Mgl.

POPULÄRWISSENSCHAFTLICHE VORTRÄGE

Bericht Nr. 116

- **VON DER NEUEN ROLLE DER MATHEMATIK**
- **VOM NUTZEN DER MATHEMATIK**
- **MATHEMATIK UND COMPUTERSIMULATION: MODELLE, ALGORITHMEN, BILDER**

Helmut Neunzert

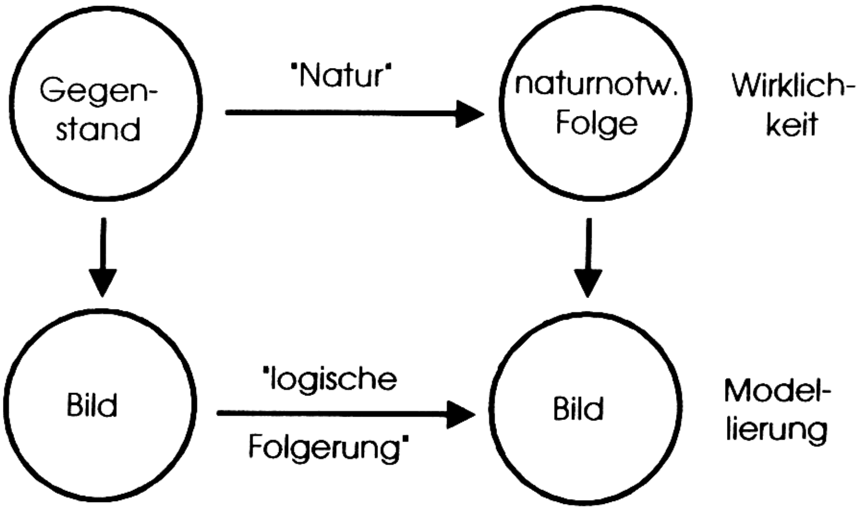
UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Postfach 3049

D -67653 Kaiserslautern

Von der neuen Rolle der Mathematik

Helmut Neunzert
Universität Kaiserslautern, Germany

In den letzten Jahren hat sich eine neue Wahrnehmung der Mathematik herausgebildet, die von einigen bereits als neue Disziplin bewertet wird. Ich glaube vielmehr, daß es sich dabei um ein neues Gewand für die alte Königin der Wissenschaften handelt. Die Mathematik erfährt gegenwärtig eine grundlegende Neubestimmung, ausgelöst durch die zwei Strömungen des "Mathematischen Modellierens" und "Wissenschaftlichen Rechnens" (scientific computing). Man kann sogar den Eindruck gewinnen, es handle sich um Modetrends: Ca. 20% aller Titel in neuen Buchkatalogen enthalten das Wort "Modelling", überall gibt es Vorlesungen über mathematisches Modellieren, Modellierungsseminare und -wochen. Beim Scientific Computing ist es nicht anders - dort schießen Institute, Arbeitskreise und Graduiertenkollegs unter diesem Banner aus dem Boden.
Versuchen wir zunächst eine Definition von "Modellieren": In der neuesten Ausgabe der Brockhaus Enzyklopädie von 1991 findet man unter naturwissenschaftlichem Modell noch die Erklärung "ein Abbild der Natur unter Hervorhebung für wesentlich erachteter Eigenschaften und Außerachtlassen als nebensächlich angesehener Aspekte. Ein Modell in diesem Sinn ist ein Mittel zur Beschreibung der erfahrenen Realität, zur Bildung von Begriffen der Wirklichkeit und Grundlage von Voraussagen über künftiges Verhalten des erfaßten Erfahrungsbereiches".
Deutlicher hat es Heinrich Hertz 1897 in der Einleitung seiner Prinzipien der Mechanik beschrieben: "Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.



Es ist nicht meine Absicht, diese Vorstellung philosophisch zu hinterfragen - sie hat sicher viele Ausformungen bis hin zum neurophysiologisch beeinflußten "radikalen Konstruktivismus" gehabt. Ich will lieber versuchen, die praktischen Konsequenzen einer solchen Sicht herauszuarbeiten.
Hertz stellt dann auch Grundregeln für die Gewinnung seiner Bilder - wir nennen sie heute Modelle - auf:

1. Natürlich müssen die Modelle der grundlegenden Forderung entsprechen, wie sie das Diagramm ausdrückt. Hertz nennt das: Die Modelle müssen "richtig" sein.
2. Die Modelle müssen in sich widerspruchsfrei sein - Hertz nennt dies "logisch zulässig".
3. Modelle sind nicht eindeutig: Verschiedene richtige und logisch zulässige Bilder desselben Gegenstandes sind durchaus möglich.
4. Von mehreren zulässigen und richtigen Bildern wähle man das "ökonomischte", d.h. jenes, das das Geforderte mit dem geringstmöglichen Aufwand leistet.

Sie merken schon, wo jetzt die Mathematik ins Spiel kommt - nämlich dort, wo es um die Realisierung dieser Regeln geht:

Mathematik ist der Rohstoff dieser Modelle,

das, woraus sie gemacht sind. Modelle sind am Ende mathematische Strukturen, Gleichungen etc. Dann ist auch klar, was die Regeln bedeuten: Die Zulässigkeit prüft man durch den mathematischen Beweis der Widerspruchsfreiheit - für mich, der sich meist für Modelle technischer Systeme interessiert, bedeutet dies auch der Nachweis, daß die

Differentialgleichungen, die man da aufgestellt - modelliert - hat, auch wirklich Lösungen haben, daß diese Lösungen eindeutig sind etc. Die Richtigkeit der Modelle ist natürlich keine "innermathematische" Frage - sie kann nur durch den Vergleich von mathematischen Problemlösungen, die man durch Schließen oder Berechnung gefunden hat, mit Beobachtungen der Natur erfolgen. Dies ist das Problem der Modellvalidierung.

Ich will das alles nochmals "mit praktischer Vernunft" formulieren: Mathematisches Modellieren bedeutet, mathematisch formulierte Bilder eines Teilaspekts der Wirklichkeit zum Zwecke der Vorhersagen zu entwickeln. Dazu gehört auch die Prüfung ihrer Zulässigkeit und ihrer Richtigkeit. Letzteres bedeutet, das Modell "auszuwerten", Konsequenzen aus dem Modell zu ziehen, z.B. indem man spezielle Parameterwerte studiert, die solche Vergleiche einfach machen oder indem man "Lösungen berechnet". Und man glaube nicht, es gäbe nur ein, "das naturnahe" Modell: Alle zulässigen und richtigen Modelle sind sinnvoll und man wähle das aus, das am besten und leichtesten auswertbar ist.
Überall sind hier Aufgaben für Mathematiker: Der Rohstoff der Modelle muß entwickelt werden - gerade auch eine Aufgabe der reinen Mathematiker; man muß diesen Rohstoff kennen, um gute Modelle zu entwickeln - je besser der Rohstoff, desto besser die Modelle. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit, die analytische oder algorithmische Auswertung der Modelle, sind genuin mathematische Tätigkeiten. Aber ein Modellierungsprozeß ist ohne Validierung nicht abgeschlossen - auch daran muß sich der Mathematiker beteiligen. Andererseits ist Modellierung sicher keine ausschließlich mathematische, oft nicht mal eine überwiegend mathematische Tätigkeit - wir kommen darauf zurück.

Doch nun zum zweiten Aspekt, der Auswertung der Modelle, dem "scientific computing". Schon der Name deutet auf das wesentliche Hilfmittel dieser Auswertungsmethode hin, den Computer. Es ist klar, daß die moderne Computertechnik auch den Modellierungsboom ausgelöst hat: Ohne Auswertung mittels Computer sind viele Modelle wertlos. Gerade im technischen Bereich, in dem reale dreidimensionale Objekte konstruiert und optimiert werden sollen und man sich deshalb nicht auf einfachere "Erklärungsmodelle" zurückziehen kann, hätte ohne dieses Hilfsmittel das "Computermodell" das klassische Realmodell niemals in einem solchen Umfang verdrängen können. Es gibt eine Initiative der deutschen Automobilindustrie, genannt STEP = Standard for the Exchange of Product Modelling Data, in der es darum geht, das vollständige "Modell" eines Autos, von der Geometrie über Motordaten bis zu Fehlertoleranzen in klar definierter, austauschbarer Weise zu beschreiben. Da sind ungeheure Datenmengen zu strukturieren und zu verarbeiten.

Scientific computing, das Auswerten der Modelle mittels Computer, hat zwei Stoßrichtungen: Die eine, das numerische Auswerten von Differentialgleichungen u.ä. liegt mir nahe und ich will mich daher darauf beschränken; über die andere, das "symbolic computing" und seinen Zusammenhang mit Computeralgebra habe ich keine grundlegenden eigenen Erkenntnisse und will daher lieber darüber schweigen.
Der russische Mathematiker Samarskii nennt die Verbindung von Modellierung und Modellauswertung das "Computerexperiment". Es vollzieht sich bei ihm in den 3 Stufen Modell - Algorithmus - Programm und er glaubt, daß es sich dabei um eine neue wissenschaftliche Methode handelt, die "sowohl den Denkstil eines modernen Wissenschaftlers als auch den Kreis der Probleme bestimmt, welche sich der Forscher zu stellen vermag". "Ich gehe sicherlich nicht fehl mit der Formulierung, daß die angewandte Mathematik die gesamte Nachkriegszeit über mit dem Computerexperiment schwanger gegangen ist, dafür aber ein selten gesundes und intelligentes Kind zur Welt gebracht hat, welches so schnell heranwächst, daß es den Physikern und Biologen, Chemikern und Medizinern, Ingenieuren und Konstrukteuren schon sehr zur Hilfe gereicht. Ehrlich gesagt, ich kann mir keinen Forscher von heute vorstellen, der nicht unmittelbar mit dem Computerexperiment vertraut ist. Er gewöhnt sich an den Gedanken, daß er bei der Schaffung eines mathematischen Modells irgendeiner Erscheinung, das er dann in den Computer eingibt, um es zu testen, zu verbessern und mit der Realität zu vergleichen, auf diese Weise die Natur selbst zu befragen beginnt." (A.A. Samarskii "Computer interviewen die Natur", in "Wissenschaft in der UdSSR", 1987).

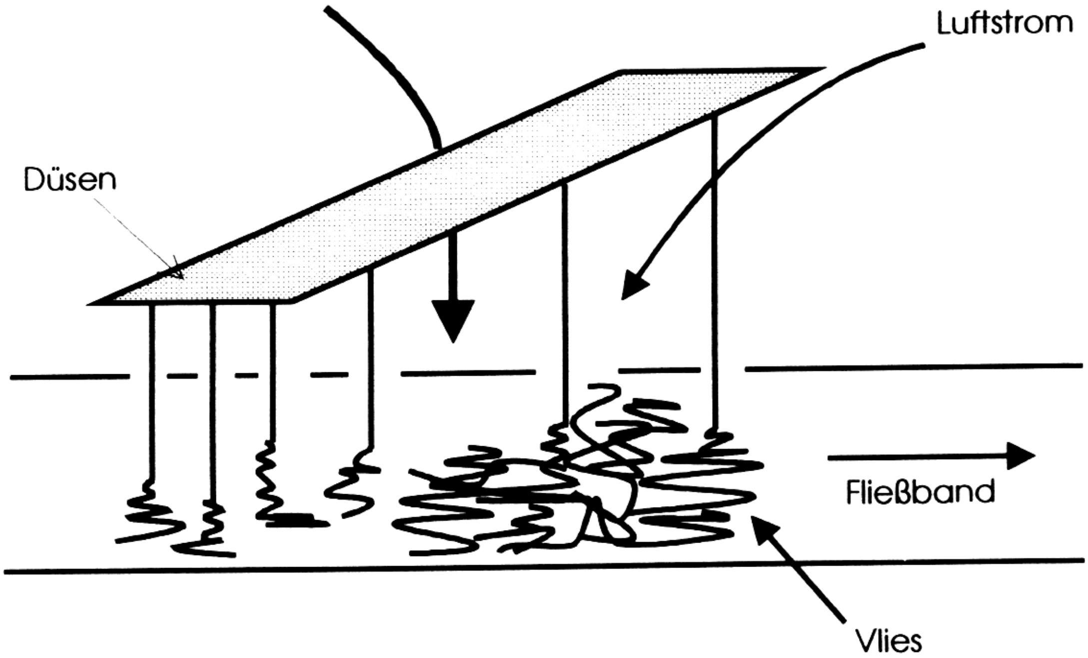
Es ist klar, daß dieses Computerexperiment - eine Computersimulation, die den gesamten Prozeß einschließlich Softwareerstellung umfaßt - einen interdisziplinären Charakter hat. Es erfordert Teamwork, Zusammenarbeit von Physikern und Ingenieuren, Informatikern und Mathematikern: Teamwork bei der Modellierung, weil der Fachwissenschaftler das zu modellierende Problem, der Mathematiker den Modellrohstoff, besser kennt; Teamwork bei der Entwicklung von Algorithmen und ihrer Implementierung, weil der Informatiker das Werkzeug Computer besser kennt; schließlich Teamwork bei der Validierung, um Fehlerquellen aufspüren zu können. Man benötigt "eine Symbiose von Physikern und Ingenieuren, Mathematikern und Informatikern".

Nachdem ich nun in groben Zügen diese neue wissenschaftliche Methode "Computerexperiment" oder "Computersimulation" skizziert habe, werde ich anhand einiger Beispiele aus meiner Praxis bestimmte Gesichtspunkte zu diesem Problem erläutern.

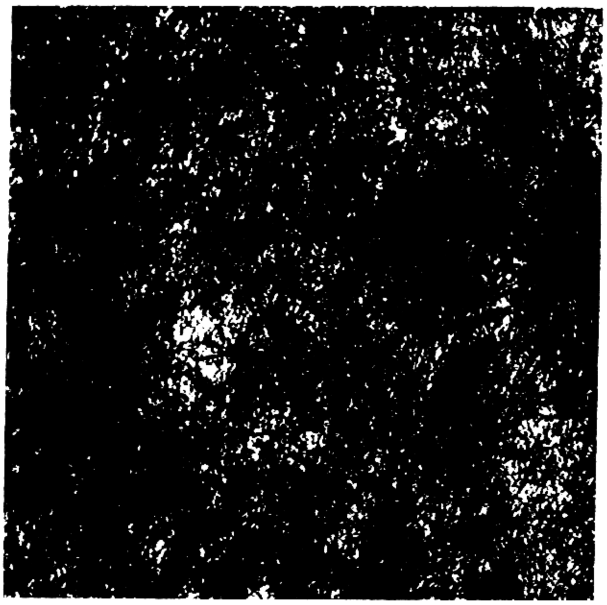
1. Punkt: Dieses Gebiet erfordert eine größere mathematische Breite als andere mathematische Spezialisierungen. Ein Modell ist nicht besser als der Rohstoff Mathematik, aus dem es gemacht ist. Man braucht eher Generalisten als Spezialisten - es genügt sicher nicht, alles über "Finite Elemente" oder "elliptische Differentialgleichungen" zu wissen.

Welch scheinbar "abgewandte" Mathematik manchmal für einfache praktische Aufgaben nützlich wird, zeigt das folgende Beispiel, das einer Kooperation mit einer chemischen Fabrik entstammt: Es geht um die **Qualitätsbeurteilung von Kunststoffgeweben, genauer von "Vliesen"**.

Herstellung von Kunststoffvliesen:



Das Bild deutet den Luftspinnprozeß an, in dem das Vlies hergestellt wird. Da es uns hier nicht um die Simulation dieses Prozesses geht (dies ist eine andere viel schwierigere Aufgabe, an der wir seit längerem arbeiten), will ich den Prozeß nicht genauer beschreiben, sondern nur das Endprodukt betrachten. Unsere Aufgabe war, ein objektives Maß für die Qualität des Vlieses zu finden. Ein gutes Vlies ist ein gleichförmiges, Wolkigkeit und Strähnigkeit vermindern die Qualität.



Qualität muß also mit einem "Abstand von Gleichförmigkeit" verbunden sein - dafür gilt es ein mathematisches Modell zu finden.

Ein Vlies ist durch Grauwerte von Bildelementen, von pixel, beschrieben; diesen pixel, ca. N=6000 kleinen Rasterpunkten pro Vliesmeter, werden also positive Zahlwerte $\mu_1,\ldots,\mu_N$ zugeordnet, die wir uns auch als Absorption von Licht beim Durchgang durch das Vlies vorstellen können. Da uns nur Änderungen, nicht die absolute Lichtstärke interessieren, können wir normieren:

$$\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_N) \in \mathbf{R}^N \ , \ \mu_i \geq 0 \ \text{für } i = 1,\ldots,N \ \text{und} \ \sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1.$$

Absolute Gleichförmigkeit bedeutet dann natürlich $\overset{o}{\mu}_1 = \ldots = \overset{o}{\mu}_N$, d.h. $\overset{o}{\mu}_i = \frac{1}{N}$ für alle i. Es geht also darum, zu gegebenem Vlies μ einen Abstand $d(\mu,\overset{o}{\mu})$ zur Gleichförmigkeit $\overset{o}{\mu} = \left(\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N}\right)$ so zu definieren, daß das, was für die Qualität wesentlich ist, also Wolken und Strähnen, entsprechend gewertet wird.

Da $\mu \subset \mathbb{R}^N$ ein N-dimensionaler Vektor, wird die erste Idee des Mathematikers vielleicht der euklidische Abstand sein:

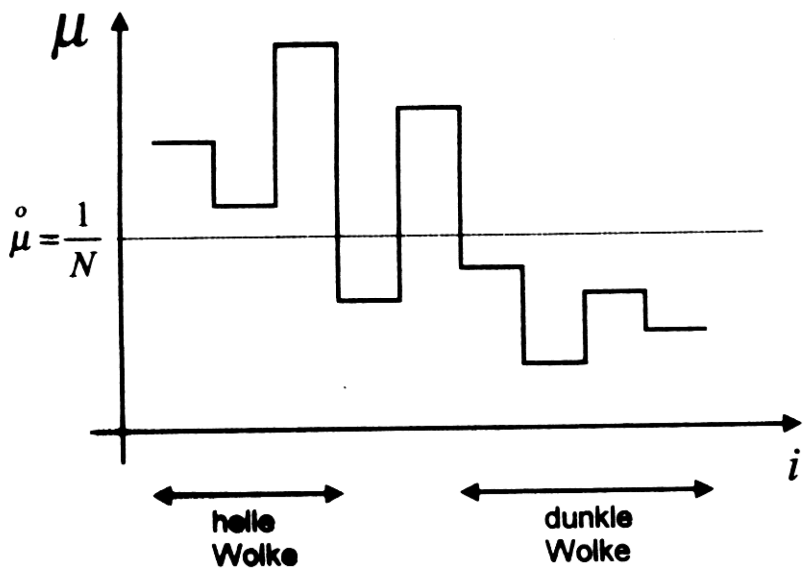
$$d_e(\mu,\overset{o}{\mu}) = \sum_{i=1} \left(\mu_i - \overset{o}{\mu}_i\right)^2.$$

Die erste Idee des (statistischen) Physikers, der Gleichförmigkeit mit Entropie zusammenbringt, wird vielleicht die relative Entropie von μ bzgl. $\overset{o}{\mu}$ sein

$$d_E\left(\mu,\overset{o}{\mu}\right)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i \ln\frac{\mu_i}{\overset{o}{\mu}_i}=\ln N+\sum_{i=1}^{N}\mu_i \ln\mu_i .$$

Aber was in der Thermodynamik erwünscht ist, ist hier in beiden Fällen gleich schlecht: Ordne ich die pixel anders an, so ändert sich dieser Abstand nicht; praktisch heißt das: Ein großes "Loch" (eine Wolke) wiegt so viel wie viele kleine Löcher - und das stimmt nun bei der Qualitätsbewertung sicher nicht.

Basteln wir also unser Modell, indem wir die Größe von Wolken messen. Stellen wir uns der Einfachheit halber ein "eindimensionales" Vlies vor, in dem die pixel nacheinander angeordnet sind. Ein Loch ist dann ein Abschnitt $\mu_\alpha,\mu_{\alpha+1},\dots,\mu_\beta$, wobei $\mu_j-\frac{1}{N}$ für alle $\alpha\le j\le\beta$ positives (helle Wolke) oder negatives Vorzeichen (dunkle Wolke) hat.



Als "Volumen" der Wolke bezeichnen wir dann

$$\left|\sum_{j=a}^{\beta}\left(\mu_i-\overset{o}{\mu}_i\right)\right|$$

und das Volumen der größten Wolke ist dann

$$D(\mu,\overset{o}{\mu})=\max_{1\le a\le\beta\le N}\left|\sum_{j=a}^{\beta}\left(\mu_j-\overset{o}{\mu}_j\right)\right|$$

(Wir können hier über alle α und β maximieren, ohne auf das Vorzeichen von $\mu_j-\overset{o}{\mu}_j$ zu achten - überschreiten wir eine Wolkengrenze, so wird wegen des Vorzeichenwechsels die Summe $\left|\sum_{j=\alpha}^{\beta}\left(\mu_j-\overset{o}{\mu}_j\right)\right|$ automatisch kleiner und wird beim Maximum nicht mehr berücksichtigt.)

