

TA ed.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT Nr. 12

MATHEMATISCHE MODELLE FÜR DAS ZEITVERHALTEN

STOCHASTISCHER BEANSPROCHUNGSZEITFUNKTIONEN

M./KEUL

200*

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

FACHBEREICH MATHEMATIK

ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE

6750 KAISERSLAUTERN

MÄRZ 1986

MATHEMATISCHE MODELLE FÜR DAS ZEITVERHALTEN
STOCHASTISCHER BEANSPRUCHUNGSZEITFUNKTIONEN
(unter besonderer Berücksichtigung des Markov- bzw.
RAINFLOW-Zählverfahrens)

Manfred Keul

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
I Problemstellung	2
1. Das Problem in der Praxis	2
2. Mathematische Beschreibung des Problems	3
3. Wozu braucht man die Zeit?	6
II Markov	7
1. Zählverfahren	7
2. Hypothesen für den Prozeß mit Zeit	9
3. Der Poisson-Prozeß	11
4. Die Überprüfung der Annahmen und das Modell	15
5. Problem "Brummen"	22
6. Das Modell für das Brummen - Brownsche Bewegung	27
7. Gamma-Verteilung - Schätzen der Parameter	34
8. Das Brummen - Schätzen der Parameter	36
9. Das Markov-Zählverfahren mit Zeit	40
10. Modifizierte Rekonstruktion des Markov-Zählverfahrens ohne Zeit	43
11. Markov-Rekonstruktion mit Zeit	49
III RAINFLOW	50
1. Zählverfahren	50
Vorbemerkung für die folgenden drei Abschnitte	56
2. Erste Hypothese für den Prozeß mit Zeit	57
3. Zweite Hypothese für den Prozeß mit Zeit	60
4. Dritte Hypothese	62
5. Das Modell für RAINFLOW mit Zeit	68
6. Faltungshalbgruppen	77
7. Rechtfertigung der Gamma-Verteilung	81
8. Bestimmung der Aufteilungszeitpunkte	83
9. Schätzen der Parameter	86
10. RAINFLOW-Zählverfahren mit Zeit	88
11. Modifizierte Rekonstruktion ohne Zeit	95
12. RAINFLOW-Rekonstruktion mit Zeit	97

A N H A N G

IV	Simulation von Verteilungen	98
	1. Exponential-Verteilung	98
	2. Gamma-Verteilung	99
	3. Beta-Verteilung	105
	4. Normal-Verteilung	106
	Literatur	108

Bezeichnungen

P_X	Verteilung der Zufallsvariablen X
f_X	Dichte der Zufallsvariablen X
$U(a,b)$	uniforme (gleichmäßige) Verteilung auf dem Intervall (a,b)
$E(\lambda)$	Exponential-Verteilung mit Parameter Dichte: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	Gamma-Verteilung mit Grad α und Parameter λ Dichte: $f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$
$\Gamma(\alpha)$	Gamma-Funktion
$B^{[a,b]}(\alpha, \beta)$	Beta-Verteilung auf dem Intervall [a,b] mit Parametern α, β Dichte: $f(t) = \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1}$
$B(\alpha, \beta)$	Beta-Funktion
$N(m, \sigma^2)$	Normal-Verteilung mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 Dichte: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$
$P(\lambda)$	Poisson-Verteilung

Vorwort

Diese Arbeit entstand aus der Zusammenarbeit der Arbeitsgruppe Technomathematik der Universität Kaiserslautern mit der Firma AUDI AG in Ingolstadt.

Die Hauptaufgabe bestand in der Modell-Entwicklung für das Zeitverhalten von Beanspruchungszeitfunktionen (BAZF).

Daher werden auch die ursprünglichen Modellansätze, die sich aufgrund von Beobachtungen realer BAZFen als "Irrwege" herausstellten, und die Stufen der Anpassung an die Realität hier dargestellt.

Die Überprüfung der Modelle habe ich vier Wochen lang "vor Ort" durchgeführt und anschließend die endgültigen entwickelt.

Die bei AUDI erstellten Plots werden zur Rechtfertigung der Modelle beitragen.

Das Ziel der Modell-Entwicklung war immer die praktische Anwendung, weshalb auch dieser Gesichtspunkt oft hereinspielt, besonders wenn es um die Realisierung auf dem Rechner geht.

Über die Implementierung und die praktischen Ergebnisse wird in einer späteren Arbeit berichtet werden.

I Problemstellung

1. Das Problem in der Praxis

In der Automobilindustrie wird viel Wert darauf gelegt, Fahrzeugteile möglichst leicht und kostengünstig zu produzieren.

Dazu ist es von großer Bedeutung, möglichst exakte Aussagen über die Lebensdauer dieser Fahrzeugteile machen zu können.

