Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Definition 1.1

Eine **Option** ist ein Vertrag, der dem Käufer das *Recht* gibt, ein Objekt am Ende oder während eines festen Zeitraumes (*Laufzeit*) zu einem festgelegten Betrag (*Ausübungspreis*) zu kaufen (*Kaufoption, Call*) oder zu verkaufen (*Verkaufsoption, Put*). Ist die Option erst am Ende der Laufzeit ausübbar, sprechen wir von einer *europäischen Option*, bei jederzeitiger Ausübbarkeit von einer *amerikanischen Option.*

Bemerkung 1.2

i) Im Gegensatz zu Optionen (*contingent claim, limited liability*) verpflichten *Terminkontrakte* zum Kauf oder Verkauf.

ii) Neben den Standardoptionen (*plain vanilla option*) und deren Kombinationen werden zum Teil wesentlich komplexere Optionen am Markt gehandelt. So zum Beispiel (Kurs-)wegabhängige Optionen wie

- Asiatische Optionen (average rate option): der Ausübungskurs entsteht durch Mittelung über die Kurse des zugrundeliegenden Objekts eines bestimmten Zeitraumes
- Lookback Optionen: der Ausübungskurs ist das Minimum bzw. Maximum der Kurse des zugrundeliegenden Objekts über einen bestimmten Zeitraum
- Knockout Optionen: diese liefern eine konstante Zahlung (oder verfallen) beim Über- oder Unterschreiten bestimmter Schranken

oder Optionen auf Optionen (*compound option*), bei denen das zugrundeliegende Objekt selbst eine Option ist.
In diesem Zusammenhang sollte beachtet werden, daß viele Finanzgeschäfte einen Optionsanteil besitzen (z.B. Wandelanleihen oder Bezugsrechte bei Aktien).

iii) Die Angabe der Optionswerte bezieht sich im folgenden immer auf den Bezug eines Objektes, so daß in der Praxis bei der Optionspreisberechnung noch eine Multiplikation mit einem geeigneten Faktor erfolgen muß.

iv) In den nachfolgenden Beweisen werden der Einfachheit halber meistens Aktienoptionen, bei denen das zugrundeliegende Objekt (*underlying*) eine Aktie ist, betrachtet.

Variablen der Optionspreisbewertung und Notationen

Zeit: t = aktueller Zeitpunkt (oft auch $t = 0$), t^* = Verfallszeitpunkt der Option oder des Termingeschäftes. Die Laufzeit des betrachteten Geschäftes ist dann $T = t^* - t$.

Preis des optierbaren Objektes: S bzw. $S_t, S(t), (S, t)$

Ausübungskurs bzw. Terminkurs: K

Volatilität des optierbaren Objektes: σ

Kosten bzw. Erträge des optierbaren Objektes:
d Dividendenrendite, ℓ Lagerhaltungskosten, b Bestandshaltekosten (jeweils stetig in %, bezogen auf den Kurs des Objektes), D diskrete Dividende (bzw. Kosten)

stetiger Zinssatz: i

Optionswerte: C und C_{am} bzw. P und P_{am} bezeichnet die europäischen und amerikanischen Call- bzw. Putwerte

Bemerkung 1.3

i) Die Bestandshaltekosten ergeben sich als Summe der Opportunitätskosten vergrößert (bzw. verkleinert) um eventuelle Kosten (bzw. Erträge). So sind die stetigen Bestandshaltekosten b für physische Objekte mit stetigen Lagerhaltungskosten ℓ gleich $i + \ell$ und gleich $i - d$ für Aktien mit stetiger Dividendenrendite d.

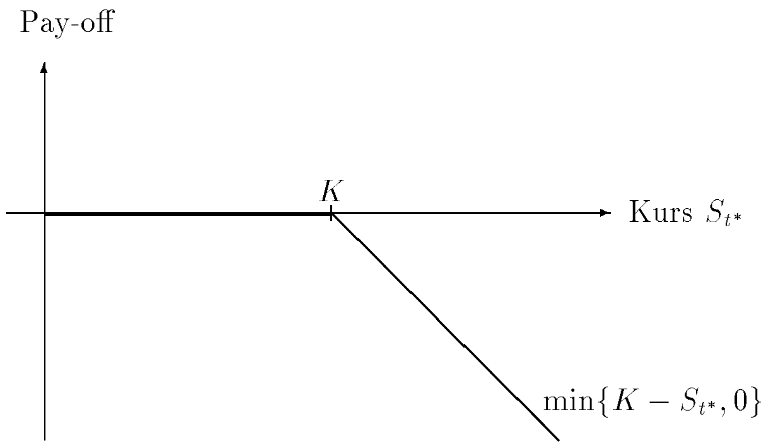
ii) Im folgenden werden wir, wenn nicht anders erwähnt, von konstanten Zinsen ausgehen. Bei nichtkonstanten Zinsen muß als Abzinsungsfaktor der Preis $B_t = B(t, t^*)$ einer Nullkouponanleihe (Zerobond) zum Zeitpunkt t mit dem Nominalwert 1, fällig zum Zeitpunkt t^* verwendet werden. Im Fall konstanter Zinsen gilt $B_t = B(t, t^*) = e^{-i(t^*-t)}$.

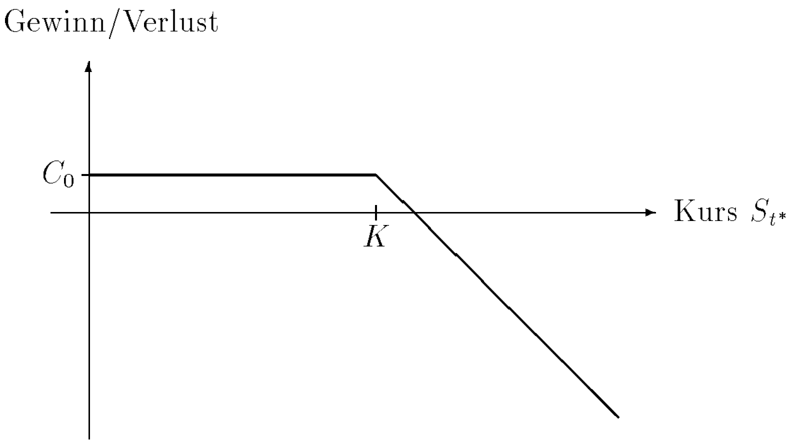
Um sich mit Optionen vertraut zu machen, ist es am einfachsten, zunächst nur den *Pay-off*, d.h. den Wert der Option am Verfallstag t^*, zu betrachten. So ist bei einem Call der Pay-off gleich $\max\{S_{t^*} - K, 0\}$ beim Put ist der Pay-off gleich $\max\{K - S_{t^*}, 0\}$. Häufig wird stattdessen auch mit der sog. *Ertrags-* oder *Gewinnfunktion* gearbeitet, wo man den Pay-off noch mit der gezahlten oder erhaltenen Optionsprämie verrechnet. Dies ist finanzmathematisch jedoch unkorrekt, weil hierbei Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen, ohne Berücksichtigung der Zinswirkung addiert werden.

Beispiel 1.4

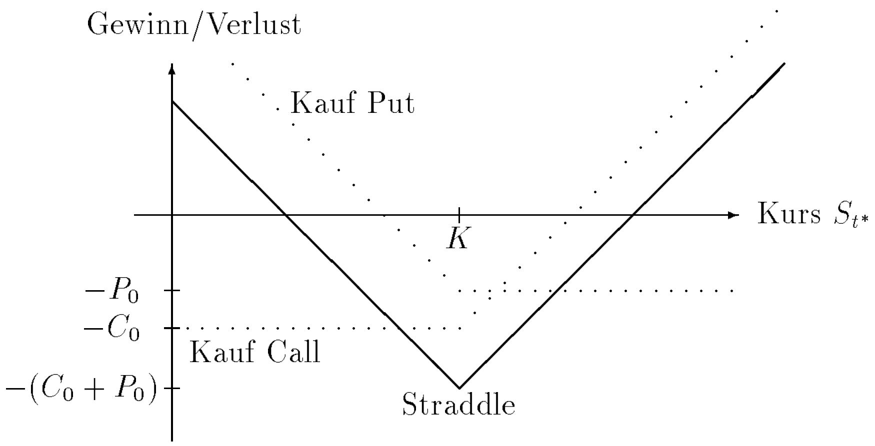
i) Verkauf einer Kaufoption (*Call short*), Ausübungskurs: K, Call-Prämie: C_0

Der Pay-off bzw. die Gewinnfunktion hat dann folgendes Aussehen:





ii) Kauf eines *Straddle*: Kauf Call und Put mit Ausübungskurs K, Call- bzw. Putprämie C_0 bzw. P_0

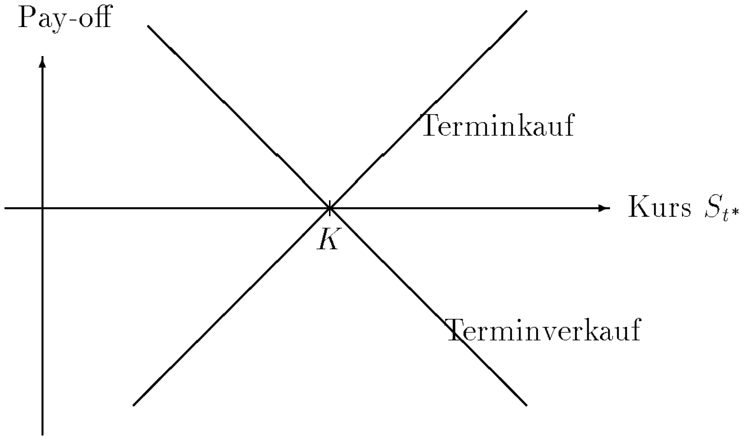


Definition 1.5
Ein **Terminkontrakt** ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, bei der sich der Käufer bzw. der Verkäufer des Kontraktes heute *verpflichtet* zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt ein Objekt zu einem heute vereinbarten Preis (*Terminkurs*) zu kaufen (*Terminkauf*) bzw. zu verkaufen (*Terminverkauf*).

Bemerkung 1.6
i) Der **Forward Price** F ist der Terminkurs, für den der Wert des Terminkontraktes (siehe Satz 2.1) gleich Null ist. Zu Beginn eines Terminkontraktes wird $K = F$ gewählt, so daß am Anfang keine Zahlungen erforderlich sind. Erst im Laufe der Zeit werden Terminkurs K und Forward Price F voneinander abweichen.

ii) **Futures** sind Terminkontrakte mit täglichem Verlustausgleich (mark-to-market).

iii) Der Pay-off eines Terminkaufs ist $S_{t^*} - K$, der Pay-off eines Terminverkaufs ist $K - S_{t^*}$.


Pay-off
Terminkauf
Kurs S_{t*}
K
Terminverkauf

2 Arbitragebeziehungen

In diesem Kapitel wollen wir mathematische Relationen von Optionen und Terminkontrakten herleiten, die sich direkt aus den Eigenschaften dieser Finanzgeschäfte ergeben. Sollten diese Relationen nicht erfüllt sein, ist Arbitrage (risikoloser Gewinn) möglich. Für dieses und die nächsten Kapitel treffen wir folgende **Annahme**:

> Der Finanzmarkt funktioniert perfekt, d.h. Soll- und Habenzinsen sind gleich; es gibt keine Transaktionskosten, keine Steuern, keine Einschränkungen beim short-selling und keine Arbitrage. Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.

Die im folgenden abgeleiteten Ergebnisse sind ohne weitere Annahmen gültig, d.h. spätere Optionspreismodelle müssen diesen Anforderungen genügen, andernfalls sind sie fehlerhaft.

Satz 2.1
Sei K der Terminkurs eines zum Zeitpunkt t^* fälligen Terminkaufs auf ein Objekt mit dem Kurs S_t. Bezeichnet $V(S_t, t^*, K)$ den Wert des Terminkaufs und seien die Zinsen während der Laufzeit konstant i.

a) Bezeichnet D den Barwert (bezogen auf den Zeitpunkt t) aller während der Laufzeit $T = t^* - t$ anfallenden Erträge (bzw. Kosten),so gilt

   (1) $\quad V(S_t, t^*, K) = S_t - D - Ke^{-iT}$

   Der Forward Price ist in diesem Fall gleich $(S_t - D)e^{iT}$.

b) Werden stetige Bestandshaltekosten b auf das Objekt vorausgesetzt so gilt

   (2) $\quad V(S_t, t^*, K) = S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT}$

   Der Forward Price ist in diesem Fall gleich $S_t e^{bT}$.

Beweis:
Wir wollen der Einfachheit voraussetzen, daß das zugrundeliegende Objekt eine Aktie mit diskreten Dividenden D bzw. stetigem Dividendenertrag d ist.

a) Wir betrachten zum Zeitpunkt t zwei Portfolios A und B, die folgendes Aussehen haben

Portfolio A**:** Terminkauf der Aktie zum Terminkurs K, fällig zum Zeitpunkt t^* .
Kauf eines Zerobonds mit Nominalwert K, fällig zum Zeitpunkt t^* .

Portfolio B**:** Kauf einer Aktie und leihen eines Geldbetrages in Höhe D zum Zinssatz i (= Verkauf eines Zerobonds).

Da mit den Dividendenerträgen der Aktie in Portfolio B die Anleihe zurückgezahlt werden kann, enthalten beide Portfolios zum Zeitpunkt t^* genau eine Aktie und haben damit zum Zeitpunkt t^* den gleichen Wert. Daher gilt zum Zeitpunkt t ebenfalls die Gleichheit, also

(3) $\quad V(S_t, t^*, K) + Ke^{-iT} = S_t - D$.

b) Besitzt die Aktie eine stetige Dividendenrendite d kann ähnlich argumentiert werden. Wieder betrachten wir zwei Portfolios A und B, zum Zeitpunkt t wobei A wie im Beweis von Teil a) gewählt wird. Portfolio B hat folgendes Aussehen

Portfolio B**:** Kauf von $e^{(b-i)T} = e^{-dT}$ Aktien .

Wird der Dividendenertrag in Portfolio B direkt wieder in die Aktie reinvestiert besteht Portfolio B zum Zeitpunkt t^* aus genau einer Aktie und die gleiche Argumentation wie in Teil a) liefert die Wertgleichheit der beiden Portfolios zum Zeitpunkt t, also

(4) $\quad V(S_t, t^*, K) + Ke^{-iT} = e^{-dT} S_t$.

■

Beispiel 2.2

i) Betrachte den Terminkauf einer 5-Jahres Anleihe, die zum Kurs 900 DM gehandelt wird. Der Terminkurs betrage 910 DM, die Laufzeit des Terminkontraktes ein Jahr. Kouponzahlungen in Höhe von 60 DM fallen in 6 bzw. 12 Monaten (letztere kurz vor Fälligkeit des Kontraktes) an. Der stetige Jahreszins für 6 bzw. 12 Monate betrage 9% bzw. 10%. In diesem Fall ist

(5) $\quad S_t = 900\ ,\ K = 910\ ,\ i = 0.10\ ,\ T = 1\ ,\ D = 60e^{-0.09\cdot\frac{1}{2}} + 60e^{-0.10} = 111.65$

Der Wert des Terminkaufs ist dann[1]

(6) $\quad V(S_t, t^*, K) = 900 - 111.65 - 910e^{-0.10} = -35.05.$

Der Wert der entsprechenden short Position ist dann +35.05. Der Forward Price F beträgt $F = (S_t - D)e^{iT} = 871,26$.

ii) Betrachte einen Dollar Terminkauf. In diesem Fall liegt ein stetiger Dividendenertrag d in Höhe des amerikanischen Zinssatzes vor. Bezeichnet S den Dollarkurs, i den inländischen Zinssatz so ist der Forward Price dann gleich

(7) $\quad F = S_t e^{(i-d)T}.$

Für $i > d$ ergibt sich ein Report $S < F$ (Zinsaufschlag), für $i < d$ ergibt sich ein Deport $S > F$ (Zinsabschlag).

Satz 2.3

Ist der Zinssatz während der Laufzeit konstant, so sind Future und Forward Price gleich.

Beweis:

Nehmen wir an, daß der Future Kontrakt eine Laufzeit von n Tagen besitzt. F bezeichne den Forward Price am Ende des 0-ten Tages (Kontraktbeginn), F_i sei der Future Price am Ende des $i-$ten Tages[2], ρ sei der Tageszinssatz. Wir konstruieren zwei Portfolios.

Portfolio A: Kauf von $e^{n\rho}$ Terminkontrakten

Kauf eines Zerobonds mit Nominalwert $Fe^{n\rho}$ und Fälligkeit in n Tagen.

Portfolio B: Kauf von Future Kontrakten derart, daß am Ende des $i-$ten Tages genau $e^{(i+1)\rho}$ Future Kontrakte im Portfolio vorhanden sind $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

Kauf eines Zerobonds mit Nominalwert $e^{n\rho}F_0$ und Fälligkeit in n Tagen

Am Ende des $n-$ten Tages (= Verfallszeitpunkt t^*) besitzt Portfolio A offenbar den Wert $e^{n\rho}S_{t^*}$. Wir zeigen nun, daß dies auch für Portfolio B gilt.

[1] Das Beispiel ist so konstruiert, daß keine Stückzinsen beim Kauf der Anleihe anfallen. Fallen Stückzinsen an, ist der Wert des Terminaufs, um die entsprechende Größe zu verringern, weil K um die Stückzinsen erhöht wird.

[2] Erfolgt das Settlement nicht täglich, sondern in anderen Perioden, läuft der Beweis entsprechend.

Der Wert von Portfolio B ergibt sich, indem wir den täglichen Gewinn (bzw. Verlust) bis zum $n-$ten Tag aufzinsen. Der Gewinn (bzw. Verlust) der $e^{j\rho}$ Futures am Tag j ist $(F_j - F_{j-1})e^{j\rho}$, aufgezinst also

$$(8) \quad (F_j - F_{j-1})e^{j\rho} \cdot e^{(n-j)\rho} = (F_j - F_{j-1})e^{n\rho}.$$

Der Gesamtgewinn(verlust) der Futures am Ende von Tag n ist daher

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{n}(F_j - F_{j-1})e^{n\rho} = (F_n - F_0)e^{n\rho}.$$

Zusammen mit der Anleiheposition hat daher Portfolio B ebenfalls den Wert $e^{n\rho}S_{t^*}$, weil $F_n = S_{t^*}$ gilt. Da die Futures und Terminkontrakte zu Beginn den Wert 0 haben, liefert die Wertgleichheit der beiden Portfolios $Fe^{n\rho} = F_0e^{n\rho}$ und damit $F = F_0$.

■

Wir wollen nun mit ähnlichen Methoden Aussagen für Optionen herleiten. Die elementarsten dieser Aussagen geben wir in der folgenden Bemerkung ohne Beweis an.

Bemerkung 2.4
Für Optionen gelten folgende elementare Relationen

(1) Optionspreise sind nicht-negativ, da eine Ausübung nur stattfindet, wenn es im Interesse des Optionshalters liegt.

(2) Zum Verfallszeitpunkt t^* besitzen amerikanische und europäische Optionen den gleichen Wert.

(3) Eine amerikanische Option muß mindestens zu ihrem inneren Wert gehandelt werden. Diese Relation gilt für europäische Optionen im allgemeinen nicht[3].

(4) Bezeichnet O_1, O_2 den Wert zweier amerikanischer Optionen, die sich nur in den Laufzeiten unterscheiden (Verfallszeitpunkte $t_1^* \leq t_2^*$), so gilt $O_1 \leq O_2$. Dies folgt aus der Ungleichung

$$(10) \quad O_2(S, t_1^*) \geq \text{ Innerer Wert } = O_1(S, t_1^*)$$

Für europäische Optionen ist diese Aussage im allgemeinen nicht erfüllt.

[3]Grund hierfür ist, daß eine europäische Option nur über ein Termingeschäft zum heutigen Zeitpunkt ausgeübt werden kann. Der hierbei auftretende Abzinsungsfaktor kann den Wert unter den inneren Wert der Option drücken.

(5) Eine amerikanische Option hat mindestens den gleichen Wert wie die ansonsten identische europäische Option.

(6) Calls sind als Funktion des Ausübungskurses monoton fallend, Puts sind als Funktion des Ausübungskurses monoton wachsend. Dies gilt für amerikanische und europäische Optionen.

