

TA ed.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT Nr. 10

UMSTRÖMUNG VON ECKEN UND KANTEN

TEIL 2

Th. MIETZNER

200\*

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH MATHEMATIK  
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE  
6750 KAISERSLAUTERN

AUGUST 1985



## Dritter Zwischenbericht zum DFG-Projekt

### "Umströmung von Ecken und Kanten"

#### 1. Einleitung

In diesem Projekt soll die Bildung von Wirbeln bei der Strömung eines Gases um eine Ecke numerisch untersucht werden. Dabei sollen verschiedene numerische Verfahren getestet und die Ergebnisse mit Versuchsdaten verglichen werden. Ferner soll untersucht werden, wie gut sich diese Verfahren vektorisieren lassen, da komplizierte zweidimensionale und selbst einfache dreidimensionale Probleme der Strömungsdynamik auf den heute üblichen Universalrechnern nicht mit vertretbarem Zeitaufwand zu lösen sind. Die numerischen Rechnungen werden auf der CYBER 205 in Karlsruhe durchgeführt.

Da Wirbel ebenso wie die Umströmung von Ecken mit großen Gradienten in den Strömungsgrößen verbunden sind, suchten wir nach numerischen Verfahren, die dafür bekannt sind, daß sie mit diesen Problemen besonders gut fertig werden. Wir wählten den GAP-Algorithmus (grid and particles) von B.M. Marder [1] und das mehrdimensionale FCT-Verfahren (flux-corrected transport) von S.T. Zalesak [2,3] als Konkurrenzmethoden. Das physikalische Beispiel stammt aus der Dissertation von H. Hassenpflug [4] :

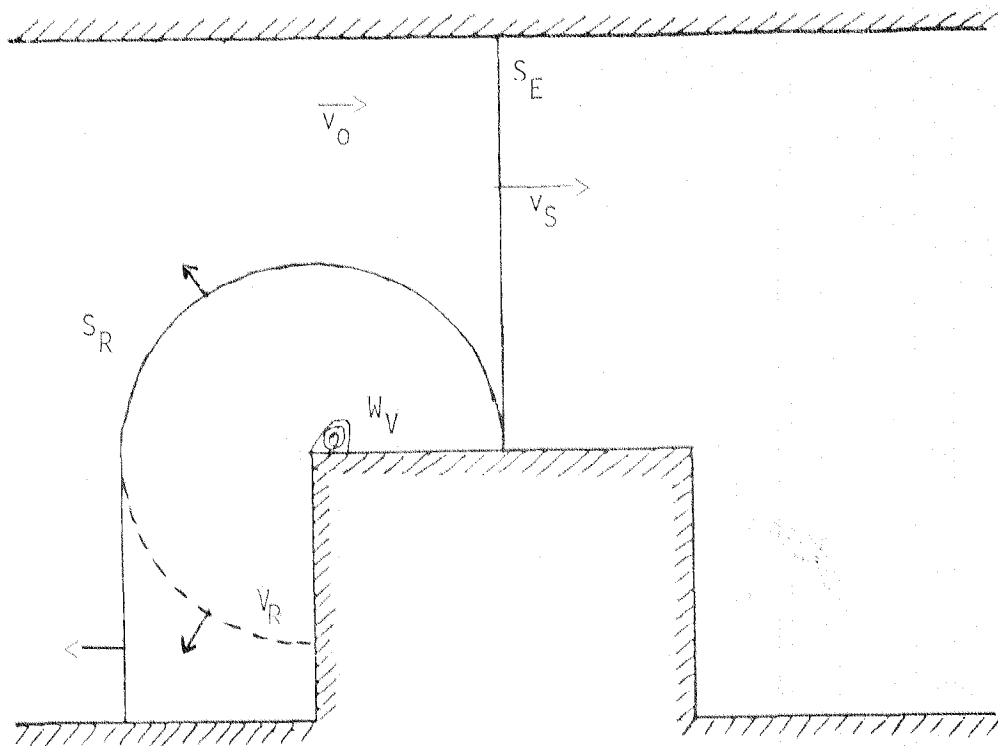


Abbildung 1a

Auf dem Boden eines Schlitzes liegt ein (rechteckiger) Quader großer Tiefe. Das Gas in seiner Umgebung ruht bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur. Durch den Schlitz läuft eine Stoßwelle senkrecht auf den Quader zu. In Abb. 1a ist der Zustand des Gases dargestellt, wenn der einfallende Stoß  $S_E$  die Vorderkante des Quaders gerade überlaufen hat: Er wird von der Quaderfront reflektiert ( $S_R$ ), und der reflektierte Stoß wird an der Oberkante gebeugt. Durch die Beugung entsteht eine Verdünnungswelle  $V_R$ , die zum Boden des Schlitzes läuft. Kurz hinter der stromaufwärtigen Kante zeigen Hassenpflugs Messungen ein Gebiet  $W_V$  sehr geringer Dichte, das er als Vorderkantenwirbel bezeichnet.

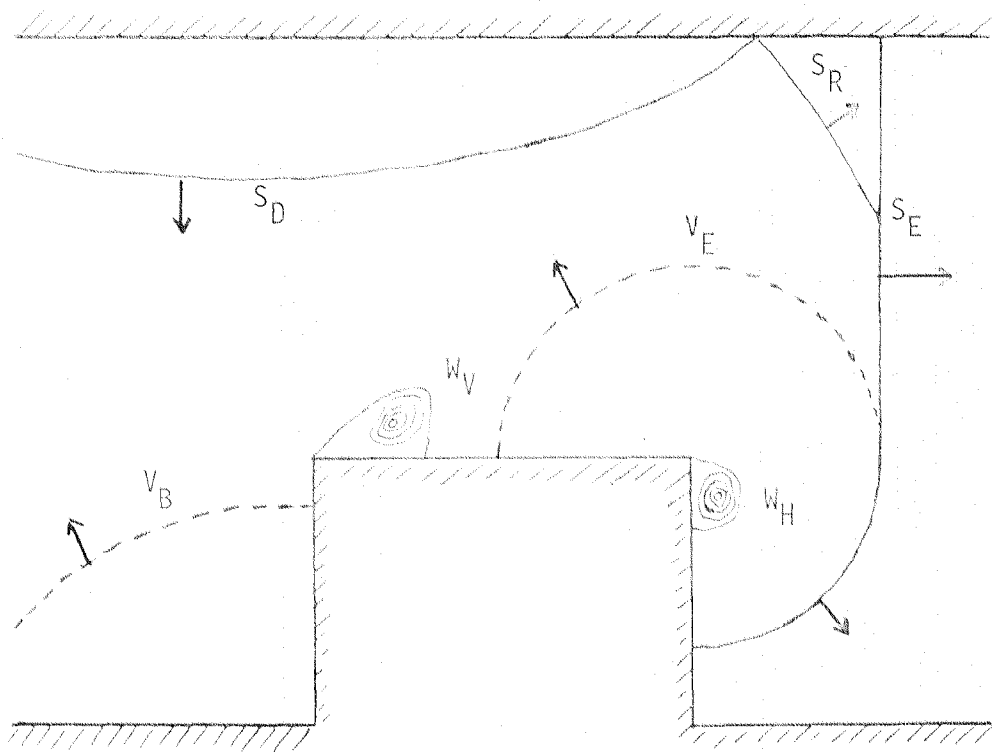


Abbildung 1b

Abbildung 1b zeigt schematisch die Situation des Gases, wenn der einfallende Stoß die Hinterkante gerade überlaufen hat. Mittlerweile ist die Verdünnungswelle  $V_R$  am Boden zu  $V_B$  reflektiert worden. Ebenso ist der gebeugte Teil des Stoßes  $S_R$  nach dem Auftreffen auf die Decke in den nach unten laufenden Stoß  $S_D$  übergegangen. Das Wirbelgebiet  $W_V$  hat sich vergrößert und ist stromabwärts gezogen. Der einfallende Stoß  $S_E$  ist an der Hinterkante gebeugt worden. Dieser Vorgang hat eine zweite Verdünnungswelle  $V_E$  erzeugt, die zur Decke läuft. Schließlich ist ein zweites Gebiet geringer Dichte  $W_H$  entstanden.

Neben vielen Interferogrammen, die die Dichteverteilung sichtbar machen, enthält die Arbeit von Hassenpflug quantitative Aussagen über die Dichte- und

Geschwindigkeitsverteilung im Hinterkantenwirbel, über die Bahn beider Wirbel und über die Entwicklung der Dichteverteilung auf der Quaderoberfläche.

## 2. Das mathematische Modell des physikalischen Vorgangs

### 2a) Die Eulergleichungen

Wir wollen die Hypothese untersuchen, daß die Wirbel ausschließlich durch Stoßwellenbeugung und nicht durch Grenzschichteffekte entstehen. Reibung und Wärmeleitung werden wir daher vernachlässigen. Wir betrachten also ein ideales Gas der Dichte  $\rho$ , Geschwindigkeit  $v = (v_x, v_y)$  und spezifischen inneren Energie  $e$ , dessen Zustand nur von zwei Ortskoordinaten  $x, y$  abhängt. Die  $z$ -Komponente von  $v$  verschwindet. Dieses Gas genügt den Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung,}$$

$$(2) \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$(3) \quad \frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot v,$$

$$(4) \quad p = (\gamma - 1) e \rho \quad \text{Zustandsgleichung.}$$

Dabei bezeichnet  $p$  den Druck,  $\gamma = c_p/c_v$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen und

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

die substantielle Ableitung. Die Erdanziehung wird vernachlässigt. Für das FCT-Verfahren schreiben wir die Gleichungen (2) und (3) in Erhaltungsgleichungen für den Impuls  $m = \rho v$  und die Gesamtenergie  $E = \rho (e + \frac{1}{2} v \cdot v)$  um:

$$(5) \quad \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x m_x + p) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y m_x) = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial m_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x m_y) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y m_y + p) = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((E+p)v_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((E+p)v_y) = 0.$$

Um zu erklären, wie bei der Stoßwellenbeugung in einem idealen Gas Wirbel entstehen können, leiten wir eine Evolutionsgleichung für den Wirbelvektor  $\omega = \nabla \times v$  her. Dabei benützen wir die Beziehung

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

und das thermodynamische Gesetz

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp,$$

in dem  $h$  die spezifische Enthalpie,

$T$  die absolute Temperatur und

$s$  die spezifische Entropie bedeuten.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s.$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = T \nabla s - \nabla h.$$

Wir berechnen die Rotation von beiden Seiten:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \nabla T \times \nabla s$$

oder

$$(8) \quad \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla T \times \nabla s.$$

Bei ebenen Strömungen verschwindet der zweite Term der linken Seite, da der Wirbelvektor senkrecht zur Strömungsebene steht. Gleichung (8) zeigt, daß Wirbel in der Strömung überall dort entstehen, wo Entropie und Temperatur Gradienten haben, die nicht parallel zueinander sind. Solange nun der Stoß den Quader noch nicht erreicht hat, herrschen vor und hinter ihm verschiedene, aber räumlich konstante Strömungsbedingungen. Im gebeugten Stoß ändern sich von Ort zu Ort die Stoßmachzahl und der Winkel zwischen Anströmrichtung und Stoßtangente. Diese beiden Parameter bestimmen über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen den Zustand des Gases hinter dem Stoß und erzeugen so die zur Wirbelbildung nötigen Temperatur- und Entropiegradienten.

## 2b) Absorbierende Randbedingungen

Da wir das physikalische Geschehen nur in der näheren Umgebung des Quaders berechnen wollen, benötigen wir Bedingungen an den Rändern, an denen das Gas in das Rechengebiet ein- und ausströmt. Wir folgen den Ideen von Engquist & Majda [7] und Hedstrom [8] und leiten absorbierende Randbedingungen für nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungssysteme in

mehreren Ortsvariablen her: Gegeben sei das AWP

$$(9a) \quad u_t + \sum_{i=1}^n A_i(u) u_{x_i} = 0$$

$$(9b) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Dabei sei  $n \geq 2$  und  $u: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gesucht. Wir setzen voraus, daß die Matrix

$$A(u, \omega) = \sum_{i=1}^n A_i(u) \omega_i$$

für alle Einheitsvektoren  $\omega$  und alle  $u$  in einem geeigneten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^m$   $m$  reelle Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$  und ebensoviele Links- und Rechtseigenvektoren  $\ell_j, r_j$  besitzt. Wir können dann  $\ell_j \cdot r_k = \delta_{jk}$  annehmen.

Zusätzlich setzen wir  $u_0(x) = U_0$  für  $x_1 < 0$  voraus. Wir wollen nun die Lösung des vollen Problems im Halbraum  $\{x_1 > 0\}$  dadurch bestimmen, daß wir den künstlichen Rand  $\{x_1 = 0\}$  einführen und das Definitionsgebiet von  $u$  auf  $\{x_1 \geq 0\}$  einschränken. Gesucht sind nichtreflektierende Randbedingungen auf dem künstlichen Rand. Ähnlich wie Hedstrom verlangen wir, daß ebene einfache Wellen, die auf den Rand zulaufen, dort möglichst gut absorbiert werden. Eine ebene einfache Welle  $u(t, x)$  ist eine Lösung von (9a), die folgender Bedingung genügt:

Es gibt einen Einheitsvektor  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , einen Index  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  und eine Funktion  $\alpha(t, x, \omega)$ , sodaß

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha \cdot \omega_i \cdot r_k(u, \omega), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \lambda_k(u, \omega) r_k(u, \omega).$$

(vgl. Majda [9], Kapitel 1).

Es gelte nun

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_\mu < 0 < \lambda_{\mu+1} \leq \dots \leq \lambda_m$$

mit  $\lambda_j = \lambda_j(U_0, \bar{\omega})$ ,  $\bar{\omega} = (1, 0, \dots, 0)$ . Dann sind  $m - \mu$  Randbedingungen anzugeben. Wir wollen Hedstroms Bedingung

$$(\ell_j \frac{\partial}{\partial t}) u = 0, \quad j > \mu$$

verallgemeinern und betrachten dazu Differentialoperatoren  $B_j$  erster Ordnung auf der Hyperebene  $\{x_1 = 0\}$ :

$$B_j = b_j^0(u) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=2}^n b_j^i(u) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Da einfache Wellen von  $\omega$  abhängen, können wir mit der Randbedingung

$$B_j u = 0 \quad \text{für } j > m$$

keine vollständige Absorption erwarten. Um diesem Ziel möglichst nahe zu kommen, entwickeln wir ähnlich wie Engquist und Majda die einfache Welle  $u(t, x, k, \omega)$  in eine Taylorreihe um  $\bar{\omega}$  und versuchen

$$(10) \quad B_j u(t, x, k, \omega) = -\lambda_k(u, \omega) \alpha \cdot \delta_{jk} + O(|\omega - \bar{\omega}|^2)$$

zu erreichen. Es gilt

$$\begin{aligned} B_j u &= (-\lambda_k b_j^0 + \sum_{i=2}^n b_j^i \omega_i) \alpha r_k(\omega) \\ &= (-\lambda_k b_j^0 + \sum_{i=2}^n b_j^i \omega_i) \alpha (r_k(\bar{\omega}) + \sum_{i=2}^n r_k^i \omega_i) + O(|\omega - \bar{\omega}|^2). \end{aligned}$$

Wir setzen  $r_k^1 = r_k(\bar{\omega})$  und verlangen  $b_j^0 = \ell_j(\bar{\omega})$ . Damit ergibt sich wegen  $b_j^0 r_k^1 = \delta_{jk}$ :

$$\frac{1}{\alpha} B_j u = \sum_{i=2}^n (-\lambda_k(\bar{\omega}) b_j^0 r_k^i + b_j^i r_k^1) \omega_i - \lambda_k(\omega) \delta_{jk} + O(|\omega - \bar{\omega}|^2).$$

Soll (10) für alle  $\omega$  in einer Umgebung von  $\bar{\omega}$  gelten, so erhält man die Bedingungen

$$b_j^i r_k^1 = \lambda_k(\bar{\omega}) b_j^0 r_k^i, \quad j, k = 1, \dots, m; \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\text{oder mit } B^i = \begin{pmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_m^i \end{pmatrix}, \quad R^i = (r_1^i, \dots, r_m^i), \quad \lambda_k^0 = \lambda_k(\bar{\omega}) \quad \text{und} \quad \Lambda^0 = \text{diag}(\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$$

$$B^i R^1 = B^0 R^i \Lambda^0,$$

also  $B^i = B^0 R^i \Lambda^0 B^0$  wegen  $R^1 B^0 = E$ .

$$\text{Entwickelt man ferner die Matrix } L(\omega) = \begin{pmatrix} \ell_1(\omega) \\ \vdots \\ \ell_m(\omega) \end{pmatrix}$$

der Linkseigenvektoren nach  $\omega$  :

$$L(\omega) = L(\bar{\omega}) + \sum_{i=2}^n L^i \omega_i + O(|\omega - \bar{\omega}|^2),$$

so gilt mit  $L^1 = L(\bar{\omega})$ :

$$L(\omega)^{-1} = R(\omega) = R^1 - \sum_{i=2}^n \omega_i R^1 L^i R^1 + O(|\omega - \bar{\omega}|^2),$$

also  $R^i = -R^1 L^i R^1$ , und wegen  $L^1 = B^0 = (R^1)^{-1}$ :

$$B^i = L^1 R^1 L^i R^1 = L^1 R^1 L^i L^1 A_1 = -L^i A_1.$$

Unsere Randbedingungen lauten demnach

$$(11) \quad \ell_j^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=2}^n \ell_j^i(u) A_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für } j > \mu$$

mit  $\ell_j(u, \omega) A(u, \omega) = \lambda_j(u, \omega) \ell_j(u, \omega)$  und

$$\ell_j(u, \omega) = \ell_j^1(u) + \sum_{i=2}^n \ell_j^i(u) \omega_i + O(|\omega - \bar{\omega}|^2).$$

Sie werden für numerische Zwecke ergänzt durch

$$\ell_j^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \ell_j^i(u) A_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für } j \leq \mu.$$

Diese Formel besagt, daß sich die Randwerte der Lösung für auslaufende Charakteristiken aus der Differentialgleichung (9a) ergeben.

Ist das Gleichungssystem (9a) linear, so lassen sich die Randbedingungen (11) zurückführen auf die Approximation zweiter Ordnung der absorbierenden Randbedingungen von Engquist und Majda.