Dies kann auf zwei verschiedene Weisen geschehen: Zum einen gibt es Hypothesen über die Lebensdauer, die eine angenäherte Berechnung dieser aufgrund von bei Testfahrten ermittelten Daten (z.B. per Dehnungsmeßstreifen oder Beschleunigungsaufnehmer aufgezeichnet) erlauben. Hierzu sind nur wenige Testfahrten nötig. Die Qualität der Aussagen über die errechneten Lebensdauern ist aber i.a. nicht sehr gut.

Wesentlich sicherere Lebensdauervorhersagen lassen sich nur durch Simulationen machen. Dazu sind viele Testfahrten notwendig, die dann auf dem Prüfstand simuliert werden können.

Um die Simulation sinnvoll durchführen zu können, werden die Originaldaten (aufgezeichnete BAZFen) in der Weise reduziert, daß nur die für die Schädigung des Bauteils wichtige Information gespeichert wird (Markov-Matrix bzw. RAINFLOW-Matrix und Residuum).

Das mathematische Problem besteht nun darin, zu diesen Daten passende, dem Originalprozeß ähnliche BAZFen zu konstruieren. Dies soll zum einen mit möglichst wenig und von der Länge der BAZF unabhängigen Platz und zum anderen on-line (zeitlich proportional zur Länge der BAZF) geschehen.

2. Mathematische Beschreibung des Problems

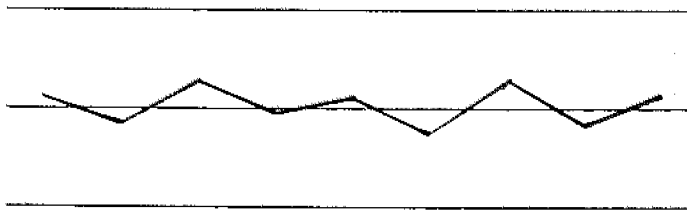
2.1 Die bei einer Testfahrt aufgezeichneten Signale bilden eine BAZF $Y_a(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ mit kontinuierlichem Zustandsraum (z.B. $-10V \dots +10V$) im analogen Signal. Zur Verarbeitung im Rechner werden die Meßwerte digitalisiert (z.B. $\{0, \dots, 1023\}$) und wir erhalten einen Prozeß $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ mit endlichem Zustandsraum. In vielen Verfahren zur Lebensdauerschätzung gehen nur die Lastwechsel ein, d.h. die lokalen Minima und Maxima des Prozesses $Y(t)$.

$\bar{Y}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ sei der zu $Y(t)$ zugehörige Min-Max-Prozeß. Um den Zustandsraum zu verkleinern, werden die digitalen Meßwerte nun noch in Klassen (z.B. $\{1, \dots, 32\}$) eingeteilt.

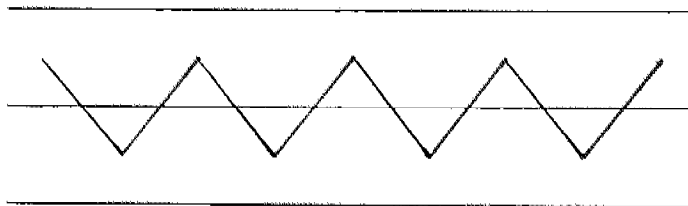
2.2 Dabei tritt folgendes Problem auf:

Zittert der Prozeß $\bar{Y}(n)$ um eine Klassengrenze herum, so erhält man wegen der Klassierung viele Halbschwingungen der Größe 1, wobei eine Halbschwingung ein Übergang von einer Klasse in eine andere ist.