Satz 2.5 (Put-Call-Parität für europäische Optionen)
Für einen europäischen Call und einen europäischen Put mit gleichem Verfallszeitpunkt t^*, gleichem Ausübungskurs K auf das gleiche Objekt gelten folgende Aussagen

a) Fallen während der Laufzeit $T = t^* - t$ der Optionen Erträge bzw. Kosten mit dem Barwert D an, so ist

(11) $C(S_t, t^*, K) = P(S_t, t^*, K) + S_t - Ke^{-iT} - D$

b) Fallen während der Laufzeit $T = t^* - t$ der Optionen stetige Bestandshaltekosten b auf das Objekt an, so ist

(12) $C(S_t, t^*, K) = P(S_t, t^*, K) + S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT}$

Beweis:
O.B.d.A. kann angenommen werden, daß das Objekt eine Aktie ist.

a) Wir betrachten folgendes Portfolio zum Zeipunkt t:

i) Kaufe den Put

ii) Verkaufe den Call

iii) Verkaufe Anleihen zum Nominalwert K, fällig zum Zeitpunkt t^*

iv) Kaufe eine Aktie

v) Verkaufe Anleihen zum (aktuellen) Wert D

Beachtet man, daß die Rückzahlung der Anleihen in Position v) durch die Dividendenerträge aus dem Kauf der Aktie abgedeckt werden, gilt für den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t^*:

	Wert zum Zeitpunkt t^*	
Position	$K < S_{t^*}$	$K \geq S_{t^*}$
i)	0	$K - S_{t^*}$
ii)	$-(S_{t^*} - K)$	0
iii)	$-K$	$-K$
iv)	S_{t^*}	S_{t^*}
v)	–	–
Summe	0	0

Um Arbitragemöglichkeiten zu verhindern, muß daher der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t ebenfalls gleich Null sein, d.h. es gilt

(13) $P(S_t, t^*, K) - C(S_t, t^*, K) + S_t - D - Ke^{-iT} = 0$

b) Im Fall einer stetigen Dividendenrendite d betrachten wir das Portfolio aus Teil a) jedoch ohne Position v). Stattdessen werden in Position iv) e^{-dT} Aktien gekauft, deren Dividenden direkt wieder in die gleiche Aktie reinvestiert werden[4]. Hierdurch enthält das Portfolio zum Zeitpunkt t^* genau eine Aktie und man kann wie in Teil a) schließen, daß der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t gleich Null ist.

■

Bemerkung 2.6

Man beachte, daß der Beweis des letzten Satzes nur für europäische Optionen funktioniert. Liegen amerikanische Optionen vor, muß eine vorzeitige Liquidation des Portfolios erfolgen, wenn der short gehaltene Call vorzeitig ausgeübt wird.

Satz 2.7

Der Preis einer Option (amerikanisch oder europäisch) ist als Funktion des Ausübungskurses konvex.

Beweis:

Es genügt Calls zu betrachten. Für Puts läuft der Beweis analog.
Für $\lambda \in [0, 1]$ und $K_1 < K_2$ betrachten wir folgendes Portfolio zum Zeitpunkt t:

[4] Bei negativem d werden die auftretenden Kosten durch den Verkauf des Objektes finanziert.

i) Kaufe λ Calls mit Ausübungskurs K_1

ii) Kaufe $(1-\lambda)$ Calls mit Ausübungskurs K_2

iii) Verkaufe 1 Call mit Ausübungskurs $K := \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$

Liquidiert man das Portfolio zu einem beliebigen Zeitpunkt t^*, so ergibt sich für den Wert des Portfolios:

	Wert zum Zeitpunkt t^*			
Position	$S_{t^*} \leq K_1$	$K_1 < S_{t^*} \leq K$	$K < S_{t^*} \leq K_2$	$K_2 < S_{t^*}$
i)	0	$\lambda(S_{t^*} - K_1)$	$\lambda(S_{t^*} - K_1)$	$\lambda(S_{t^*} - K_1)$
ii)	0	0	0	$(1-\lambda)(S_{t^*} - K_2)$
iii)	0	0	$-(S_{t^*} - K)$	$-(S_{t^*} - K)$
Summe	0	$\lambda(S_{t^*} - K_1)$	$(1-\lambda)(K_2 - S_{t^*})$	0

Da $\lambda(S_{t^*} - K_1) \geq 0$ und $(1-\lambda)(K_2 - S_{t^*})) \geq 0$ gilt, ist der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t^* und damit auch zum Zeitpunkt t größer gleich Null. Es gilt also

(14) $\lambda C(S_t, K_1) + (1-\lambda)C(S_t, K_2) - C(S_t, \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2) \geq 0$

■

Beispiel 2.8

Wir betrachten drei Kaufoptionen auf die SCHERZBANK A.G. mit gleicher Laufzeit und den Ausübungskursen $K_1 = 190$, $K = 200$, $K_2 = 220$. Die Optionspreise seien

Ausübungskurs	Optionspreis
$K_1 = 190$	30.6 DM
$K \ = 200$	26.0 DM
$K_2 = 220$	14.4 DM

Nach dem letzten Satz muß gelten:

(15) $\frac{2}{3}C(S_t, K_1) + \frac{1}{3}C(S_t, K_2) \geq C(S_t, \frac{2}{3}K_1 + \frac{1}{3}K_2)$

Diese Bedingung ist offensichtlich verletzt und könnte durch folgendes Arbitrageportfolio genützt werden:

i) Kaufe $\frac{2}{3}$ Calls mit Ausübungskurs K_1

ii) Kaufe $\frac{1}{3}$ Calls mit Ausübungskurs K_2

iii) Verkaufe 1 Call mit Ausübungskurs $K := \frac{2}{3}K_1 + \frac{1}{3}K_2$

Zum jetzigen Zeitpunkt liefert dieses Portfolio den Cashflow +0.80 DM. Zum Verfallszeitpunkt t^* der Optionen liefert das Portfolio folgenden Wert:

	Wert zum Zeitpunkt t^*			
Position	$S_{t^*} \leq 190$	$190 < S_{t^*} \leq 200$	$200 < S_{t^*} \leq 220$	$220 < S_{t^*}$
i)	0	$\frac{2}{3}(S_{t^*} - 190)$	$\frac{2}{3}(S_{t^*} - 190)$	$\frac{2}{3}(S_{t^*} - 190)$
ii)	0	0	0	$\frac{1}{3}(S_{t^*} - 220)$
iii)	0	0	$-(S_{t^*} - 200)$	$-(S_{t^*} - 200)$
Summe	0	$\frac{2}{3}(S_{t^*} - 190)$	$\frac{1}{3}(220 - S_{t^*})$	0

Das Portfolio liefert für Aktienkurse S_{t^*} zwischen 190 und 220 zusätzlich noch einen positiven Cashflow von maximal $\dfrac{20}{3}$ DM.

Satz 2.9
Für zwei europäische Calls (bzw. Puts) mit gleicher Laufzeit, gleichem Verfallsdatum t^* und den Ausübungskursen $K_2 > K_1$ gilt:

$$(16) \quad 0 \leq C(S_t, t^*, K_1) - C(S_t, t^*, K_2) \leq e^{-iT}(K_2 - K_1)$$

bzw.

$$(17) \quad 0 \leq P(S_t, t^*, K_2) - P(S_t, t^*, K_1) \leq e^{-iT}(K_2 - K_1)$$

Sind die Call- bzw. Putwerte als Funktion des Ausübungskurses differenzierbar, erhält man speziell

$$(18) \quad -1 \leq -e^{-iT} \leq \frac{\partial C}{\partial K} \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \frac{\partial P}{\partial K} \leq e^{-iT} \leq 1$$

Beweis:
Es genügt, den Beweis für Calls zu führen. Hierzu betrachten wir folgendes Arbitrageportfolio zum Zeitpunkt t:

i) Kaufe einen Call mit Ausübungskurs K_2

ii) Verkaufe einen Call mit Ausübungskurs K_1

iii) Kaufe Anleihen im Nominalwert $(K_2 - K_1)$ fällig zum Zeitpunkt t^*.

Zum Zeitpunkt t^* gilt für den Wert des Portfolios:

	Wert zum Zeitpunkt t^*		
Position	$S_{t^*} \leq K_1$	$K < S_{t^*} < K_2$	$K_2 \leq S_{t^*}$
i)	0	0	$S_{t^*} - K_2$
ii)	0	$-(S_{t^*} - K_1)$	$-(S_{t^*} - K_1)$
iii)	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$
Summe	$K_2 - K_1$	$K_2 - S_{t^*}$	0

Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t^* ist offensichtlich nicht-negativ. Folglich muß dies auch für den Wert zum Zeitpunkt t gelten.

■

3 Optionsmanagement

Als ein Beispiel für die ein aktives Management mit Optionen soll nun die Portefeuille-Versicherung (Portfolio Insurance) betrachtet werden.
Als Portfolio Insurance bezeichnet man den Abschluß von Geschäften, welche die Risikostruktur eines Portfolios so verändern, daß zu einem im voraus bestimmten Termin

- die positiven Erträge durchgehend um einen kleinen Betrag gemindert werden (was als Zahlung einer Versicherungsprämie interpretiert werden kann) und
- ein Absinken des Werts des Portfolios unter ein bestimmtes Niveau (floor) verhindert wird[5].

Geben wir hierfür zunächst ein einfaches Beispiel. Ein Kapitalbetrag von 105 DM, soll in eine Aktie, mit dem aktuellen Kurs 1 DM investiert werden. Wir betrachten hierzu zwei Alternativen.

Portfolio A: Kauf von 105 Aktien

Portfolio B: Kauf von 100 Aktien und Kauf von 100 Verkaufsoptionen mit Ausübungskurs $K = 100$, einer Laufzeit von einem Jahr und einem Gesamtpreis von 5 DM

Der Preis der Verkaufsoptionen stellt in diesem Fall die Versicherungsprämie für die Aktien auf einen Versicherungsbetrag von 100 DM dar. Der Wert des Portfolios beträgt nach genau einem Jahr mindestens 100 DM, da Verluste im Aktienkurs durch den gekauften Put gerade ausgeglichen werden. Steigen die Aktien über 100 DM, verfällt der Put wertlos. Durch die gezahlte Versicherungsprämie werden alle Gewinnwahrscheinlichkeiten mäßig reduziert, und die Wahrscheinlichkeit kleiner Verluste wird stark erhöht, wofür die Wahrscheinlichkeit größerer Verluste auf null sinkt. Die folgende Tabelle zeigt die Wert und Renditeentwicklung der beiden Portfolios in Abhängigkeit vom Aktienkurs S_{t^*} in einem Jahr.

[5]Mathematisch gesehen ist die Portfolio Insurance ein Verfahren zur Risikotransformation, bei dem ein Portfolio mit einer gewünschten Risikostruktur erzeugt wird.

Aktienkurs S_{t^*} [DM]	Unversichertes Portfolio		Versichertes Portfolio		Versichertes Portfolio in % des unversicherten Portfolios
	Wert [DM]	Rendite % p.a.	Wert [DM]	Rendite % p.a.	
0,50	52,5	–50	100	–4,8	190
0,60	63,0	–40	100	–4,8	159
0,70	73,5	–30	100	–4,8	136
0,80	84,0	–20	100	–4,8	119
0,90	94,5	–10	100	–4,8	106
1,00	105,0	0	100	-4,8	95
1,10	115,5	+10	110	+4,8	95
1,20	126,0	+20	120	+14,3	95
1,30	136,5	+30	130	+23,8	95
1,40	147,0	+40	140	+33,3	95

Die Vielzahl möglicher Strategien im Bereich der Portfolio Insurance läßt sich nach der Häufigkeit der zur Versicherung notwendigen Anpassungsmaßnahmen unterteilen in

- statische Strategien, bei denen nach Bildung des Ausgangsportfolios höchstens eine weitere Umschichtung erfolgt
- dynamische Strategien, bei denen im Idealfall kontinuierliche Anpassungen nach einer im Voraus festgelegten Regel erfolgen.

Die zu Beginn geschilderte statische Strategie läßt sich auf zwei Arten durchführen.

Strategie 1: Der Anleger kauft **Aktien und Verkaufsoptionen** in gleicher Anzahl

Strategie 2: Der Anleger kauft **Anleihen** im Nominalwert des gewünschten floor **und** für den Rest des Geldes **Kaufoptionen** auf das Objekt.

Alle verfolgten Strategien beruhen auf einer Abwandlung dieser beiden Grundstrategien und erweisen sich als konsequente Anwendung der Put-Call-Parität aus Satz 2.5.

Vor der Inangriffnahme einer Portefeuille-Versicherung müssen folgende Fragen geklärt werden:

1. Welche Finanzinstrumente stehen zur Verfügung (hierzu gehören vor allem die Informationen über Zinssätze, Volatilitäten, Korrelation zum Index u.ä.)?

2. Welche Vorstellungen hat der Anleger bezüglich

    - des Aufbaus des Portfolios (gewünschte Finanztitel)
    - des zur Verfügung stehenden Kapitals
    - des gewünschten zeitlichen Absicherungshorizonts
    - des gewünschten minimalen Portfoliowerts (floor) bzw. der gewünschten Minimalrendite[6] (bzw. des in Kauf genommenen Maximalverlusts). nach Ablauf der Versicherungszeit

Stellvertretend für den Bereich der Portfolio Insurance wollen wir die oben beschriebenen Strategien 1 und 2 anhand eines Beispiels erläutern. Dabei gehen wir davon aus, daß das Objekt, in das investiert werden soll (o.B.d.A eine Aktie), vom Anleger vorher bestimmt worden ist. Je nach Ertrag[7] unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall i) eine stetige Ertragsrendite d

Fall ii) im voraus bekannte Erträge mit dem Barwert D_0

Die Daten des Beispiels:
Aktueller Zeitpunkt $t =$ .... 0[8]
Verfügbares Kapital $V =$ .... 100.000 DM
Gewünschter floor $F =$ .... 95.000 DM
Anlagehorizont $T =$ .... 2 Jahre
Aktueller Aktienkurs $S_0 =$ .... 100 DM
stetiger Jahreszinssatz $i =$ .... 10% p.a.
Jahresvolatilität σ der Aktie = ... 30%
Dividenden während der Laufzeit
i) eine stetige Dividendenrendite $d =$ .... 2% p.a.
ii) Dividenden im Barwert $D_0 =$ .... 5 DM

[6] Bei gegebenem floor F und verfügbarem Kapital V ist die Minimalrendite r bei einem Zeithorizont von einem Jahr $r = \frac{F-V}{V}$

[7] Für negative Erträge ,wie Lagerhaltungskosten, funktioniert das Verfahren analog.

[8] Daraus folgt insbesondere $t^* = T$.

In beiden Fällen stehen wir vor dem Problem, die Anzahl n der Aktien, der (europäischen) Puts und den Ausübungskurs K der Puts zu bestimmen.

Fall i)

Die Aktie liefert eine stetige Dividendenrendite $d = 2\%$ p.a., die wir automatisch wieder in die Aktie investieren, so daß aus n Aktien nach T Jahren $ne^{d \cdot T}$ Aktien geworden sind und wir daher zu Beginn entsprechend viele Puts kaufen müssen. Da zum Investitionszeitpunkt der Wert des Portfolios genau V ist liefert dies zunächst die Gleichung

$$(19) \quad n \cdot S_0 + ne^{d \cdot T} P(S_0, T, K) = V$$

Der Ausübungskurs K der Puts ist so zu bestimmen, daß der gewünschte floor nach zwei Jahren garantiert ist. Dies bedeutet, daß zum Zeitpunkt T bei einem Aktienkurs $S_T = K$, zu dem der Putwert gerade 0 ist, der Wert des Portfolios genau den floor ergibt. Dies liefert die zweite Gleichung

$$(20) \quad n \cdot e^{d \cdot T} K = F \iff n = \frac{F}{K} e^{-d \cdot T}$$

Setzt man Gleichung (20) in Gleichung (19) ein, erhält man

$$(21) \quad e^{-d \cdot T} S_0 + P(S_0, T, K) - \frac{V}{F} \cdot K = 0$$

Mit der noch herzuleitenden BLACK/SCHOLES-Formel für europäische Optionen kann der gesuchte Ausübungskurs K aus Gleichung (21) numerisch berechnet werden, etwa mit dem Newtonverfahren. Man erhält in diesem Fall den Wert $K = 99,58$. Um den floor von 95.000 DM sicher zu erreichen, sind also $n = \frac{F}{K} e^{-d \cdot T} = 916,6$ Aktien und $n \cdot e^{d \cdot T} = 954$ Puts mit dem Ausübungskurs $K = 99,58$ zu kaufen[9].

Für die entsprechende Strategie mit Anleihen und Calls werden $Fe^{-i \cdot T} = 77.779,42$ DM festverzinslich angelegt und außerdem 954 Calls mit Ausübungskurs $K = 99,58$ im Wert von 23,28 DM/Call gekauft. Die Äquivalenz der beiden Strategien folgt aus der Put-Call-Parität für europäische Optionen:

$$(22) \quad n \cdot S_0 + ne^{d \cdot T} P(S_0, T, K) = nKe^{-d \cdot T} ne^{d \cdot T} C(S_0, T, K)$$

Die Wirkung der Versicherung läßt sich in der folgenden Tabelle ablesen:

[9] Der Preis der Puts ist nach der Formel von BLACK/SCHOLES gleich 8,73 DM/Put

Aktienkurs S_{t^*} [DM]	Unversichertes Portfolio Wert [DM]	Unversichertes Portfolio Rendite % p.a.	Versichertes Portfolio Wert [DM]	Versichertes Portfolio Rendite % p.a.	Versichertes Portfolio in % des unversicherten Portfolios
70	72.857	–27	95.000	–5	130
80	83.265	–17	95.000	–5	114
90	93.673	–6	95.000	–5	101
100	104.081	+4	95.400	–5	92
110	114.489	+15	104.940	+5	92
120	124.897	+25	114.480	+14	92
130	135.305	+35	124.020	+24	92
140	145.714	+46	133.560	+34	92

Fall ii)

Während der Laufzeit fallen Dividenden mit Barwert $D_0 = 5$ DM an. Wir legen diese festverzinslich an und erhalten zum Zeitpunkt T die Dividende $D_T = D_0 e^{iT} = 6,107$ DM. Der Kauf von n Aktien und n Puts führt dann unter Berücksichtigung der Dividende D_T analog zu den Überlegungen in Fall i) auf die Gleichungen[10]

$$(23) \quad n \cdot S_0 + nP(S_0 - D_0, T, K) = V$$

und

$$(24) \quad nK + nD_T = F$$

Setzt man Gleichung (24) in Gleichung (23) ein, erhält man

$$(25) \quad S_0 + P(S_0 - D_0, T, K) - \frac{V}{F} \cdot (K + D_T) = 0$$

Analog zum Fall i) bestimmt man die relevanten Größen. Man erhält

$$K = 96,42 \text{ und } n = \frac{F}{K + D_T} = 926,55$$

Für die Strategie mit Calls und Anleihen kaufen wir 926,55 Calls mit einem Wert von 23,99 DM/Call und einem Ausübungskurs von $K = 96,42$ und legen $95.000e^{-iT} = 77.779$

[10]Eine Begründung für die Subtraktion der Bardividende D_0 vom Kurs S_0 kann erst bei der Behandlung des Binomialmodells gegeben werden.

DM festverzinslich an.

Die Wirkung der Versicherung im Fall ii) läßt sich in der folgenden Tabelle ablesen, wobei die Dividenden zum Zeitpunkt T zu berücksichtigen sind.

Aktienkurs S_{t^*} [DM]	Unversichertes Portfolio		Versichertes Portfolio		Versichertes Portfolio in % des unversicherten Portfolios
	Wert [DM]	Rendite % p.a.	Wert [DM]	Rendite % p.a.	
70	76.107	–24	94.996	–5	125
80	86.107	–14	94.996	–5	110
90	96.107	–4	94.996	–5	99
96,42	102.527	+3	94.996	–5	93
100	106.107	+6	98.313	–2	93
110	116.107	+16	107.579	+8	93
120	126.107	+26	116.844	+17	93
130	136.107	+36	126.110	+26	93
140	146.107	+46	135.375	+35	93

Neben der prinzipiellen Vorgehensweise zeigt das Beispiel die praktischen Schwierigkeiten, die bei der Portfolio Insurance auftreten:

- Die Anzahl der benötigten Aktien und Optionen läßt sich nur bei großen Portefeuilles ohne großen prozentualen Fehler realisieren.
- Es ist im allgemeinen nicht zu erwarten, daß der erforderliche Put bzw. Call zur Verfügung steht, weil
  a) bei Laufzeiten von mehr als einem Jahr kaum Optionen zu Verfügung stehen,
  b) Puts oder Calls mit dem berechneten Ausübungskurs i.a. nicht zur Verfügung stehen,
  c) die meisten gehandelten Optionen vom amerikanischen Typ und damit teurer als erforderlich sind[11].

Gerade die letzte Schwierigkeit, daß die gewünschte Option nicht gehandelt wird, legt es nahe, sie mit dem in Kapitel 7 beschriebenen Delta-Hedge-Prozeß zu erzeugen. Wie bei allen dynamischen Strategien rückt dann jedoch das Problem der Transaktionskosten in den Vordergrund.

[11]Die entsprechende amerikanische Option liefert die gewünschte Absicherung nach unten während der gesamten Laufzeit. Bei der Verwendung europäischer Optionen kann der Wert des Portfolios zwischenzeitlich unterhalb des floor liegen. Diese durchaus wünschenswerte bessere Absicherung muß durch eine höhere Versicherungsprämie erkauft werden.

