierkurve* genannt. Die *Binomialkoeffizienten*  $\binom{n}{k}$  sind folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & : 0 \leq k \leq n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

Eine *Tensorprodukt-Bézierfläche* (kurz: TPB-Fläche)  $X^{nm}(u, v)$  ist definiert durch

$$X^{nm}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Die Punkte  $b_{ij}$  werden *Bézierpunkte* genannt.

Ein *Bézierdreieck* (kurz: BDR)  $X^n(\mathbf{u})$  ist definiert durch

$$X^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \quad (2.4)$$

mit den *baryzentrischen Koordinaten*  $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ , ( $u + v + w = 1$ ;  $0 \leq u, v, w \leq 1$ ) bzgl. eines regulären *Parameterdreiecks* und  $\mathbf{i} = (i, j, k)^T$ , mit  $|\mathbf{i}| = n$  als  $i + j + k = n$  und  $i, j, k \geq 0$ . Addition und Subtraktion auf den Indexvektoren sind komponentenweise definiert. Die Punkte  $b_{\mathbf{i}}$  werden wieder *Bézierpunkte* genannt. Die Basispolynome sind die *verallgemeinerten Bernsteinpolynome*:

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad \text{mit } |\mathbf{i}| = n. \quad (2.5)$$

Die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten*  $\binom{n}{\mathbf{i}}$  sind folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{\mathbf{i}} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!k!} & : |\mathbf{i}| = n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

Um Formeln zu vereinfachen, werden z.T. sogenannte *skalierte Bézierpunkte* verwendet. Man erhält sie durch Multiplikation der *Bézierpunkte* mit den entsprechenden (verallgemeinerten) *Binomialkoeffizienten* der *Bernsteinpolynome*,

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \tilde{b}_{\mathbf{i}} &= \binom{n}{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}} && \text{für Bézierkurven} \\ \text{bzw. } \tilde{b}_{ij} &= \binom{n}{i} \binom{m}{j} b_{ij} && \text{für TPB-Flächen} \\ \text{und } \tilde{b}_{\mathbf{i}} &= \binom{n}{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}} && \text{für BDR-Flächen.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Weiterhin wird für spätere Vereinfachungen der auftretenden Formeln folgende Regel für *Binomialkoeffizienten* verwendet:

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{n+m-r}{m-k} = \binom{n+m}{m} \quad \forall r \leq n+m. \quad (2.8)$$

### 3 Approximation von Bézierkurven

#### 3.1 Ausgangssituation

Gegeben sei die Bézierkurve

$$\mathbf{X}^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i B_i^n(t), \quad n > 3, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

Gesucht ist eine Bézierkurve

$$\mathbf{Y}^m(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_j B_j^m(t), \quad 3 \leq m < n, \quad \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1], \quad (3.2)$$

die  $\mathbf{X}^n(t)$  möglichst gut approximiert und mit der Originalkurve  $\mathbf{X}^n(t)$  eine Berührordnung 1. Grades, d.h. die gleichen Anfangs- und Endpunkte, sowie gleiche Richtungen der Anfangs- und Endtangente besitzt. Dieser Zusammenhang wird durch die folgenden Bedingungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_0 + \lambda_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{b}_{m-1} &= \mathbf{a}_n + \lambda_2(\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n) \\ \mathbf{b}_m &= \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Unbekannten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{m-2}$  sollen nun so bestimmt werden, daß gilt

$$D := \int_0^1 \|\mathbf{X}^n(t) - \mathbf{Y}^m(t)\|^2 dt \longrightarrow \min \quad (3.4)$$

$$\iff \int_0^1 \left\| \sum_{i=0}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i) B_i^n(t) \right\|^2 dt \longrightarrow \min \quad (3.5)$$

Mit den arithmetischen Operationen auf Bézierdarstellungen [Faro88],[Schr92] folgt:

$$D = \int_0^1 \sum_{i=0}^{2n} d_i B_i^{2n}(t) dt \longrightarrow \min \quad (3.6)$$

$$\iff \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} d_i \longrightarrow \min \quad (3.7)$$

$$\text{mit } d_i = \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(i, n)} \binom{n}{j} \binom{n}{i-j} \langle \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j, \mathbf{a}_{i-j} - \mathbf{c}_{i-j} \rangle, \quad d_i \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

$$\text{d.h. } \tilde{d}_i = \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(i, n)} \langle \tilde{\mathbf{a}}_j - \tilde{\mathbf{c}}_j, \tilde{\mathbf{a}}_{i-j} - \tilde{\mathbf{c}}_{i-j} \rangle \quad (3.9)$$

$$\text{bzw. } \tilde{d}_i = \sum_{j=0}^n \langle \tilde{\mathbf{a}}_j - \tilde{\mathbf{c}}_j, \tilde{\mathbf{a}}_{i-j} - \tilde{\mathbf{c}}_{i-j} \rangle \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (3.10)$$

Dabei sind die  $\mathbf{c}_i$  aus den  $\mathbf{b}_i$  nach  $(n-m)$ -facher Graderhöhung von  $\mathbf{Y}^m(t)$  wie folgt (siehe auch [FAR90]) entstanden:

$$\tilde{\mathbf{c}}_i = \sum_{k=0}^m \binom{n-m}{i-k} \tilde{\mathbf{b}}_k \quad (3.11)$$

### 3.2 Aufstellen der Gleichungen

Die Optimierung erfolgt nach der diskreten Fehlerquadratmethode von Gauss. Eine notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Verschwinden der ersten Ableitungen von  $D$  nach den unbekanntem Größen. Daher muß (3.7) in Abhängigkeit von  $\lambda_1, \lambda_2, b_2, \dots, b_{m-2}$  ausgedrückt werden.

Nach elementaren Umformungen von (3.10) ergibt sich

$$\tilde{d}_i = \sum_{j=0}^n \langle \alpha_1^j \lambda_1 + \alpha_2^j \lambda_2 + \alpha_3^j + \alpha_4^j - \tilde{a}_j, \alpha_1^{i-j} \lambda_1 + \alpha_2^{i-j} \lambda_2 + \alpha_3^{i-j} + \alpha_4^{i-j} - \tilde{a}_{i-j} \rangle \quad (3.12)$$

$$\text{mit } \alpha_1^i := m \binom{n-m}{i-1} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$$

$$\alpha_2^i := m \binom{n-m}{i-m+1} (\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n)$$

$$\alpha_3^i := \left[ \binom{n-m}{i} + m \binom{n-m}{i-1} \right] \mathbf{a}_0 + \left[ \binom{n-m}{i-m} + m \binom{n-m}{i-m+1} \right] \mathbf{a}_n \quad (3.13)$$

$$\alpha_4^i := \sum_{k=2}^{m-2} \binom{n-m}{i-k} \binom{m}{k} \mathbf{b}_k$$

#### Bemerkungen:

1. Statt der „max/min“-Schreibweise, wie z.B. bei den Indizes der Formel (3.9), wird die kompakte Notation von (3.10) verwendet. Bei der Implementierung der Algorithmen auf einem Rechner ist jedoch die „max/min“-Schreibweise vorzuziehen, da so keine überflüssigen Terme berechnet werden müssen (siehe auch Kapitel Implementierung).
2. Die überflüssigen bzw. teilweise auch gar nicht definierten Terme (z.B. aufgrund negativer bzw. zu großer Indizes) der geschlossenen Schreibweise werden durch die Definition der Binomialkoeffizienten (siehe Formel (2.2)) abgefangen.

Dadurch ist eine Implementierung auch in der kompakten Darstellung möglich, aber relativ ineffizient.

Mit den Ableitungsregeln für Skalarprodukte ergeben sich die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \langle \alpha_1^j, \alpha_1^{i-j} \lambda_1 + \alpha_2^{i-j} \lambda_2 + \alpha_3^{i-j} + \alpha_4^{i-j} - \tilde{a}_{i-j} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_1^j \lambda_1 + \alpha_2^j \lambda_2 + \alpha_3^j + \alpha_4^j - \tilde{a}_j \rangle \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ 2\lambda_1 \langle \alpha_1^j, \alpha_1^{i-j} \rangle + \lambda_2 (\langle \alpha_1^j, \alpha_2^{i-j} \rangle + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_2^j \rangle) \right. \\ \left. + \langle \alpha_1^j, \alpha_4^{i-j} \rangle + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_4^j \rangle \right\} \\ = - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \langle \alpha_1^j, \alpha_3^{i-j} - \tilde{a}_{i-j} \rangle + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_3^j - \tilde{a}_j \rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ 2\lambda_1 \langle \alpha_1^j, \alpha_1^{i-j} \rangle + \lambda_2 (\langle \alpha_1^j, \alpha_2^{i-j} \rangle + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_2^j \rangle) \right. \\
&\quad \left. + m \sum_{k=2}^{m-2} \left[ \binom{n-m}{j-1} \binom{n-m}{i-j-k} + \binom{n-m}{i-j-1} \binom{n-m}{j-k} \right] \binom{m}{k} \langle b_k, a_1 - a_0 \rangle \right\} \\
&= - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \langle \alpha_1^j, \alpha_3^{i-j} - \tilde{a}_{i-j} \rangle + \langle \alpha_1^{i-j}, \alpha_3^j - \tilde{a}_j \rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

b) Analog zu a) gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial \lambda_2} = 0 \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \lambda_1 (\langle \alpha_2^j, \alpha_1^{i-j} \rangle + \langle \alpha_2^{i-j}, \alpha_1^j \rangle) + 2\lambda_2 \langle \alpha_2^j, \alpha_2^{i-j} \rangle \right. \\
&\quad \left. + m \sum_{k=2}^{m-2} \left[ \binom{n-m}{j-m+1} \binom{n-m}{i-j-k} + \binom{n-m}{i-j-m+1} \binom{n-m}{j-k} \right] \binom{m}{k} \langle b_k, a_{n-1} - a_n \rangle \right\} \\
&= - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \langle \alpha_2^j, \alpha_3^{i-j} - \tilde{a}_{i-j} \rangle + \langle \alpha_2^{i-j}, \alpha_3^j - \tilde{a}_j \rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

c)  $\frac{\partial D}{\partial b_l} = 0$  für  $l = 2, \dots, m-2$  und  $b_l = (b_l^x, b_l^y, b_l^z)^T$ .

Im folgenden wird nur die Ableitung nach  $b_l^x$  betrachtet, die Fälle für die  $y$ - und die  $z$ -Koordinaten verlaufen analog.

Analog zu a) erhält man nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial b_l^x} = 0 \Leftrightarrow \quad \quad \quad l = 2, \dots, m-2 \\
&\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \lambda_1 (a_1^x - a_0^x) \left[ \beta_1^j \beta_2^{i-j} + \beta_1^{i-j} \beta_2^j \right] \right. \\
&\quad \left. + \lambda_2 (a_{n-1}^x - a_n^x) \left[ \beta_1^j \beta_3^{i-j} + \beta_1^{i-j} \beta_3^j \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=2}^{m-2} \left[ \beta_1^j \binom{n-m}{i-j-k} + \beta_1^{i-j} \binom{n-m}{j-k} \right] \binom{m}{k} b_k^x \right\} \\
&= - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_1^j \left( \left[ \binom{n-m}{i-j} + \beta_2^{i-j} \right] a_0^x + \left[ \binom{n-m}{i-j-m} + \beta_3^{i-j} \right] a_n^x - \binom{n}{i-j} a_{i-j}^x \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta_1^{i-j} \left( \left[ \binom{n-m}{j} + \beta_2^j \right] a_0^x + \left[ \binom{n-m}{j-m} + \beta_3^j \right] a_n^x - \binom{n}{j} a_j^x \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\text{wobei} \quad \beta_1^i := \binom{n-m}{i-l}, \quad \beta_2^i := m \binom{n-m}{i-1}, \quad \beta_3^i := m \binom{n-m}{i-m+1}$$

### 3.3 Bestimmung der unbekanntenen Bézierpunkte

Um die noch unbekanntenen Bézierpunkte  $b_1, \dots, b_{m-1}$  zu bestimmen, ist das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) zu lösen:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0g} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{g0} & \dots & c_{gg} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = (\lambda_1, \lambda_2, b_2^x, b_2^y, b_2^z, \dots, b_{m-2}^x, b_{m-2}^y, b_{m-2}^z)^T$$

$$\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_g)^T$$

Dabei gilt  $g := 3(m-3) + 1$ .