Original Min-Max-Prozeß $\bar{Y}(n)$

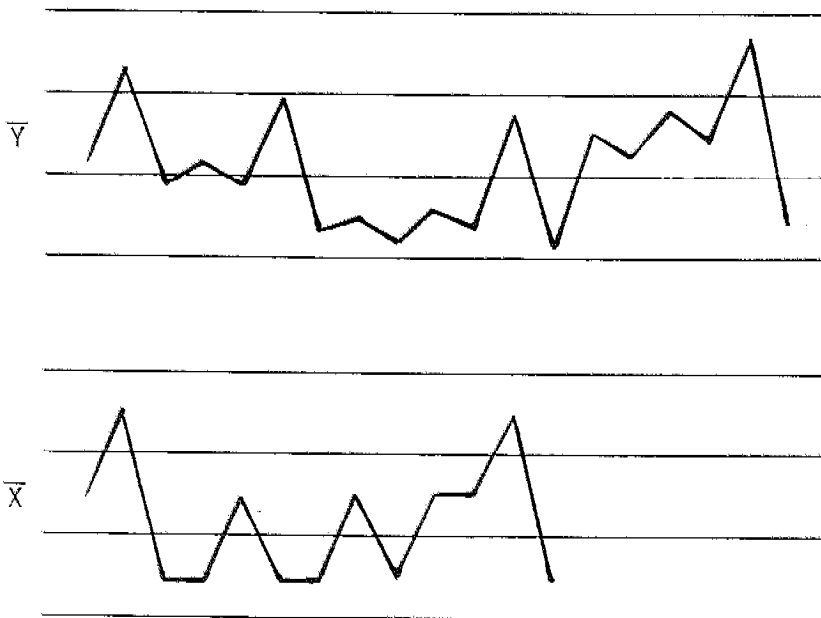


wird registriert als



Da dieser Effekt der Überbewertung von kleinen Lastspielen unerwünscht ist, werden solche Zitter-Bewegungen des Min-Max-Prozesses $\bar{Y}(n)$ herausgefiltert und als sogenanntes "Brummen" gesondert behandelt. Wir werden darauf in Abschnitt 5 genau eingehen. Nun wird die Klassierung des Prozesses durchgeführt und man erhält einen Prozeß $\bar{X}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dieser enthält die Information über eine herausgefilterte Brumphase in Klasse i als Übergang $i \rightarrow i$, d.h. $\bar{X}(n) = i$, $\bar{X}(n+1) = i$.

Beispiel



2.3 Der so entstandene Prozeß $\bar{X}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, wird nun noch nach dem Markov- bzw. RAINFLOW-Verfahren gezählt (vgl. II 1, III 1) und man erhält eine Matrix A der Anzahlen der Lastspiele.

Alles dies kann on-line während einer Autofahrt geschehen.

Die Matrix A enthält nur noch die für die Schädigung wichtige Information des Originalprozesses $Y_a(t)$.

Außerdem ist sie gut überschaubar und der Speicherplatzbedarf ist unabhängig von der Länge der BAZF.

2.4 Zur Rekonstruktion des Originalprozesses sind zwei Probleme zu bewältigen:

(1) Aus der Matrix A ist der Min-Max-Prozeß $\bar{X}(n)$ zu rekonstruieren. Es ist leicht einzusehen, daß das Zählverfahren nicht injektiv ist. Es gibt im allgemeinen sehr viele Prozesse, die zu derselben Matrix A führen. Was heißt dann also "Rekonstruktion"?

Da es nicht möglich ist, die ursprüngliche BAZF immer zu erzeugen, entscheidet man sich dafür, aus allen zur Matrix A zugehörigen BAZFen zufällig gemäß der Gleichverteilung eine auszuwählen. Dies hat den Effekt, daß die aus den BAZFen errechneten Gesamtschädigungen zwar nicht gleich dem tatsächlichen Wert sind, aber auch nicht deterministisch auf jeden Fall von ihm abweichen.

Zur Lösung dieses Problems siehe /1/.

(2) Wir haben nun den rekonstruierten Min-Max-Prozeß $\bar{X}(n)$, und es stellt sich die Frage, wie die fehlende Zeit- bzw. Frequenzinformation wieder in diesen eingebracht werden kann, um einen zum Originalprozeß $Y(t)$ ähnlichen Prozeß zu erzeugen. Dabei bedeutet "ähnlich", daß die Bauteilschädigung möglichst exakt mit der von $Y(t)$ übereinstimmt. Wir wollen dies durch eine Erhaltung des Frequenzspektrums erreichen.

Punkt (2) ist das eigentliche Problem dieser Arbeit.

3. Wozu braucht man die Zeit?

Worin besteht der praktische Zweck dieser Arbeit?

Die bisherigen Rekonstruktionsverfahren waren nur zu verwenden an - nicht schwingungsfähigen Bauteilen
und - für einaxiale bzw. nicht korrelierte
mehraxiale Prüfungen (vgl. /1/ 3.).

Um die Eigenschaften schwingungsfähiger Bauteile (Resonanz) zu berücksichtigen, muß die Frequenz bzw. die Zeit im rekonstruierten Prozeß enthalten sein.

Außerdem besteht das Ziel, die Rekonstruktion mehrdimensional (z.B. an allen Rädern eines Fahrzeugs simultan in x-, y- und z-Richtung) durchzuführen.

Dafür ist ein "Zusammenpassen" der Belastungen sehr wichtig (,damit z.B. das Fahrzeug nicht auseinandergerissen wird).

Dies kann aber ohne Zeitinformation aufgrund der Zählverfahren nicht gewährleistet werden.

