

BERICHTE  
DER  
ARBEITSGRUPPE TECHNOMATHEMATIK

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 1

320  
OPTIMIERUNG VON GELENKSECHSECKEN  
WINFRIED G. <sup>100\*</sup>ESCHMANN UND RALPH <sup>104a</sup>GÖTZ

Die Arbeit wurde gefördert durch das Wirtschaftsministerium  
des Landes Rheinland-Pfalz und durch das Forschungsprojekt  
"Technomathematik" der Stiftung Volkswagenwerk.

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH MATHEMATIK  
ERWIN-SCHRÖDINGER-STR. 48  
6750 KAISERSLAUTERN

DEZEMBER 1983

## INHALT

	Seite
I. Einleitung und Problemstellung	1
II. Vereinfachungen	4
III. Typen zulässiger Gelenkvierecke	5
IV. Bauartbestimmende Parameter	7
V. Bestimmung der Winkelzuordnungen	9
VI. Nebenbedingungen im Fall KS-X	16
VII. Die Bezugswinkel	20
VIII. Die Optimierung	24
IX. Ergebnisse	25
X. Weitere Untersuchungen	27
XI. Anhang	28
XII. Literatur	36

## I. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Das Problem der Optimierung von Gelenksechsecken wurde im Rahmen eines Problemseminars behandelt. Die Fortsetzung der Untersuchungen durch die Arbeitsgruppe Technomathematik führte zu ersten Ergebnissen, die hier vorgestellt werden.

Das Problem ergibt sich bei der Konstruktion von Kurbelgetrieben, die einen vorgeschriebenen Bewegungsablauf haben sollen: So wird beispielsweise in einer Nähmaschine der Oberfaden von der Nadel durch den Stoff geführt, unter dem Stoff von einem Greifer aufgenommen und mit dem Unterfaden verknotet. Dieser Knoten wird von einem Fadengebergetriebe festgezogen, nachdem zuvor der überschüssige Faden zurückgezogen wurde. Gleichzeitig wird die für den gerade gebildeten Stich verbrauchte Fadenmenge von einer Garnrolle abgezogen und für den nächsten Stich bereitgestellt. Will man dieses Fadengebergetriebe durch ein Kurbelgetriebe realisieren, so muß eine umlaufende Drehbewegung (der Kurbel) in eine "Schwenk"-Bewegung eines anderen Getriebegliedes (der Schwinge) umgewandelt werden. Und zwar so, daß jeder Winkelstellung  $\varphi$  der Kurbel eine vorgeschriebene Winkelstellung  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\varphi)$  der Schwinge zugeordnet ist; genauer: daß sich eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $\varphi \mapsto \tilde{\psi}(\varphi)$  ergibt, deren Graph, wie in Bild 1 dargestellt, aussieht.

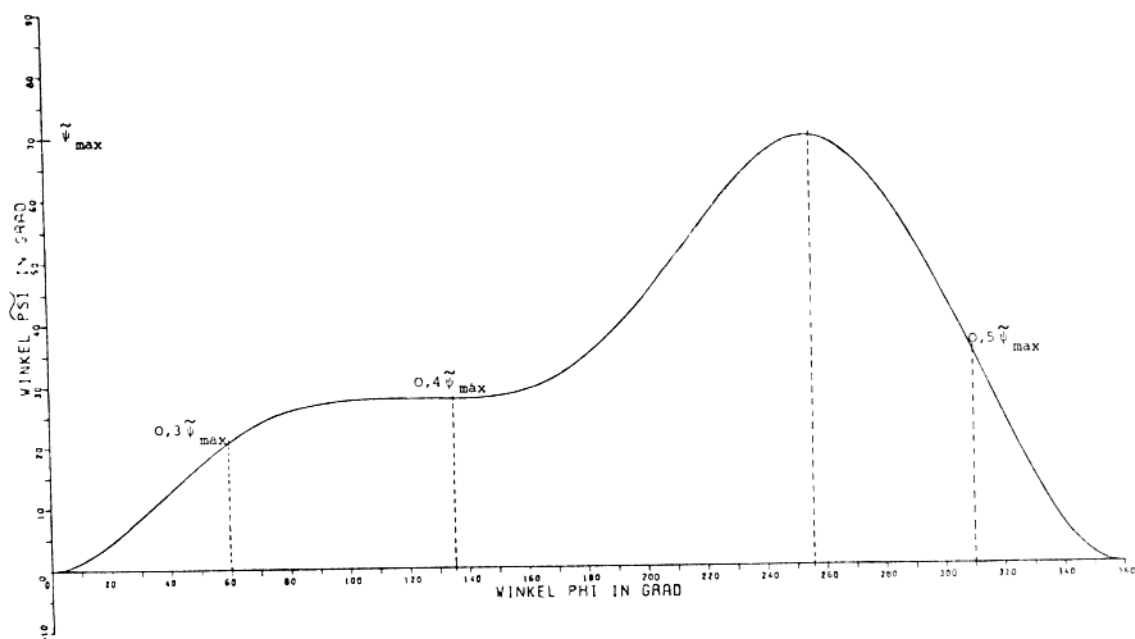


Bild 1.- Winkelzuordnung bei einem Fadengebergetriebe  
(Zielfunktion  $\varphi \mapsto \tilde{\psi}$ ).

Aus der ingenieurwissenschaftlichen Literatur ist bekannt, daß sich eine Winkelzuordnung wie in Bild 1 nicht durch ein einfaches Gelenkviereck (Bild 2) erzeugen läßt, bei dem die

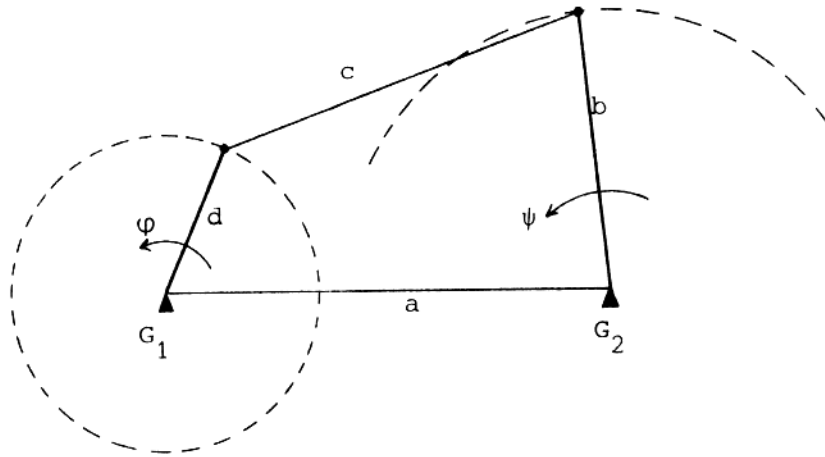


Bild 2.- Gelenkviereck  $GV(a,b,c,d)$ .

Kurbel mit der Länge  $d$  eine (gleichförmige) Drehbewegung um den fest gelagerten Drehpunkt (Gestellpunkt)  $G_1$  ausführt, während die Schwinge mit der Länge  $b$  eine Schwenkbewegung oder (eine umlaufende, aber i.a. nicht mehr gleichförmige) Drehbewegung um den im Abstand  $a$  von  $G_1$  befindlichen fest gelagerten Gestellpunkt  $G_2$  ausführt.

Dem Konstrukteur stellt sich nun die Aufgabe, zu der geforderten Winkelzuordnung ein Getriebe zu entwickeln, das mit einer minimalen Anzahl bewegter Teile auskommt und weitere Randbedingungen erfüllt wie Einschränkungen des Bauraumes, dynamische Grenzen, Laufgüte, günstige Übertragungswinkel (das ist der jeweilige Winkel zwischen Schwinge und Koppel, letztere in Bild 2 mit der Länge  $c$ ) usw.

Ein Kurbelgetriebe nächsthöherer Gliederzahl ist das Gelenksechseck, das durch Aneinanderkopplung zweier Gelenkvierecke entsteht (Bild 3). Dabei ist das schraffierte Dreieck starr und bildet den bei der Bewegung fest bleibenden Winkel  $\delta$  zwischen der Schwinge des ersten und der Kurbel des zweiten Gelenkvierecks.

Die Aufgabe lautet nun: Man bestimme die Abmessungen der Gliedlängen  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$  und des Winkels  $\delta$  sowie die Lage der Gestellpunkte  $G_1, G_2, G_3$  derart, daß

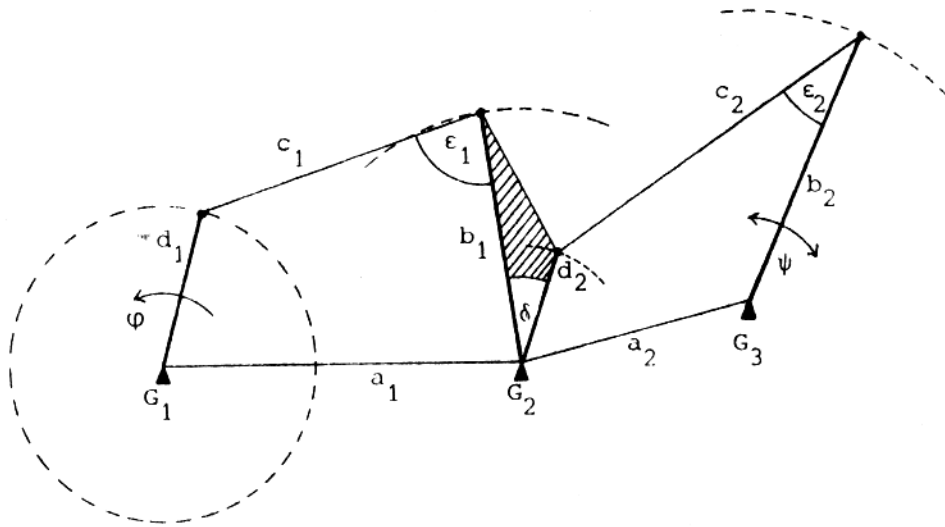


Bild 3.- Gelenksechseck

- (1) die in Bild 1 dargestellte Funktion möglichst gut durch die sich ergebende Winkelzuordnung  $\varphi \mapsto \psi(\varphi)$  approximiert wird und dabei
- (2) die Abweichungen an den fünf in Bild 1 markierten Stellen möglichst gering sind und
- (3) der Graph der approximierenden Funktion  $\psi$  nirgends unterhalb von  $\tilde{\psi}$  verläuft.

Bedingung (3) war zusätzlich notwendig, da erst sie sicherstellt, daß der Faden nicht durch die Getriebebewegung reißen kann. Weitere Randbedingungen, wie eine Begrenzung der Beschleunigungswerte oder eine Begrenzung der Übertragungswinkel  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  (siehe Bild 3) - sinnvoll wäre z.B.  $40^\circ \leq \epsilon_1 \leq 140^\circ$  - wurden bei diesen ersten Untersuchungen nicht hinzugenommen. (Die Übertragungswinkel werden jedoch bei den gewonnenen Ergebnissen angegeben.)

Mathematisch liegt damit ein nicht-lineares Optimierungsproblem vor, bei dem die Funktion  $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(a_1, b_1, c_1, d_1, \delta, a_2, b_2, c_2, d_2) := \left\| \left\| \psi(a_1, b_1, c_1, d_1, \delta, a_2, b_2, c_2, d_2; \varphi) - \tilde{\psi}(\varphi) \right\| \right\|$$

und geeigneter gewählter Norm  $\left\| \cdot \right\|$  unter gewissen expliziten und impliziten Nebenbedingungen zu minimieren ist.

Mit der präziseren Formulierung, einigen Vereinfachungen und den auftretenden Schwierigkeiten beschäftigen sich die nächsten Abschnitte.

## II. VEREINFACHUNGEN

1. Zunächst stellt man fest, daß die Lage der Gestellpunkte (in Bild 3:  $G_1, G_2, G_3$ ) weder als Parameter noch als Nebenbedingungen bei diesem Optimierungsproblem benötigt werden:  $G_1, G_2, G_3$  dürfen auf einer Geraden liegen. Ist etwa das in Bild 4a gezeigte Gelenksechseck gegeben und

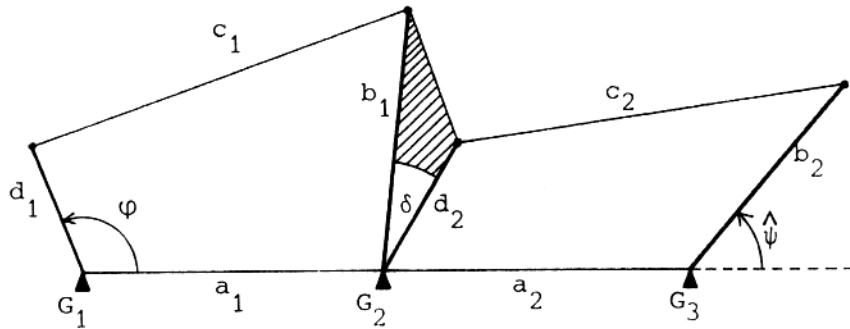


Bild 4a.-

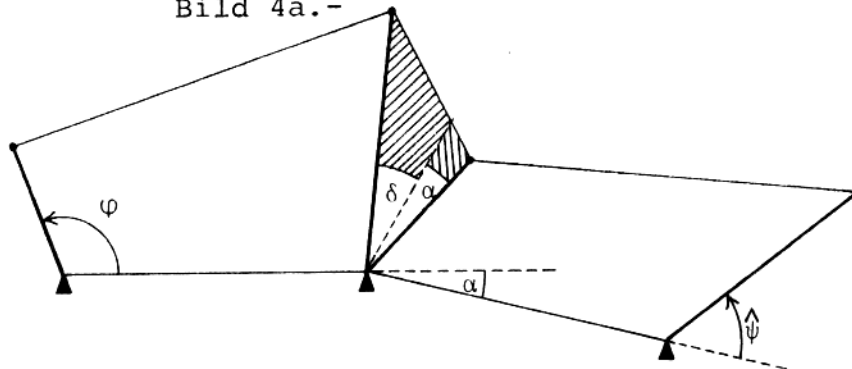


Bild 4b.- Zur Lage der Gestellpunkte

sollen die Gestellpunkte wie in Bild 4b gewählt werden, so braucht man bei irgendeiner "Stellung von  $\varphi$  und  $\hat{\psi}$ " z.B. nur das zweite Gelenkviereck starr um  $G_2$  um den Winkel  $\alpha$  zu drehen, und man erhält an entsprechender Stelle dieselbe Winkelzuordnung  $\varphi \mapsto \hat{\psi}$ .