Um die Werte der Einträge in der Koeffizientenmatrix und im Ergebnisvektor zu ermitteln, müssen die Gleichungen (3.16), (3.17) und (3.18) in Matrix-Vektor-Schreibweise umgesetzt werden.

Bemerkung: Aufgrund der Randbedingung „Berührordnung 1. Grades“ (siehe (3.3)) kann die Lösung von (3.19) nicht komponentenunabhängig (d.h. simultan pro Dimension) durchgeführt werden, sondern muß auf einmal gelöst werden (vgl. auch Flächenfall).

Die Einträge des Ergebnisvektors  $\mathbf{A}$  werden wie folgt bestimmt (mit  $l = 2, \dots, m-2$ ):

$$A_0 := -m(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)^T \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{a}_0 \left[ \binom{2n-2m}{i-1} + m \binom{2n-2m}{i-2} \right] \\ & + \mathbf{a}_n \left[ \binom{2n-2m}{i-m-1} + m \binom{2n-2m}{i-m} \right] \\ & - \sum_{j=0}^n \binom{n-m}{i-j-1} \binom{n}{j} \mathbf{a}_j \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$A_1 := -m(\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n)^T \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{a}_0 \left[ \binom{2n-2m}{i-m+1} + m \binom{2n-2m}{i-m} \right] \\ & + \mathbf{a}_n \left[ \binom{2n-2m}{i-2m+1} + m \binom{2n-2m}{i-2m+2} \right] \\ & - \sum_{j=0}^n \binom{n-m}{i-j-m+1} \binom{n}{j} \mathbf{a}_j \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$A_{3(l-2)+2} := - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\binom{2n}{i}} \left\{ \begin{aligned} & a_0^x \left[ \binom{2n-2m}{i-l} + m \binom{2n-2m}{i-l-1} \right] \\ & + a_n^x \left[ \binom{2n-2m}{i-m-l} + m \binom{2n-2m}{i-m-l+1} \right] \\ & - \sum_{j=0}^n \binom{n-m}{i-j-l} \binom{n}{j} a_j^x \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

analog  $A_{3(l-2)+3}$  für die  $y$ -Koordinaten

und  $A_{3(l-2)+4}$  für die  $z$ -Koordinaten.

Die Einträge der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}$  ergeben sich wie folgt (mit  $k, l = 2, \dots, m-2$ ):

1. Zeile:

$$c_{00} := m^2 \langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 \rangle \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+2}} \quad (3.23)$$

$$c_{01} := m^2 \langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n \rangle \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+m}} \quad (3.24)$$

$$c_{0,3(k-2)+2} := \binom{m}{k} c_{3(k-2)+2,0} \quad (3.25)$$

analog  $c_{0,3(k-2)+3}$  für die  $y$ -Koordinaten  
und  $c_{0,3(k-2)+4}$  für die  $z$ -Koordinaten.

2. Zeile:

$$c_{10} := c_{01} \quad (3.26)$$

$$c_{11} := m^2 \langle \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n \rangle \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+2(m-1)}} \quad (3.27)$$

$$c_{1,3(k-2)+2} := \binom{m}{k} c_{3(k-2)+2,1} \quad (3.28)$$

analog  $c_{1,3(k-2)+3}$  für die  $y$ -Koordinaten  
und  $c_{1,3(k-2)+4}$  für die  $z$ -Koordinaten.

Rest der 1. Spalte:

$$c_{3(l-2)+2,0} := m(a_1^x - a_0^x) \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+l+1}} \quad (3.29)$$

analog  $c_{3(l-2)+3,0}$  für die  $y$ -Koordinaten  
und  $c_{3(l-2)+4,0}$  für die  $z$ -Koordinaten.

Rest der 2. Spalte:

$$c_{3(l-2)+2,1} := m(a_{n-1}^x - a_n^x) \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+l+m-1}} \quad (3.30)$$

analog  $c_{3(l-2)+3,1}$  für die  $y$ -Koordinaten  
und  $c_{3(l-2)+4,1}$  für die  $z$ -Koordinaten.

Für die restliche  $(3(m-3) \times 3(m-3))$ -Matrix gilt für  $w = 2, 3, 4$ :

$$c_{3(l-2)+w,3(k-2)+w} := \binom{m}{k} \sum_{i=0}^{2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{i}}{\binom{2n}{i+l+k}} \quad (3.31)$$

Die übrigen  $c_{ij}$  sind gleich 0!

**Bemerkung:** Die restliche  $(3(m-3) \times 3(m-3))$ -Matrix ist „punktsymmetrisch“, das bedeutet  $c_{3(l-2)+w, 3(k-2)+w} = c_{3(m-l-2)+w, 3(m-k-2)+w}$  ( $k, l = 2, \dots, m-2$ ). Außerdem sind die  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen aus denen die Restmatrix besteht, Diagonalmatrizen mit gleichen Werten in der Hauptdiagonale, d.h. man muß von der Restmatrix nur jeden 18-ten Wert explizit berechnen, die anderen Einträge lassen sich daraus kopieren bzw. sind gleich 0.

Es ergibt sich folgende Gestalt der Koeffizientenmatrix:

$$C = \left( \begin{array}{c|ccccc} * & & & * & & \\ \hline & + & + & \dots & + & + \\ & + & + & \dots & + & + \\ * & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & + & + & \dots & + & + \\ & + & + & \dots & + & + \end{array} \right) \quad (3.32)$$

Hierbei steht '\*' in den ersten beiden Zeilen bzw. Spalten der Matrix für beliebige Koeffizientenwerte. Die restliche Matrix besteht aus insgesamt  $(m-3) \cdot (m-3)$  Untermatrizen der Gestalt '+', wobei '+' jeweils für eine  $(3 \times 3)$ -Diagonalmatrix mit drei gleichen Werten '\*' in der Diagonalen steht,

$$\text{d.h. } + = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ist das LGS aufgestellt und gelöst, so sind die Bézierpunkte  $b_2, \dots, b_{m-2}$  direkt bestimmt. Die beiden übrigen Punkte  $b_1$  und  $b_{m-1}$  erhält man aus (3.3) mit den jetzt bekannten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Damit ist die approximierende Bézierkurve bestimmt.

### 3.4 Beispiele

In den folgenden Abbildungen sind auf der linken Seite die Approximations-Bézierkurven (gestrichelte Linie) mit der Original-Bézierkurve (durchgehende Linie) vom Grad 10 dargestellt. Die rechte Seite zeigt die nach (3.7) ermittelten Fehlerkurven.

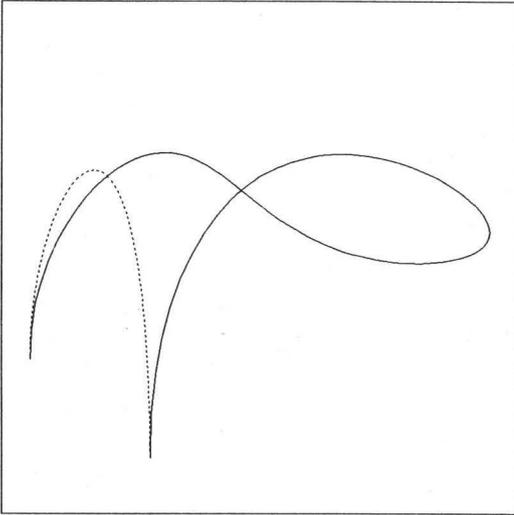


Abb. 1: Approximationskurve vom Grad  $m = 3$

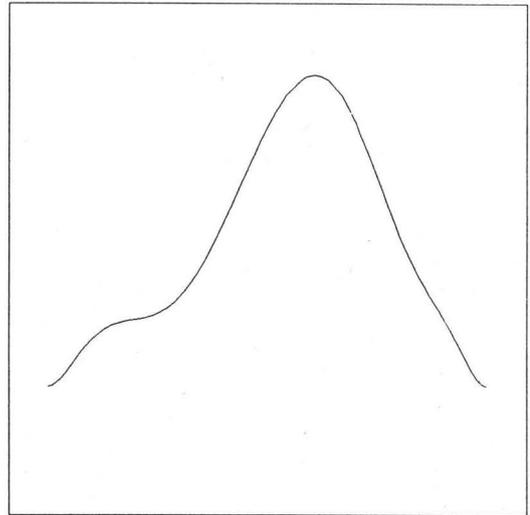


Abb. 2: Fehlerkurve für  $m = 3$

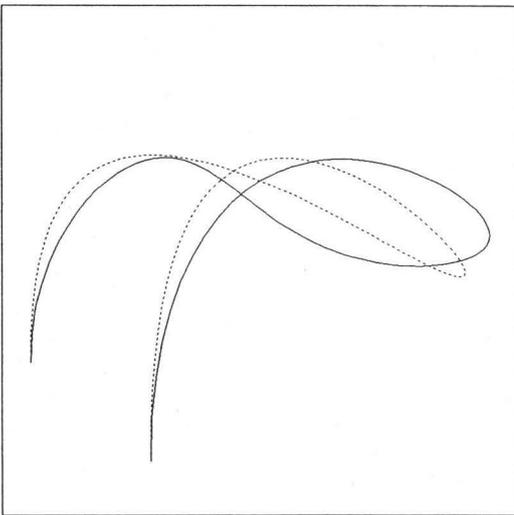


Abb. 3: Approximationskurve vom Grad  $m = 4$

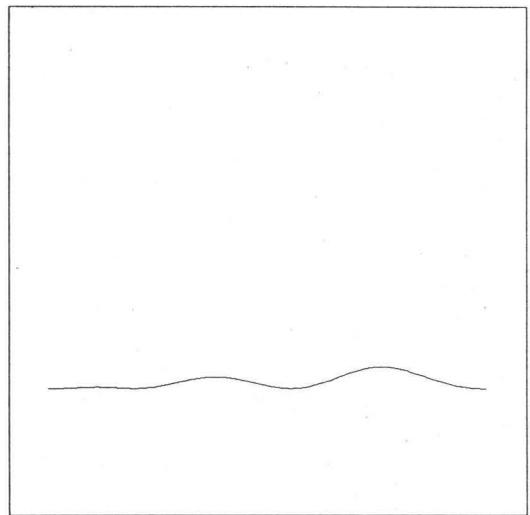


Abb. 4: Fehlerkurve für  $m = 4$

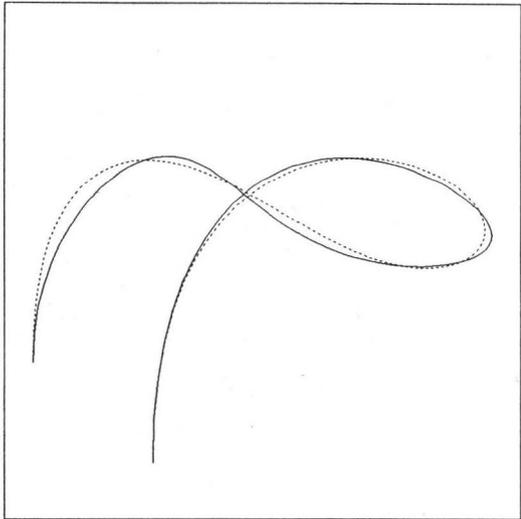


Abb. 5: Approximationskurve vom Grad  $m = 6$

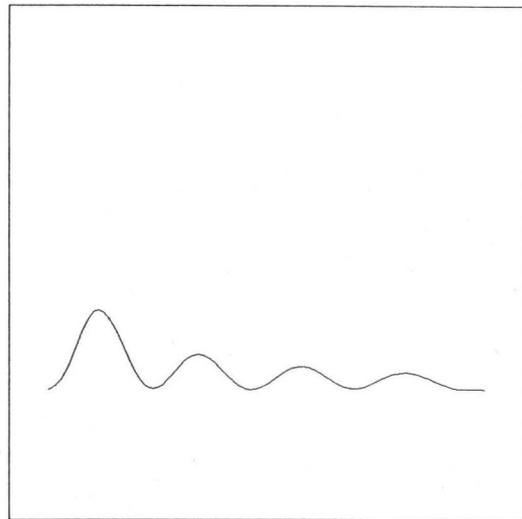


Abb. 6: Fehlerkurve für  $m = 6$   
(100-fach überhöht)