II Markov

1. Zählverfahren

Das Markov-Verfahren beruht auf der Annahme, daß für die Gesamtschädigung eines Bauteils nur die Häufigkeiten der verschiedenen Lastspiele (= Halbschwingungen) der BAZF $\bar{X}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Rolle spielen. Es ist daher auch nicht wichtig, zu welchem Prozeß die BAZF $\bar{X}(n)$ gehört, wenn nur die Lastspielzahlen stimmen. Aus diesem Grund können wir uns $\bar{X}(n)$ auch als Realisierung eines Markov-Prozesses vorstellen, worauf die in /1/ beschriebene Markov-Inversion auch beruht.

1.1 Definition

Ein stochastischer Prozeß $\{X(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{Z}$ heißt Markov-Prozeß, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ und für alle $i_1, \dots, i_n, j \in S$ gilt:

$$P\{X(t)=j \mid X(t_n)=i_n, \dots, X(t_1)=i_1\} \\ = P\{X(t)=j \mid X(t_n)=i_n\}.$$

Der Prozess heißt zeitlich homogen, falls zusätzlich gilt:

Für alle $t, \tau \geq 0$ und für alle $i, j \in S$:

$$P\{X(t+\tau)=j \mid X(t)=i\} = P\{X(\tau)=j \mid X(0)=i\}.$$

Ein zeitlich diskreter Markov-Prozeß $\{X(n): n \in \mathbb{N}\}$ heißt auch Markov-Kette.

Wie sieht nun das eigentliche Zählverfahren aus?

1.2 Verfahren

Sei $\{\bar{X}(n): n = 0, \dots, N\}$ der Min-Max-Prozeß zu $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (wie in I 2 beschrieben) mit Zustandsraum $S = \{1, \dots, M\}$.

Sei $A_0 = 0$ ($M \times M$)-Matrix.

Für $n = 0, \dots, N-1$ gelte:

$$A_{n+1}(i,j) = \begin{cases} A_n(i,j) + 1, & \text{falls } \bar{X}(n)=i, \bar{X}(n+1)=j \\ & i \neq j \\ A_n(i,j), & \text{sonst} \end{cases}$$

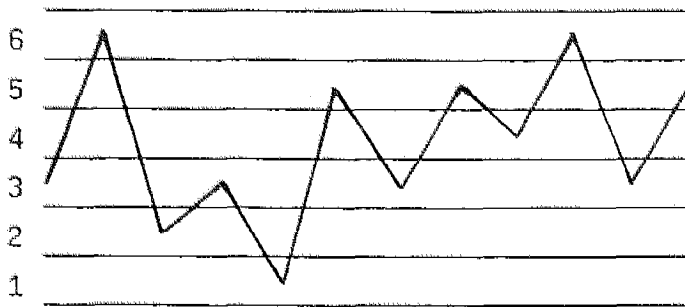
Dann ist $A = A_N$ die sogenannte Markov-Matrix.

1.3 Bemerkung

Der Informationsgehalt der Markov-Matrix A ist höher als der der gewöhnlichen Übergangs-Matrix einer Markov-Kette, da die absoluten Übergangszahlen bekannt sind.

1.4 Beispiel

Min-Max-Prozeß $\bar{X}(n)$, $n = 0, \dots, 11$, $S = \{1, \dots, 6\}$



Markov-Matrix

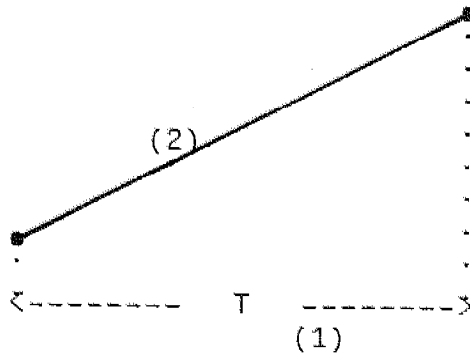
			1	
	1			
1			2	1
		1	1	1
	1	1		

2. Hypothesen für den Prozeß mit Zeit

Wir betrachten eine Halbschwingung (i, j) im Min-Max-Prozeß $\bar{X}(n)$.

Um die Zeit für diese Schwingung wieder ins Spiel zu bringen, sind zwei Fragen von Interesse:

- (1) Wie lange dauert der Übergang von i nach j ?
- (2) Welchen Pfad benutzt der Prozeß dabei?



Gesucht ist ein einfaches mathematisches Modell, das den Sachverhalt möglichst gut widerspiegelt.

Durch Beobachtung real gemessener BAZFen stellt man fest, daß die Pfade der Übergänge "ungefähr" linear in der Zeit verlaufen, d.h. für den Prozeß $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+, X(0)=i, X \text{ monoton}\} : E(X(t)-i) \sim t$. Die Gerade ist also das

punktweise Mittel aller Pfade.