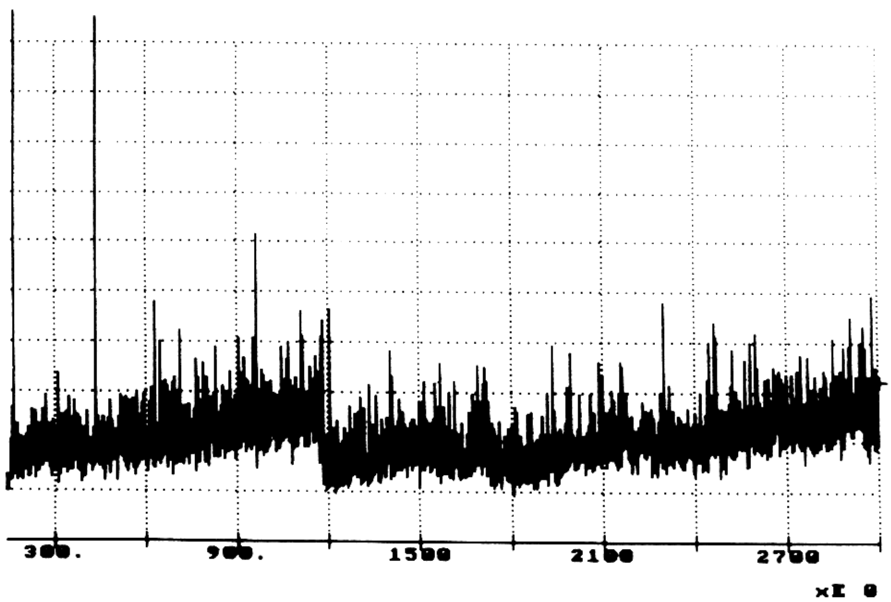
Dieses "Wolkenvolumen" existiert in der Mathematik schon: Unter dem Namen "Diskrepanz" wurde es von Hermann Weyl in einer berühmten Arbeit "Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo 1" eingeführt. Diese Diskrepanz hat eine bewegte Geschichte hinter sich - sie spielt z.B. in dem Buch "Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods" des Wiener Mathematikers Niederreiter in der SIAM-Reihe (1992) die entscheidende Rolle; man kann daraus viele Anregungen gewinnen. Ein Aspekt wurde aber von den Zahlentheoretikern nicht beachtet: Eine schnelle (on-line) Berechnung der Diskrepanz für großes N. Hier half uns ein kombinatorischer Optimierer aus Graz, Herr G. Rote: Mit

$$X_k = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\mu_\ell - \mathring{\mu}_\ell \right)$$

ist

$$D(\mu,\mathring{\mu}) = \max_{1\le i\le j\le N} \left| X_i - X_j \right| = \max_{1\le i,j\le N} (X_i - X_j) = \max_{1\le i\le N} X_i - \min_{1\le j\le N} X_j .$$

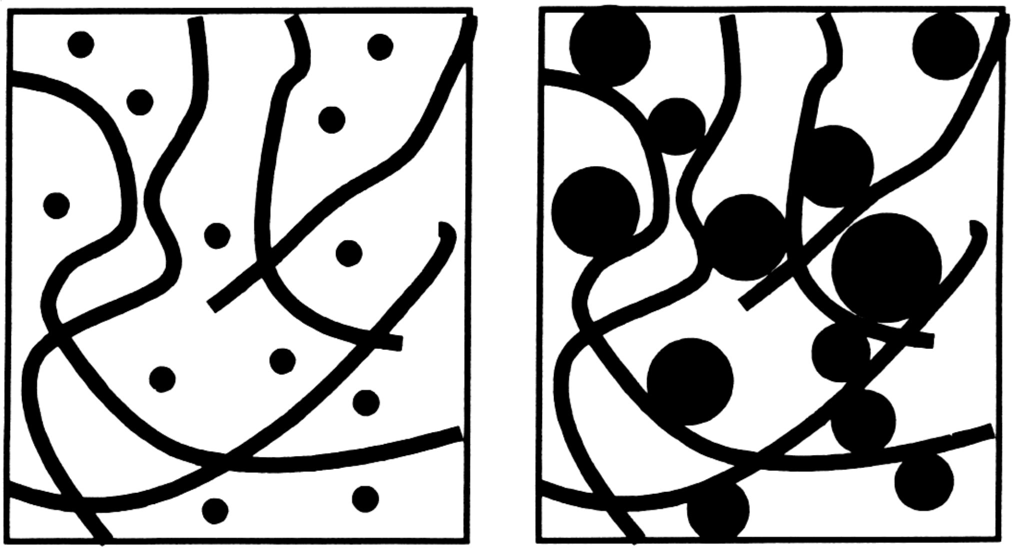
Das ist schnell - eigentlich kaum zu verbessern. Es gibt noch Ideen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, in der Matrizen von Wahrscheinlichkeitsräumen angegeben werden: Spannende Ideen und algorithmische Probleme auch hier, aber keine praktische Verbesserung. Die Wolkigkeit ist gut erfaßt, weniger die Strähnigkeit. Dazu muß man ein Maß für Anisotropie finden und es ist die moderne Theorie der sog. Wavelets, die hier gute Ansatzpunkte vermittelt - Details würden hier zu weit führen. Immerhin: Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, harmonische Analyse - wer hätte das mit Vliesqualität in Verbindung gebracht.



2. Punkt: Es ist Aufgabe der Mathematiker zu erkennen, wo Mathematik wirkungsvoll sein kann. Das heißt, daß neben einer Problemlösungskompetenz vor allem Problemfindungskompetenz verlangt ist. Man braucht einen Blick dafür, welche Probleme sich

sinnvoll mathematisieren lassen, wo Mathematik einen wesentlichen Beitrag zur Lösung praktischer Probleme leisten kann.
Dazu ein Beitrag aus einem Bereich, wo man vielleicht nicht sofort interessante mathematische Modellierungs- und Rechenprobleme vermutet: Bei dem Design von Windeln. Es handelt sich dabei um eine Diplomarbeit von Joachim Weickert, der dafür den ersten Wackerpreis erhielt.

Eine moderne Windel besteht aus Luftfilz und Granulat; der Luftfilz transportiert, speichert aber wenig - das Granulat absorbiert hervorragend, behindert aber den Transport.



trocken feucht

Das Problem ist: Wie muß das Granulat in der Windel verteilt werden, um optimale Eigenschaften der Windel (minimale Oberflächenfeuchtigkeit, minimale Aufnahmezeit) zu erzielen?

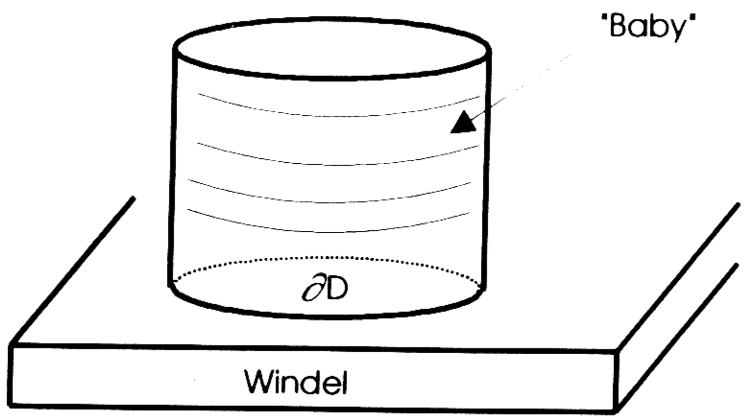
Da muß man sorgfältig modellieren, z.B. die Konzentration der Flüssigkeit in der Windel von jener im Zwischenraum $\tilde{u}$ unterscheiden; da das Zwischenraumvolumen schrumpft, wenn das Granulat aufschwillt, die Konzentration v im Granulat also wächst, ist $\tilde{u} = \lambda(v)u$. Der Transportprozeß in der Windel kann als Diffusion interpretiert werden, zu der dann noch der Flüssigkeitsverlust durch Absorption im Granulat kommt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\lambda(v)D(\tilde{u})\operatorname{grad}\tilde{u}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Der Diffusionskoeffizient hängt natürlich von der Konzentration $\tilde{u}$ ab - Experimente zeigen eine exponentielle Abhängigkeit $D(\tilde{u}) = D_o e^{\beta\tilde{u}}$.
Der Absorption liegen Ausgleichsprozesse zugrunde, für die die Sättigungswerte im Luftfilter u_∞ und im Granulat v_∞ wichtig sind; v_∞ hängt dabei von der Verteilung des Granulats in der Windel ab - dort geht das "Windeldesign" ein

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(v_\infty u - u_\infty v\right).$$

Hinzu kommen Anfangs- und Randbedingungen. Für unsere Zwecke sieht das etwa so aus:

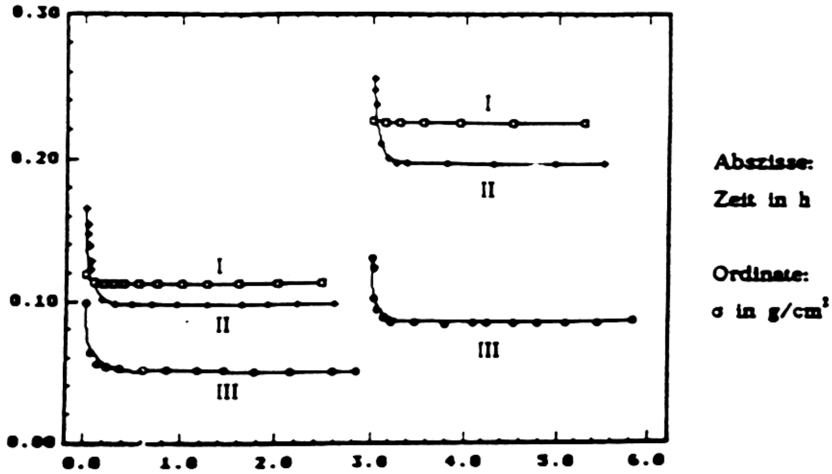


$$\tilde{u} / \partial D = \rho_{\text{Flüssigkeit}} \text{ für } 0 \le t \le T, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0$$ auf der übrigen Windeloberfläche.

Abstraktion heißt ja: Absehen von dem für das gestellte Problem Unwesentliche; da mag ein Baby schon zum Flüssigkeitszylinder verkümmern.

Das Ganze ist eine "sehr" nichtlineare, parabolische Differentialgleichung, gekoppelt mit einer einfachen, gewöhnlichen. Ein durchaus modernes Forschungsgebiet der Mathematik, theoretisch fast zu schwierig und für das wissenschaftliche Rechnen eine echte Herausforderung (vgl. J. Weickert: "A Mathematical Model for Diffusion and Exchange Phenomena in Ultra Napkins", Berichte der AG Technomathematik Nr. 72, 1992). Dabei wurde auch ein neues Windelkonzept entwickelt, eine Art Sandwich-Bauweise mit absorbierender Oberschicht und einem Drainagekanal in der Mitte. Der Neuvorschlag hätte, so zeigt die Simulation, erheblich geringere Oberflächenfeuchtigkeit zur Folge (auch bei wiederholter Belastung nach ca. 3 Stunden) - noch traut die betroffene Industrie der Mathematik nicht so recht!

zeitlicher Verlauf der Oberflächenfeuchtigkeit



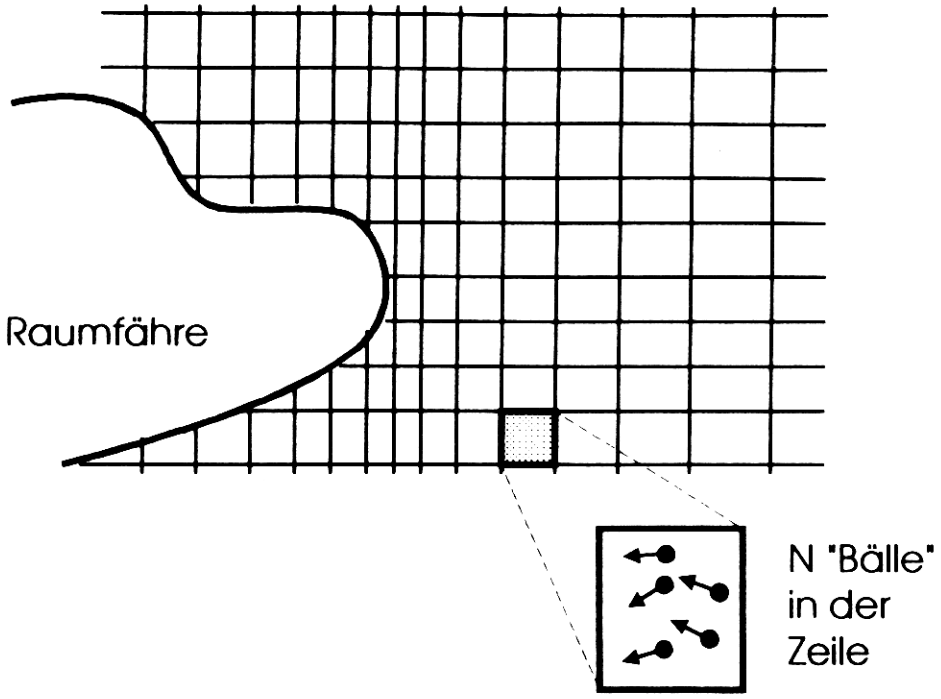
<u>3. Punkt:</u> Die Hertzschen Regeln besagen, daß Modelle nicht eindeutig sind und man unter allen möglichen das am besten auszuwertende wählen soll. Dabei muß man beim Modellieren nicht genau der Natur folgen: Die richtige Vorhersage der interessierenden Daten und die leichte Auswertbarkeit bestimmen die Wahl. Das folgende Beispiel stammt aus meinem eigentlichen Spezialgebiet, der Simulation des Verhaltens eines Gases, eines Plasmas oder eines Sternhaufens oder, wie Sie das formulierten, der "Entwicklung effizienter Verfahren zur Lösung von Problemen aus der kinetischen Gastheorie". Unser Hauptanwendungsgebiet ist (besser: war) die Umströmung der europäischen Raumfähre HERMES und wird in Zukunft auch die Halbleitertechnik sein. Dabei interessiert man sich weniger für das Schicksal der einzelnen Moleküle oder Elektronen, sondern für makroskopische Größen wie Druck, Strom etc. Man kann daher im Modell das mikroskopische Verhalten ändern, rechnerisch vereinfachen - wenn man dafür sorgt, daß dadurch diese makroskopischen Größen nicht verändert werden. Die Regel lautet also: Vereinfache das "Spiel der Natur" so weit wie irgend möglich, wenn sich dadurch die zu vorhersagenden Größen nicht verändern.
Es ist mir nicht möglich, Ihnen das Problem vollständig darzustellen - dies wäre ein eigener Vortrag, der zudem ziemlich technisch und nur für Spezialisten geeignet wäre. Ich will Ihnen aber einen Veränderungsaspekt erkären, die <u>Modellierung des Stoßprozesses in verdünnten Gasen</u>.

In Höhen um 100 km kann man sich die Luftströmung um eine Raumfähre vorstellen wie ein gigantisches Pool-Billardspiel mit etwa 10^{16} Bällen pro m^3. Selbst wenn man sich dabei auf eine Stichprobe mit nur 10^6 Bällen beschränkte, ist so ein Billardspiel im Rechner nicht nachzuvollziehen: Man müßte Kollision um Kollision berechnen und dabei immer das gesamte Ensemble im Auge behalten. Solche Versuche gab es durch den amerikanischen Physiker Ulam, der damit um 1940 begann; aber trotz aller

Verbesserungen der Rechner ist man heute noch weit von zuverlässigen Aussagen entfernt. Warum besteht man aber auch darauf, das Billardspiel nachzuspielen? Man kann ja ein anderes Spiel mit Kugeln erfinden, das dieselben Effekte liefert, aber auf dem Rechner simulierbar ist. Dazu verändern wir den Stoßprozeß: Zwar behalten wir die Idee eines Stoßpaares bei (d.h. der Wechselwirkung zweier Teilchen, wodurch sich deren Geschwindigkeit plötzlich ändert); wir geben aber die Idee des Stoßes als Begegnung im Ort auf.

Ich will diesen künstlichen Stoßprozeß in 4 Schritten beschreiben:

a) Wir betrachten nur räumlich benachbarte Bälle; dazu teilen wir den Raum in Zellen ein und betrachten - für jede Zelle gesondert - die N Bälle dieser Zelle:

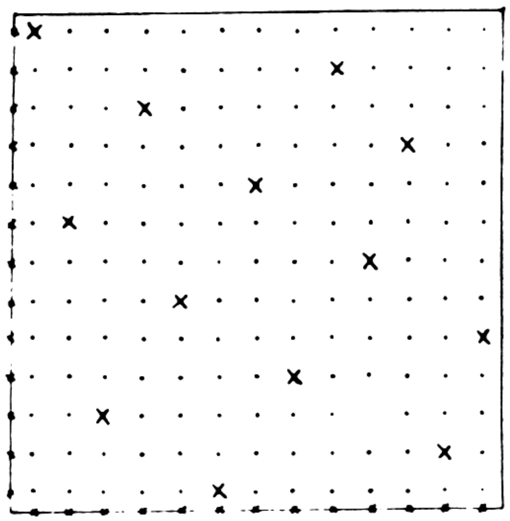


b) Wir vergessen die Positionen der Bälle in der Zelle und beachten nur ihre Geschwindigkeiten.

c) N Teilchen können N^2 mögliche Stoßpaare bilden; aus diesen sind N Paare <u>geeignet</u> auszuwählen. In diesem Wort "geeignet" steckt die ganze Kunst; es bedeutet: Nach einer zu ermittelnden Regel, die garantiert, daß die makroskopischen Größen denen des Naturbillards entsprechen.

d) Die Bälle eines Stoßpaares erhalten - jetzt wieder ganz natürlich - neue Geschwindigkeiten, mit denen sie sich fortbewegen.

Wie gesagt: Entscheidend ist jene Regel, die wir aus der sogenannten Boltzmanngleichung mathematisch herleiten müssen. Dabei entstehen Fragestellungen, wie ich sie unter starken Vereinfachungen in dem folgenden Bild darstelle:



Aus den N^2 Punkten des Quadrats sind N so auszuwählen (wir kennzeichnen eine solche Auswahl durch Kreuze), daß diese im Quadrat möglichst gleichförmig verteilt sind. Natürlich bedarf es hier einiger strenger Definitionen für Gleichverteilung etc., die aus der Zahlentheorie stammen. Und so gibt es z.B. eine recht gute Lösung dieser Gleichverteilungsaufgabe, die auf Fibonacci und sein Liber abaci von 1202 zurückgeht. Dieser hatte die Fibonacci-Folge (α_k) mit $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \alpha_{k-1}, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ eingeführt; ist N gleich einem solchen α_k (z.B. wie im Bild N=13), so ist $(1,\ell_1),\ldots,(N,\ell_N)$ mit $\ell_i = (i-1)\alpha_{k-1}$ fast schon eine perfekte Lösung; allerdings würde so ℓ_i größer als N werden und wir dürfen nur den Rest nach Teilung durch N benutzen. Genauer: $\ell_i = (i-1)\alpha_{k-1} \bmod \alpha_k + 1$. Genau diese Kreuze sind in dem Bild ausgewählt. Es gibt bessere, ebenfalls von Zahlentheoretikern entwickelte Methoden, die unsere künstlichen Stoßprozesse steuern.

Damit lassen sich bis zu 3 Millionen Computerbälle handhaben und die Simulation liegt bei Fehlerraten von unter 1%.

Es gibt Untersuchungen, die generell zeigen, daß durch Verbesserung der Algorithmen mehr Rechenzeit gespart wurde als durch die Verbesserung der Rechner; aber nur beides zusammen ermöglicht uns heute eine präzise Simulation unglaublich komplexer Vorgänge in realistischen Geometrien.

Schlußbemerkung:

Man erweist der Wissenschaft und der Mathematik keinen guten Dienst indem man dem Computerexperiment den Charakter einer eigenständigen Disziplin verleiht. Wichtig ist vielmehr, daß mathematisches Modellieren und wissenschaftliches Rechnen der Mathematik neue Aufgabenfelder erschließen und mit dieser neuen Rolle ein gewandeltes

Selbstverständnis verbunden ist. Vielleicht ist das Ganze eine Art "Pfingstbewegung": Die verschiedenen Fachsprachen werden wieder füreinander verständlich - man hört aufeinander und versteht sich auch. Die Disziplinen verlassen ihre babylonischen Elfenbeintürme und breiten ihre Probleme und Ideen voreinander aus.

Ich glaube mit ihm, daß eine solche neue Rolle der Mathematik und der Mathematiker gut für die Gesellschaft, die Wissenschaft und vor allem für die Mathematik selbst wäre.

Und sie ist - so sagte es doch schon Lichtenberg - eine gar herrliche Wissenschaft.

Vom Nutzen der Mathematik

Helmut Neunzert
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße
D-67663 Kaiserslautern

Es ist gewiß sinnvoll, wenn sich eine Wissenschaft gelegentlich über ihren Nutzen Gedanken macht.
Natürlich wird man sofort: Nutzen wofür oder für wen? fragen und die Mathematik, um die es hier geht, erlaubt darauf eine Vielfalt von Antworten: "Mathematik, ein Kulturgut, das Weltsicht und Produktionsweise verändert" - der Titel eines Eröffnungsvortrags des Forschungsministers Krüger enthält in konzentrierter Form viele Aspekte. Mathematiker sind Kulturarbeiter, sie erzeugen ein Kulturgut, Mathematik ist von Nutzen für die Kultur. Das ist ohne Zweifel richtig, obwohl die Öffentlichkeit das nicht immer so sieht - aber es ist nicht mein Thema.