2. Da wir nur an einer Winkelzuordnung interessiert sind, darf die Figur in Bild 3 durch eine ähnliche ersetzt werden, ohne daß sich etwas an dieser Zuordnung ändert. Es darf sogar jedes der Gelenkvierecke durch ein ähnliches ersetzt werden (unter Beibehaltung von  $\delta$ ). Das bedeutet: In jedem Gelenkviereck darf eine der Gliedlängen auf 1 normiert werden. (Das wird je nach Typ von Gelenkviereck die Länge  $a_i$  oder  $d_i$  sein.) Damit reduziert sich die Anzahl der Parameter von 9 auf 7.
3. Wie schon erwähnt, wurden technisch notwendige Beschränkungen des Übertragungswinkels (Bild 5)

$$\varepsilon := \min \left\{ \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |\varepsilon(\varphi)|, 180^\circ - \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |\varepsilon(\varphi)| \right\} \quad *)$$

eines Gelenkvierecks, etwa  $\varepsilon \geq 40^\circ$ , noch nicht aufgenommen.

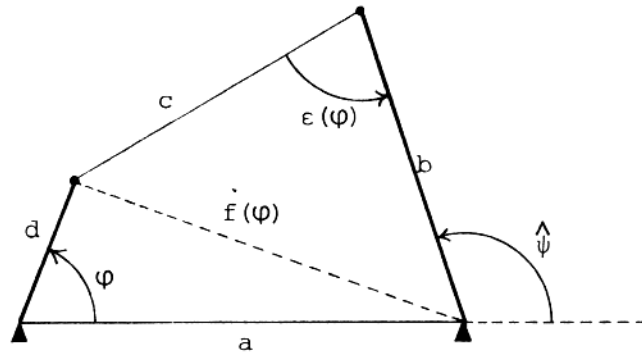


Bild 5.- Übertragungswinkel

Es ist jedoch notwendig,  $0 < \varepsilon(\varphi) < \pi$  für alle  $\varphi$  oder  $-\pi < \varepsilon(\varphi) < 0$  für alle  $\varphi$  zu fordern. Denn läßt man etwa  $\varepsilon(\varphi) = \pi$  zu, so ist in der Nähe von  $\varphi$  keine eindeutige Zuordnung  $\varphi \mapsto \hat{\psi}$  möglich. Durch die genannten Bedingungen werden auch die unerwünschten "durchschlagenden Gelenkvierecke" (siehe [ 3 ]) ausgeschlossen. Als äquivalente Bedingungen ergeben sich:  $a+b \neq c+d$ ,  $a+c \neq b+d$  und  $a-c \neq b-d$ , insbesondere  $a \neq d$ .

### III. TYPEN ZULÄSSIGER GELENKVIERECKE

Die Aufgabenstellung verlangt, eine Drehbewegung mit Hilfe eines Gelenksechsecks in eine Schwenkbewegung umzuwandeln. Deshalb muß das erste Gelenkviereck stets so konstruiert sein, daß die Kurbel "voll Drehfähig" ist. Hierbei gibt es zwei Typen:

1. Die Kurbelschwinge (KS): Die Kurbel führt (siehe Bild 2) eine Drehbewegung aus, während die Schwinge einen Sektor mit

---

\*) Alle Winkel werden in der jeweils eingezeichneten Weise im Gegenuhrzeigersinn positiv gemessen.

Öffnungswinkel  $< 2\pi$  überstreicht. Aus der Getriebelehre ist bekannt:

Ein Gelenkviereck  $GV(a,b,c,d)$  ist genau dann eine Kurbelschwinge, wenn

$$d < \min\{a,b,c\} \quad \text{und} \quad |b-c| < a-d \quad \text{und} \quad a+d < b+c.$$

In den beiden Strecklagen, in denen Kurbel und Koppel auf einer Geraden liegen, erfolgt jeweils eine Umkehr der Bewegungsrichtung der Schwinge (siehe Bild 6), d.h. der Ausgangswinkel  $\hat{\psi}$  nimmt in diesen Lagen das Maximum bzw. Minimum an.

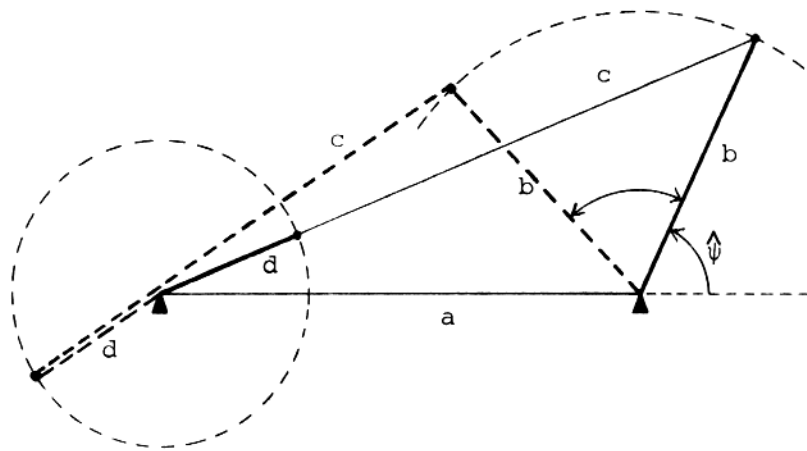


Bild 6.- Die Strecklagen einer Kurbelschwinge.

2. Die Doppelkurbel (DK): Hierbei vollführen sowohl Kurbel als auch Schwinge vollständige Drehbewegungen. Es gilt:

Ein Gelenkviereck  $GV(a,b,c,d)$  ist genau dann eine Doppelkurbel, wenn

$$a < \min\{b,c,d\} \quad \text{und} \quad |b-c| < d-a \quad \text{und} \quad a+d < b+c.$$

Die letzten beiden Bedingungen bei KS und DK besagen jeweils (siehe Bild 5), daß über der kürzesten ( $f_u = |a-d|$ ) und über der längsten ( $f_o = a+d$ ) Diagonalen  $f(\varphi)$  jeweils ein Dreieck mit den weiteren Seitenlängen  $b$  und  $c$  konstruiert werden kann (und dann auch über allen Diagonalen  $f(\varphi)$ ).

Ein weiterer Typ von Gelenkvierecken ist jener, bei dem sowohl "Kurbel" als auch Schwinge je einen Sektor mit Öffnungswinkel  $< 2\pi$  überstreichen können. Ein solches Viereck heißt

3. Doppelschwinge (DS): Hierbei ist also  $\varphi \mapsto \hat{\psi}(\varphi)$  nur für  $\varphi \in [\zeta_1, \zeta_2]$  mit  $\zeta_2 - \zeta_1 < 2\pi$  definiert.



Werden zwei Vierecke zu einem Gelenksechseck zusammengekoppelt, so muß (bei der vorliegenden Aufgabenstellung: Ausgangsschwenkbereich  $70^\circ$ ) das zweite Gelenkviereck vom Typ KS sein, wenn das erste vom Typ DK ist (DK-KS).

Ist das erste Gelenkviereck vom Typ KS, so kann das zweite vom Typ DK oder KS oder DS sein (KS-DK oder KS-KS oder KS-DS).

Liegt die Kombination KS-DS vor, so müssen die Bauart und die Ankopplung (Wahl von  $\delta$ ) derart sein, daß der um  $\delta$  verschobene Ausgangs-Schwenkbereich von KS im Eingangsschwenkbereich von DS liegt. Wir kommen in Abschnitt VI darauf zurück.

#### IV. BAUARTBESTIMMENDE PARAMETER

Die Optimierung von Gelenksechsecken wird durch den folgenden Sachverhalt erschwert: Ist ein Gelenkviereck - etwa wie in Bild 7a eine Kurbelschwinge - gegeben, so ist die Zuordnung  $\varphi \mapsto \hat{\psi}$  nicht durch die Gliedlängen  $a, b, c, d$  eindeutig bestimmt. Weitere bauartbestimmende Parameter müssen hinzukommen.

1. Neben der Konfiguration in Bild 7a, bei der das Dreieck mit den Seiten  $b, c$  und  $f(\varphi)$  "auf die Diagonale  $f(\varphi)$  gesetzt" wurde, ist auch die Konfiguration in Bild 7b möglich, bei der das genannte Dreieck an  $f(\varphi)$  gespiegelt wurde. Entsprechend

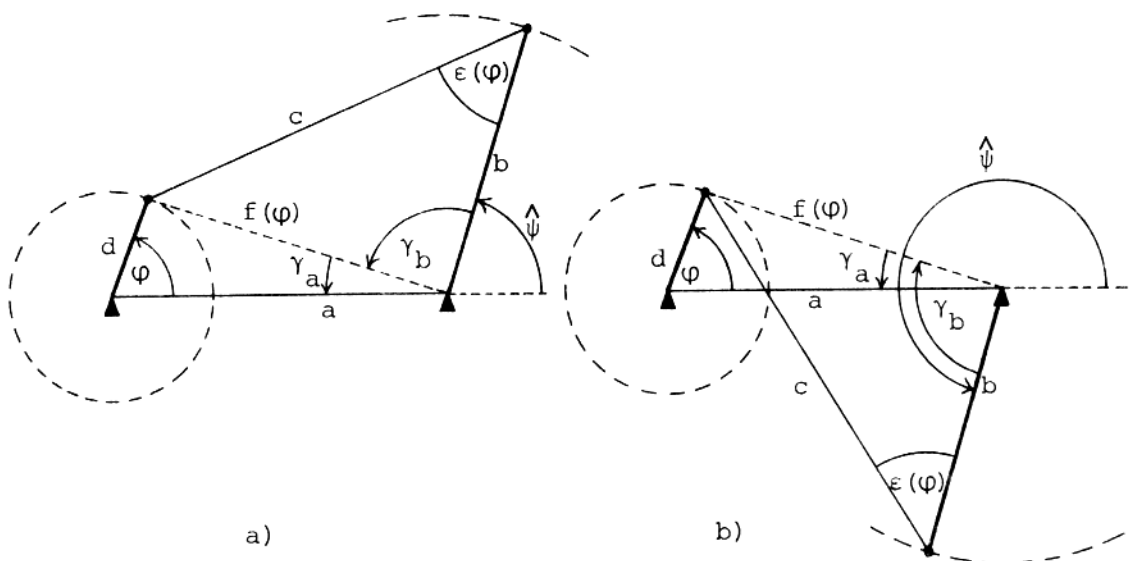


Bild 7.- Verschiedene Gelenkvierecke bei gleichen Gliedlängen.

ergeben sich in beiden Fällen verschiedene Winkelzuordnungen. Zur Beschreibung dieses Sachverhalts stellen wir folgende Überlegung an:

Wegen II.3. darf der Winkel  $\varepsilon(\varphi)$  ohne Orientierung gemessen werden, und um durchschlagende Vierecke zu vermeiden, hatten wir  $0 < \varepsilon(\varphi) < \pi$  für alle  $\varphi \in [0, 2\pi]$  gefordert. Hieraus folgt

$$\gamma_b = \gamma_b(\varphi) > 0 \text{ für alle } \varphi \text{ oder } \gamma_b < 0 \text{ für alle } \varphi.$$

Denn  $\gamma_b(\varphi) = 0$  hätte  $\varepsilon(\varphi) = 0$  oder  $\varepsilon(\varphi) = \pi$  zur Folge.

Damit sind die in Bild 7 gezeigten Konfigurationen unterscheidbar:

In a) ist  $\gamma_b = |\gamma_b|$  und in b)  $\gamma_b = -|\gamma_b|$ , so daß mit  $\gamma := \gamma_a + \gamma_b$  in beiden Fällen gilt

$$\hat{\psi} = \pi - \gamma = \pi - \gamma_a - u_1 |\gamma_b| \quad \text{mit } u_1 = \pm 1.$$

$u_1 = +1$  beschreibt die Situation in Bild 7a und  $u_1 = -1$  diejenige in Bild 7b.

Analoge Überlegungen gelten für Gelenkvierecke vom Typ DS oder DK. Ein weiterer Parameter  $u_2 = \pm 1$  wird für das zweite Gelenkviereck benötigt.

2. Je nach Drehrichtung der Kurbel erhält man verschiedene Winkelzuordnungen:  $\varphi \mapsto \hat{\psi}(\varphi)$  oder  $\varphi \mapsto -\varphi \mapsto \psi^*(\varphi) := \hat{\psi}(-\varphi)$ . Wir betrachten also:  $\varphi \mapsto \hat{\psi}(u_3\varphi)$  mit  $u_3 = \pm 1$ .
3. Die Ankopplung des zweiten Gelenkvierecks braucht nicht so zu sein, daß ein positiver (Winkel-)Ausgang des ersten Gelenkvierecks auch ein positiver Eingang für das zweite Gelenkviereck ist. Die Drehrichtung kann auf einfache Weise umgekehrt werden. (Z.B. durch Einfügen eines Ritzels oder durch "Umklappen" des zweiten Gelenkvierecks auf das erste, so daß der Gestellpunkt  $G_2$  erhalten bleibt und  $G_3$  über  $G_1$  zu liegen kommt.) Dies bedeutet die Einführung eines weiteren Parameters  $u_4 = \pm 1$ .
4. Schließlich kann der Ausgangswinkel  $\hat{\psi}$  des Gelenksehsecks in beiden Drehrichtungen benutzt werden, d.h.  $\hat{\psi}$  muß auch positiv gemessen werden können (siehe Bild 1), wenn  $\hat{\psi}$  von der

Drehrichtung her negativ ist. Also sollte der Ausgang  $u_5^{\wedge}$  mit  $u_5 = \pm 1$  lauten.