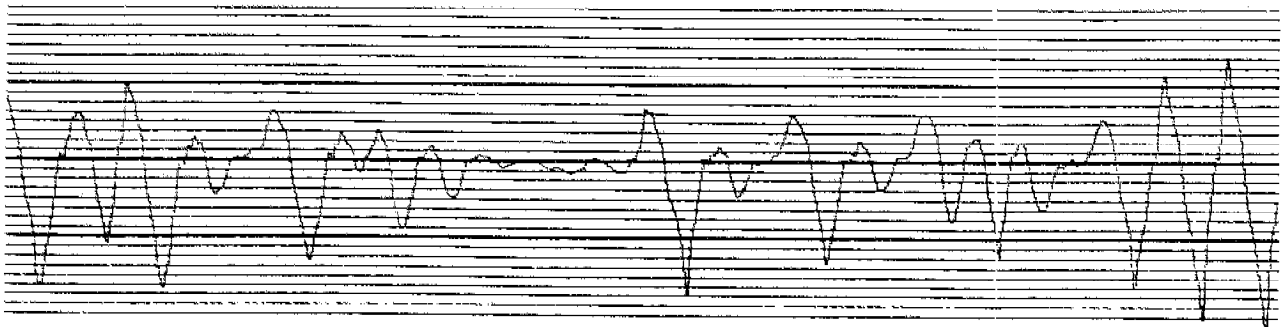


Bild 1: Ausschnitt einer BAZF (gemessen bei AUDI80, Federbein (z-Richtung), Höckerkurve)

Was bedeutet diese Linearitätsannahme der Pfade für das mathematische Modell?

2.1 Mathematisches Modell

Wir betrachten wieder den Übergang (i, j) im Prozeß

$$\bar{X}(n): \bar{X}(n_0) = i, \bar{X}(n_0+1) = j.$$

Der zum Zeitpunkt n_0 des Prozesses $\bar{X}(n)$ zugehörige Eintrittszeitpunkt des Prozesses $Y(t)$ in den Zustand i sei t_0 .

Es sei nun $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, der in t_0 startende Prozeß $Y(t)$, $t \geq t_0$, also $X(0) = i$ und X monoton.

Für diesen Prozeß $X(t)$ muß nun gelten: $E(X(t)-i) = \lambda t$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das von (i, j) abhängen kann und daher auch negativ sein kann.

Diese Eigenschaft haben genau die sogenannten Poisson-Prozesse, auf die wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen werden.

2.2 Bemerkung

Wenn wir einen Prozeß $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, als Markov-Prozeß ansehen und zudem noch die Forderung an ihn stellen, daß kein Zustand übersprungen wird (wir nehmen den Originalprozeß $Y_a(t)$ als stetig an), so kann es sich nur um einen Geburts- und Todesprozeß handeln.

Wir fordern für unseren Prozeß noch die Monotonie (wegen der Min-Max-Eigenschaft), was zu reinen Geburts- bzw. reinen Todes-Prozessen führt; und schließlich erhalten wir aufgrund der Linearitätsannahme für die Pfade den Spezialfall Poisson-Prozeß.

3. Der Poisson-Prozeß

(Literatur vgl. /2/ oder /3/)

Dieses Kapitel liefert uns die Motivation für unser letztendlich verwendetes Modell, das nur in einem Punkt von dem hier gebildeten abweicht.

Wir gehen darauf im nächsten Kapitel ein.

Wir wollen nun zuerst einmal einen reinen Geburtsprozeß definieren, um daran die Auswirkungen der Linearitätsannahme klarzumachen:

3.1 Definition

$X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sei ein homogener Markov-Prozeß mit Zustandsraum \mathbb{N} .

$P_{kl}(t) := P\{X(t+s)=l \mid X(s)=k\}$ seien die Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses (unabhängig von $s \geq 0$).

$X(t)$ heißt Geburts-Prozeß, wenn gilt:

(i) $P_{k,k+1}(t) = \lambda_k t + o(t)$ für $t \downarrow 0$, $k \geq 0$

(ii) $P_{kk}(t) = 1 - \lambda_k t + o(t)$ für $t \downarrow 0$, $k \geq 0$

(iii) $P_{kl}(0) = \delta_{kl}$

(iv) $\lambda_k > 0$ für $k \geq 0$

Dabei gilt $o(t)/t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

3.2 Bezeichnung

λ_k heißen Geburtsraten.

Man sieht leicht, daß das typische Aussehen der Pfade durch die λ_k bestimmt wird, große λ_k erzeugen schnelle Übergänge, kleine λ_k langsame.

Unsere Linearitätsannahme führt uns dazu, alle λ_k der Halbschwingung (i,j) als gleich anzunehmen.