Wir wollen nun die eben hergeleiteten Randbedingungen auf die Eulergleichungen spezialisieren. Im Falle der Gleichungen (1)-(4) gilt  $u = (\rho, v_x, v_y, e)^T$  und

$$A(u, \omega) = \begin{pmatrix} \omega \cdot v & \omega_1 \rho & \omega_2 \rho & 0 \\ \omega_1 (\gamma - 1) \frac{e}{\rho} & \omega \cdot v & 0 & \omega_1 (\gamma - 1) \\ \omega_2 (\gamma - 1) \frac{e}{\rho} & 0 & \omega \cdot v & \omega_2 (\gamma - 1) \\ 0 & \omega_1 (\gamma - 1) e & \omega_2 (\gamma - 1) e & \omega \cdot v \end{pmatrix}.$$



Die Matrix A hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \omega \cdot v - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \omega \cdot v, \quad \lambda_4 = \omega \cdot v + c,$$

wobei  $c = \sqrt{\gamma(\gamma-1)}e$  die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Die zugehörigen Linkseigenvektoren lauten

$$l_1 = \left( \frac{e}{\rho}, -\frac{\omega_1 c}{\gamma-1}, -\frac{\omega_2 c}{\gamma-1}, 1 \right),$$

$$l_2 = \left( (\gamma-1)\frac{e}{\rho}, 0, 0, -1 \right),$$

$$l_3 = (0, -\omega_2, \omega_1, 0),$$

$$l_4 = \left( \frac{e}{\rho}, \frac{\omega_1 c}{\gamma-1}, \frac{\omega_2 c}{\gamma-1}, 1 \right).$$

Es folgt

$$L^1 = \begin{pmatrix} \frac{e}{\rho} & -\frac{c}{\gamma-1} & 0 & 1 \\ (\gamma-1)\frac{e}{\rho} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{e}{\rho} & \frac{c}{\gamma-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{\gamma-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B^2 = -L^2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c v_x}{\gamma-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma-1)\frac{e}{\rho} & v_x & 0 & \gamma-1 \\ 0 & 0 & -\frac{c v_x}{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechende Beziehungen für die Gleichungen (1) und (4)-(7) mit  $\tilde{u} = (\rho, m_x, m_y, E) = f(u)$  erhält man am einfachsten aus der Beziehung  $d\tilde{u} = Df \cdot du$ . Aus ihr folgt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = Df \frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 Df A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^2 Df A_i (Df)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i},$$

also  $\tilde{A}_i = T A_i T^{-1}$  mit der Abkürzung  $T = Df$ . Daher besitzt  $\tilde{A}(\omega) = \omega_1 \tilde{A}_1 + \omega_2 \tilde{A}_2$  dieselben Eigenwerte wie  $A(\omega)$ :

$$\tilde{\lambda}_j(\tilde{u}, \omega) = \lambda_j(\tilde{u}, \omega),$$

und mit der Formel

$$\tilde{\ell}_j = \rho \ell_j T^{-1}$$

erhält man die zugehörige Linkseigenvektoren. Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & \rho & 0 & 0 \\ v_y & 0 & \rho & 0 \\ \frac{E}{\rho} & \rho v_x & \rho v_y & \rho \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho T^{-1} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ |v|^2 - \frac{E}{\rho} & -v_x & -v_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$L(\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} \frac{|v|^2}{2} - \frac{c}{\gamma-1} \omega \cdot v & -\omega_1 \frac{c}{\gamma-1} - v_x & -\omega_2 \frac{c}{\gamma-1} - v_y & 1 \\ \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{|v|^2}{2} & v_x & v_y & -1 \\ v \times \omega & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \\ \frac{|v|^2}{2} + \frac{c}{\gamma-1} \omega \cdot v & \omega_1 \frac{c}{\gamma-1} - v_x & \omega_2 \frac{c}{\gamma-1} - v_y & 1 \end{pmatrix}$$

Aus  $\tilde{B}_2 = -\tilde{L}^2 \tilde{A}_1 = -\rho L^2 T^{-1} T A_1 T^{-1} = -\rho B_2 T^{-1}$  folgt

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} -v_x v_y \frac{c}{\gamma-1} & 0 & v_x \frac{c}{\gamma-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma-1) \frac{v^2}{2} - v_x^2 & (2-\gamma)v_x & (1-\gamma)v_y & \gamma-1 \\ v_x v_y \frac{c}{\gamma-1} & 0 & -v_x \frac{c}{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2c) Das Anfangsrandwertproblem

Wir simulieren den Schlitz in der Nähe des Hindernisses durch die Menge  $(0, x_{\max}) \times (0, y_{\max})$ , den Quader durch  $[x_\ell, x_r] \times [0, y_0]$  mit  $0 < x_\ell < x_r < x_{\max}$ . Zur Anfangszeit  $t_0$  befindet sich bei  $0 < x_s < x_\ell$  eine ebene Stoßwelle, die mit der Geschwindigkeit  $v_s > 0$  auf den Quader zuläuft. Wir wählen

$t_0 = \frac{x_s - x_\ell}{v_s}$ , sodaß die Stoßwelle bei  $t=0$  das Hindernis erreicht. Vor ihr

ruht das Gas mit der Dichte  $\rho_0$  und dem Druck  $p_0$ . Der Zustand hinter der Stoßwelle ergibt sich aus der Schallgeschwindigkeit  $c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$  und den Rankine-Hugoniot-Bedingungen, wenn man die Machzahl  $Ma = v_s/c_0$  vorgibt.

Wir verwenden wie Hassenpflug Machzahlen zwischen 1,1 und 1,4, bei denen hinter dem Stoß Unterschallströmung mit  $0 < v_x < c$  herrscht. Die Randbedingungen bei  $x = 0$  lauten daher wegen  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4$

$$\begin{aligned} \ell_1^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} &= -\ell_1^1(u) \left( A_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A_2(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ (11a) \quad \ell_j^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} &= \ell_j^2(u) A_1(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Bei  $x = x_{\max}$  fordern wir  $v_x \geq 0$  und setzen analog

$$\begin{aligned} \ell_1^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} &= \ell_1^2(u) A_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ (11b) \quad \ell_j^1(u) \frac{\partial u}{\partial t} &= -\ell_j^1(u) \left( A_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A_2(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

An allen festen Rändern verlangen wir  $v \cdot \omega = 0$ , wobei  $\omega$  ein innerer Normaleneinheitsvektor zum Rand ist, und ergänzen durch

$$\ell_j(u, \omega) \frac{\partial u}{\partial t} = -\ell_j(u, \omega) \left( A_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A_2(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{für alle } j \text{ mit } \lambda_j(u, \omega) \leq 0.$$

### 3. GAP-zweidimensional

Bei diesem Verfahren zur Simulation reibungsfreier kompressibler Strömungen bewegen sich, wie der Name schon andeutet, Teilchen durch ein Gitter.

Um sie zu verfolgen, formen wir die Differentialgleichungen (1)-(3) in Lagrangekoordinaten um. Es gilt mit  $u_s = \frac{1}{\rho}$  (spezifisches Volumen):

$$(12) \quad \dot{x} = v \quad ,$$

$$(13) \quad \dot{v} = -u_s \nabla p \quad ,$$

$$(14) \quad \dot{e} = -p \dot{u}_s \quad .$$

Die letzte Gleichung folgt aus (3) mit  $\dot{u}_s = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot v$  wegen (1). Ein Vergleich mit dem thermodynamischen Gesetz

$$de = Tds - pdu_s$$

zeigt, daß Gase ohne Viskosität und Wärmeleitung isentrop sind: Die Entropie bleibt entlang Teilchenbahnen konstant, solange die Strömungsgrößen differenzierbar sind.

Im Gegensatz zu seinem Vorläufer PIC [10] tragen die Teilchen bei GAP die gesamte thermodynamische Information mit sich. Sie haben

eine Masse  $M$ ,

einen Ort  $X$ ,

eine Geschwindigkeit  $V$ ,

ein Volumen  $U$ ,

eine innere Energie  $I$ .

Zur Berechnung der Gittergrößen

Dichte  $\rho$  ,

Druck  $p$

wird das Rechengebiet in rechteckige Zellen

$$C_{jk} = \left\{ (x,y) : |x-j\Delta x| < \frac{\Delta x}{2} , |y-k\Delta y| < \frac{\Delta y}{2} \right\} , \quad 0 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K$$

der Fläche  $\Delta x \cdot \Delta y$  mit  $\Delta x = x_{\max}/J$ ,  $\Delta y = y_{\max}/K$  und den Mittelpunkten  $X_{jk} = (j\Delta x, k\Delta y)$  aufgeteilt. Gleichzeitig erhalten die Teilchen eine Formfunktion

$$x_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} & \text{falls } |x-x_n| < \frac{\Delta x}{2} \text{ und } |y-y_n| < \frac{\Delta y}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sie hat den Schwerpunkt  $X_n = (x_n, y_n)$ , einen Träger von der Gestalt einer Zelle und das Integral 1. Die Masse in einer Zelle bestimmt sich nun zu

$$(15) \quad M_{jk} = \iint_{C_{jk}} \sum_n M_n x_n(x,y) dx dy,$$

und daraus die Zelldichte

$$\rho_{jk} := \rho(X_{jk}) := M_{jk} / \text{Volumen}(C_{jk}).$$

Als Volumen einer Zelle bezeichnen wir dabei denjenigen Teil ihrer Fläche, der zum Strömungsgebiet gehört. Randzellen können über den physikalischen Rand hinausragen. Das Teilchenvolumen ergibt sich jetzt zu

$$U_n = M_n / \rho(X_n).$$

Dabei erhält man  $\rho(X_n)$  aus den Werten  $\rho(X_{jk})$  durch lokale bilineare Interpolation. Äquivalent dazu ist die Formel

$$\rho(X_n) = \sum_{j,k} \rho_{jk} \iint_{C_{jk}} x_n(x,y) dx dy.$$

Analog zur Zellenmasse wird die innere Energie  $I_{jk}$  der Zellen berechnet. Der Druck in den Zellen ergibt sich daraus zu

$$p_{jk} = p(X_{jk}) = (\gamma-1) I_{jk} / \text{Volumen}(C_{jk}).$$

Den Druck an einem beliebigen Ort  $X$  im Strömungsgebiet erhält man wieder durch lokale bilineare Interpolation. Im Einklang damit stehen die Formeln

$$\frac{\partial p}{\partial x} \left( (j+\frac{1}{2}) \Delta x, k \Delta y \right) = \frac{1}{\Delta x} (p_{j+1,k} - p_{jk})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \left( j \Delta x, (k+\frac{1}{2}) \Delta y \right) = \frac{1}{\Delta y} (p_{j,k+1} - p_{jk}).$$

Durch bilineare Interpolation erhält man aus diesen Werten den Druckgradienten im gesamten Strömungsgebiet. Damit läßt sich das System (12)-(14) für jedes Teilchen lösen. Marder verwendet dazu ein explizites Einschrittverfahren. Ausgehend von "alten" Werten  $X_n^a, V_n^a, I_n^a, \rho^a(x,y), p^a(x,y)$  zur Zeit  $t$  ergeben sich die "neuen" Werte (hochgestelltes  $n$ ) zur Zeit  $t+\Delta t$  aus den Formeln

$$(13^*) \quad V_n^n = V_n^a - \Delta t \frac{U_n^a}{M_n} \cdot \nabla p^a(X_n^a),$$

$$(12^*) \quad X_n^n = X_n^a + \frac{\Delta t}{2} (V_n^a + V_n^n),$$

$$(14^*) \quad I_n^n = I_n^a - \frac{1}{2} (p^a(X_n^n) + p^d(X_n^a)) \cdot (U_n^n - U_n^a).$$

Dabei ergibt sich das neue Teilchenvolumen wie oben beschrieben aus den neuen Teilchenorten.

Bevor nun mit der Berechnung des neuen Gitterdruckes der nächste Zeitschritt beginnen kann, muß für die Stabilität des Verfahrens gesorgt werden. Dazu werden die Geschwindigkeiten und inneren Energien benachbarter Teilchen einander angeglichen. Die einfachste Technik bestünde darin, die Zellenimpulse  $P_{jk}$  analog zu Formel (15) zu berechnen, um die Zellengeschwindigkeit  $V_{jk} = P_{jk}/\rho_{jk}$  zu erhalten. Die neuen Teilchengeschwindigkeiten  $\tilde{V}_n$  entstünden dann durch lokale bilineare Interpolation. Dabei bleibt der Gesamtimpuls erhalten, aber die kinetische Energie der Teilchen ändert sich. Die Differenz wird der inneren Energie zugeschlagen:

$$\tilde{I}_n = I_n - \frac{1}{2} M_n (|\tilde{V}_n|^2 - |V_n|^2).$$

Dieses Verfahren hat den Nachteil, auch in Verdünnungswellen die innere Energie und damit die Entropie zu erhöhen, was bei Gasen ohne Reibung und Wärmeleitung nur in Verdichtungsstößen zu erwarten ist. Deshalb ergänzt Marder die oben beschriebene Glättungstechnik durch einen Gewichtungsfaktor  $F_n$  der Form

$$(16) \quad F_n = \begin{cases} 1 & F_n^* \geq 1 \\ 0 & F_n^* \leq 0 \\ F_n^* & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_n^* = \alpha \Delta x \Delta y \Delta t \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{dt} \frac{1}{U_n}.$$

Dabei ist  $\frac{\tilde{\alpha}}{dt} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_n^a} \right)$  eine Näherungsformel für die Zeitableitung und  $\alpha$  ein positiver Gewichtungsfaktor. Der Faktor  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$  nondimensionalisiert die Ableitung des Kehrwertes vom Teilchenvolumen. Da  $F_n^*$  für expandierende Teilchen negativ wird, ist eine Entropieerhöhung in Verdünnungswellen ausgeschlossen. Die Glättungsgeschwindigkeit  $\tilde{V}_{jk}$  in der Zelle  $C_{jk}$  ergibt sich jetzt zu

$$\tilde{V}_{jk} = \frac{\iint_{C_{jk}} \sum_n M_n F_n V_n x_n(x,y) dx dy}{\iint_{C_{jk}} \sum_n F_n M_n x_n(x,y) dx dy}$$

und daraus die neue Teilchengeschwindigkeit  $\tilde{V}_n$  als

$$\tilde{V}_n = V_n + F_n(\bar{V}(X_n) - V_n),$$

wobei  $\bar{V}(X_n)$  wieder durch lokale bilineare Interpolation entsteht.

Die Formel

$$\bar{V}(X_n) = \sum_{jk} \iint_{C_{jk}} \bar{V}_{jk} x_n(x,y) dx dy$$

benutzen wir zum Beweis der Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} & \sum_n M_n \tilde{V}_n - \sum_n M_n V_n = \sum_n M_n F_n \bar{V}(X_n) - \sum_n M_n F_n V_n \\ &= \sum_n \sum_{jk} \bar{V}_{jk} \iint_{C_{jk}} M_n F_n x_n(x,y) dx dy - \sum_n M_n F_n V_n \\ &= \sum_{jk} \iint_{C_{jk}} \sum_n M_n F_n V_n x_n(x,y) dx dy - \sum_n M_n F_n V_n \\ &= \sum_n M_n F_n V_n \sum_{jk} \iint_{C_{jk}} x_n(x,y) dx dy - \sum_n M_n F_n V_n = 0. \end{aligned}$$

Mit entsprechenden Formeln wird die innere Energie geglättet.

Das Kernstück des GAP-Algorithmus ist damit beschrieben. Er umgeht die Probleme mit großen Geschwindigkeiten bei konvektiven Termen durch die Einführung von Teilchen. Auf diese Weise gehen substantielle Ableitungen über in reine Zeitableitungen. Andererseits ist das Verfahren (bis auf den Glättungsteil, der schwer abschätzbar ist), nur von der Genauigkeitsordnung  $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \frac{1}{N})$ , sodaß es für die Approximation glatter Lösungen ungeeignet erscheint. Als explizites Verfahren schließlich sollte es nicht für die Berechnung stationärer Zustände eingesetzt werden. Es wurde konzipiert für die Simulation instationärer Überschallströmungen.

Die ersten praktischen Erfahrungen mit GAP machten wir an zwei eindimensionalen Testbeispielen, deren exakte Lösung bekannt ist:

1. Ausströmung ins Vakuum,
2. das Membranproblem.

Beim ersten Beispiel zeigten sich deutlich die Vorzüge der Formel (16) für den Glättungsfaktor.

Das Membranproblem läßt sich folgendermaßen beschreiben: Ein Rohr wird durch eine Membran in zwei Teile geteilt, die beide ruhendes Gas in räumlich homogenem thermodynamischem Zustand enthalten. Die Drücke und Dichten der beiden Teile unterscheiden sich jedoch. Die Rechnung beginnt mit dem Platzen der Membran. Das Gas mit dem höheren Druck beginnt sich auszudehnen. Es entwickeln sich eine Stoßwelle, eine Kontaktunstetigkeit und eine Verdünnungswelle. Die Abbildung 2 zeigt die Zellenwerte der GAP-Lösung und die exakte Lösung. Das Rechengebiet besteht aus dem Intervall  $[0,1]$ . Die Ränder reflektieren energieerhaltend. Zur Zeit  $t=0$  wird die Membran bei  $x=0,5$  gesprengt. Das Anfangsverhältnis der Dichten beträgt 2, das der spezifischen inneren Energien 1,8. Das Verhältnis  $\gamma$  der spezifischen Wärmen hat den Wert  $\frac{5}{3}$ . 1710 Teilchen mit identischer Masse sind auf 124 Zellen verteilt. Der Faktor  $\alpha$  aus Formel (16) hat den Wert 100. Der Zeitschritt  $\Delta t$  wird dynamisch nach der Formel

$$\Delta t = 0.4 \cdot \Delta x / (|v| + c)_{\max}$$

bestimmt, wobei  $c$  die lokale Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Alle drei Phänomene der exakten Lösung lassen sich in der Näherungslösung wiedererkennen. Am schlechtesten wird das rechte Ende der Verdünnungswelle reproduziert, hier entwickelt sich offensichtlich eine Instabilität. Diese läßt sich weder durch eine Halbierung des Zeitschrittes noch durch eine Verdoppelung des Faktors  $\alpha$  beheben - eine Folge der Tatsache, daß der Glättungsfaktor  $F_n$  in Verdünnungswellen verschwindet. Eine Verdopplung der Teilchenzahl löst das Problem auch nicht.

Wir modifizierten deshalb den Glättungsfaktor  $F_n$  in der Form

$$(16') \quad F_n = \begin{cases} 1 & F_n^* + q_f \geq 1 \\ q_f & F_n^* \leq 0 \\ F_n^* + q_f & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } 0 \leq q_f \leq 1 \quad \text{und } F_n^* \text{ wie in (16)}$$

und erzielten bei gleicher Teilchen- und Zellenzahl mit  $q_f = 0,1$  und  $\alpha = 50$  wesentlich bessere Ergebnisse (vgl. Abb. 3). Dabei bewegt sich der Mittelwert

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n$$



T=0.230E+00

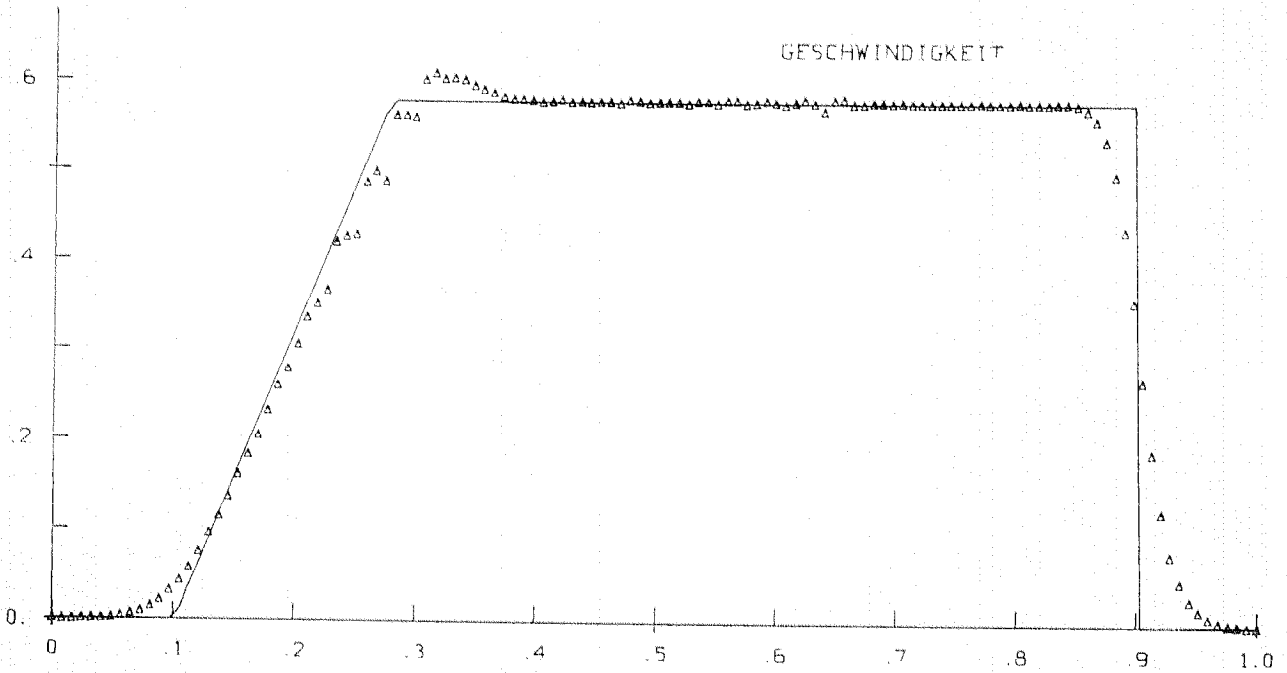
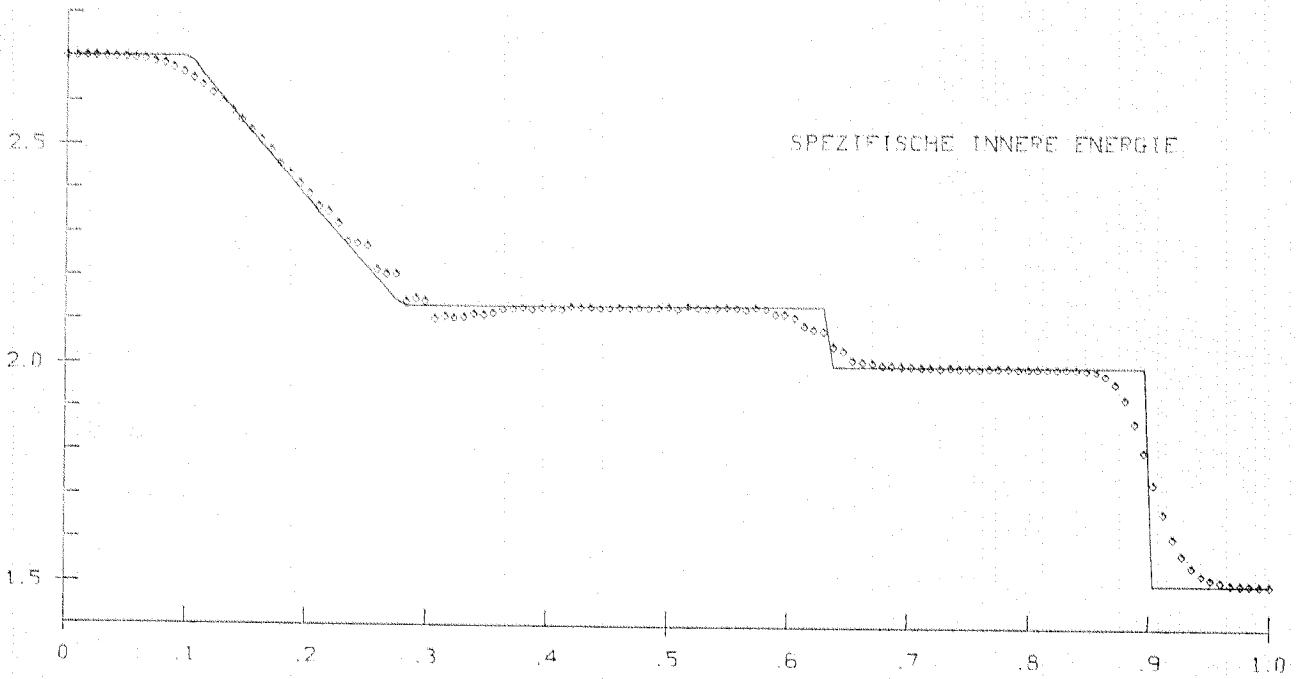
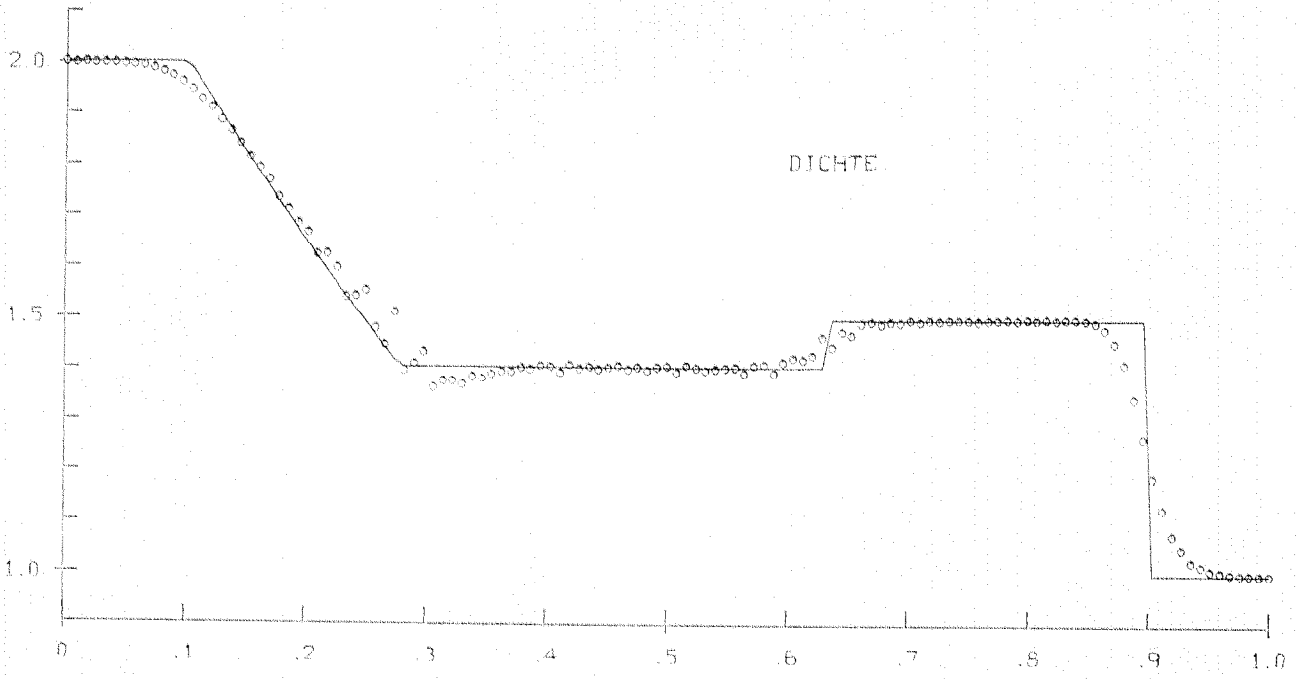