Ein weiteres Problem besteht darin, größere Portefeuilles mit verschiedenen Aktien zu versichern. Hier empfiehlt es sich schon aus Kostengründen zur Absicherung auf Indexoptionen zurückzugreifen. In diesem Fall muß die Korrelation des Portefeuilles mit dem Index berücksichtigt werden.

4 Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

4.1 Reellwertige Zufallsgrößen

Läßt man einen Stein aus 10 m Höhe fallen, so ist aufgrund der Newtonschen Gesetze der Aufprallzeitpunkt bereits bekannt, bevor das Experiment ausgeführt wird. Meßgrößen in komplexen Systemen (Aktienkurs an einem bestimmten Datum, Tageshöchsttemperatur an einem bestimmten Ort) lassen sich dagegen nicht exakt vorhersagen. Andererseits weiß man, mit welchen Werten man eher zu rechnen hat und welche gar nicht oder nur extrem selten auftreten. Solche Daten aus der Praxis, die - im Gegensatz zum fallenden Stein - nicht befriedigend durch einen einfachen deterministischen Mechanismus beschrieben werden können, lassen sich als Zufallsgrößen modellieren.
Sei X eine solche Zufallsgröße, die - z.B. als Modell für den Kurs einer Aktie - Werte in den reellen Zahlen annimmt. Die Einschätzung, mit welchen Werten von X eher gerechnet wird und welche weniger plausibel sind, wird durch Angabe der **Wahrscheinlichkeit** von Ereignissen der Form $\{a < X < b\}$ oder auch $\{X \leq b\}$ präzisiert. Das Set aller Wahrscheinlichkeiten

$$Ws(a < X < b) \ , \quad -\infty < a < b < \infty \ ,$$

bestimmt die komplette **Verteilung** der Zufallsgröße, d.h. alle Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die in irgendeiner Weise vom Wert von X abhängen. Gibt es eine Funktion p, so daß sich die Wahrscheinlichkeiten

$$Ws(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$$

als Integrale ausrechnen lassen, so heißt p die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder kurz **Dichte** der Zufallsgröße X. Für sehr kleine h gilt:

$$Ws(x - h < X < x + h) \approx 2h \cdot p(x)$$

$p(x)$ ist also ein Maß dafür, wie groß die Chance ist, einen Wert von X in der Nähe von x zu beobachten.
Die wichtigste Klasse von Verteilungen mit Dichten sind die **Normalverteilungen**, die durch zwei Parameter μ, σ^2 charakterisiert werden. Die Wahrscheinlichkeitsdichten haben die Form

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\,\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \, ,$$

$$\varphi(x) = \varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Die Verteilung mit Dichte $\varphi(x)$, d.h. mit $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, heißt **Standardnormalverteilung**.

Kurzschreibweise: "X ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt" steht für: "$X$ ist normalverteilt mit Parametern μ, σ^2 ".

Die Verteilung einer Zufallsgröße X, die nur endlich viele verschiedene Werte $x_1, \ldots, x_n$ annehmen kann, wird vollständig durch die Wahrscheinlichkeiten

$$Ws(X = x_k)\ , \quad k = 1, \ldots, n\ ,$$

bestimmt. Die einfachsten Beispiele bilden Zufallsgrößen, die nur 2 bzw. 3 Werte annehmen können, z.B. ± 1 oder $-1, 0, +1$. Sie bilden die Basis der Binomial- bzw. Trinomialverfahren, mit der auf dem Rechner diskrete Zufallsprozesse erzeugt werden können, die gute Approximationen für stetige Prozesse darstellen, wie sie z.B. bei der Modellierung des zeitlichen Verlaufs eines Aktienkurses vorkommen.
In diesem Zusammenhang treten binomialverteilte Zufallsgrößen auf. Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsgrößen, die nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen, mit

$$p = Ws(Y_k = 1)\ ,\ 1 - p = Ws(Y_k = 0)\ , \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

so ist ihre Summe X, d.h. die Anzahl der Einser in der Stichprobe $Y_1, \ldots, Y_n$, binomialverteilt mit Parametern n, p :

$$X = \sum_{k=1}^{n} Y_k\ ,\ Ws(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}\ , \quad m = 0, \ldots, n\,.$$

Kurzschreibweise: "X ist $\mathcal{B}(n, p)$-verteilt" steht für: "X ist binomialverteilt mit Parametern n, p ."

Wenn n groß genug ist, kann eine $\mathcal{B}(n, p)$-verteilte Zufallsgröße X näherungsweise durch eine $\mathcal{N}(np,\, np(1-p))-$verteilte Zufallsgröße Z ersetzt werden in dem Sinn, daß

(26) $Ws(a < X < b) \approx Ws(a < Z < b)\,.$

Eine genauere Aussage liefert der zentrale Grenzwertsatz. In der klassischen Statistik macht man sich dieses Ergebnis zunutze, um die für größere n aufwendige Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten zu umgehen. Umgekehrt weist die approximative Austauschbarkeit von binomial- und normalverteilen Zufallsgrößen aber auch einen Weg, auf der Normalverteilung aufbauende stetige Zufallsprozesse durch auf dem Rechner leicht zu simulierende Binomialprozesse anzunähern.

4.2 Erwartungswert und Varianz

Der **Erwartungswert** oder Mittelwert $\mathcal{E}X$ einer reellwertigen Zufallsgröße X ist ein Maß dafür, in welchem Bereich der reellen Zahlen die Werte von X vorwiegend zu finden sind. Die **Varianz** $varX$ von X ist ein Maß dafür, wie stark die Zufallsgröße um ihren Erwartungswert herum streut:

$$\begin{aligned} var\ X &= \mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^2 \\ \text{Varianz} &= \text{mittlere quadratische Abweichung der Zufallsgröße} \\ & \text{vom eigenen Erwartungswert} \end{aligned}$$

Die Varianz besitzt als quadratische Größe eine andere Einheit als X selbst. Ein besseres Gefühl für die Größe der Variabilität von X liefert die **Standardabweichung**

$$\sigma(X) = \sqrt{varX}\,,$$

die wie $\mathcal{E}X$ in derselben Einheit wie X gemessen wird.
Eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)-$verteilte Zufallsgröße X hat Mittelwert μ und Varianz σ^2. Der 2σ-Bereich um μ enthält mit etwas mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit Beobachtungen einer solchen Zufallsgröße

$$Ws(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \underset{\approx}{>} 0,95\,.$$

Eine $\mathcal{B}(n, p)-$verteilte Zufallsgröße X hat Erwartungswert np und Varianz $np(1-p)$. Die Approximation (26) ist also so gewählt, daß die näherungsweise einander ersetzenden binomial- und normalverteilten Zufallsgrößen identische Erwartungswerte und Varianzen besitzen.

4.3 Zufallsvektoren, Abhängigkeit, Korrelation

Interessiert man sich gleichzeitig für mehrere Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_N$ - z.B. die Kurse verschiedener Aktien - und für ihre wechselseitige Abhängigkeit, so betrachtet man $(X_1, \ldots, X_N)$ als zufälligen Punkt oder **Zufallsvektor** im $\mathbb{R}^N$.
Der intuitive Begriff der **Unabhängigkeit** zweier Zufallsgrößen X_1, X_2 wird präzisiert durch die Forderung, daß

$$Ws(a_1 < X_1 < b_1,\, a_2 < X_2 < b_2) = Ws(a_1 < X_1 < b_1) \cdot Ws(a_2 < X_2 < b_2),$$

d.h. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die von dem Wert des Zufallsvektors (X_1, X_2) abhängen, lassen sich faktorisieren, und es genügt, die eindimensionalen Verteilungen von X_1 und X_2 zu kennen.
Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen X_1, X_2 kann in komplizierter Form vorliegen. Sind X_1, X_2 gemeinsam normalverteilt, läßt sich der Grad ihrer Abhängigkeit aber auf einfache Weise quantifizieren durch ihre

$$\text{Kovarianz} \quad cov(X_1, X_2) = \mathcal{E}(X_1 - \mathcal{E}X_1)(X_2 - \mathcal{E}X_2)$$

$$\text{oder Korrelation} \quad corr(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma(X_1) \cdot \sigma(X_2)}.$$

Die Korrelation hat den Vorteil, immer zwischen - 1 und + 1 zu liegen und skaleninvariant zu sein. Für gemeinsam *normalverteilte* Zufallsgrößen ist Unabhängigkeit gleichbedeutend mit Korrelation gleich Null, während vollständige Abhängigkeit gleichbedeutend mit Korrelation + 1 (X_1 ist groß, wenn X_2 groß ist) oder Korrelation -1 (X_1 ist groß, wenn X_2 klein ist) ist.
Allgemein gilt für *unabhängige* Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_N$

$$cov(X_i, X_j) = 0 \qquad \text{für } i \neq j\,,$$

woraus eine nützliche Rechenregel folgt:

$$var(\sum_{j=1}^{N} X_j) = \sum_{j=1}^{N} var X_j\,.$$

Sind $X_1, \ldots, X_N$ unabhängige Zufallsgrößen, die alle dieselbe Verteilung haben:

$$Ws(a < X_i < b) = Ws(a < X_j < b) \qquad \text{für alle } i, j\,,$$

so nennen wir sie **unabhängig identisch verteilt** (kurz: **u.i.v.**).

4.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, daß X_1 Werte zwischen a_1 und b_1 annimmt, gegeben, daß X_2 Werte zwischen a_2 und b_2 annimmt, ist definiert als

$$Ws(a_1 < X_1 < b_1 | a_2 < X_2 < b_2) = \frac{Ws(a_1 < X_1 < b_1\,,\, a_2 < X_2 < b_2)}{Ws(a_2 < X_2 < b_2)}\,.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von Ereignissen der Art $a_1 < X_1 < b_1$ spiegelt unsere Einschätzung wider, mit welchen Werten von X_1 wir eher rechnen und welche wir für nicht plausibel halten, *wenn wir schon wissen*, daß eine andere Zufallsgröße X_2 bestimmte Werte angenommen hat. Unsere Meinung über die Wahrscheinlichkeiten der Werte von X_1 wird durch unsere Vorabinformation über X_2 nicht geändert, wenn X_1 gar nicht von X_2 abhängt, wenn also X_1 *und* X_2 *unabhängig* sind. Dann gilt:

$$Ws(a_1 < X_1 < b_1 | a_2 < X_2 < b_2) = Ws(a_1 < X_1 < b_1)\,.$$

5 Stochastische Prozesse in diskreter Zeit

Ein **stochastischer Prozeß** oder Zufallsprozeß besteht aus zeitlich angeordneten Zufallsgrößen $\{X_t;\ t \geq 0\}$. Der Einfachheit halber lassen wir den Prozeß immer zur Zeit $t = 0$ anfangen. Werden die Beobachtungen nur in regelmäßigen Abständen erhoben, ist $t = 0, 1, 2, \ldots$, und wir sprechen von einem Prozeß in **diskreter Zeit**. In diesem Abschnitt werden nur solche Prozesse betrachtet. Typische Beispiele sind täglich, monatlich oder jährlich erhobene Wirtschaftsdaten (Aktienkurse, Arbeitslosenziffern, Absatzzahlen).

5.1 Binomialprozesse

Einer der einfachsten stochastischen Prozesse ist die **einfache Irrfahrt**, ein Prozeß, dessen Zuwachs $Z_t = X_t - X_{t-1}$ von der Zeit $t-1$ zur Zeit t nur die beiden Werte $+1$ und -1 annehmen kann. Zusätzlich nehmen wir an, daß die Zuwächse $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v. und unabhängig von Anfangswert X_0 sind. Die einfache Irrfahrt hat daher die Form:

$$(27) \quad X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{t} Z_k \qquad , \ t = 1, 2, \ldots$$

$X_0, Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig und

$$Ws(Z_k = 1) = p \quad , \quad Ws(Z_k = -1) = 1 - p \qquad \text{für alle } \ k\,.$$

Lassen wir stattdessen zu, daß der Prozeß von der Zeit $t-1$ zur Zeit t um u wächst oder um d fällt:

$$Ws(Z_k = u) = p\,, \quad Ws(Z_k = -d) = 1 - p \quad \text{für alle } \ k\,,$$

so erhalten wir die allgemeinere Klasse der **Binomialprozesse**. $u, d \geq 0$ sind dabei beliebige, aber feste Konstanten ($u =$ up, $d =$ down).

Der **Pfad** einer einfachen Irrfahrt ergibt sich durch lineare Interpolation der Punkte (t, X_t) und spiegelt den zeitlichen Verlauf des Prozesses anschaulich wider. Er kann sich - ausgehend von einem festen Anfangswert $X_0 = a$ - nur innerhalb eines Netzes von Verbindungen der Punkte (t, b_t), $t = 0, 1, 2, \ldots$, $b_t = a - t$, $a - t + 1, \ldots, a + t$ bewegen, denn von a aus kann X_t bis zur Zeit t maximal auf $a + t$ wachsen ($Z_1 = \ldots = Z_t = 1$) oder minimal auf $a-t$ fallen ($Z_1 = \ldots = Z_t = -1$).

Für allgemeine Binomialprozesse sieht das Netz der möglichen Pfade komplizierter aus. Die möglichen Werte, die ausgehend von a zur Zeit t erreicht werden können sind von der Form

$$b_t = a + n \cdot u - m \cdot d\,, \text{ wobei } n, m \geq 0\,, \quad n + m = t\,.$$

$X_t = a + n \cdot u - m \cdot d$, wenn der Prozeß von der Zeit 0 bis zur Zeit t $n-$mal gewachsen und m-mal gefallen ist, d.h. n der Zuwächse $Z_1, \ldots, Z_t$ haben den Wert u, m der Zuwächse haben den Wert $-d$ angenommen. Bei Aktienkursen nennt man das Netz, in dem sich die Pfade des Prozesses bewegen können, den **Kursbaum**.

Die **symmetrische einfache Irrfahrt** ($p = \frac{1}{2}$) mit Start in 0 ($\underline{X_0 = 0}$) ist für alle Zeiten im Mittel 0 :

$$\mathcal{E}X_t = 0 \qquad \text{für alle } t\,.$$

Andernfalls hat die *Irrfahrt* einen **Trend** oder eine **Drift** nach oben ($p > \frac{1}{2}$) bzw. nach unten ($p < \frac{1}{2}$). Der Prozeß wächst bzw. fällt im Mittel:

$$\mathcal{E}X_t = t \cdot (2p - 1)\,,$$

denn $\mathcal{E}Z_k = 2p-1$ für alle Zuwächse. Für den allgemeinen *Binomialprozeß* mit beliebigem Startwert X_0 gilt entsprechend $\mathcal{E}Z_k = (u+d)p - d$ und somit:

$$\mathcal{E}X_t = \mathcal{E}X_0 + t \cdot [(u+d)p - d]\,.$$

Mit wachsender Zeit t kann X_t immer mehr verschiedene Werte annehmen, und die Variabilität wächst. Da die einzelnen Summanden in (27) unabhängig sind und zudem $varZ_k = varZ_1$ für alle k, ist die Varianz von X_t (vgl. Abschnitt 3.3):

$$varX_t = varX_0 + t \cdot varZ_1\,,$$

wächst also linear mit der Zeit, und die Standardabweichung $\sigma(X_t)$ wächst mit der Rate $\sqrt{t}$. Die Varianz der Zuwächse Z_k läßt sich leicht ausrechnen, aber wir benutzen stattdessen die folgende einfache Beziehung zur Binomialverteilung. Setzen wir

$$Y_k = \frac{Z_k + d}{u + d} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } Z_k = u \\ 0 & \text{wenn } Z_k = -d \end{cases}$$

bzw. umgekehrt

$$Z_k = (u+d)\,Y_k - d\,,$$

so erhalten wir als Darstellung des Binomialprozesses

$$X_t = X_0 + (u+d)\,B_t - td$$

mit der $\mathcal{B}(t,p)-$verteilten Zufallsgröße

$$B_t = \sum_{k=1}^{t} Y_k\,.$$

Bei gegebener Verteilung des Anfangswertes X_0 ist die Verteilung von X_t also für alle Zeiten bekannt und durch eine einfache Transformation aus der Binomialverteilung $\mathcal{B}(t,p)$ ableitbar. Aus 3.1 - 3.3 erhalten wir, z.B. für den Fall $\underline{X_0 = 0}$:

$$varX_t = t(u+d)^2\,p(1-p)$$

und für große t

$$\text{Verteilung von } X_t \approx \mathcal{N}(t[(u+d)p-d],\, t(u+d)^2\,p(1-p))\,.$$

Für $p=\frac{1}{2}, u=d=\Delta x$ erhalten wir beispielsweise

$$\text{Verteilung von } X_t \approx \mathcal{N}(0, t\cdot(\Delta x)^2)\,.$$

5.2 Trinomialprozesse

Im Gegensatz zum Binomialprozeß darf ein *Trinomialprozeß* in der Zeiteinheit nicht nur um eine vorgegebene Größe wachsen oder fallen, sondern kann auch unverändert bleiben. Die Zuwächse Z_k haben hier die Eigenschaft:

$$Ws(Z_k=u)=p\,,\; Ws(Z_k=-d)=q\,,\; Ws(Z_k=0)=r=1-p-q\;,$$

und der stochastische Prozeß hat wieder die Gestalt:

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{t} Z_k$$

mit unabhängigen $X_0, Z_1, Z_2, \ldots$. Trinomialschemata, bei denen die Wahrscheinlichkeiten p,q,r allerdings im Sinne von Abschnitt 4.5 zeit- und zustandsabhängig sein dürfen, werden von manchen Autoren benutzt, um die Black-Scholes- Gleichung näherungsweise zu lösen.

Die exakte Verteilung der X_t läßt sich nicht auf die Binomialverteilung zurückführen, aber es gilt ähnlich wie für den Binomialprozeß:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}X_t &= \mathcal{E}X_0 + t \cdot \mathcal{E}Z_1 = \mathcal{E}X_0 + t \cdot (pu - qd) \\ varX_t &= varX_0 + t \cdot varZ_1, \text{ wobei} \\ varZ_1 &= p(1-p)u^2 + q(1-q)d^2 + 2pq\ ud\ , \end{aligned}$$

und für große t ist X_t näherungsweise $\mathcal{N}(\mathcal{E}X_t,\ varX_t)-$verteilt.

5.3 Allgemeine Irrfahrten

Binomial- und Trinomialprozesse sind einfache Beispiele allgemeiner *Irrfahrten*, d.h. stochastischer Prozesse $\{X_t;\ t \geq 0\}$ der Form

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{t} Z_k\,, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

wobei X_0 unabhängig von den u.i.v. $Z_1, Z_2, \ldots$. Die Verteilung der Zuwächse ist irgendeine Verteilung reellwertiger Zufallsgrößen. Die einzelnen Z_k können endlich oder abzählbar viele Werte annehmen; sie können aber auch einen kontinuierlichen Wertebereich haben.

Als Beispiel betrachten wir eine *Gaußsche Irrfahrt*, mit Start in 0, d.h. eine Irrfahrt mit $X_0 = 0$, für die endlich viele Werte $X_1, \ldots, X_t$ jeweils gemeinsam normalverteilt sind. Eine solche Irrfahrt erhalten wir, wenn wir die Zuwächse als unabhängig und identisch $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)-$verteilt wählen. Aus den Eigenschaften der Normalverteilung folgt dann, daß zu jedem Zeitpunkt t der Wert des Prozesses $X_t \quad \mathcal{N}(\mu t,\ \sigma^2 t)-$verteilt ist.

Näherungsweise gilt dies für alle Irrfahrten für genügend große t :

$$\text{Verteilung von } X_t \approx \mathcal{N}(t \cdot \mathcal{E}Z_1,\ t \cdot varZ_1),$$

wenn $X_0 = 0$ und $var Z_1$ endlich ist. Diese Approximation folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz für u.i.v. Zufallsgrößen.

Irrfahrten sind **Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen**, d.h. der Zuwachs Z_{t+1} des Prozesses von der Zeit t zur Zeit $t+1$ ist unabhängig von den Werten $X_0, \ldots, X_t$ des Prozesses in der Vergangenheit bis zur Zeit t. Allgemeiner ist dann für beliebige $s > 0$ der Zuwachs

$$X_{t+s} - X_t = Z_{t+1} + \ldots + Z_{t+s}$$

des Prozesses nach der Zeit t bis zur Zeit $t+s$ unabhängig von $X_0, \ldots, X_t$. Als Folge ist die beste *Vorhersage* - im Sinne eines möglichst kleinen mittleren quadratischen Fehlers - für X_{t+1} gegeben die Kenntnis aller $X_0, \ldots, X_t$ einfach $X_t + \mathcal{E} Z_{t+1}$. Solange der Kurs einer Aktie isoliert betrachtet wird, trifft diese Aussage für den Aktienkursprozeß oft in guter Näherung zu. Schon vor rund hundert Jahren postulierte Bachelier (hier für den Fall $\mathcal{E} Z_k = 0$ für alle k): "Die beste Vorhersage für den Kurs von morgen ist der Kurs von heute."

Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen sind automatisch *Markoff-Prozesse*: die zukünftige Entwicklung des Prozesses von der Zeit t an hängt nur von X_t ab und - gegeben die Kenntnis von X_t - nicht mehr von den weiter zurückliegenden Werten $X_0, \ldots, X_{t-1}$. Wenn die Zuwächse Z_k und der Anfangswert X_0 und damit auch die Werte X_t selbst nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen, dann wird diese **Markoff-Eigenschaft** formal ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} &Ws(a_{t+1} < X_{t+1} < b_{t+1} | X_t = c,\, a_{t-1} < X_{t-1} < b_{t-1}, \ldots,\, a_0 < X_0 < b_0) \\ &\qquad = Ws(a_{t+1} < X_{t+1} < b_{t+1} | X_t = c)\,. \end{aligned}$$

Wenn $X_t = c$ bekannt ist, ändern zusätzliche Informationen über die Werte von $X_0, \ldots, X_{t-1}$ die Einschätzung, in welchem Bereich X_{t+1} vermutlich liegen wird, nicht.

5.4 Geometrische Irrfahrten

Die wesentliche Idee hinter dem Modell "Irrfahrt" für reale Prozesse ist die Annahme, daß die Änderungen in einer Zeiteinheit unabhängig voneinander und immer von derselben

Größenordnung sind. Letzteres ist gerade für wirtschaftliche Zeitreihen oft nicht erfüllt. Saisonale Schwankungen von z.B. monatlichen Absatzzahlen sind typischerweise *absolut* wesentlich größer, wenn der Absatz sich im Jahresmittel auf hohem Niveau bewegt. Nur die relativen oder prozentualen Änderungen sind über die Zeit stabil und hängen nicht davon ab, wie groß die Werte des Prozesses X_t gerade sind. Analog zur Irrfahrt, bei der die absoluten Zuwächse $Z_t = X_t - X_{t-1}$ als u.i.v. angenommen werden, spricht man von einer **geometrischen Irrfahrt** $\{X_t;\, t \geq 0\}$, wenn die *relativen Zuwächse*

$$R_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}\,, \quad t = 1, 2, \ldots$$

u.i.v. sind. Ein **geometrischer Binomialprozeß** hat z.B. die Form

(28) $X_t = R_t \cdot X_{t-1} = X_0 \cdot \Pi_{k=1}^t R_k$

wobei $X_0, R_1, R_2, \ldots$ unabhängig und für $u > 1,\ d < 1$:

$$Ws(R_k = u) = p\ ,\ Ws(R_k = d) = 1 - p\ .$$

Da $\mathcal{E}R_k = (u-d)p+d$, folgt aus (28) mit den Rechenregeln für unabhängige Zufallsgrößen, daß $\mathcal{E}X_t$ geometrisch (d.h. mit exponentieller Rate) steigt oder fällt, je nachdem ob $\mathcal{E}R_k >$ 1 oder $\mathcal{E}R_k < 1$ ist:

$$\mathcal{E}X_t = \mathcal{E}X_0 \cdot (\mathcal{E}R_1)^t = \mathcal{E}X_0 \cdot [(u-d)p + d]^t\ .$$

Wenn $\mathcal{E}R_k = 1$, bleibt der Prozeß im Mittel stabil. Dies ist der Fall, wenn

$$p = \frac{1-d}{u-d}\,.$$

Für $d = \frac{1}{u}$, d.h. für einen Prozeß, der nach zwei Zeiteinheiten wieder den Ausgangszustand erreicht haben kann, vereinfacht sich diese Beziehung zu:

$$p = \frac{1}{u+1}\,.$$

Aus (28) folgt durch logarithmieren:

$$\log X_t = \log X_0 + \sum_{k=1}^{t} \log R_k\ .$$

Der Prozeß $\tilde{X}_q t = \log X_t$ zum geometrischen Binomialprozeß ist also selbst ein gewöhnlicher Binomialprozeß mit Anfangswert $\log X_0$ und Zuwächsen $Z_k = \log R_k$, für die gilt:

$$Ws(Z_k = \log u) = p, \quad Ws(Z_k = \log d) = 1 - p \ .$$

Für große t ist $\tilde{X}_t$ näherungsweise normalverteilt. $X_t = \exp(\tilde{X}_t)$ ist damit selbst näherungsweise lognormalverteilt.

5.5 Binomialmodelle mit zustandsabhängigen Zuwächsen

Binomialprozesse und auch allgemeinere Irrfahrten beschreiben den Verlauf eines Aktionskurses bestenfalls lokal. Sie gehen davon aus, daß die Verteilung der Zuwächse $Z_t = X_t - X_{t-1}$ stets dieselbe ist - unabhängig davon, ob der Kurs mittlerweile deutlich über oder unter dem Anfangskurs X_0 liegt. Geometrische Irrfahrten lassen den Zuwachs $X_t - X_{t-1} = (R_t - 1)\ X_{t-1}$ vom erreichten Kursniveau X_{t-1} abhängen (und sind damit keine Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen mehr). Will man den Aktienkursverlauf über einen größeren Bereich modellieren, sind jedoch auch diese Prozesse noch zu einfach, um den Einfluß des erreichten Kursniveaus auf die zukünftige Entwicklung zu beschreiben. Eine einfache Klasse von Prozessen, die diesen Effekt berücksichtigen, sind die Binomialprozesse mit zustandsabhängigen (und eventuell auch zeitabhängigen) Zuwächsen:

(29) $X_t = X_{t-1} + Z_t \ , \quad t = 1, 2, \ldots$

$$Ws(Z_t = u) = p(X_{t-1}, t)\,, \ \ Ws(Z_t = -d) = 1 - p(X_{t-1}, t)\,.$$

Die Zuwächse sind jetzt weder unabhängig noch identisch verteilt, denn die Verteilung von Z_t hängt vom erreichten Kursniveau X_{t-1} und eventuell auch von der Zeit ab. Die festen Funktionen $p(x,t)$ ordnen jedem möglichen Wert des Prozesses zur Zeit t und jedem t eine Wahrscheinlichkeit zu. Stochastische Prozesse $\{X_t;\ t \geq 0\}$, die nach (29) konstruiert werden, sind also keine Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen mehr, haben aber immer noch die **Markoff-Eigenschaft**.

Entsprechend lassen sich geometrische Binomialprozesse mit zustandsabhängigen relativen Zuwächsen definieren (für $u > 1,\ d < 1$):

(30) $X_t = R_t \cdot X_{t-1}$

$$Ws(R_t = u) = p(X_{t-1}, t)\,, \;\; Ws(R_t = d) = 1 - p(X_{t-1}, t)\,.$$

Prozesse der Form (29) und (30) sind in dieser Allgemeinheit in erster Linie für theoretische Untersuchungen geeignet, da es ohne weitere Annahmen schwierig ist, die Wahrscheinlichkeiten $p(x,t)$ aus Beobachtungen des tatsächlichen Aktienkursverlaufs zu schätzen. Diese allgemeinen Binomialmodelle (bzw. auch die analog definierten Trinomialmodelle) sind aber in einem ganz anderen Zusammenhang nützlich, und zwar für die numerische Lösung von Differentialgleichungen wie z.B. der Black-Scholes-Gleichung für amerikanische Optionen.

6 Stochastische Integrale und Differentialgleichungen bzgl. des Wiener-Prozesses

Dieser Abschnitt stellt das Handwerkzeug bereit, das für Bewertung von Optionen benötigt wird. Dabei spielen stochastische Prozesse in stetiger Zeit eine wesentliche Rolle, die als Lösungen stochastischer Differentialgleichungen definiert werden. Um diese Begriffe ohne langwierige Vorarbeiten verständlich zu machen, benutzen wir wiederholt Approximationen durch stochastische Prozesse in diskreter Zeit und bauen auf den in Abschnitt 4 erarbeiteten Grundlagen auf.

Ein stochastischer Prozeß in stetiger Zeit $\{x_t;\ t \geq 0\}$ besteht wiederum aus zeitlich angeordneten Zufallsvariablen, wobei die Zeitvariable t jetzt aber kontinuierlich ist, d.h. alle reellen Zahlen durchläuft. Zur Kennzeichnung, welche stochastische Prozesse in stetiger und welche in diskreter Zeit ablaufen, benutzen wir in der Folge für erstere kleine Buchstaben (x_t, $z_t, \ldots$), für letztere große Buchstaben (X_t, $Z_t, \ldots$).

Anmerkung: Aktienkurse sind eigentlich Prozesse in diskreter Zeit. Um die Black-Scholes-Formel herzuleiten, werden sie durch Prozesse in stetiger Zeit approximiert, da man mit diesen wesentlich leichter analytisch rechnen kann (mit dem Itô-Kalkül, s. unten). Um anschließend solche Prozesse auf dem Rechner zu simulieren oder - für amerikanische Optionen - den Optionswert numerisch zu berechnen, werden die Prozesse in stetiger Zeit wieder durch Prozesse in diskreter Zeit angenähert. Wir wechseln also zwischen diskreter und stetiger Zeit, je nachdem, was für die aktuellen Rechnungen bequemer ist.

6.1 Der Wiener-Prozeß

Wir beginnen mit einer einfachen symmetrischen Irrfahrt $\{X_n;\ n \geq 0\}$, die in 0 anfängt ($X_0 = 0$). Die u.i.v. Zuwächse seien wieder $Z_n = X_n - X_{n-1}$:

$$Ws(Z_n = 1) = Ws(Z_n = -1) = \frac{1}{2}\,.$$

Wir beschleunigen jetzt den Prozeß, indem wir die Zeiteinheit, d.h. die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen, immer kleiner werden lassen. Gleichzeitig werden auch die Änderungen, die der Prozeß in der Zeiteinheit erfahren kann, immer kleiner. Genauer gesagt betrachten wir einen stochastischen Prozeß $\{x_t^\Delta;\ t \geq 0\}$ in stetiger Zeit, der nach einer Zeitspanne von jeweils Δt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ um Δx wächst oder um Δx fällt. Zwischen diesen Sprüngen nach oben oder unten ist der Prozeß konstant (alternativ könnten wir auch linear interpolieren). Zur Zeit $\underline{t = n \cdot \Delta t}$ ist der Prozeß dann:

$$x_t^\Delta = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot \Delta x = X_n \cdot \Delta x$$

wobei die Zuwächse $Z_1 \Delta x, Z_2 \Delta x, \ldots$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ die Werte Δx oder $-\Delta x$ annehmen. Aus Abschnitt 4.1 wissen wir:

$$\mathcal{E}\, x_t^\Delta = 0\ , \qquad var\ x_t^\Delta = (\Delta x)^2 \cdot var\ X_n = (\Delta x)^2 \cdot n = t \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\,.$$

Wir lassen jetzt Δt, Δx immer kleiner werden. Damit der Grenzprozeß in vernünftigem Sinn existiert, muß $var\ x_t^\Delta$ endlich bleiben. Andererseits soll $var\ x_t^\Delta$ auch nicht gegen 0 konvergieren, da der Grenzprozeß sonst nicht mehr zufällig und damit für uns uninteressant wäre. Also müssen wir wählen:

$$\Delta t \longrightarrow 0,\ \ \Delta x = c \cdot \sqrt{\Delta t}\,,\ \text{so daß}\ \ var\ x_t^\Delta \longrightarrow c^2 t\,.$$

Wenn Δt klein ist, dann ist $n = t/\Delta t$ groß, so daß der Wert X_n der einfachen symmetrischen Irrfahrt ungefähr normalverteilt ist:

$$\text{Verteilung von}\ \ X_n \approx \mathcal{N}(0, n)$$

und somit für alle t (nicht nur für diejenigen der Form $t = n\ \Delta t$)

$$\text{Verteilung von}\ \ x_t^\Delta \approx \mathcal{N}(0,\ n(\Delta x)^2) \approx \mathcal{N}(0,\ c^2 t)\ .$$

Der Grenzprozeß $\{X_t;\ t \geq 0\}$, den wir aus $\{x_t^\Delta;\ t \geq 0\}$ für $\Delta t \longrightarrow 0,\ \Delta x = c\ \sqrt{\Delta t}$ erhalten, hat also die Eigenschaften:

(i) x_t ist $\mathcal{N}(0, c^2 t)-$verteilt für alle $t \geq 0$.

(ii) $\{x_t;\ t \geq 0\}$ hat *unabhängige Zuwächse*, d.h. für $0 \leq s < t$ ist $x_t - x_s$ unabhängig von x_s (da die Irrfahrt $\{X_n;\ n \geq 0\}$, über die die $\{x_t^\Delta;\ t \geq 0\}$ definiert sind, unabhängige Zuwächse hat)

(iii) Für $0 \leq s < t$ ist der Zuwachs $x_t - x_s$ $\mathcal{N}(0,\ c^2 \cdot (t-s))-$verteilt, d.h. seine Verteilung hängt nur von der Länge $t - s$ des Zeitintervalls, über das der Zuwachs betrachtet wird, ab (dies folgt aus (i) und (ii) und den Eigenschaften der Normalverteilung).

Ein stochastischer Prozeß $\{x_t;\ t \geq 0\}$ in stetiger Zeit mit den Eigenschaften (i)-(iii) heißt **Wiener-Prozeß** oder **Brownsche Bewegung** mit Start in 0 ($x_0 = 0$). Den Standard-Wiener-Prozeß, der sich durch die Wahl $\underline{c = 1}$ ergibt, bezeichnen wir im folgenden stets mit $\{\omega_t;\ t \geq 0\}$. Für ihn gilt für alle $0 \leq s < t$:

$$\mathcal{E}\,\omega_t = 0\ ,\ var\ \omega_t = t$$

$$\begin{aligned} cov(\omega_t, \omega_s) &= cov(\omega_t - \omega_s + \omega_s,\ \omega_s) = cov(\omega_t - \omega_s,\ \omega_s) + cov(\omega_s,\ \omega_s) \\ &= 0 + var\ \omega_s = s \end{aligned}$$

Wie jeden stochastischen Prozeß in stetiger Zeit können wir eine Realisation oder einen Pfad des Wiener-Prozesses als *zufällig ausgewählte Funktion* der Zeit auffassen. Man kann mit beträchtlichem Aufwand zeigen, daß die Pfade mit Wahrscheinlichkeit 1 *stetig* sind; der Wiener-Prozeß hat keine Sprünge:

$$Ws(\omega_t \text{ ist stetig als Funktion von } t) = 1\ .$$

Darüberhinaus fluktuiert ω_t extrem stark; die Pfade sind zwar stetig, aber sehr erratisch. Man kann zeigen, daß die Pfade mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends differenzierbar sind.

Als Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen ist der Wiener-Prozeß automatisch ein **Markoff-Prozeß**. Für $0 \leq s < t$ ist $\omega_t = \omega_s + (\omega_t - \omega_s)$, d.h. ω_t hängt nur von ω_s und dem von der Vergangenheit bis zur Zeit s unabhängigen Zuwachs $\omega_t - \omega_s$ ab:

$$\begin{aligned} & Ws(a < \omega_t < b\ |\omega_s = x\ ,\ \text{Information über}\ \ \omega_\tau,\ 0 \leq \tau < s) \\ = \ & Ws(a < \omega_t < b\ |\omega_s = x\ ) \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften (i)-(iii) läßt sich die bedingte Verteilung von ω_t gegeben die Kenntnis von $\omega_s = x$ explizit angeben; sie ist $\mathcal{N}(x, t-s)$, da der Zuwachs $\omega_t - \omega_s$ $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt ist:

$$Ws(a < \omega_t < b\ |\omega_s = x) = \int_a^b \varphi_{x,t-s}(y)dy\ .$$

Geht man bei den obigen Überlegungen statt von einer symmetrischen von einer beliebigen einfachen Irrfahrt $\{X_n;\ n \geq 0\}$ aus, die einen Trend

$$\mathcal{E}\,X_n = n(2p-1)$$

hat, so ist der Prozeß x_t^Δ nicht mehr im Mittel 0, sondern

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\, x_t^\Delta &= n\cdot(2p-1)\cdot\Delta x = (2p-1)\cdot t\,\frac{\Delta x}{\Delta t}\\ var\ x_t^\Delta &= n\,4p(1-p)\cdot(\Delta x)^2 = 4p(1-p)\cdot t\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\end{aligned}$$

Für $\Delta t \longrightarrow 0$, $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$, $p = \frac{1}{2}(1+\mu\sqrt{\Delta t})$ erhalten wir für alle t:

$$\mathcal{E}\, x_t^\Delta \longrightarrow \mu t\,,\ var\ x_t^\Delta \longrightarrow t$$

Der Grenzprozeß ist der **Wiener-Prozeß** $\{x_t;\ t \geq 0\}$ **mit Drift** oder **Trend** μt . Er ergibt sich auf einfache Weise aus dem Standard-Wiener-Prozeß:

$$x_t = \mu t + \omega_t\,,$$

verhält sich also genauso wie der gewöhnliche Wiener-Prozeß, außer daß er nicht im Mittel 0 bleibt, sondern im Mittel linear wächst ($\mu > 0$) oder fällt ($\mu < 0$).

6.2 Stochastische Integration

Um anschließend einen stochastischen Prozeß als Modell für Aktienkurse als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung einführen zu können, benötigen wir den Begriff des Itô-Integrals, eines stochastischen Integrals bzgl. des Wiener-Prozesses. Formal ähnelt die Konstruktion des Itô-Integrals derjenigen eines deterministischen Stieltjes-Integrals, wobei die Funktion, bzgl. der integriert wird, zufällig - genauer: ein Pfad des Wiener-Prozesses - ist. Da der Integrand ebenfalls zufällig - d.h. ein Pfad eines stochastischen Prozesses - sein kann, muß man allerdings sehr vorsichtig bzgl. der wechselseitigen Abhängigkeit von Integrand und Wiener-Prozeß sein.

Der Prozeß, den wir integrieren wollen, sei $\{y_t;\ t \geq 0\}$, und $\{\omega_t;\ t \geq 0\}$ sei der Standard-Wiener-Prozeß. Für das folgende brauchen wir die wesentliche Annahme: $\{y_t;\ t \geq 0\}$ ist **nicht antizipierend** (vorwegnehmend). Intuitiv bedeutet dies, daß der Verlauf des Prozesses bis zu einem Zeitpunkt s keine Informationen über die zukünftige Zuwächse $\omega_t - \omega_s$, $t > s$, des Wiener-Prozesses enthält. Insbesondere sind y_s und $\omega_t - \omega_s$ unabhängig.

Wie stets bei der Einführung eines Integralbegriffs definieren wir das **Itô-Integral** bzgl. des Wiener-Prozesses als Grenzwert von (zufällig) gewichteten Summen der (zufälligen) Funktion $\{y_t;\ t \geq 0\}$:

$$(31)\quad I_n = \sum_{k=1}^{n} y_{(k-1)\Delta t} \cdot (\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t})\ , \quad \Delta t = \frac{t}{n}$$

$$\int_0^t y_s\ d\omega_s = \lim_{n\to\infty} I_n$$

Der Grenzwert ist ein Grenzwert von Zufallsgrößen im quadratischen Mittel, d.h. genauer gesagt gilt:

$$\mathcal{E}(\int_0^t y_s\ d\omega_s - I_n)^2 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Entscheidend ist bei der Definition, daß die Summanden von I_n jeweils ein Produkt von zwei unabhängigen Zufallsgrößen sind:
dem Wert $y_{(k-1)\Delta t}$ des integrierten Prozesses am *linken Rand* des kleinen Zeitintervalls $[(k-1)\Delta t,\ k\Delta t]$ und dem Zuwachs $\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t}$ des Wiener-Prozesses in diesem Intervall.