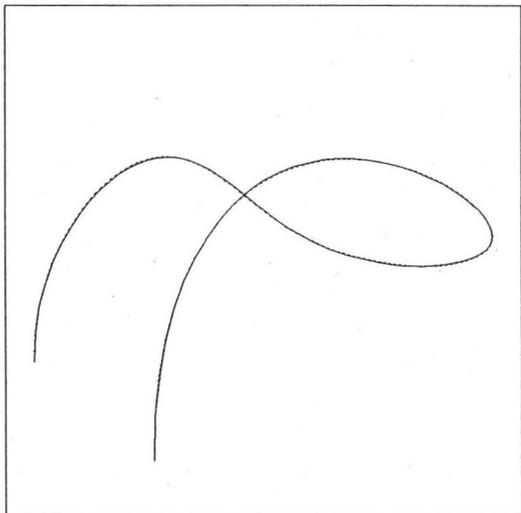


Abb. 7: Approximationskurve vom Grad  $m = 8$

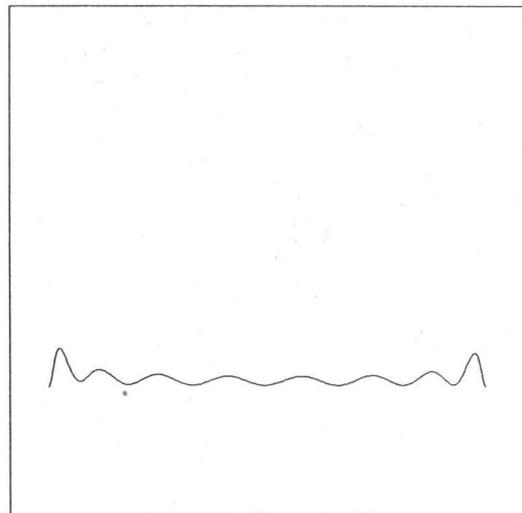


Abb. 8: Fehlerkurve für  $m = 8$   
(10000-fach überhöht)

### 3.5 Segmentierungen

Je niedriger der Approximationsgrad ist, desto größer ist der Approximationsfehler. Dieser Nachteil kann bei kleinem Approximationsgrad nur dadurch ausgeglichen werden, daß die Kurve nicht durch ein, sondern durch mehrere Segmente approximiert wird, bis z.B. das Maximum der Bézierordinaten  $d_i$  aller Kurvensegmente der Fehlerkurve eine vorgegebene Fehlerschranke unterschritten hat.

Im folgenden Beispiel wird die Bézierkurve vom Grad 10 aus Abbildung 1 rekursiv jeweils im Parameterwert  $t = 0.5$  in 4 bzw. 8 Segmente unterteilt und durch Bézierkurven vom Grad 3 approximiert.

Die Werte der maximalen  $d_i$  in Abbildung 10 betragen in den einzelnen Segmenten von links nach rechts 655.300, 29.880, 4.602, 196.401 und in Abbildung 12 7.608, 0.059, 0.453, 0.039, 0.005, 0.076, 0.530, 2.533.

Die Punkte in den Abbildungen 9 und 11 markieren die Segmenttrennstellen.

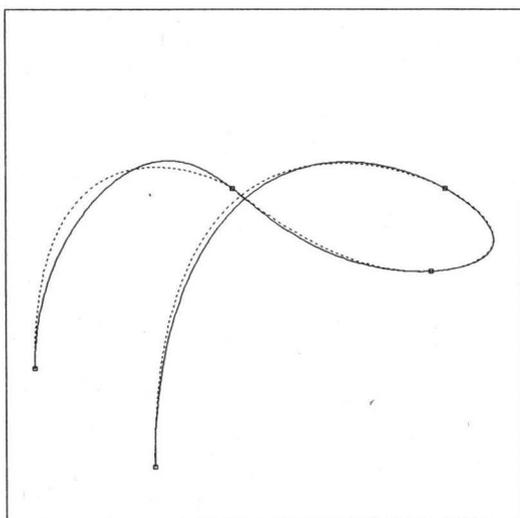


Abb. 9: Approximation durch 4 Segmente

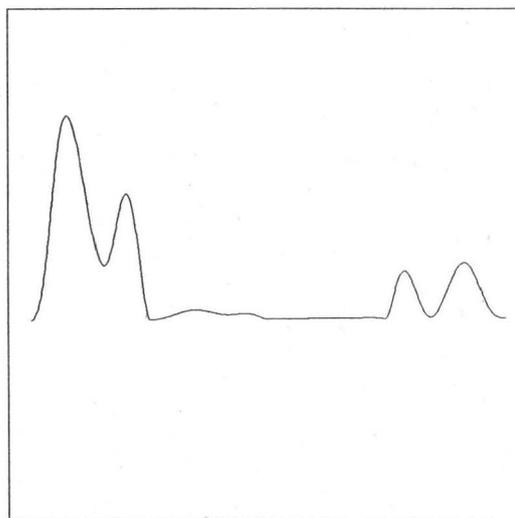


Abb. 10: Fehlerkurve (200-fach überhöht)

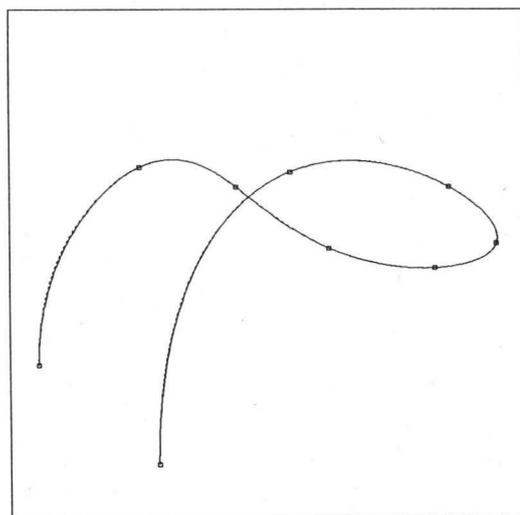


Abb. 11: Approximation durch 8 Segmente

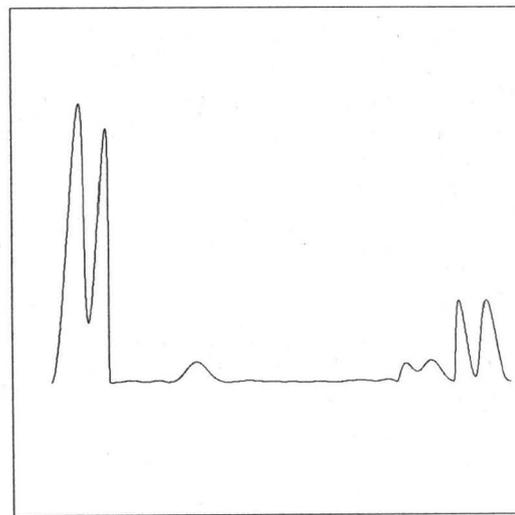


Abb. 12: Fehlerkurve (50000-fach überhöht)

## 4 Approximation von Tensorprodukt-Bézierflächen

### 4.1 Ausgangssituation

Gegeben ist die Tensorprodukt-Bézierfläche

$$X^{nm}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \quad n, m \geq 3, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^3 \quad u, v \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

Gesucht ist die TPB-Fläche

$$Y^{pq}(u, v) = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q b_{kl} B_k^p(u) B_l^q(v), \quad 3 \leq p \leq n, \quad 3 \leq q \leq m, \quad b_{kl} \in \mathbb{R}^3 \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.2)$$

die  $X^{nm}(u, v)$  möglichst gut approximiert und mit  $X^{nm}(u, v)$  eine Berührordnung ersten Grades besitzt. Da in der Regel eine Fläche aus mehreren aneinanderliegenden Patches besteht, muß sichergestellt werden, daß zwei benachbarte Patches auch nach der Approximation noch eine gemeinsame Randkurve besitzen, damit in der Fläche keine „Löcher“ entstehen.

Aus diesem Grund erfolgt die Approximation eines TPB-Patches in zwei Schritten:

1. Approximation der vier Randkurven
2. Approximation der inneren Kontrollpunkte.

### 4.2 Bestimmung der Randkurven

Die vier Randkurven werden analog zu Kapitel 3 bestimmt. Da in jeder Ecke des TPB-Patches zwei Randkurven aneinanderstoßen, und beide mit einer Berührordnung ersten Grades approximiert werden, besitzen die Patches  $X^{nm}(u, v)$  und  $Y^{pq}(u, v)$ , wie gefordert, in den Eckpunkten jeweils gleiche Tangentialebenen.

### 4.3 Bestimmung der inneren Kontrollpunkte

#### 4.3.1 Aufstellen der Gleichungen

Die noch unbekanntenen inneren Bézierpunkte  $b_{kl}$  mit  $k = 1, \dots, p-1$  und  $l = 1, \dots, q-1$  werden so bestimmt, daß

$$D := \int_0^1 \int_0^1 \| X^{nm}(u, v) - Y^{pq}(u, v) \|^2 du dv \longrightarrow \min \quad (4.3)$$

$$\iff \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{ij} - c_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v) \right\|^2 du dv \longrightarrow \min \quad (4.4)$$

Dabei sind die  $c_{ij}$  ( $i = 0, \dots, n$  und  $j = 0, \dots, m$ ) durch eine  $(n-p)$ -fache Graderhöhung in  $u$ -Richtung und eine  $(m-q)$ -fache Graderhöhung in  $v$ -Richtung aus den  $b_{kl}$  entstanden (siehe [FAR90]):

$$\tilde{c}_{ij} = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \tilde{b}_{kl} \binom{n-p}{i-k} \binom{m-q}{j-l} \quad (4.5)$$

Mit  $e_{ij} := a_{ij} - c_{ij}$  und der Multiplikationsregel aus [Schr92] gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m e_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right\|^2 &= \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{\substack{i+\mu=\lambda \\ j+\nu=\omega}} \langle \tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{\mu\nu} \rangle B_\lambda^{2n}(u) B_\omega^{2m}(v) \\
&= \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} d_{\lambda\omega} B_\lambda^{2n}(u) B_\omega^{2m}(v) \\
\text{mit } d_{\lambda\omega} &:= \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{\substack{i+\mu=\lambda \\ j+\nu=\omega}} \langle \tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{\mu\nu} \rangle \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \langle \tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{\mu\nu} \rangle
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Damit ergibt sich Formel (4.4) zu (siehe [FAR90]):

$$D = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} d_{\lambda\omega} B_\lambda^{2n}(u) B_\omega^{2m}(v) du dv \longrightarrow \min \tag{4.7}$$

$$\iff \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} d_{\lambda\omega} \longrightarrow \min \tag{4.8}$$

Nach einigen Umformungen folgt zusammen mit (4.5)

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \\
&\quad \langle \tilde{a}_{ij} - \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \binom{n-p}{i-k} \binom{m-q}{j-l} \tilde{b}_{kl}, \\
&\quad \tilde{a}_{\lambda-i, \omega-j} - \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \binom{n-p}{\lambda-i-k} \binom{m-q}{\omega-j-l} \tilde{b}_{kl} \rangle
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Um die noch unbekanntenen inneren Kontrollpunkte zu bestimmen, müssen die Normalgleichungen  $\frac{\partial D}{\partial b_{rs}} = 0$  mit  $r = 1, \dots, p-1$ ;  $s = 1, \dots, q-1$  aufgestellt werden.