Abbildung 2

T=0.230E+00

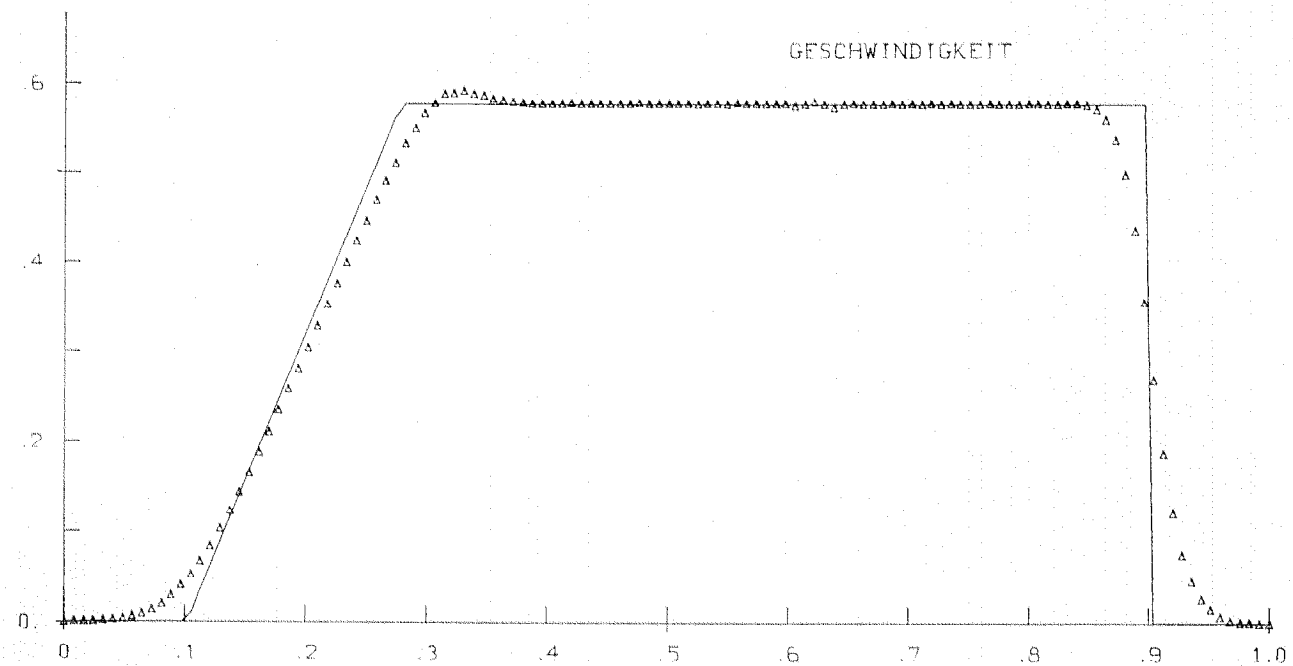
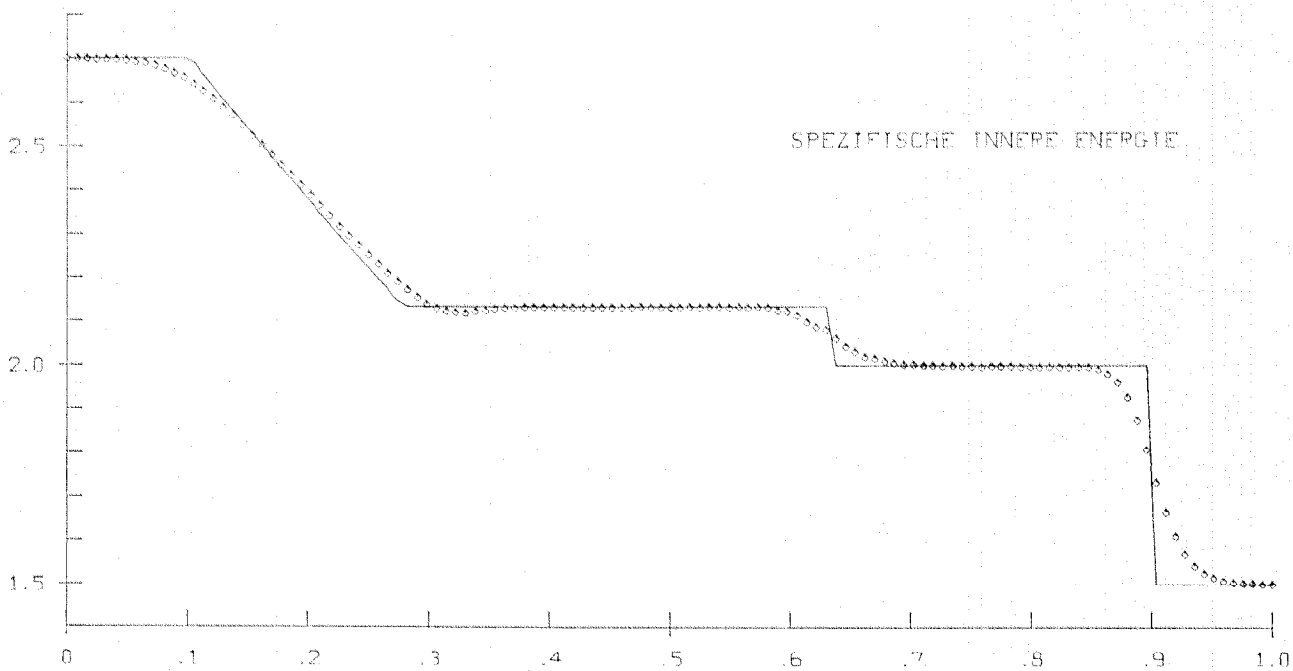
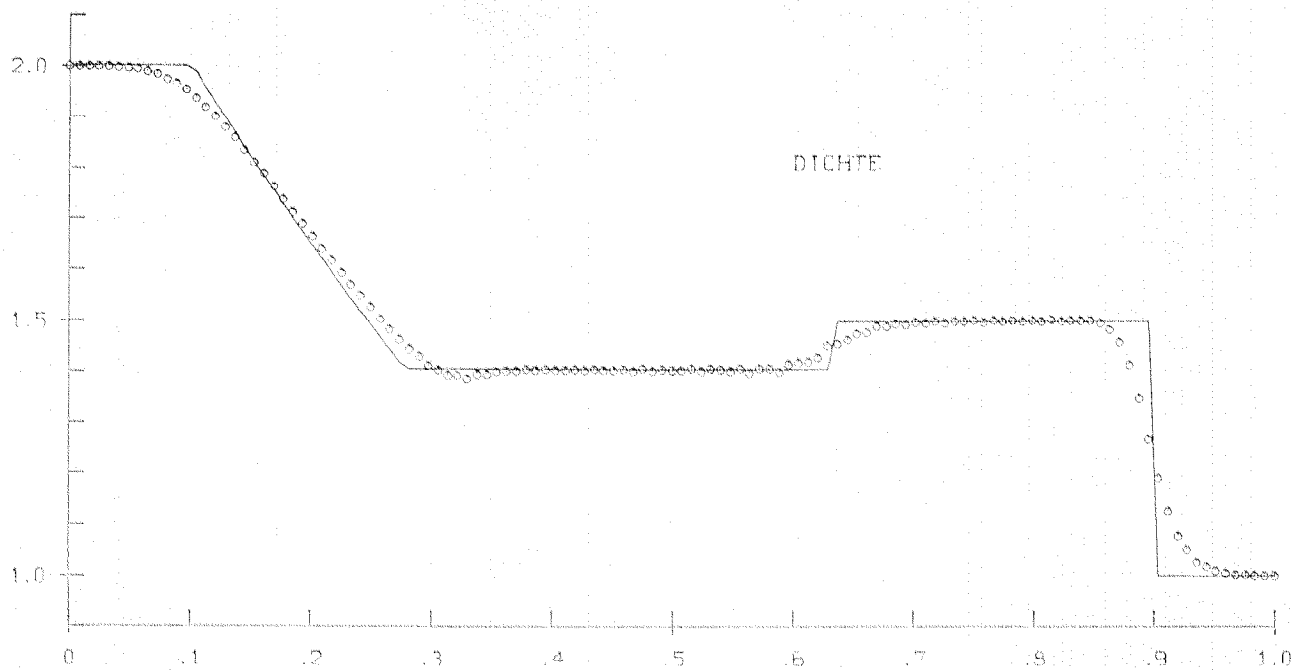


Abbildung 3

bei beiden Läufen im gleichen Intervall, d.h. die Glättung wurde nicht verstärkt, sondern nur anders verteilt.

Um das eigentliche Testproblem, die Stoßwellenbeugung, mit GAP zu simulieren, benötigen wir numerische Anfangs- und Randbedingungen. Um die Anfangsverteilung der Teilchen festzulegen, erzeugen wir zunächst eine Approximation der Gleichverteilung auf dem Einheitsquadrat durch eine Summe von  $N$   $\delta$ -Maßen nach der Formel von Hammersley:

Hat die Zahl  $m$  die  $b$ -adische Darstellung

$$m = \sum_{\ell=0}^L a_{\ell} b^{\ell},$$

so setzt man

$$h_b(m) = \sum_{\ell=0}^L a_{\ell} b^{-\ell-1}$$

und erhält daraus den Trägerpunkt des  $n$ -ten  $\delta$ -Maßes ( $1 \leq n \leq N$ ) zu

$$P_n = \left( \frac{2n-1}{2N}; h_b(n-1) \right).$$

Die so entstandene Verteilung hat eine viel geringere "Diskrepanz" zur Gleichverteilung, als Zufallsgeneratoren sie mit der gleichen Anzahl von Punkten produzieren. Unter der Diskrepanz zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $F, G$  auf  $[0,1] \times [0,1]$  versteht man dabei den Wert

$$D(f, G) = \sup_{X \in [0,1]} 2 \left| \int X R(X) d(F-G) \right|$$

mit  $R(X) = [0, x) \times [0, y)$ . In unserem Falle haben wir

$$F(X) = x \cdot y, \quad dG(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(X - P_n).$$

Die entstandene Punkteverteilung wird dann auf das Rechteck so transformiert, daß dabei die Gleichverteilung in die Anfangsdichte des Gases übergeht. Alle Teilchen erhalten dieselbe Masse.

Tests mit Anfangsverteilungen zu den Basen  $b = 2, 3$  und  $5$  lieferten fast identische Resultate.

Die Randbedingung  $v \cdot n = 0$  an festen Wänden simulieren wir durch Spiegelreflexion der Teilchen, die auf eine solche Wand treffen. Außerdem setzen wir die Komponente der Glättungsgeschwindigkeit  $\bar{V}_{jk}$ , die senkrecht zur

Wand zeigt, in Randzellen auf Null.

Zur Approximation der absorbierenden Randbedingungen an den künstlichen Rändern werten wir alle lösungsabhängigen Vorfaktoren mit der alten Lösung aus. Die Ableitung nach  $y$  ersetzen wir durch eine symmetrische Differenz

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial y} \approx (u_{j,k+1}^a - u_{j,k-1}^a) / 2\Delta y .$$

Dabei extrapolieren wir  $u$  am unteren Rand  $j=0$  mit den Formeln

$$(17) \quad \begin{aligned} \rho_{0,-1} &= \rho_{0,1} & I_{0,-1} &= I_{0,1} \\ (v_x)_{0,-1} &= (v_x)_{0,1} & (v_y)_{0,-1} &= -(v_y)_{0,1} . \end{aligned}$$

Analoge Formeln gelten am oberen Rand.

Die Ableitung nach  $x$  approximieren wir durch eine einseitige Differenz ins Innere des Rechengebietes:

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} (u_{j,k+1}^a - u_{j,k}^a) & \text{am linken Rand} \\ \frac{1}{\Delta x} (u_{j,k}^a - u_{j,k-1}^a) & \text{am rechten Rand} . \end{cases}$$

Die Ableitung nach der Zeit ersetzen wir durch

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (u_{jk}^n - \frac{1}{4}(u_{j,k-1}^a + u_{j,k+1}^a + 2u_{jk}^a)) .$$

Der Mittelwert in  $y$ -Richtung dient zur Stabilisierung der symmetrischen Differenz in der  $y$ -Ableitung. Auf diese Weise erhält man in den Zellen an den künstlichen Rändern die Strömungsgrößen zum neuen Zeitpunkt ohne die Benutzung von Teilchen. Auch sie werden beim Glätten als Zellwerte verwendet.

Am Einströmrand  $x=0$  sind kontinuierlich Teilchen nachzufüttern. Ihre Verteilung in  $y$  ergibt sich aus den nach obigen Formeln berechneten Randwerten für die Dichte, wenn man die in den Randzellen bereits vorhandenen Teilchenmasse berücksichtigt.

Angesichts der Probleme in Abbildung 2 schlagen wir eine weitere Approximation der Impulserhaltung, Gleichung (13), vor. Sie ergibt sich aus Charakteristikverfahren für die Eulergleichungen in einer Raumdimension. In Lagrangekoordinaten gilt

$$dp + \rho c dw = 0 \quad \text{längs} \quad \frac{dX}{dt} = c ,$$

$$dp - \rho c dw = 0 \quad \text{längs} \quad \frac{dx}{dt} = -c ,$$

wenn  $w$  die (eindimensionale) Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Gesucht ist die Geschwindigkeit  $w(X, t+\Delta t) = w^n(x)$ , wenn  $\rho, w$  und  $p$  zur Zeit  $t$  gegeben sind. Setzt man

$$X_L = X - c\Delta t, \quad X_R = X + c\Delta t ,$$

so erhält man aus dem expliziten Differenzenverfahren

$$p^n(X) - p(X_L) + \rho(X)c(X)(w^n(X) - w(X_L)) = 0,$$

$$p^n(X) - p(X_R) - \rho(X)c(X)(w^n(X) - w(X_R)) = 0$$

durch Subtraktion der Gleichungen die Näherungslösung

$$w^n(X) = \frac{1}{2}(w(X_R) + w(X_L)) - \frac{1}{2\rho(X)c(X)} (p(X_R) - p(X_L)).$$

Für GAP in zwei Dimensionen ergibt sich daraus die folgende Modifikation der Gleichung (13<sup>\*</sup>):

$$(13^+) \quad \begin{aligned} v_{xn}^n &= \frac{1}{2}(v_x^a(x - c^a \Delta t, y) + v_x^a(x + c^a \Delta t, y)) - \frac{1}{2\rho^a c^a} (p^a(x + c^a \Delta t, y) - p^a(x - c^a \Delta t, y)) \\ v_{yn}^n &= \frac{1}{2}(v_y^a(x, y - c^a \Delta t) + v_y^a(x, y + c^a \Delta t)) - \frac{1}{2\rho^a c^a} (p^a(x, y + c^a \Delta t) - p^a(x, y - c^a \Delta t)). \end{aligned}$$

Dabei werden  $\rho^a, c^a$  im Punkt  $(x, y) = X_n$  ausgewertet.

Die Tatsache, daß auf der rechten Seite der Formel (13<sup>+</sup>) ausschließlich Gittergrößen auftreten, verändert den Charakter des Verfahrens wesentlich. Die Teilchen vergessen ihre Geschwindigkeit aus dem vorigen Schritt völlig. Den Faktor  $q_f$  in Formel (16<sup>1</sup>) auf 1 zu setzen, hätte einen ähnlichen Effekt. Entsprechend schalten wir bei dieser Variante die Geschwindigkeitsglättung ab und glätten die innere Energie der Teilchen mit  $q_f = 1$ .

#### 4. Flux Corrected Transport in zwei Dimensionen

FCT-Verfahren dienen zur genauen Lösung von hyperbolischen Systemen von Erhaltungsgleichungen der Form

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0$$

mit konservativen Differenzenverfahren. Diese lassen sich in der Gestalt

$$(19) \quad u_{jk}^n = u_{jk}^a - (\tilde{F}_{j+1/2,k} - \tilde{F}_{j-1/2,k} + \tilde{G}_{j,k+1/2} - \tilde{G}_{j,k-1/2})$$

darstellen. Dabei ist  $u_{jk}$  eine Näherung der Lösung im Punkt  $X_{jk}$  (vgl. §3).

Hat die exakte Lösung große Gradienten oder gar Unstetigkeiten, so entstehen bei der numerischen Lösung der Gleichungen mit konservativen Verfahren höherer Ordnung unphysikalische Oszillationen in der Nähe dieser Gebiete. Deshalb führte man schon bald eine künstliche Viskosität zur Dämpfung dieser Oszillationen ein. In Regionen mit glatter exakter Lösung ist diese jedoch unerwünscht, weil sie die Genauigkeit des Verfahrens verringert. FCT berechnet die nötige künstliche Viskosität lokal in Abhängigkeit von der numerischen Lösung der Differentialgleichungen. Man bedient sich dabei zusätzlich eines stark diffusiven Verfahrens niedriger Ordnung. Grob gesagt, wird die Lösung höherer Ordnung in jedem Zeitschritt mit derjenigen niedriger Ordnung verglichen und überall dort abgeschnitten, wo sie Oszillationen aufweist, die bei der diffusiven Näherung nicht auftreten. Um jedoch ein konservatives Verfahren zu erhalten, wird nicht die Lösung selbst, sondern der numerische Fluß korrigiert. Dies erklärt den Namen der Technik.