"Vos débats portent sur une domaine essentielle de la recherche, qui command le progrès scientifique et technique de notre pays et sur une discipline centrale de notre système d'enseignement" schrieb Mitterand an den französischen Mathematikerkongress "Mathématiques à venir" und spricht damit zwei weitere Aspekte an: den Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften und den Nutzen der Mathematik in der Erziehung, der Bildung des Geistes. Beide sind von größter Wichtigkeit, aber es gibt sicher Berufenere, darüber zu sprechen als mich.

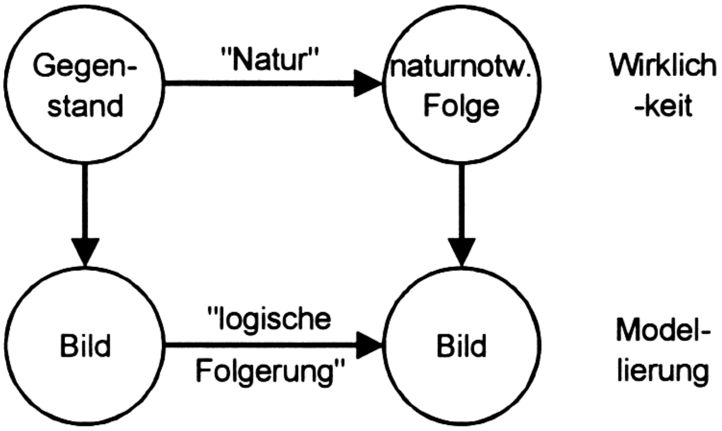
Was bleibt - und dies ist mein Thema - ist der ökonomische Nutzen der Mathematik. Natürlich: Verglichen mit jenen anderen Nutzen ist dies irgendwie der banalste, er scheint zweitrangig. Andererseits bestimmt er das öffentliche Prestige der Mathematik, die Berufschancen unserer Absolventen (und es sind z.Zt. über 25.000 Mathematikstudenten insgesamt in deutschen Hochschulen), die öffentliche Förderung unserer Wissenschaft - er bestimmt sie zwar nicht allein (dazu sind sich die Entscheidungsträger der anderen Werte der Mathematik doch zu bewußt), aber er bestimmt sie sicher mit. Deshalb ist dieser Nutzen zwar kein besonders oft oder gern diskutiertes, aber doch eben ein Thema - und es ist mein Thema, da ich mich seit 15 Jahren um Kontakte zu jenen bemühe, die den wirtschaftlichen Nutzen schaffen: den Anwendern der Mathematik in der Industrie.

Neben meinen eigenen Erfahrungen basieren meine Bemerkungen zu diesem Thema vor allem auf gezielte Gespräche und Korrespondenzen, die ich im letzten halben Jahr mit verschiedenen Partnern geführt habe, z.B. mit den renommierten Fachkollegen Enrico Bombieri sowie J.L. und P.L. Lions und den Forschungschefs von BASF, Daimler-Benz und Siemens. Und sie basiert auf einem noch unveröffentlichten Bericht der SIAM über ihr Projekt "Mathematics in Industry", das die erste Auswertung von über 40 Interviews mit Mathematikern in der amerikanischen Industrie enthält.

Versuchen wir zunächst eine direkte Antwort auf die Frage, ob der ökonomische Nutzen der Mathematik eher groß oder klein ist. Da beginnt schon die Irritation: Fragt man Leute auf der Straße nach den nützlichen Wissenschaften, so wird Mathematik selten genannt; fragt man die Forschungschefs deutscher Industrieunternehmen, so ist Mathematik von größter Bedeutung. So weist z.B. Prof. Danielmeyer von Siemens lapidar auf die überproportionale Beteiligung von Mathematikern am Transfer-Preis zwischen Wissenschaft und Industrie der Karl-Heinz Beckurts-Stiftung hin und der Forschungschef von Daimler-Benz, Prof. H. Weule, schreibt: "Die heute in der industriellen Forschung und Entwicklung geforderten Höchstleistungen können nur mit zunehmendem Einsatz mathematischer Methoden erfüllt werden." Und er gibt auch gleich einen Grund für diese sicher gestiegene Bedeutung der Mathematik an: "Ein Beispiel hierfür sind Simulationsmethoden, mit denen bei der Entwicklung komplexer Produkte der notwendige Versuchs- und Konstruktionsaufwand deutlich reduziert werden kann." Natürlich: Mathematik ist der Kern jeder Computersimulation; Computersimulationen aber ersetzen in zunehmendem Maße die Experimente, die man zur Entwicklung und Kontrolle technischer Systeme benötigt. J.L. Lions sagte das auf einem Industriemathematik-Kongress in Neapel im Frühjahr '94 sehr pointiert: "Der Nutzen der Mathematik ist es, dabei zu helfen, Dinge besser, schneller, billiger und sicherer zu machen, und zwar

durch Simulation komplizierter Phänomene,
durch Visualisierung,
durch Reduktion der Datenfluten."

Computersimulation besteht aus Modellbildung und wissenschaftlichem Rechnen. Modellieren ist dabei nicht, wie die Brockhaus-Enzyklopädie von '91 vorschlägt, "das plastische Formen in Ton, Wachs und Gips u.a. mit der Hand und Zuhilfenahme von Modellierhölzern und Drahtschleifen", sondern eher dieses (ich zitiere hier am liebsten Heinrich Hertz in der Einleitung zu seiner Mechanik 1897): Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie uns von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände."

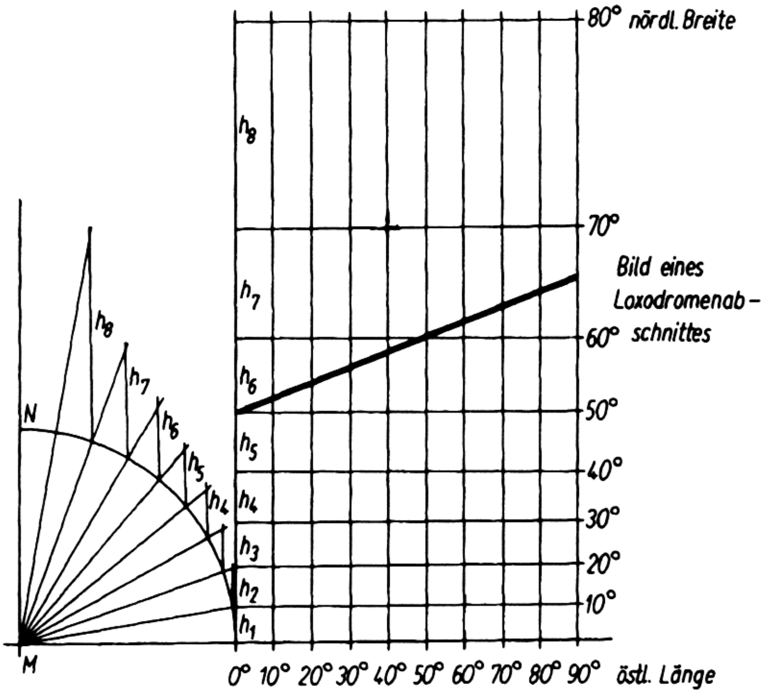


Heinrich Hertz' Prinzipien der Mechanik

Und auch dies ist schon bei Hertz klar: Mathematik ist der Rohstoff der Modelle, das, woraus sie gemacht sind. Modelle sind am Ende Relationen, mathematische Strukturen, z.B. Gleichungen etc. Sie müssen - nochmals nach Hertz - "logisch zulässig", d.h. widerspruchsfrei sein, die mathematischen Probleme müssen gutgestellt sein etc. Die "Richtigkeit" der Modelle prüft man, indem man das Diagramm überprüft: Man muß die Lösungen, die man aus dem Modell durch Berechnen oder Schließen gewonnen hat, mit den Beobachtungen vergleichen - man muß das Modell validieren. Je besser der Rohstoff, desto besser die Modelle - und je effizienter die Auswertungsmethoden, die Algorithmen, desto komplexer können die Modelle werden. Aufgaben für Mathematiker überall: Gute Modelle benötigen einen reichhaltigen Vorrat an Mathematik, der mit zunehmenden technischen Anforderungen steigen muß und oft weit über das normale Repertoire der "Ingenieurmathematik" hinausgeht.
Mathematiker schaffen oder "fördern" diesen Rohstoff; er ist in diesem Lande in exzellenter Qualität vorhanden. Und sie helfen dabei, ihn zu verarbeiten, das Modell auszuwerten: Dies ist das zweite Element der Computersimulation, das scientific computing. Natürlich wurde Modellieren, das es schon ein paar tausend Jahre gibt, besonders deshalb zur wissenschaftlichen Resource, weil ihm heute ein mächtiges Hilfsmittel, der Computer, erwachsen ist. Gerade im technischen Bereich, in dem komplexe 3-dimensionale Objekte konstruiert, optimiert und visualisiert werden müssen und man sich nicht auf einfachere Erklärungsmodelle zurückziehen kann, hätte ohne Hilfsmittel Computer das mathematische Modell niemals eine solche Bedeutung erzielen können.

A.A. Samarskii spricht vom Computerexperiment, das sich in den drei Stufen Modell - Algorithmus - Programm (MAP!) vollzieht und glaubt, daß es sich dabei um eine neue wissenschaftliche Methode handelt, die "sowohl den Denkstil als auch den Kreis der Probleme bestimmt, welche sich der Forscher zu stellen vermag".
Es ist klar, daß dieses Computerexperiment einen interdisziplinären Charakter hat. Es erfordert Teamwork bei der Modellierung, weil der Fachwissenschaftler das zu modellierende Problem, der Mathematiker den Modellrohstoff, besser kennt; Teamwork bei der Entwicklung von Algorithmen und ihrer Implementierung, weil der Informatiker das Werkzeug Computer besser kennt, schließlich Teamwork bei der Validierung, um Fehlerquellen aufspüren zu können. Man benötigt "eine Symbiose von Physikern und Ingenieuren, Mathematikern und Informatikern".
Mathematik als zu bearbeitender Rohstoff mit dem Endprodukt einer zuverlässigen Simulationssoftware - Mathematik von unzweifelhaftem ökonomischen Nutzen! Bevor ich dieses Bild einer heilen Welt in Frage stelle, will ich versuchen, die Grundthese mit Beispielen zu illustrieren. Bei der Auswahl habe ich lange geschwankt - aber ich kann der Versuchung nicht widerstehen, mit Mercator, dessen 400. Todestag wir in diesem Jahr begehen und dessen Namen jene Universität ziert, die die diesjährige DMV-Tagung sehr erfolgreich organisierte, anzufangen.

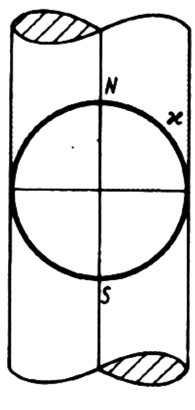
Gesucht war in jener Zeit ein ebenes Bild der Erdoberfläche, d.h. eine Karte, aus der man die für die Anwender wichtigen Schlüsse hinreichend genau ziehen kann. Die Anwender waren Seefahrer, diese fuhren im 16. Jhdt. hauptsächlich auf sogenannten Loxodromenkurven, Kurven, deren Tangenten mit der Nord-Süd-Richtung immer einen konstanten Winkel einschließen. Die Wunschvorstellung der Seeleute war wohl, solche Loxodromen auf der Karte als Gerade darstellen zu können.

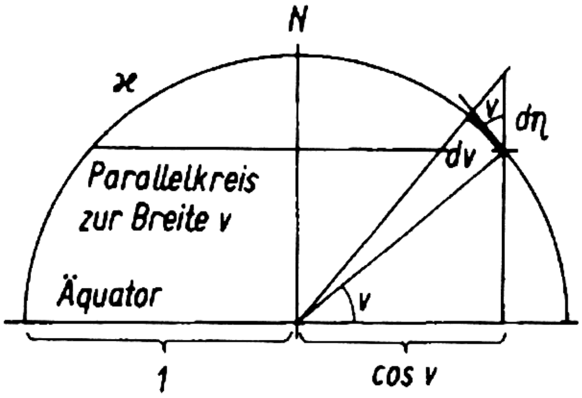


Die Darstellung von Loxodromen

Da damals sogenannte Zylinderentwürfe vorherrschten, bei denen Meridiane in parallele Geraden abgebildet werden, muß man, um dies zu erreichen, von der Abbildung Winkeltreue verlangen.

Sogenannte echte Zylinderentwürfe sind Abbildungen der Sphäre auf einen Zylinder,

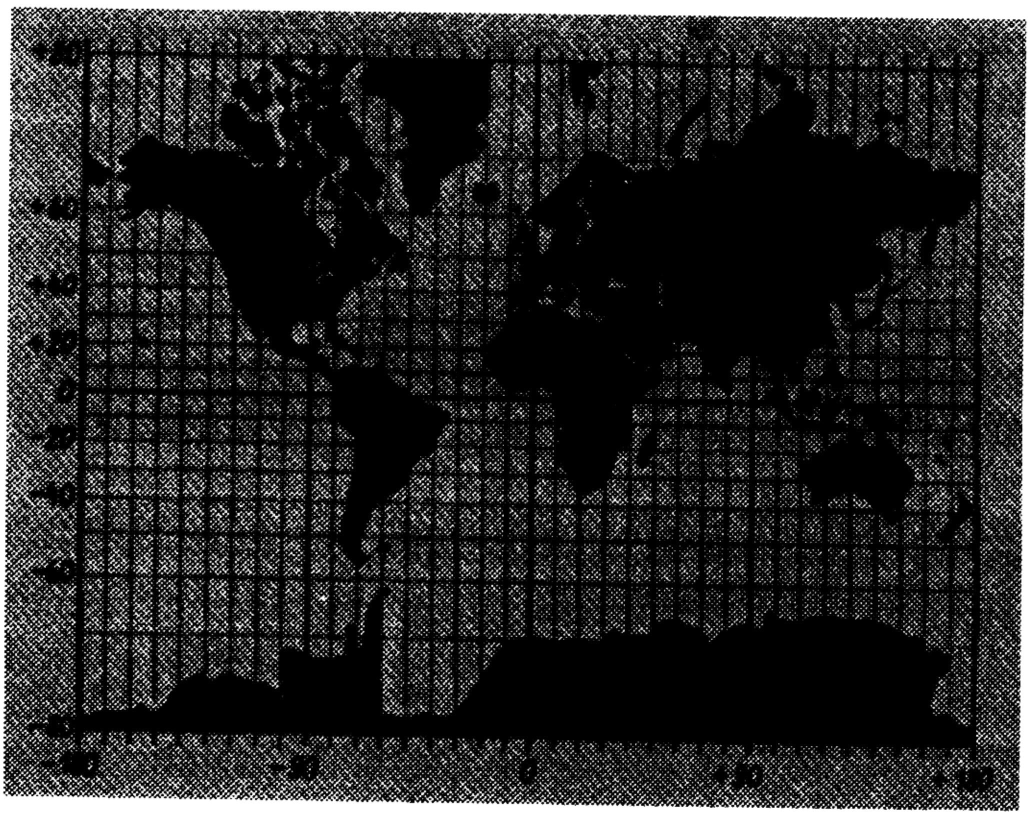




$$\boxed{\frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{\cos v}}$$

Mercator's Zylinderentwurf (um 1570)

wobei Meridiane bzw. Breitenkreise in orthogonale Scharen jeweils paralleler Geraden abgebildet werden. Für Mercator stellte sich das Problem, wie man die Abbildungen der Breitenkreise vornehmen muß, um Winkeltreue zu erzielen. (Das Bild ist aus E. Schröder: Kartenentwürfe der Erde, Teubner Leipzig 1988.) Dabei ist $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cos v}$ die Mercatorgrundformel, die Integration bewerkstelligte er schrittweise, ohne natürlich Differentiation oder Integration zu kennen. Es ging auch ohne - mühseliger und nicht besonders genau. Immerhin löste Mercator das Problem, wie eine Karte von 1569 beweist.



Karte nach Mercator's Zylinderentwurf

Und er löste sie, mit recht primitiver Mathematik, aber viel Intuition, 100 Jahre bevor die "Schulmathematik" sie streng formulierte. Manchmal ist es auch umgekehrt: Der Rohstoff liegt Jahrzehnte in Schubladen, ehe er dann meist von Nichtmathematikern gefördert und genutzt wird.

Ich erzähle diese Mercatorgeschichte aber nicht nur, um zu beweisen, daß Mathematik schon vor 400 Jahren nützlich war, sondern auch, weil mich Industriemathematiker der Thyssen Stahl AG darauf aufmerksam machten, daß sie bei der Vermessung der Steindicken von Stahlkonvertern während des Gebrauchs auf ähnliche Probleme stießen wie seinerzeit Mercator. Dabei müssen aus Laser-Abstandsmessungen Landkarten der Konverterinnenwand erstellt werden - jetzt natürlich on-line und mit hoher Präzision.

Das Beispiel - in seinen beiden Versionen - demonstriert die Nützlichkeit der Mathematik, ihre Fähigkeit, in technisch ganz verschiedenen Aufgabenstellungen gemeinsame Strukturen zu erkennen und so Innovation durch Ideentransfer zu bewirken. Es zeigt weniger, inwiefern die Qualität des Rohstoffs die Qualität der Modelle beeinflußt. Um dies zu verdeutlichen, wähle ich noch ein Beispiel aus unserer eigenen Praxis, das eher den Bereich der computer aided quality control (CAQ) zuzurechnen ist und das ich in seinem ersten Teil schon mehrfach beschrieben habe. Genauer: Es geht um die Beurteilung von Kunststoffgeweben, von sogenannten "Vliesen". Ein Vlies ist ein unregelmäßiges Gewebe von miteinander verklebten Kunst-stoffäden. Die Qualität des Vlieses wird durch seine Gleichförmigkeit bestimmt; Wolken und Strähnen vermindern die Qualität.
Das praktische Problem, das uns gestellt wurde, bestand darin, ein objektives Maß für die Vliesqualität zu finden. In einem ersten Schritt - erfolgreiche Industriekooperationen haben immer mehrere Schritte - ging es deshalb darum, einen Abstand zur Gleichförmigkeit zu finden, der die Qualitätsmerkmale modelliert.
Ein Vlies ist durch Grauwerte von Bildelementen, von pixel, beschrieben; diesen pixel, ca. N=6000 kleinen Rasterpunkten pro Vliesmeter, werden also positive Zahlwerte $\mu_1,\ldots,\mu_N$ zugeordnet, die wir uns auch als Absorption von Licht beim Durchgang durch das Vlies vorstellen können. Da uns nur Änderungen, nicht die absolute Lichtstärke interessieren, können wir normieren:

$$\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \mu_i \geq 0 \text{ für } i = 1,\ldots,N \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1$$

Absolute Gleichförmigkeit bedeutet dann natürlich $\mathring{\mu}_1 = \ldots = \mathring{\mu}_N$, d.h. $\mathring{\mu}_i = \frac{1}{N}$ für alle i.

Es geht also darum, zu gegebenem Vlies μ einen Abstand $d(\mu, \mathring{\mu})$ zur Gleichförmigkeit $\mathring{\mu} = \left(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right)$ so zu definieren, daß das, was für die Qualität wesentlich ist, also Wolken und Strähnen, entsprechend gewertet wird.

Da $\mu \in \mathbb{R}^N$ ein N-dimensionaler Vektor ist, wird die erste Idee des Mathematikers vielleicht der euklidische Abstand sein:

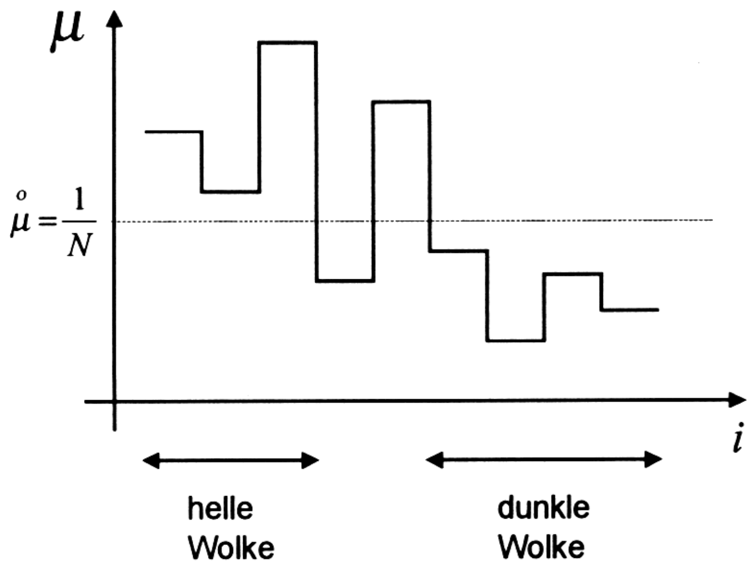
$$d_e\left(\mu, \mathring{\mu}\right) = \sum_{i=1}\left(\mu_i - \mathring{\mu}\right)^2$$

Die erste Idee des (statistischen) Physikers, der Gleichförmigkeit mit Entropie zusammenbringt, wird vielleicht die relative Entropie von μ bzgl. $\mathring{\mu}$ sein:

$$d_E\left(\mu, \mathring{\mu}\right) = \sum_{i=1}^{N}\mu_i \ln N + \sum_{i=1}^{N}\mu_i \ln \mu_i$$

Aber was in der Thermodynamik erwünscht ist, ist hier in beiden Fällen gleich schlecht: Ordne ich die pixel anders an, so ändert sich dieser Abstand nicht; praktisch heißt das: Ein großes "Loch" (eine Wolke) wiegt so viel wie viele kleine Löcher - und das stimmt nun bei der Qualitätsbewertung sicher nicht.