3.3 Definition

Es sei $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ Geburts-Prozeß mit Raten λ_k , $k \in \mathbb{N}$.

$X(t)$ heißt Poisson-Prozeß, wenn gilt $\lambda = \lambda_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3.4 Bemerkung

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(t)$ eines Markov-Prozesses gilt:

(i) $P_{ij}(t) \geq 0$ für $i, j \in \mathbb{N}, t \geq 0$

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$ für $i \in \mathbb{N}, t \geq 0$

(iii) (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \text{ für } i, j \in \mathbb{N}, t, s \geq 0$$

Betrachten wir nun die Zeiten für die Übergänge.

3.5 Bemerkung

Für einen Geburtsprozeß $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ gilt (für $t_0 \geq 0, s > 0$):

$$\begin{aligned} & P\{X(s+t_0)=i \mid X(t_0)=i, X(t)<i \text{ für } t<t_0\} \\ &= P\{X(s+t_0)=i \mid X(t_0)=i\}, \text{ wegen der Markov-Eigenschaft} \\ &= P\{X(s+t_1)=i \mid X(t_1)=i\}, \text{ wegen der Homogenität} \\ &= P\{X(s+t_1)=i \mid X(t_1)=i, X(t)<i \text{ für } t<t_1\}. \end{aligned}$$

Es ist also die Verweildauer im Zustand i unabhängig vom Eintrittszeitpunkt in den Zustand i .

Daher können wir definieren:

3.6 Definition

Es sei $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Geburtsprozeß.

T_i sei die Zeit, die der Prozeß im Zustand i bis zum Verlassen verweilt.

T_i heißt Wartezeit oder Verweildauer im Zustand i .

3.7 Lemma

$F(x)$ sei eine Verteilung mit $F(0) = 0, F(x) < 1$ für ein $x > 0$.

Dann ist $F(x)$ Exponential-Verteilung genau dann, wenn gilt:

$$F(x+y) - F(y) = F(x)(1 - F(y)) \text{ für alle } x, y \geq 0.$$

Beweis: (siehe /2/ 4.2)

3.8 Satz

T_i ist exponentialverteilt mit Parameter λ_i ,
d.h. $P\{T_i > t\} = e^{-\lambda_i t}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} (1) \quad P\{T_i > s+t \mid T_i > t\} &= P\{X(s+t+t_0)=i \mid X(t+t_0)=i, X(t_0)=i\} \\ &= P\{X(s+t+t_0)=i \mid X(t+t_0)=i\} \\ &= P\{X(s+t_0)=i \mid X(t_0)=i\} \\ &= P\{T_i > s \mid T_i > 0\} \\ &= P\{T_i > s\}, \text{ weil } P\{T_i > 0\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P\{T_i > s+t\} &= P\{T_i > s+t \mid T_i > t\}P\{T_i > t\} \\ &\quad + P\{T_i > s+t \mid T_i \leq t\}P\{T_i \leq t\} \\ &= P\{T_i > s\} P\{T_i > t\}, \text{ wegen (1)} \end{aligned}$$

(3) Mit Lemma 3.7 folgt daraus die Behauptung.

3.9 Bemerkung

Aus der Markov-Eigenschaft folgt die Unabhängigkeit der T_i , da T_i nicht von der Vergangenheit des Prozesses und damit nicht von den T_k mit $k < i$ abhängt.

3.10 Bemerkung

Man könnte einen Geburtsprozeß leicht simulieren durch Simulation der zugehörigen Exponentialverteilungen (vgl. IV 1).

Sehen wir ins jetzt die Gesamtzeit für eine Halbschwingung an:

3.11 Definition

Sei $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Geburtsprozeß mit $X(0) = 0$.

T_i seien die zugehörigen Wartezeiten.

Dann heißen $S_k := \sum_{i=0}^k T_i$ die Sprungzeiten des Prozesses.

3.12 Lemma

Die Sprungzeiten S_k eines Poisson-Prozesses $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ mit $X(0) = 0$ sind gamma-verteilt, d.h. die Dichte

f_{S_k} von S_k ist

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} s^{k-1} e^{-\lambda s},$$

wobei λ der Parameter des Poisson-Prozesses ist.

Beweis:

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} T_i$$

Nach 3.9 sind die T_i unabhängig.

$$\begin{aligned} \text{Daher: } f_{S_k} &= f_{T_0} * \dots * f_{T_{k-1}} \\ &= f_{T_0} * \dots * f_{T_0}, \end{aligned}$$

weil alle T_i identisch verteilt sind.

Per Induktion ergibt sich die Behauptung.

Für unseren Prozeß $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+, X(0) = i, X \text{ monoton}\}$ definieren wir:

3.13 Definition

T_l^{ij} sei die Wartezeit im Zustand l , $i \leq l < j$.