Anmerkung: 1) Die wesentliche Eigenschaft von $\{y_t;\ t \geq 0\}$, nicht antizipierend zu sein, läßt sich etwas mehr präzisieren, ohne zu sehr in die technischen Details zu gehen. $\mathcal{F}_t$ bezeichne für jedes $t \geq 0$ eine Familie von Ereignissen (mit der Struktur einer $\sigma-$Algebra, d.h. gewisse Kombinationen von Ereignissen aus $\mathcal{F}_t$ sind wieder in $\mathcal{F}_t$), die die bis zur Zeit t verfügbare Information enthält. $\mathcal{F}_t$ besteht aus solchen Ereignissen, von denen bis zur Zeit t feststeht, ob sie eintreffen oder nicht. Wir nehmen an:

$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$	für $s < t$	(die verfügbare Information wächst mit der Zeit)
$\{a < y_t < b\} \in \mathcal{F}_t$		(y_t enthält keine Information über Ereignisse nach der Zeit t)
$\{a < \omega_t < b\} \in \mathcal{F}_t$		(der Wiener-Prozeß ist an die
$\omega_t - \omega_s$ unabhängig zu $\mathcal{F}_s$	für $s < t$	Informationsentwicklung angepaßt)

2) Der Wert des Integrals hängt entscheidend davon ab, an welcher Stelle des Intervalls $[(k-1)\Delta t,\ k\Delta t]$ der Wert der Zufallsfunktion y_s in (31) eingesetzt wird. Als Beispiel

betrachten wir $y_t = \omega_t,\ t \geq 0$, d.h. wir integrieren den Wiener-Prozeß bzgl. sich selbst. In (31) ersetzen wir $(k-1)\Delta t$ durch eine beliebige Stelle $t(n,k)$ im Intervall $[(k-1)\Delta t,\ k\Delta t]$. Würden wir definieren:

$$\int_0^t \omega_s\, d\omega_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \omega_{t(n,k)} \left(\omega_{k\Delta t} - \omega_{k-1)\Delta t}\right)$$

so müßten auch die Erwartungswerte konvergieren, also:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\quad \sum_{k=1}^{n} \omega_{t(n,k)} \left(\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t}\right) = \sum_{k=1}^{n} cov(\omega_{t(n,k)},\ \omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t}) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} (t(n,k) - (k-1)\Delta t) \longrightarrow \mathcal{E} \int_0^t \omega_s\, d\omega_s\end{aligned}$$

wegen der Rechenregeln für die Kovarianzen des Wiener-Prozesses (s. oben). Für $t(n,k) = (k-1)\Delta t$ - den Fall des Itô-Integrals - erhalten wir 0, für $t(n,k) = k\Delta t$ erhalten wir $n \cdot \Delta t = t$, und für passend gewählte Folgen $t(n,k)$ könnten wir jeden Wert zwischen 0 und t als Erwartungswert des stochastischen Integrals erhalten. Um $\int_0^t \omega_s\ d\omega_s$ einen eindeutigen Wert zuzuweisen, müssen wir uns also auf eine Folge $t(n,k)$ einigen.

Zur Illustration, wie Itô-Integrale berechnet werden und daß sie anderen Rechenregeln als gewöhnliche Integrale folgen, zeigen wir:

$$(32) \quad \int_0^t \omega_s\ d\omega_s = \frac{1}{2}(\omega_t^2 - \omega_0^2)\ - \ \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(\omega_t^2 - t)$$

Da sich bei Summation der Differenzen $\omega_{k\Delta t}^2 - \omega_{(k-1)\Delta t}^2$ alle Terme bis auf den ersten und letzten wegheben und $n\Delta t = t$, haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\omega_t^2 - \omega_0^2) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\omega_{k\Delta t}^2 - \omega_{(k-1)\Delta t}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t})(\omega_{k\Delta t} + \omega_{(k-1)\Delta t}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t})^2 + \sum_{k=1}^{n} (\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t})\ \omega_{(k-1)\Delta t}\end{aligned}$$

Der zweite Term konvergiert gegen $\int_0^t \omega_s\ d\omega_s$. Der erste Term ist eine Summe von n unabhängig, identisch verteilten Zufallsgrößen und stimmt daher nach dem Gesetz der großen Zahlen näherungsweise mit seinem Erwartungswert überein, d.h. mit

$$\frac{n}{2} \mathcal{E} \left(\omega_{k\Delta t} - \omega_{k-1)\Delta t}\right)^2 = \frac{n}{2}\Delta t = \frac{t}{2}.$$

Für glatte, z.B. stetig differenzierbare, Funktionen f_s gilt $\int_0^t f_s\, df_s = \frac{1}{2}(f_s^2 - f_0^2)$. Das stochastische Integral (32) enthält dagegen noch den Zusatzterm $-\frac{t}{2}$, da der lokale Zuwachs des Wiener-Prozesses über ein Intervall der Länge Δt von der Größenordnung seiner Standardabweichung - also $\sqrt{\Delta t}$ - ist, während der entsprechende Zuwachs einer glatten Funktion f_s proportional zu Δt - also für $\Delta t \to 0$ wesentlich kleiner - ist.

6.3 Stochastische Differentialgleichungen

Der Wiener-Prozeß fluktuiert um seinen Erwartungswert 0 und wird dementsprechend durch symmetrische Irrfahrten approximiert. Wie bei Irrfahrten ist aber auch bei stochastischen Prozessen in stetiger Zeit der Fall interessant, daß ein Prozeß im Mittel wächst oder fällt, d.h. daß er einen *Trend* oder eine *Drift* hat. Aus dem Wiener-Prozeß mit beliebigem σ (vgl. Abschnitt 5.1) erhalten wir so den **allgemeinen Wiener-Prozeß** $\{x_t;\ t \geq 0\}$ mit *Driftrate* μ und *Varianzrate* σ^2 :

(33) $x_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot \omega_t \quad , \quad t \geq 0$

x_t ist demnach $\mathcal{N}(\mu t,\, \sigma^2 t)-$verteilt. Für den Zuwachs des allgemeinen Wiener-Prozesses über ein kleines Zeitintervall Δt erhalten wir so

$$x_{t+\Delta t} - x_t = \mu \cdot \Delta t + \sigma(\omega_{t+\Delta t} - \omega_t)$$

Für $\Delta t \to 0$ geht dies in die differentielle Form über:

(34) $dx_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot d\omega_t$

Dies ist nur eine andere Schreibweise für die Beziehung (33), die sich auch in Integralform schreiben läßt:

$$x_t = \int_0^t \mu\, ds + \int_0^t \sigma\, d\omega_s \tag{33'}$$

da - wie man sofort aus der Definition des stochastischen Integrals sieht - $\int_0^t d\ \omega_s = \omega_t - \omega_0 = \omega_t$.

(34) geht davon aus, daß der lokale Trend, dessen Größe die Driftrate μ wiedergibt, und die lokale Variabilität, beschrieben durch den Parameter σ, stets konstant sind. Eine wesentlich größere und zum Modellieren vieler Vorgänge in Natur und Wirtschaft geeignete Klasse stochastischer Prozesse erhält man, wenn μ und σ in (34) von Zeit und vom erreichten Niveau abhängen dürfen. Solche Prozesse $\{x_t;\ t \geq 0\}$, die wir Itô-Prozesse nennen, sind als Lösungen **stochastischer Differentialgleichungen** gegeben:

(35) $dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)d\omega_t$

Intuitiv bedeutet dies:

$$x_{t+\Delta t} - x_t = \mu(x_t, t)\Delta t + \sigma(x_t, t)(\omega_{t+\Delta t} - \omega_t),$$

d.h. der Zuwachs des Prozesses in einem kleinen Intervall der Länge Δt nach der Zeit t ist $\mu(x_t, t) \cdot \Delta t$ zuzüglich einer zufälligen Fluktuation, die $\mathcal{N}(0,\ \sigma^2(x_t, t) \cdot \Delta t)-$verteilt ist. Präzise wird eine Lösung von (35) als ein stochastischer Prozeß definiert, der die Integralgleichung

$$x_t - x_0 = \int_0^t \mu(x_s, s)ds + \int_0^t \sigma(x_s, s)d\omega_s \tag{35'}$$

erfüllt. (35) ist in diesem Sinn nur eine Kurzschreibweise für (35'). Es folgt sofort für $0 \leq t' < t$:

$$x_t = x_{t'} + \int_{t'}^t \mu(x_s, s)ds + \int_{t'}^t \sigma(x_s, s)d\omega_s$$

Da der Zuwachs des Wiener-Prozesses zwischen t' und t nicht von den Ereignissen bis zur Zeit t' abhängt, folgt daraus, daß ein Itô-Prozeß die *Markoff-Eigenschaft* besitzt.

Diskrete Approximationen von (35) und (35'), die sich auch für Simulationen von Itô-Prozessen eignen, erhalten wir, wenn wir den Prozeß zwischen 0 und t nur in regelmäßigen Abständen $k\Delta t$, $k = 0, \ldots, n$, $n\Delta t = t$, beobachten. Mit $X_k = x_{k\Delta t}$ und $Z_k = (\omega_{k\Delta t} - \omega_{(k-1)\Delta t})/\sqrt{\Delta t}$ erhalten wir

$$X_{k+1} - X_k = \mu(X_k, k) \cdot \Delta t + \sigma(X_k, k) \cdot Z_{k+1} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

bzw. mit den Abkürzungen $\mu_k(x) = \mu(x, k)\Delta t$, $\sigma_k(x) = \sigma(x, k)\sqrt{\Delta t}$:

$$X_n - X_0 = \sum_{k=1}^n \mu_{k-1}(X_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \sigma_{k-1}(X_{k-1}) \cdot Z_k$$

mit unabhängig, identisch verteilten $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrößen $Z_1, Z_2, \dots$.

6.4 Der Aktienkurs als stochastischer Prozeß

Aktienkurse sind an sich stochastische Prozesse in *diskreter Zeit*, die wegen der eingeschränkten Meßgenauigkeit auch nur *diskrete Werte* annehmen. Dennoch werden stochastische Prozesse in *stetiger Zeit* als Modelle benutzt, da sie rechnerisch nicht so aufwendig wie diskrete Modelle - z.B. der Binomial- oder Trinomialprozeß - sind. Letztere sind jedoch oft anschaulicher und eignen sich besonders für Simulationen.

Der allgemeine Wiener-Prozeß $dx_t = \mu dt + \sigma\, d\omega_t$ eignet sich selbst weniger als Aktienkursmodell, da er zum einen negative Aktienkurse zulassen würde, zum anderen die lokale Variabilität größer ist, wenn der Kurs selbst sich auf hohem Niveau bewegt. Daher wird in einem allgemeinen Ansatz der Börsenkurs s_t einer Aktie als Itô-Prozeß modelliert:

$$ds_t = \mu(s_t, t)dt + \sigma(s_t, t)d\omega_t$$

In diesem Modell stehen die unbekannten Funktionen $\mu(x,t)$ und $\sigma(x,t)$. Eine brauchbare, einfache Variante, in der nur noch zwei Modellparameter μ und σ unbekannt sind, erhält man durch folgende Überlegung: Die Rendite als prozentualer Zuwachs des eingesetzten Kapitals soll im Mittel nicht vom aktuellen Kurs bei Kauf der Aktien und schon gar nicht von der *Einheit* abhängen (DM, \$, ...), in der der Aktienwert gemessen wird. Außerdem soll die mittlere Rendite wie bei anderen Anlageformen proportional zur Länge des Anlagezeitraums sein. Zusammen ergibt sich die Forderung

$$\frac{\mathcal{E}(ds_t)}{s_t} = \frac{\mathcal{E}(s_{t+dt} - s_t)}{s_t} = \mu \cdot dt$$

Da $\mathcal{E}(d\omega_t) = 0$, ist diese Bedingung bei gegebenem Anfangskurs s_t erfüllt, wenn

$$\mu(s_t, t) = \mu \cdot s_t\,.$$

Darüberhinaus wird analog angesetzt:

$$\sigma(s_t, t) = \sigma \cdot s_t\,,$$

was die Tatsache berücksichtigt, daß die absolute Größe der Fluktuationen des Kurses sich proportional ändert, wenn wir den Kurs in einer anderen Einheit messen. Zusammengefaßt modellieren wir den **Aktienkurs** s_t als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$ds_t = \mu \cdot s_t\, dt + \sigma \cdot s_t \cdot d\omega_t$$

μ ist die zu **erwartende Aktienrendite**, σ die **Volatilität**. Ein solcher Prozeß $\{s_t;\ t \geq 0\}$ heißt **geometrische Brownsche Bewegung**, da

$$\frac{ds_t}{s_t} = \mu\, dt + \sigma\, d\omega_t\, .$$

Mit Itôs Lemma läßt sich zeigen (s. unten), daß für einen passenden allgemeinen Wiener-Prozeß $\{y_t;\ t \geq 0\}$

$$s_t = e^{y_t} \quad \text{bzw.} \quad y_t = \log s_t\, .$$

Da y_t normalverteilt ist, ist s_t somit lognormalverteilt. So wie Irrfahrten diskrete Approximationen für den allgemeinen Wiener-Prozeß liefern, läßt sich die geometrische Brownsche Bewegung, d.h. das einfache Modell für den Aktienkurs, durch geometrische Irrfahrten annähern.

6.5 Itôs Lemma

Ein entscheidendes Hilfsmittel beim Umgang mit stochastischen Differentialgleichungen ist das Lemma von Itô. Ist $\{x_t,\ t \geq 0\}$ ein Itô-Prozeß:

$$(36) \quad dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)\, d\omega_t\, ,$$

so interessiert man sich oft für den Verlauf anderer stochastischer Prozesse, die Funktionen von x_t sind: $y_t = g(x_t)$. $\{y_t;\ t \geq 0\}$ läßt sich dann ebenfalls als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung beschreiben, und aus dieser Gleichung lassen sich interessierende Eigenschaften von y_t wie z.B. das mittlere Wachstum mit der Zeit t ablesen.

Um die Gleichung für $\{y_t,\ t \geq 0\}$ heuristisch herzuleiten, nehmen wir an, daß g genügend oft differenzierbar ist. Aus der Taylorreihenentwicklung folgt:

$$(37) \quad \begin{aligned} y_{t+dt} - y_t &= g(x_{t+dt}) - g(x_t) \\ &= g(x_t + dx_t) - g(x_t) \\ &= \frac{dg}{dx}(x_t) \cdot dx_t + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dx^2}(x_t) \cdot (dx_t)^2 + \dots \end{aligned}$$

wobei die Punkte für Terme vernachlässigbarer Größenordnung (für $dt \longrightarrow 0$) stehen. Die für $dt \longrightarrow 0$ "großen" Terme in dx_t sind wegen (36)

$$\begin{array}{ll} \mu(x_t,t)\,dt & \text{(von der Größenordnung } dt) \\ \sigma(x_t,t)\,d\omega_t & \text{(von der Größenordnung } \sqrt{dt}\,) \end{array}$$

Dabei berücksichtigen wir $\mathcal{E}(d\omega_t)^2 = dt$, so daß $d\omega_t = \omega_{t+dt} - \omega_t$ von der Größenordnung seiner Standardabweichung, also $\sqrt{dt}$, ist. Terme von kleinerer Größenordnung als dt interessieren uns nicht. Daher können wir $(dx_t)^2$ durch einen einfacheren Ausdruck ersetzen:

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= (\mu(x_t,t)dt + \sigma(x_t,t)\,d\omega_t)^2 \\ &= \mu^2(x_t,t)(dt)^2 + 2\mu(x_t,t)\ \sigma(x_t,t)\ dt\ d\omega_t + \sigma^2(x_t,t)(d\omega_t)^2 \end{aligned}$$

Der erste Term ist von der Größenordnung $(dt)^2$, der zweite von der Größenordnung $dt \cdot \sqrt{dt}$, so daß beide vernachlässigt werden können. Der dritte Term ist allerdings von der mittleren Größenordnung dt. Genauer kann man zeigen, daß für $dt \longrightarrow 0$

$$(d\omega_t)^2 = dt$$

Mit dieser einfachen Identität lassen sich Rechenregeln für stochastische Differentialgleichungen aus den bekannten Regeln für den Umgang mit deterministischen Funktionen (wie z.B. der Taylorentwicklung) ableiten. Unter Vernachlässigung von Termen kleinerer Größenordnung als dt erhalten wir so aus (37) die folgende Form von **Itôs Lemma**:

$$\begin{aligned} dy_t &= dg(x_t) \\ &= \left(\frac{dg}{dx}(x_t)\cdot\mu(x_t,t) + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dx^2}(x_t)\cdot\sigma^2(x_t,t)\right)dt \\ &\quad + \frac{dg}{dx}(x_t)\cdot\sigma(x_t,t)\,d\omega_t \end{aligned}$$

bzw. - durch Weglassen des Zeitindex t und des Arguments x_t der Funktion g und ihrer Ableitungen:

$$dg = \left(\frac{dg}{dx}\mu(x,t) + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dx^2}\sigma^2(x,t)\right)dt + \frac{dg}{dx}\sigma(x,t)d\omega\,.$$

Als Beispiel betrachten wir $y_t = \log s_t$, den Logarithmus der geometrischen Brownschen Bewegung. Für $g(x) = \log x$ haben wir $\frac{dg}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{d^2g}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$, und für die geometrische Brownsche Bewegung ist $\mu(x,t) = \mu x$, $\sigma(x,t) = \sigma\, x$, so daß Itôs Lemma ergibt:

$$dy_t = (\frac{1}{s_t}\mu\, s_t - \frac{1}{2}\frac{1}{s_t^2}\,\sigma^2\, s_t^2)dt + \frac{1}{s_t}\cdot\sigma\, s_t\, d\omega_t$$

$$= \quad (\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2)dt + \sigma\, d\omega_t$$

Der *Logarithmus des Aktienkurses* ist also ein allgemeiner Wiener-Prozeß mit Driftrate $\mu^* = \mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2$ und Varianzrate σ^2. Da y_t $\mathcal{N}(\mu^* t,\ \sigma^2 t)$-verteilt ist, ist s_t selbst *lognormal-verteilt* mit Parametern $\mu^* t$ und $\sigma^2 t$.

Eine allgemeine Form von **Itôs Lemma** lautet für Funktionen $g(x,t)$, die auch noch von der Zeit t abhängen dürfen:

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \mu(x,t) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,\sigma^2(x,t) + \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x}\,\sigma(x,t) d\omega$$

$y_t = g(x_t, t)$ ist also wieder ein Itô-Prozeß, wobei als zusätzlicher Term in der Driftrate $\frac{\partial g}{\partial t}(x_t, t)$ auftaucht.

7 BLACK/SCHOLES-Optionsmodell

Wie nicht anders zu erwarten, sind Annahmen, die so schwach sind, daß sie jeder akzeptiert, nicht ausreichend, um eine rationale Optionspreistheorie zu entwickeln. In diesem Sinne liefern die in Kapitel 2 hergeleiteten Arbitragebeziehungen nur Grenzen innerhalb derer sich der Gleichgewichtspreis der Option bewegen muß, jedoch keinen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Optionspreis und seinen zugrundeliegenden Variablen (S, K, T usw.).
Es liegt nun nahe, dem zugrundeliegenden Objekt- bzw. Aktienkurs ein stochastisches Verhalten zuzuschreiben. Der häufigste Ansatz ist die Forderung, daß der Aktienkurs eine geometrisch Brownsche Bewegung ist, d.h. daß in einem Zeitraum dt gilt

$$(38) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\omega$$

oder äquivalent hierzu, daß die Rendite eine arithmetisch Brownsche Bewegung ist, dh.

$$(39) \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\omega$$

Die Drift μ gibt die gegenwärtig zu erwartende Rendite des Objektes an, die Volatilität σ die momentan zu erwartende Standardabweichung hiervon. μ hängt von den Risikopräferenzen der einzelnen Anleger ab und stellt gewissermaßen einen Ausgleich für das 'eingegangene Risiko' σ dar.
Die Idee von BLACK und SCHOLES war es nun, ein Portfolio aus Aktien und leerverkauften Calls herzustellen, das risikolos ist, also keinen stochastischen Anteil mehr besitzt. Hierzu versucht man die Anzahl der leerverkauften Calls so zu wählen, daß sie Gewinne oder Verluste in den Aktien neutralisieren. Das dermaßen konstruierte Hedgeportfeuille besitzt dann einen sicheren Ertrag und muß sich daher aus Arbitragegründen wie eine (risikolose) Anleihe verhalten. Im Gegensatz zu den in Kapitel 2 verwendeten Hedgeportfolios wird hierbei jedoch abhängig vom Kursverlauf eine kontinuierliche Anpassung im Bestand des Portfolios vorgenommen.
Zusammen mit der Vorgabe des stochastischen Prozesses liefert die Beziehung

(40) Wert des Hedgeportfolios = Wert der sicheren Anleihe

eine partielle Differentialgleichung für den Wert des Call. Obwohl BLACK und SCHOLES bei der Herleitung der Differentialgleichung ein Fehler unterlaufen ist, läßt sich die Grundidee retten und sogar auf beliebige derivative Finanzinstrumente verallgemeinern.

Satz 7.1
Jedes von einem Objekt S_t abhängige derivative Finanzinstrument F mit Fälligkeit t^* läßt sich mittels eines Portfolios, das sich aus dem Objekt und aus risikolosen Anleihen zusammensetzt, duplizieren, wenn S_t der geometrisch Brownschen Bewegung (38) genügt.