Im einzelnen geht man folgendermaßen vor:

1. Berechne die diffusiven Flüsse  $\tilde{F}_{j+1/2,k}^D, \tilde{G}_{j,k+1/2}^D$ .
2. Berechne die Flüsse  $\tilde{F}_{j+1/2,k}^H, \tilde{G}_{j,k+1/2}^H$  des Verfahrens höherer Ordnung.
3. Berechne die Lösung  $\bar{u}$  des diffusiven Verfahrens nach (19).
4. Berechne die "antidiffusiven" Flüsse

$$A_{j+1/2,k} = \tilde{F}_{j+1/2,k}^H - \tilde{F}_{j+1/2,k}^D, \quad A_{j,k+1/2} = \tilde{G}_{j,k+1/2}^H - \tilde{G}_{j,k+1/2}^D$$

5. Verkleinere die antidiffusiven Flüsse so, daß die Lösung  $u^n$  von Schritt 6 keine lokalen Extrema aufweist, die nicht schon

in  $u^a$  oder  $\bar{u}$  auftreten:

$$A_{j+1/2,k}^C = C_{j+1/2,k} A_{j+1/2,k}, \quad A_{j,k+1/2}^C = C_{j,k+1/2} A_{j,k+1/2}$$

mit  $0 \leq C_{j+1/2,k}, C_{j,k+1/2} \leq 1$ .

6. Korrigiere die diffusive Lösung durch

$$u_{jk}^n = \bar{u}_{jk} - (A_{j+1/2,k}^C - A_{j-1/2,k}^C + A_{j,k+1/2}^C - A_{j,k-1/2}^C).$$

Zalesak [2] schlägt nun für den 5. Schritt vor, die antidiffusiven Flüsse

$$P_{jk}^+ = \max(0, A_{j-1/2,k}) - \min(0, A_{j+1/2,k}) + \max(0, A_{j,k-1/2}) - \min(0, A_{j,k+1/2})$$

$$P_{jk}^- = -\min(0, A_{j-1/2,k}) + \max(0, A_{j+1/2,k}) - \min(0, A_{j,k-1/2}) + \max(0, A_{j,k+1/2})$$

in die Zelle hinein bzw. aus ihr heraus getrennt zu betrachten. Er berechnet Schranken  $u_{jk}^{\max}$  und  $u_{jk}^{\min}$  aus dem Maximum bzw. Minimum von  $u^a$  und  $\bar{u}$  in der Zelle  $(j,k)$  und ihren vier direkten Nachbarzellen. Eine hinreichende Bedingung

für  $u_{jk}^{\min} \leq u_{jk}^n \leq u_{jk}^{\max}$  lautet

$$u_{jk}^{\max} \geq \bar{u}_{jk} + cP_{jk}^+ \quad \text{und} \quad u_{jk}^{\min} \leq \bar{u}_{jk} - cP_{jk}^-.$$

Wir setzen nun

$$R_{jk}^+ = \min(1, (u_{jk}^{\max} - \bar{u}_{jk}) / P_{jk}^+),$$

$$R_{jk}^- = \min(1, (\bar{u}_{jk} - u_{jk}^{\min}) / P_{jk}^-).$$

Die Tatsache, daß jeder Fluß zwei Zellwerte verändert, spiegelt sich in den flußbegrenzenden Faktoren wider. Eine zulässige Wahl ist

$$C_{j+1/2,k} = \begin{cases} \min(R_{j+1,k}^+, R_{jk}^-) & \text{für } A_{j+1/2,k} \geq 0 \\ \min(R_{jk}^+, R_{j+1,k}^-) & \text{für } A_{j+1/2,k} < 0 \end{cases}$$

$$C_{j,k+1/2} = \begin{cases} \min(R_{j,k+1}^+, R_{jk}^-) & \text{für } A_{j,k+1/2} \geq 0 \\ \min(R_{jk}^+, R_{j,k+1}^-) & \text{für } A_{j,k+1/2} < 0. \end{cases}$$

Wir wollen nun auf die von Zalesak vorgeschlagenen Differenzenverfahren zur Lösung von (18) eingehen. Das Verfahren höherer Ordnung läßt sich in Zeitrichtung als Zweischritt-Prädiktor-Korrektor-Verfahren charakterisieren:

$$\text{Prädiktor: } u_{jk}^i = u_{jk}^{t-\Delta t} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2,k}^t - F_{j-1/2,k}^t) - \frac{2\Delta t}{\Delta y} (G_{j,k+1/2}^t - G_{j,k-1/2}^t)$$

$$f^* = \frac{1}{2}(f^t + f^i), \quad g^* = \frac{1}{2}(g^t + g^i)$$

$$\text{Korrektor: } u_{jk}^{t+\Delta t} = u_{jk}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2,k}^* - F_{j-1/2,k}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{j,k+1/2}^* - G_{j,k-1/2}^*).$$

Dabei bezeichnet  $u^t$  die Näherungslösung zur Zeit  $t$  und  $f^t, g^t$  die zugehörigen exakten Flüsse.  $F$  und  $G$  sind Funktionen von  $f$  bzw.  $g$ . Wir benützen die Abkürzungen  $F^t = F(f^t)$ ,  $F^* = F(f^*)$ ,  $G^t = G(g^t)$ ,  $G^* = G(g^*)$ .

In den Eulergleichungen (1), (5)-(7) hat der Fluß  $f(\tilde{u})$  die Form  $f = v_x \tilde{u} + \bar{f}$ . Wir schreiben mit Zalesak [3]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \tilde{u} + v_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

und approximieren die einzelnen Ableitungsterme nach der Formel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \left(\frac{4}{3} D_0^x(\Delta x) - \frac{1}{3} D_0^x(2\Delta x)\right)\varphi,$$

die Kreiss und Oliger [5] untersucht haben. Dabei bezeichnet

$$D_0^x(h)\varphi(x,y) = \frac{1}{2h} (\varphi(x+h,y) - \varphi(x-h,y))$$

die symmetrische Differenz in  $x$ -Richtung zur Schrittweite  $h$ . Analog verfahren wir mit dem Fluß  $g$  in  $y$ -Richtung. Auf diese Weise erreicht man, daß im Abschneidefehler nur ungerade Ableitungen von  $\tilde{u}$  auftreten (falls  $v$  linear von  $\tilde{u}$  abhängt). Es entstehen mit  $w = v_x$  die numerischen Flüsse  $F_{j+1/2,k} = F_{j+1/2,k}^C + \bar{F}_{j+1/2,k}$ , wobei

$$F_{j+1/2,k}^C = \frac{2}{3}(w_{jk} \tilde{u}_{j+1,k} + w_{j+1,k} \tilde{u}_{jk}) - \frac{1}{12}(w_{jk} \tilde{u}_{j+2,k} + w_{j+2,k} \tilde{u}_{jk} + w_{j-1,k} \tilde{u}_{j+1,k} + w_{j+1,k} \tilde{u}_{j-1,k})$$

$$\bar{F}_{j+1/2,k} = \frac{7}{12}(\bar{f}_{j+1,k} + \bar{f}_{jk}) - \frac{1}{12}(\bar{f}_{j+2,k} + \bar{f}_{j-1,k}).$$

Den Fluß  $G_{j,k+1/2}$  erhält man analog. Zalesak nennt diese Methode L-T-Verfahren (leapfrog-trapezoidal).



Da glatte Lösungen mit FCT ausschließlich durch das Verfahren höherer Ordnung approximiert werden sollen, muß dieses stabil sein. Um das zu untersuchen, linearisieren wir die Gleichungen (1), (5)-(7) um den konstanten Zustand  $\tilde{u}_0$  und untersuchten die Stabilität des modifizierten L-T-Verfahrens beim Differentialgleichungssystem

$$\tilde{u}_t + A_1(\tilde{u}_0)\tilde{u}_{x_1} + A_2(\tilde{u}_0)\tilde{u}_{x_2} = 0$$

mit  $x_1 = x, x_2 = y, v_1 = v_x, v_2 = v_y,$

$$A_1(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}|v|^2 - v_1^2 & (3-\gamma)v_1 & (1-\gamma)v_2 & \gamma-1 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}|v|^2 - \gamma e\right)v_1 & \gamma e + \frac{|v|^2}{2} - (\gamma-1)v_1^2 & (\gamma-1)v_1v_2 & \gamma v_1 \end{pmatrix} =: \tilde{A}_1$$

und

$$A_2(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}|v|^2 - v_2^2 & (1-\gamma)v_1 & (3-\gamma)v_2 & \gamma-1 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}|v|^2 - \gamma e\right)v_2 & (\gamma-1)v_1v_2 & \gamma e + \frac{|v|^2}{2} - (\gamma-1)v_2^2 & \gamma v_2 \end{pmatrix} =: \tilde{A}_2.$$

Mit den Bezeichnungen  $\Delta x = h_1, \Delta y = h_2$  und

$$\tilde{u}_v = \Delta t \left( \frac{4}{3} D_0^{x_v}(h_v) - \frac{1}{3} D_0^{x_v}(2h_v) \right)$$

läßt sich das Differenzenverfahren durch die folgenden Formeln darstellen:

$$(20) \quad \begin{aligned} \text{Prädiktor: } \tilde{u}' &= \tilde{u}^{t-\Delta t} - 2 \sum_{v=1}^2 \tilde{A}_{v,v} \delta_v \tilde{u}^t \\ \text{Korrektor: } \tilde{u}^{t+\Delta t} &= \tilde{u}^t - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^2 \tilde{A}_{v,v} \delta_v (\tilde{u}^t + \tilde{u}') \end{aligned}$$

Wir wollen das Verfahren in ein äquivalentes Einschrittverfahren umformen und schreiben dazu

$$\tilde{A}(\delta) = \sum_{v=1}^2 \tilde{A}_{v,v} \delta_v.$$

Dann gilt mit  $I\tilde{u} = \tilde{u}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{u}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\tilde{A}(\delta) & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^t \\ \tilde{u}^{t-\Delta t} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{t+\Delta t} \\ \tilde{u}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\tilde{A}(\delta) & I - \frac{1}{2}\tilde{A}(\delta) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{u}^t \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{t+\Delta t} \\ \tilde{u}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tilde{A}(\delta))^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}(\delta) + I & -\frac{1}{2}\tilde{A}(\delta) \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^t \\ \tilde{u}^{t-\Delta t} \end{pmatrix}$$

Wir führen nun in  $(x_1, x_2)$  eine Fouriertransformation durch; die dualen Variablen nennen wir  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Dabei gehen die Operatoren  $\delta_v$  über in Multiplikationsoperatoren

$$\hat{\delta}_v(\xi) = \frac{\Delta t}{h_v} \frac{i}{6} (8 \sin h_v \xi_v - \sin 2h_v \xi_v).$$

Bezeichnet  $E_4$  die vierdimensionale Einheitsmatrix, so erhält man

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}^{t+\Delta t} \\ \tilde{u}^t \end{pmatrix} = V(\xi) \begin{pmatrix} \tilde{u}^t \\ \tilde{u}^{t-\Delta t} \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$V(\xi) = \begin{pmatrix} (\tilde{A}(\hat{\delta}))^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}(\hat{\delta}) + E_4 & -\frac{1}{2}\tilde{A}(\hat{\delta}) \\ E_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Univ.-Bibl.  
Kaiserslautern

und  $\hat{\delta} = \hat{\delta}_1(\xi) + \hat{\delta}_2(\xi)$ . Die von-Neumann-Bedingung besagt nun, daß das Verfahren (20) genau dann (für das Cauchy-Problem) stabil ist, wenn die Eigenwerte aller "Verstärkungsmatrizen"  $V(\xi)$  in (21) im abgeschlossenen Einheitskreis liegen. Dies wollen wir untersuchen. In §2b konstruierten wir die Matrix  $\tilde{L}(\omega)$  die Linkseigenvektoren zu  $\tilde{A}(\omega)$  mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = v \cdot \omega - c|\omega|, \quad \lambda_2 = v \cdot \omega = \lambda_3, \quad \lambda_4 = v \cdot \omega + c|\omega|.$$

Wir bilden die Matrix

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \tilde{L}(\omega) & 0 \\ 0 & \tilde{L}(\omega) \end{pmatrix}$$

und setzen

$$W(\hat{\delta}) = M(\hat{\delta}) V(\xi) M^{-1}(\hat{\delta}) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

$W$  hat die gleichen Eigenwerte wie  $V$  und besteht aus vier Diagonalmatrizen  $W_{jk}$ . Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Permutationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & \vdots & & 1 & & \vdots \\ & \vdots & & & 0 & \dots & 1 \\ & 1 & \dots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

läßt sich  $W$  auf die Gestalt

$$W' = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 \end{pmatrix}$$

mit vier  $2 \times 2$ -Matrizen  $W_k$  bringen. Sie haben die Form

$$(22) \quad W_k = \begin{pmatrix} (\lambda_k(\hat{\delta}))^2 - \frac{1}{2} \lambda_k(\hat{\delta}) + 1 & -\frac{1}{2} \lambda_k(\hat{\delta}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es genügt also, die Eigenwerte der Matrizen  $W_k(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , zu untersuchen. Setzt man

$$n = \frac{1}{T} \lambda_k(\hat{\delta}),$$

so lauten die Eigenwerte  $z_1, z_2$  von  $W_k$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm b)$$

mit  $a = 1 - n^2 - \frac{i}{2}n$ ,  $b = \sqrt{a^2 - 2in}$ . Es gilt  $n(0) = 0$ ,  $z_1(0) = 1$ .

Taylorentwicklung der Wurzel um 1 liefert

$$|z_1|^2 = 1 - \frac{1}{2}n^4 + o(\xi^5).$$

Ferner gilt  $z_2(\sqrt{2}) = -1$ ,  $z_1(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Wir überzeugten uns numerisch davon, daß  $|z_1|$  und  $|z_2|$  zwischen  $n = 0$  und  $n = \sqrt{2}$  monoton fallen bzw. wachsen. Damit erhalten wir die Stabilitätsbedingung

$$|\lambda_k(\delta)| < \sqrt{2}.$$

Man erkennt, daß das Verfahren dann im Sinne von Kreiss dissipativ von der Ordnung 4 ist.

Setzt man

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{6}(\delta \sin \zeta - \sin 2\zeta)$$

und  $x = (x_1, x_2)$  mit  $x_\nu = \frac{\Delta t}{h_\nu}$ , so folgt

$$|\lambda_j(\delta)| \leq (|v \cdot x| + c|x|) \cdot \max_{|\zeta| \leq \pi} |\psi(\zeta)|.$$

Man findet  $\max \psi(\zeta) \approx 1.37$ . Daraus ergibt sich die Stabilitätsbedingung

$$|v \cdot x| + c|x| < \frac{\sqrt{2}}{1.37}.$$

Numerische Tests lieferten negative innere Energien und Dichten an der oberen Vorderkante des Quaders, sobald die Stoßwelle ihn erreicht hat. Deshalb modifizierten wir das L-T-Verfahren durch einen dissipativen

Term: Wir setzen

$$\Delta_\nu = \left( D_0^{X_\nu} \left( \frac{h_\nu}{2} \right) \right)^2, \quad \nu = 1, 2$$

und ersetzen im Prädiktor  $u_{jk}^{t-\Delta t}$  durch

$$(1 - e \cdot (\sigma_{jk}^t \Delta t)^4 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2)) u_{jk}^{t-\Delta t},$$

wobei  $\sigma_{jk}^t = (|v| + c)_{jk}^t$  die maximale lokale Signalgeschwindigkeit bezeichnet. Analog ersetzen wir  $u_{jk}^t$  in der Korrekformel durch

$$(1 - e \cdot (\sigma_{jk}^* \Delta t)^4 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2)) u_{jk}^t$$

mit  $\sigma_{jk}^* = \frac{1}{2}(\sigma_{jk}^t + \sigma_{jk}^1)$ . Die Stabilitätsanalyse des modifizierten Verfahrens verläuft wie vorher. Der Operator  $h_\nu^4 \Delta_\nu^2$  geht bei der Fouriertransformation über in

$$\hat{\Delta}_\nu(\xi) = 4 (\cos h_\nu \xi_\nu - 1)^2.$$

Die Matrizen in Gleichung (22) lauten jetzt

$$(22') \quad W_k = \begin{pmatrix} (\lambda_k(\hat{\delta}))^2 - \frac{1}{2} \lambda_k(\hat{\delta}) + 1 - \epsilon \hat{d} & -\frac{1}{2} \lambda_k(\hat{\delta})(1-2\epsilon \hat{d}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{d} = (|v| + c) \sum_{v=1}^2 x_v^4 \hat{d}_v(\xi).$$

Die numerische Bestimmung der Eigenwerte dieser Matrizen zeigte, daß sei im Einheitskreis liegen, wenn

$$h_1 = h_2, \quad \epsilon \leq \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad |x|(|v| + c) \leq 1$$

oder

$$\frac{1}{2} h_1 \leq h_2 \leq 2h_1, \quad \epsilon \leq \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad |x|(|v| + c) \leq \frac{9}{10}.$$

Im nächsten Schritt wollen wir das Verfahren niederer Ordnung beschreiben, das wir benutzten. Zalesak [3] schlägt dafür einen Algorithmus von Rusanov [6] vor, den dieser zur Berechnung der Wechselwirkung zwischen Schocks und Hindernissen benutzte.

Man setzt  $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  und (wie eben)

$$|x| = \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2}}, \quad \alpha_{jk} = (|v| + c)_{jk}.$$

Dann lautet das Verfahren

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jk}^n &= \tilde{u}_{jk}^a - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2,k} - F_{j-1/2,k}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{j,k+1/2} - G_{j,k-1/2}) \\ &+ \frac{1}{2} (\phi_{j+1/2,k} - \phi_{j-1/2,k} + \psi_{j,k+1/2} - \psi_{j,k-1/2}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die hochgestellten Buchstaben n und a wieder die Näherungslösung zum neuen bzw. alten Zeitpunkt. Ferner gilt

$$F_{j+1/2,k} = \frac{1}{2} (f_{jk}^a + f_{j+1,k}^a), \quad G_{j,k+1/2} = \frac{1}{2} (g_{jk}^a + g_{j,k+1}^a).$$

$\phi$  und  $\psi$  sind Dämpfungsterme:

$$\phi_{j/1/2,k} = \frac{1}{2} (\alpha_{jk}^a + \alpha_{j+1,k}^a) (\tilde{u}_{j+1,k}^a - \tilde{u}_{jk}^a)$$

$$\psi_{j,k+1/2} = \frac{1}{2}(\beta_{jk}^a + \beta_{j,k+1}^a)(\tilde{u}_{j,k+1}^a - \tilde{u}_{jk}^a)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_{jk}^a = \omega \cdot |\alpha| \cdot \sigma_{jk}^a \left(\frac{\Delta y}{h}\right)^2, \quad \beta_{jk}^a = \omega \cdot |\alpha| \cdot \sigma_{jk}^a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2.$$

Die Parameter  $\omega$  und  $\alpha$  müssen der Stabilitätsbedingung

$$(23) \quad (|\alpha| \cdot \sigma_{jk}^a)^2 \leq \omega \cdot |\alpha| \cdot \sigma_{jk}^a \leq 1$$

genügen. Wir geben (wie auch beim GAP-Algorithmus) einen Wert  $q \leq 1$  vor und berechnen  $\Delta t$  aus der Bedingung

$$(24) \quad |\alpha| \cdot \sigma_{\max}^a = q, \quad \sigma_{\max}^a = \max_{j,k} \{\sigma_{jk}^a\}.$$

Die Bedingung (23) für  $\omega$  läßt sich umschreiben in

$$|\alpha| \cdot \sigma_{jk}^a \leq \omega \leq \frac{1}{|\alpha| \sigma_{jk}^a}$$

und führt mit (24) auf

$$q \leq \omega \leq \frac{1}{q}.$$

Auf diese Weise erhält man a-priori-Schranken für den Parameter  $\omega$ , der über die Stärke der numerischen Viskosität entscheidet.

Schließlich wollen wir noch auf die numerische Umsetzung der Randbedingungen aus §2c für unser FCT-Verfahren eingehen. Zunächst erzeugen wir künstliche Randwerte jenseits des Gültigkeitsbereiches der Differentialgleichung.

Am Ein- und Ausströmrand erzeugten wir sie durch lineare Extrapolation nach dem Schema

$$\tilde{u}_{j-1,k} = 2 \tilde{u}_{jk} - \tilde{u}_{j+1,k}, \quad j = 0, -1.$$

Die festen Wände behandelten wir mit Symmetriebedingungen wie in Gl. (17).

Ein Versuch mit linearer Extrapolation am ganzen Rand ergab negative innere Energien an der unteren vorderen Quaderecke.