Im folgenden wird nur die Ableitung nach der  $x$ -Koordinate betrachtet; für die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten verfährt man analog.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial b_{rs}^x} &= 0 & r &= 1, \dots, p-1 \\
& & s &= 1, \dots, q-1 \\
\iff \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \binom{p}{k} \binom{q}{l} b_{kl}^x \\
&\quad \left\{ \binom{n-p}{i-r} \binom{m-q}{j-s} \binom{n-p}{\lambda-i-k} \binom{m-q}{\omega-j-l} + \binom{n-p}{i-k} \binom{m-q}{j-l} \binom{n-p}{\lambda-i-r} \binom{m-q}{\omega-j-s} \right\} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \\
&\quad \left\{ \binom{n-p}{i-r} \binom{m-q}{j-s} \tilde{a}_{\lambda-i, \omega-j}^x + \binom{n-p}{\lambda-i-r} \binom{m-q}{\omega-j-s} \tilde{a}_{ij}^x \right\}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Randkontrollpunkte sind bereits bekannt und werden deshalb auf die rechte Seite der obigen Gleichung gebracht.

Insgesamt gilt nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial b_{rs}^x} &= 0 & r &= 1, \dots, p-1 \\
& & s &= 1, \dots, q-1 \\
\iff \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{q-1} \binom{n-p}{i-r} \binom{m-q}{j-s} \binom{n-p}{\lambda-i-k} \binom{m-q}{\omega-j-l} \tilde{b}_{kl}^x \\
&= - \sum_{\lambda=0}^{2n} \sum_{\omega=0}^{2m} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda} \binom{2m}{\omega}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n-p}{i-r} \binom{m-q}{j-s} \\
&\quad \left\{ \sum_{l=0}^q \binom{m-q}{\omega-j-l} \left[ \binom{n-p}{\lambda-i} \tilde{b}_{0l}^x + \binom{n-p}{\lambda-i-p} \tilde{b}_{pl}^x \right] \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{n-p}{\lambda-i-k} \left[ \binom{m-q}{\omega-j} \tilde{b}_{k0}^x + \binom{m-q}{\omega-j-q} \tilde{b}_{kq}^x \right] \\
&\quad \left. - \tilde{a}_{\lambda-i, \omega-j}^x \right\} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

#### 4.3.2 Bestimmung der unbekanntenen Bézierpunkte

Um die noch unbekanntenen inneren Kontrollpunkte zu bestimmen, muß dreimal (d.h. je einmal für jede Dimension) das folgende LGS gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0,g} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{g,0} & \dots & c_{g,g} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_g \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{A}, \tag{4.12}$$

mit  $g := (p-1)(q-1) - 1$ .

Die Matrixelemente bestimmen sich (mit  $r, k = 1, \dots, p-1$ ;  $s, l = 1, \dots, q-1$ ) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
c_{(q-1)(r-1)+(s-1), (q-1)(k-1)+(l-1)} &:= \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{\lambda=0}^{2n-2p} \frac{\binom{2n-2p}{\lambda}}{\binom{2n}{\lambda+k+r}} \sum_{\omega=0}^{2m-2q} \frac{\binom{2m-2q}{\omega}}{\binom{2m}{\omega+l+s}} \\
l_{(q-1)(k-1)+(l-1)} &:= b_{kl}^{x/y/z} \\
A_{(q-1)(r-1)+(s-1)} &:= \text{rechte Seite von (4.11) (mit jeweils } x/y/z\text{)}.
\end{aligned}$$

#### Bemerkungen:

1. Die Koeffizientenmatrix C ist für alle Dimensionen gleich.
2. Die Koeffizientenmatrix C ist (wie die untere Koeffizienten-Restmatrix im Kurvenfall) punktsymmetrisch zum „Mittelpunkt“ der Matrix, d.h.  $c_{ij} = c_{g-i, g-j}$ . Man muß also nur eine Hälfte der Matrix berechnen, die andere kann man daraus kopieren. Außerdem ist jede der insgesamt  $(p-1)^2$  Untermatrizen der Größe  $(q-1) \times (q-1)$  aus denen C besteht, ihrerseits auch punktsymmetrisch, d.h. es gilt

$$c_{(q-1)(r-1)+(s-1), (q-1)(k-1)+(l-1)} = c_{(q-1)(r-1)+(q-s-1), (q-1)(k-1)+(q-l-1)}.$$

Insgesamt muß also nur jeder vierte Eintrag von C berechnet werden.

#### 4.4 Beispiele

Die folgenden Approximationsbeispiele zeigen, wie ein gegebenes TPB-Patch (Abb. 13) vom Grad  $10 \times 10$  sukzessive mit dem Grad  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$  und  $9 \times 9$  approximiert wird. Die Abbildungen auf der linken Seite zeigen dabei die entstandenen Approximationsflächen und die auf der rechten Seite die zugehörigen Fehlerflächen nach Formel (4.6). Die Fehlerflächen in den Abbildungen 19 und 21 werden zusätzlich 20- bzw. 10000-fach überhöht in den Abbildungen 22 und 23 dargestellt.