In Abschnitt V.6. wird gezeigt, daß bei gegebenem Parametersatz  $(b_1, c_1, d_1, \delta, b_2, c_2, d_2)$  nicht  $2^5 = 32$  Bauart-Varianten zu prüfen sind, sondern daß man deren Anzahl auf 8 bzw. 16 reduzieren kann.

## V. BESTIMMUNG DER WINKELZUORDNUNGEN

1. Bestimmung des Eingangswinkels  $\varphi_2$  für das zweite Gelenkvier-eck, wenn das erste eine Kurbelschwinge ist (Bild 8):

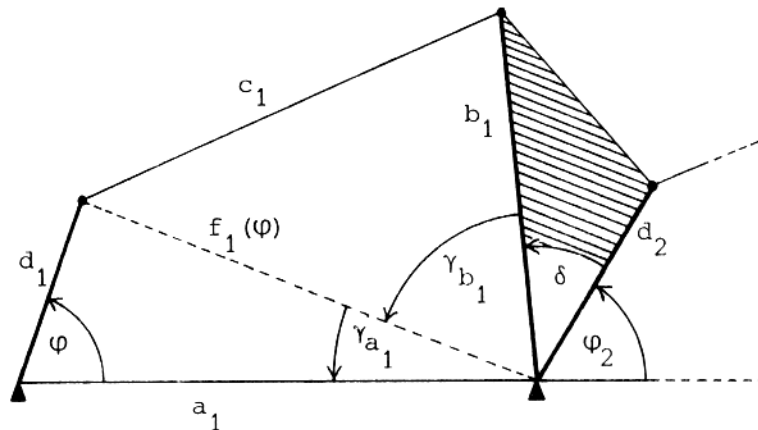


Bild 8.- Bestimmung von  $\varphi_2$  bei einer Kurbelschwinge  $GV(a_1, b_1, c_1, d_1)$ .

Mit dem Cosinussatz folgt:

$$f_1(\varphi) = (a_1^2 + d_1^2 - 2a_1d_1\cos \varphi)^{1/2} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

$f_1$  ist eine gerade Funktion und  $f_1(\varphi) > 0$  für alle  $\varphi$ . Ebenfalls mit dem Cosinussatz ergibt sich

$$|\gamma_{b_1}| = |\gamma_{b_1}|(\varphi) = \arccos \frac{b_1^2 + f_1^2(\varphi) - c_1^2}{2b_1f_1(\varphi)} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Da  $f_1$  gerade ist, ist auch  $|\gamma_{b_1}|$  eine gerade Funktion.

Bei der Kurbelschwinge ist  $d_1 < a_1$ , also gilt

$$|\gamma_{a_1}| < \frac{\pi}{2}.$$

Deshalb erhält man

$$\gamma_{a_1} = \gamma_{a_1}(\varphi) = \arcsin \frac{d_1 \sin \varphi}{f_1(\varphi)} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

$\gamma_{a_1}$  ist eine ungerade Funktion.

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der bauartbestimmenden Parameter:

$$\varphi_2 = \varphi_2(u_3\varphi) = u_4(\pi - \delta - \gamma_{a_1}(u_3\varphi) - u_1 \cdot |\gamma_{b_1}|(u_3\varphi))$$

für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

2. Bestimmung des Eingangswinkels  $\varphi_2$  für das zweite Gelenkvier-eck, wenn das erste eine Doppelkurbel ist (Bild 9):

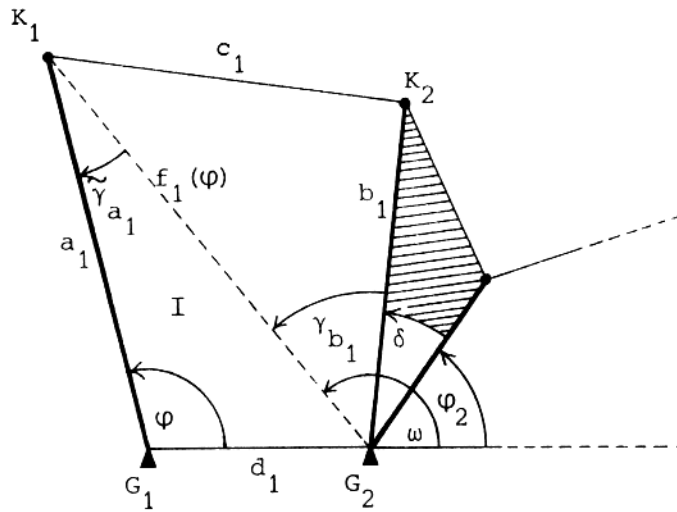


Bild 9.- Bestimmung von  $\varphi_2$  bei einer Doppelkurbel  $GV(d_1, b_1, c_1, a_1)$

Aus Gründen, die weiter unten ersichtlich werden, ändern wir bei einer Doppelkurbel die Bezeichnung der Gliedlängen:  $a_1$  und  $d_1$  werden vertauscht (z.B. lautet dann die Charakterisierung der DK genauso wie die der KS, siehe III.1. und III.2.).

Zunächst ist wie bei der Kurbelschwinge

$$f_1(\varphi) = (a_1^2 + d_1^2 - 2a_1d_1 \cos \varphi)^{1/2} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}$$

und

$$|\gamma_{b_1}|(\varphi) = \arccos \frac{b_1^2 + f_1^2(\varphi) - c_1^2}{2b_1 f_1(\varphi)} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Da mit der Kurbel  $\overline{G_1K_1}$  wegen  $a_1 > d_1$  auch die (in der Länge veränderliche) Diagonale  $f_1$  eine vollständige Umdrehung um  $G_2$  ausführt, wird nicht der Winkel  $\sphericalangle G_1G_2K_1$  zur Beschreibung von  $\varphi_2$  herangezogen, sondern der in Bild 9 eingezeichnete Winkel  $\tilde{\gamma}_{a_1}$ . Er hat wieder die Eigenschaft  $|\tilde{\gamma}_{a_1}| < \frac{\pi}{2}$ . Denn:

Spiegelt man für eine beliebige Kurbelstellung  $\varphi$  in Bild 9 das Dreieck  $G_1G_2K_1$  an der Mittelsenkrechten auf  $\overline{K_1G_2}$ , so erhält man eine Konfiguration wie in Bild 10, die man als die Stellung der Kurbelschwinge  $GV(a_1, b_1, c_1, d_1)$  zum Eingangswinkel  $\varphi$  auffassen kann. Dann hat aber  $\tilde{\gamma}_{a_1}(\varphi)$  dieselben Eigenschaften wie  $\gamma_{a_1}$  bei

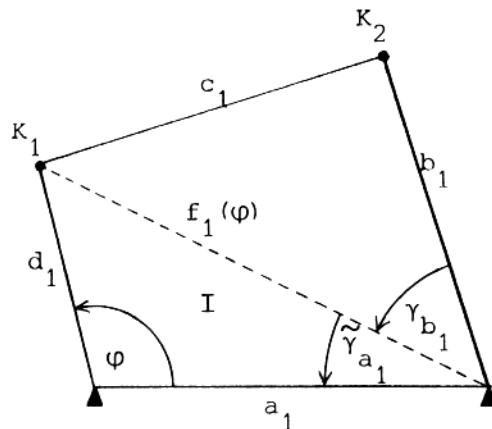


Bild 10.- Durch Spiegelung des Dreiecks I aus der Doppelkurbel in Bild 9 hervorgegangene Kurbelschwinge

der Kurbelschwinge und läßt sich genauso berechnen:

$$\tilde{\gamma}_{a_1}(\varphi) = \arcsin \frac{d_1 \sin \varphi}{f_1(\varphi)} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wegen der vollständigen Übereinstimmung aller Formeln (bei Vertauschung der Bedeutung von  $a_1$  und  $d_1$  im Fall DK) mit denjenigen für die Kurbelschwinge, schreiben wir in Zukunft auch hier  $\gamma_{a_1}$  an Stelle von  $\tilde{\gamma}_{a_1}$ .

Damit ist (siehe Bild 9)  $\omega = \varphi + \gamma_{a_1}$  und daher unter Berücksichtigung der bauartbestimmenden Parameter:

$$\varphi_2 = \varphi_2(u_3\varphi) = u_4(u_3\varphi - \delta + \gamma_{a_1}(u_3\varphi) - u_1 \cdot |\gamma_{b_1}|(u_3\varphi))$$

für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Für das zweite Gelenkviereck gelten prinzipiell die gleichen Formeln (dem jeweiligen Typ entsprechend, wenn man als Eingang  $\varphi_2$  statt  $u_3\varphi$  schreibt und  $\delta = 0$  setzt. Dies geht problemlos im folgenden Fall:

3. Bestimmung der Funktion  $\varphi \mapsto \hat{\psi}(\varphi)$  für ein Gelenksechseck DK-KS:

An  $GV(d_1, b_1, c_1, a_1)$  mit  $d_1 < a_1$  wird  $GV(a_2, b_2, c_2, d_2)$  mit  $d_2 < a_2$  angekoppelt. Also ist (siehe Bild 11):

$$\hat{\psi}(\varphi) = \pi - u_5(\gamma_{a_2}(\varphi_2) + u_2 \cdot |\gamma_{b_2}|(\varphi_2))$$

wobei  $\varphi_2$  wie in V.2. berechnet wird und analog zu V.1.

$$\gamma_{a_2}(\varphi_2) = \arcsin \frac{d_2 \sin \varphi_2}{f_2(\varphi_2)}$$

$$|\gamma_{b_2}|(\varphi_2) = \arccos \frac{b_2^2 + f_2^2(\varphi_2) - c_2^2}{2b_2 f_2(\varphi_2)}$$

$$f_2(\varphi_2) = (a_2^2 + d_2^2 - 2a_2 d_2 \cos \varphi_2)^{1/2}$$

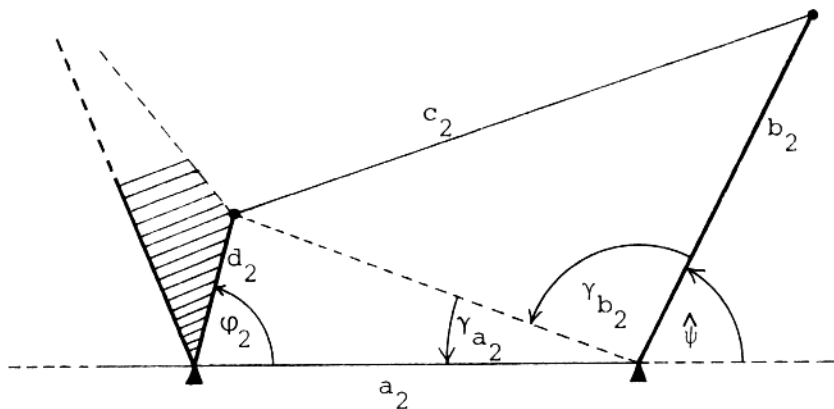


Bild 11.- Zur Messung von  $\hat{\psi}$ .

4. Bestimmung der Funktion  $\varphi \mapsto \hat{\psi}(\varphi)$  für ein Gelenksechseck KS-X,  
wobei X gleich DK oder KS oder DS sein kann. X kann darüber  
hinaus eines der in II.3. zunächst ausgeschlossenen Gelenkvier-  
ecke sein; nur muß dann sichergestellt werden, daß der um  $\delta$  ver-  
schobene Ausgangs-Schwenkbereich von KS, etwa  $[\alpha, \beta]$ , so im maxi-  
malen Eingangs-Schwenkbereich  $[\zeta_1, \zeta_2]$  von X liegt, daß

$$0 < \varepsilon_2(\varphi_2) < \pi \quad \text{für alle } \varphi_2 \in [\alpha, \beta]$$

gilt. Außerdem werden wir fordern, daß (bei dem hier vorliegen-  
den Problem der Approximation einer Funktion wie in Bild 1) im  
zweiten Gelenkviereck keine Strecklagen im Innern des Schwenk-  
bereiches angenommen werden. Denn andernfalls (siehe Bild 12)  
hätte die Ausgangsfunktion  $\hat{\psi}$  zwei Maxima oder zwei Minima.

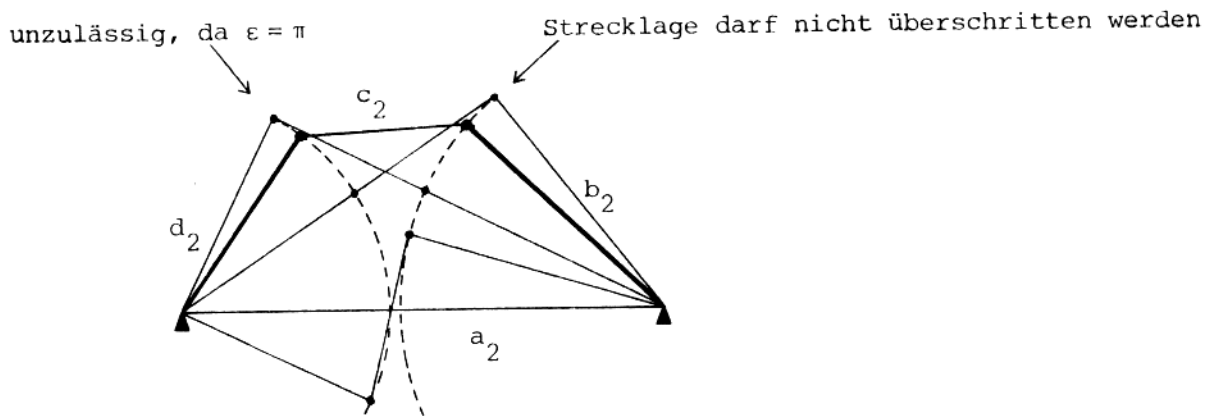


Bild 12.- Unzulässige Strecklagen des zweiten Gelenkvierecks.