Setzt man die Extrapolationsformeln in die Differenzenformeln des L-T-Verfahrens ein, so erhält man am Rand einseitige Differenzenverfahren mit verringerter Genauigkeitsordnung. Extrapolation ist jedoch einfacher zu programmieren. Wir berechnen also die Näherungslösung  $\tilde{u}^n$  zunächst in allen Randpunkten des Rechengebietes mit demselben Verfahren wie im Inneren. Die neuen Randwerte  $\tilde{u}^{n,b}$  ergeben sich dann an festen Wänden aus dem Gleichungssystem

$$v^{n,b} \cdot \omega = 0$$

$$\mathcal{L}_j(\tilde{u}^n, \omega) \tilde{u}^{n,b} = \mathcal{L}_j(\tilde{u}^n, \omega) \tilde{u}^n \quad \text{für alle } j \text{ mit } \lambda_j(\tilde{u}^n, \omega) \leq 0.$$

Dabei ist  $\omega$  ein innerer Normalenvektor zum Rand. Am Einströmrand setzen wir mit  $\omega = (1, 0)$

$$\mathcal{L}_1(\tilde{u}^n, \omega) \tilde{u}^{n,b} = \mathcal{L}_1(\tilde{u}^n, \omega) \tilde{u}^n.$$

In den absorbierenden Randbedingungen

$$\mathcal{L}_j^1(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \mathcal{L}_j^2(\tilde{u}) \tilde{A}_1(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (j = 2, 3, 4)$$

ersetzen wir die Ableitung nach  $y$  durch die symmetrische Differenz  $D_0^y(\Delta y)$ . Die Ableitung nach der Zeit approximieren wir durch den Ausdruck

$$(\tilde{u}_{jk}^n - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j,k-1}^a + \tilde{u}_{j,k+1}^a)) / (t^n - t^a),$$

der dem Friedrichs-Verfahren entlehnt ist.

Am Ausströmrand verfahren wir analog, verlangen aber zusätzlich  $v_x^{n,b} \geq 0$ .

Damit ist unser FCT-Algorithmus vollständig beschrieben.

## 5. Umsetzung der Algorithmen in Programme für die CYBER 205

Die CYBER 205 besitzt zusätzlich zum üblichen Rechenwerk "Fließbänder", die zur effizienten Manipulation von Vektoren dienen. Standard-FORTRAN-Programme werden vom Compiler nach DO-Schleifen abgesucht, die sich in Vektorbefehle übersetzen lassen. Ferner kann man in CYBER-FORTRAN direkt und übersichtlich mit Vektoren programmieren. Da Standard-FORTRAN-Code nur zu einem geringen Teil automatisch vektorisiert wird, gingen wir schon bald zur Handvektorisierung über. Für FCT war dabei die vektorielle IF-Anweisung (WHERE) das wichtigste Sprachelement. Wir benutzen es zum Ausblenden von Randpunkten in den Differenzenverfahren, vor allem aber beim Begrenzen der Flüsse. Der FCT-Algorithmus ließ sich damit recht einfach in ein effizientes FORTRAN-Programm für die CYBER übersetzen. Um die Genauigkeit des L-T-Verfahrens auszunutzen, verwenden wir 64-Bit-Arithmetik.

Durch das Wechselspiel von Teilchen und Gitter treten beim GAP-Algorithmus zusätzliche Schwierigkeiten auf. Bilineare Interpolation vom Gitter auf die Teilchen führt auf Formeln der Art

$$\rho_n = \sum_{v=1}^4 a_n^v \rho_{j(v,n),k(v,n)}$$

Solche Formeln werden mit den Routinen Q8VSCATR und Q8VGATHR effizient behandelt, die (für festes  $v$ ) aus dem Feld  $(\rho_{jk})$  das Feld  $(\rho_{j(v,n),k(v,n)}, n = 1, N)$  "mischen".

Eine Stufe komplizierter ist die Berechnung von Gittergrößen aus Teilchengrößen. Dies führt auf Formeln der Art

$$M_{jk} = \sum_{n=1}^N M_n b_{jk}^n \quad \text{mit} \quad b_{jk}^n = \iint_{C_{jk}} x_n(x,y) dx dy.$$

Für festes  $n$  sind maximal vier der Faktoren  $b_{jk}^n$  von Null verschieden. Wir suchten daher nach einem Verfahren, bei dem nur über diejenigen Teilchen summiert wird, deren Koeffizienten  $b_{jk}^n$  (bei gegebenem  $j$  und  $k$ ) größer als Null sind, das sich aber gleichzeitig möglichst weitgehend vektorisieren läßt. Es entstand folgender Algorithmus:

1. Bestimme (vektoriell) für jedes Teilchen diejenige Zelle

$$z_n = (j(n), k(n)),$$

in der sich seine linke untere Ecke befindet.



2. Numeriere für jede Zelle  $z = (j,k)$  die Teilchen mit  $z_n = z$  durch. Es entsteht ein Feld  $\tilde{n}(z,\ell)$ , das die Nummer des  $\ell$ -ten Teilchens in der Zelle  $z$  angibt. Dieser Schritt läuft skalar.
3. Berechne z.B. Die Masse  $M_z^{\ell u}$ , die die Teilchen aus Schritt 1 zur Gesamtmasse in der Zelle  $z$  beitragen, parallel in  $z$  mit der Formel

$$(25) \quad M_z^{\ell u} = \sum_{\ell=1}^{\ell_{\max}(z)} M_{\tilde{n}(z,\ell)} b_z^{\tilde{n}(z,\ell)}$$

Analoge Formeln gelten für die drei übrigen Anteile der Zellenmasse  $M_z$ , die aus Teilchen gebildet werden, die mit einer der drei anderen Ecken in die Zelle ragen.

Die wesentliche Beschleunigung besteht bei diesem Verfahren darin, daß Schritt 2 in jedem Zeitschritt nur einmal anfällt, während Schritt 3 mehrfach vorkommt. Eine nur in diesem Teil skalare Version des GAP-Algorithmus mit der Formel (13<sup>+</sup>) für die Teilchenbeschleunigung benötigte bei 50 000 Teilchen und 5 000 Zellen fast dreimal soviel Rechenzeit wie die voll vektorisierte Version.

Die Teilchenzahl  $\ell_{\max}(z)$  wechselt von Zelle zu Zelle. Wir bestimmen die kleinste Zahl  $L$ , für die weniger als 10% der Zellen mehr als  $L$  Teilchen enthalten, und ersetzen die Formel (25) durch

$$(25') \quad M_z^{\ell u} = \sum_{\ell=1}^L c(z,\ell)$$

mit

$$c(z,\ell) = \begin{cases} M_{\tilde{n}(z,\ell)} b_z^{\tilde{n}(z,\ell)} & \text{für } \ell \leq \ell_{\max}(z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die restlichen Teilchen behandeln wir skalar.

Eine Anhebung der Schranke von 10 auf 20% ergab bereits leicht erhöhte Rechenzeiten. Dies ist deshalb bemerkenswert, weil in (25') für alle Zellen dieselben Operationen ausgeführt werden, während sich für  $\ell$  nahe  $L$  nur in wenigen etwas ändert. Trotzdem ist die vektorielle Version schneller als die skalare.

Die großen Datenmengen in GAP zusammen mit der geringen Konsistenzordnung veranlaßten uns, diese Verfahren in 32 Bit-Arithmetik zu programmieren.

## 6. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Messungen

In der Arbeit [4] von H.U. Hassenpflug hat der Schlitz eine Höhe von 140 mm, der Quader ist 60 mm hoch. Das Versuchsgas ist Luft. Wir setzten deshalb  $y_{\max} = 140$  mm,  $y_0 = 60$  mm und  $\gamma = c_p/c_v = 1,4$  (vgl. §2c). Dichte und Druck bei Zimmerbedingungen setzten wir mit  $\rho_0 = 1205$  g/m<sup>3</sup> und  $p_0 = 10^5$  Pa an. Ferner benutzten wir  $x_{\max} = 280$  mm,  $x_s = 80$  mm und  $x_\ell = 110$  mm. Der rechte Rand des Quaders  $x_r$  ergibt sich damit aus der Quaderbreite.

Für das GAP-Verfahren verwendeten wir 54 000 Teilchen und  $84 \times 42$  Zellen. Mit der Gleichung (13\*) für die Teilchenbeschleunigung benutzten wir die Glättungsparameter  $a = 66$  und  $q_f = 0,3$  in Formel (16'). Den Zeitschritt bestimmten wir aus

$$(24) \quad |x|(|v|+c)_{\max} = q \quad \text{mit} \quad q = 0,3.$$

Größere Zeitschritte führten zu Instabilitäten.

Beim modifizierten Verfahren (Gl. (13<sup>+</sup>)) - wir wollen es im Folgenden mit GAPM bezeichnen - konnten wir  $q$  auf 0,6 erhöhen. Dies wurde möglich, weil es stärker glättet als das Originalverfahren.

Beim FCT-Algorithmus benutzten wir  $98 \times 49$  Zellen und den Glättungsfaktor  $\epsilon = 0,09$ . Der Zeitschritt ergab sich aus Formel (24) mit  $q = 0,6$ . Für den Glättungsparameter  $\omega$  des Rusanov-Verfahrens verwendeten wir den Wert 1,65 nahe der oberen Grenze  $1/q$ . Ein Testlauf mit  $q = 0,8$ ,  $\omega = 1,2$  und  $\epsilon = 0,1$  zeigte deutliche Oszillationen hinter dem Stoß.

Die Abbildung 4 zeigt Dichtekonturen der Näherungslösung bei einer Stoßmachzahl von 1,12 und einer Quaderbreite von 30 mm.

Die wesentlichen Elemente des Strömungsverlaufs werden von allen drei Verfahren wiedergegeben:

Die einfallende Stoßwelle wird vom Quader reflektiert und gebeugt. Von der Vorderkante her breitet sich eine Verdünnungswelle aus. Der obere Teil des einfallenden Stoßes überläuft den Quader und wird an seiner Hinterkante gebeugt. An den Kanten entstehen kleine Gebiete sehr geringer Dichte. Man erkennt, daß FCT die bei weitem steilsten Stoßwellen liefert. Im Gegensatz zu den Teilchenverfahren verbreitert FCT sie nicht mit der Zeit. Kein Verfahren produziert überschießende Dichten hinter den Stoßwellen, jedoch weisen die

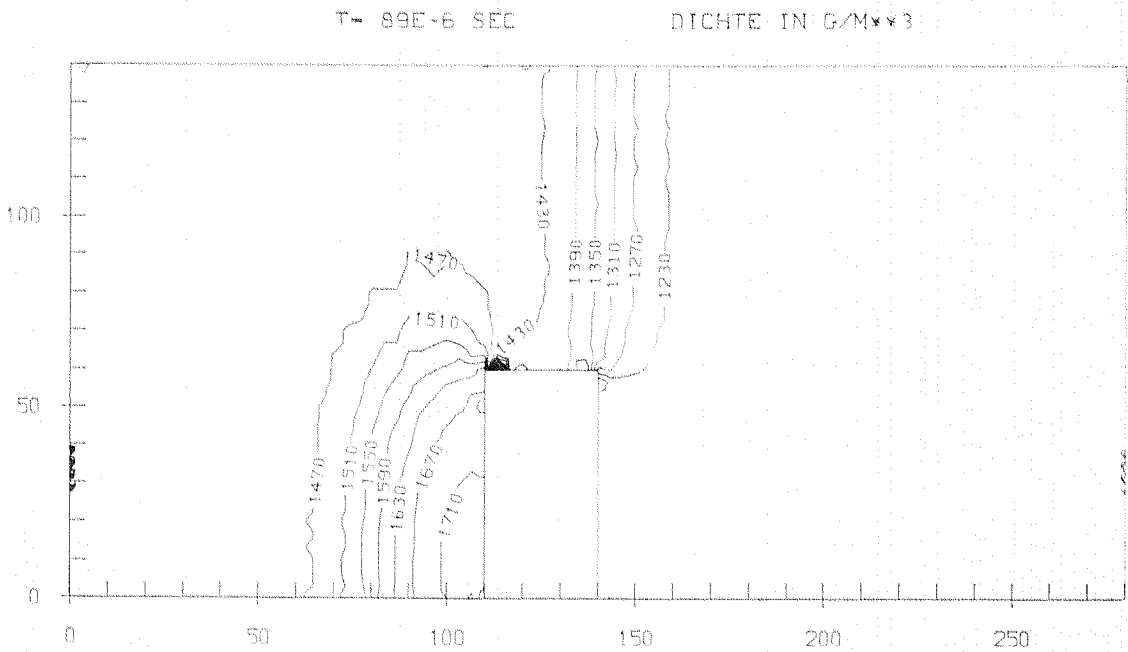
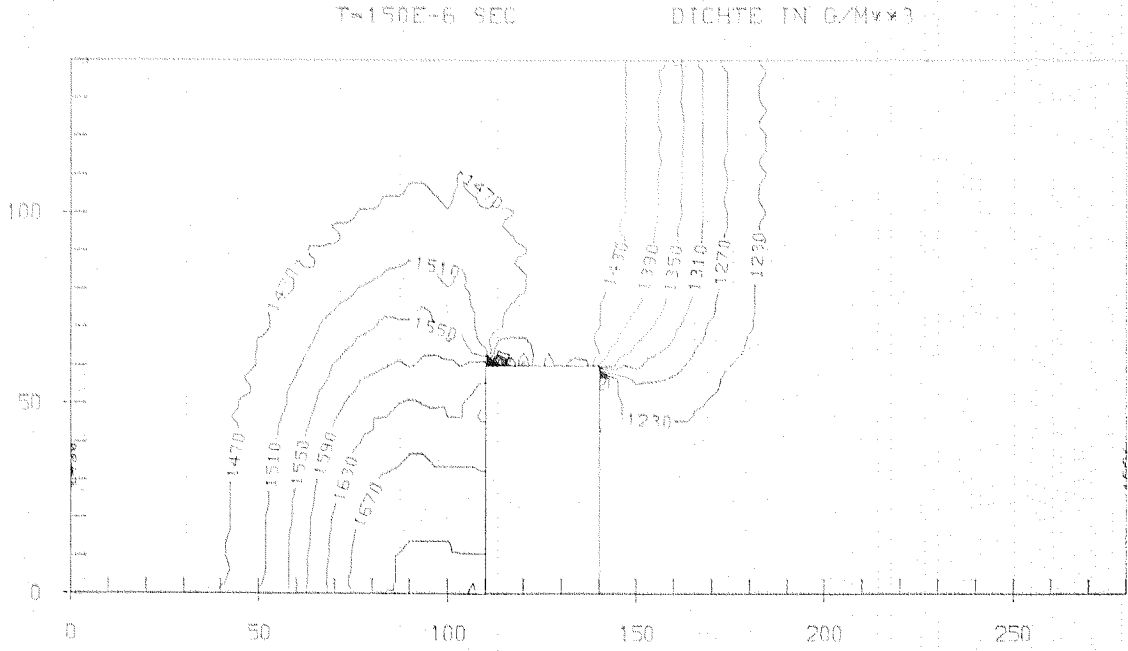
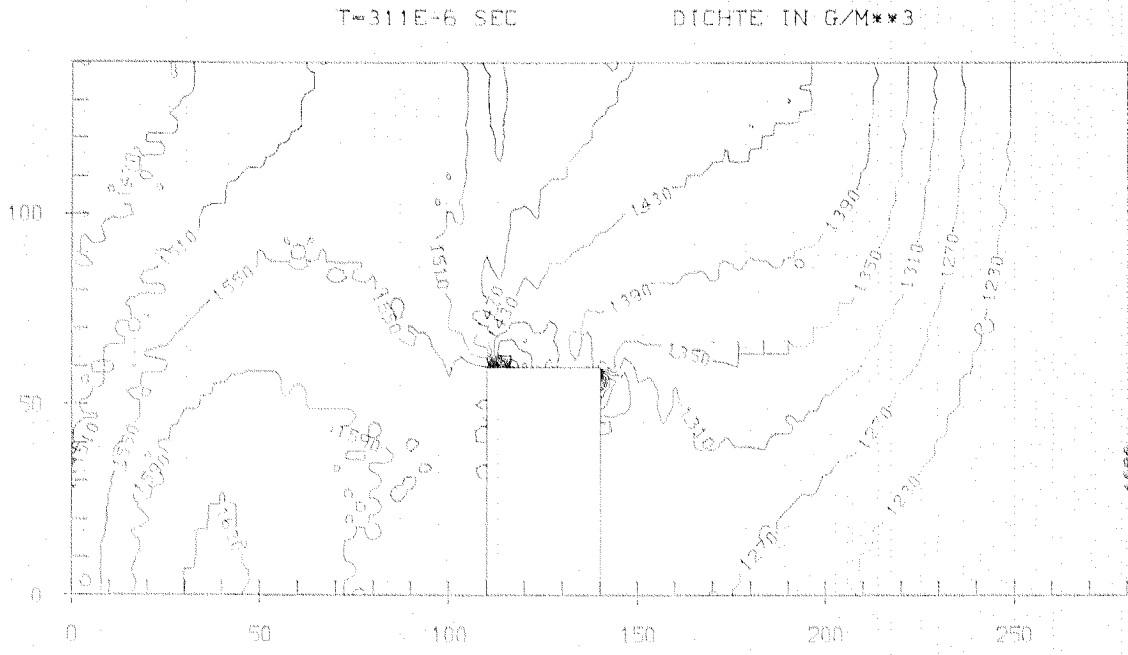
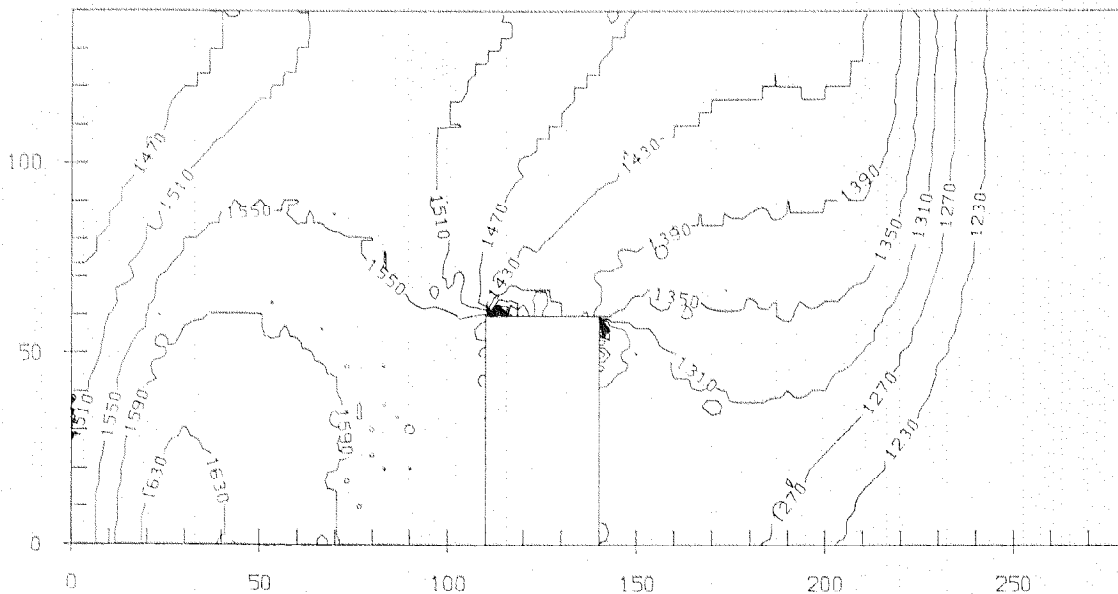


Abbildung 4a

GAP

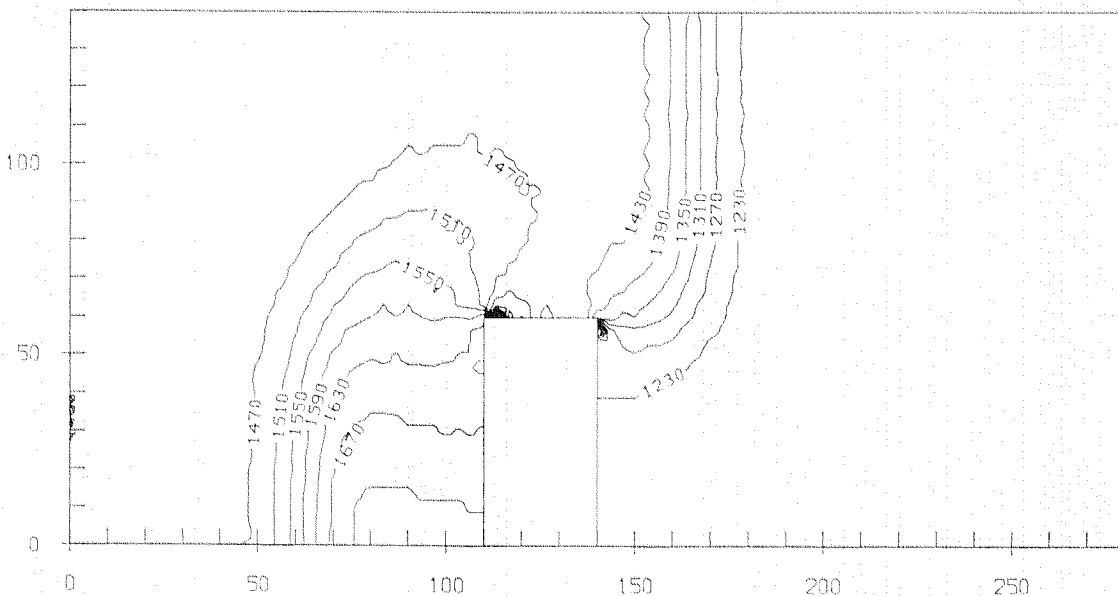
T=313E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T=150E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T= 91E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3