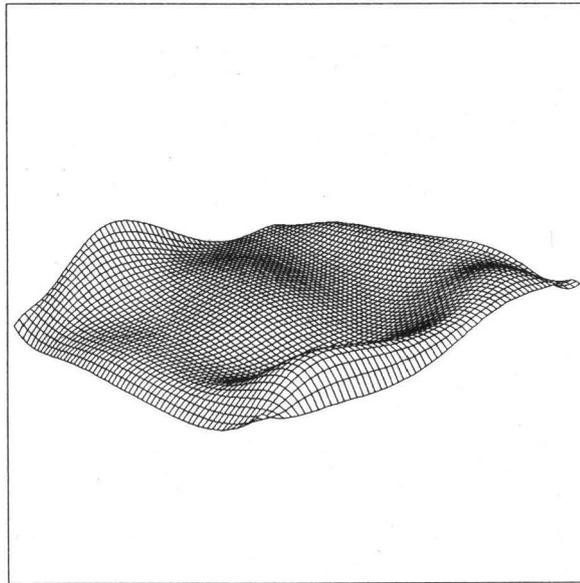


Abb. 13: Originalfläche vom Grad  $10 \times 10$

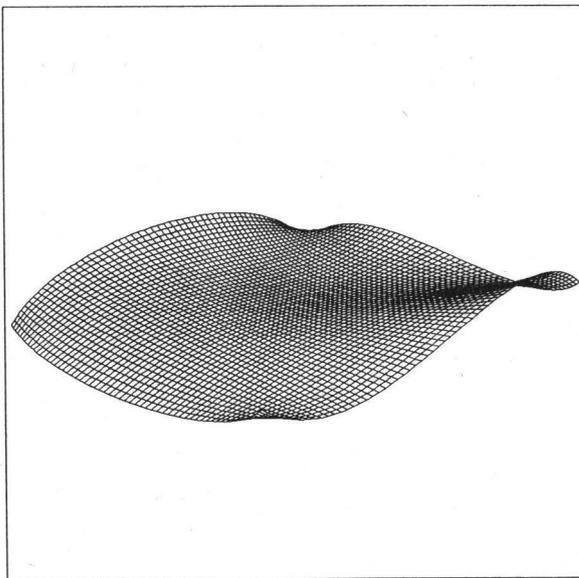


Abb. 14: Approximationsfläche vom Grad  $3 \times 3$

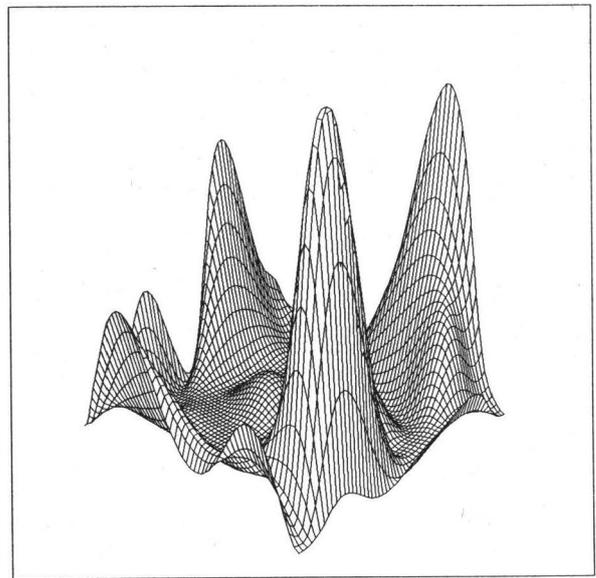


Abb. 15: Fehlerfläche zu Abbildung 14

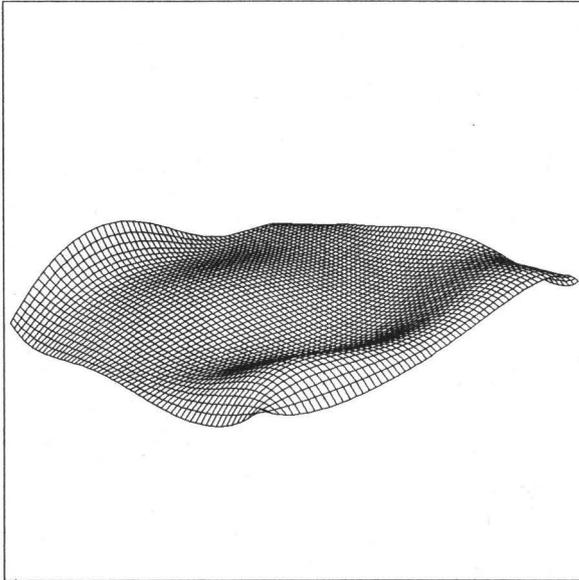


Abb. 16: Approximationsfläche vom Grad  $5 \times 5$

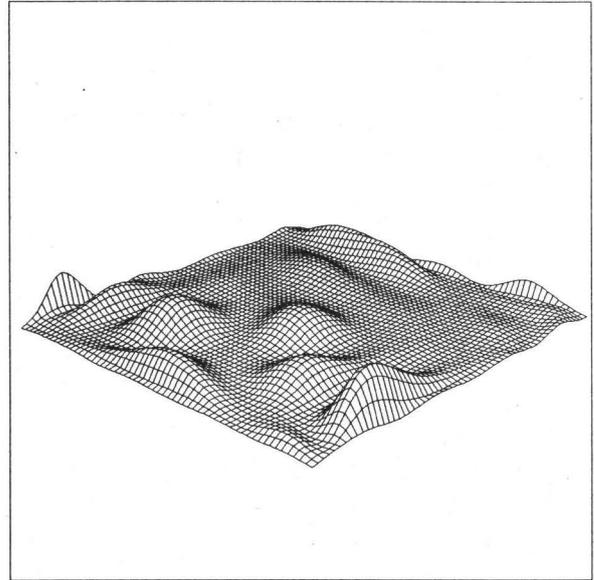


Abb. 17: Fehlerfläche zu Abbildung 16

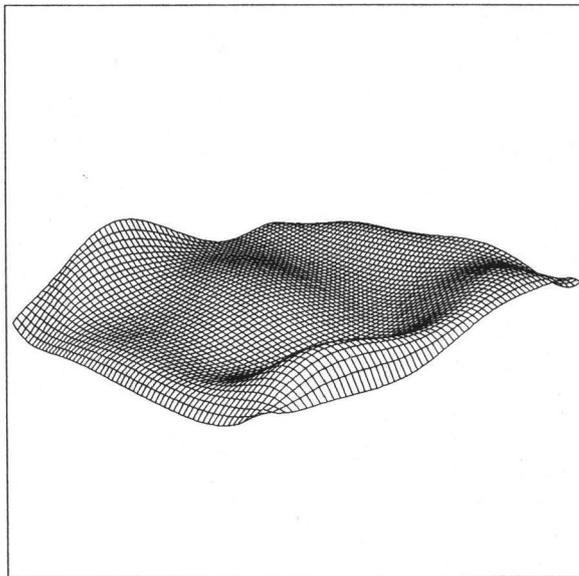


Abb. 18: Approximationsfläche vom Grad  $7 \times 7$

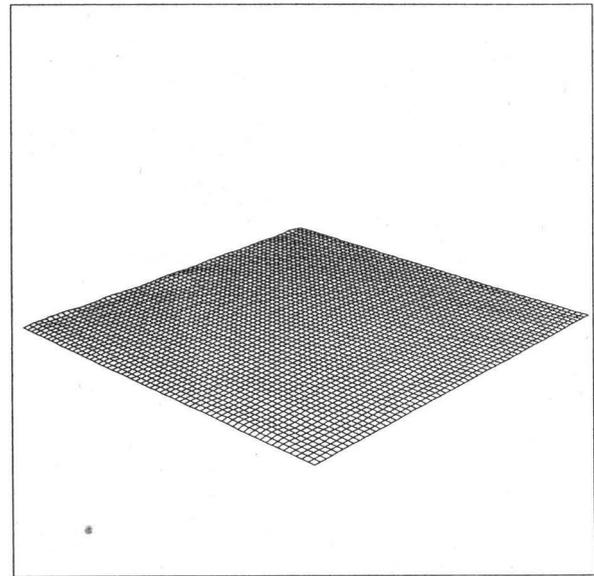


Abb. 19: Fehlerfläche zu Abbildung 18

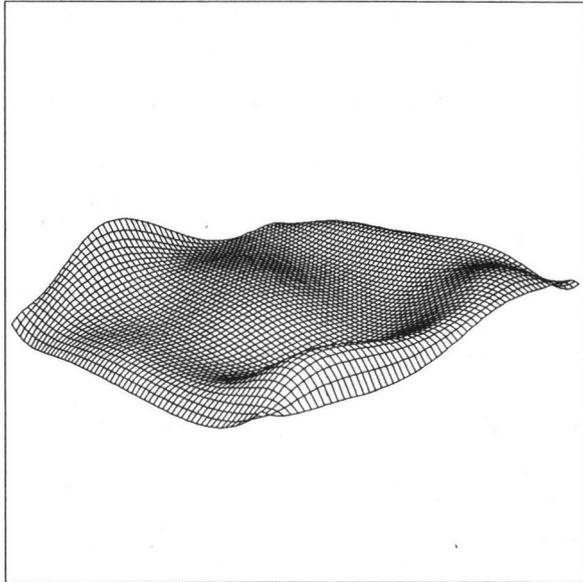


Abb. 20: Approximationsfläche vom Grad  $9 \times 9$

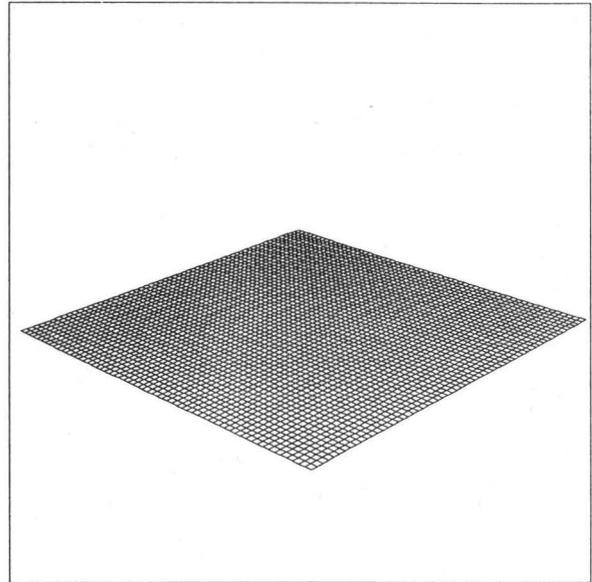


Abb. 21: Fehlerfläche zu Abbildung 20

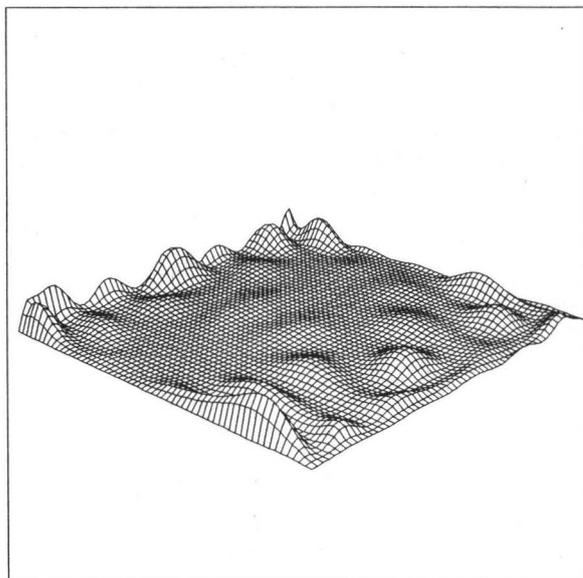


Abb. 22: Fehlerfläche zu Abbildung 18  
(20-fach überhöht)

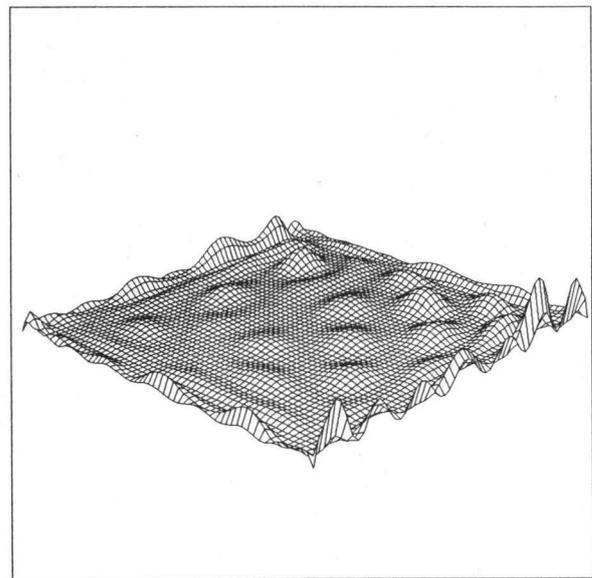


Abb. 23: Fehlerfläche zu Abbildung 20  
(10000-fach überhöht)

## 4.5 Segmentierungen

Analog zu den Bézierkurven wird auch die TPB-Beispielfläche aus Abbildung 13 mit Hilfe des deCasteljau-Algorithmus so lange rekursiv bei den Parameterwerten  $u = v = 0.5$  in 4 Teilpatches unterteilt, bis die maximale Bézierordinate  $d_{ij}$  aller Teilpatches eine vorgegebene Fehlerschranke  $MaxFehler$  unterschreitet.

Auf der linken Seite sind die Approximationen der Originalfläche durch 4 Teilpatches vom Grad  $5 \times 5$  mit  $MaxFehler = 0.7$  sowie durch 16 Teilpatches vom Grad  $3 \times 3$  mit  $MaxFehler = 0.1$  abgebildet. Rechts daneben sieht man die zugehörigen (überhöhten) Fehlerflächen.

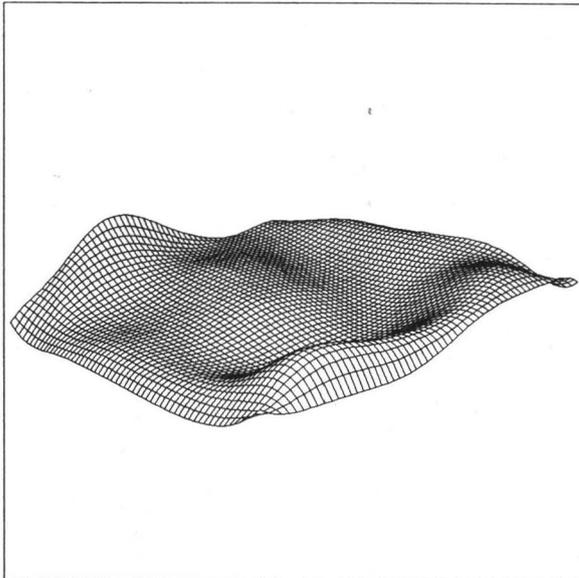


Abb. 24: Approximation durch 4 Teilpatches

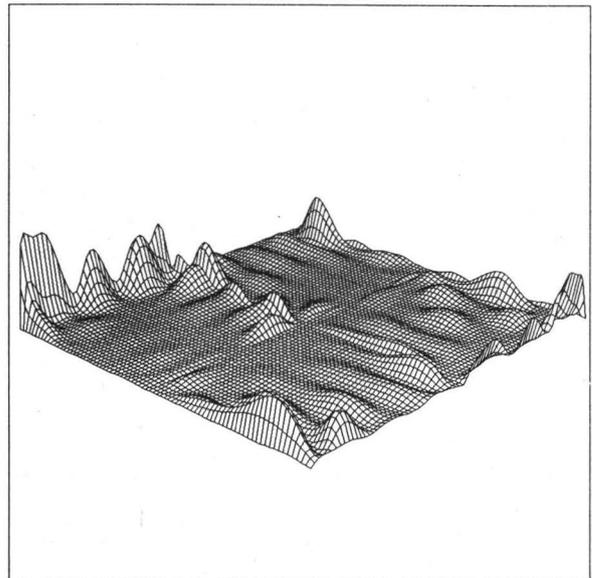


Abb. 25: Fehlerfläche zu Abb. 24  
(100-fach überhöht)

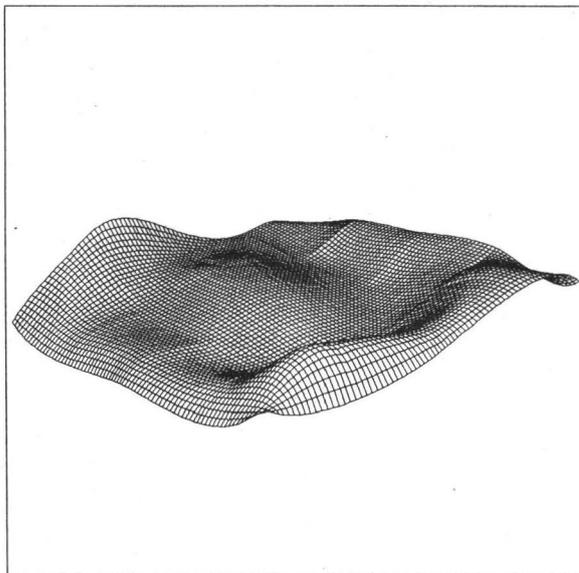


Abb. 26: Approximation durch 16 Teilpatches

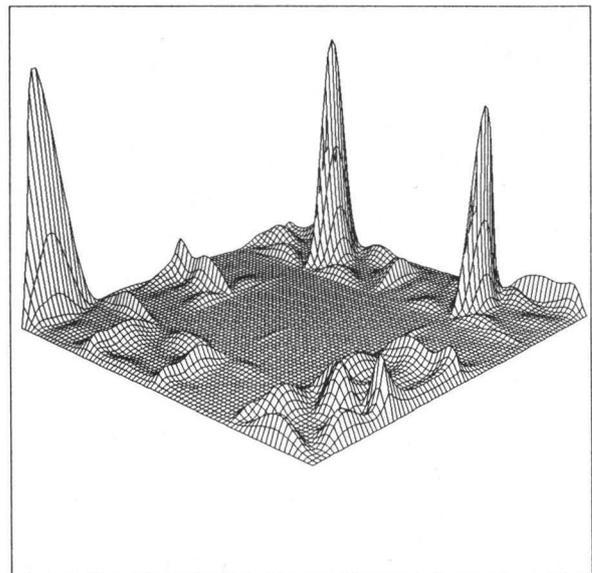


Abb. 27: Fehlerfläche zu Abb. 26  
(20-fach überhöht)

## 5 Approximation von Bézierdreiecken

### 5.1 Ausgangssituation

Gegeben sei das Bézierdreieck

$$X^n(u) = \sum_{|i|=n} a_i B_i^n(u), \quad n > 3, \quad i = (i_1, i_2, i_3)^T, \quad a_i \in \mathbb{R}^3 \quad u = (u, v, w)^T, \quad |u| = 1. \quad (5.1)$$

Gesucht ist ein Bézierdreieck

$$Y^m(u) = \sum_{|j|=m} b_j B_j^m(u), \quad 3 \leq m < n, \quad j = (j_1, j_2, j_3)^T, \quad b_j \in \mathbb{R}^3 \quad u = (u, v, w)^T, \quad |u| = 1, \quad (5.2)$$

welches  $X^n(u)$  möglichst gut approximiert und eine Berührordnung 1. Grades mit  $X^n(u)$  aufweist.