Basteln wir also unser Modell, indem wir die Größe von Wolken messen. Stellen wir uns der Einfachheit halber ein "eindimensionales" Vlies vor, in dem die pixel nacheinander angeordnet sind. Ein Loch ist dann ein Abschnitt $\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}, \ldots, \mu_\beta$, wobei $\mu_j - \frac{1}{N}$ für alle $\alpha \leq j \leq \beta$ positives (helle Wolke) oder negatives Vorzeichen (dunkle Wolke) hat.



als "Volumen" der Wolke bezeichnen wir dann

$$\left|\sum_{j=a}^{\beta}\left(\mu_i - \mathring{\mu}_i\right)\right|$$

und das Volumen der größten Wolke ist dann

$$D\left(\mu,\mathring{\mu}\right) = \max_{1\leq\alpha\leq\beta\leq N}\left|\sum_{j=a}^{\beta}\left(\mu_j - \mathring{\mu}_j\right)\right|.$$

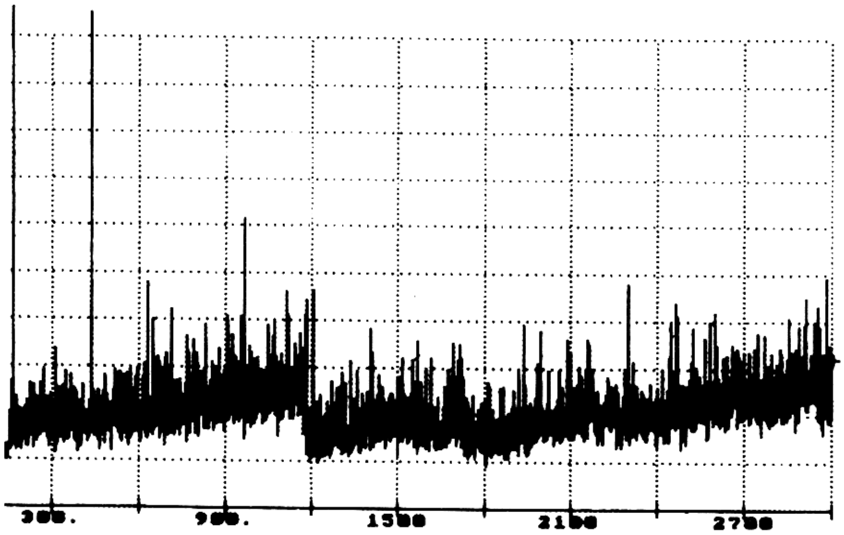
(Wir können hier über alle α und β maximieren, ohne auf das Vorzeichen von $\mu_j - \mathring{\mu}_j$ zu achten - überschreiten wir eine Wolkengrenze, so wird wegen des Vorzeichenwechsels die Summe $\left|\sum_{j=a}^{\beta}\left(\mu_j - \mathring{\mu}_j\right)\right|$ automatisch kleiner und beim Maximum nicht mehr berücksichtigt.) Dieses "Wolkenvolumen" existiert in der Mathematik schon: Unter dem Namen "Diskrepanz" wurde es von Hermann Weyl in einer berühmten Arbeit "Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo 1" eingeführt. Diese Diskrepanz hat eine bewegte Geschichte hinter sich - sie spielt z.B. in dem Buch "Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods" des Wiener Mathematikers Niederreiter in der SIAM-Reihe (1992) die entscheidende Rolle; man kann daraus viele Anregungen gewinnen. Ein Aspekt wurde aber von den Zahlentheoretikern nicht beachtet: Eine schnelle (on-line) Berechnung der Diskrepanz für großes N. Eine einfache, aber für uns nicht so einfach zu findende Lösung ist (G. Rote): Mit

$$X_k = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\mu_\ell - \mathring{\mu}_\ell \right)$$

ist

$$D\left(\mu, \mathring{\mu}\right) = \max_{1 \le i,j \le N} \left(X_i - X_j \right) = \max_{1 \le i \le N} X_i - \min_{1 \le j \le N} X_j .$$

Dies funktioniert ausgezeichnet - auf dem Bildschirm der Firma erschien, über der Zeit abgetragen, die Diskrepanz der untersuchten Vliesmeter - mit steigender Diskrepanz verschlechtert sich die Qualität, so daß nach ca. 1200 m eine Reinigung der Anlage vorgenommen wird.



Diskrepanz als zeitlich veränderliche Qualität des Vlieses

Man kann natürlich noch andere Abstände in Betracht ziehen; z.B. ergeben sich solche aus den verschiedenen Metriken von Wahrscheinlichkeitsräumen. Sie sind z.T. auch brauchbar, stellen wiederum numerische Probleme, verbessern aber letztendlich das Modell nicht.

Doch wie gesagt: Ein gelöstes Problem in der Industriemathematik ist selten ganz gelöst; die Wünsche steigen mit dem Erreichten. "Können wir nicht Wolkigkeit und Strähnigkeit getrennt bewerten?" Unser Abstand berücksichtigte eher die Wolken, Strähnigkeit war nicht genügend erfaßt.

Um dies zu verbessern, versuchten wir, diese Strähnen durch geeignete Bildverarbeitungsprozesse besser herauszuarbeiten.

In diesem Bereich gibt es eine Reihe ganz neuer mathematischer Ideen, die noch keinen Eingang in die "normale" Bildverarbeitung gefunden haben - ein noch nicht genutzter Rohstoff, der aber sicher nützlich ist. Ich will eine Idee hier kurz beschreiben, die in ihren Grundzügen von P.L. Lions und J.M. Morel in Paris Dauphine entwickelt wurde; in einer Doktorarbeit von J. Weickert in Kaiserslautern wird diese Idee variiert, auf das vorliegende Problem angewandt und numerisch realisiert. Es geht um nichtlineare Diffusionsfilter. Wir nutzen dazu die kontinuierliche Beschreibung:

Ist $\mathring{u}(x, y)$ der Grauwert des Bildes am Ort (x, y), so bedeutet Bildverarbeitung eine stufenweise Veränderung dieses Grauwertes

$$\mathring{u}(x, y) \rightarrow u(t, x, y),$$

wobei t der die Veränderung beschreibende Parameter ist $\left(u(0,\cdot) = \mathring{u}\right)$. Durch diese Veränderung sollen Störungen beseitigt, das Bild kontrastreicher gemacht (z.B. Kanten verstärkt) werden.

Eine alte Idee ist es, die Diffusion zur Beseitigung des Rauschens, also hochfrequente Störungen, zu benutzen: $u(t,\cdot)$ ist dann Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t = \operatorname{div}\left(D \operatorname{grad} u\right), \quad u(0,\cdot) = \mathring{u}.$$

Mit wachsendem t nimmt die Variation von u ab: Es verschwinden die kleinen hochfrequenten Störungen, nach und nach werden aber auch die "echten" Effekte gedämpft und verschwinden für $t \rightarrow \infty$. Man muß also den Prozeß rechtzeitig stoppen.

Will man Kanten oder Strähnen länger erhalten, muß man die Diffusivität von der lokalen Bildsituation abhängig machen. Die ursprüngliche Idee von Malic und Perona war:

Ist die Diffusivität längs der Kante relativ groß, dagegen über die Kante hinweg, senkrecht zu ihr, klein, so bleibt im Prozeß die Kante erhalten, während Effekte seitlich von ihr gedämpft werden.

Kanten sind Kurven, längs denen $\|\nabla u\|$ groß ist, während die Richtung von ∇u dort senkrecht zur Kante ist.

Führt man ein lokales Koordinatensystem ein, indem man ξ in Richtung ∇u und η in Richtung der Tangente wählt, so kann man die Diffusionsgleichung (mit $D=1$) auch in der Form

$$u_t = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$$

schreiben. Eine extreme Realisierung der Idee von Malic und Perona ist es nun, in ξ-Richtung keine Diffusion anzunehmen und man erhält

$$u_t = u_{\eta\eta};$$

rechnet man dies auf das ursprüngliche Koordinatensystem zurück, so erhält man

$$u_t = \|\nabla u\| \cdot \operatorname{curv}(u) = \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right)$$

die sogenannte "mean curvature" Gleichung, die in vielen physikalischen und technischen Prozessen eine Rolle spielt. Hier kann man Ideen austauschen: Innovation durch Ideentransfer, der dadurch ermöglicht wird, daß die mathematische Struktur des Modells die Ähnlichkeit der Problemstellung verdeutlicht.

P.L. Lions hat aus Axiomen der Bildverarbeitung eine "Fundamentalgleichung" hergeleitet, die sehr ähnlich zur mean curvature Gleichung ist:

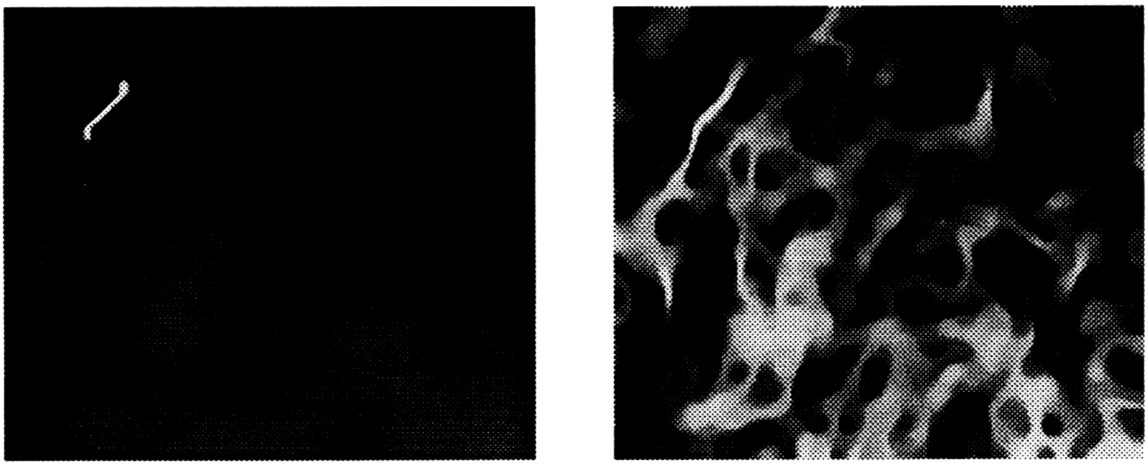
$$u_t = \|\nabla u\| \operatorname{curv}(u)^{\frac{1}{3}}$$

Eine Bildverarbeitung, die dieser Evolution folgt, erfüllt eine Reihe von natürlichen Forderungen (Axiomen), die man an solche Prozesse stellen kann. Diese Gleichung ist "morphologisch" und affin invariant und gut geeignet zur Mustererkennung.
Eines der Axiome ist, daß Kontraste im Prozeß nicht verstärkt werden sollen (weil das Bild dadurch verfälscht werden kann). Zur Herausarbeitung gewisser Effekte, etwa der Strähnen, ist aber Kontrastverstärkung durchaus erwünscht. Für diesen Fall liegt eine andere Abänderung der Diffusionsgleichung nahe, die sogenannte "anisotrope Diffusion"

$$u_t = \operatorname{div}(D(\nabla u_\sigma) \cdot \operatorname{grad} u).$$

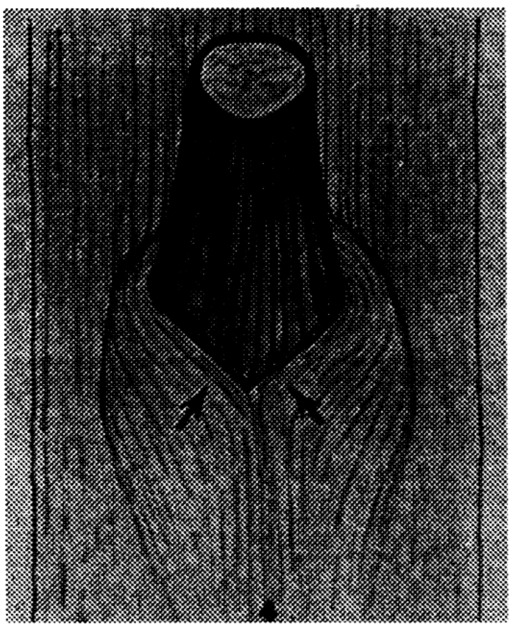
Hier wird die Diffusion naturgemäß zum Diffusionstensor, durch den die Diffusivität richtungsabhängig gemacht werden kann. u_σ ist eine "vorgeglättete" Version von u, die notwendig ist, um ein zu "nervöses" Verhalten am Anfang zu verhindern. Wählt man Eigenvektoren des Tensors in Richtung ∇u_σ und $(\nabla u_\sigma)^\perp$ und die zugehörigen Eigenwerte unterschiedlich (klein in Richtung ∇u_σ, falls eine Kante vorliegt, d.h. falls $\|\nabla u_\sigma\|$ groß ist), so ergibt sich eine Evolution, die zwar nicht morphologisch und nicht affin invariant, dafür aber kontrastverstärkend und grauwerterhaltend und deshalb für unsere Zwecke besser geeignet ist. (Einzelheiten

in J. Weickert: Scale Space Properties of Nonlinear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor, Berichte der AGTM 110, 1994.)
Natürlich ergeben sich viele theoretische Fragestellungen in Zusammenhang mit diesen nichtlinearen Diffusionen, die ja nicht einmal mehr quasilinear sind, Fragen z.B. nach dem Maximumprinzip, dem Verhalten für $t \to \infty$ usw. Vor allem aber sind die auf diesen Ansätzen basierenden Verfahren recht erfolgreich, jedenfalls besser als alles andere auf dem Markt befindliche.



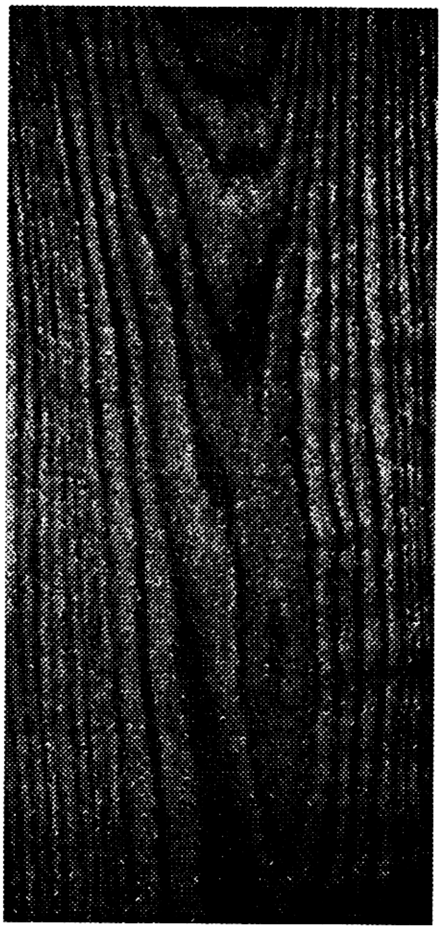
Vlies-Darstellung

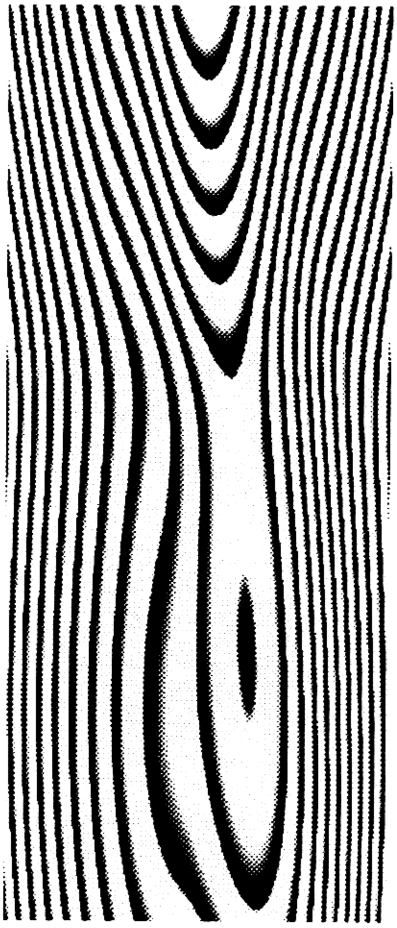
Wir verwenden sie nicht nur zur Vliesbewertung, sondern auch zur Klassifizierung von Holzfurnieren, eine besonders reizvolle Aufgabe, da sie von Bildverarbeitung über das mathematische Modellieren des Baumwachstums



Holzfurniere

bis zu lernenden Systemen sehr verschiedene mathematische Aspekte umfaßt.





Abschließend zu diesen Beispielen möchte ich erwähnen, daß ich überzeugt bin, im Bereich der Qualitätskontrolle und -bewertung, die eine immer größere industrielle Bedeutung gewinnen, ungeheuer viele und interessante mathematische Aufgaben liegen und ich glaube, es wäre von Vorteil für die Industrie und für die Mathematik, wenn wir dieses Feld nicht ausschließlich den Kollegen der Informatik überlassen würden.

Ich hoffe, daß ich Sie davon überzeugen konnte, daß Mathematik ein wertvoller Rohstoff, eine ökonomisch nützliche Technologie sein kann.
Aber ist sie es auch wirklich? Wieso dann diese häufig anzutreffende öffentliche Einschätzung der Mathematik als Wissenschaft im Elfenbeinturm?

Meine These ist, daß es zwei Mathematikwelten gibt, die recht unabhängig voneinander existieren. "The culture and the values of mathematics in business, industry and government differ radically from those of academia" beginnt der SIAM-report und definiert damit gleich zu Beginn diese beiden Welten: Die Mathematik in der Industrie und die Mathematik an den Universitäten. Diese erstgenannte Welt ist

anders, ganz anders - aber sie ist auch eine Mathematikwelt und sie ist jene, die den ökonomischen Nutzen der Mathematik fast alleine produziert; sie ist der "Alleinverdiener". Die zweite Welt, jene an den Hochschulen, die ja auch die mathematischen Gesellschaften mit über 90% der Mitglieder bestimmt (und der ich ja auch angehöre!), ist weitgehend in sich abgeschlossen. Sie bestimmt, was gute und schlechte Mathematik ist - nach "innerweltlichen" Grundsätzen, sie hat einen "Alleinvertre-tungsanspruch". Da Industriemathematik nicht immer diesen Kriterien genügen kann, wird sie oft nicht als Mathematik wahrgenommen. Ich zitiere nochmals den SIAM-report:
"A harsh reality is the lack of a market niche for mathematics outside of academia ... . Mathematics is seldom the dominant technical discipline. Demonstrating relevance is a key to survival outside of academia." Der Industriemathematiker ist also nicht geborgen in mathematischen Fachbereichen, in denen die Forschung ihren eigenen Gesetzen folgen kann - er muß beweisen, daß "Mathematik etwas bringt". Deshalb sieht man sich auch vor andere Probleme gestellt: "Good problems need not to be elegant, new or well posed - just necessary to corporate welfare." Und man benötigt auch andere Talente: Die Fähigkeit zur Teamarbeit, zur Verständigung mit Nichtmathematikern, ein breitgestreutes wissenschaftliches Intesse, Kritikfähigkeit. Man muß erkennen, wo Mathematik eine Chance bietet - man braucht Problemfindungskompetenz, nicht nur Problemlösungskompetenz, wie sie Schule und Hochschule ausschließlich anstreben.
Da bleibt oft nicht viel Zeit, jene zweite Welt zu beobachten, die ihrerseits zumindest in der Vergangenheit nicht sehr viel Interesse an der ersten Welt zeigte. So entstand die Trennung - der Fieldsmedaillist Bombieri spricht allgemeiner von einer Trennung von Wissen und Gesellschaft, die früher nicht existierte und heute überwunden werden muß.
Was ist zu tun, um jene schädliche Trennung zu überwinden, um die beiden Welten besser zu koppeln?
Zuerst eine Warnung, die ich, wieder einmal, von Felix Klein, borge, der 1906 in einem Vortrag "Wissenschaft und Technik" sagte: "Der größte Feind, der richtigen Bestrebungen erwächst, ist nicht äußerer Widerstand, sondern Übertreibung. Noch andere, noch wichtigere Vorbedingungen für das Gedeihen der Technik gibt es als die Verbindung mit der Wissenschaft. Das sind die allgemeinen intellektuellen und ethischen Qualitäten: der technische Instinkt, der Unternehmungsgeist, die Beharrlichkeit; auch die Organisation der Arbeit spielt eine wichtige Rolle. Und ebenso hat die Wissenschaft ihre stärksten Wurzeln für sich: den unbedingten Trieb zur Erforschung der Wahrheit, woran sich die Unbestechlichkeit des Urteils schließt, die Freude am geordneten Denken, die Gründlichkeit und auch wohl eine gewisse Langsamkeit. Werden die beiden Gebiete in gedeihliche Wechselwirkung

treten? Es gelingt nicht immer. Aber wo sich die geeigneten Kräfte zusammenfinden, da entsteht neues, nach beiden seiten förderliches Leben. Für die Wissenschaft kommt hier nicht nur der wichtige Impuls in Betracht, der sich aus dem Herankommen neuer Hilfskräfte ergibt, sondern ganz wesentlich auch die Befruchtung mit neuen, fremder Erfahrung entstammenden Ideen. Die technischen Betriebe aber werden durch erfolgreichen Kontakt mit der Wissenschaft auf eine höhere Stufe der Leistungsfähigkeit emporgehoben, zum Teil überhaupt erst ermöglicht."