Beweis:
O.B.d.A. setzen wir wieder voraus, daß das Objekt eine Aktie mit dem stetigen Dividendenertrag d und damit den Bestandshaltekosten $b = i - d$ ist.
Zum Beweis ist in Abhängigkeit von S_t ein (dynamisches) Hedgeportfolio, bestehend aus einer Anzahl $n = n(S_t)$ von Aktien und einer Anzahl $m = m(S_t)$ von Bonds $B_t = e^{-iT}$, derart zu bestimmen, daß das Duplikationsfolio und das derivative Finanzinstrument den gleichen Cashflow besitzen. n und m sind daher so zu wählen, daß bis zum Verfallszeitpunkt t^* kein Cashflow und zum Zeitpunkt t^* der Cashflow auftritt, durch den das zu duplizierende Finanzinstrument charakterisiert ist.
Wir überlegen zunächst, wie sich der Wert V_t des Duplikationsfolios im Zeitraum dt verändert. Für die Änderung dV von V gilt:

$$(41) \quad dV = dn(S + dS) + ndS + dm(B + dB) + mdB$$

Wendet man das Lemma von ITO

$$(42) \quad df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

für $f = n$ und $f = m$ an, erhält man unter Verwendung von $dS^2 = \sigma^2 S^2 dt$, $dB = i \cdot dt$ und $dS \cdot dt = 0 = (dt)^2$:

$$(43) \quad \begin{aligned} dV \quad = \quad & \Big(\frac{\partial n}{\partial t}dt + \frac{\partial n}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\Big) S_t + \frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2 dt + ndS + \\ & + \Big(\frac{\partial m}{\partial t}dt + \frac{\partial m}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\Big) B_t + mi \cdot dt \end{aligned}$$

Die Forderung, daß *kein* Cashflow auftritt, bedeutet nun, daß die durch den Kauf bzw. Verkauf von Aktien und Anleihen im Zeitraum dt auftretenden Zahlungen (dies sind alle Größen mit Ausnahme von ndS und $midt$) durch die Erträge bzw. Kosten des Objektes, nämlich $d \cdot nS_t dt = (i-b)nSdt$ neutralisiert werden. Dies liefert:

$$
\begin{aligned}
n(i-b)S_t dt \quad &= \quad \Big(\frac{\partial n}{\partial t}dt + \frac{\partial n}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\Big)S_t + \frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2 dt + \\
&\quad + \Big(\frac{\partial m}{\partial t}dt + \frac{\partial m}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\Big)B_t
\end{aligned} \tag{44}
$$

Ordnet man Gleichung (44) nach dem stochastischen Anteil $d\omega$ und dem sicheren Anteil dt erhält man:

$$
\Big\{\Big(\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)S+\frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2+\Big(\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial m}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)B+n(b-i)S\Big\}dt
$$

$$
+\Big(\frac{\partial n}{\partial t}S + \frac{\partial m}{\partial S}B\Big)\sigma S d\omega = 0 \tag{45}
$$

Also müssen der stochastische und der risikolose Anteil gleich Null sein. Es folgen

$$
\Big(\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)S+\frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2+\Big(\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial m}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)B+n(b-i)S=0 \tag{46}
$$

und

$$
\frac{\partial n}{\partial S}S + \frac{\partial m}{\partial S}B = 0 \tag{47}
$$

Setzt man Gleichung (47) in Gleichung (46) ein, erhält man:

$$
\Big(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)S + \frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2 + \Big(\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)B + n(b-i)S = 0 \tag{48}
$$

Differenziert man Gleichung (47) partiell nach S erhält man:

$$
\frac{\partial^2 n}{\partial S^2}S_t + \frac{\partial^2 m}{\partial S^2}B_t = -\frac{\partial n}{\partial S} \tag{49}
$$

Einsetzen von Gleichung (49) in Gleichung (48) liefert:

$$
\frac{\partial n}{\partial t}S + \frac{\partial m}{\partial t}B + \frac{1}{2}\frac{\partial n}{\partial S}\sigma^2 S^2 + n(b-i)S = 0 \tag{50}
$$

Nach Definition von V gilt:

$$
m = B^{-1}(V - nS) \tag{51}
$$

Die partielle Ableitung von Gleichung (51) nach t liefert:

$$(52)\quad \frac{\partial m}{\partial t} = -iB^{-1}(V - nS) + B^{-1}\Big(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial n}{\partial t}S\Big)$$

Einsetzen in Gleichung (50) und kürzen liefert:

$$(53)\quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial n}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + nbS - iV = 0$$

Differenziert man Gleichung (51) partiell nach S erhält man:

$$(54)\quad \frac{\partial m}{\partial S} = B^{-1}\Big(\frac{\partial V}{\partial S} - n - \frac{\partial n}{\partial S}S\Big)$$

Zusammen mit Gleichung (47) ergibt Gleichung (54):

$$(55)\quad n = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Setzt man schließlich Gleichung (55) in Gleichung (53) ein, ergibt sich die Differentialgleichung von BLACK-SCHOLES für den Wert V des Duplikationsportfolios und damit für den Wert F des derivativen Finanzinstrumentes:

$$(56)\quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + bS\frac{\partial V}{\partial S} - iV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Die Funktion $V(S_t)$, die der Differentialgleichung (56) genügt und zum Zeitpunkt t^* den gleichen Pay-off wie das vorgegebene Finanzinstrument $F(S_t)$ besitzt, für die also die Randbedingung

$$(57)\quad V(S_{t^*}) = F(S_{t^*})$$

gilt, beschreibt das vorgegebene Finanzinstrument.

■

Bemerkung 7.2

i) Die in Satz 2.1 gefundene Funktion $V(S_t, t^*, K) = S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT}$ für den Wert eines Terminkontraktes mit Terminkurs K erfüllt offensichtlich die DGL (56) und genügt der Randbedingung $V(S_{t^*}) = S_{t^*} - K$.

ii) Will man den in Satz 7.1 angegebenen dynamischen Hedgeprozeß durchführen, entstehen Probleme mit den (in einem perfekten Markt nicht vorhandenen) Transaktionskosten.

8 Eine analytische Lösung für europäische Optionen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Black/Scholes-Gleichung zur Bewertung europäischer Optionen hergeleitet. Das mathematische Modell einer Kaufoption lautet demnach:

$$(58)\quad iC - bS\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad 0 \le t \le t^*,\ 0 < S < \infty,$$

$$(59)\quad C(S,t^*) = \max\{0, S-K\}, \qquad 0 < S < \infty,$$

$$(60)\quad C(0,t) = 0, \quad \lim_{S\to\infty} C(S,t) = S, \qquad 0 \le t \le t^*.$$

Das Problem (58) - (60) kann analytisch gelöst werden. Die Bedingung (59) zum Ausübungszeitpunkt stellt eine Endbedingung dar. Die Transformation $T = t^* - t$ verwandelt (59) in eine Anfangsbedingung. Wir haben es so mit einem parabolischen Anfangswertproblem zu tun. Mit Hilfe weiterer Substitutionen kann die Gleichung auf eine einfache, aus der Literatur bekannte Form gebracht und (58) - (60) gelöst werden.
Wir multiplizieren dazu die Differentialgleichung (58) mit $\frac{2}{\sigma^2}$, setzen

$$\alpha = \frac{2i}{\sigma^2},\ \beta = \frac{2b}{\sigma^2}$$

und betrachten die Restlaufzeit $T = t^* - t$.
Setzt man weiterhin

$$C(S,T) = e^{-iT} g(u,v), \quad \text{mit} \qquad v = \sigma^2(\beta-1)^2\frac{T}{2}, \quad u = (\beta-1)\ln\frac{S}{K} + v,$$

so erhält man die neue Differentialgleichung

$$(61)\quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad 0 \le v \le \sigma^2(\beta-1)^2\frac{t^*}{2} = v^*, \quad -\infty < u < \infty,$$

mit der Anfangsbedingung

$$(62)\quad g(u,0) = K\max\{0, e^{\frac{u}{\beta-1}} - 1\} =: g_0(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

Solche Anfangswertprobleme sind in der Literatur ausführlich dargestellt und treten beispielsweise bei der mathematischen Modellierung von Wärmeleitungs- und Diffusionsprozessen auf.

Die Lösung lautet:

$$g(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi v}} g_0(\xi) e^{-\frac{(\xi-u)^2}{4v}} d\xi.$$

Um zum Optionspreis $C(S,T)$ zu gelangen, muß man nun die Rücktransformation durchführen. Wir wollen uns hier nur auf einen Teil beschränken.

$$C(S,T) = e^{-iT} g(u,v) = e^{-iT} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi v}} g_0(\xi) e^{-\frac{(\xi-u)^2}{4v}} d\xi$$

Substituiert man $\xi = (\beta - 1) \ln \frac{y}{K}$, so erhält man die Anfangsbedingung in ihrer ursprünglichen Form $\max\{0, y - K\}$. Ersetzt man weiterhin u und v durch die entsprechenden Ausdrücke für S und T, dann ist:

$$(63) \quad C(S,T) = e^{-iT} \int\limits_{0}^{\infty} \max\{0, y-K\} \frac{1}{\sigma\sqrt{T} y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln y - (\ln S + (b - \frac{\sigma^2}{2})T)]^2}{2\sigma^2 T}} dy.$$

Diese Gleichung läßt eine interessante Interpretation zu:

> Der Wert der Kaufoption $C(S,T)$ ergibt sich als abgezinster Erwartungswert der Endbedingung $\max\{0, S - K\}$. Die Zufallsgröße $\ln y$ ist dabei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\ln S + (b - \frac{\sigma^2}{2})T$ und der Varianz $\sigma^2 T$.

Diese Tatsache werden wir uns später bei der Herleitung numerischer Verfahren zunutze machen.
Da der Ausdruck (63) für einfache Berechnungen noch zu kompliziert erscheint, kann man ihn weiter umformen zu:

$$(64) \quad C(S,T) = e^{-(i-b)T} S \mathcal{N}(y + \sigma\sqrt{T}) - e^{-iT} K \mathcal{N}(y),$$

$$y = \frac{\ln \frac{S}{K} + (b - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

wobei $\mathcal{N}$ die Normalverteilung bezeichnet:

$$\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{y}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Mit Hilfe der Put-Call-Parität

$$P(S,T) = C(S,T) - S e^{-(i-b)T} + K e^{-iT}$$

ergibt sich der Wert einer europäischen Verkaufsoption als

$$(65)\quad P(S,T) = e^{-iT} K\mathcal{N}(-y) - e^{-(i-b)T} S\mathcal{N}(-y - \sigma\sqrt{T}).$$

Europäische Kauf- und Verkaufsoptionen sind somit analytisch lösbar.
Die Formel zur Bestimmung des Wertes der europäischen Kaufoption (64) läßt sich verschieden interpretieren:

- Der erste Term ($S\mathcal{N}(y + \sigma\sqrt{T})$, für $i = b$) steht für den Wert der Aktie, die der Käufer der Kaufoption im Fall der Ausübung ($S > K$) bezieht. Der zweite Term ($e^{-iT} K\mathcal{N}(y)$) repräsentiert den Wert des Ausübungskurses.

- Wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben, kann der Wert einer Kaufoption durch Aktien und Anleihen dupliziert werden. Der in Aktien investierte Betrag ergibt sich dabei als $\frac{\partial C}{\partial S} S$, wobei $\frac{\partial C}{\partial S}$ die sogenannte Hedge-Rate ist. Sie bestimmt das zum Hedgen notwendige Verhältnis zwischen Aktien und Optionen. Leitet man (64) nach S ab, so erhält man $\frac{\partial C}{\partial S} = \mathcal{N}(y + \sigma\sqrt{T})$. Der erste Term in (64) steht somit für den in Aktien und der zweite für den in Anleihen investierten Betrag.

Desweiteren kann man die analytische Lösungsformel auch benutzen, um interessante Spezialfälle zu untersuchen:

- Ist $S >> K$, so verhält sich der Wert der Kaufoption wie $S - e^{-iT} K$.

- Wenn der Kurs Null ist, dann ist die Option wertlos ($C(0,T) = 0$).

- Angenommen, die Volatilität des Kurses ist Null. Dann ist eine Verkaufsoption wertlos.

Da die analytischen Lösungsformeln vom Wert der entsprechenden Normalverteilungen abhängen, muß man bei praktischen Anwendungen auf Approximationen der Normalverteilung zurückgreifen.
In der Literatur (beispielsweise [3]) findet man verschiedene Näherungsformeln. Nachfolgend wollen wir einige untersuchen.

a. Die Normalverteilung kann folgendermaßen approximiert werden:

$$\mathcal{N}(y) \approx 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \text{mit}$$

$$t = \frac{1}{1+by}, \qquad b = 0.332672527,$$
$$a_1 = 0.17401209, \qquad a_2 = -0.04793922,$$
$$a_3 = 0.373927817.$$

Der Approximationsfehler hat unabhängig von y die Größenordnung $O(10^{-5})$.

b.

$$\mathcal{N}(y) \approx 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \text{mit}$$

$$t = \frac{1}{1+by}, \qquad b = 0.231641888,$$
$$a_1 = 0.127414796, \qquad a_2 = -0.142248368, \qquad a_3 = 0.71070687,$$
$$a_4 = -0.726576013, \qquad a_5 = 0.530702714.$$

Der Fehler dieser Approximation liegt bei $O(10^{-7})$.

c. Eine andere Approximation der Normalverteilung, deren Fehler von der Größenordnung $O(10^{-5})$ ist, lautet:

$$\mathcal{N}(y) \approx 1 - \frac{1}{2(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5)^8}, \quad \text{mit}$$

$$a_1 = 0.099792714, \qquad a_2 = -0.044320135, \qquad a_3 = 0.009699203,$$
$$a_4 = -0.000098615, \qquad a_5 = 0.00581551.$$

d. Als letzte Möglichkeit wollen wir hier noch die Taylorreihenzerlegung angeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(y) &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y - \frac{y^3}{1!2^1 3} + \frac{y^5}{2!2^2 5} - \frac{y^7}{3!2^3 7} + \cdots\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Reihe kann die Normalverteilung beliebig genau angenähert werden, wobei natürlich mit der Genauigkeit auch die Anzahl der benötigten Summanden und somit der arithmetischen Operationen steigt.

Ein Vergleich aller vier Näherungsformeln ist in der Abbildung 1 enthalten. Die Taylorreihe wurde beim ersten Summanden, der betragsmäßig kleiner als 10^{-5} ist, abgebrochen. Die Spalte 'iter' gibt dabei die Nummer des letzten Summanden an.

Approximationen der Normalverteilung					
x	norm-a	norm-b	norm-c	norm-d	iter
1.0000	0.8413517179	0.8413447362	0.8413516627	0.8413441191	6
1.1000	0.8643435425	0.8643338948	0.8643375717	0.8643341004	7
1.2000	0.8849409364	0.8849302650	0.8849298369	0.8849309179	7
1.3000	0.9032095757	0.9031994476	0.9031951398	0.9031993341	8
1.4000	0.9192515822	0.9192432862	0.9192361959	0.9192427095	8
1.5000	0.9331983332	0.9331927690	0.9331845052	0.9331930259	9
1.6000	0.9452030611	0.9452007087	0.9451929907	0.9452014728	9
1.7000	0.9554336171	0.9554345667	0.9554288709	0.9554342221	10
1.8000	0.9640657107	0.9640697332	0.9640670474	0.9640686479	10
1.9000	0.9712768696	0.9712835061	0.9712842148	0.9712839202	11
2.0000	0.9772412821	0.9772499371	0.9772538334	0.9772496294	12

Abbildung 1

Die Abbildung 2 zeigt den Optionspreis, der mit Hilfe der Formel (64) für eine konkrete europäische Kaufoption auf der Grundlage verschiedener Approximationen der Normalverteilung berechnet wurde.

Analytische Formel für europäische Kaufoption			
Aktienkurs:		230.00	DM/Aktie
Ausübungskurs:		210.00	DM/Aktie
stetiger Zinssatz:		0.04545	
Volatilität:		0.25000	auf Jahresbasis
Restlaufzeit:		0.50000	Jahre
keine Dividende			
Optionspreis:			
norm-a	norm-b	norm-c	norm-d
30.74261	30.74158	30.74352	30.74176

Abbildung 2

9 Das Binomialmodell für europäische Optionen

Da die meisten Optionspreismodelle (insbesondere für amerikanische Optionen) keine analytische Lösung zulassen, müssen numerische Verfahren herangezogen werden.
Am bekanntesten sind dabei Methoden, die den Aktienkurs als einen diskreten stochastischen Prozeß voraussetzen.
Dabei wird zunächst die Laufzeit der Option in n äquidistante Zeitschritte zerlegt,

$$\Delta t = \frac{t^*}{n}.$$

Zu jedem diskreten Zeitpunkt $t_j = j\Delta t,\ j = 0, ..., n$, kann der Kurs S_k^j (j kennzeichnet den Zeitpunkt und k den Zustand des Kurses) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_k in einen von m neuen Zuständen $S_k^{j+1},\ k = 1, ..., m$, springen.

$$\sum_{k=1}^{m} p_k^j = 1, \quad 0 \leq p_k^j \leq 1, \quad \text{für } k = 1, 2, ..., m.$$

Wenn man nun den Kurs zum Anfangszeitpunkt (z.B. dem gerade aktuellen) kennt, so kann man einen Baum möglicher Kurse bis hin zu einem gewünschten Zeitpunkt (z.B. dem Zerfallsdatum) bestimmen. Einen solchen Baum nennt man auch **Kursbaum**. Ist für den Endzeitpunkt t_n des Kursbaumes der Optionspreis bekannt (z.B. durch den inneren Wert der Option), so läßt sich der Wert der Option zum Zeitpunkt t_{n-1} (entsprechend (63)) als abgezinster Erwartungswert der zugehörigen Optionspreise des Zeitpunkts t_n bestimmen:

$$C(S_k^{n-1}, t_{n-1}) = \mathcal{E}[C(S^n, t_n)] = \sum_{k=1}^{m} p_k C(S_k^n, t_n).$$

Diesen Prozeß kann man für alle weiteren Zeitschritte $t_j,\ j = n-2, n-3, ..., 0$, fortsetzen und so näherungsweise die Preise bis hin zum Anfangszeitpunkt berechnen.
Betrachten wir als einfachstes Beispiel dazu, das in der Literatur ausführlich dargestellte **Binomialmodell**.
Dabei wollen wir zunächst annehmen, daß während der Laufzeit der Option keine Dividenden anfallen.
Das Zeitintervall $0 \leq t \leq t^*$ wird in n gleichgroße Zeitintervalle $\Delta t = \frac{t^*}{n}$ zerlegt und vorausgesetzt, daß Kursänderungen nur zu den Zeitpunkten

$$t_0 = 0,\ t_1 = \Delta t,\ t_2 = 2\Delta t,\ ...,\ t_n = n\Delta t = t^*$$

stattfinden können.
Charakteristisch für das Binomialmodell ist, daß diese Kursänderungen nur in zwei Richtungen zugelassen werden:

- entweder bewegt sich der Kurs mit einer Wahrscheinlichkeit p_1 und einer Änderungsrate u_1 in die eine Richtung (z.B. nach oben),
- oder er bewegt sich mit der Wahrscheinlichkeit p_2 und der Änderungsrate u_2 in die andere Richtung (z.B. nach unten).

Die Wahrscheinlichkeiten p_k und die Änderungsraten u_k müssen dabei so gewählt werden, daß im Grenzfall $\Delta t \to 0$ eine Brownsche Bewegung entsteht, d.h. (entsprechend (63)) $\ln S^{j+1}$ soll normalverteilt sein mit dem Erwartungswert $\ln S^j + (b - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t$ und der Varianz $\sigma^2 \Delta t$. Berücksichtigt man weiterhin, daß sich der Kurs in eine der beiden Richtungen bewegen muß , so erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 1, \\ \mathcal{E} = p_1 \ln(u_1 S^j) + p_2 \ln(u_2 S^j) &= \ln(S^j) + (b - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \\ p_1 \left(\ln(u_1 S^j) - \mathcal{E}\right)^2 + p_2 \left(\ln(u_2 S^j) - \mathcal{E}\right)^2 &= \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Setzt man $p_1 = p$, so bleiben nach einigen Umformungen noch zwei Gleichungen mit drei Unbekannten übrig:

$$\begin{aligned} p \ln(\frac{u_1}{u_2}) + \ln u_2 &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \\ (1-p)p \left(\ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\right)^2 &= \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Um dieses (nichtlineare) System lösen zu können, muß man sich eine zusätzliche Bedingung überlegen.
Sinnvoll ist $u_1 u_2 = 1$. Folgen unmittelbar hintereinander eine Auf- und Abwärtsbewegung des Kurses, so gelangt man wieder zum Ausgangszustand.
Gleichzeitig wird durch diese zusätzliche Bedingung die Anzahl der zu untersuchenden möglichen Kurse drastisch eingeschränkt (von 2^n auf $n+1$).
Nun kann man die Parameter des Binomialmodells bestimmen. Sie lauten (näherungsweise):

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}, \; u_1 = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \; p_2 = 1 - p_1, \; u_2 = \frac{1}{u_1}.$$

Es wurde eine risikoneutrale Welt vorausgesetzt. Der Wert der Option zum Zeitpunkt t_j für den Kurs S_k^j, den wir mit O_k^j bezeichnen wollen, ergibt sich dann als abgezinster Erwartungswert der zum Zeitpunkt t_{j+1} möglichen Optionspreise O_k^{j+1} und O_{k+1}^{j+1}:

$$O_k^j = e^{-i\Delta t}\left(pO_{k+1}^{j+1} + (1-p)O_k^{j+1}\right).$$

Da der Optionspreis zum Zeitpunkt t^* gegeben ist,

$$O_k^n = \max\{0, S_k^n - K\},$$

kann man nacheinander alle Werte $O_k^j, j = n-1, n-2, ..., 0$, bestimmen.
Ein Beispiel für eine Kaufoption ist in den Abbildungen 3 und 4 dargestellt.