Analog zu den Tensorprodukt-Bézierflächen erfolgt die Approximation eines BDR-Patches wieder in den zwei Schritten:

1. Approximation der drei Randkurven
2. Approximation der inneren Kontrollpunkte.

### 5.2 Bestimmung der Randkurven

Die drei Randkurven werden wie in Abschnitt 3 beschrieben, bestimmt. Da in jeder Ecke des Dreiecks-Patches zwei Randkurven aneinanderstoßen, die jeweils Berührordnung 1. Grades haben, besitzen die Patches  $X^n(u)$  und  $Y^m(u)$ , wie gefordert, in den Eckpunkten jeweils gleiche Tangentialebenen.

### 5.3 Bestimmung der inneren Kontrollpunkte

#### 5.3.1 Aufstellen der Gleichungen

Die noch unbekannt inneren Bézierpunkte  $b_j$  mit  $|j| = m$ ,  $j_1, j_2, j_3 \geq 1$  werden so bestimmt, daß gilt

$$D := \int_{\Delta} \|X^n(u) - Y^m(u)\|^2 du \longrightarrow \min \quad (5.3)$$

$$\iff \int_{\Delta} \left\| \sum_{|i|=n} (a_i - c_i) B_i^n(u) \right\|^2 du \longrightarrow \min \quad (5.4)$$

Dabei sind die  $c_i$  durch  $(n - m)$ -fache Graderhöhung aus den  $b_j$  entstanden (siehe [FAR90]):

$$\tilde{c}_i = \sum_{|j|+|k|=|i|} \tilde{b}_j \binom{n-m}{k} \quad (5.5)$$

$$= \sum_{|j|+|i-j|=|i|} \tilde{b}_j \binom{n-m}{i-j} \quad (5.6)$$

$$\text{d.h. } \tilde{c}_{i_1, i_2, n-i_1-i_2} = \sum_{j_1=0}^m \sum_{j_2=0}^m \tilde{b}_{j_1, j_2, m-j_1-j_2} \binom{n-m}{i-j} \quad (5.7)$$

mit  $|j| = m$ ,  $|k| = n - m$ ,  $|i| = n$ , d.h.  $i = (i_1, i_2, i_3)^T = (j_1 + k_1, j_2 + k_2, j_3 + k_3)^T$ .

Die „überflüssigen“ Terme von (5.7) im Vergleich zu (5.6) werden durch die Definition der verallgemeinerten Binomialkoeffizienten (siehe Formel (2.6)) kompensiert.

Mit  $e_i := a_i - c_i$  und der Multiplikationsregel aus [Schr92] folgt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|\mathbf{i}|=n} e_i B_i^n(\mathbf{u}) \right\|^2 &= \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\nu|=|\lambda|} \langle \tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu \rangle B_\lambda^{2n}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } |\mu| = n, |\nu| = n, |\lambda| = 2n \\ &= \sum_{|\lambda|=2n} d_\lambda B_\lambda^{2n}(\mathbf{u}) \quad (5.8) \\ \text{mit } d_\lambda &:= \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} \langle \tilde{e}_\mu, \tilde{e}_{\lambda-\mu} \rangle \end{aligned}$$

Damit ergibt sich Formel (5.4) zu (siehe [Boe82]):

$$D = \int_{\Delta} \sum_{|\lambda|=2n} d_\lambda B_\lambda^{2n}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \longrightarrow \min \quad (5.9)$$

$$\iff \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sum_{|\lambda|=2n} d_\lambda \longrightarrow \min \quad (5.10)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich zusammen mit (5.6)

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} \\ &\quad \langle \tilde{a}_\mu - \sum_{|j|+|\mu-j|=|\mu|} \binom{n-m}{\mu-j} \tilde{b}_j, \\ &\quad \tilde{a}_{\lambda-\mu} - \sum_{|j|+|\lambda-\mu-j|=|\lambda-\mu|} \binom{n-m}{\lambda-\mu-j} \tilde{b}_j \rangle \quad (5.11) \end{aligned}$$

Um die noch unbekannt inneren Kontrollpunkte zu bestimmen, müssen die Normalgleichungen  $\frac{\partial D}{\partial \mathbf{b}_r} = 0$  mit  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ ,  $r_1 + r_2 + r_3 = m$  und  $r_1, r_2, r_3 \geq 1$  aufgestellt werden.

**Bemerkung:** Bei den Kontrollpunkten der Rankurven ist mindestens einer der drei Indizes gleich 0.

Im folgenden wird nur die Ableitung nach der  $x$ -Koordinate betrachtet; für die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten ist analog zu verfahren.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial b_r^x} &= 0 \\ \iff \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} &\left\{ \binom{n-m}{\mu-r} \sum_{|j|+|\lambda-\mu-j|=|\lambda-\mu|} \binom{n-m}{\lambda-\mu-j} \tilde{b}_j^x + \right. \\ &\left. \binom{n-m}{\lambda-\mu-r} \sum_{|j|+|\mu-j|=|\mu|} \binom{n-m}{\mu-j} \tilde{b}_j^x \right\} \quad (5.12) \\ &= \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} \left\{ \binom{n-m}{\mu-r} \tilde{a}_{\lambda-\mu}^x + \binom{n-m}{\lambda-\mu-r} \tilde{a}_\mu^x \right\} \end{aligned}$$

Die schon in Abschnitt 5.2 bestimmten Randkontrollpunkte werden auf die rechte Seite der Gleichung (5.12) gebracht.

Insgesamt gilt nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} \binom{n-m}{\mu-r} \sum_{j_1=1}^{m-2} \sum_{j_2=1}^{m-2} \sum_{j_3=1}^{m-2} \binom{n-m}{\lambda-\mu-j} \tilde{b}_j^x \\
&= \sum_{|\lambda|=2n} \frac{1}{\binom{2n}{\lambda}} \sum_{|\mu|+|\lambda-\mu|=|\lambda|} \binom{n-m}{\mu-r} \left\{ \tilde{a}_{\lambda-\mu}^x - \sum_{\substack{|\mathbf{j}|=m \\ j_1=0 \vee j_2=0 \vee j_3=0}} \binom{n-m}{\lambda-\mu-j} \tilde{b}_j^x \right\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

### 5.3.2 Bestimmung der unbekanntenen Bézierpunkte

Um die noch unbekanntenen inneren Kontrollpunkte zu bestimmen, muß das folgende LGS dreimal (d.h. je einmal für jede Dimension) gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0g} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{g0} & \dots & c_{gg} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_g \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{A}, \tag{5.14}$$

mit  $g := \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1 = \frac{m(m-3)}{2}$ .

Hierbei gilt (mit  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $|\mathbf{r}| = m$ ,  $r_1 = 1, \dots, m-2$ ,  $r_2 = 1, \dots, m-r_1-1$ ,  
und  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ ,  $|\mathbf{j}| = m$ ,  $j_1 = 1, \dots, m-2$ ,  $j_2 = 1, \dots, m-j_1-1$ ):

$$\begin{aligned}
c_{f(r_1, r_2), f(j_1, j_2)} &:= \binom{m}{\mathbf{j}} \sum_{|\lambda|=2n-2m} \frac{\binom{2n-2m}{\lambda}}{\binom{2n}{\lambda+\mathbf{j}+\mathbf{r}}} \\
l_{f(j_1, j_2)} &:= b_{j_1, j_2, m-j_1-j_2}^{x/y/z} \\
A_{f(r_1, r_2)} &:= \text{rechte Seite von (5.13) (mit jeweils } x/y/z).
\end{aligned}$$

Die Indexfunktion  $f$  ist wie folgt bestimmt:  $f(i, j) := m(i-1) - \frac{1}{2}i(i+1) + j = \frac{1}{2}i(2m-i-1) - m + j$ .

Bemerkung: Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}$  ist für alle Dimensionen gleich.

## 5.4 Beispiele

Die folgenden Approximationsbeispiele zeigen, wie ein gegebenes Bézier-Dreieck (Abbildung 28) vom Grad 10 sukzessive mit dem Grad 3, 5, 7 und 9 approximiert wird. Die Abbildungen auf der linken Seite zeigen dabei die entstandenen Approximationsflächen und auf der rechten Seite die zugehörigen Fehlerflächen nach Formel (5.8). Die Fehlerflächen aus Abbildung 34 und 36 werden zusätzlich 5- bzw. 2000-fach überhöht in Abbildung 37 und 38 dargestellt.

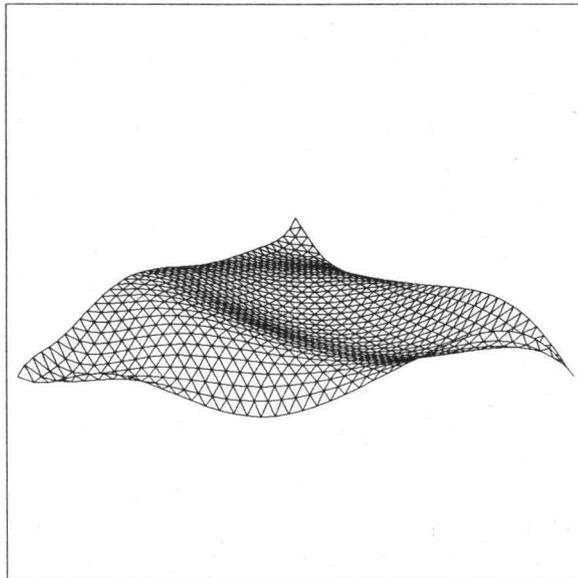


Abb. 28: Originalfläche vom Grad 10

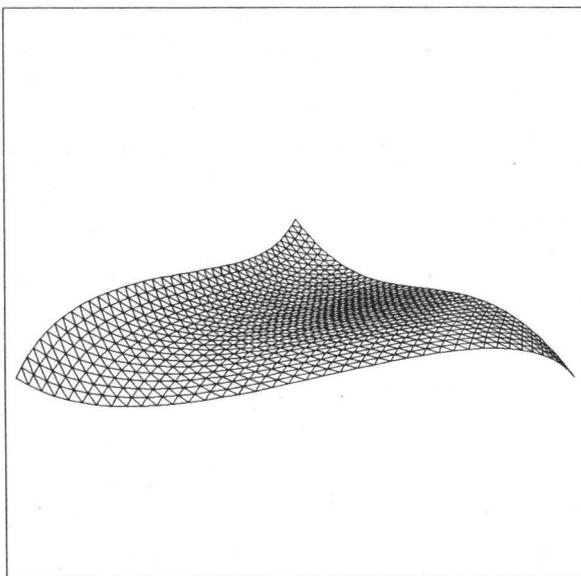


Abb. 29: Approximationsfläche vom Grad 3

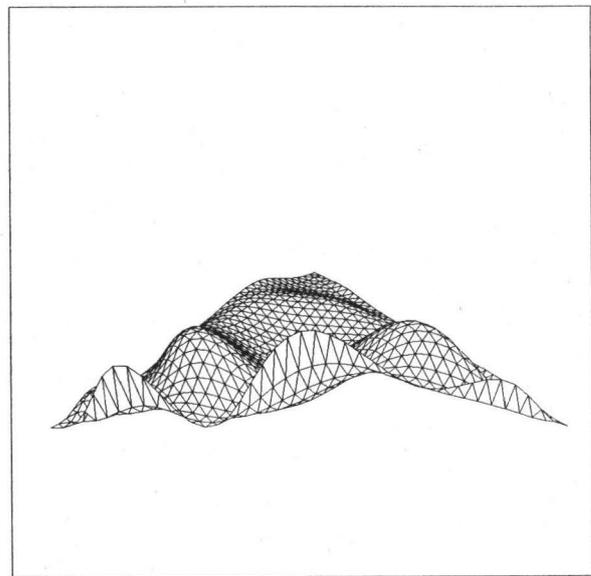


Abb. 30: Fehlerfläche zu Abb. 29  
(0.1-fach überhöht)