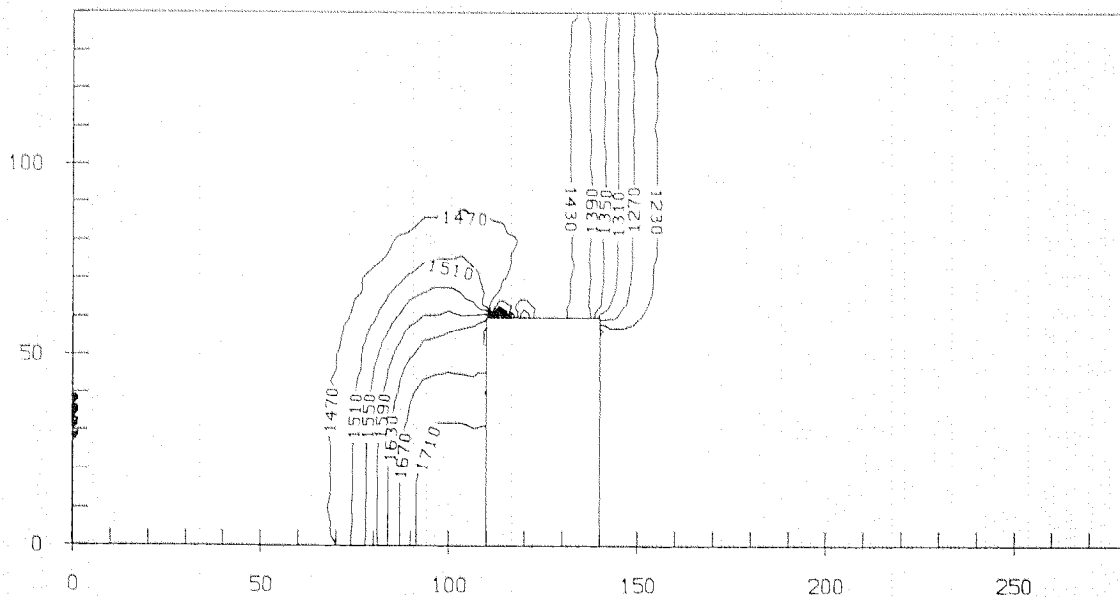
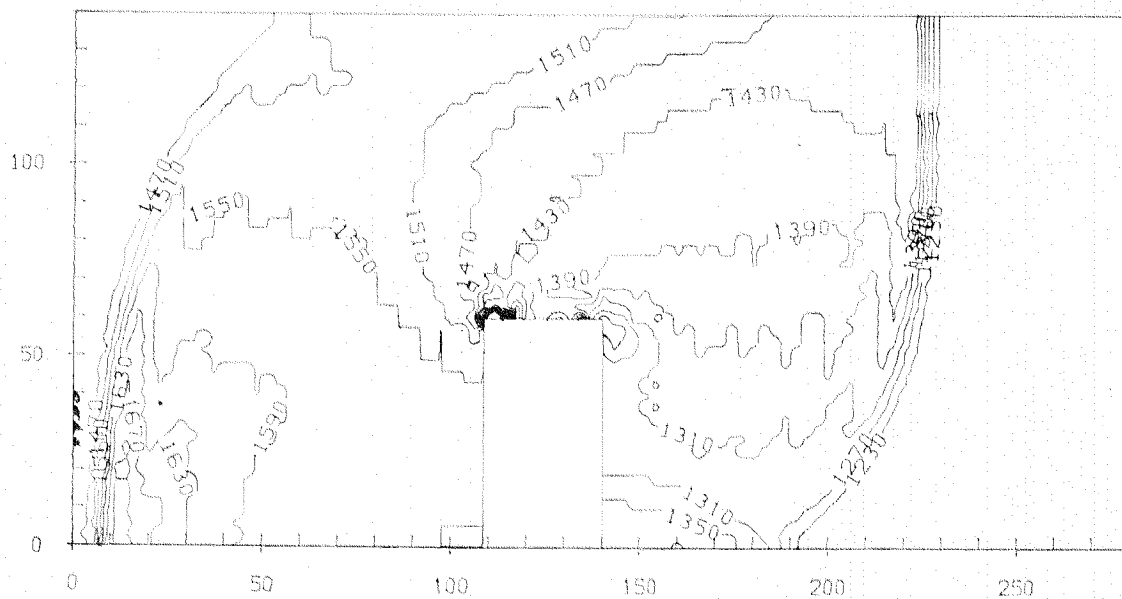


Abbildung 4b

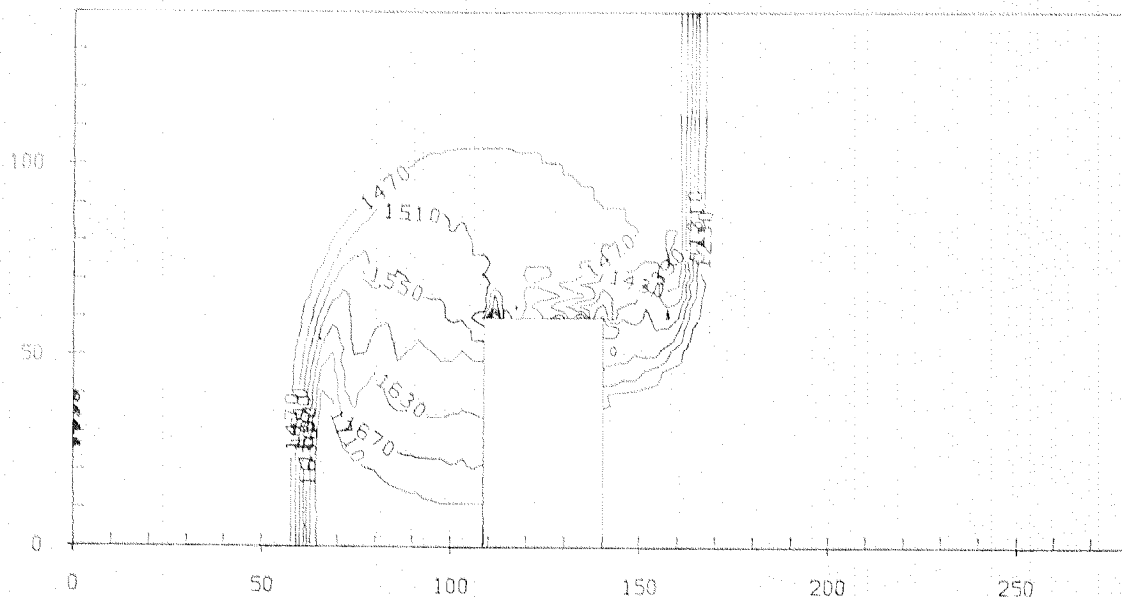
T=311E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T=148E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T= 91E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3

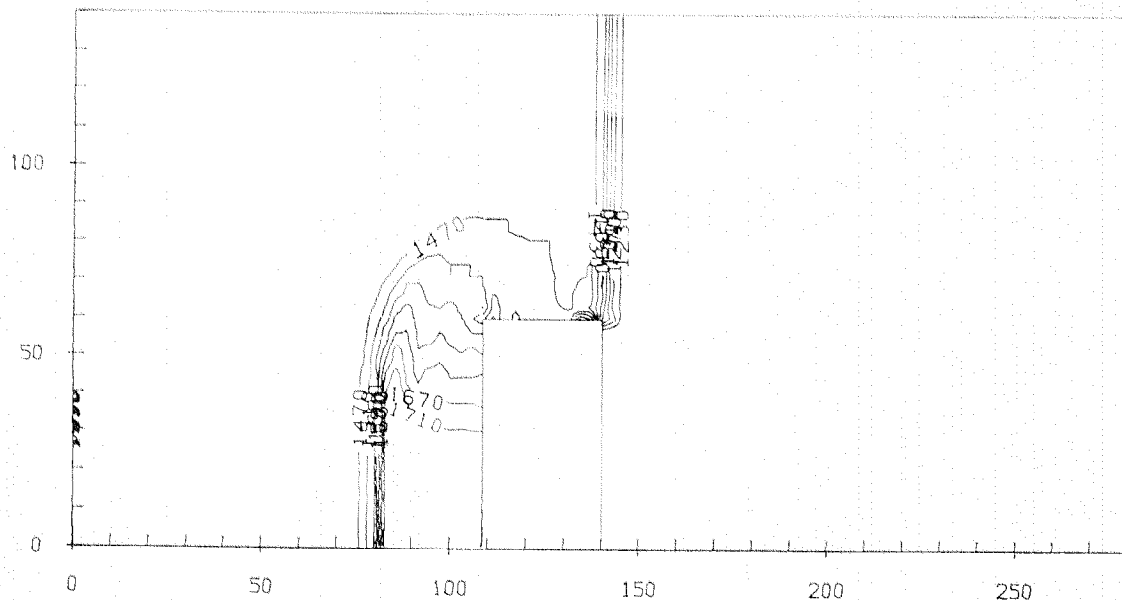


Abbildung 4c

FCT

FCT-Ergebnisse in den Verdünnungswellen hinter den gebeugten Stößen erhebliche Oszillationen auf. Die theoretische Dichte  $\rho_2 = 1733 \text{ g/m}^3$  hinter dem reflektierten Stoß wird von allen Verfahren recht genau wiedergegeben. Bei  $t \approx 310 \text{ } \mu\text{s}$  berechnen alle drei Verfahren leichte Unebenheiten auf der Quaderoberfläche. Sie haben ihre Ursache in der scharfen Vorderkante des Quaders. Ferner trägt die fehlende bzw. schwache Dichteglättung von GAP/GAPM bzw. FCT wesentlich dazu bei. Hinzu kommt, daß Randzellen bei gleicher Dichte nur halb so viele Teilchen enthalten wie innere Zellen. Testläufe mit 50 000 Teilchen und  $98 \times 49$  Zellen ergaben dementsprechend deutlich größere lokale Dichteschwankungen. Von allen drei Verfahren prognostiziert FCT an der Vorderkante die stärksten, an der Hinterkante die schwächsten Dichteabsenkungen.

Abbildung 5 setzt Abbildung 4 fort. Bei FCT fehlt das Bild zu  $910 \text{ } \mu\text{s}$ . Das Verfahren meldete vorher negative innere Energien an der Vorderkante des Quaders. Um dieses Problem zu lösen, sind weitere Untersuchungen über Randbedingungen und Extrapolationsmethoden an scharfen Ecken nötig. Die Teilchenverfahren haben hier keine Schwierigkeiten. Das FCT-Diagramm bei  $510 \text{ } \mu\text{s}$  zeigt die Reflexionen, die entstehen, wenn scharfe Stoßwellen auf einen absorbierenden Rand treffen. Dies geschieht bei etwa  $440 \text{ } \mu\text{s}$ . Die verschmierten Stöße der Teilchenverfahren werden wesentlich leichter absorbiert. Hassenpflug's Arbeit enthält (in Abbildung 13III) Interferogramme für dieselbe Quaderbreite und Machzahl wie in diesen Rechnungen für die Zeiten  $t = 310, 510$  und  $610 \text{ } \mu\text{s}$ . Sie zeigen die nähere Umgebung des oberen Quaderendes. Der Interferenzstreifenabstand von  $39 \text{ g/m}^3$  entspricht etwa dem Abstand zweier Höhenlinien auf unseren Grafiken. Insbesondere fällt auf, daß FCT den Ort und die Gestalt des Hinterkantenwirbels in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment berechnet. Allerdings ist die Dichte im Wirbelkern viel zu hoch. Die Teilchenverfahren berechnen Ort und Gestalt schlecht, das Dichteminimum aber weit besser. Den Vorderkanten-"Wirbel" reproduzieren die Teilchenverfahren zwar etwas besser als FCT, aber nicht gut.

Die Rechenkosten für die Abbildungen 4 und 5 verhielten sich bis  $610 \text{ } \mu\text{s}$  mit GAP, GAPM und FCT wie  $\rho : 4,5 : 1$ . Man erkennt, daß FCT trotz des feineren Gitters bedeutend schneller läuft. Der höhere Aufwand bei GAPM in der Formal ( $13^+$ ) wird durch den verdoppelten Zeitschritt mehr als ausgeglichen. Die starke Glättung auch in Verdünnungswellen macht sich beim vorliegenden Problem nicht negativ bemerkbar.

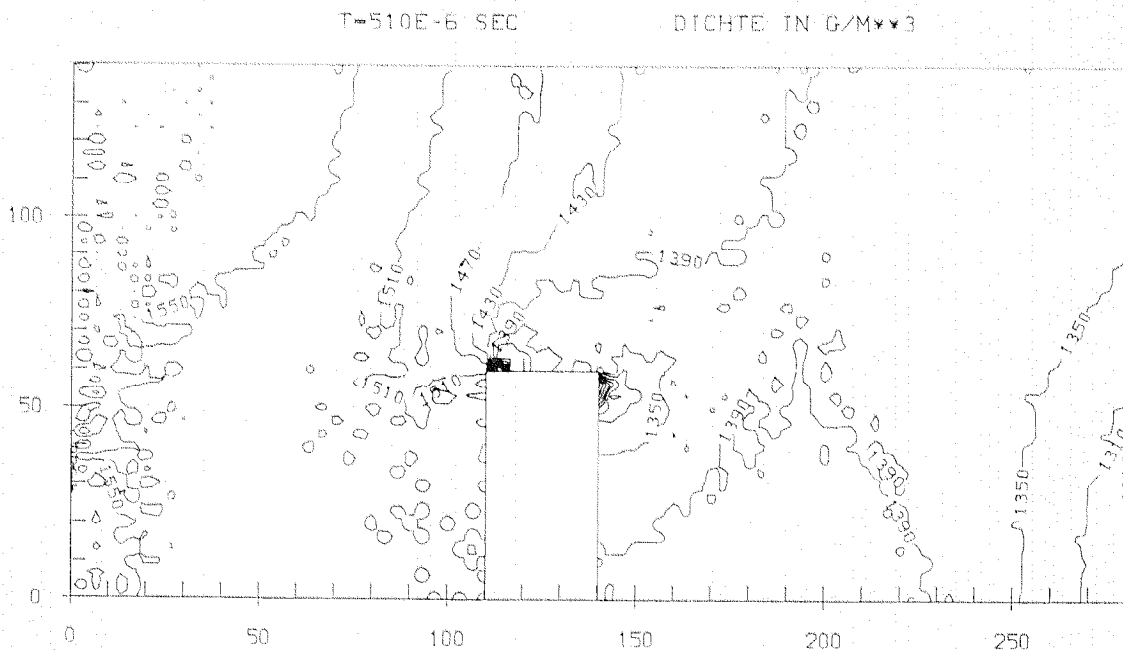
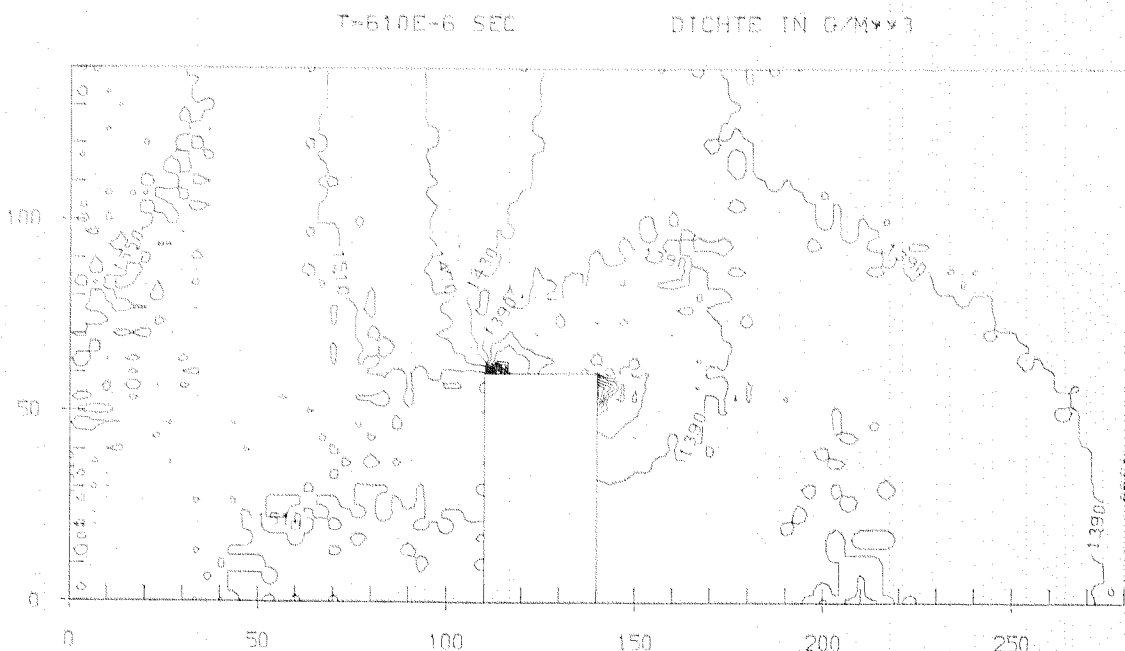
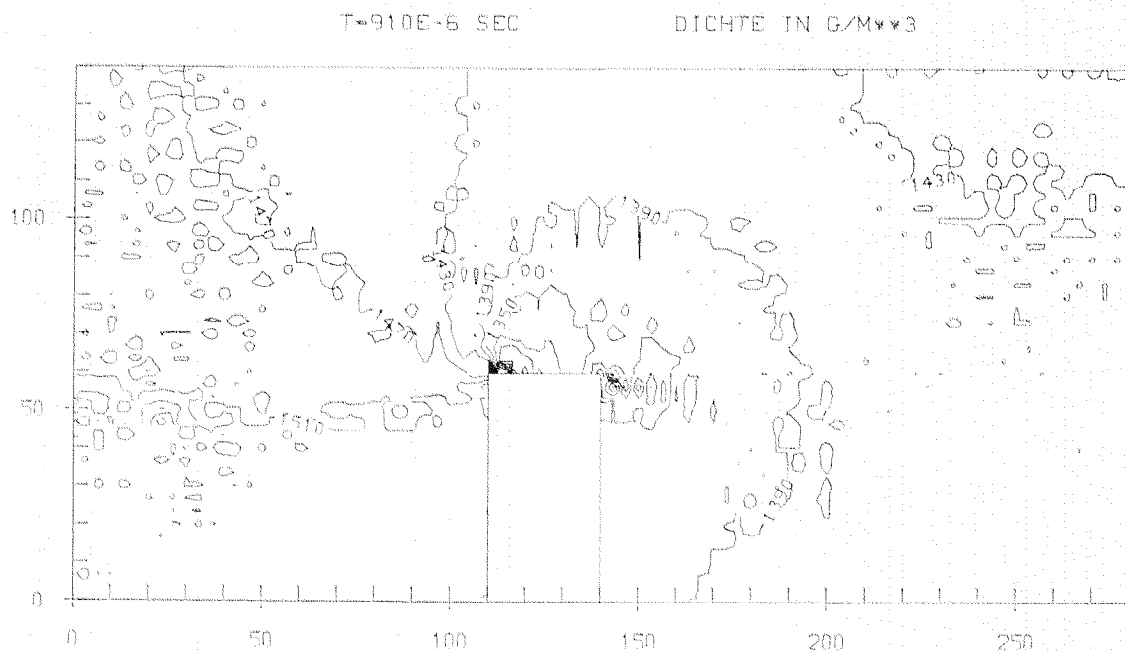
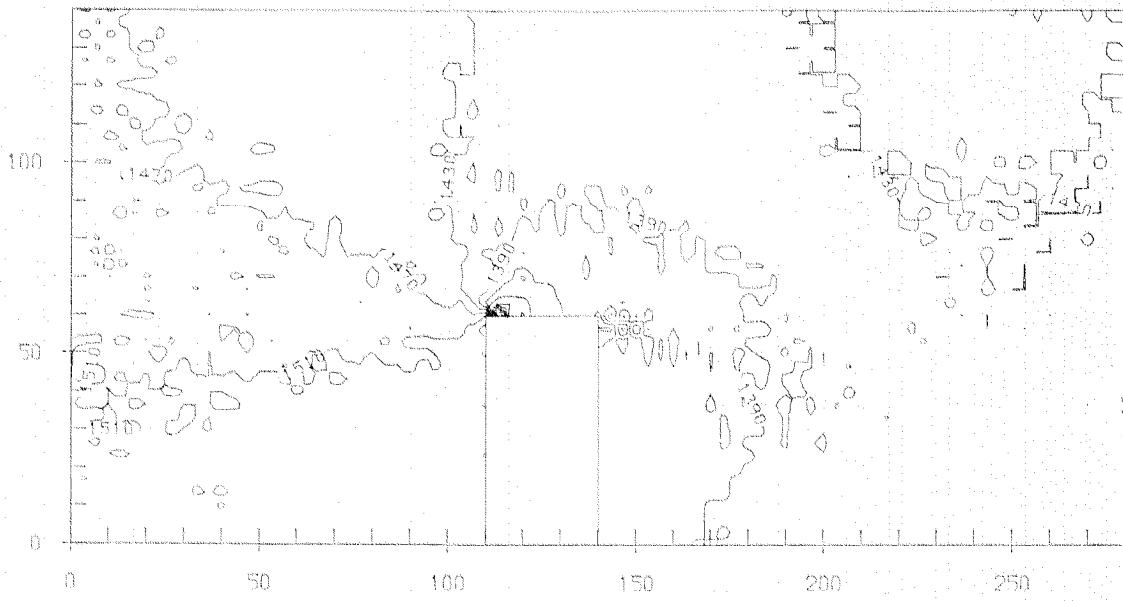