Wir bestimmen die Funktion  $\hat{\psi}$  zunächst nur in Abhängigkeit von  
den Daten des in Bild 13 mit I bezeichneten Dreiecks und unter-  
scheiden drei Fälle:

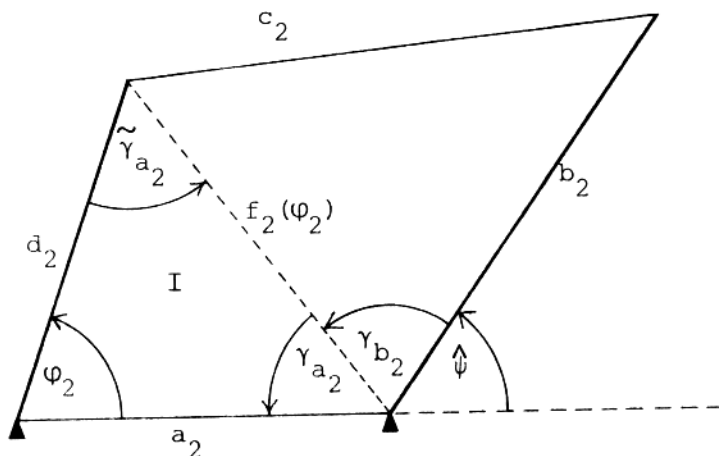


Bild 13.- Zur Bestimmung von  $\hat{\psi}$  im Fall KS-X.

4.1:  $d_2 < a_2$ : Das Dreieck I entspricht dem Dreieck I einer Kurbelschwinge \*). Also ist  $|\gamma_{a_2}| < \frac{\pi}{2}$  und

$$\gamma_{a_2}(\varphi_2) = \arcsin \frac{d_2 \sin \varphi_2}{f_2(\varphi_2)} .$$

4.2:  $d_2 > a_2$ : Das Dreieck I entspricht dem Dreieck I einer Doppelkurbel \*). Also ist  $|\tilde{\gamma}_{a_2}| < \frac{\pi}{2}$  und (wie in V.2., allerdings ohne die Vertauschung von  $a_2$  und  $d_2$ )

$$\tilde{\gamma}_{a_2} = \pi - \varphi_2 - \arcsin \frac{a_2 \sin \varphi_2}{f_2(\varphi_2)} .$$

4.3:  $d_2 = a_2$ : Jetzt muß  $\varphi_2 \neq 0$  sein. Das ist genau dann der Fall, wenn  $b_2 \neq c_2$  ist. Damit ist  $f_2(\varphi_2) > 0$  für alle  $\varphi_2 \in [\alpha, \beta]$  und, da das Dreieck I gleichschenkelig ist,

$$\gamma_{a_2} = \tilde{\gamma}_{a_2} = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_2) .$$

Wir definieren deshalb für alle "zulässigen" Eingänge  $\varphi_2$

$$\gamma_{a_2}(\varphi_2) := \begin{cases} \arcsin \frac{d_2 \sin \varphi_2}{f_2(\varphi_2)} , & \text{falls } d_2 \leq a_2 \\ \pi - \varphi_2 - \arcsin \frac{a_2 \sin \varphi_2}{f_2(\varphi_2)} , & \text{falls } d_2 \geq a_2 . \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß  $\gamma_{a_2}$  bei festem  $a_2$  wohldefiniert ist und stetig von  $d_2$  abhängt.

Wie in V.3. ist

$$f_2(\varphi_2) = (a_2^2 + d_2^2 - 2a_2d_2 \cos \varphi_2)^{1/2} \quad \text{für alle } \varphi_2 \in [\alpha, \beta] .$$

Also nimmt  $f_2$  auf  $[\alpha, \beta]$  bzw.  $f_{20}\varphi_2$  auf  $[0, 2\pi]$  (bei gegebenem  $\delta$ ) Maximum  $f_{20}$  und Minimum  $f_{2u}$  an.

Gilt nun (vgl. Bemerkung hinter III.2.)

$$|b_2 - c_2| < f_{2u} \quad \text{und} \quad f_{20} < b_2 + c_2 ,$$

\*) Ob tatsächlich eine Kurbelschwinge (bzw. Doppelkurbel) oder ein anderer Typ vorliegt, hängt nun von  $b_2$  und  $c_2$  ab.



so ist für alle  $\varphi_2$  das (in Bild 13 obere) Dreieck mit den Seitenlängen  $f_2(\varphi_2)$ ,  $b_2$  und  $c_2$  konstruierbar (und  $\varepsilon_2 \neq 0$  und  $\neq \pi$ ) und

$$|\gamma_{b_2}|(\varphi_2) = \arccos \frac{b_2^2 + f_2^2(\varphi_2) - c_2^2}{2b_2 f_2(\varphi_2)}.$$

Die Größen  $f_{2u}$  und  $f_{2o}$  sind zu berechnen (siehe VI.2.).  
Abgesehen von den noch zu formulierenden Nebenbedingungen gilt also im Falle KS-X:

$$\hat{\psi}(\varphi) = \pi - u_5(\gamma_{a_2}(\varphi_2) + u_2 |\gamma_{b_2}|(\varphi_2))$$

mit  $\varphi_2$  wie in V.1.

5. Vergleich der Formeln für  $\hat{\psi}(\varphi)$ : Ist ein Parametersatz

$(a_1, b_1, c_1, d_1, \delta, a_2, b_2, c_2, d_2, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  gegeben und berechnet man  $\gamma_{a_2}$  wie in V.4., so kann man in allen Fällen (DK-KS, KS-X)

$\gamma_{a_1}$ ,  $|\gamma_{b_1}|$  und  $|\gamma_{b_2}|$  auf dieselbe Art und Weise berechnen und erhält

$$\hat{\psi}(\varphi) = \pi - u_5(\gamma_{a_2}(\varphi_2) + u_2 |\gamma_{b_2}|(\varphi_2)).$$

Ist  $d_1 < a_1$ , so liegt der Fall KS-X vor und für  $\varphi_2$  ist die Formel aus V.1. zu verwenden.

Ist  $d_1 > a_1$ , so liegt der Fall DK-KS vor. Es muß  $d_2 < a_2$  sein, und für  $\varphi_2$  ist die Formel aus V.2. zu nehmen. (Letztere erhält man aus der Formel aus V.1., indem man dort  $\pi - \gamma_{a_1}(u_3\varphi)$  durch  $u_3\varphi + \gamma_{a_1}(u_3\varphi)$  ersetzt.)

6. Reduzierung der bauartbestimmenden Parameter: Benutzt man

die Tatsache, daß die Funktionen  $\gamma_{a_1}$  und  $\gamma_{a_2}$  ungerade \*) und

$|\gamma_{b_1}|$  und  $|\gamma_{b_2}|$  gerade sind, so kann man  $u_1, \dots, u_5$  durch

$v_1, v_2, v_4 \in \{-1, +1\}$  ersetzen, so daß

$$\hat{\psi}(\varphi) = \pi - v_4(\gamma_{a_2}(\varphi_2) + |\gamma_{b_2}|(\varphi_2)),$$

---

\*) Das gilt auch für  $\gamma_{a_2}$  in V.4. für den Fall  $d_2 \geq a_2$ , da man  $\pi$  durch  $-\pi$  ersetzen kann.

wobei im Fall DK-KS

$$\varphi_2 = \varphi_2(v_1\varphi) = v_1\varphi^{-\delta + \gamma_{a_1}(v_1\varphi) - v_2 \cdot |\gamma_{b_1}|(v_1\varphi)}$$

und im Fall KS-X

$$\varphi_2 = \varphi_2(v_1\varphi) = \pi^{-\delta - \gamma_{a_1}(v_1\varphi) - v_2 \cdot |\gamma_{b_1}|(v_1\varphi).$$

[Es gilt nämlich für beliebiges  $\varphi \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\varphi) &= \pi - u_2 u_5 (u_2 \gamma_{a_2}(\varphi_2) + |\gamma_{b_2}|(\varphi_2)) \\ &= \pi - u_2 u_5 (\gamma_{a_2}(u_2 \varphi_2) + |\gamma_{b_2}|(u_2 \varphi_2)), \end{aligned}$$

dabei ist im Fall DK-KS (siehe V.2.):

$$\begin{aligned} u_2 \varphi_2 &= u_2 (u_3 u_4 \varphi - u_4 \delta + \gamma_{a_1}(u_3 u_4 \varphi) - u_1 u_4 \cdot |\gamma_{b_1}|(u_3 u_4 \varphi)) \\ &= u_2 u_3 u_4 \varphi - u_2 u_4 \delta + \gamma_{a_1}(u_2 u_3 u_4 \varphi) - u_1 u_2 u_4 \cdot |\gamma_{b_1}|(u_2 u_3 u_4 \varphi) \end{aligned}$$

und im Fall KS-X mit V.1. analog:

$$u_2 \varphi_2 = u_2 u_4 \pi - u_2 u_4 \delta - \gamma_{a_1}(u_2 u_3 u_4 \varphi) - u_1 u_2 u_4 \cdot |\gamma_{b_1}|(u_2 u_3 u_4 \varphi).$$

Setzt man  $u_2 u_3 u_4 =: v_1$ ,  $u_1 u_2 u_4 =: v_2$  und  $u_2 u_5 =: v_4$ , so erhält man die genannte Darstellung, da der Parameter  $\delta$  auch durch  $-\delta$  ersetzt werden kann und im Fall KS-X stets auch  $-\pi$  durch  $\pi$ .]

Führt man einen weiteren Parameter  $v_3 \in \{-1, 0, +1\}$  ein und schreibt

$$\varphi_2 = |v_3| \pi + (1 - |v_3|) v_1 \varphi^{-\delta + (1 - 2|v_3|) \gamma_{a_1}(v_1 \varphi) - v_2 \cdot |\gamma_{b_1}|(v_1 \varphi)},$$

so erhält man für  $v_3 = 0$  die zu DK-KS gehörenden Winkel  $\varphi_2$  und für  $v_3 = \pm 1$  die zu KS-X gehörenden  $\varphi_2$ . (Zur Bedeutung von  $v_3 = \pm 1$  siehe Abschnitt VII.1.) Von den verbleibenden Parametern beschreibt  $v_1$  die Drehrichtung der Eingangskurbel,  $v_2$  das Vorzeichen von  $\gamma_{b_1}$  und  $v_4$  die Zählrichtung von  $\hat{\psi}$ .

## VI. NEBENBEDINGUNGEN IM FALL KS-X

Am Ende von V.4. war die Frage offen geblieben, für welche Längen  $b_2$  und  $c_2$  (bei gegebenen übrigen Parametern) das zweite Gelenkviereck den von der Kurbelschwinge gelieferten Schwenkbereich "verarbeiten" kann. Dazu war das Minimum  $f_{2u}$  und das Maximum  $f_{2o}$  der Diagonalen  $f_2(\varphi_2)$  zu bestimmen.

1. Bestimmung des Schwenkbereiches: Für den Winkel

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \gamma_{a_1}(\varphi) + v_2 \cdot |\gamma_{b_1}|(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

einer Kurbelschwinge  $GV(a_1, b_1, c_1, d_1)$  gilt (siehe z.B. Bild 8):

$$0 < \gamma < \pi, \text{ falls } v_2 = +1$$

bzw.

$$-\pi < \gamma < 0, \text{ falls } v_2 = -1.$$

Zum Nachweis braucht man sich nur zu überlegen, daß (bei KS!)

$$|\gamma_{b_1}|(\varphi) > |\gamma_{a_1}(\varphi)| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$\text{sign } \gamma = \text{sign } \gamma_{b_1} = v_2$$

und - unabhängig von  $v_1$  und  $v_2$  -

$$0 < \max_{\varphi} \gamma(\varphi) - \min_{\varphi} \gamma(\varphi) < \pi.$$

Nach V.6. ist

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi) = \pi - \delta - \gamma(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi$$

und daher auch

$$0 < \max_{\varphi} \varphi_2(\varphi) - \min_{\varphi} \varphi_2(\varphi) < \pi.$$

Damit ist der Schwenkbereich  $S$  der Kurbel  $d_2$  gegeben durch

$S := [s_2, s_1]$ , wobei  $s_1 := \max_{\varphi} \varphi_2(\varphi)$  und  $s_2 := \min_{\varphi} \varphi_2(\varphi)$ .  $s_1$  und  $s_2$  lassen sich folgendermaßen berechnen: Es ist (siehe z.B. Bild 8)

$$\max_{\varphi} |\gamma(\varphi)| = \arccos \frac{a_1^2 + b_1^2 - (c_1 + d_1)^2}{2a_1b_1}$$

und

$$\min_{\varphi} |\gamma(\varphi)| = \arccos \frac{a_1^2 + b_1^2 - (c_1 - d_1)^2}{2a_1b_1}.$$

Wegen  $\varphi_2 = \pi - \delta - \gamma = \pi - \delta - v_2 |\gamma|$  ergibt sich daraus

$s_1 = \pi - \delta - v_2 \arccos \frac{a_1^2 + b_1^2 - (c_1 - v_2 d_1)^2}{2a_1b_1}$
$s_2 = \pi - \delta - v_2 \arccos \frac{a_1^2 + b_1^2 - (c_1 + v_2 d_1)^2}{2a_1b_1}$

Da sich durch Addition eines geeigneten Vielfachen von  $2\pi$  stets

$$s \in [-\pi, 2\pi]$$

erreichen läßt, nehmen wir diese Inklusion ohne Beschränkung der Allgemeinheit als gegeben an.