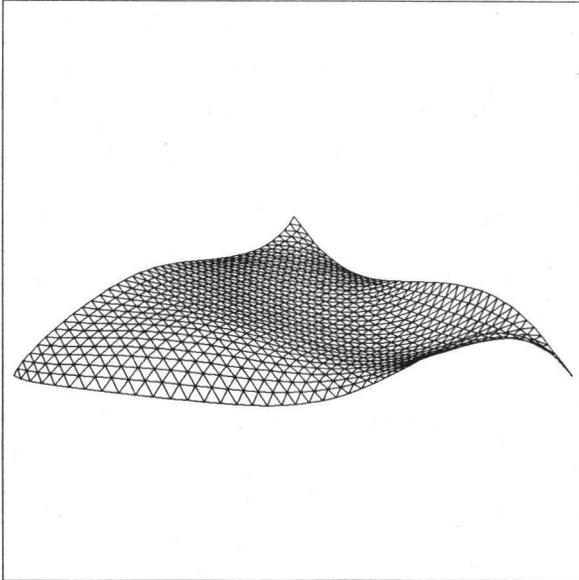


Abb. 31: Approximationsfläche vom Grad 5

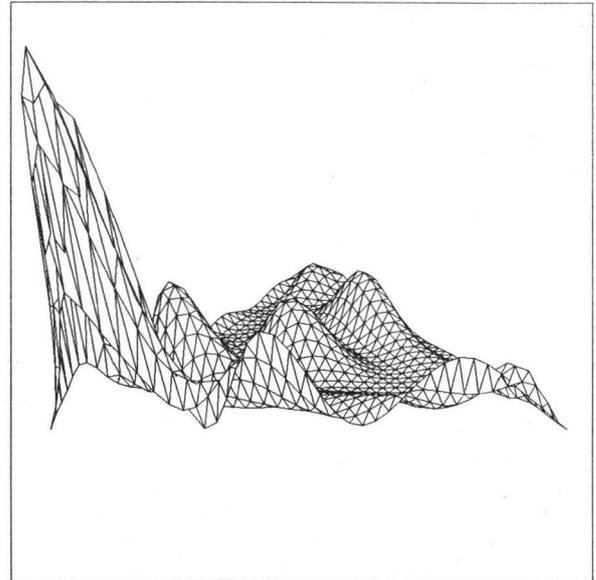


Abb. 32: Fehlerfläche zu Abb. 31

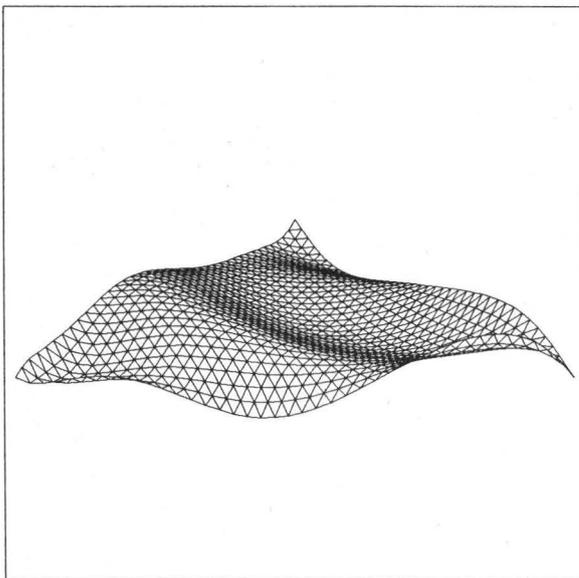


Abb. 33: Approximationsfläche vom Grad 7

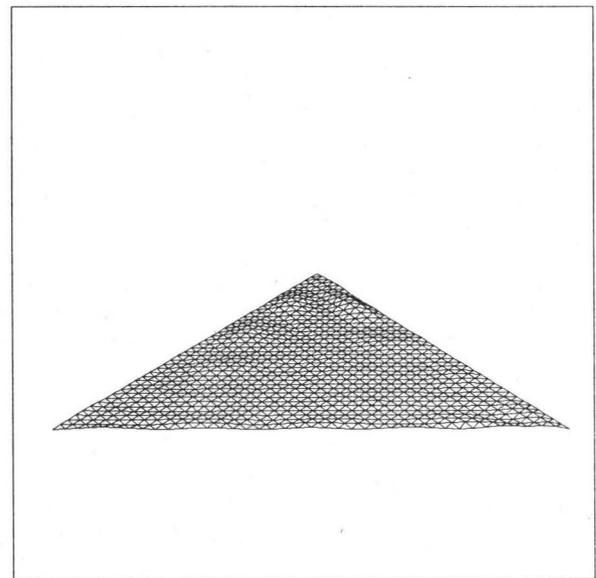


Abb. 34: Fehlerfläche zu Abb. 33

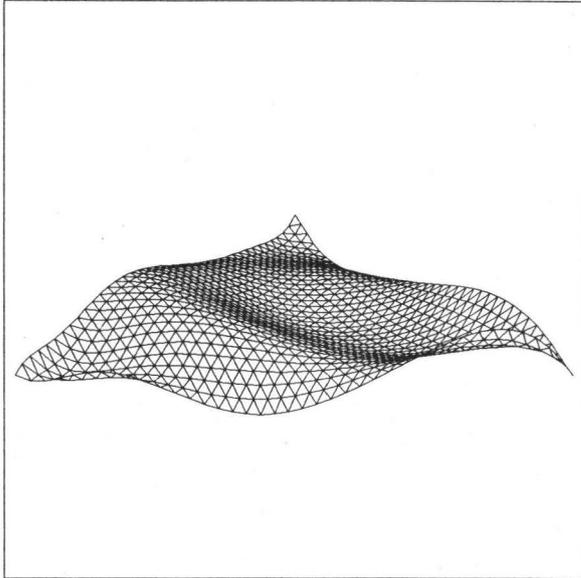


Abb. 35: Approximationsfläche vom Grad 9

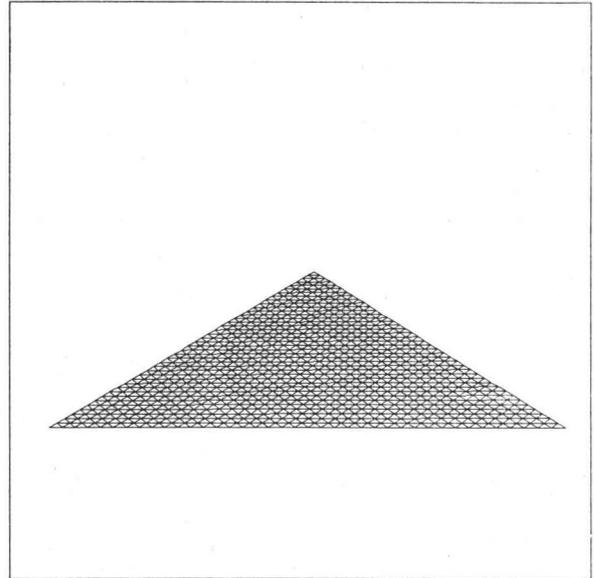


Abb. 36: Fehlerfläche zu Abb. 35

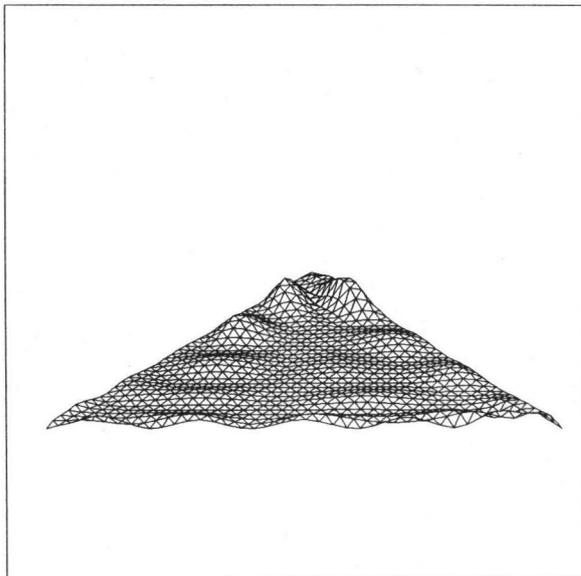


Abb. 37: Fehlerfläche zu Abb. 33  
(5-fach überhöht)

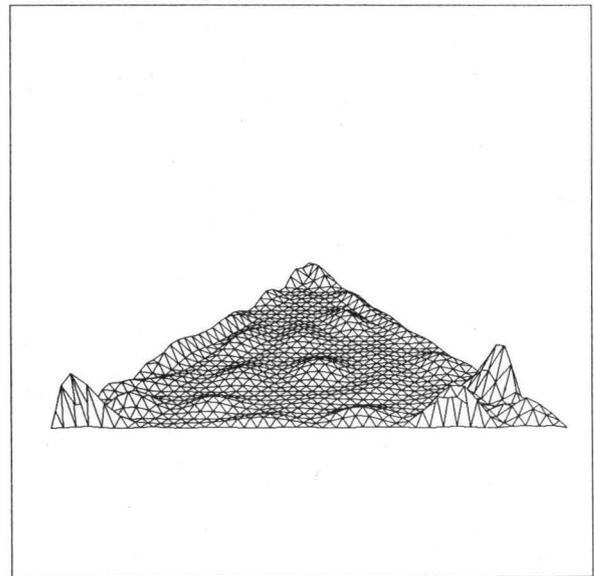


Abb. 38: Fehlerfläche zu Abb. 35  
(2000-fach überhöht)

## 6 Implementierung

Da bei der Berechnung eines Approximationspatches die Anzahl der Multiplikationen und Binomialkoeffizientenberechnungen erheblich mit den Flächengraden ansteigt, wurde bei der Implementierung der vorgestellten Approximationsverfahren folgende Strategie angewandt:

1. Die Binomialkoeffizienten wurden vorberechnet und in einer Tabelle (BKT) abgelegt.
2. Die „max/min“-Schreibweise bei den Laufindizes der Summen wurde verwendet, um
  - (a) möglichst keine überflüssigen Berechnungen zu machen und
  - (b) direkt auf die Einträge der BKT zugreifen zu können, ohne erst die „Existenz“ des Koeffizienten testen zu müssen (siehe Definitionen).
3. Für die Approximation von Kurven bzw. Flächen mit jeweils denselben Graden brauchen im Kurvenfall nur die 5 Zeilen  $\binom{2n}{k}, \binom{n}{k}, \binom{n-m}{k}, \binom{2n-2m}{k}, \binom{m}{k}$ , im BTP-Fall nur die 10 Zeilen  $\binom{2n}{k}, \binom{n}{k}, \binom{2n-2p}{k}, \binom{n-p}{k}, \binom{p}{k}, \binom{2m}{k}, \binom{m}{k}, \binom{2m-2q}{k}, \binom{m-q}{k}, \binom{q}{k}$  und im BDR-Fall nur die 5 Zeilen  $\binom{2n}{k}, \binom{n}{k}, \binom{2n-2m}{k}, \binom{n-m}{k}, \binom{m}{k}$  der BKT berechnet werden.
4. Da die Koeffizientenmatrix  $C$  im Flächenfall punktsymmetrisch ist und jede der insgesamt  $(p-1)^2$  Untermatrizen der Größe  $(q-1) \times (q-1)$  – aus denen sich  $C$  zusammensetzt – ihrerseits auch punktsymmetrisch ist, muß nur rund ein Viertel aller Matrixeinträge berechnet werden.  
Analoges gilt im Kurvenfall: Auch hier ist die untere Restmatrix punktsymmetrisch und die  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen aus denen sie besteht, sind Diagonalmatrizen mit gleichen Werten in der Diagonalen. Insgesamt muß von der unteren Restmatrix also nur jeder 18-te Wert explizit berechnet werden.
5. Die Koeffizientenmatrix  $C$  ist für die Approximation von Bézierflächen von den Kontrollpunkten der Originalfläche unabhängig und kann daher (in Abhängigkeit vom Grad der Original- und Approximationsfläche) einmal berechnet und abgespeichert werden. Im Kurvenfall ist dies aufgrund der Randbedingungen nur für die untere Restmatrix möglich!

## 7 Zusammenfassung

Im vorliegenden Internen Bericht wurden Verfahren zur optimalen Approximation von polynomialen Bézierkurven, Tensorprodukt-Bézierflächen und Bézierdreiecken (unter Beibehaltung der Parametrisierung und der ersten Berührordnung) entwickelt. Zu den gegebenen Bézierpunkten der Originalkurve/-fläche wurden die Bézierpunkte der Approximationskurve/-fläche, sowie die der zugehörigen Fehlerkurve/-fläche bestimmt. Die Bézierordinaten der Fehlerdarstellung erlauben eine Abschätzung des maximalen Approximationsfehlers. Durch eine Segmentierung läßt sich damit eine vorgegebene Approximationstoleranz einhalten.

Die vorgestellten Approximationsverfahren konvergieren mit steigendem Approximationsgrad gegen die zu approximierende Kurve bzw. Fläche (siehe auch Tabellen 1 bis 3 zu den in den Bildern dargestellten Beispielen). Dies liegt daran, daß bei höherem Approximationsgrad mehr Freiheitsgrade (Bézierpunkte) zur Verfügung stehen.

Ist die Originalkurve/-fläche durch eine Graderhöhung entstanden, dann wird die Originalkurve/-fläche schon bei dem „wirklichen“ Grad der Kurve/Fläche exakt reproduziert. Daraus ergibt sich ein Verfahren zum Testen auf den Originalgrad einer Bézierkurve/-fläche.

Die vorgestellten Approximationen sind vom Parametergebiet unabhängig. Es ändert sich lediglich der Vorfaktor des Approximationsfehlers  $D$ .

## Literatur

- [FAR90] G. Farin: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design - A Practical Guide*, 2.ed., Academic Press 1990
- [HOS92] J. Hoschek, D. Lasser: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, 2. Auflage, B. G. Teubner Stuttgart 1992
- [Boe82] W. Böhm, J. Kahmann: *Grundlagen Kurven- und Flächen-orientierter Modellierung*, Technische Universität Braunschweig 1982
- [Faro88] R.T. Farouki, V.T. Rajan: *Algorithms for polynomials in Bernstein form*, CAGD 5 (1988) 1–26
- [Forr72] A.R. Forrest: *Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials*, The Computer Journal, Vol.15, No. 1, 71–79, 1972
- [Hos89] J. Hoschek, F.J. Schneider, P. Wassum: *Optimal approximate conversion of spline surfaces*, CAGD 6 (1989) 293–306
- [Lach88] M.A. Lachance: *Chebyshev economization for parametric surfaces*, CAGD 5 (1988) 195–205
- [Plas83] M. Plass, M. Stone: *Curve-Fitting with Piecewise Parametric Cubics*, ACM Computer Graphics 17 (1983) 229–238
- [Schr92] Th. Schreiber: *Arithmetische Operationen auf Bézierflächen*, Interner Bericht 224/92, Universität Kaiserslautern 1992
- [Wat88] M.A. Watkins, A.J. Worsey: *Degree reduction of Bezier curves*, CAD 20, 389–405, 1988

## A Koeffizientenmatrizen ausgewählter Beispiele

### A.1 Bézierkurven

Im folgenden bezeichnet  $n$  den Originalgrad der Bézierkurve und  $m$  den Approximationsgrad.

- $n = 7, m = 5$

$$C := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{5}{462} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

- $n = 9, m = 5$

$$C := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{19}{1386} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- $n = 9, m = 7$

$$C := \begin{pmatrix} a & e & f & d \\ b & f & g & c \\ c & g & f & b \\ d & f & e & a \end{pmatrix} = \frac{19}{51480} \begin{pmatrix} 72 & 60 & 40 & 21 \\ 36 & 40 & 35 & 24 \\ 24 & 35 & 40 & 36 \\ 21 & 40 & 60 & 72 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Tensorprodukt-Bézierflächen

Im folgenden bezeichnen  $n, m$  den Originalgrad der Bézierfläche in  $u$  – bzw.  $v$ -Richtung und  $p, q$  die zugehörigen Approximationsgrade.

- $n = m = 5, p = q = 3$

$$C := \begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{140}\right)^2 \begin{pmatrix} 16 & 12 & 12 & 9 \\ 12 & 16 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 16 & 12 \\ 9 & 12 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

- $n = m = 7, p = q = 3$

$$C := \begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{28}\right)^2 \begin{pmatrix} 16 & 12 & 12 & 9 \\ 12 & 16 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 16 & 12 \\ 9 & 12 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

### A.3 Bézierdreiecke

Im folgenden bezeichnet  $n$  den Originalgrad des Bézierdreiecks und  $m$  den Approximationsgrad.

- $n = 7, m = 5$

$$C := \begin{pmatrix} a & e & c & e & g & c \\ b & f & b & g & g & d \\ c & e & a & g & e & c \\ b & g & d & f & g & b \\ d & g & b & g & f & b \\ c & g & c & e & e & a \end{pmatrix} = \frac{1}{693} \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 & 15 & 9 & 8 \\ 10 & 12 & 10 & 9 & 9 & 6 \\ 8 & 15 & 20 & 9 & 15 & 8 \\ 10 & 9 & 6 & 12 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 10 & 9 & 12 & 10 \\ 8 & 9 & 8 & 15 & 15 & 20 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

- $n = 9, m = 5$

$$C := \begin{pmatrix} a & e & c & e & g & c \\ b & f & b & g & g & d \\ c & e & a & g & e & c \\ b & g & d & f & g & b \\ d & g & b & g & f & b \\ c & g & c & e & e & a \end{pmatrix} = \frac{19}{8316} \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 & 15 & 9 & 8 \\ 10 & 12 & 10 & 9 & 9 & 6 \\ 8 & 15 & 20 & 9 & 15 & 8 \\ 10 & 9 & 6 & 12 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 10 & 9 & 12 & 10 \\ 8 & 9 & 8 & 15 & 15 & 20 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

## B Datensätze der Beispielkurve/-flächen

- Kontrollpunkte  $b_i = (x, y)^T$  der zu den Bildern gehörenden äquidistant über  $[0, 1]$  parametrisierten Bézierkurve vom Grad  $n=10$  in aufsteigender Reihenfolge:

i	x	y
0	144	648
1	141	182
2	691	175
3	268	406
4	616	787
5	701	418
6	1205	410
7	904	733
8	874	93
9	324	89
10	329	803

- Kontrollpunkte  $(x, y, z)^T$  der zu den Bildern gehörenden äquidistant über  $[0, 1]^2$  parametrisierten Beispiel-Tensorprodukt-Bézierfläche vom Grad  $10 \times 10$ :

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	0	2	1	1	2	2	0	1
1	2	2	2	1	1	4	0	0	1	1	2
2	1	-2	-2	2	-5	2	2	0	5	5	0
3	0	5	1	0	0	1	-6	1	1	1	4
4	2	1	0	1	5	0	0	-2	0	0	0
5	0	-3	8	2	1	2	1	2	-2	2	2
6	4	0	2	0	-2	9	2	0	0	6	0
7	6	1	1	1	0	1	1	-8	1	0	1
8	0	5	-2	0	2	1	-1	1	1	9	2
9	2	2	0	2	3	2	0	4	0	2	1
10	1	0	1	1	1	0	2	0	1	1	2

Erläuterung zur Tabelle: Am Rand stehen jeweils die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten, in der Mitte die zugehörigen  $z$ -Werte.

- Kontrollpunkte  $(x, y, z)^T$  des zu den Bildern gehörenden Beispiel-Bézierdreiecks vom Grad  $n = 10$ :

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10											$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
9										$\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$
8									$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
7								$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$
6							$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
5						$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
4					$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
3				$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
2			$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
1		$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erläuterung zur Tabelle: Am Rand stehen jeweils die Punktindizes  $i$  und  $j$  für die Bézierpunkte  $b_{i,j,n-i-j}$ , in der Mitte die zugehörigen Punktkoordinaten.

## C Approximationsfehler der Beispielkurve/-flächen

Abschließend werden die zu den in Anhang B aufgeführten Datensätzen der Beispielkurve/-flächen gehörenden Approximationsfehler  $D$  in Abhängigkeit vom jeweiligen Approximationsgrad aufgeführt.

$m$	Approximationsfehler $D$
3	162460.192566
4	7956.492515
5	2816.904948
6	212.738993
7	46.235993
8	1.045237
9	0.115417
10	0.000000

Tabelle 1: Gerundeter absoluter Fehler der Approximation der Beispiel-Kurve vom Grad 10 durch Kurven vom Grad  $m$ .

$\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	132725078	80483561	67105748	52099971	50252552	47870955	46901829	45659840
4	89970267	50795077	41600536	35529591	34715054	34233705	33842286	33612874
5	53279281	20892156	14651609	8693798	7816699	7467051	7400476	7365542
6	38201320	11943112	8007416	1602083	948609	643408	623155	622013
7	37742725	11251725	7582184	1120972	445482	144418	128102	127296
8	35306719	10643741	7436839	930822	316462	16986	2853	2505
9	35153962	10521345	7364309	895450	311715	15089	846	479
10	34228292	10319436	7327796	875683	309061	14533	359	0

Tabelle 2: Gerundeter absoluter Fehler  $[-10^9]$  der Approximation des Beispiel-Patches vom Grad  $10 \times 10$  durch Patches vom Grad  $p \times q$ .

$m$	Approximationsfehler $D$
3	0.368360418644
4	0.117624389770
5	0.045893751244
6	0.011028786612
7	0.001193823134
8	0.000091954681
9	0.000003548138
10	0.000000000000

Tabelle 3: Gerundeter absoluter Fehler der Approximation des Beispiel-Dreiecks vom Grad 10 durch Dreiecke vom Grad  $m$ .