Also: Koppeln heißt nicht verschmelzen, jede Welt muß ihre Stärken bewahren. Aber es heißt: Zusammenarbeiten, einander respektieren, aufeinander hören.

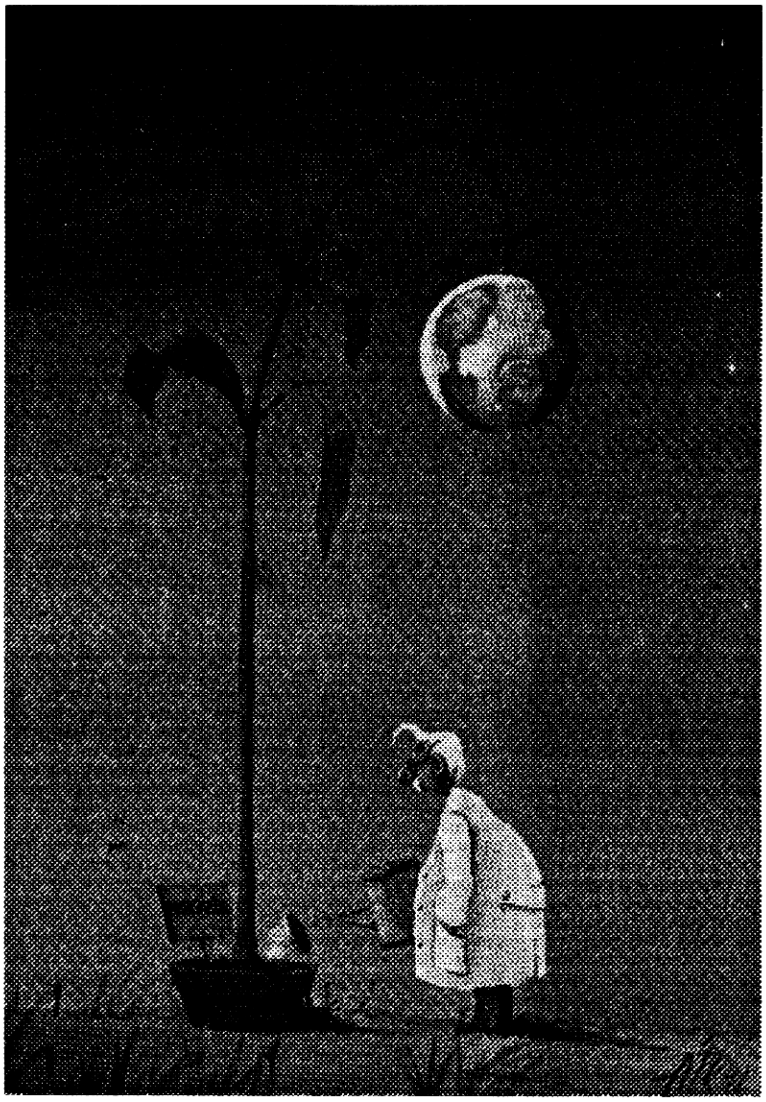
Was kann man tun, um diese Kopplung zu verbessern? Auch dazu macht Prof. Weule in seinem Brief eine interesante Aussage: "Voraussetzung für einen breiteren Einsatz mathematischer Methoden in der Industrie ist aus meiner Sicht, daß sich die Hochschulen zunehmend in ihrer Arbeit auf industrielle Belange konzentrieren und daß andererseits die Industrie den Dialog mit der Wissenschaft verstärkt sucht. Letzteres wird dadurch erschwert, daß Ingenieure in ihrer mathematischen Aus-bildung nur wenig darüber erfahren, wie durch Einsatz mathematischer Methoden reale Probleme gelöst werden können. Dies erkennen die Ingenieure erst im späteren Verlauf der Ausbildung - meistens zu spät. So ist es mir ergangen und nach vielen Kontakten mit jungen Ingenieuren habe ich den Eindruck gewonnen, daß es heute in großem Umfang auch noch so ist. Ich begrüße es daher außerordentlich, daß Sie sich mit diesem Themenkreis auseinandersetzen und wünsche Ihnen für die anstehenden Veränderungsprozesse viel Erfolg." In der Tat ist es für die Mathematik sehr förderlich, wenn die mathematische Ausbildung von Ingenieuren nicht als notwendiges Übel, sondern als eine wichtige Aufgabe gesehen wird und wenn sich nicht gerade die besten ihres Faches dieser Aufgabe entziehen.

Wir müssen auch den mathematischen Nachwuchs, der ja in seiner überwiegenden Zahl in die Welt der Industriemathematik eintreten wird, darauf vorbereiten; und dies bedeutet, daß wir ihn auch zur Interdisziplinarität, zur Sprachfähigkeit, zum Interesse für andere Wissenschaften wie Technik und Informatik erziehen müssen, ohne dabei die Entwicklung des Rohstoffs Mathematik zu vernachlässigen. Ich glaube, daß dabei neue Unterrichtsformen wie z.B. sogenannte Modellierungsseminare hilfreich sein können: Die Studenten lernen in interdisziplinären Teams die Erstellung von mathematischen Modellen zu realistischen Aufgabenstellungen, ihre Auswertung mittels Computer und die Interpretation der Ergebnisse.

Interessante Probleme findet man, indem man sich in der Welt der Industriemathematik umsieht; man muß nur seine "Nische" in der Universität verlassen und sich in die Welt der Praxis hinausbegeben: Es ist meine Erfahrung, daß man dort meist freundlich und neugierig aufgenommen wird und daß man buchstäblich fast überall interessante mathematische Probleme findet. Voraussetzung dafür ist Offenheit, die Bereitschaft, die Kriterien dieser Welt zunächst anzunehmen. Es ist zu hoffen, daß sich die Tagungen der mathematischen Gesellschaften mehr und mehr für diese erste Welt öffnen und daß die Hochschulmathematiker dann die Gelegenheit zum Kennenlernen besser nutzen als etwa auf der DMV-Tagung in Duisburg.

Am 26. September 1894, vor fast genau 100 Jahren, hielt Felix Klein auf der Naturforschertagung einen ebenfalls popularwissenschaftlich orientierten Vortrag. Er sagte: "Wir empfinden, daß unter dem Einflusse der modernen Entwicklung unsere fortschreitende Wissenschaft je länger je mehr Gefahr läuft, sich zu isolieren .... Hier liegt eine große, täglich wechselnde Gefahr. Dem wollen wir Mitglieder der mathematischen Vereinigung nach Kräften entgegenwirken." Und an die Naturforscher gewandt, fügte er hinzu: "Wir wünschen von Ihnen in persönlichem Verkehr zu lernen, wie sich der wissenschaftliche Gedanke in Ihren Disziplinen entwickelt, und wo dementsprechend der Ansatzpunkt für das Eingreifen des Mathematikers gegeben sein mag. Wir wünschen umgekehrt, von Ihrer Seite für unsere Auffassungen und Bestrebungen einiges Interesse und Verständnis zu finden."

So groß die Fortschritte der Mathematik im letzten Jahrhundert waren - ihre Beziehung zur Außenwelt, zur Praxis scheint sich kaum verbessert zu haben. Dazwischen gab es allerdings - unter dem Einfluß Felix Kleins - ein Hoch zu Beginn dieses Jahrhunderts. Dasselbe müssen wir heute - ohne die Hilfe einer Persönlichkeit wie Felix Klein - in gemeinsamer Anstrengung wieder erreichen: Nur so verschaffen wir der Mathematik die Bedeutung, die ihr wirklich zukommt, als eine wunderbare und gerade deshalb auch nützliche Wissenschaft.



"Einstein gießt Weltpalme"

Mathematik und Computersimulation: Modelle, Algorithmen, Bilder

Helmut Neunzert
Universität Kaiserslautern, Germany

Einleitung

Mathematik ist nicht jene abstrakte, weltabgewandte Wissenschaft, für die viele sie halten – sie war es auch nie. "Mathematik ist nicht trocken, sondern voller Phantasie, nicht langweilig, sondern voller Schönheit, logisch, aber dennoch von ungeheurer Kreativität, uralt, aber voll neuer Ideen. Mathematik ist wie das Spiel, wie die Kunst ein Bestandteil, ja vielleicht sogar ein besonders sensibler Repräsentant der Kultur und nicht zuletzt ein unersetzliches Hilfsmittel der Naturwissenschaften, der Technik, der Wirtschaft. Mathematik ist Werkzeug und Spiel und notwendigerweise beides. Mathematik liefert auch oft genug einen Anreiz, zu philosophieren, zur rationalen Reflexion in einem irrationalen Hin und Her zwischen Fortschrittsgläubigkeit und Fortschrittsfeindlichkeit!" (H. Neunzert, B. Rosenberger: Schlüssel zur Mathematik, ECON 1991, S. 5).

In diesem Aufsatz geht es uns um eine neue Rolle, die die Mathematik als Werkzeug zur Lösung außermathematischer Probleme heute spielt – vor allem, weil ihr selbst ein neues Werkzeug, der Computer, erwachsen ist. Aber auch deshalb, weil sie, durch Aufgabe und Lösungsmethode getrieben, sich dem Dialog und der Zusammenarbeit mit anderen Disziplinen neu öffnet. Es ist, wie bei vielen Wissenschaften, so auch bei der Mathematik zu beobachten, daß "die verschiedenen Fachsprachen füreinander wieder verständlich werden – man hört aufeinander und man versteht einander. Die Disziplinen verlassen ihre babylonischen Elfenbeintürme und breiten ihre Probleme und Ideen voreinander aus" (H. Neunzert: Von der neuen Rolle der Mathematik, erscheint in GAMM-Mitteilungen, Heft 2, 1994).

Der Mathematiker, im Team mit Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und Informatikern, mit Hilfe des Computers an der Lösung technischer, ökonomischer und ökologischer Probleme arbeitend – wie ist diese neue Aufgabe möglich geworden? Es gibt seit wenigen Jahren zwei kräftige Strömungen in der angewandten Mathematik, die unter dem Namen "Mathematical Modelling" und "Scientific Computing" (die deutschen Bezeichnungen "Mathematische Modellierung" und "Wissenschaftliches Rechnen" haben irreführende Konotationen) figurieren. Dies sind Arbeitsvorgänge bei der Erstellung einer Computersimulation, die reale Prozesse unter Vernachlässigung unwesentlich erachteter Aspekte im Computer nachspielt. Dabei taucht an zwei Stellen der Begriff "Bild" auf: Einmal muß der reale Prozeß in Mathematik abgebildet werden (das ist der Modellierungsschritt), um dann mittels Algorithmen im Rechner simuliert werden zu können; zum anderen produziert der Computer primär nur Zahlen- oder Symbolkolonnen, die in reale Bilder zurückübersetzt werden müssen, da diese für den Menschen viel leichter faßbar sind. Man nennt diesen Prozeß "Visualisierung" – ein drittes Schlagwort moderner angewandter Mathematik. Letztendlich wird so die reale Welt in eine virtuelle Bilderwelt verwandelt, wobei ein "Zweckfilter" eingebaut ist: Die virtuelle Welt zeigt nur, was für die Erreichung eines vorher definierten Zweckes wichtig ist.

Ich will im folgenden auf die drei Schritte – Modelling, Scientific Computing und Visualisierung – näher eingehen und diskutieren, wie sie und die Mathematik sich gegenseitig beeinflussen. Dabei nutze ich hauptsächlich ein praktisches Beispiel meiner eigenen Erfahrung: Beim Wiedereintritt von Raumfahrzeugen (Fähren oder Kapseln) in die Erdatmosphäre spielt die Erwärmung der Fahrzeugoberfläche eine große Rolle; sie hängt natürlich von der Form des Fahrzeugs und seiner Oberflächenbeschaffenheit sowie von Fahrtgeschwindigkeit und Luftdichte ab. Um die Gestaltungsmöglichkeiten optimal zu nutzen, braucht man genauere Kenntnisse über diese Abhängigkeit, und es ist ein Charakteristikum der Raumfahrttechnik, daß man diese nur in sehr geringem Umfang aus Realexperimenten gewinnen kann; die in Wirklichkeit auftretenden Geschwindigkeiten und Temperaturen sind im Windkanal kaum reproduzierbar. Deswegen ist man hier in besonderem Maße auf eine Computersimulation angewiesen – ihre Zuverlässigkeit kann lebensentscheidend sein. Das Modellieren der Atmosphäre in größeren Höhen (um 100 km), die Berechnung der wichtigen Daten und die Visualisierung der Strömung können in diesem Aufsatz zwar nur angedeutet werden, scheinen mir aber doch zur Illustrierung der Konzepte geeignet.

Modelle

Was versteht man unter "mathematischer Modllierung"? Im neuesten Brockhaus findet man eine Beschreibung der mathematischen Modelltheorie, die wenig mit unserem Begriff zu tun hat und dann, als "naturwissenschaftliches Modell": "Ein Abbild der Natur unter Hervorhebung für wesentlich erachteter Eigenschaften und Außerachtlassen als nebensächlich angesehener Aspekte. Ein Modell in diesem Sinn ist ein Mittel zur Beschreibung der erfahrenen Realität, zur Bildung von Begriffen der Wirklichkeit und Grundlage von Voraussagen über künftiges Verhalten des erfaßten Erfahrungsbereiches."

Sehr klar beschreibt es Heinrich Hertz 1897 in der Einleitung seiner "Prinzipien der Mechanik": "Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns **innere Scheinbilder oder Symbole** der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände". Selbstverständlich kann diese Konzeption philosophisch hinterfragt werden – eine recht moderne, neurophysiologisch beeinflußbare Interpretation bietet z.B. der radikale Konstruktivismus (siehe z.B. H.R. Maturana, F.J. Varela: Der Baum der Erkenntnis, Goldmann 1990). Statt dessen sehen wir uns noch die Regeln für die Erstellung dieser inneren Bilder an, wie Hertz sie selbst aufstellte. Eine Regel steht schon in dem Einführungstext: Was aus den Bildern geschlossen werden kann, muß der Wirklichkeit entsprechen – Hertz nennt das: Die Modelle müssen "richtig" sein. Außerdem müssen die Modelle in sich widerspruchsfrei oder "logisch zulässig" sein. Schließlich kann es verschiedene richtige und logisch zulässige Bilder derselben Realität geben – Modelle sind nicht eindeutig. Unter mehreren zulässigen und richtigen Bildern wähle man, so Hertz, das sparsamste, jenes also, das die gewünschten Vorhersagen mit dem geringsten Aufwand leistet.

Wo bleibt da die **Mathematik**? Ganz einfach: Sie ist der **Rohstoff dieser Modelle**, das, woraus diese Bilder gemacht sind. Modelle sind am Ende mathematische Strukturen, Gleichungen, Relationen etc. Für den mathematischen Modellierer ist Mathematik das, was nach meiner Vorstellung Bronze, Stein, Holz etc. für den Bildhauer ist. Man kann sich das auch so vorstellen, daß der (reine) Mathematiker einen Vorrat möglicher Muster produziert und der angewandte Mathematiker, der Modellierer, versucht, das einer gegebenen Realität am besten entsprechende Muster zu finden. Je reicher, gestaltbarer der Rohstoff, desto besser das Modell – wer keinen Vorrat an Mathematik hat, kann keine guten Bilder machen. Und der menschliche Geist ist unglaublich erfinderisch, was neue Ordnungsmuster anbelangt: Mathematik wird erfunden, geschaffen, nicht entdeckt.

Modellieren, ich wiederhole, ist das Finden passender Beziehungen für betrachtete Objekte, wobei man natürlich abstrahiert, von dem für die Vorhersage unwesentlichen absieht. Logisch zulässig sind die Modelle, wenn ihre Mathematik in sich stimmig ist, z.B. wenn die Gleichungen wirklich Lösungen besitzen, die eindeutig sind etc. Die "Richtigkeit" ist natürlich keine innermathematische Frage: Man muß Konsequenzen aus dem Modell ziehen, Lösungen berechnen und mit der Beobachtung, dem Experiment vergleichen. Dies ist Modellvalidierung – Modelle hängen immer von irgendwelchen Daten, Parametern ab und die Validierung erfolgt für einige Parameterwerte, für die eben der Vergleich mit der Realität möglich ist; die Vorhersage besteht dann in der Nutzung des Modells für andere, nicht validierte Werte.

Selbstverständlich beschreibt, was ich hier Modellbildung und Validierung nenne, die Arbeitsweise der ganzen abendländischen Wissenschaft. Man "entdeckt" die Newtonschen Gesetze anhand einiger Beobachtungen (z.B. dem Fallen eines Apfels), erprobt sie an anderen Beobachtungen (z.B. der Bewegung von Himmelskörpern) und wendet sie dann zur Vorhersage an (z.B. der Bahn der Sonde "Voyager"). Die Kunst dabei ist natürlich, die richtigen Begriffe und Beziehungen zwischen ihnen zu finden ("Beschleunigung", "Kraft", "proportional", "träge = schwer") – und es ist eine Kunst, diese Modelle auszuwerten, die Gleichungen zu lösen.

Boltzmann z.B. – wir kommen zu unserem Illustrationsbeispiel – entdeckte um 1870, daß man sich ein Gas wie ein riesiges dreidimensionales Poolbillard vorstellen kann – bis zu 10^{23} Billardkugeln (= Moleküle) pro Kubikmeter laufen zwischen Zusammenstößen untereinander und mit den Wänden (z.B. mit der äußeren Hülle eines Raumfahrzeugs) geradlinig hin und her, wobei z.B. ihre Impulsabgabe beim Auftreffen auf die Wände für den Gasdruck verantwortlich ist und die Abweichung ihrer Einzelgeschwindigkeiten von einer mittleren Geschwindigkeit für die Temperatur. Aus dieser Vorstellung läßt sich eine Gleichung – die Boltzmanngleichung – herleiten, die die zeitliche Entwicklung aller wichtigen Größen eines "dünnen" Gases (Dichte, Strömungsgeschwindigkeit, Temperatur) beschreibt. Sie ist äußerst komplex und läßt sich nur für einfache Gegebenheiten lösen und mit der Wirklichkeit vergleichen. Für interessante Probleme, z.B. der Umströmung eines Raumfahrzeugs in ca. 100 km Höhe (dort ist das Gas dünn genug) ließ sich dieses Modell bis vor kurzem nicht auswerten; eine Vorhersage des Einflusses der Fahrzeugform auf die Erwärmung der Oberfläche war vor 10 Jahren noch nicht möglich.

Algorithmen und Computer

Wir sind jetzt bei der Frage angelangt, warum Modellieren heute neu in Mode gekommen ist, warum sich die Mathematik dieser Sachen verstärkt annimmt. Modelle, schon immer von mathematisch gebildeten Naturwissenschaftlern, Ingenieuren oder Ökonomen entwickelt, waren häufig einer Nutzung nicht zugänglich, weil ihre Validierung und ihre Auswertung zum Zwecke der Vorhersage zu komplex war. Hier hat nun der **Computer** eine vollständige Wende gebracht – mit ihm ist ein Hilfsmittel entstanden, das die Zuverlässigkeit und den Anwendungsbereich dieser wissenschaftlichen Methode ungeheuer erweitert. Sie heißt deshalb auch "scientific computing" und bedeutet die Auswertung mathematischer Modelle mit Hilfe des Computers.
Natürlich: Modelle wurden auch schon in der Vergangenheit zum Zwecke einer Vorhersage ausgewertet, wobei meist eine Näherungslösung genügt. Wenn man etwa zu biblischen Zeiten wissen wollte, wie lang der Zaun um ein in etwa kreisförmiges Weidefeld des Durchmessers d sein mußte (auch das ist ja Vorhersage!), so multiplizierte man d mit 3 (das steht so im Alten Testament); in Indien etwa zur gleichen Zeit benutzte man $\frac{22}{7}$ statt 3 (was den biblischen Fehler bei $d = 100$ m von ca. 14 m auf ca. 12 cm reduzierte, eine gewiß mehr als zufriedenstellende Genauigkeit). Heute weiß jedes Kind, daß der Faktor π ist und findet ihn in Tabellen und in seinem PC – allerdings hat kaum jemand eine Ahnung davon, wie der PC auf $\pi = 3.141592653....$ kommt. In der Tat stecken ungeheure Mühen über Jahrhunderte in dem Prozeß, der es heute erlaubt, mit Hilfe von Superrechnern π mit einer Genauigkeit von über 500 Millionen Dezimalstellen zu berechnen (wobei hier weniger das Interesse des **Hirten**, sondern die Frage nach verborgener Gesetzmäßigkeit einer solchen "transzendenten Zahl" die Motivation liefert). In diesem Beispiel ist das mathematische Modell der Kreis und die Auswertung des Modells steckt in der approximativen Berechnung von π.
Die Physik hat im Laufe ihrer Geschichte unzählige und viel komplexere Modelle entwickelt. Da es ihr meist um das "Verstehen", das Erfassen von Naturgesetzen ging, konnte sie sich oft auf einfache geometrische Konfigurationen, auf für das Verständnis besonders nützliche Sonderfälle, beschränken: Die Modelle können dadurch oft

vereinfacht und "per Hand" ausgewertet werden. So kann man z.B. die Entzündung einer Flamme "verstehen", indem man diesen Prozeß mit dem plötzlichen Auftreten einer zweiten Lösung einer von der Temperatur abhängigen Gleichung identifiziert. Will man aber Naturverständnis in technische Gestaltung verwandeln – etwa die Zündungsvorgänge in einem Automobilmotor optimal regeln – so genügen einfache Spezialfälle und einfache Geometrien nicht mehr: Man muß das Modell, das Entstehung, Ablauf und Ausbreitung des Zündungsvorgangs in einem Motorzylinder beschreibt, auswerten. Dies meinte der führende deutsche Mathematiker der Jahrhundertwende, Felix Klein, wenn er sagte, daß Physik oft "eindimensional", Technik aber immer "dreidimensional" sei. Das Modellieren technischer Probleme ist oft einfacher, aber die Auswertung, die Berechnung der Vorhersage ist schwieriger: Man will eben viel mehr Details wissen. Deshalb spielt das scientific computing in der Technik und in der industriellen Entwicklung eine immer größere Rolle. Man simuliert technische Systeme, manchmal in "real time" – die Auswertung des Modells ist so schnell, daß auf dem Bildschirm die Bilder aufeinanderfolgender Zustände des Systems so rasch folgen wie in Wirklichkeit.