2. Berechnung von  $f_{2u}$  und  $f_{2o}$ : Unter Beachtung von

$S = [s_2, s_1] \subset [-\pi, 2\pi]$  und  $s_1 - s_2 < \pi$  gilt (siehe Bild 14) im Fall

2.1:  $s_2 \leq 0$ :

$$f_{2u} = \begin{cases} f_2(s_1), & \text{falls } s_1 < 0 \\ |a_2 - d_2|, & \text{falls } s_1 \geq 0 \end{cases}$$

und

$$f_{2o} = \begin{cases} f_2(s_2), & \text{falls } \frac{1}{2}(s_1 + s_2) < 0 \\ f_2(s_1) & \text{sonst} \end{cases}$$

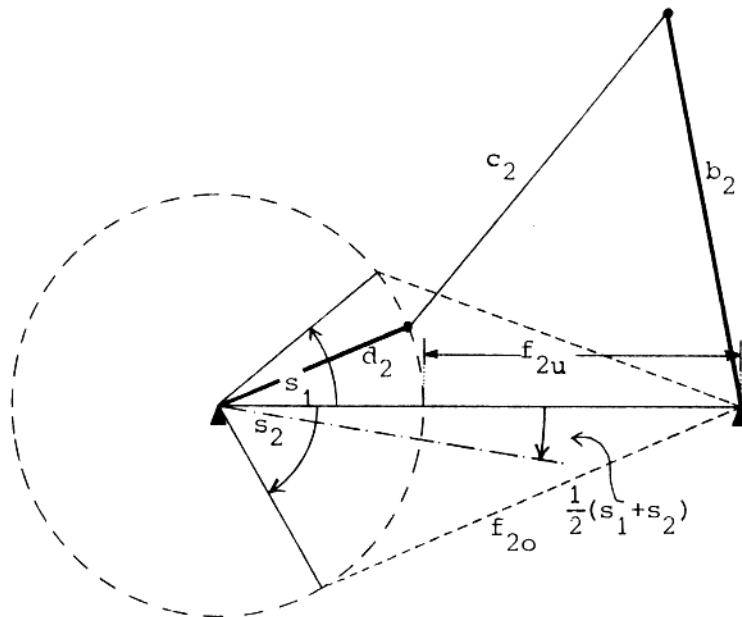


Bild 14.- Berechnung von  $f_{2u}$  und  $f_{2o}$  bei  $s_2 < 0 < s_1$  und  $\frac{1}{2}(s_1 + s_2) < 0$ .

2.2:  $0 < s_2 \leq \pi$ :

$$f_{2u} = \begin{cases} f_2(s_2), & \text{falls } \frac{1}{2}(s_1+s_2) < \pi \\ f_2(s_1) & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_{2o} = \begin{cases} f_2(s_1), & \text{falls } s_1 < \pi \\ a_2+d_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.3:  $s_2 > \pi$ :

$$f_{2u} = f_2(s_1), \quad , \quad f_{2o} = f_2(s_2).$$

3. Vermeidung von Strecklagen im zweiten Gelenkviereck im Fall KS-X:

Das erste Gelenkviereck liefere zusammen mit dem Kopplungswinkel  $\delta$  den Schwenkbereich  $S = \{\varphi_2 \mid s_2 \leq \varphi_2 \leq s_1\}$ , wie in VI.1. berechnet. Bezeichnet man im zweiten Gelenkviereck den Winkel zwischen Kurbel  $d_2$  und Koppel  $c_2$  mit  $\sigma = \sigma(\varphi_2)$ , so sind die Strecklagen gerade durch  $\sigma(\tilde{\varphi}_2) = 0$  bzw.  $\sigma(\tilde{\varphi}_2) = \pi$  für gewisse  $\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2$  charakterisiert. Da im zweiten Gelenkviereck  $\gamma_{b_2}$  stets

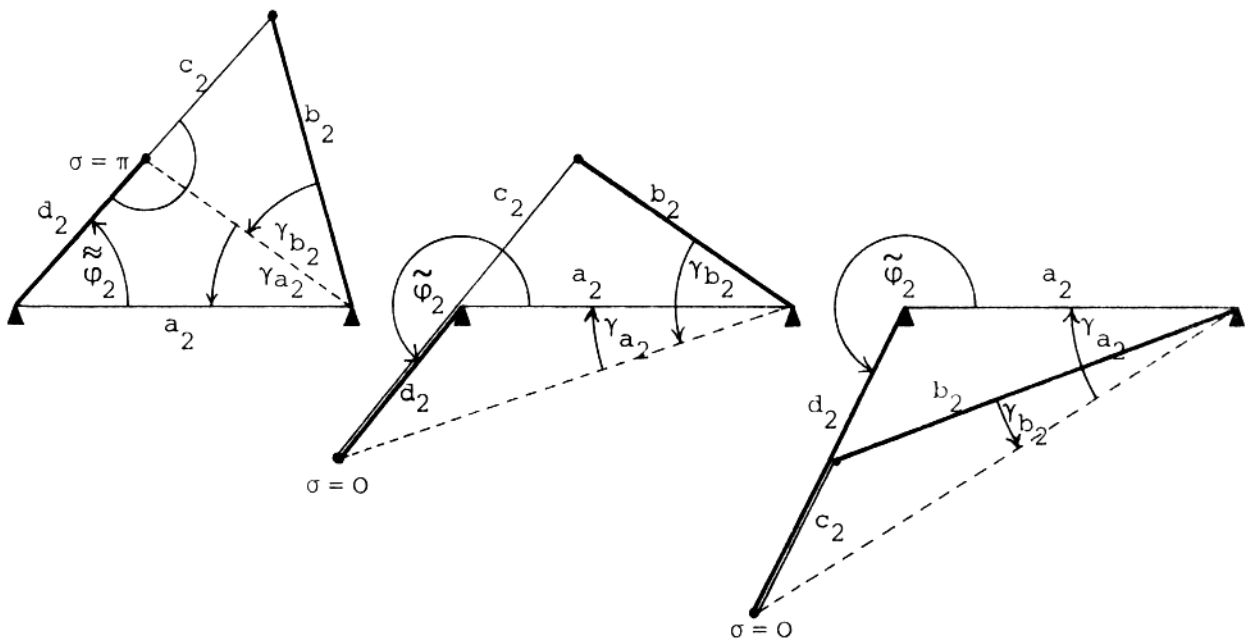


Bild 15.- Die unerwünschten Strecklagen.

positiv ist (siehe V.6.), sind nur die folgenden drei Fälle auszuschließen (siehe Bild 15):

$$\underline{3.1:} \quad \arccos \frac{(c_2+d_2)^2+a_2^2-b_2^2}{2(c_2+d_2)a_2} \in ]s_2, s_1[ .$$

$$\underline{3.2:} \quad \pi + \arccos \frac{(c_2-d_2)^2+a_2^2-b_2^2}{2(c_2-d_2)a_2} \in ]s_2, s_1[ , \quad \text{falls } c_2 \neq d_2.$$

$$\underline{3.3:} \quad -\pi + \arccos \frac{(c_2-d_2)^2+a_2^2-b_2^2}{2(c_2-d_2)a_2} \in ]s_2, s_1[ , \quad \text{falls } c_2 \neq d_2.$$

In jedem der Fälle muß natürlich zunächst festgestellt werden, ob der Betrag des Arguments des arccos jeweils  $\leq 1$  ist. Ist dies nicht der Fall, so können die jeweiligen Strecklagen überhaupt nicht angenommen werden. Gilt jedoch einer der Fälle 3.1 - 3.3, so ist der zugehörige Parametersatz  $(a_1, \dots, v_4)$  unzulässig. Steht fest, daß für  $\varphi_2 \in ]s_2, s_1[$  keine Strecklagen angenommen werden, so folgt mit  $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_2) := \gamma_{a_2}(\varphi_2) + |\gamma_{b_2}|(\varphi_2)$ , daß die Funktion  $\varphi_2 \mapsto \gamma_2(\varphi_2)$  monoton auf  $[s_2, s_1]$  ist, und folglich  $\gamma_2$  und damit auch  $\hat{\psi}$  die absoluten Extrema (und sonst keine weiteren relativen Extrema) in  $s_2$  und  $s_1$  bzw. in den dazugehörigen Eingangswinkeln annimmt.

## VII. DIE BEZUGSWINKEL

Bei der bisherigen Darstellung der Funktion  $\hat{\psi}$  ist nicht zu erwarten, daß (wie es die Zielfunktion in Bild 1 fordert)  $\hat{\psi}(0) = 0$  gilt. Es ist noch nicht einmal sichergestellt, daß  $\hat{\psi}(\varphi) \geq 0$  für alle  $\varphi$  gilt. Deshalb darf  $\varphi$  i.a. nicht von der Gestellachse aus gemessen werden, sondern von einem gewissen durch  $\varphi_0$  (bezogen auf die "positive" Gestellachse) gegebenen Strahl aus. Der Winkel  $\varphi_0$  muß so bestimmt werden, daß zur Kurbelstellung  $\varphi_0$  des ersten Gelenkvierecks der maximale (oder minimale Ausschlag  $\psi_0$  der Schwinge des zweiten Gelenkvierecks gehört (siehe Bild 17 für den Fall DK-KS). Zählt man dann  $\psi$  in geeigneter Richtung von  $\psi_0$  aus, so sind  $\psi(0) = 0$  und  $\psi(\varphi) \geq 0$  automatisch erfüllt. Wir nennen  $\varphi_0$  bzw.  $\psi_0$  die Bezugswinkel für den Eingangs- bzw. Ausgangswinkel.

1. Bestimmung von  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  und  $\varphi \mapsto \psi$  im Fall KS-X: Nach den Ausführungen am Schluß von VI.3. wissen wir, daß  $\varphi_2 \mapsto \gamma_2$  monoton auf  $[s_2, s_1]$  ist.

Ordnet man nun dem Fall, daß  $\gamma_2$  monoton wächst, den Parameterwert

$$v_3 = +1$$

und dem Fall, daß  $\gamma_2$  monoton fällt, den Wert

$$v_3 = -1$$

zu, und definiert  $\hat{\psi}_+ := \pi - \gamma_2 \circ \varphi_2$  (das ist  $\hat{\psi}$  mit  $v_4 = +1$ ),

$$v := v_2 v_3 v_4,$$

$$\varphi_0 := v_2 \left( \frac{1-v}{2} \cdot \pi + \arccos \frac{(c_1 + v d_1)^2 + a_1^2 - b_1^2}{2(c_1 + v d_1) a_1} \right),$$

$$\psi_0 := \hat{\psi}_+(\varphi_0) \quad \text{und}$$

$$\psi(\varphi) := v_4 (\psi_0 - \hat{\psi}_+(\varphi_0 + v_1 \varphi)),$$

so gilt

$$\psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(\varphi) \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Beweis: Die Eigenschaft  $\psi(0) = 0$  folgt sofort aus den Definitionen.

Zum Nachweis der "Positivität" von  $\psi$  genügt es zu zeigen, daß

$$\psi_0 = \max_{[0, 2\pi]} \hat{\psi}_+ \quad \text{für } v_4 = +1 \quad \text{bzw.} \quad \psi_0 = \min_{[0, 2\pi]} \hat{\psi}_+ \quad \text{für } v_4 = -1 \quad \text{gilt.}$$

Ist  $v = 1$ , so ist  $\varphi_0$  der zur Strecklage  $(d_1 + c_1, a_1, b_1)$  gehörende Eingangswinkel, wobei je nach Bauart der Kurbelschwinge  $v_2 = \pm 1$  ist (siehe Bild 16).

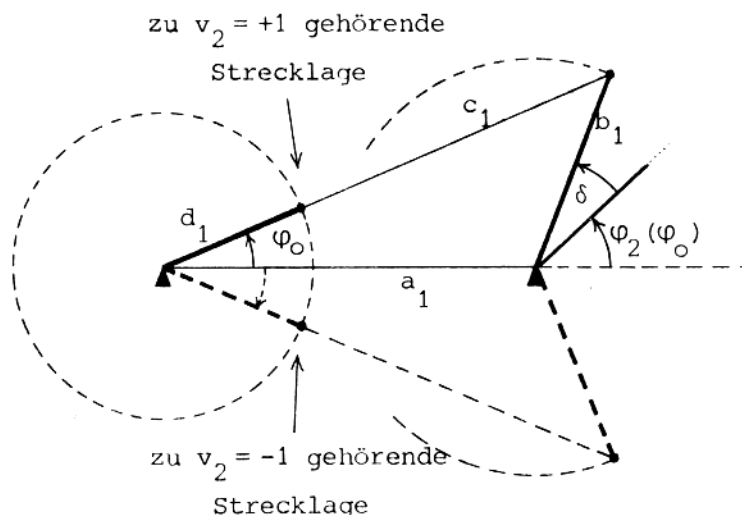


Bild 16.- Der Bezugswinkel  $\varphi_0$  bei  $v = 1$  und  $v_2 = \pm 1$ .

Folglich ist

$$\varphi_2(\varphi_0) = \begin{cases} s_2 & , \text{ falls } v_2 = +1 \\ s_1 & , \text{ falls } v_2 = -1. \end{cases}$$

Ist auch  $v_3 = +1$ , also  $\gamma_2$  monoton wachsend auf  $[s_2, s_1]$ , so kann

$$v_2 = v_4 = +1 \quad \text{oder} \quad v_2 = v_4 = -1$$

sein.

Im ersten Fall ist  $\psi_0 = \hat{\psi}_+(\varphi_0) = \pi - \gamma_2(\varphi_2(\varphi_0)) = \pi - \gamma_2(s_2) = \max \hat{\psi}_+$  und

im zweiten Fall  $\psi_0 = \hat{\psi}_+(\varphi_0) = \pi - \gamma_2(\varphi_2(\varphi_0)) = \pi - \gamma_2(s_1) = \min \hat{\psi}_+$ .

Ist  $v_3 = -1$ , also  $\gamma_2$  monoton fallend auf  $[s_2, s_1]$ , so kann

$$v_2 = +1, v_4 = -1 \quad \text{oder} \quad v_2 = -1, v_4 = +1$$

sein.

Im ersten Fall ist  $\psi_0 = \hat{\psi}_+(\varphi_0) = \pi - \gamma_2(\varphi_2(\varphi_0)) = \pi - \gamma_2(s_2) = \min \hat{\psi}_+$  und

im zweiten Fall  $\psi_0 = \hat{\psi}_+(\varphi_0) = \pi - \gamma_2(\varphi_2(\varphi_0)) = \pi - \gamma_2(s_1) = \max \hat{\psi}_+$ .

Den Fall  $v = -1$  untersucht man analog.

2. Bestimmung von  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  und  $\varphi \mapsto \psi$  im Fall DK-KS: In Bild 17

ist ein Gelenksehseck DK-KS (d.h.  $v_3 = 0$ ) für den Fall  $v_1 = v_2 = +1$  und  $v_4 = -1$  in der Lage (Strecklage  $\sigma = \pi$  des zweiten Gelenkvierecks) gezeichnet, in der sich der minimale Ausschlag  $\psi_0$  der Schwinge  $b_2$  ergibt.