$S_k^{ij} = \sum_{l=i}^{k-1} T_l^{ij}$ sei die Sprungzeit bis zum Sprung in den Zustand k , $i < k \leq j$.

3.14 Folgerung

Die Zeit für den Übergang von i nach j ist S_j^{ij} .

Sie ist verteilt gemäß $\Gamma(j-i, \lambda)$, wobei λ der Parameter des Poisson-Prozesses ist.

Beweis: folgt aus 3.12

3.15 Bemerkung

3.13 und 3.14 gelten für eine Aufwärtshalbschwingung (i, j) , d.h. $i < j$.

Für Abwärtshalbschwingungen gilt Entsprechendes.

4. Die Überprüfung der Annahmen und das Modell

Zur Überprüfung der Annahmen wurden bei real gemessenen BAZFen die empirischen und die geschätzten Verteilungen (siehe II 7) der Übergangszeiten bestimmt und verglichen.

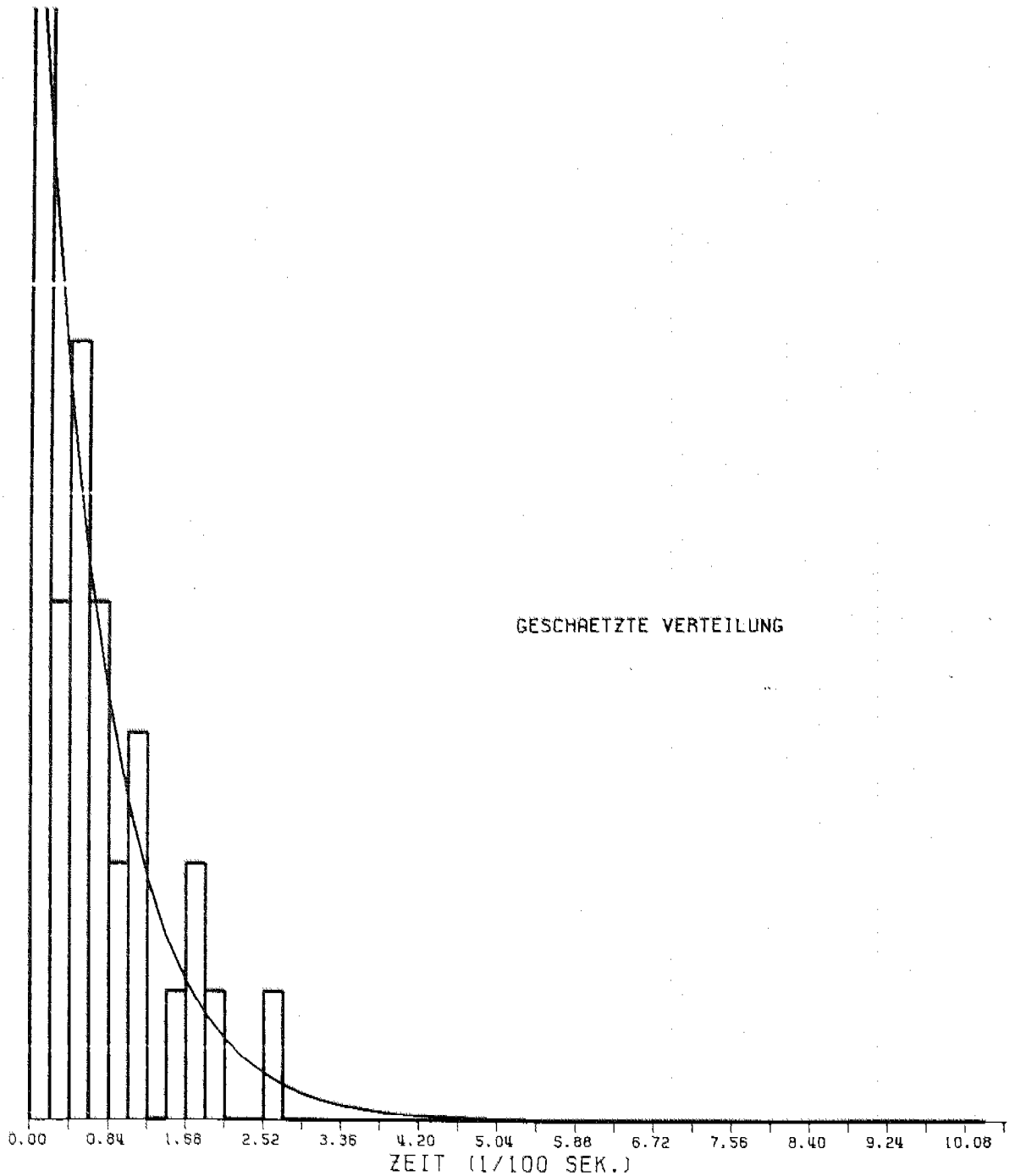


Bild 2: Verteilung der Übergangszeit vom Zustand 16 in den Zustand 17 (188 gezählte Übergänge) (AUDI80, Federbein (z-Richtung), Höckerkurve)