Abbildung 5a

GAP

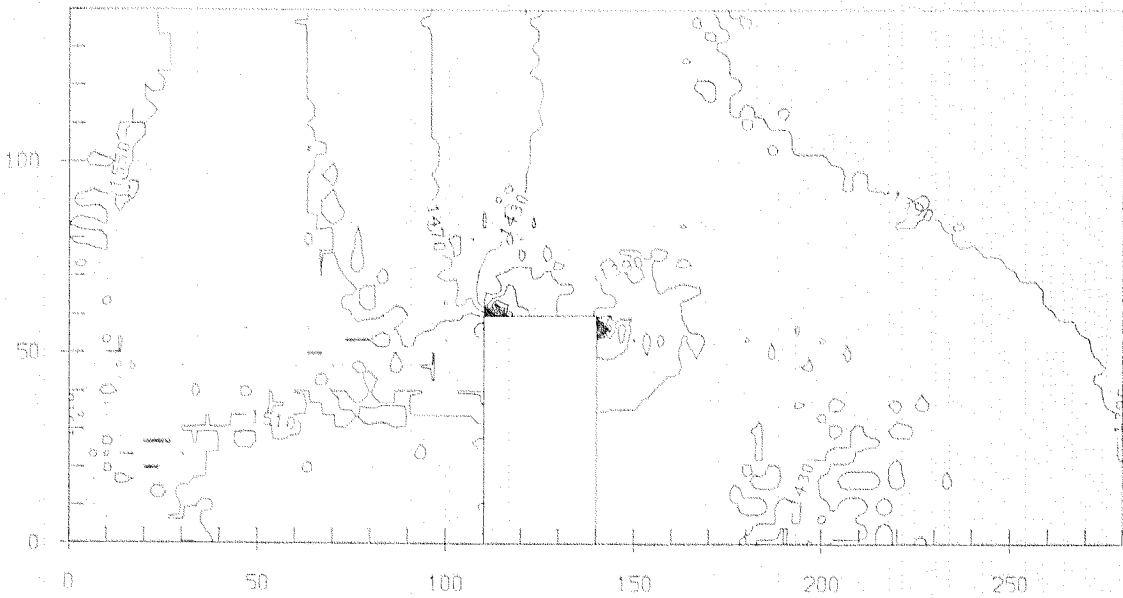
T-912E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T-610E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3



T-512E-6 SEC

DICHTE IN G/M\*\*3

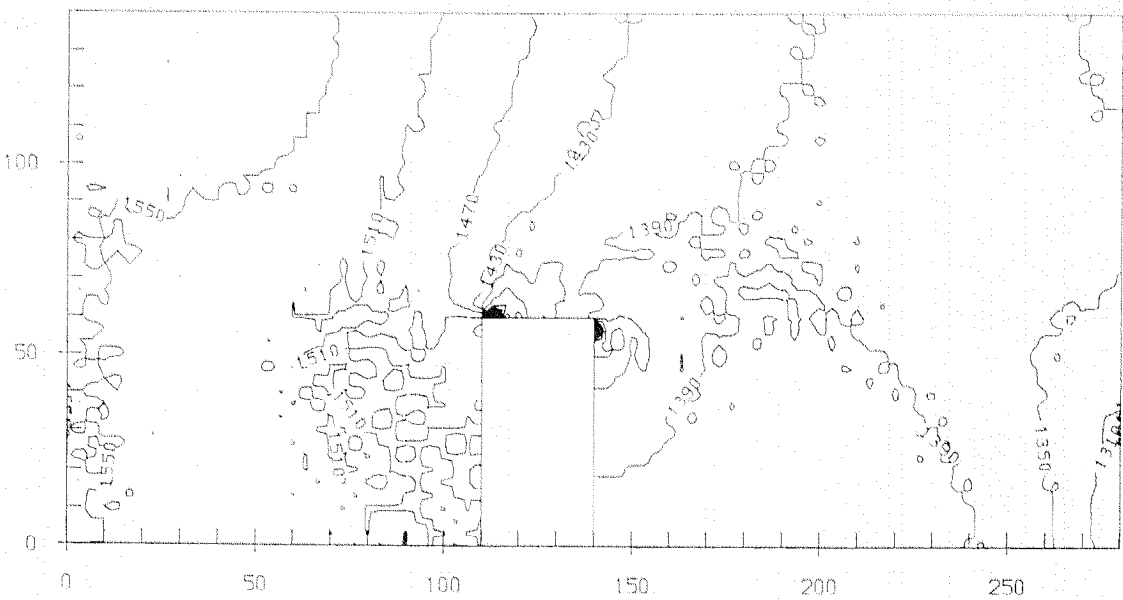


Abbildung 5b

GAPM



Abbildung 6 zeigt das Geschwindigkeitsfeld der Näherungslösung von GAP (oben), GAPM (Mitte) und FCT (unten) zur Zeit  $t = 910 \mu\text{s}$  bzw.  $610 \mu\text{s}$ . Die zugehörigen Dichtefelder sind in Abbildung 5 oben zu finden. Um kleinere Geschwindigkeiten besser sichtbar zu machen, haben wir nicht  $v$ , sondern  $\frac{v}{|v|} \cdot \log(100 \cdot |v| + 1)$  abgebildet. Bei  $610 \mu\text{s}$  weist keins der Teilchenverfahren einen Nachlaufwirbel auf. Auch bei  $910 \mu\text{s}$  ist er noch sehr schwach: GAP berechnet unterhalb seines Kernes eine maximale Rückströmung von  $1,7 \text{ m/s}$ , GAPM  $0,7 \text{ m/s}$ . FCT dagegen gibt bei  $610 \mu\text{s}$  eine Rückströmung von  $40 \text{ m/s}$  an. Im Experiment wurden an einem  $12 \text{ mm}$  breiten Quader vor der Vereinigung von Vorder- und Hinterkantenwirbel maximale Rückströmgeschwindigkeiten von  $70 \text{ m/s}$  gemessen. Wir folgern daraus, daß dieser Wirbel tatsächlich im wesentlichen durch die Stoßwellenbeugung angefacht wird.

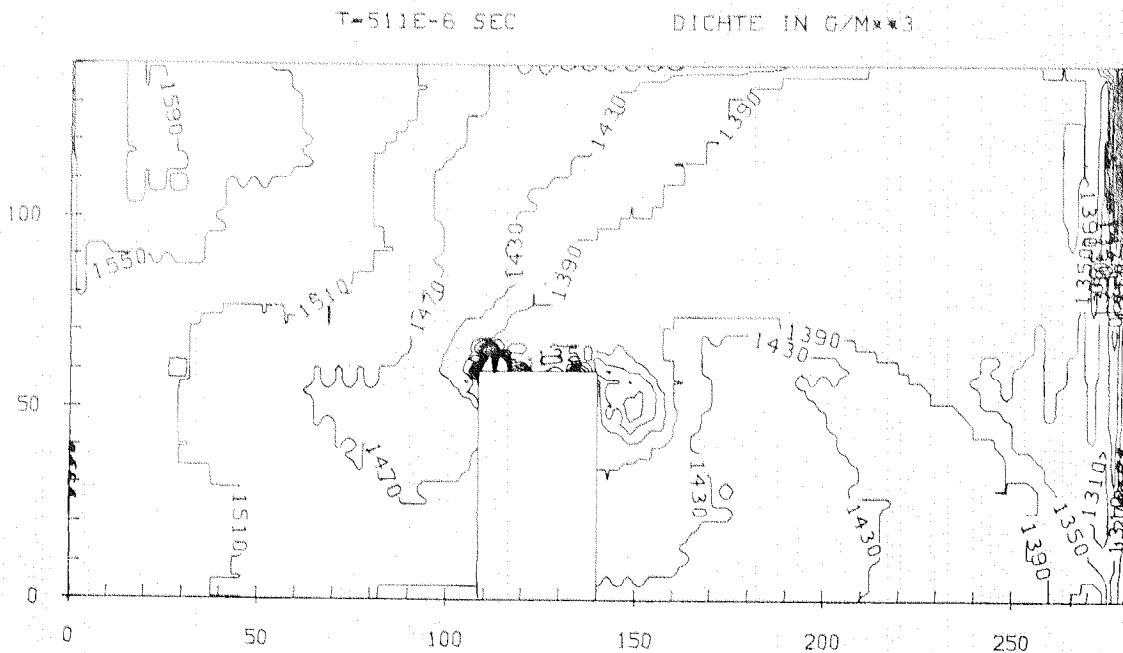
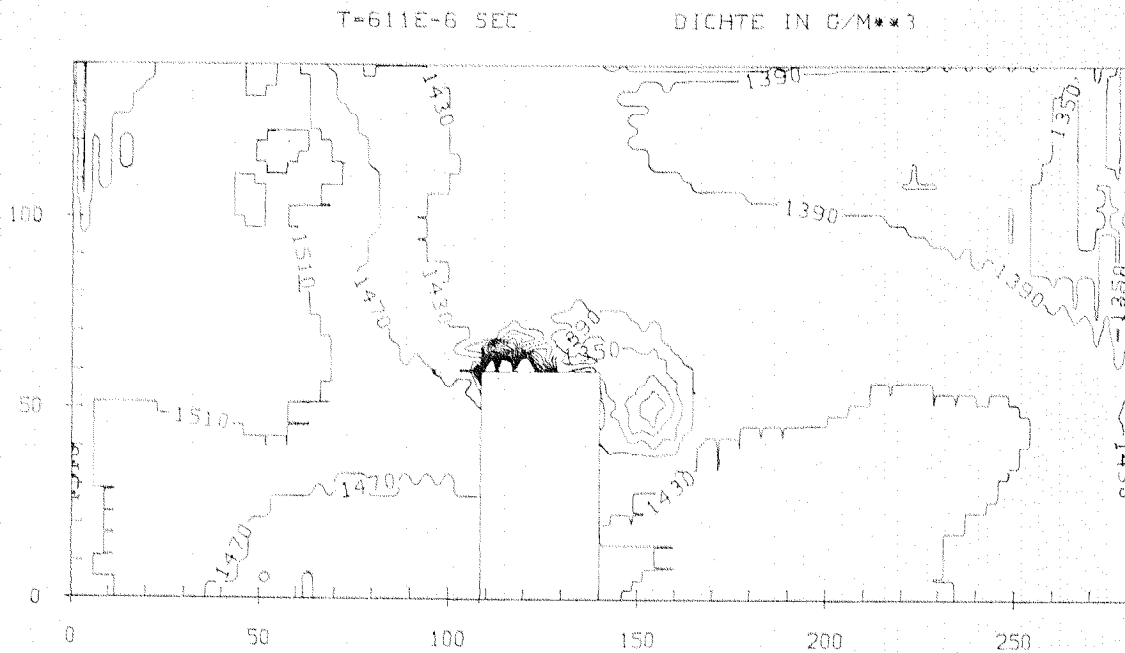


Abbildung 5c

FCT

Einen Vorderkantenwirbel mit Rückströmung direkt über der Quaderoberseite konnten wir bei unseren Rechnungen nicht feststellen. Dazu müßte man sicherlich die Grenzschicht berücksichtigen. Auch Hassenpflug gibt dazu keine Messungen an.

Die Abbildung 7a) und b) zeigen die GAPM-Näherungslösung der Strömung um einen 12 mm breiten Quader bei einer Stoßmachzahl von 1,12 bzw. 1,23 - diesmal mit  $50 \text{ g/m}^3$  Abstand zwischen zwei Dichtelinien. Es ist nur ein Ausschnitt des Rechengebietes abgebildet. Entsprechende Interferogramme findet man bei Hassenpflug in Abbildung 14. Bei der höheren Machzahl löst sich das Dichteminimum in der Rechnung wie in der Messung von der Quaderoberfläche. Anders als auf dem Interferogramm zerfällt es jedoch bei der Simulation in mehrere kleinere Minima. Unterhalb davon bildet sich wieder ein deutlicher Wirbel. Bei der kleineren Machzahl entnimmt man der Abbildung 21 von Hassenpflug Dichteminima von 970, 1090 und 1090  $\text{g/m}^3$  bei  $t = 360, 630$  und  $780 \text{ } \mu\text{s}$ . Die Simulation mit GAPM lieferte 1060, 1270 und 1270  $\text{g/m}^3$ .