Binomialmodell

Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	5

Dividende (keine/stetig/diskret): k

Call/Put: c europ./amerik.: e

Optionspreise						
Zeit keine Dividende Kurse	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
341.50558						131.506
315.54682					106.497	
291.56126				83.457		81.561
269.39890			62.237		60.349	
248.92117		44.328		40.818		38.921
230.00000	30.378		26.175		20.951	
212.51708		16.200		11.238		2.517
196.36309			6.010		1.275	
181.43700				0.646		0.000
167.64549					0.000	
154.90230						0.000

Abbildung 3

Binomialmodell					
Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	100
Dividende (keine/stetig/diskret): k					
Call/Put: c				europ./amerik.: e	
aktueller Kurs: 230.00				Optionspreis: 30.76942	

Abbildung 4

Vergleicht man die Black/Scholes-Lösung dieses Beispiels mit dem Ergebnis des Binomialmodells für unterschiedliche Zeitunterteilungen n, so sieht man, daß die Lösung des Binomialmodells mit wachsendem n gegen die Black/Scholes-Lösung konvergiert.

Unterteilungen	Black/Scholes	5	10	20	50	150
Optionswert	30.741	30.378	30.817	30.724	30.751	30.740

Abbildung 5

Treten während der Laufzeit der Option Dividenden auf, so muß das beschriebene Verfahren entsprechend der Art der Dividendenzahlung modifiziert werden.

9.1 Stetige Dividendenerträge

Liegen stetige Dividendenerträge vor, so muß $b = i$ durch $b = i - i_f$ ersetzt werden, wobei i_f den stetigen Dividendenbetrag bezeichnet. Betrachten wir eine \$ - Kaufoption mit einer Restlaufzeit von 1/3 Jahren, einem Kurs von S=1,50 DM/\$ und K=1,50 DM/\$. Der stetige Dividendenertrag beträgt 1% . Mit Hilfe des Binomialmodells erhält man dann die folgenden Werte:

Binomialmodell

Aktienkurs:	1.50	Volatilität:	0.20	Zinssatz:	0.09000
Ausübungskurs:	1.50	Restlaufzeit:	0.33	Schritte:	6
Dividende (keine/stetig/diskret): s				Größe:	0.01000
Call/Put: c				europ./amerik.: e	

Optionspreise							
Zeit	0.00	0.06	0.11	0.17	0.22	0.28	0.33
stetige Dividende:	0.01000						
Kurse							
1.99034							0.490
1.89869						0.405	
1.81127					0.324		0.311
1.72786				0.247		0.234	
1.64830			0.180		0.161		0.148
1.57240		0.127		0.105		0.079	
1.50000	0.087		0.067		0.042		0.000
1.43093		0.041		0.022		0.000	
1.36504			0.012		0.000		0.000
1.30219				0.000		0.000	
1.24223					0.000		0.000
1.18503						0.000	
1.13046							0.000

Abbildung 6

9.2 Diskrete, feste Dividendenerträge

a. Dividenden als fester Prozentsatz des Aktienkurses

Angenommen zu einem Zeitpunkt t_x, $t_{j-1} < t_x \leq t_j$, während der Laufzeit der Option wird eine Dividende als fester Prozentsatz δ des Aktienkurses gezahlt. Diese Dividendenzahlung bewirkt, daß - beginnend mit dem Zeitpunkt t_j - alle zeitlich nachfolgenden Kurse um den Wert $\delta S_k^{j'}$, $j' \geq j$, fallen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1-\delta)u^2 S_k^{j-1} \\
 & S_{k+1}^j - \delta S_{k+1}^j = u(1-\delta)S_k^{j-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_k^{j-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1-\delta)S_k^{j-1} \\
 & S_k^j - \delta S_k^j = (1-\delta)S_k^{j-1}/u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & (1-\delta)S_k^{j-1}/u^2
\end{tikzcd}
$$

Die Optionswerte werden wie bisher bestimmt.
Als Beispiel betrachten wir eine Kaufoption mit Dividendenzahlung von 1% des Aktienkurses zum Zeitpunkt 0.15. Die Ergebnisse sind in der Abbilding 7 dargestellt.

Binomialmodell

Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	5
Dividende (keine/stetig/diskret): d			Zeit: 0.15	Betrag:	0.01000
Call/Put: c				europ./amerik.: e	

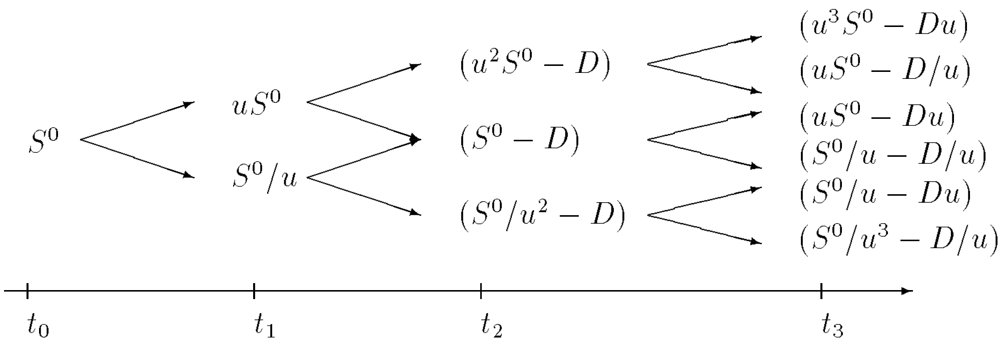
Optionspreise						
Zeit	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
Dividende	1.00	1.00	0.99	0.99	0.99	0.99
Kurse						
341.50558						128.091
315.54682					103.341	(338.09)
291.56126				80.542	(312.39)	78.646
269.39890			59.543	(288.65)	57.655	(288.65)
248.92117		41.942	(266.70)	38.329	(266.70)	36.432
230.00000	28.384	(248.92)	24.087	(246.43)	18.651	(246.43)
212.51708	(230.00)	14.592	(227.70)	9.547	(227.70)	0.392
196.36309		(212.52)	4.886	(210.39)	0.199	(210.39)
181.43700			(194.40)	0.101	(194.40)	0.000
167.64549				(179.62)	0.000	(179.62)
154.90230					(165.97)	0.000
						(153.35)

Abbildung 7

Beginnend mit dem Zeitpunkt $t_2 = 0.2$ (bei 5 betrachteten Unterteilungen des Zeitintervalls $0 \leq t \leq 0.5$) werden alle Kurse mit dem Faktor $(1-\delta)$ multipliziert. (vgl. Abbildung 3)

b. Dividenden als feste Beträge

Während der Laufzeit der Option mögen nun Dividenden (eine oder mehrere) mit festen Beträgen zu vorher genau bekannten Zeiten anfallen (z.B. 5,- DM zum Zeitpunkt t_x und 10,- DM zum Zeitpunkt t_y). Nutzt man das bisher beschriebene Vorgehen zur Konstruktion des Kursbaums, so führen eine Auf- und sofortige Abwärtsbewegung des Kurses nicht mehr auf den Ausgangszustand zurück. Diese Tatsache kann man sich an einem einfachen Beispiel sehr schnell veranschaulichen. Angenommen zum Zeitpunkt t_x, $t_1 < t_x \leq t_2 < t^*$, wird eine feste Dividende D gezahlt. Der Kursbaum hätte dann folgendes Aussehen:



Der Kursbaum wird sehr unübersichtlich und ist für praktische Rechnungen ungeeignet. Um diese Schwierigkeit umgehen zu können, setzen wir voraus, daß sich der Kurs S^j aus zwei Komponenten zusammensetzt

$$S^j = \tilde{S}^j + D^j,$$

dabei ist $\tilde{S}^j$ eine Zufallsgröße und D^j eine risikolose Komponente. D^j ist der Barwert der Dividendenzahlung zum Zeitpunkt t_j.

<u>*Beispiel:*</u> *Zum Zeitpunkt t_x, $t_{j-1} < t_x \leq t_j < t^*$, soll eine Dividendenzahlung in Höhe d erfolgen. D^j ist dann:*

$$D^j = \begin{cases} de^{-i(t_x - t_j)} & ,\textit{für } t_j \leq t_x, \\ 0 & ,\textit{für } t_x < t_j. \end{cases}$$

D.h. $D^n = 0$ und $S^n = \tilde{S}^n$. Wir erzeugen zunächst einen Kursbaum der Zufallskomponente $\tilde{S}^j$ ausgehend vom Anfangszustand $\tilde{S}^0 = S^0 - D^0$. Zum Verfallzeitpunkt t^* gilt:

$$\tilde{O}^{n-1} = e^{-i\Delta t}\mathcal{E}[\max(0, \tilde{S}^n - K)] = e^{-i\Delta t}\mathcal{E}[\max(0, S^n - K)] = O^{n-1}.$$

Die weiteren Optionspreise ergeben sich dann als $O^{j-1} = e^{-i\Delta t}\mathcal{E}[O^j]$. Durch Addition von D^j zu jedem Zeitpunkt t_j zu $\tilde{S}^j$

$$S_k^j = \tilde{S}_k^j + D^j$$

erhalten wir den für diese Optionspreise zugehörigen Kursbaum. Ein Beispiel ist in der Abbildung 8 enthalten. Zu den Zeiten $t = 0.25$ und $t = 0.75$ soll jeweils eine Dividendenzahlung in Höhe von 1,- DM fällig sein.

Binomialmodell

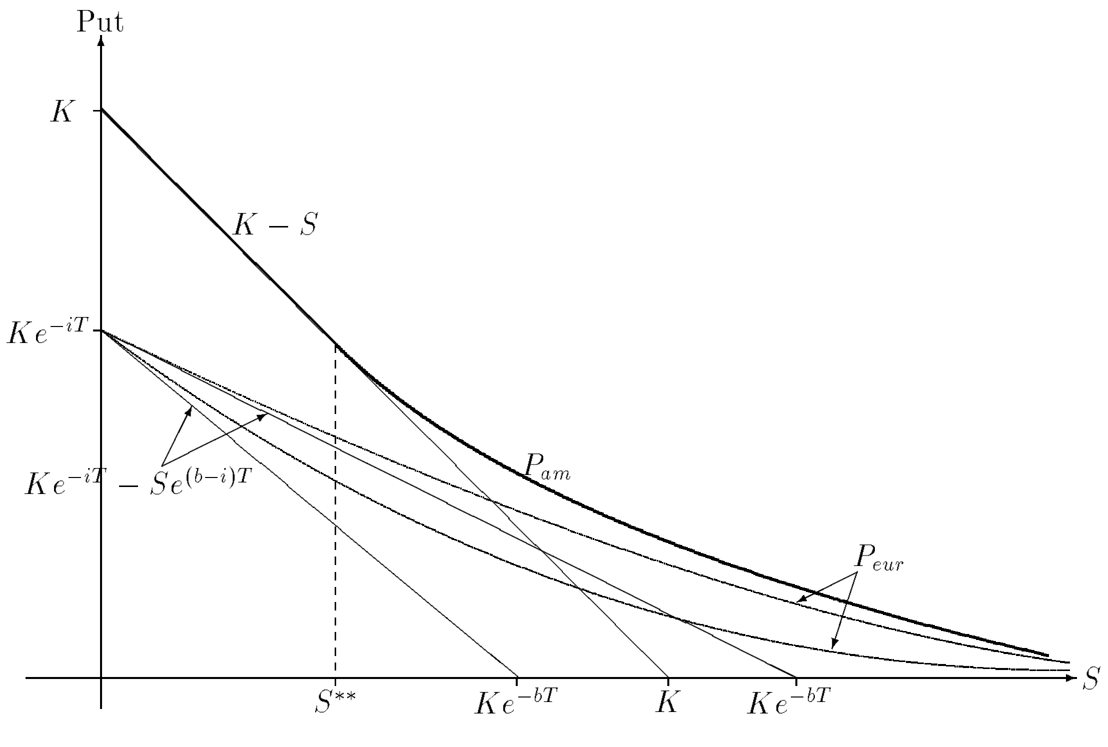
Aktienkurs:	100.00	Volatilität:	0.30	Zinssatz:	0.10000
Ausübungskurs:	100.00	Restlaufzeit:	1.00	Schritte:	6
Dividende (keine/stetig/diskret): d			Zeit: 0.75	Betrag:	1.00000
Call/Put: p				europ./amerik.: e	

Optionspreise							
Zeit	0.00	0.17	0.33	0.50	0.67	0.83	1.00
Dividende	1.90	1.94	0.96	0.98	0.99	0.00	0.00
Kurse							
204.48141							0.000
180.91053						0.000	(204.48)
160.05670					0.000	(180.91)	0.000
141.60672				0.182	(161.05)	0.000	(160.06)
125.28349			1.381	(142.58)	0.400	(141.61)	0.000
110.84188		3.917	(126.24)	2.823	(126.28)	0.880	(125.28)
98.06496	7.646	(112.78)	7.007	(111.82)	5.740	(110.84)	1.935
86.76087	(99.97)	12.255	(99.02)	12.123	(99.06)	11.595	(98.06)
76.75981		(88.70)	18.796	(87.74)	19.978	(86.76)	23.240
67.91159			(77.72)	27.233	(77.75)	30.443	(76.76)
60.08332				(68.89)	36.651	(67.91)	39.917
53.15742					(61.08)	45.195	(60.08)
47.02988						(53.16)	52.970
							(47.03)

Abbildung 8

10 Amerikanische Optionen

Das Recht zur vorzeitigen Ausübung bereitet bei der Bewertung amerikanischer Optionen große Schwierigkeiten. Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, bewirkt das Recht zur vorzeitigen Ausübung, daß der Wert amerikanischer Optionen nicht unter den inneren Wert fallen darf. Diese Bedingung wird von europäischen Optionen im allgemeinen nicht erfüllt, was sich bei Puts besonders einfach demonstrieren läßt.
Betrachten wir hierzu einen amerikanischen Put mit Ausübungskurs K und Laufzeit T. Nimmt man nun an, daß der Kurs S_t des zugrundeliegenden Objektes gleich Null ist, so wird der Wert des amerikanischen Put gleich K sein, da der innere Wert gleich K ist und der Kurs des Underlying nicht weiter absinken kann. Dies bedeutet, daß der amerikanische Put in diesem Fall vorzeitig ausgeübt wird, weil das weitere Halten der Option nur Zinsverluste verursacht. Da wir den entsprechenden europäischen Call nur durch einen Terminverkauf glattstellen können, ist der Wert des europäischen Put in diesem Fall gleich Ke^{-iT}, also kleiner als der amerikanische Putwert P_{am}. Die folgende Abbildung zeigt dies für die Putwerte bei stetigen Bestandshaltekosten b.



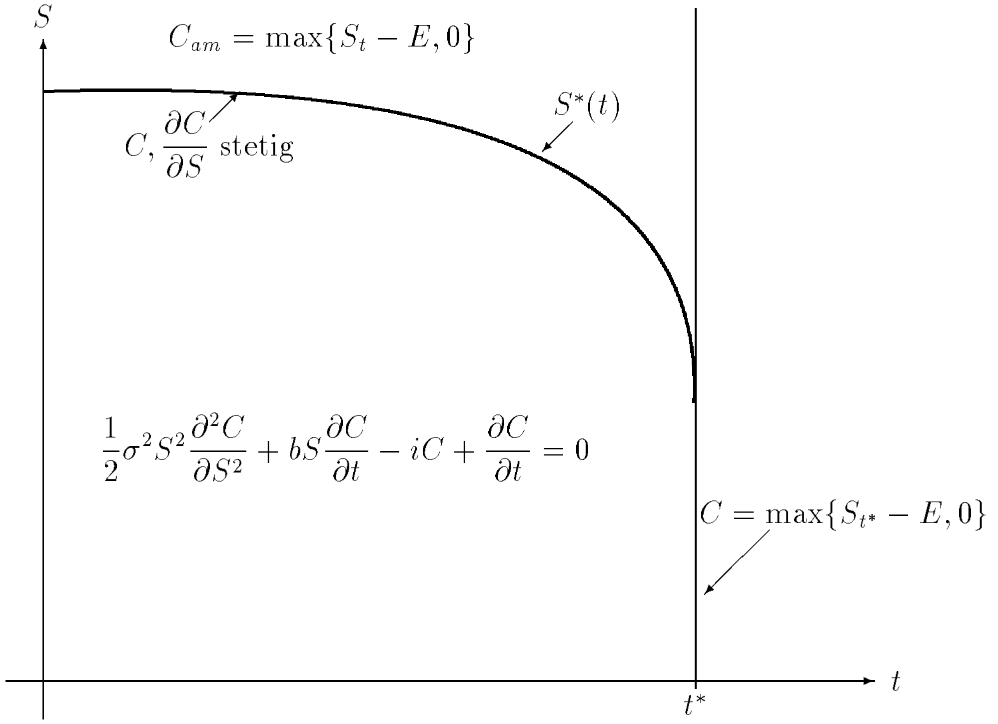
Die europäischen Optionspreisformeln können daher im allgemeinen nicht zur Bewertung amerikanischer Optionen verwendet werden. Hierbei sollte auch beachtet werden, daß eine vorzeitige Ausübung des Put i.a. schon in Frage kommt, bevor der Kurs $S_t = 0$ erreicht ist. Heuristisch gesehen ist nämlich ab einem bestimmten kritischen Kurs des Underlying der Zinsverlust auf den inneren Wert der Option größer, als die durch eventuelle Kursveränderungen zu erwartende Wertsteigerung der Option[12].

Da die Differentialgleichung von Black/Scholes jedoch nur gültig ist, solange die Option nicht ausgeübt wird[13], bedeutet dies, daß das amerikanische Optionspreisproblem ein freies Randwertproblem ist, bei dem die Differentialgleichung nur im Bereich der Kurse S gilt, die größer als der kritische Put-Kurs $S^{**} = S^{**}(t)$ bzw. kleiner als der kritische Call-Kurs $S^* = S^*(t)$ sind.

Die folgende Grafik verdeutlicht diesen Sachverhalt bei einem amerikanischen Call.

Im Bereich $\{(S,t)|0 \leq S_t < S^*(t), t < t^*\}$ gilt die Black/Scholes Differentialgleichung.

Im Bereich $\{(S,t)|S_t \geq S^*(t), t < t^*\}$ fällt die Option zurück auf den inneren Wert, wobei ein stetiger Übergang in C und $\dfrac{\partial C}{\partial S}$ stattfindet.



Trotz dieser Schwierigkeiten ist es in vielen Fällen möglich mit Hilfe der in Kapitel 2 verwendeten Mitteln der Arbitrage Aussagen über die vorzeitige Ausübung amerikanischer Optionen zu machen, ohne vom Objektkurs S_t stochastische Eigenschaften zu fordern.

[12] Dies ist einer der Gründe für die Zeitabhängigkeit des kritischen Kurses.

[13] Da keine Transaktionskosten entstehen ist die vorzeitige Ausübung der Option damit gleichzusetzen, daß die Option auf den inneren Wert fällt.

Satz 10.1

a) Ein amerikanischer Call auf ein Objekt, das während der Laufzeit der Option keine Erträge abwirft oder während der Laufzeit der Option Kosten verursacht, wird nicht vorzeitig ausgeübt und hat daher den gleichen Wert wie der ansonsten gleiche europäische Call.

b) Für einen amerikanischen Call auf ein Objekt, das während der Laufzeit der Option nur Erträge zu bestimmten Zeitpunkten $t_1, \cdots, t_n$ abwirft (keine stetigen Erträge), ist eine frühzeitige Ausübung nur kurz vor einem der Zeitpunkte $t_1, \cdots, t_n$ optimal[14].