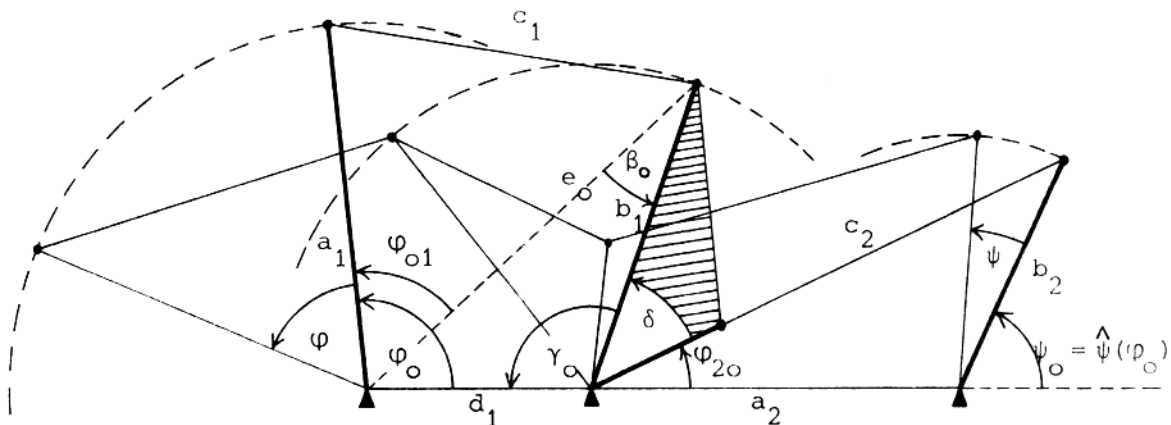


Bild 17.- Zur Festlegung von  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  bei DK-KS mit  $v_1 = v_2 = +1$ ,  $v_4 = -1$ .



Ist  $v_2 = -1$ , so ist in Bild 17 das Dreieck mit den Seiten  $c_1, a_1, e_0$  an  $e_0$  zu spiegeln, und man erhält die entsprechende Konfiguration mit einem anderen  $\varphi_0$ . Ist  $v_4 = +1$ , so ergibt die Strecklage  $\sigma = 0$  im zweiten Gelenkviereck für  $v_2 = \pm 1$  den maximalen Ausschlag  $\psi_0$  zu entsprechenden Eingangswinkeln  $\varphi_0$ .

Man erhält (siehe Bild 17):

$$\varphi_{20} = \arccos \frac{a_2^2 + (c_2 - v_4 d_2)^2 - b_2^2}{2a_2(c_2 - v_4 d_2)} + (1 + v_4) \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_0 = \pi - \varphi_{20} - \delta \quad \text{und}$$

$$e_0 = (d_1^2 + b_1^2 - 2d_1 b_1 \cos \gamma_0)^{1/2}.$$

Dann ist

$$\beta_0 = \arcsin \frac{d_1 \sin \gamma_0}{e_0}$$

und mit

$$\varphi_{01} = \arccos \frac{a_1^2 + e_0^2 - c_1^2}{2a_1 e_0}$$

folgt

$$\varphi_0 = \pi - \gamma_0 - \beta_0 + v_2 \varphi_{01}.$$

(Der erste Summand von  $\varphi_0$  ergibt sich zunächst zu  $v_4 \pi$ ; wegen der  $2\pi$ -Periodizität darf jedoch  $-\pi$  durch  $\pi$  ersetzt werden.)

Setzt man nun

$$\psi_0 := \hat{\psi}_+(\varphi_0)$$

und

$$\psi(\varphi) := v_4 (\psi_0 - \hat{\psi}_+(\varphi_0 + v_1 \varphi)),$$

so hat man auch hier die Eigenschaften

$$\psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(\varphi) \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi].$$

VIII. DIE OPTIMIERUNG

1. Die in Bild 1 dargestellte Zielfunktion  $\varphi \mapsto \tilde{\psi}(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , ist eine interpolierende Splinefunktion zu den eingezeichneten Punkten (einschließlich  $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(2\pi) = 0$ ).
2. Der Definitionsbereich wird in 24 Teilintervalle (der "Länge"  $15^\circ$ ) zerlegt. Dies liefert Stützstellen  $\varphi^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 24$ , wobei  $\varphi^{(0)} = 0^\circ$ ,  $\varphi^{(24)} = 360^\circ$ . Ferner sei  $\psi_j := \psi(\varphi^{(j)})$  und  $\tilde{\psi}_j := \tilde{\psi}(\varphi^{(j)})$  für alle  $j$ .
3. Man setzt  $a_1 = a_2 = 1$  und hat mit

$$\psi(\varphi) = \psi(b_1, c_1, d_1, \delta, b_2, c_2, d_2, v_1, v_2, v_3, v_4; \varphi)$$

bei gegebenem Bauart-Parametersatz  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  die Funktion

$$F(b_1, c_1, d_1, \delta, b_2, c_2, d_2) := \sum_{j=0}^{23} |\psi_j - \tilde{\psi}_j| \cdot w_j + \max_j \{\psi_j - \tilde{\psi}_j > 0\}$$

mit gewissen Gewichten  $w_j > 0$  unter den oben genannten Nebenbedingungen zu minimieren.

4. Als Optimierungs-Verfahren wurde ein modifiziertes Box-Verfahren gewählt. Die numerischen Ergebnisse (siehe IX.) wurden damit folgendermaßen erzielt:

Ausgehend von dem Parametersatz

$$b_1 = b_2 = 0,725,$$

$$c_1 = c_2 = 0,725,$$

$$d_1 = d_2 = 0,222 \quad \text{und} \quad \delta = 0,$$

der im Fall  $v_3 = 0$  den Typ DK-KS und im Fall  $v_3 = \pm 1$  den Typ KS-KS darstellt, wird ein Komplex von 17 zulässigen Punkten im  $\mathbb{R}^7$  aufgebaut.

Dieser Komplex wird im folgenden Suchverfahren so umgebaut, daß er nur noch zulässige Punkte enthält, in denen gilt

$$\psi_j - \tilde{\psi}_j \geq 0 \quad \text{für alle } j.$$

D.h. für jeden dieser Punkte (im  $\mathbb{R}^7$ ) verläuft die zugehörige Funktion  $\psi$  oberhalb von  $\tilde{\psi}$  (das gilt zumindest in den Stützstellen).

In dem zulässigen Bereich des  $\mathbb{R}^7$ , in dem das Verfahren angeht, wird nun  $F$  minimiert (weiter unter Beachtung von  $\psi_j - \tilde{\psi}_j \geq 0$ ).

Dieses Verfahren wurde für  $v_3 = 0$  für alle 8 "Bauarten"  $(v_1, v_2, 0, v_4)$  und für  $v_3 = \pm 1$  für alle 16 "Bauarten"  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  durchgeführt.

## IX. DIE ERGEBNISSE

Univ.-Bibl.  
Kaiserslautern

Es wurde auf der TR 440 mit einer Rechenzeit-Schranke von 900 sec. pro Bauart  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  gerechnet. Bis auf die Bauart  $(-1, -1, 0, 1)$  wurde in allen anderen 23 Fällen ein (lokales) Minimum der jeweiligen Funktion  $F$  erreicht, d.h. der beim Box-Verfahren verwendete Komplex hatte sich auf einen Durchmesser zwischen  $10^{-2}$  und  $10^{-5}$  zusammengezogen (siehe letzte Spalte der Tabelle XI.1. im Anhang).

Die Ergebnisse zeigen jedoch im einzelnen erhebliche Unterschiede: Die besten Resultate wurden für den Gelenksechseck-Typ DK-KS erzielt. Der hierbei typische Verlauf der approximierenden Funktion  $\psi(\varphi)$  ist in den Bildern XI.2, XI.3 und XI.4 im Anhang zu sehen.

In diesen Plots sind für eine Bauart (in den Bildern mit "Anordnung" bezeichnet) jeweils die Zielfunktion  $\tilde{\psi}$  wie in Bild 1 und die zu dem bei Programmende erreichten Parametersatz  $(b_1, c_1, d_1, \delta, b_2, c_2, d_2)$  gehörende ("realisierbare") Funktion  $\psi$  sowie einige Zwischenresultate gezeichnet. Letztere sind mit 1., 2., 3., ... numeriert; dabei bedeutet "1." die zum Startparametersatz (siehe VIII.4) gehörende Funktion  $\psi$ , "2." die zum ersten Parametersatz mit nur "positiven" Differenzen  $\psi_j - \tilde{\psi}_j$  gehörende Funktion  $\psi$ , jede weitere Nummer die zu einem während des Programm-Ablaufs benutzten Parametersatz gehörende Funktion  $\psi$ , und die höchste Nummer markiert noch einmal die zu dem erreichten und in Tabelle XI.1 abgedruckten Parametersatz gehörende realisierbare Funktion  $\psi$ .

Die in den Bildern XI.2-4 dargestellten realisierbaren Funktionen  $\psi$  weichen nur wenig voneinander ab. So beträgt (in den Stützstellen) die maximale Abweichung von der Zielfunktion in Bild XI.2:  $5,7^\circ$ ; in XI.3:  $6,7^\circ$  und in XI.4:  $8,7^\circ$ .

Zieht man als weiteres Auswahl- oder Gütekriterium jedoch die (ebenfalls in Tabelle XI.1 ausgedruckten) Übertragungswinkel

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  im ersten bzw. zweiten Gelenkviereck heran, so ist das zur Bauart  $(1, -1, 0, -1)$  gehörende Gelenksechseck mit der zugehörigen Funktion  $\psi$  in Bild XI.3 eindeutig das beste; denn es ist  $\varepsilon_1 = 33,6^\circ$  und  $\varepsilon_2 = 36,4^\circ$  gegenüber  $\varepsilon_1 = 24,8^\circ, \varepsilon_2 = 34,1^\circ$  im Fall  $(1, 1, 0, -1)$  bzw.  $\varepsilon_1 = 26,1^\circ, \varepsilon_2 = 32,4^\circ$  im Fall  $(1, -1, 0, 1)$ .

Für die Bauart  $(1, 1, 0, -1)$  wurde mit einem leicht geänderten Verfahren für den Aufbau des Anfangs-Komplexes der folgende - von dem in Tabelle XI.1 genannten verschiedene - optimale Parametersatz ermittelt:

$$b_1 = 0,64587; \quad c_1 = 0,88502; \quad d_1 = 0,51768; \quad \delta = 83,6^\circ;$$
$$b_2 = 0,68060; \quad c_2 = 0,90757; \quad d_2 = 0,40538.$$

(Alle Ergebnisse gerundet.)

Die zugehörige Funktion  $\psi$  hat einen ähnlichen Verlauf wie die realisierbare Funktion  $\psi$  in Bild XI.3 und mit  $5,4^\circ$  eine noch geringere maximale Abweichung von der Zielfunktion; der Übertragungswinkel im ersten Gelenkviereck ist jedoch bedeutend schlechter:  $\varepsilon_1 = 15,3^\circ, \varepsilon_2 = 40,9^\circ$ .

Allerdings zeigt dieses Ergebnis, daß die Funktion  $F$  unter den betrachteten Nebenbedingungen, wie zu erwarten war, "viele" lokale Minima besitzt.

Die Bilder XI.5-7 zeigen typische Ergebnisse für den Gelenksechseck-Typ KS-X: Die Approximation der Zielfunktion durch die realisierbare Funktion  $\psi$  ist oft nur für  $250^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$  akzeptabel, manchmal auch noch für  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ , aber im übrigbleibenden Winkelbereich liegen die maximalen Abweichungen je nach Bauart zwischen  $22^\circ$  und  $88^\circ$  (siehe Tabelle XI.1).

Die im Bild XI.5 dargestellte realisierbare Funktion  $\psi$  zeigt allerdings ein anderes Phänomen: Es gibt Gelenksechsecke (hier mit der Bauart  $(1, -1, -1, -1)$ ), bei denen für einen Eingangswinkelbereich von  $140^\circ$  ( $105^\circ \leq \varphi \leq 245^\circ$ ) die Ausgangsschwinge einen Schwenkbereich von weniger als  $5^\circ$  hat. Die Übertragungswinkel sind  $\varepsilon_1 = 18^\circ$  und  $\varepsilon_2 = 39,7^\circ$ .

## X. WEITERE UNTERSUCHUNGEN

Die bisher beschriebenen Untersuchungen über Gelenksechsecke lassen sich in vielerlei Richtungen fortsetzen und verbessern:

1. Alle in Tabelle XI.1 zusammengefaßten Resultate sind von demselben Startparametersatz aus erzielt worden. Das Programm sollte nun auch von anderen Startwerten aus optimale Punkte suchen. Hierbei ergibt sich das Problem, "plausible" Punkte (im  $\mathbb{R}^7$ ) zu finden, d.h. Gelenksechsecke, die der jeweiligen Bauart entsprechen. Sinnvoll wäre es, dabei auf aus der Praxis bekannte Abmessungen zurückzugreifen.
2. Bei der Beschreibung der Ergebnisse in Abschnitt IX ist schon angesprochen worden, daß die zu minimierende Funktion  $F$  bei den bisher benutzten Nebenbedingungen viele lokale Minima besitzt. Es könnten nun weitere Nebenbedingungen, z.B. eine Beschränkung der Übertragungswinkel, aufgenommen werden, um gewisse dieser Minima auszuschließen.
3. Die Zielfunktion  $\tilde{\psi}$  (Bild 1) könnte modifiziert werden bzw. gegebenenfalls noch besser an die Bedürfnisse der Praxis angepaßt werden.
4. Das Optimierungs-Programm kann verbessert werden, um die Rechenzeit zu verkürzen. Die Stützstellen könnten anders gewählt werden. Es könnten andere Gewichte (in der Definition von  $F$ ) benutzt werden.
5. Es könnten andere Optimierungs-Verfahren als das verwendete Box-Verfahren herangezogen werden. Hierfür wären allerdings zunächst wieder neue Optimierungs-Programme zu erstellen.