Natürlich ist auch die Naturwissenschaft anspruchsvoller geworden, sie erwartet mehr als qualitatives Verständnis von den Modellen: Klimaentwicklungen werden ebenso simuliert wie die Alterungsprozesse von Sternen. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn Realexperimente (wie beim Klima oder in der Astrophysik) unmöglich sind oder wenn sie (wie in der Raumfahrt die Erprobung verschiedener Fahrzeugformen) zu teuer sind.

Man hat viele verschiedene Namen für diese Verbindung von Modellierung und Berechnung geprägt: "Computational Science" oder "Computersimulation" oder einfach, wie der russische Mathematiker A.A. Samarskii, "Computerexperiment". Er unterscheidet 3 Phasen dieses Experiments: Modell–Algorithmus–Programm (MAP, vielleicht das Abbild = map der Wirklichkeit in den Computer). Algorithmen sind Vorschriften zur (i.a.) näherungsweisen Lösung der Modelle – Programm meint die Realisierung dieser Vorschriften, die Erstellung von software. Softwarepakete sind letztlich auch die Instrumente dieses Experiments; sie werden oft von anderen dann

als black box, d.h. ohne genaue Kenntnis des Modells oder des Algorithmus, benutzt. Dann verliert ein solcher Experimentator leicht die Mathematik aus den Augen und nur, wenn etwas nicht funktioniert, z.B. das Experiment unglaubwürdige Werte liefert (oder jemand anderes mit anderen Instrumenten andere Ergebnisse erzielt), beginnt man über die "Richtigkeit" des Modells, die Korrektheit der Algorithmen nachzudenken. Und neben der schon beschriebenen Mitwirkung beim Modellieren hat der Mathematiker heute vor allem die Aufgabe, Algorithmen zu entwickeln und nachzuweisen, daß diese das Modell zumindest mit hinreichender Exaktheit lösen. Besonders bei der Implementierung dieser Algorithmen, dem P-Teil in MAP, wird er eine Zusammenarbeit mit dem Informatiker schätzen.
Oft sind Modelle (etwa in der Klimatologie, aber auch für technische Systeme) Differentialgleichungen, und oft muß man versuchen, die aus diesen Differentialgleichungen zu errechnenden Funktionen durch endlich viele Funktionswerte anzunähern; dies ist Gegenstand der klassischen "analytischen Numerik". Insbesondere bei der Modellierung von Wirtschaftsprozessen, aber z.B. auch von Transportsystemen oder bei dem Design von Computerchips ist dagegen eher die diskrete Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) gefragt. Mehr und mehr erfordert die Auswertung von Modellen das Arbeiten mit algebraischen oder symbolischen Ausdrücken – das sich schnell entwickelnde Feld der "Computeralgebra" oder, noch allgemeiner, der "Symbolic Computation". "Computeralgebrasysteme erlauben das interaktive, formelmäßige Rechnen mit mathematischen Objekten, wie sie etwa in der täglichen Arbeit eines Ingenieurs oder Physikers mit anspruchsvollem Hintergrund vorkommen. Im Unterschied zur numerischen Behandlung mathematischer Sachverhalte manipuliert Computeralgebra also Zeichen und Symbole. Eine ganz natürliche Sache, da Computer zu allem eher geeignet sind als zum Rechnen mit reellen Zahlen, denn eine beliebige reelle Zahl ist ja bekanntermaßen ein außerordentlich kompliziertes Gebilde, wohingegen ein Symbol, etwa der Buchstabe π, ein sehr einfach strukturiertes Objekt ist." So beschreibt einer der deutschen Apologeten der Computeralgebra, Bruno Fuchssteiner aus Paderborn, sein Fach – hier und da etwas überpointierend (ich glaube doch, daß die "tägliche" Arbeit eines Ingeni-

eurs auch mit "anspruchsvollem Hintergrund" etwas anders aussieht - z.B. benötigt er am Ende des Tages doch die Kenntnis, daß $\pi = 3.1415...$ ist), aber insgesamt zutreffend. "Symbolic computation" ist Teil des "scientific computing" und so an einer neuen Rolle der Mathematik wesentlich beteiligt (das von Bruno Buchberger in Linz gegründete Research Institute for Symbolic Computation = RISC hat viele überzeugende Beispiele).
Da ich selbst der Numerik, den Algorithmen mit Zahlen, näher stehe (und auch dieses Gebiet insgesamt sicher noch dominiert), stammt auch mein Anschauungsmaterial von dort. Zurück also zu unserem Poolbillard, mit Hilfe dessen wir die Erwärmung einer zur Erde zurückkehrenden Raumkapsel vorhersagen wollten. Können wir dieses Spiel im Rechner nachspielen? Erste Versuche des amerikanischen Mathematikers Stanislaw Ulam um 1940 in Los Alamos waren nicht so erfolgversprechend: Will man wirklich berechnen, welche von den ungeheuer vielen Billardkugeln wo und genau wie zusammenstoßen, sprengt man jeden Rahmen – auch dann, wenn man sich auf "Hochrechnungen" mit Stichproben von ca. 1 Million Bällen beschränkt und die Rechner der letzten Generation verwendet. Dieses Modell ist auch heute noch zu komplex, um eine vernünftige Computersimulation zu ermöglichen.
Die letzte der Hertzschen Regeln wies schon darauf hin, daß es immer mehrere "geeignete" Modelle gibt und schlug vor, das sparsamste auszuwählen. Wir müssen also ein neues Billardspiel erfinden, das auf dem Computer leichter nachspielbar und trotzdem "richtig" ist, d.h. das die uns interessierenden Größen wie Druck, Widerstand, Auftrieb, Temperatur genau genug vorhersagt. Man darf nicht vergessen: Auch Boltzmann beschrieb "die Wirklichkeit" nur in einem Bild, auch wenn uns dieses heute besonders natürlich, "physikalisch richtig" vorkommt (das war zu Boltzmanns "Jugendstilzeiten" gar nicht so, viele hielten sein Poolbillard für ein Hirngespinst – das Gefühl für die Glaubwürdigkeit dieser mathematischen Bilder ändert sich wohl wie jenes für die Schönheit in der Kunst). Unser neues Bild behält die Idee, daß ein Zusammenstoß zweier Kugeln ein "Paarereignis" ist, das die Geschwindigkeiten der beiden beteiligten Kugeln ändert – es gibt die Idee des Stoßes als eines örtlichen Zusammentreffens zweier Kollisionspartner auf. Statt dessen wählen wir

zwei nicht zu weit voneinander entfernte Kugeln nach einer bestimmten mathematischen Zufallsregel (deshalb heißen solche Verfahren auch "Monte-Carlo-Verfahren") als Stoßpaar aus und errechnen nach einer weiteren solchen Regel die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Diese Regeln – dies ist natürlich entscheidend – müssen so gewählt werden, daß das neue Spiel wie oben beschrieben "richtig" ist – und es ist keineswegs einfache Mathematik, diese Regeln zu finden. Man braucht sehr viel reine, d.h. bisher nicht angewandte Mathematik – guten Rohstoff für das Modell. Dieses ist mikroskopisch gesehen anders als unser Bild von der Natur, makroskopisch aber richtig. Und es ist ökonomischer: Es läßt sich auf dem Computer nachspielen, der auf diese Weise auf die Modelle und letztlich auch auf den Rohstoff, die Mathematik, zurückwirkt.

Weil mir dieser Prozeß – die durch das Auswertungswerkzeug bedingte Veränderung der Modelle weg von der "Mikrophysik" ohne Beeinträchtigung der Makrophysik – wichtig erscheint, will ich noch eine Analogie mit einem alltäglichen Phänomen erwähnen: In Europa beginnt eine spätere Partnerschaft meist mit einer (räumlichen) Begegnung – in der Schule, der Disco, beim Sport etc. Solche "Kollisionen" verändern dann das spätere Leben der Partner; diese "mikroskopischen" Ereignisse bestimmen letztlich die Bevölkerungsstatistik, also das "makroskopische Verhalten" der Gesellschaft. Nun gibt es – in anderen Teilen der Welt – auch andere Modelle: Dort wählt ein Heiratsvermittler nach bestimmten Regeln die Paare aus; solche "Kollisionen" sind also nicht mehr räumliche Begegnungen – die Regeln des Heiratsvermittlers und seine (vielleicht zufälligen) Kenntnisse ersetzen diese. Ein ganz anderes Modell – demographisch aber unter Umständen (d.h. von der Regel abhängend) nicht von unserem europäischen unterscheidbar. Vielleicht mit geringerem Vergnügen für die Einzelnen, aber möglicherweise gesellschaftspolitisch effizienter. Die Analogie zu unserem Ersatzbillard ist hoffentlich deutlich.

Mit diesen Monte-Carlo-Verfahren sind heute auch schwierigste Strömungsprobleme in größeren Höhen mit völlig ausreichender Genauigkeit lösbar; dabei spielen die Verbesserung der Modelle, der Algorithmen und der Rechner zusammen – keine für sich wäre ausreichend. Dies bedeutet auch, daß es falsch ist, nur auf die Verbesserung der "künstlichen Intelligenz" zu hoffen und zu warten – die intensive Bemühung der natürlichen ist mindestens ebenso unabdingbar.

Visualisierung

Es bleibt – nach Modellierung und Berechnung – der letzte Schritt: Ein Computer produziert Symbol- oder Zahlenreihen, insbesondere letztere oft von ungeheurer Länge. Schließlich hat er auch bei unserem Ersatzbillard am Ende die Orte und Geschwindigkeiten von ca. einer Million Teilchen zu verschiedenen Zeiten berechnet – wer liest und vor allem: wer deutet diese 100 Millionen Zahlen? Verwandelt man diese Zahlen in Bilder der Strömungsfelder (wobei z.B. die Temperatur durch Färbung – gelb an Orten hoher, blau an solchen niederer Temperatur – wiedergegeben wird), so hat man die wesentliche Information oft auf "einen Blick". Will man es dann ganz genau wissen, kann man anhand dieses Überblickes noch bestimmte Einzelheiten kontrollieren oder wenige Kennzahlen berechnen. Ohne Visualisierung sind die Daten oft wertlos. So zeigt am Ende der Bildschirm wieder ein Bild des Raumfahrzeugs, wobei dessen Farbe aber nicht interessiert, sondern eben die Farben, die die physikalisch wichtigen Größen charakterisieren. Strömungsbilder sind heute oft so bunt, daß man CFD (Computational Fluid Dynamics) auch mit Coloured Fluid Dynamics übersetzt.

Wir betreten hier ein anderes interessantes Gebiet vor, in dem die Mathematik eine Rolle spielen kann: Wie kann man die unglaublichen Leistungen des menschlichen Gehirns bei der Speicherung, Verarbeitung und Ordnung so ungeheurer Datenmengen wie sie eigentlich in Musik und Bildern vorliegen, verstehen? Wieviel Daten hinter diesen Dingen stecken merkt man, wenn man sie digitalisiert – das tut man z.B. bei der Herstellung von compact discs. Digitalisierte, d.h. in Zahlenreihen verwandelte Musik oder Filme sind besser handhabbar, d.h. störunanfälliger, speicher-, übertrag- und transformierbar. Will man ein Porträt in einen Computer bringen (um es zu speichern, wiederzuerkennen etc.), so muß man alle Farbwerte, Bildelement für Bildelement, pixel für pixel, abspeichern, und es ergeben sich mehrere Millionen Daten: Wie kann man den Rechner lehren, das zu tun, was wir jeden Tag ohne Mühe vollbringen, wenn wir durch die Fußgängerzone gehen, unter all den vielen Gesichtern, denen wir begegnen, das des Freundes, der sich seit unserer letzten Begegnung doch deutlich verändert hat, wiederzuerkennen? Da muß das "Urbild" gespeichert sein und alle Gesichter, die wir sehen, müssen in atemberaubender Geschwindigkeit mit diesem Urbild verglichen, Ähnlichkeiten, meist Unähnlichkeiten konstatiert werden. Kein herkömmlicher Computer kommt auch nur in die Nähe der Leistungen unseres Gehirns (dessen Neuronen zudem recht langsam arbeiten) – deshalb sind "neuronale Netze", primitive Nachbildungen unseres Gehirns, sehr in Mode. Auch hier braucht man mathematische Modelle dieser neuronalen Netze und der Bildverarbeitungsprozesse, auch hier spielen numerische und symbolische Algorithmen eine entscheidende Rolle. Ein sehr wichtiger Aspekt ist die Datenreduktion: Vielleicht ist diese pixelweise Darstellung nur eine besonders ungeschickte und man findet andere, viel sparsamere Modelle? Es gibt viele Ideen zur Datenreduktion, deren Erfolg natürlich auch von dem betrachteten Bild abhängt. Ein Ansatz hat in den letzten Jahren die größte öffentliche Aufmerksamkeit gefunden: Die Idee der fraktalen Geometrie mit ihren Stichworten wie Selbstähnlichkeit, dynamische Systeme und Chaos. Obwohl unter Mathematikern umstritten, verdient sie nach meiner Meinung durchaus Beachtung: Immer haben Entdeckungen, daß hinter sehr komplex wirkenden Erscheinungen verblüffend einfache Gesetze stehen, die Gemüter bewegt. Daß sich z.B. die vielfältigen Bewegungen der Himmelskörper mit ganz wenigen Gesetzen erklären lassen, gilt als eine der größten Entdeckungen der Wissenschaft – und ist Datenreduktion in Perfektion: Man braucht nur die Daten der Körper zu einem Zeitpunkt, um ihre Bahnen, d.h. ihre Daten zu allen späteren Zeitpunkten vorhersagen zu können. Und es ist die Entdeckung der fraktalen Geometrie, daß sich die Bilder wilder Landschaften und feingliedriger Pflanzen aus einfachen Gesetzen mit wenigen wählbaren Parametern (den "Daten" dieser Bilder) gewinnen lassen. Der Weg vom Bild zum Gesetz ist Datenreduktion; die Tatsache, daß einfache Gesetze so chaotisch oder zufällig wirkende Konsequenzen haben können, ist Ausgangspunkt vieler philosophischer Spekukationen. Dies alles hat die fraktale Geometrie in der

Öffentlichkeit als die moderne Mathematik schlechthin erscheinen lassen; das ist sie sicher nicht – aber es sollte für Mathematiker ein Grund der Freude sein, wenn wenigstens einzelne Fazetten ihrer Wissenschaft so große Beachtung finden.
Natürlich ist dies nur ein Teilaspekt meines letzten Stichworts "Visualisierung" – oft geht es dabei eher um den umgekehrten Prozeß: Die Verwandlung eines Bildes in Daten. Aber es hat etwas damit zu tun, daß am Ende jedes wissenschaftlichen Prozesses, auch von Computersimulation, Erkenntnis stehen soll und diese ist ein Prozeß in unserem Gehirn. Die Ergebnisse müssen also in einer den Sinnen und damit dem Gehirn besonders zugänglichen Weise aufbereitet werden. So stehen am Ende der Computersimulation eben wieder Bilder – natürlich manipulierte, vereinfachte, zweckbestimmte Bilder: Sie sollen der Vorhersage vorher festgelegter Aspekte dienen, nicht eine umfassende Wahrheit widerspiegeln. Wenn man sich dessen – und auch der möglichen Fehlerquellen in Modell und Algorithmus – bewußt ist, ist Computersimulation ein mächtiges Hilfsmittel. Vergißt man dies, nimmt diese virtuelle Welt als Wirklichkeit, ist man sehr leicht täusch- und manipulierbar.

Schlußbemerkung

Der Computer hat der Mathematik durch mathematische Modellierung, Berechnung und Visualisierung neue Möglichkeiten und natürlich auch neue Aufgaben eröffnet. Dies alles verändert auch die Mathematik selbst: Gleichungen werden interessant, weil sie Modelle darstellen, Algebra und Logik werden zur Computeralgebra und zu "symbolic computation", die Geometrie verlagert ihre Schwerpunkte.
Der Antrieb aber, Mathematik zu betreiben, verändert sich nicht grundlegend; Mathematiker zu sein ist Profession und Passion zugleich. Natürlich: Wir sollen und wollen nützlich sein. Aber wir können es nur, wenn wir etwas Freiraum behalten für das Spiel, die freie Entfaltung der Kreativität. Unsere Modelle, Algorithmen und Bilder werden nur gut und wirklich neu, wenn wir Zeit und "Muße" finden, die Phantasie laufen zu lassen. Vermutlich geht es uns dabei wie den Künstlern.

Mathematik und Computersimulation: Modelle, Algorithmen, Bilder

Helmut Neunzert
Universität Kaiserslautern, Germany

Einleitung

Mathematik ist nicht jene abstrakte, weltabgewandte Wissenschaft, für die viele sie halten – sie war es auch nie. "Mathematik ist nicht trocken, sondern voller Phantasie, nicht langweilig, sondern voller Schönheit, logisch, aber dennoch von ungeheurer Kreativität, uralt, aber voll neuer Ideen. Mathematik ist wie das Spiel, wie die Kunst ein Bestandteil, ja vielleicht sogar ein besonders sensibler Repräsentant der Kultur und nicht zuletzt ein unersetzliches Hilfsmittel der Naturwissenschaften, der Technik, der Wirtschaft. Mathematik ist Werkzeug und Spiel und notwendigerweise beides. Mathematik liefert auch oft genug einen Anreiz, zu philosophieren, zur rationalen Reflexion in einem irrationalen Hin und Her zwischen Fortschrittsgläubigkeit und Fortschrittsfeindlichkeit!" (H. Neunzert, B. Rosenberger: Schlüssel zur Mathematik, ECON 1991, S. 5).

In diesem Aufsatz geht es uns um eine neue Rolle, die die Mathematik als Werkzeug zur Lösung außermathematischer Probleme heute spielt – vor allem, weil ihr selbst ein neues Werkzeug, der Computer, erwachsen ist. Aber auch deshalb, weil sie, durch Aufgabe und Lösungsmethode getrieben, sich dem Dialog und der Zusammenarbeit mit anderen Disziplinen neu öffnet. Es ist, wie bei vielen Wissenschaften, so auch bei der Mathematik zu beobachten, daß "die verschiedenen Fachsprachen füreinander wieder verständlich werden – man hört aufeinander und man versteht einander. Die Disziplinen verlassen ihre babylonischen Elfenbeintürme und breiten ihre Probleme und Ideen voreinander aus" (H. Neunzert: Von der neuen Rolle der Mathematik, erscheint in GAMM-Mitteilungen, Heft 2, 1994).

Der Mathematiker, im Team mit Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und Informatikern, mit Hilfe des Computers an der Lösung tecnnischer, ökonomischer und ökologischer Probleme arbeitend - wie ist diese neue Aufgabe möglich geworden? Es gibt seit wenigen Jahren zwei kräftige Strömungen in der angewandten Mathematik, die unter dem Namen "Mathematical Modelling" und "Scientific Computing" (die deutschen Bezeichnungen "Mathematische Modellierung" und "Wissenschaftliches Rechnen" haben irreführende Konotationen) figurieren. Dies sind Arbeitsvorgänge bei der Erstellung einer Computersimulation, die reale Prozesse unter Vernachlässigung unwesentlich erachteter Aspekte im Computer nachspielt. Dabei taucht an zwei Stellen der Begriff "Bild" auf: Einmal muß der reale Prozeß in Mathematik abgebildet werden (das ist der Modellierungsschritt), um dann mittels Algorithmen im Rechner simuliert werden zu können; zum anderen produziert der Computer primär nur Zahlen- oder Symbolkolonnen, die in reale Bilder zurückübersetzt werden müssen, da diese für den Menschen viel leichter faßbar sind. Man nennt diesen Prozeß "Visualisierung" - ein drittes Schlagwort moderner angewandter Mathematik. Letztendlich wird so die reale Welt in eine virtuelle Bilderwelt verwandelt, wobei ein "Zweckfilter" eingebaut ist: Die virtuelle Welt zeigt nur, was für die Erreichung eines vorher definierten Zweckes wichtig ist.