Beweis:

Wir wenden die Put-Call-Parität aus Satz 2.5 für europäische Optionen an. Wie üblich bezeichne dabei K den Ausübungskurs, S den Objektkurs und T die Laufzeit der Option.

a) Fallen diskrete Erträge bzw. Kosten D an, gilt nach Voraussetzung $D \leq 0$. Daraus folgt:

(66) $$C(S_t, t^*, K) = P(S_t, t^*, K) + S_t - D - Ke^{-iT} \geq S_t - Ke^{-iT} > S_t - K$$

Fallen stetige Erträge bzw. Kosten d an, gilt nach Voraussetzung $d \leq 0$. Daraus folgt wegen $b - i = -d \geq 0$:

(67) $$C(S_t, t^*, K) = P(S_t, t^*, K) + S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT} \geq S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT} > S_t - K$$

In beiden Fällen gilt also für den europäischen Call

(68) $$C(S_t, t^*, K) > S_t - K$$

Wegen $C_{am} \geq C$ ist daher der Wert des amerikanischen Call während der Laufzeit immer echt größer als der innere Wert, so daß eine vorzeitige Ausübung nicht erfolgt.

b) O.B.d.A. sei t_1 der nächstgelegene Zahlungszeitpunkt (für Erträge oder Kosten) und sei $\tilde{t}$ ein beliebiger Zeitpunkt vor t_1. $\tilde{C}(S_t, \tilde{t}, K)$ bezeichne den Wert eines europäischen Call mit gleichem Ausübungskurs K wie die amerikanische Option, jedoch

[14] Dementsprechend muß bei stetigen Erträgen zu jedem Zeitpunkt mit einer vorzeitigen Ausübung gerechnet werden.

dem Verfallszeitpunkt $\tilde{t}$. Wie in Teil a) gesehen, gilt dann für jeden Zeitpunkt $t < \tilde{t}$:

(69) $\tilde{C}(S_t, \tilde{t}, K) > S_t - K$

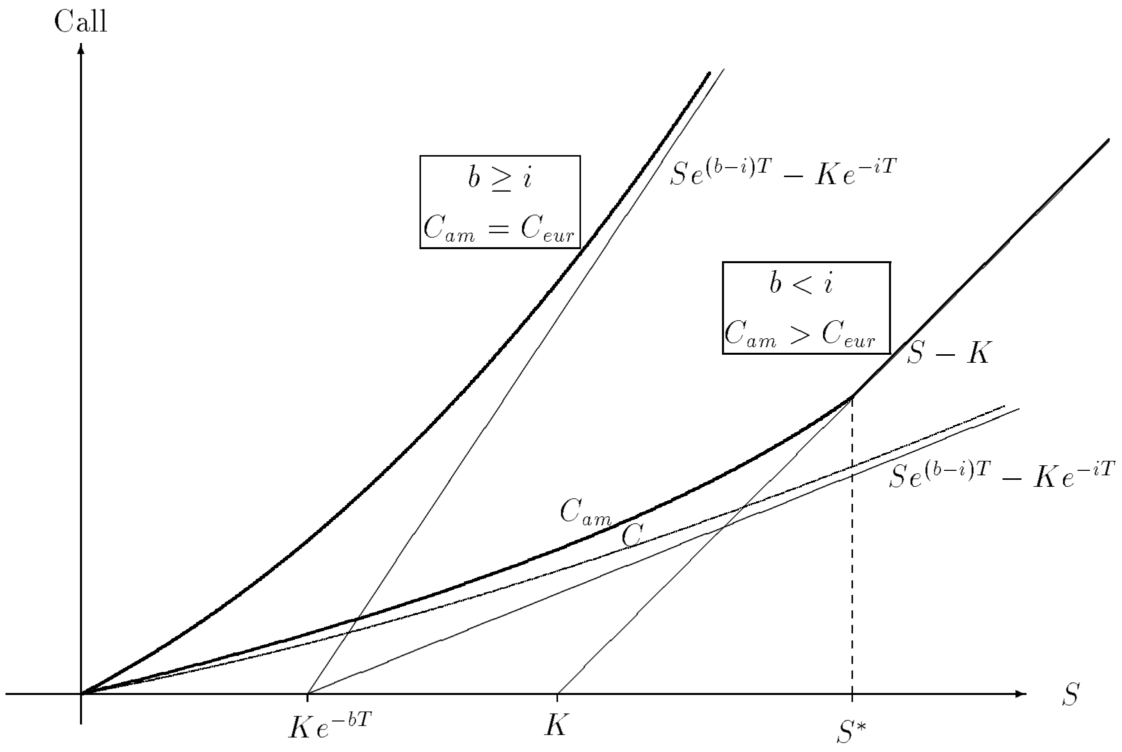
Wegen der längeren Laufzeit und der vorzeitigen Ausübbarkeit des amerikanischen Call gilt jedoch

(70) $C_{am}(S_t, t^*, K) \geq \tilde{C}(S_t, \tilde{t}, K)$

Wie in Teil a) kann dann wieder geschlossen werden, daß der amerikanische Call zum Zeitpunkt t nicht vorzeitig ausgeübt wird.

■

Das folgende Bild stellt Teil a) des letzten Satzes nochmals graphisch dar.
Im Fall $b \geq i$, was äquivalent zu $d \leq 0$ ist, gilt $C_{am} = C_{eur}$.
Im Fall $b < i$, was äquivalent zu $d > 0$ist, gilt $C_{am} > C_{eur}$.



Die Put-Call-Parität läßt sich ebenfalls auf amerikanische Optionen übertragen. Da über die kritischen Kurse $S^*(t)$ und $S^{**}(t)$ – und damit über den Zeitpunkt einer vorzeitigen Ausübung –jedoch kaum Aussagen gemacht werden können liefert die Put-Call-Parität für amerikanische Optionen nur noch Ungleichungen.

Satz 10.2 (Put-Call-Parität für amerikanische Optionen)
Für einen amerikanischen Call und einen amerikanischen Put mit gleichem Verfallszeitpunkt t^*, gleichem Ausübungskurs K auf das gleiche Objekt gelten folgende Aussagen

a) Fallen während der Laufzeit $T = t^* - t$ der Optionen Erträge bzw. Kosten mit dem Barwert D an, so ist

$$(71) \quad P_{am}(S_t, K) + S_t - Ke^{-iT} \geq C_{am}(S_t, K) \geq P_{am}(S_t, K) + S_t - K - D$$

b) Fallen während der Laufzeit $T = t^* - t$ der Optionen stetige Bestandshaltekosten b auf das Objekt an, so ist

$$(72) \quad \begin{array}{lll} P_{am}(S_t) + S_t - Ke^{-iT} \geq C_{am}(S_t) \geq P_{am}(S_t) + S_t e^{(b-i)T} - K & \text{falls} & b < i \\ P_{am}(S_t) + S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT} \geq C_{am}(S_t) \geq P_{am}(S_t) + S_t - K & \text{falls} & b \geq i \end{array}$$

Beweis:
O.B.d.A. kann angenommen werden, daß das Objekt eine Aktie ist und daß nur eine Dividende D_1 zum Zeitpunkt t_1 während der Laufzeit $T = t^* - t$ der Optionen anfällt.

a) Wir zeigen zunächst die linke Ungleichung. Hierzu betrachten wir folgendes Portfolio zum Zeitpunkt t:

   i) Kaufe den Put

   ii) Kaufe eine Aktie

   iii) Verkaufe Anleihen zum Nominalwert K, fällig zum Zeitpunkt t^*

   iv) Verkaufe den Call

   Dieses Portfolio wird trotz möglicher Suboptimalität bis zum t^* gehalten, auch wenn der leerverkaufte Call ausgeübt wird. Zu beachten ist, daß nach Satz 10.1 eine vorzeitige Ausübung des Call nur zum Zeitpunkt $\tilde{t} := t_1 - \Delta t$ stattfindet. In diesem Fall wird die Aktie aus dem Portfolio geliefert. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t^* ergibt sich dann aus der folgenden Tabelle:

	Wert zum Zeitpunkt					
	$\tilde{t} = t_1 - \Delta t$	t_1	t^*			
	vorzeitige Ausübung		Call vorzeitig ausgeübt		Call nicht vorzeitig ausgeübt	
Position	des Call		$S_{t^*} \leq K$	$S_{t^*} > K$	$S_{t^*} \leq K$	$S_{t^*} > K$
i)	≥ 0	–	$K - S_{t^*}$	0	$K - S_{t^*}$	0
ii)	$S_{\tilde{t}}$	D_1	–	–	S_{t^*}	S_{t^*}
iii)	$-Ke^{-i(t^*-\tilde{t})}$	–	$-K$	$-K$	$-K$	$-K$
iv)	$-(S_{\tilde{t}} - K)$	–	$Ke^{i(t^*-\tilde{t})}$	$Ke^{i(t^*-\tilde{t})}$	0	$-(S_{t^*} - K)$
Summe	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	0	0

Daher gilt für den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t wie behauptet:

$$(73) \quad P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t - Ke^{-iT} - C_{am}(S_t, t^*, K) \geq 0$$

Die zweite Ungleichung beweist man analog, wobei hier zu berücksichtigen ist, daß der Put vorzeitig ausgeübt werden kann.

b) Bei stetigen Bestandshaltekosten betrachten wir zuerst den Fall $b \geq i \iff d \leq 0$. Wir zeigen zunächst die linke Ungleichung

$$(74) \quad P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t e^{(b-i)T} - Ke^{-iT} \geq C_{am}(S_t, t^*, K)$$

Hierzu betrachten wir folgendes Portfolio zum Zeitpunkt t:

i) Kaufe den Put

ii) Kaufe $e^{(b-i)T}$ Aktien

iii) Verkaufe Anleihen zum Nominalwert K, fällig zum Zeitpunkt t^*

iv) Verkaufe den Call

Wie in Teil a) zeigt man nun, daß, falls der Call *nicht* vorzeitig ausgeübt wird, der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t^* gleich Null ist. Hierbei ist zu beachten, daß die vorausgesetzten Lagerhaltungskosten ($d \leq 0$) durch den Teilverkauf der Aktien finanziert werden, so daß zum Zeitpunkt t^* genau eine Aktie vorhanden ist.
Wird der Call zwischenzeitlich zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ ausgeübt, wird das gesamte Portfolio liquidiert und man erhält:

$$(75) \quad \begin{aligned} P_{am}(S_{\tilde{t}}) - (S_{\tilde{t}} - K) + S_{\tilde{t}} e^{(b-i)(t^*-\tilde{t})} - Ke^{-i(t^*-\tilde{t})} &= \\ P_{am}(S_{\tilde{t}}) + K(1 - e^{-i(t^*-\tilde{t})}) + S_{\tilde{t}}(e^{(b-i)(t^*-\tilde{t})} - 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Also gilt für den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t wie behauptet:

(76) $P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t e^{(b-i)T} - K e^{-iT} - C_{am}(S_t, t^*, K) \geq 0$

Im Fall $b < i \iff d < 0$ beweist man die linke Ungleichung

(77) $P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t - K e^{-iT} \geq C_{am}(S_t, t^*, K)$

völlig analog, wobei es wegen $d > 0$ genügt, eine Aktie im Portefeuille zu halten.

Beweisen wir nun im Fall $b \geq i$ die rechte Ungleichung

(78) $C_{am}(S_t, t^*, K) \geq P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t - K$

Wir betrachten hierzu folgendes Portfolio zum Zeitpunkt t:

i) Kaufe den Call

ii) Verkaufe den Put

iii) Leerverkauf einer Aktie

iv) Kaufe Anleihen zum Nominalwert Ke^{iT}, fällig zum Zeitpunkt t^*

Wird der Put nicht vorzeitig ausgeübt, gilt zum Zeitpunkt t^*:

$$(79) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & - & (K - S_{t^*}) & -S_{t^*} e^{-(b-i)T} + K e^{iT} & \geq & 0 & \text{falls} \quad S_{t^*} < K \\ (S_{t^*} - K) & + & 0 & -S_{t^*} e^{-(b-i)T} + K e^{iT} & \geq & 0 & \text{falls} \quad S_{t^*} \geq K \end{array}$$

Wird der Put zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ vorzeitig ausgeübt, wird das gesamte Portfolio liquidiert und man erhält:

(80) $C_{am}(S_{\tilde{t}}, K) - (K - S_{\tilde{t}}) - S_{\tilde{t}} e^{-(b-i)(\tilde{t}-t)} + K e^{i(\tilde{t}-t)} \geq 0$

Damit gilt für den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t wie behauptet:

(81) $C_{am}(S_t, t^*, K) - P_{am}(S_t, t^*, K) - S_t + K \geq 0$

Analog verfährt man im Fall $b < i$ für die rechte Ungleichung

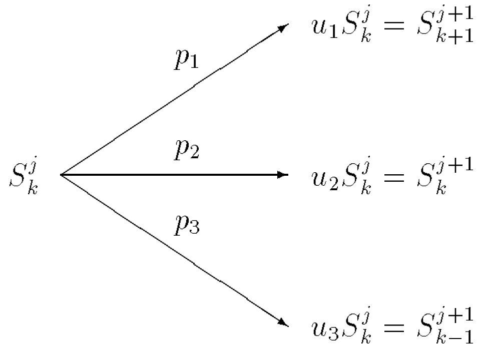
(82) $C_{am}(S_t, t^*, K) \geq P_{am}(S_t, t^*, K) + S_t e^{(b-i)T} - K$

wobei die Aktienposition auf $e^{(b-i)T}$ Aktien reduziert wird.

$\blacksquare$

11 Das Trinomialmodell für amerikanische Optionen

Zur Bestimmung des Optionspreises amerikanischer Optionen wollen wir das Trinomialmodell vorstellen (siehe [2]). Alle vom amerikanischen Optionstyp stammenden Besonderheiten lassen sich natürlich auch auf das Binomialmodell übertragen. Das Trinomialmodell erscheint uns deshalb bemerkenswert, da es auf andere klassische numerische Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen hinweist, die auch zur Optionspreisbestimmung herangezogen werden können, - die Differenzenverfahren.
Das Trinomialmodell unterscheidet sich vom Binomialmodell dadurch, daß sich der Kurs zu jedem diskreten Zeitpunkt in drei statt in zwei Richtungen bewegen kann:



Wie beim Binomialmodell müssen drei Bedingungen in Form von Gleichungen erfüllt werden (- die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist Eins, - der Erwartungswert ist gegeben und - die Varianz ist vorgegeben). Die Anzahl der unbekannten Parameter beträgt hier jedoch sechs:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \tag{83}$$

$$p_1 \ln u_1 + p_2 \ln u_2 + p_3 \ln u_3 = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \tag{84}$$

$$p_1 (\ln u_1)^2 + p_2 (\ln u_2)^2 + p_3 (\ln u_3)^2 = \sigma^2 \Delta t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2. \tag{85}$$

An dieser Stelle muß man sich nun weitere Bedingungen überlegen, um zu sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems zu gelangen. Um einen übersichtlichen Kursbaum konstruieren zu können, fordert man $u_1 u_3 = u_2^2$. Dadurch wird die Anzahl der zum Zeitpunkt t_n zu untersuchenden Kurse von maximal 3^n auf $2n+1$ reduziert und somit Speicherplatz gespart. Das Gleichungssystem bleibt aber weiterhin unterbestimmt. Wir wollen nun zwei mögliche Lösungen diskutieren.

a. Angenommen, daß ein Zeitschritt des Trinomialmodells zwei Schritten des Binomialmodells entspricht. Die Parameter ergeben sich dann aus dem Binomialmodell als:

$$u_1 = u^2,\ u_2 = 1,\ u_3 = u^{-2},\ u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}},$$

$$p_1 = p^2,\ p_2 = 2p(1-p),\ p_2 = (1-p)^2,\ p = \frac{1}{2}\left(1 + (b - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{\Delta t/2}}{\sigma}\right).$$

Das Trinomialmodell für europäische Optionen in dieser Variante benötigt also nur die Hälfte der Zeitschritte im Vergleich zum Binomialmodell, um die gleichen Ergebnisse zu erlangen. Es konvergiert somit schneller als das Binomialmodell gegen die Black/Scholes-Lösung. Abbildung 9 zeigt einen Verleich für eine europäische Kaufoption. (siehe dazu Abbildung 4)

Trinomialmodell 1					
Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	50
Dividende (keine/stetig/diskret): k					
Call/Put: c				europ./amerik.: e	
aktueller Kurs: 230.00				Optionspreis: 30.76942	

Abbildung 9

Amerikanische Optionen unterscheiden sich von den europäischen dadurch, daß die Ausübung zu einem beliebigen Zeitpunkt t' , $0 < t' \leq t^*$ erfolgen kann. Dabei ist

$$C(S, t') = \max\{0, S(t') - K\}.$$

Mathematisch handelt es sich somit um ein freies Randwertproblem. Da eine analytische Lösung dieses Problems nicht möglich ist, muß man numerische Verfahren verwenden.
Wie für europäische Optionen bestimmt man den Wert O_k^j der Option als abgezinsten Erwartungswert der in der Zukunft möglichen Optionspreise O_{k+1}^{j+1}, O_k^{j+1} und O_{k-1}^{j+1}. Der Unterschied zu europäischen Optionen besteht nun darin, daß dieser Erwartungswert nicht unter dem inneren Wert liegen kann.

Damit lautet die Berechnungsformel für amerikanische Kaufoptionspreise:

$$O_k^j = \max\{S_k^j - K, e^{-i\Delta t}[p_1 O_{k+1}^{j+1} + p_2 O_k^{j+1} + p_3 O_{k-1}^{j+1}]\}.$$

Das folgende Beispiel zeigt den Wert einer amerikanischen Kaufoption.
(vgl. Abbildung 9)

Trinomialmodell 1					
Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	50
Dividende (keine/stetig/diskret): k					
Call/Put: c				europ./amerik.: a	
aktueller Kurs: 230.00				Optionspreis: 30.76942	

Abbildung 10

Europäische und amerikanische Calls auf Aktien, die während der Laufzeit keine Dividende zahlen, sind gleich zu bewerten. Der amerikanische Put ist dagegen wertvoller als der europäische. (Im Beispiel Abb. 9/10 erhält man $P_{eu} = 6.05140$ und $P_{am} = 6.21159$).

b. Abschließend wollen wir noch eine zweite Möglichkeit diskutieren, wie man p_k und u_k wählen kann.
Der gesamte Kursbaum soll nun einen gewissen Aufwärtstrend erfahren. Anstelle der Bedingung $u_2 = 1$ setzen wir

$$u_2 = e^{(b-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}.$$

Desweiteren betrachten wir folgende Wahrscheinlichkeiten und Änderungsraten:

$$p_1 = p_3 = p,\ \ p_2 = (1-2p),\ \ p = \frac{\Delta t}{Th^2},$$

$$u_1 = e^{(b-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma h\sqrt{T/2}},\ \ u_2 = e^{(b-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t},\ \ u_3 = e^{(b-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma h\sqrt{T/2}},$$

wobei h derzeit noch ein beliebiger Parameter ist.
Diese p_k und u_k erfüllen das Gleichungssystem (83) - (85) exakt.

Trinomialmodell 2					
Aktienkurs:	230.00	Volatilität:	0.25	Zinssatz:	0.04545
Ausübungskurs:	210.00	Restlaufzeit:	0.50	Schritte:	100
Dividende (keine/stetig/diskret): k					
Call/Put: c				europ./amerik.: e	
aktueller Kurs: 230.00				Optionspreis: 30.74502	

Abbildung 11

Interpretiert man p_k als Wahrscheinlichkeit, so erhält man eine Bedingung an den Parameter h:

$$(86) \quad h > \sqrt{\frac{2\Delta t}{T}}.$$

Betrachten wir uns das Modell für europäische Optionen, daß durch diese Wahrscheinlichkeiten p_k und Änderungsraten u_k beschrieben wird, genauer.

$$(87) \quad O_k^j = e^{-i\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{Th^2}O_{k+1}^{j+1} + (1 - 2\frac{\Delta t}{Th^2})O_k^{j+1} + \frac{\Delta t}{Th^2}O_{k-1}^{j+1}\right).$$

Setzt man

$$\Delta t = -(t^* - t_{j+1}) + (t^* - t_j), \text{und } \tau = \Delta t/T,$$

$$O_k^j e^{-i(t^*-t_j)} = Z_k^j, \ O_k^{j+1} e^{-i(t^*-t_{j+1})} = Z_k^{j+1},$$

so erhält man

$$(88) \quad \frac{Z_k^j - Z_k^{j+1}}{\tau} = \frac{Z_{k+1}^{j+1} - 2Z_k^{j+1} + Z_{k-1}^{j+1}}{h^2}$$

- die explizite Differenzenapproximation der parabolischen Differentialgleichung (61). (siehe [4])
Die Bedingung (86) entspricht dann der bekannten Stabilitätsforderung für explizite Differenzenverfahren.
Im Vergleich zu den bisher diskutierten Modellen sind bei dieser Variante die Wahrscheinlichkeiten p_k - und somit auch die Berechnungsvorschrift (87) - nicht von der Volatilität abhängig. Die Gleichung (87) hängt nur über die Anfangsbedingung - dem Kurs zum Ausübungszeitpunkt - von σ ab.

Literatur

[1] Johannes Welcker, Jörg W. Kloy, Klaus Schindler. Professionelles Optionsgeschäft. Verlag Moderne Industrie, Zürich 1992

[2] Wilmott, Dewynne, Howison. Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press. 1993

[3] Cecil Hastings, jr. u.a. Approximations for digital computers. Princeton University Press. Princeton 1955

[4] A.A. Samarskij. Theorie der Differenzenverfahren. Akademischer Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G.. Leipzig 1984