XI. ANHANG

Raumart V <sub>1</sub> V <sub>2</sub> V <sub>3</sub> V <sub>4</sub>	Gliederungen bez. auf a <sub>1</sub> =a <sub>2</sub> =1/ Bezugs- u. Ankopplungswinkel in Grad										min. Übertragungs- winkel in Grad			max. Abw. d. Auswrt. in Grad		Komplex-Ø nach 850 sec kleiner als
	γ <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	c <sub>1</sub>	d <sub>1</sub>	δ	b <sub>2</sub>	c <sub>2</sub>	d <sub>2</sub>	γ <sub>2</sub>	ε <sub>1</sub>	ε <sub>2</sub>	α	β			
+ + 0 +	27.8	0.67626	0.71952	0.39452	158.6	0.62674	0.61136	0.31804	179.5	4.8	1.1	+41.3	0.00011			
- + 0 +	17.1	0.40625	1.01358	0.444150	47.0	0.64699	0.82262	0.40098	163.5	17.1	35.5	+10.1	0.00064			
+ - 0 +	343.7	0.70085	0.92342	0.57390	222.1	0.63932	0.77739	0.36115	165.1	26.1	28.9	+ 8.7	0.00011			
- - 0 +	25.4	1.92576	1.40670	0.48010	166.0	1.96485	2.27800	0.49603	115.4	1.0	10.7	+23.3	0.023			
+ + 0 -	140.3	0.10961	0.98135	0.15616	75.4	0.61083	0.79557	0.34585	93.3	24.8	34.1	+ 5.7	0.0012			
- + 0 -	3.8	0.36639	0.91354	0.27988	219.3	0.66569	0.74797	0.37761	97.6	1.0	25.9	+ 6.5	0.00092			
+ - 0 -	337.4	0.26242	0.98450	0.21170	74.4	0.43140	0.87084	0.24401	86.2	33.6	36.4	+ 6.7	0.001			
- - 0 -	235.7	0.62250	0.69375	0.34700	205.1	0.69375	0.69900	0.28450	120.2	13.4	13.7	-22.1	7.7			
+ + +	32.6	1.36078	1.31658	0.77525	151.9	0.56909	0.54684	0.37625	191.4	9.4	17.1	+27.5	0.0036			
- + +	33.9	0.56205	0.71031	0.19043	178.7	0.26934	0.62025	0.57508	214.1	41.8	1.1	+78.8	0.00035			
+ - +	103.5	0.63070	0.90409	0.31223	277.8	0.10733	0.83683	0.20866	186.6	49.4	5.9	+85.3	0.0056			
- - +	178.8	0.60497	0.69550	0.50042	265.1	0.09670	0.89743	0.07056	163.6	1.0	1.1	+31.3	0.00084			
+ + -	183.6	0.97386	0.95537	0.02918	33.3	0.02149	1.41157	0.46811	163.5	2.6	5.7	+22.0	0.0023			
- + -	326.6	2.03103	1.57577	0.45537	23.8	0.22785	0.91933	0.18744	172.8	9.6	1.2	+22.9	0.02			
+ - -	299.0	0.91591	0.42496	0.33071	79.7	0.20424	1.20146	0.45894	168.2	15.2	1.7	+64.8	0.00013			
- - -	291.9	1.43054	0.97247	0.48900	88.0	0.11655	1.02202	0.12269	174.9	11.0	3.7	+26.2	0.00054			
+ + -	181.2	0.83860	0.26884	0.10740	175.6	0.87658	0.84800	0.83492	65.1	1.0	10.8	+31.6	0.0066			
- + -	217.9	0.62633	0.82559	0.16002	157.2	0.53946	0.84993	0.96752	81.5	69.1	1.0	+57.3	0.000012			
+ - -	345.8	0.24848	0.96265	0.04463	262.9	0.58941	0.55091	0.92187	102.7	80.9	6.8	+47.9	0.00015			
- - -	290.8	1.31827	0.81680	0.46865	249.7	0.54363	0.38980	0.74704	149.9	9.7	1.1	+19.8	0.00024			
+ + -	2.7	0.97920	1.55365	0.42344	292.3	0.45759	0.80922	0.26680	107.0	2.3	1.7	+31.8	0.012			
- + -	20.3	0.93840	1.56091	0.24922	263.0	0.26622	2.01617	0.87045	342.7	20.0	1.5	+51.8	0.0044			
+ - -	178.5	0.08501	0.94441	0.02560	59.4	0.14639	1.87638	0.89715	22.5	18.0	39.7	+51.3	0.0091			
- - -	179.3	0.45336	0.76884	0.22212	76.5	0.71927	1.28294	1.00023	89.1	1.4	5.4	+49.5	0.0015			

XI.1 Tabelle der Ergebnisse

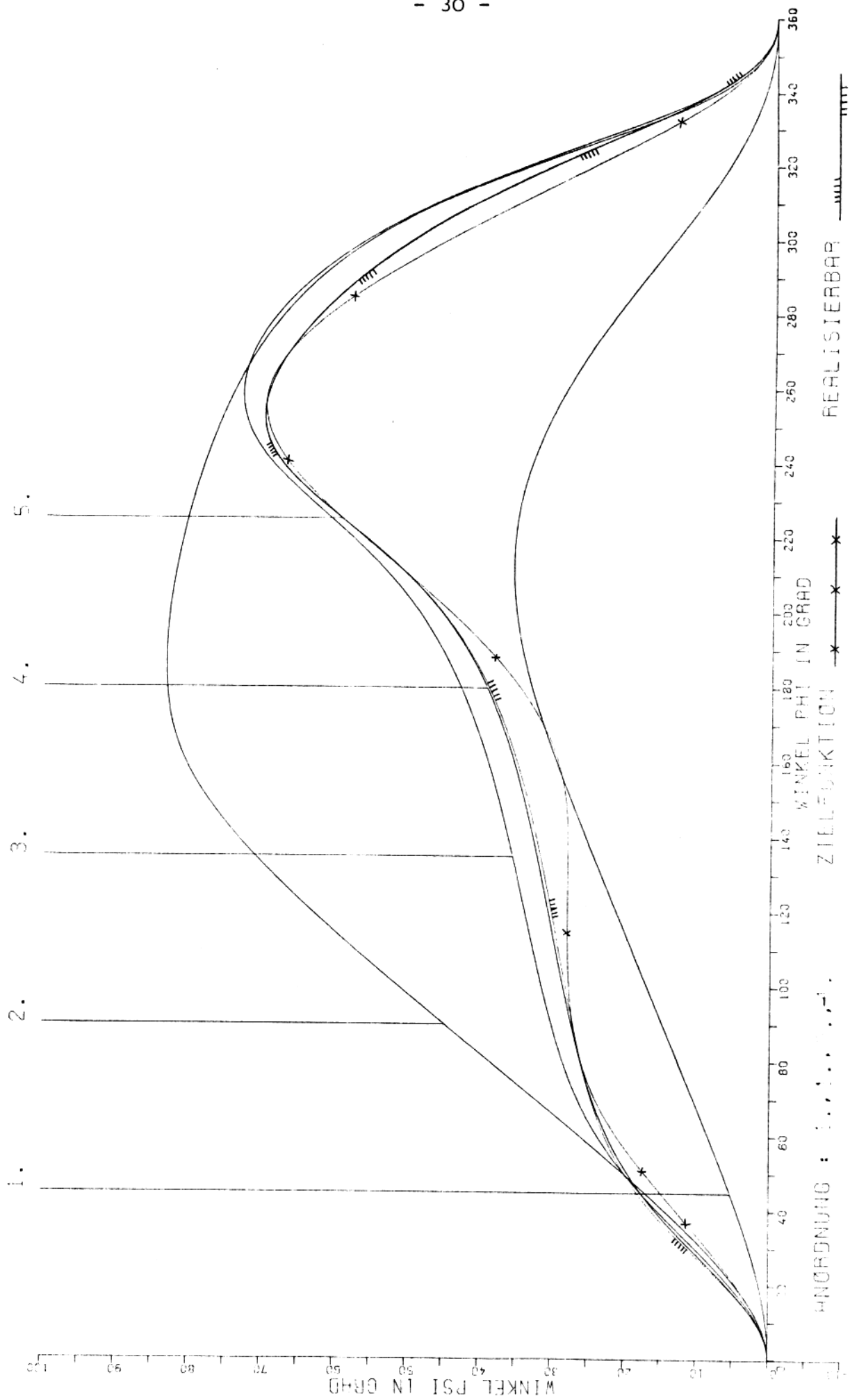
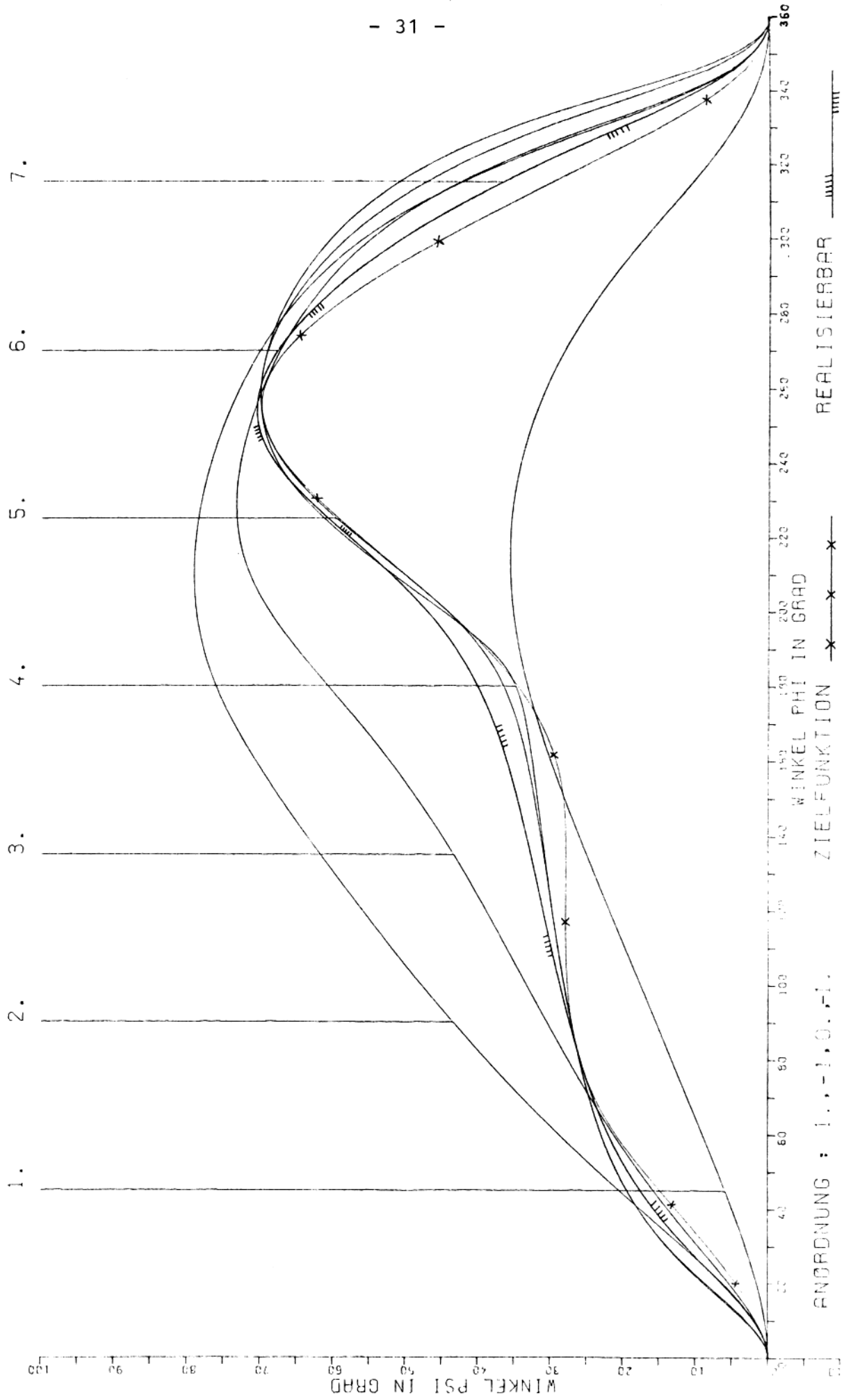