Ich will im folgenden auf die drei Schritte - Modelling, Scientific Computing und Visualisierung - näher eingehen und diskutieren, wie sie und die Mathematik sich gegenseitig beeinflussen. Dabei nutze ich hauptsächlich ein praktisches Beispiel meiner eigenen Erfahrung: Beim Wiedereintritt von Raumfahrzeugen (Fähren oder Kapseln) in die Erdatmosphäre spielt die Erwärmung der Fahrzeugoberfläche eine große Rolle; sie hängt natürlich von der Form des Fahrzeugs und seiner Oberflächenbeschaffenheit sowie von Fahrtgeschwindigkeit und Luftdichte ab. Um die Gestaltungsmöglichkeiten optimal zu nutzen, braucht man genauere Kenntnisse über diese Abhängigkeit, und es ist ein Charakteristikum der Raumfahrttechnik, daß man diese nur in sehr geringem Umfang aus Realexperimenten gewinnen kann; die in Wirklichkeit auftretenden Geschwindigkeiten und Temperaturen sind im Windkanal kaum reproduzierbar. Deswegen ist man hier in besonderem Maße auf eine Computersimulation angewiesen – ihre Zuverlässigkeit kann lebensentscheidend sein. Das Modellieren der Atmosphäre in größeren Höhen (um 100 km), die Berechnung der wichtigen Daten und die Visualisierung der Strömung können in diesem Aufsatz zwar nur angedeutet werden, scheinen mir aber doch zur Illustrierung der Konzepte geeignet.

Modelle

Was versteht man unter "mathematischer Modllierung"? Im neuesten Brockhaus findet man eine Beschreibung der mathematischen Modelltheorie, die wenig mit unserem Begriff zu tun hat und dann, als "naturwissenschaftliches Modell": "Ein Abbild der Natur unter Hervorhebung für wesentlich erachteter Eigenschaften und Außerachtlassen als nebensächlich angesehener Aspekte. Ein Modell in diesem Sinn ist ein Mittel zur Beschreibung der erfahrenen Realität, zur Bildung von Begriffen der Wirklichkeit und Grundlage von Voraussagen über künftiges Verhalten des erfaßten Erfahrungsbereiches."
Sehr klar beschreibt es Heinrich Hertz 1897 in der Einleitung seiner "Prinzipien der Mechanik": "Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns **innere Scheinbilder oder Symbole** der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände". Selbstverständlich kann

diese Konzeption philosophisch hinterfragt werden - eine recht moderne, neurophysiologisch beeinflußbare Interpretation bietet z.B. der radikale Konstruktivismus (siehe z.B. H.R. Maturana, F.J. Varela: Der Baum der Erkenntnis, Goldmann 1990). Statt dessen sehen wir uns noch die Regeln für die Erstellung dieser inneren Bilder an, wie Hertz sie selbst aufstellte. Eine Regel steht schon in dem Einführungstext: Was aus den Bildern geschlossen werden kann, muß der Wirklichkeit entsprechen - Hertz nennt das: Die Modelle müssen "richtig" sein. Außerdem müssen die Modelle in sich widerspruchsfrei oder "logisch zulässig" sein. Schließlich kann es verschiedene richtige und logisch zulässige Bilder derselben Realität geben - Modelle sind nicht eindeutig. Unter mehreren zulässigen und richtigen Bildern wähle man, so Hertz, das sparsamste, jenes also, das die gewünschten Vorhersagen mit dem geringsten Aufwand leistet.

Wo bleibt da die **Mathematik**? Ganz einfach: Sie ist der **Rohstoff dieser Modelle**, das, woraus diese Bilder gemacht sind. Modelle sind am Ende mathematische Strukturen, Gleichungen, Relationen etc. Für den mathematischen Modellierer ist Mathematik das, was nach meiner Vorstellung Bronze, Stein, Holz etc. für den Bildhauer ist. Man kann sich das auch so vorstellen, daß der (reine) Mathematiker einen Vorrat möglicher Muster produziert und der angewandte Mathematiker, der Modellierer, versucht, das einer gegebenen Realität am besten entsprechende Muster zu finden. Je reicher, gestaltbarer der Rohstoff, desto besser das Modell - wer keinen Vorrat an Mathematik hat, kann keine guten Bilder machen. Und der menschliche Geist ist unglaublich erfinderisch, was neue Ordnungsmuster anbelangt: Mathematik wird erfunden, geschaffen, nicht entdeckt.

Modellieren, ich wiederhole, ist das Finden passender Beziehungen für betrachtete Objekte, wobei man natürlich abstrahiert, von dem für die Vorhersage unwesentlichen absieht. Logisch zulässig sind die Modelle, wenn ihre Mathematik in sich stimmig ist, z.B. wenn die Gleichungen wirklich Lösungen besitzen, die eindeutig sind etc. Die "Richtigkeit" ist natürlich keine innermathematische Frage: Man muß Konsequenzen aus dem Modell ziehen, Lösungen berechnen und mit der Beobachtung, dem Experiment vergleichen. Dies ist Modellvalidierung - Modelle hängen immer von irgendwelchen Daten, Parametern ab und die Validierung erfolgt für einige Parameterwerte, für die eben der Vergleich mit der Realität möglich ist; die Vorhersage besteht dann in der Nutzung des Modells für andere, nicht validierte Werte.

Selbstverständlich beschreibt, was ich hier Modellbildung und Validierung nenne, die Arbeitsweise der ganzen abendländischen Wissenschaft. Man "entdeckt" die Newtonschen Gesetze anhand einiger Beobachtungen (z.B. dem Fallen eines Apfels), erprobt sie an anderen Beobachtungen (z.B. der Bewegung von Himmelskörpern) und wendet sie dann zur Vorhersage an (z.B. der Bahn der Sonde "Voyager"). Die Kunst dabei ist natürlich, die richtigen Begriffe und Beziehungen zwischen ihnen zu finden ("Beschleunigung", "Kraft", "proportional", "träge = schwer") – und es ist eine Kunst, diese Modelle auszuwerten, die Gleichungen zu lösen.

Boltzmann z.B. – wir kommen zu unserem Illustrationsbeispiel – entdeckte um 1870, daß man sich ein Gas wie ein riesiges dreidimensionales Poolbillard vorstellen kann – bis zu 10^{23} Billardkugeln (= Moleküle) pro Kubikmeter laufen zwischen Zusammenstößen untereinander und mit den Wänden (z.B. mit der äußeren Hülle eines Raumfahrzeugs) geradlinig hin und her, wobei z.B. ihre Impulsabgabe beim Auftreffen auf die Wände für den Gasdruck verantwortlich ist und die Abweichung ihrer Einzelgeschwindigkeiten von einer mittleren Geschwindigkeit für die Temperatur. Aus dieser Vorstellung läßt sich eine Gleichung – die Boltzmanngleichung – herleiten, die die zeitliche Entwicklung aller wichtigen Größen eines "dünnen" Gases (Dichte, Strömungsgeschwindigkeit, Temperatur) beschreibt. Sie ist äußerst komplex und läßt sich nur für einfache Gegebenheiten lösen und mit der Wirklichkeit vergleichen. Für interessante Probleme, z.B. der Umströmung eines Raumfahrzeugs in ca. 100 km Höhe (dort ist das Gas dünn genug) ließ sich dieses Modell bis vor kurzem nicht auswerten; eine Vorhersage des Einflusses der Fahrzeugform auf die Erwärmung der Oberfläche war vor 10 Jahren noch nicht möglich.

Algorithmen und Computer

Wir sind jetzt bei der Frage angelangt, warum Modellieren heute neu in Mode gekommen ist, warum sich die Mathematik dieser Sachen verstärkt annimmt. Modelle, schon immer von mathematisch gebildeten Naturwissenschaftlern, Ingenieuren oder Ökonomen entwickelt, waren häufig einer Nutzung nicht zugänglich, weil ihre Validierung und ihre Auswertung zum Zwecke der Vorhersage zu komplex war. Hier hat nun der **Computer** eine vollständige Wende gebracht – mit ihm ist ein Hilfsmittel entstanden, das die Zuverlässigkeit und den Anwendungsbereich dieser wissenschaftlichen Methode ungeheuer erweitert. Sie heißt deshalb auch "scientific computing" und bedeutet die Auswertung mathematischer Modelle mit Hilfe des Computers.

Natürlich: Modelle wurden auch schon in der Vergangenheit zum Zwecke einer Vorhersage ausgewertet, wobei meist eine Näherungslösung genügt. Wenn man etwa zu biblischen Zeiten wissen wollte, wie lang der Zaun um ein in etwa kreisförmiges Weidefeld des Durchmessers d sein mußte (auch das ist ja Vorhersage!), so multiplizierte man d mit 3 (das steht so im Alten Testament); in Indien etwa zur gleichen Zeit benutzte man $\frac{22}{7}$ statt 3 (was den biblischen Fehler bei $d = 100$ m von ca. 14 m auf ca. 12 cm reduzierte, eine gewiß mehr als zufriedenstellende Genauigkeit). Heute weiß jedes Kind, daß der Faktor π ist und findet ihn in Tabellen und in seinem PC – allerdings hat kaum jemand eine Ahnung davon, wie der PC auf $\pi = 3.141592653....$ kommt. In der Tat stecken ungeheure Mühen über Jahrhunderte in dem Prozeß, der es heute erlaubt, mit Hilfe von Superrechnern π mit einer Genauigkeit von über 500 Millionen Dezimalstellen zu berechnen (wobei hier weniger das Interesse des **Hirten**, sondern die Frage nach verborgener Gesetzmäßigkeit einer solchen "transzendenten Zahl" die Motivation liefert). In diesem Beispiel ist das mathematische Modell der Kreis und die Auswertung des Modells steckt in der approximativen Berechnung von π.

Die Physik hat im Laufe ihrer Geschichte unzählige und viel komplexere Modelle entwickelt. Da es ihr meist um das "Verstehen", das Erfassen von Naturgesetzen ging, konnte sie sich oft auf einfache geometrische Konfigurationen, auf für das Verständnis besonders nützliche Sonderfälle, beschränken: Die Modelle können dadurch oft vereinfacht und "per Hand" ausgewertet werden. So kann man z.B. die Entzündung einer Flamme "verstehen", indem man diesen Prozeß mit dem plötzlichen Auftreten einer zweiten Lösung einer von der Temperatur abhängigen Gleichung identifiziert. Will man aber Naturverständnis in technische Gestaltung verwandeln – etwa die Zündungsvorgänge in einem Automobilmotor optimal regeln – so genügen einfache Spezialfälle und einfache Geometrien nicht mehr: Man muß das Modell, das Entstehung, Ablauf und Ausbreitung des Zündungsvorgangs in einem Motorzylinder beschreibt, auswerten. Dies meinte der führende deutsche Mathematiker der Jahrhundertwende, Felix Klein, wenn er sagte, daß Physik oft "eindimensional", Technik aber immer "dreidimensional" sei. Das Modellieren technischer Probleme ist oft einfacher, aber die Auswertung, die Berechnung der Vorhersage ist schwieriger: Man will eben viel mehr Details wissen. Deshalb spielt das scientific computing in der Technik und in der industriellen Entwicklung eine immer größere Rolle. Man simuliert technische Systeme, manchmal in "real time" – die Auswertung des Modells ist so schnell, daß auf dem Bildschirm die Bilder aufeinanderfolgender Zustände des Systems so rasch folgen wie in Wirklichkeit.

Natürlich ist auch die Naturwissenschaft anspruchsvoller geworden, sie erwartet mehr als qualitatives Verständnis von den Modellen: Klimaentwicklungen werden ebenso simuliert wie die Alterungsprozesse von Sternen. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn Realexperimente (wie beim Klima oder in der Astrophysik) unmöglich sind oder wenn sie (wie in der Raumfahrt die Erprobung verschiedener Fahrzeugformen) zu teuer sind.

Man hat viele verschiedene Namen für diese Verbindung von Modellierung und Berechnung geprägt: "Computational Science" oder "Computersimulation" oder einfach, wie der russische Mathematiker A.A. Samarskii, "Computerexperiment". Er unterscheidet 3 Phasen dieses Experiments: Modell–Algorithmus–Programm (MAP, vielleicht das Abbild = map der Wirklichkeit in den Computer). Algorithmen sind Vorschriften zur (i.a.) näherungsweisen Lösung der Modelle – Programm meint die Realisierung dieser Vorschriften, die Erstellung von software. Softwarepakete sind letztlich auch die Instrumente dieses Experiments; sie werden oft von anderen dann als black box, d.h. ohne genaue Kenntnis des Modells oder des Algorithmus, benutzt. Dann verliert ein solcher Experimentator leicht die Mathematik aus den Augen und nur, wenn etwas nicht funktioniert, z.B. das Experiment unglaubwürdige Werte liefert (oder jemand anderes mit anderen Instrumenten andere Ergebnisse erzielt), beginnt man über die "Richtigkeit" des Modells, die Korrektheit der Algorithmen nachzudenken. Und neben der schon beschriebenen Mitwirkung beim Modellieren hat der Mathematiker heute vor allem die Aufgabe, Algorithmen zu entwickeln und nachzuweisen, daß diese das Modell zumindest mit hinreichender Exaktheit lösen. Besonders bei der Implementierung dieser Algorithmen, dem P-Teil in MAP, wird er eine Zusammenarbeit mit dem Informatiker schätzen.

Oft sind Modelle (etwa in der Klimatologie, aber auch für technische Systeme) Differentialgleichungen, und oft muß man versuchen, die aus diesen Differentialgleichungen zu errechnenden Funktionen durch endlich viele Funktionswerte anzunähern; dies ist Gegenstand der klassischen "analytischen Numerik". Insbesondere bei der Modellierung von Wirtschaftsprozessen, aber z.B. auch von Transportsystemen oder bei dem Design von Computerchips ist dagegen eher die diskrete Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) gefragt. Mehr und mehr erfordert die Auswertung von Modellen das Arbeiten mit algebraischen oder symbolischen Ausdrücken - das sich schnell entwickelnde Feld der "Computeralgebra" oder, noch allgemeiner, der "Symbolic Computation". "Computeralgebrasysteme erlauben das interaktive, formelmäßige Rechnen mit mathematischen Objekten, wie sie etwa in der täglichen Arbeit eines Ingenieurs oder Physikers mit anspruchsvollem Hintergrund vorkommen. Im Unterschied zur numerischen Behandlung mathematischer Sachverhalte manipuliert Computeralgebra also Zeichen und Symbole. Eine ganz natürliche Sache, da Computer zu allem eher geeignet sind als zum Rechnen mit reellen Zahlen, denn eine beliebige reelle Zahl ist ja bekanntermaßen ein außerordentlich kompliziertes Gebilde, wohingegen ein Symbol, etwa der Buchstabe π, ein sehr einfach strukturiertes Objekt ist." So beschreibt einer der deutschen Apologeten der Computeralgebra, Bruno Fuchssteiner aus Paderborn, sein Fach - hier und da etwas überpointierend (ich glaube doch, daß die "tägliche" Arbeit eines Ingenieurs auch mit "anspruchsvollem Hintergrund" etwas anders aussieht - z.B. benötigt er am Ende des Tages doch die Kenntnis, daß $\pi = 3.1415...$ ist), aber insgesamt zutreffend. "Symbolic computation" ist Teil des "scientific computing" und so an einer neuen Rolle der Mathematik wesentlich beteiligt (das von Bruno Buchberger in Linz gegründete Research Institute for Symbolic Computation = RISC hat viele überzeugende Beispiele).

Da ich selbst der Numerik, den Algorithmen mit Zahlen, näher stehe (und auch dieses Gebiet insgesamt sicher noch dominiert), stammt auch mein Anschauungsmaterial von dort. Zurück also zu unserem Poolbillard, mit Hilfe dessen wir die Erwärmung einer zur Erde zurückkehrenden Raumkapsel vorhersagen wollten. Können wir dieses Spiel im Rechner nachspielen? Erste Versuche des amerikanischen Mathematikers Stanislaw Ulam um 1940 in Los Alamos waren nicht so erfolgversprechend: Will man wirklich berechnen, welche von den ungeheuer vielen Billardkugeln wo und genau wie zusammenstoßen, sprengt man jeden Rahmen – auch dann, wenn man sich auf "Hochrechnungen" mit Stichproben von ca. 1 Million Bällen beschränkt und die Rechner der letzten Generation verwendet. Dieses Modell ist auch heute noch zu komplex, um eine vernünftige Computersimulation zu ermöglichen.

Die letzte der Hertzschen Regeln wies schon darauf hin, daß es immer mehrere "geeignete" Modelle gibt und schlug vor, das sparsamste auszuwählen. Wir müssen also ein neues Billardspiel erfinden, das auf dem Computer leichter nachspielbar und trotzdem "richtig" ist, d.h. das die uns interessierenden Größen wie Druck, Widerstand, Auftrieb, Temperatur genau genug vorhersagt. Man darf nicht vergessen: Auch Boltzmann beschrieb "die Wirklichkeit" nur in einem Bild, auch wenn uns dieses heute besonders natürlich, "physikalisch richtig" vorkommt (das war zu Boltzmanns "Jugendstilzeiten" gar nicht so, viele hielten sein Poolbillard für ein Hirngespinst – das Gefühl für die Glaubwürdigkeit dieser mathematischen Bilder ändert sich wohl wie jenes für die Schönheit in der Kunst). Unser neues Bild behält die Idee, daß ein Zusammenstoß zweier Kugeln ein "Paarereignis" ist, das die Geschwindigkeiten der beiden beteiligten Kugeln ändert – es gibt die Idee des Stoßes als eines örtlichen Zusammentreffens zweier Kollisionspartner auf. Statt dessen wählen wir zwei nicht zu weit voneinander entfernte Kugeln nach einer bestimmten mathematischen Zufallsregel (deshalb heißen solche Verfahren auch "Monte-Carlo-Verfahren") als Stoßpaar aus und errechnen nach einer weiteren solchen Regel die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Diese Regeln – dies ist natürlich entscheidend – müssen so gewählt werden, daß das neue Spiel wie oben beschrieben "richtig" ist – und es ist keineswegs einfache Mathematik, diese Regeln zu finden. Man braucht sehr viel reine, d.h. bisher nicht angewandte Mathematik – guten Rohstoff für das Modell. Dieses ist mikroskopisch gesehen anders als unser Bild von der Natur, makroskopisch aber richtig. Und es ist ökonomischer: Es läßt sich auf dem Computer nachspielen, der auf diese Weise auf die Modelle und letztlich auch auf den Rohstoff, die Mathematik, zurückwirkt.

Weil mir dieser Prozeß – die durch das Auswertungswerkzeug bedingte Veränderung der Modelle weg von der "Mikrophysik" ohne Beeinträchtigung der Makrophysik – wichtig erscheint, will ich noch eine Analogie mit einem alltäglichen Phänomen erwähnen: In Europa beginnt eine spätere Partnerschaft meist mit einer (räumlichen) Begegnung – in der Schule, der Disco, beim Sport etc. Solche "Kollisionen" verändern dann das spätere Leben der Partner; diese "mikroskopischen" Ereignisse bestimmen letztlich die Bevölkerungsstatistik, also das "makroskopische Verhalten" der Gesellschaft. Nun gibt es – in anderen Teilen der Welt – auch andere Modelle: Dort wählt ein Heiratsvermittler nach bestimmten Regeln die Paare aus; solche "Kollisionen" sind also nicht mehr räumliche Begegnungen – die Regeln des Heiratsvermittlers und seine (vielleicht zufälligen) Kenntnisse ersetzen diese. Ein ganz anderes Modell – demographisch aber unter Umständen (d.h. von der Regel abhängend) nicht von unserem europäischen unterscheidbar. Vielleicht mit geringerem Vergnügen für die Einzelnen, aber möglicherweise gesellschaftspolitisch effizienter. Die Analogie zu unserem Ersatzbillard ist hoffentlich deutlich.

Mit diesen Monte-Carlo-Verfahren sind heute auch schwierigste Strömungsprobleme in größeren Höhen mit völlig ausreichender Genauigkeit lösbar; dabei spielen die Verbesserung der Modelle, der Algorithmen und der Rechner zusammen – keine für sich wäre ausreichend. Dies bedeutet auch, daß es falsch ist, nur auf die Verbesserung der "künstlichen Intelligenz" zu hoffen und zu warten – die intensive Bemühung der natürlichen ist mindestens ebenso unabdingbar.

Visualisierung

Es bleibt – nach Modellierung und Berechnung – der letzte Schritt: Ein Computer produziert Symbol- oder Zahlenreihen, insbesondere letztere oft von ungeheurer Länge. Schließlich hat er auch bei unserem Ersatzbillard am Ende die Orte und Geschwindigkeiten von ca. einer Million Teilchen zu verschiedenen Zeiten berechnet – wer liest und vor allem: wer deutet diese 100 Millionen Zahlen? Verwandelt man diese Zahlen in Bilder der Strömungsfelder (wobei z.B. die Temperatur durch Färbung – gelb an Orten hoher, blau an solchen niederer Temperatur – wiedergegeben wird), so hat man die wesentliche Information oft auf "einen Blick". Will man es dann ganz genau wissen, kann man anhand dieses Überblickes noch bestimmte Einzelheiten kontrollieren oder wenige Kennzahlen berechnen. Ohne Visualisierung sind die Daten oft wertlos. So zeigt am Ende der Bildschirm wieder ein Bild des Raumfahrzeugs, wobei dessen Farbe aber nicht interessiert, sondern eben die Farben, die die physikalisch wichtigen Größen charakterisieren. Strömungsbilder sind heute oft so bunt, daß man CFD (Computational Fluid Dynamics) auch mit Coloured Fluid Dynamics übersetzt.