T=910E-6 SEC

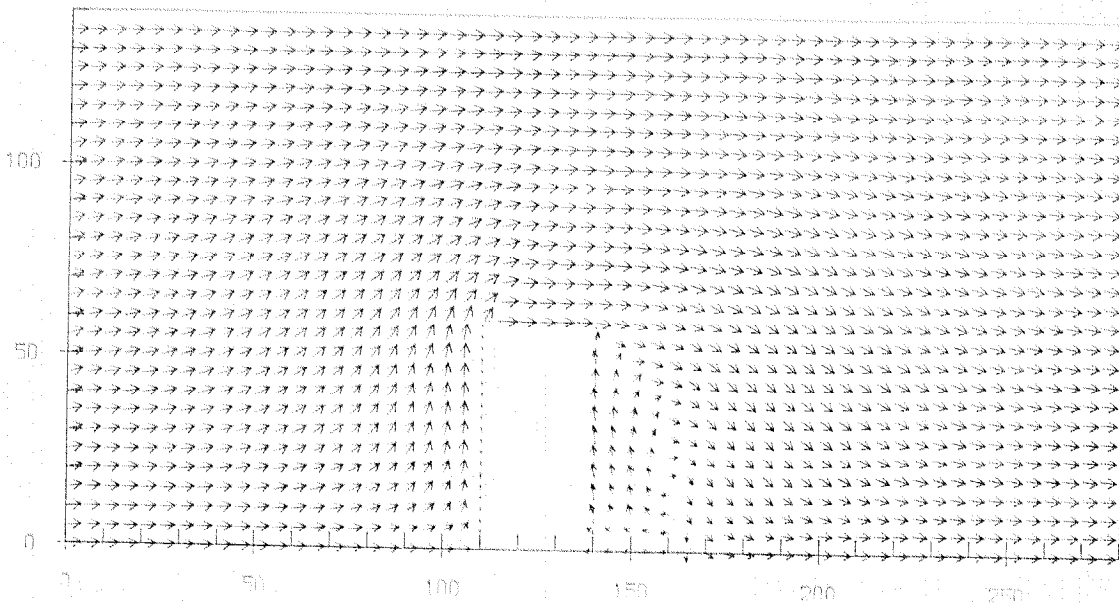
GESCHWINDIGKEIT



GAP

T=912E-6 SEC

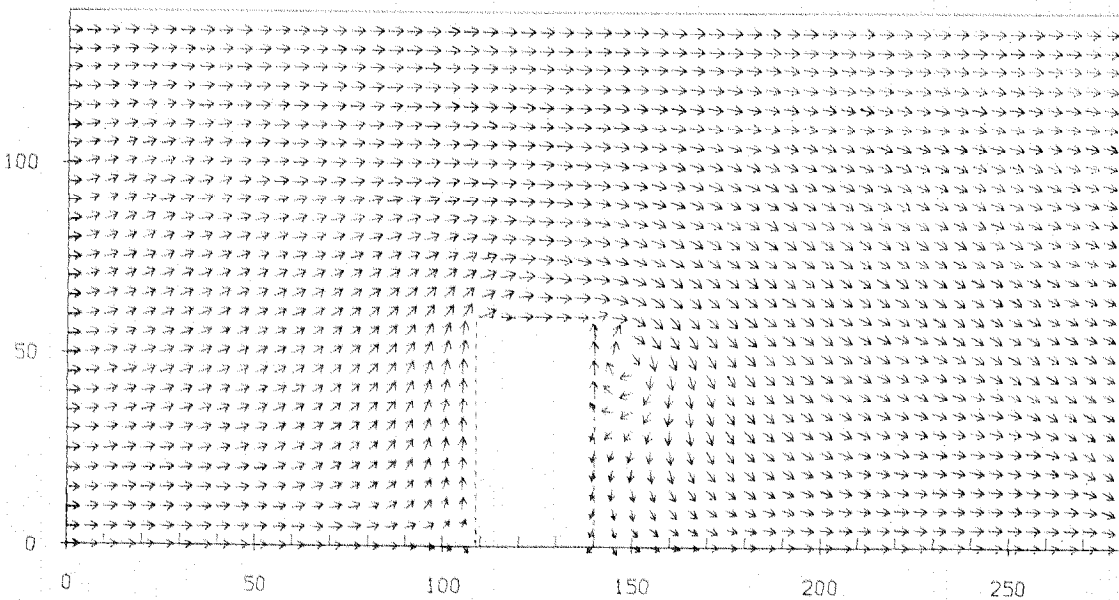
GESCHWINDIGKEIT



GAPM

T=911E-6 SEC

GESCHWINDIGKEIT



FCT

Abbildung 6

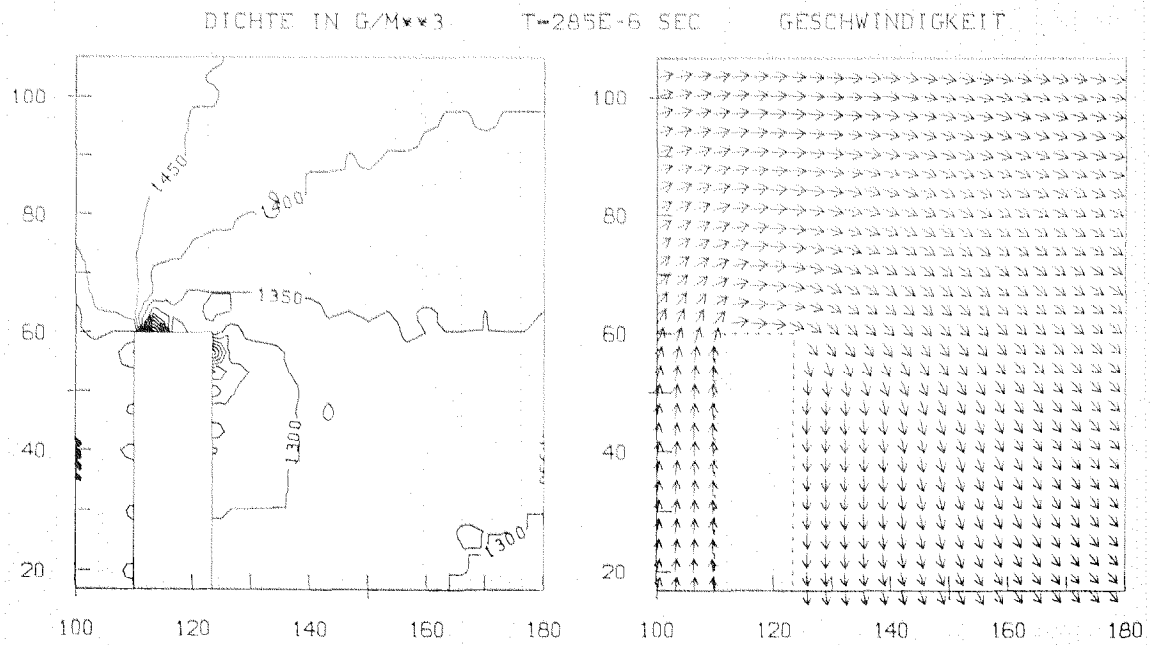
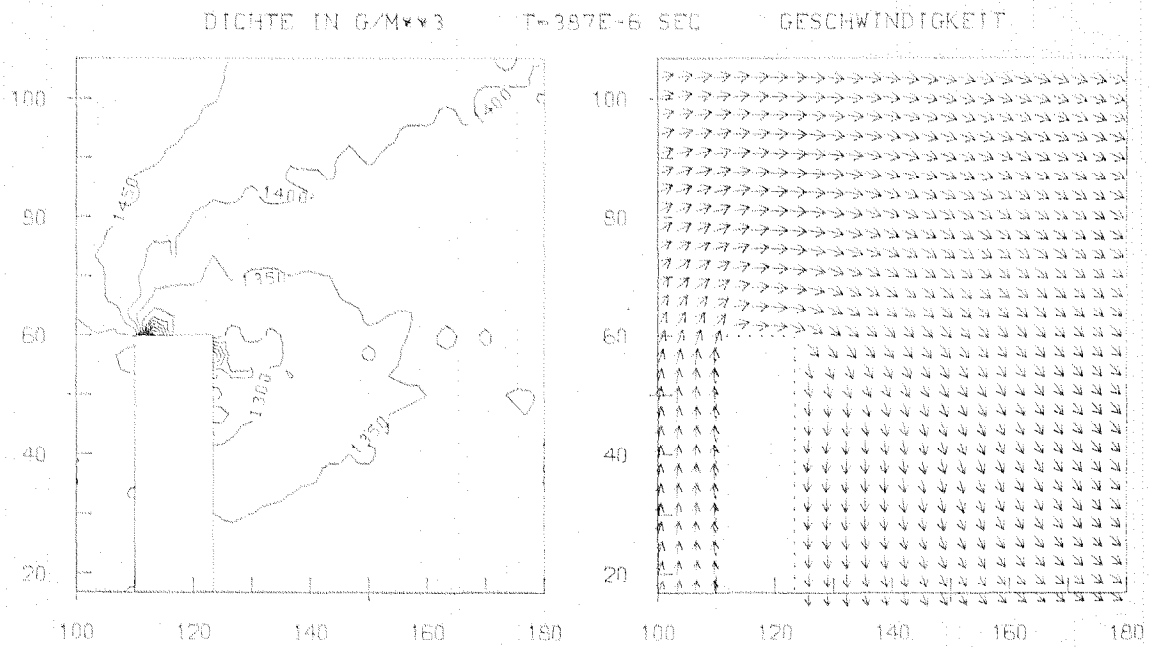
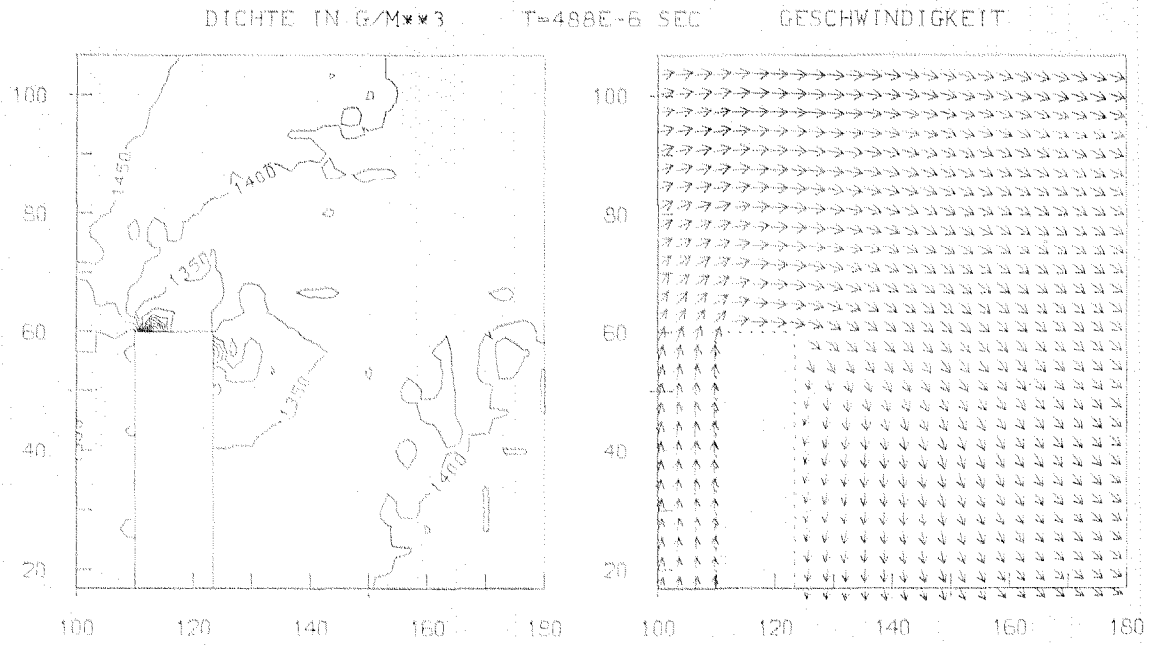


Abbildung 7a

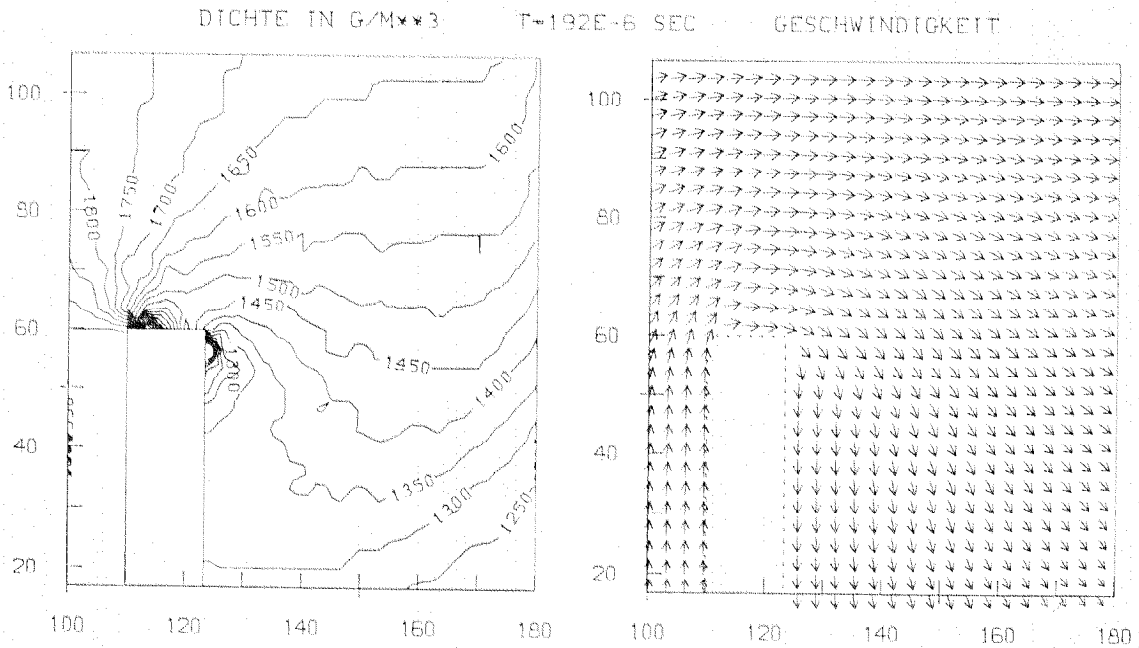
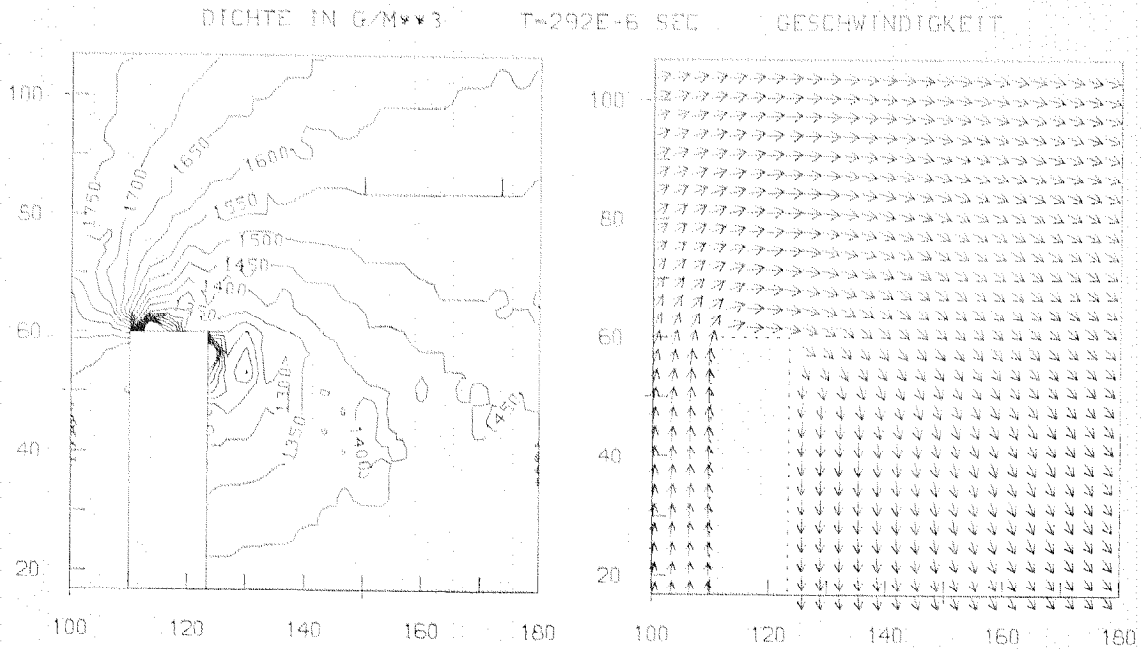
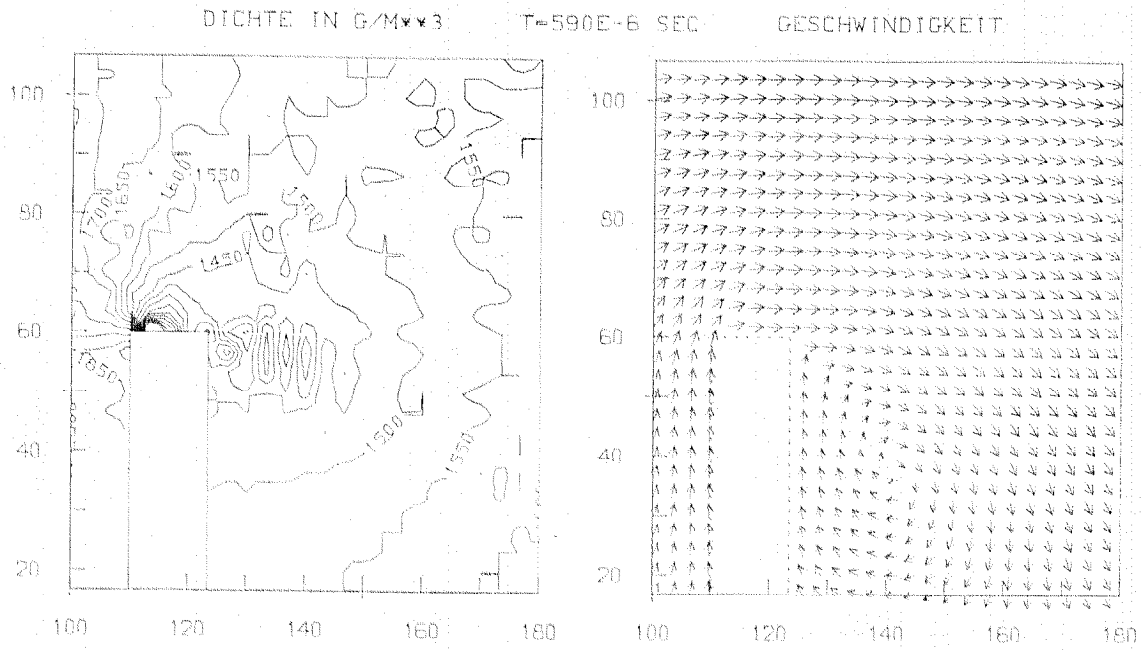


Abbildung 7b

## 7. Zusammenfassung

Die Ergebnisse des Differenzenverfahrens lassen den Schluß zu, daß die von Hassenpflug untersuchten Wirbel im wesentlichen durch die Beugung der einfallenden Stoßwelle erzeugt wurden. Grenzschichteffekte spielen eine untergeordnete Rolle.

Die Teilchenverfahren berechnen wesentlich schwächere Nachlaufwirbel und verschmieren die Stoßwellen bedeutend stärker. Andererseits erzeugen sie bessere Werte für die Dichteminima an den Quaderkanten. Scharfe Kanten bereiten ihnen im Gegensatz zu FCT keine besonderen Schwierigkeiten.

Das Differenzenverfahren ist auf Vektorrechnern wesentlich leichter zu implementieren als die Teilchenverfahren. Ferner benötigt es bedeutend weniger Rechenzeit.

GAPM stellt eine deutliche Verbesserung des GAP-Algorithmus dar. Dies betrifft die Güte der Näherungslösung, vor allem aber die benötigte Rechenzeit. Wir haben gezeigt, daß sich diese Verfahren effizient parallelisieren lassen.

Um Kanalströmungen wie die vorliegende über längere Zeit richtig zu simulieren, benötigt man entweder ein großes Rechengebiet, was viel Speicherplatz und Rechenzeit kostet, oder geeignete Randbedingungen an den künstlichen Rändern, die die Lösung im Inneren möglichst wenig verfälschen. In dieser Arbeit haben wir absorbierende Randbedingungen für nichtlineare hyperbolische Systeme 1. Ordnung mit mehreren Ortsvariablen hergeleitet und implementiert. Nur deshalb konnten wir das Rechengebiet so klein wählen (Rohrlänge : Rohrhöhe = 2 : 1).

ANHANG

Einige Abbildungen aus Hassenpflug's Dissertation [4]:

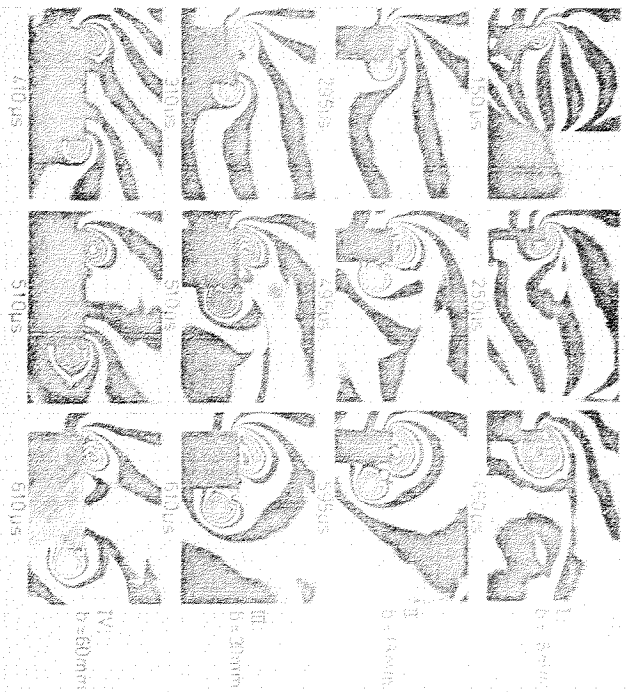


Abb. 13 Bildung des sekundären Hinterkantenwirbels in Abhängigkeit von der Körperbreite bei einer Stoßachzahl  $M_s = 1,12$

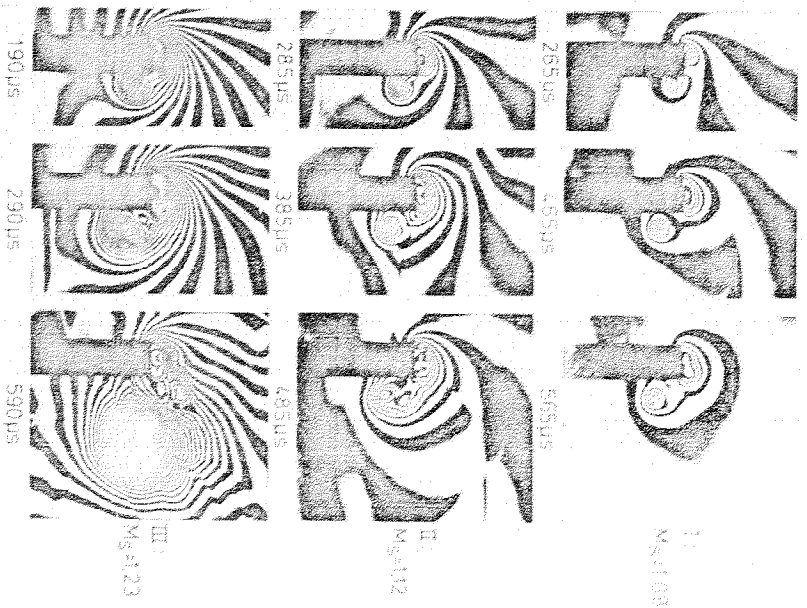


Abb. 14 Bildung des sekundären Hinterkantenwirbels in Abhängigkeit von der Stoßachzahl bei einer Körperbreite  $b = 12 \text{ mm}$

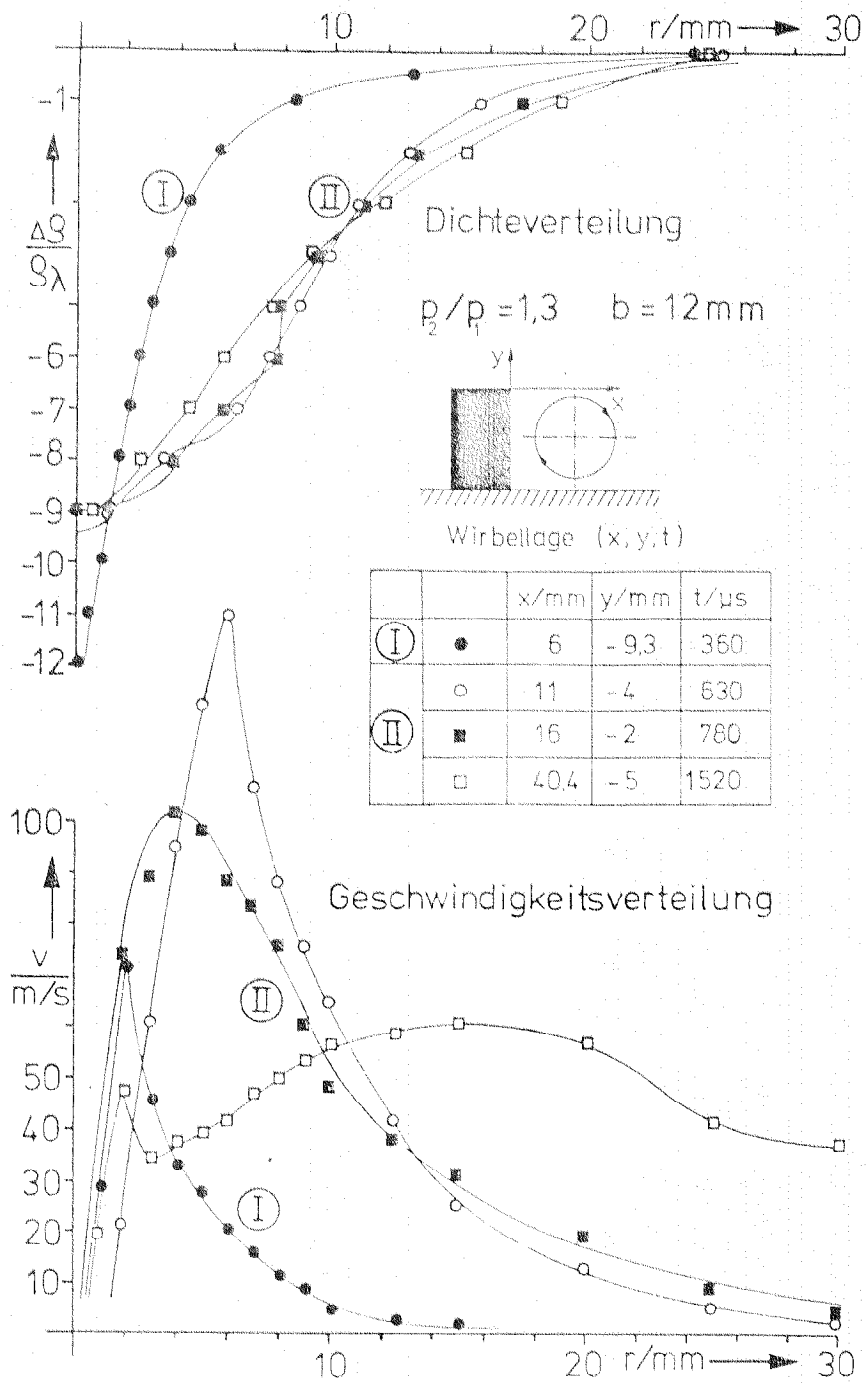


Abb. 21 Dichte- und Geschwindigkeitsprofile des primären (I) und sekundären (II) Hinterkantenwirbels