Bild XI.2



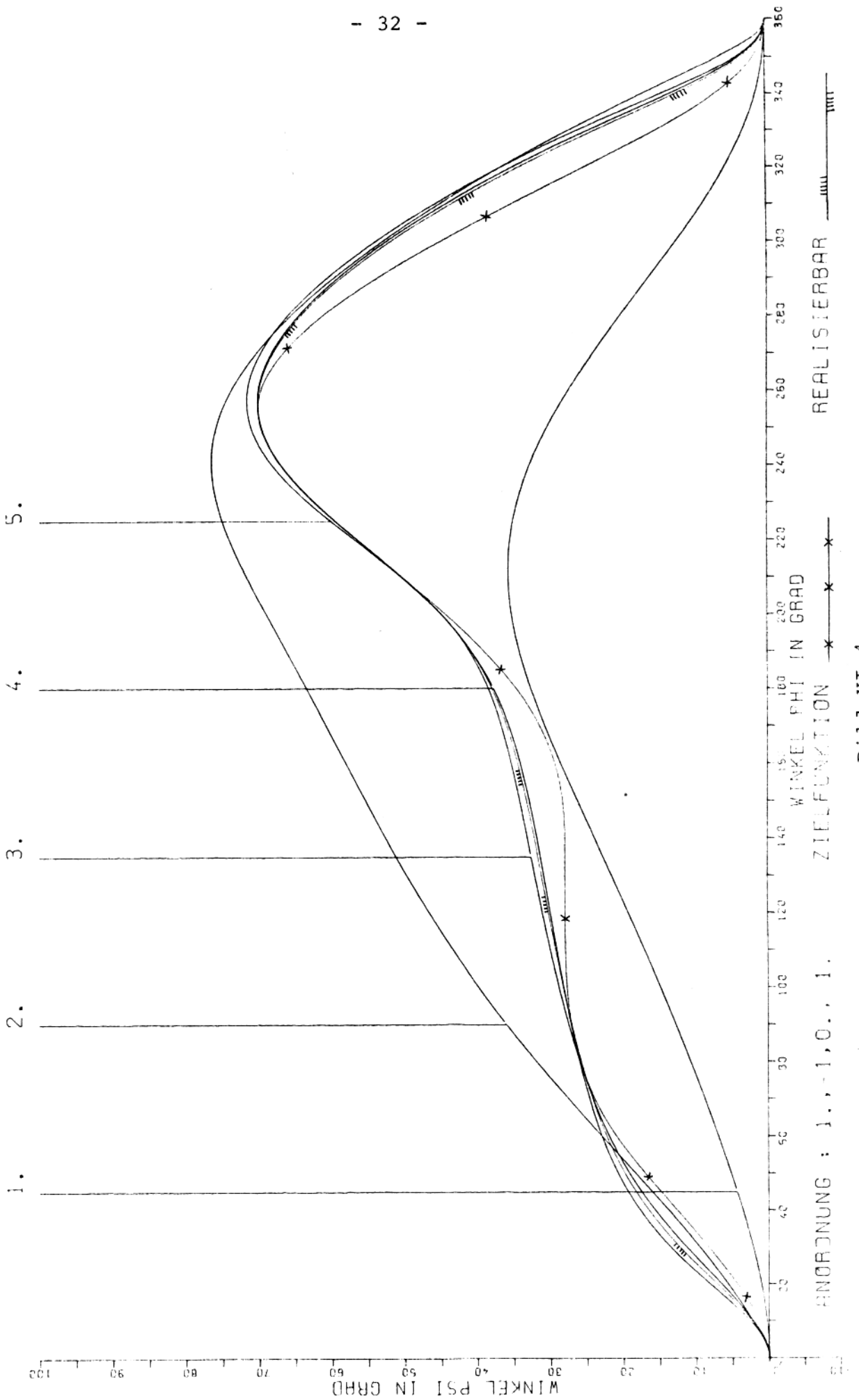


ANORDNUNG : 1., -1, 0., 1.

ZIELFUNKTION

REALISIERBAR

Bild XI.3



ANORDNUNG : 1., -1, 0., 1.

Bild XI.4

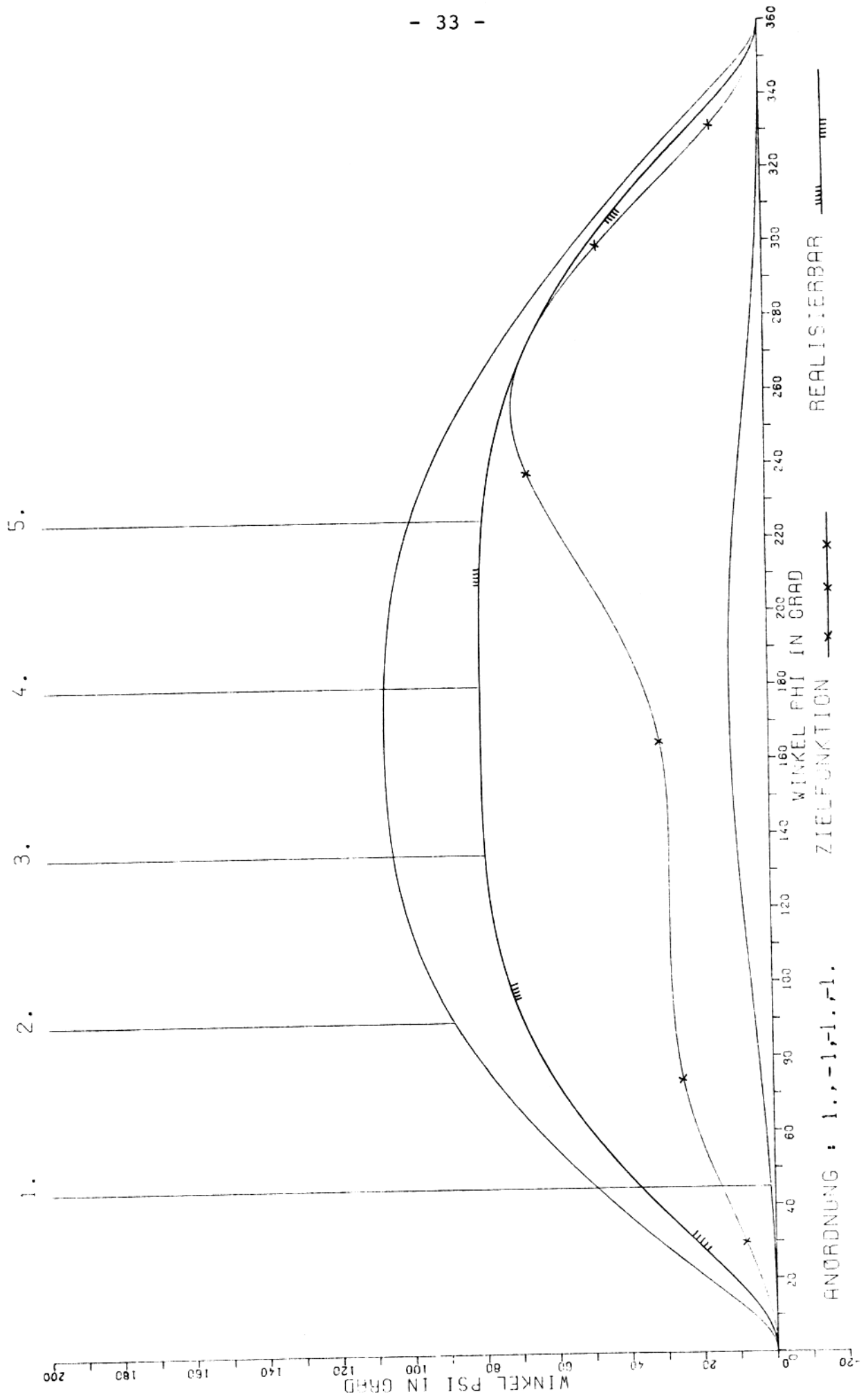


Bild XI.5

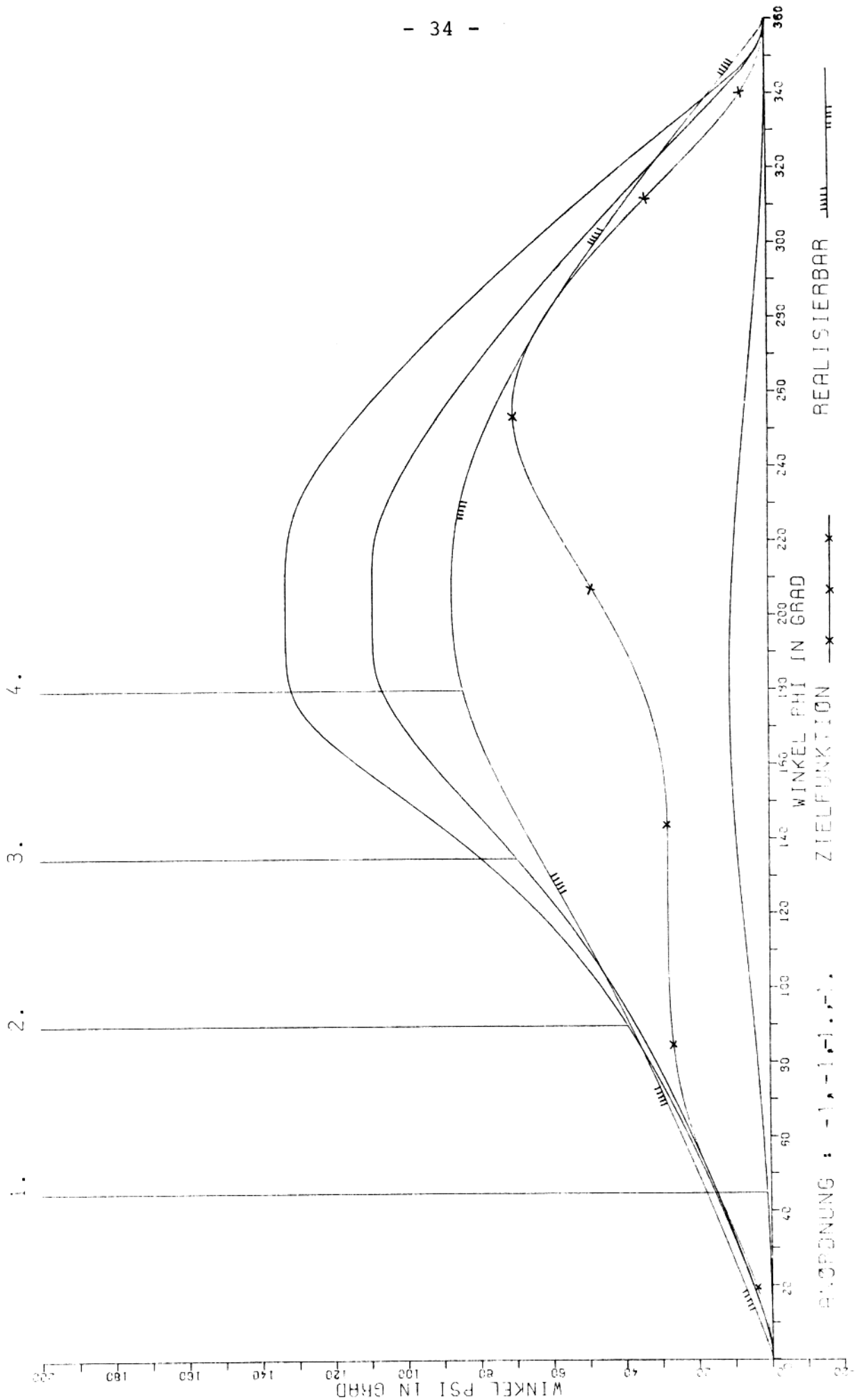


Bild XI.6

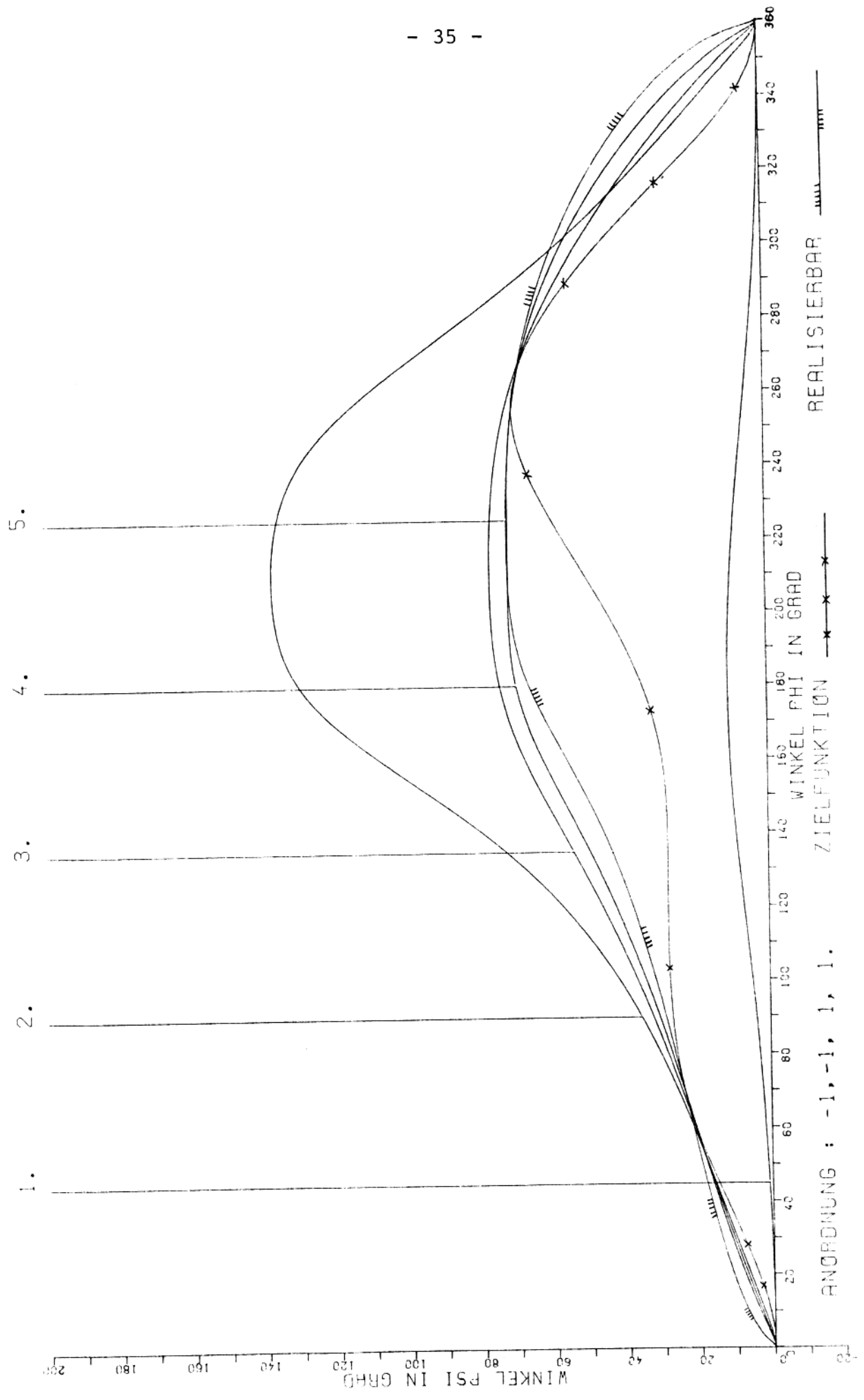


Bild XI.7

XII. LITERATUR

- [1] DIZIOGLU, B.: Getriebelehre, Braunschweig 1965
- [2] HAIN, K.: Angewandte Getriebelehre, Düsseldorf 1961
- [3] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik, Mannheim 1970