Wir betreten hier ein anderes interessantes Gebiet vor, in dem die Mathematik eine Rolle spielen kann: Wie kann man die unglaublichen Leistungen des menschlichen Gehirns bei der Speicherung, Verarbeitung und Ordnung so ungeheurer Datenmengen wie sie eigentlich in Musik und Bildern vorliegen, verstehen? Wieviel Daten hinter diesen Dingen stecken merkt man, wenn man sie digitalisiert – das tut man z.B. bei der Herstellung von compact discs. Digitalisierte, d.h. in Zahlenreihen verwandelte Musik oder Filme sind besser handhabbar, d.h. störunanfälliger, speicher-, übertrag- und transformierbar. Will man ein Porträt in einen Computer bringen (um es zu speichern, wiederzuerkennen etc.), so muß man alle Farbwerte, Bildelement für Bildelement, pixel für pixel, abspeichern, und es ergeben sich mehrere Millionen Daten: Wie kann man den Rechner lehren, das zu tun, was wir jeden Tag ohne Mühe vollbringen, wenn wir durch die Fußgängerzone gehen, unter all den vielen Gesichtern, denen wir begegnen, das des Freundes, der sich seit unserer letzten Begegnung doch deutlich verändert hat, wiederzuerkennen? Da muß das "Urbild" gespeichert sein und alle Gesichter, die wir sehen, müssen in atemberaubender Geschwindigkeit mit diesem Urbild verglichen, Ähnlichkeiten, meist Unähnlichkeiten konstatiert werden. Kein herkömmlicher Computer kommt auch nur in die Nähe der Leistungen unseres Gehirns (dessen Neuronen zudem recht langsam arbeiten) – deshalb sind "neuronale Netze", primitive Nachbildungen unseres Gehirns, sehr in Mode. Auch hier braucht man mathematische Modelle dieser neuronalen Netze und der Bildverarbeitungsprozesse, auch hier spielen numerische und symbolische Algorithmen eine entscheidende Rolle. Ein sehr wichtiger Aspekt ist die Datenreduktion: Vielleicht ist diese pixelweise Darstellung nur eine besonders ungeschickte und man findet andere, viel sparsamere Modelle? Es gibt viele Ideen zur Datenreduktion, deren Erfolg natürlich auch von dem betrachteten Bild abhängt. Ein Ansatz hat in den letzten Jahren die größte öffentliche Aufmerksamkeit gefunden: Die Idee der fraktalen Geometrie mit ihren Stichworten wie Selbstähnlichkeit, dynamische Systeme und Chaos. Obwohl unter Mathematikern umstritten, verdient sie nach meiner Meinung durchaus Beachtung: Immer haben Entdeckungen, daß hinter sehr komplex wirkenden Erscheinungen verblüffend einfache Gesetze stehen, die Gemüter bewegt. Daß sich z.B. die vielfältigen Bewegungen der Himmelskörper mit ganz wenigen Gesetzen erklären lassen, gilt als eine der größten Entdeckungen der Wissenschaft – und ist Datenreduktion in Perfektion: Man braucht nur die Daten der Körper zu einem Zeitpunkt, um ihre Bahnen, d.h. ihre Daten zu allen späteren Zeitpunkten vorhersagen zu können. Und es ist die Entdeckung der fraktalen Geometrie, daß sich die Bilder wilder Landschaften und feingliedriger Pflanzen aus einfachen Gesetzen mit wenigen wählbaren Parametern (den "Daten" dieser Bilder) gewinnen lassen. Der Weg vom Bild zum Gesetz ist Datenreduktion; die Tatsache, daß einfache Gesetze so chaotisch oder zufällig wirkende Konsequenzen haben können, ist Ausgangspunkt vieler philosophischer Spekukationen. Dies alles hat die fraktale Geometrie in der

Öffentlichkeit als die moderne Mathematik schlechthin erscheinen lassen; das ist sie sicher nicht – aber es sollte für Mathematiker ein Grund der Freude sein, wenn wenigstens einzelne Fazetten ihrer Wissenschaft so große Beachtung finden.
Natürlich ist dies nur ein Teilaspekt meines letzten Stichworts "Visualisierung" – oft geht es dabei eher um den umgekehrten Prozeß: Die Verwandlung eines Bildes in Daten. Aber es hat etwas damit zu tun, daß am Ende jedes wissenschaftlichen Prozesses, auch von Computersimulation, Erkenntnis stehen soll und diese ist ein Prozeß in unserem Gehirn. Die Ergebnisse müssen also in einer den Sinnen und damit dem Gehirn besonders zugänglichen Weise aufbereitet werden. So stehen am Ende der Computersimulation eben wieder Bilder – natürlich manipulierte, vereinfachte, zweckbestimmte Bilder: Sie sollen der Vorhersage vorher festgelegter Aspekte dienen, nicht eine umfassende Wahrheit widerspiegeln. Wenn man sich dessen – und auch der möglichen Fehlerquellen in Modell und Algorithmus – bewußt ist, ist Computersimulation ein mächtiges Hilfsmittel. Vergißt man dies, nimmt diese virtuelle Welt als Wirklichkeit, ist man sehr leicht täusch- und manipulierbar.

Schlußbemerkung

Der Computer hat der Mathematik durch mathematische Modellierung, Berechnung und Visualisierung neue Möglichkeiten und natürlich auch neue Aufgaben eröffnet. Dies alles verändert auch die Mathematik selbst: Gleichungen werden interessant, weil sie Modelle darstellen, Algebra und Logik werden zur Computeralgebra und zu "symbolic computation", die Geometrie verlagert ihre Schwerpunkte.
Der Antrieb aber, Mathematik zu betreiben, verändert sich nicht grundlegend; Mathematiker zu sein ist Profession und Passion zugleich. Natürlich: Wir sollen und wollen nützlich sein. Aber wir können es nur, wenn wir etwas Freiraum behalten für das Spiel, die freie Entfaltung der Kreativität. Unsere Modelle, Algorithmen und Bilder werden nur gut und wirklich neu, wenn wir Zeit und "Muße" finden, die Phantasie laufen zu lassen. Vermutlich geht es uns dabei wie den Künstlern.

FOLGENDE BERICHTE SIND ERSCHIENEN:

1983

Nr. 1 FORSCHUNG
W.G. Eschmann und Ralph Götz
Optimierung von Gelenksechsecken

1984

Nr. 2 WEITERBILDUNG
H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Mathematische Weiterbildung

Nr. 3 FORSCHUNG
W. Krüger
The Trippstadt Problem

Nr. 4 WEITERBILDUNG
H. Neunzert, M. Schulz-Reese, K.E. Hoffmann
Mathematics in the University and Mathematics in Industry - Complement or Contrast?

Nr. 5 FORSCHUNG
A.K. Louis
The Limited Angle Problem in Computerized Tomography

Nr. 6 FORSCHUNG
W. Krüger
Regression für Ellipsen in achsenparalleler Lage

Nr. 7 FORSCHUNG
Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten, Teil 1

1985

Nr. 8 FORSCHUNG
W. Krüger, J. Petersen
Simulation und Extrapolation von Rainflow-Matrizen

Nr. 9 FORSCHUNG
W. Krüger, M. Scheutzow u. A. Beste, J. Petersen
Markov- und Rainflow-Rekonstruktionen stochastischer Beanspruchungszeitfunktionen

Nr. 10 FORSCHUNG
Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten, Teil 2

Nr. 11 FORSCHUNG
H. Ploss
Simulationsmethoden zur Lösung der Boltzmanngleichung

1986

Nr. 12 FORSCHUNG
M. Keul
Mathematische Modelle für das Zeitverhalten stochastischer Beanspruchungszeitfunktionen

Nr. 13 AUSBILDUNG
W. Krüger, H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Fundamentals of Identification of Time Series

Nr. 14 FORSCHUNG
H. Moock
Ein mathematisches Verfahren zur Optimierung von Nocken

Nr. 15 FORSCHUNG
F.-J. Pfreundt
Berechnung und Optimierung des Energiegewinnes bei Anlagen zur Lufterwärmung mittels Erdkanal

Nr. 16 FORSCHUNG
F.-J. Pfreundt
Berechnung einer 2-dimensionalen Kanalströmung mit parallel eingeblasener Luft

Nr. 17 FORSCHUNG
G. Alessandrini
Some remarks on a problem of sound measurements from incomplete data

Nr. 18 AUSBILDUNG
W. Diedrich
Einfluß eines Latentwärmespeichers auf den Wärmefluß durch eine Ziegelwand

Nr. 19 FORSCHUNG
M. Stöhr
Der Kalman-Filter und seine Fehlerprozesse unter besonderer Berücksichtigung der Auswirkung von Modellfehlern

Nr. 20 FORSCHUNG
H. Babovsky
Berechnung des Schalldrucks im Innern eines Quaders

Nr. 21 FORSCHUNG
W.G. Eschmann
Toleranzuntersuchaungen für Druckmessgeräte

1987

Nr. 22 FORSCHUNG
G. Schneider
Stratification of solids, a new perspective in three dimensional computer aided design

Nr. 23 FORSCHUNG
H.-G. Stark
Identifikation von Amplituden und Phasensprüngen im Intensitätsverlauf eines-Nd-YAG Festkörperlasers

Nr. 24 FORSCHUNG
M. Scheutzow
Einfache Verfahren zur Planung und Auswertung von Navigationsversuchsfahrten

Nr. 25 FORSCHUNG
G.R. Dargahi-Noubary
A Parametric Solution for Simple Stress-Strength Model of Failure with an Application

Nr. 26 FORSCHUNG
U. Helmke, D. Prätzel-Wolters
Stability and Robustness Properties of Universal Adaptive Controllers for First Order Linear Systems

Nr. 27 FORSCHUNG
G. Christmann
Zeitreihen und Modalanalyse

1988

Nr. 28 FORSCHUNG
H. Neunzert, B. Wetton
Pattern recognition using measure space metrics

Nr. 29 FORSCHUNG
G. Steinebach
Semi-implizite Einschrittverfahren zur numerischen Lösung differential-algebraischer Gleichungen technischer Modelle

Nr. 30 FORSCHUNG
M. Brokate
Properties of the Preisach Model for Hysteresis

Nr. 31 FORSCHUNG
H.-G. Stark, H. Trinkaus, Ch. Jansson
The Simulation of the Charge Cycle in a Cylinder of a Combustion Engine

Nr. 32 FORSCHUNG
H. Babovsky, F. Gropengießer, H. Neunzert, J. Struckmeier, B. Wiesen
Low Discrepancy Methods for the Boltzmann Equation

Nr. 33 FORSCHUNG
M. Brokate
Some BV properties of the Preisach hysteresis operator

1989

Nr. 34 FORSCHUNG
H. Neunzert
Industrial Mathematics: General Remarks and Some Case Studies

Nr. 35 FORSCHUNG
M. Brokate
On a Characterization of the Preisach Model for Hysteresis

Nr. 36 FORSCHUNG
C.-P. Fritzen, P. Hackh
Optimization of a Spring for Dental Attachments

Nr. 37 FORSCHUNG
U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, S. Schmid
Adaptive Synchronization of Interconnected Linear Systems

Nr. 38 FORSCHUNG
U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, S. Schmid
Sufficient Conditions for Adaptive Stabilization and Tracking

Nr. 39 FORSCHUNG
U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, S. Schmid
Adaptive Tracking for Scalar Minimum Phase Systems

Nr. 40 FORSCHUNG
F.-J. Pfreundt
Nähen als dynamisches System

1990

Nr. 41 FORSCHUNG
H.-G. Stark
Multiscale Analysis, Wavelets and Texture Quality

Nr. 42 FORSCHUNG
I. Einhorn, H. Moock
A Deterministic Particle Method for the Simulation of the Boltzmann Transport Equation of Semiconductors

Nr. 43 FORSCHUNG
F. Gropengießer, H. Neunzert, J. Struckmeier
Computational Methods for the Boltzmann Equation

Nr. 44 FORSCHUNG
S. Nikitin, S. Schmid
Universal Adaptive Stabilizers for One-Dimensional Nonlinear Systems

Nr. 45 FORSCHUNG
P. Hackh
Quality Control of Artificial Fabrics

Nr. 46 FORSCHUNG
S. Körber, B. Wiesen
A Comparison of a Microscopic and a Phenomenological Model for a Polyatomic Gas

Nr. 47 FORSCHUNG
F. Gropengießer, H. Neunzert, J. Struckmeier, B.Wiesen
Several Computer Studies on Boltzmann Flows in Connection with Space Flight Problems

Nr. 48 FORSCHUNG
M. Brokate
Some Remarks on the Discretization of the Preisach Operator

Nr. 49 FORSCHUNG
M. Brokate
On the Moving Preisach Model

1991

Nr. 50 FORSCHUNG
W. Wagner
A Stochastic Particle System Associated with the Spatially Inhomogeneous Boltzmann Equation

Nr. 51 AUSBILDUNG
I.M. Sobol
Punkte, die einen mehrdimensionalen Würfel gleichmäßig ausfüllen

Nr. 52 FORSCHUNG
M. Brokate, A.H. Siddiqi
Sensitivity in the Rigid Punch Problem

Nr. 53 FORSCHUNG
S. Nikitin, D. Prätzel-Wolters
Multiparameter, Polynomial Adaptive Stabilizers

Nr. 54 FORSCHUNG
S. Schmid, D. Prätzel-Wolters
Synchronization through System Interconnections

Nr. 55 FORSCHUNG
D.Prätzel-Wolters, R.D. Reinke
Simple Adaptive Control of a Discrete Almost Strict Positive Real Heat Treatment System

Nr. 56 FORSCHUNG
S. Chen, D. Prätzel-Wolters
Modelling and Controller Design for Heat Treatment Processing of Enamelled Wires

Nr. 57 FORSCHUNG
B. Wiesen
On the Dependence of the Solution of Generalized Boltzmann Equation on the Scattering Cross Section: The Inverse Problem

Nr. 58 FORSCHUNG
G. Engl, R. Rösch
Studien zum Programmsystem PROM (Berechnung des instationären Ladungswechsels von zündenden Mehrzylinder- Verbrennungsmotoren)

Nr. 59 FORSCHUNG
J. Hoffmann, D. Prätzel-Wolters
Controllability Tests for Behaviour Systems in AR-Representations

Nr. 60 FORSCHUNG
M. Bäcker, H. Neunzert, S. Sundar, S. Younis
A 2-D Kaniel Kinetical Scheme for the Isentropic Compressible Flow

Nr. 61 FORSCHUNG
F.-J. Pfreundt, J. Struckmeier
On the Efficiency of Simulation Methods for the Boltzmann Equation on Parallel Computers

Nr. 62 FORSCHUNG
M. Schreiner
Weighted particles in the finite pointset method

Nr. 63 FORSCHUNG
D. Prätzel-Wolters, R. Reinke
Discrete Positive Real Systems and High Gain Stability

Nr. 64 FORSCHUNG
J. Hoffmann, D. Prätzel-Wolters
Dipolynomial minimal bases and linear systems in AR-representation

Nr. 65 FORSCHUNG
P. Krejci
Global behaviour of solutions to the wave equations with hysteresis

Nr. 66 FORSCHUNG
P. Krejci
Asymptotic stability of periodic solutions to the wave equations with hysteresis

Nr. 67 FORSCHUNG
J. Hoffmann, D. Prätzel-Wolters
Controllability Indices for Behaviour Systems in AR-Representations

1992

Nr. 68 FORSCHUNG
S. Nikitin
Stabilizability of Nonlinear Systems

Nr. 69 FORSCHUNG
S. Nikitin
Decoupling Normalizing Transformation and Local Stabilization of Nonlinear Systems

Nr. 70 FORSCHUNG
R. Illner, W. Wagner
A Random Discrete Velocity Model and Approximation of the Boltzmann Equation

Nr. 71 FORSCHUNG
L. Arkeryd, R. Illner
The Broadwell Model in a Box: Strong L1-Convergence to Equilibrium

Nr. 72 FORSCHUNG
J. Weickert
A Mathematical Model for Diffusion and Exchange Phenomena in Ultra Napkins

Nr. 73 FORSCHUNG
S. Rjasanow
Optimierung einer doppelwandigen Rohrleitung

Nr. 74 FORSCHUNG
M. Brokate, K. Dressler, P. Krejci
On the Mróz Model

Nr. 75 FORSCHUNG
S. Nikitin
Sensitivity of Luenberger observers, ε-observability and uncertainty relations

Nr. 76 FORSCHUNG
M. Brokate, J. Theel
Some numerical simulations of pseudoelastic hysteresis in shape memory alloys

Nr. 77 FORSCHUNG
S. Nikitin, A. Ilchmann, D. Prätzel-Wolters
Multiparameter, polynomial adaptive tracking for minimum phase systems

Nr. 78 FORSCHUNG
S. Nikitin
Topological necessary conditions of smooth stabilization in the large

Nr. 79 FORSCHUNG
J. Hoffmann, P.A. Fuhrmann
Remarks on orthogonal polynomials and balanced realizations

Nr. 80 FORSCHUNG
P.A. Fuhrmann, R. Ober
State space formulas for coprime factorization

Nr. 81 FORSCHUNG
P.A. Fuhrmann
An algebraic approach to Hankel norm approximation problems

Nr. 82 FORSCHUNG
R. Ober, P.A. Fuhrmann
Diffeomorphisms between sets of linear systems

Nr. 83 FORSCHUNG
J. Struckmeier, K. Steiner
Boltzmann simulations with axisymmetric geometry

Nr. 84 FORSCHUNG
M. Reissel
On a transmission boundary-value problem for the time-harmonic Maxwell equations without displacement currents

Nr. 85 FORSCHUNG
M. Reissel
Artificial boundary conditions for a transmission boundary-value problem for the time-harmonic Maxwell equations without displacement currents

Nr. 86 FORSCHUNG
M. Reissel
On the equivalence of two transmission boundary-alue problems for the time-harmonic Maxwell equations without displacement currents

1993

Nr. 87 FORSCHUNG
K. Steiner
An Analysis of Baganoff's Shuffle Algorithm

Nr. 88 FORSCHUNG
W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner
Tensor spherical harmonics and tensor spherical splines

Nr. 89 FORSCHUNG
M. Hack
Construction of Particlesets to Simulate Rarefied Gases

Nr. 90 FORSCHUNG
R. Illner, H. Neunzert
Domain decomposition: linking kinetic and aerodynamic descriptions

Nr. 91 FORSCHUNG
J. Struckmeier, K. Steiner
A Comparison of Simulation Methods for Rarefied Gas Flows

Nr. 92 FORSCHUNG
J. Fröhlich, K. Schneider
An Adaptive Wavelet Galerkin Algorithm for One and Two Dimensional Flame Computations

Nr. 93 FORSCHUNG
J. Struckmeier
Fast Generation of Low-Discrepancy Sequences

Nr. 94 FORSCHUNG
M. Reissel
3D Eddy-Current Computation Using Krylov Subspace Methods

Nr. 95 FORSCHUNG
J. Franke, T. Subba Rao
Multivariate first-order integer-valued autoregressions

Nr. 96 FORSCHUNG
H. Neunzert
Modelling and Numerical Simulation of Collisions

Nr. 97 FORSCHUNG
W. Freeden, M. Schreiner
Nonorthogonal Expansions on the Sphere

Nr. 98 FORSCHUNG
W. Freeden and R. Franke
Generalized Weighted Spline Approximation on the Sphere

Nr. 99 FORSCHUNG
A.V. Bobylev
Exact Solutions of Discrete Kinetic Models and Stationary Problems for the Plane Broadwell Model

Nr. 100 FORSCHUNG
J. Struckmeier
On a Kinetic Model for Shallow Water Waves

1994

Nr. 101 FORSCHUNG
P. Prasad
A Nonlinear Ray Theory

Nr. 102 FORSCHUNG
P.A. Fuhrmann, J. Hoffmann
Factorization theory for stable inner functions

Nr. 103 FORSCHUNG
P.A. Fuhrmann, J. Hoffmann
On balanced realizations of bounded real and positive real functions

Nr. 104 FORSCHUNG
J. Fröhlich, J. Weickert
Image Processing Using a Wavelet Algorithm for Nonlinear Diffusion

Nr. 105 FORSCHUNG
M. Hack
Lifetime estimation in the car industry

Nr. 106 FORSCHUNG
R. v. Sachs, K. Schneider
Wavelet smoothing of evolutionary spectra by non-linear thresholding

Nr. 107 FORSCHUNG
J. Struckmeier
Generation of Random Variates Using Asymptotic Expansions

Nr. 108 AUSBILDUNG
J. Struckmeier
Tutorial on Asymptotic Analysis I

Nr. 109 FORSCHUNG
W. Freeden, M. Schreiner
A: *New Wavelet Methods for Approximating Harmonic Functions*
B: *Satellite Gradiometry - from Mathematical and Numerical Point of View*

Nr. 110 FORSCHUNG
J. Weickert
Scale-Space Properties of Nonlinear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor

Nr. 111 FORSCHUNG
Th. Grünholz
On the Computation of Stress in Stationary Loaded Journal Bearings

Nr. 112 FORSCHUNG
H. Neunzert, J. Struckmeier
Boltzmann Simulation by Particle Methods

Nr. 113 FORSCHUNG
J. Mohring
Partikelapproximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit minimalem Lipschitzabstand

Nr. 114 FORSCHUNG
C. Bardos, F. Golse, J.F. Colonna
Diffusion Approximation and Hyperbolic Automorphisms of the Torus

Nr. 115 WEITERBILDUNG
H. Neunzert
Particle Methods