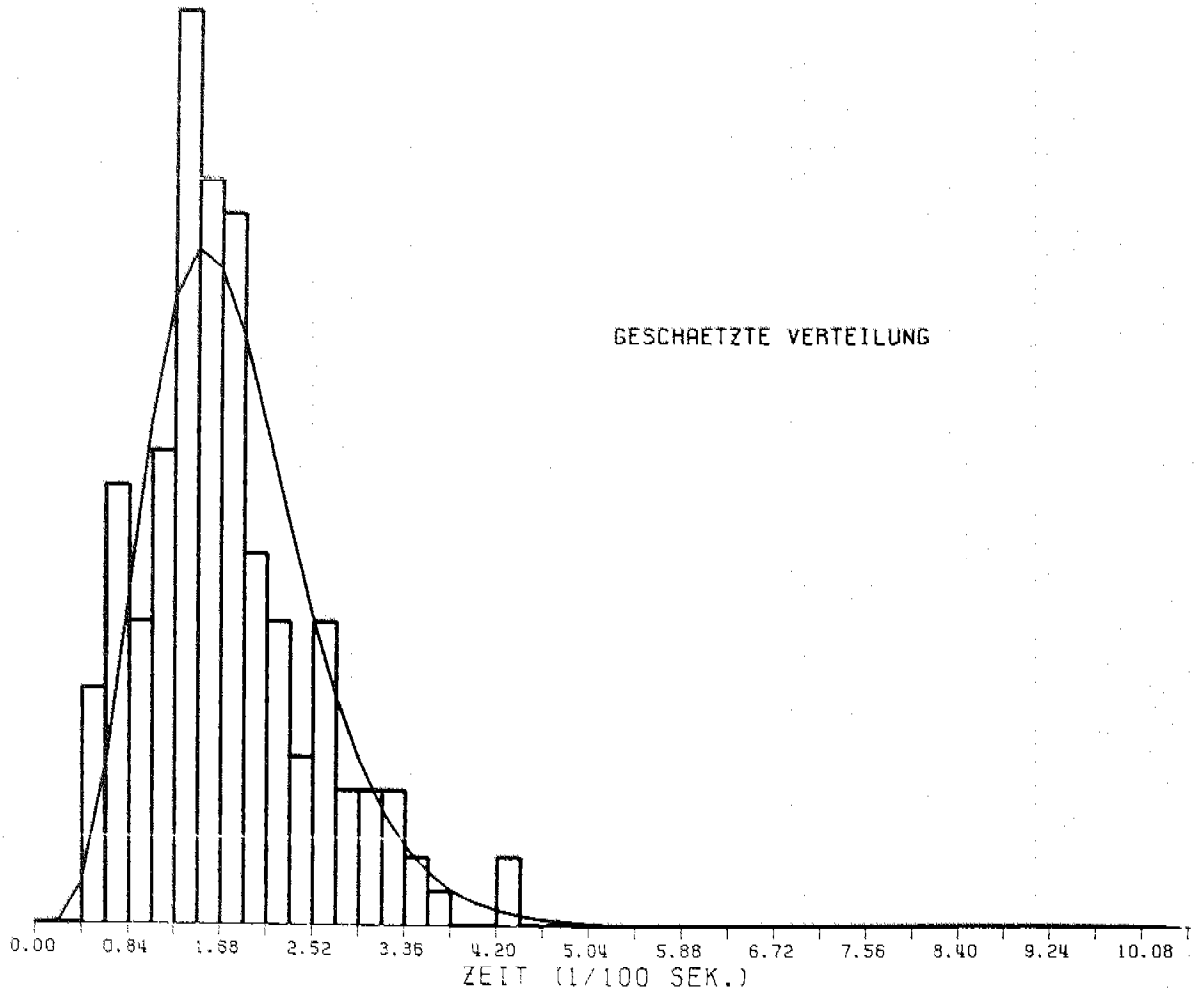


Bild 3: Verteilung der Übergangzeit für (15,21)
(164 gezählte Übergänge)
(AUDI80, Beschleunigungsaufnehmer (z-Richtung),
EVP-Teststrecke)

4.1 Bemerkung

Bei einigen Übergängen stellt man fest, daß es sich bei der Verteilung der Zeiten nicht um eine Gamma-Verteilung handelt, sondern um ein Gemisch zweier Gamma-Verteilungen.

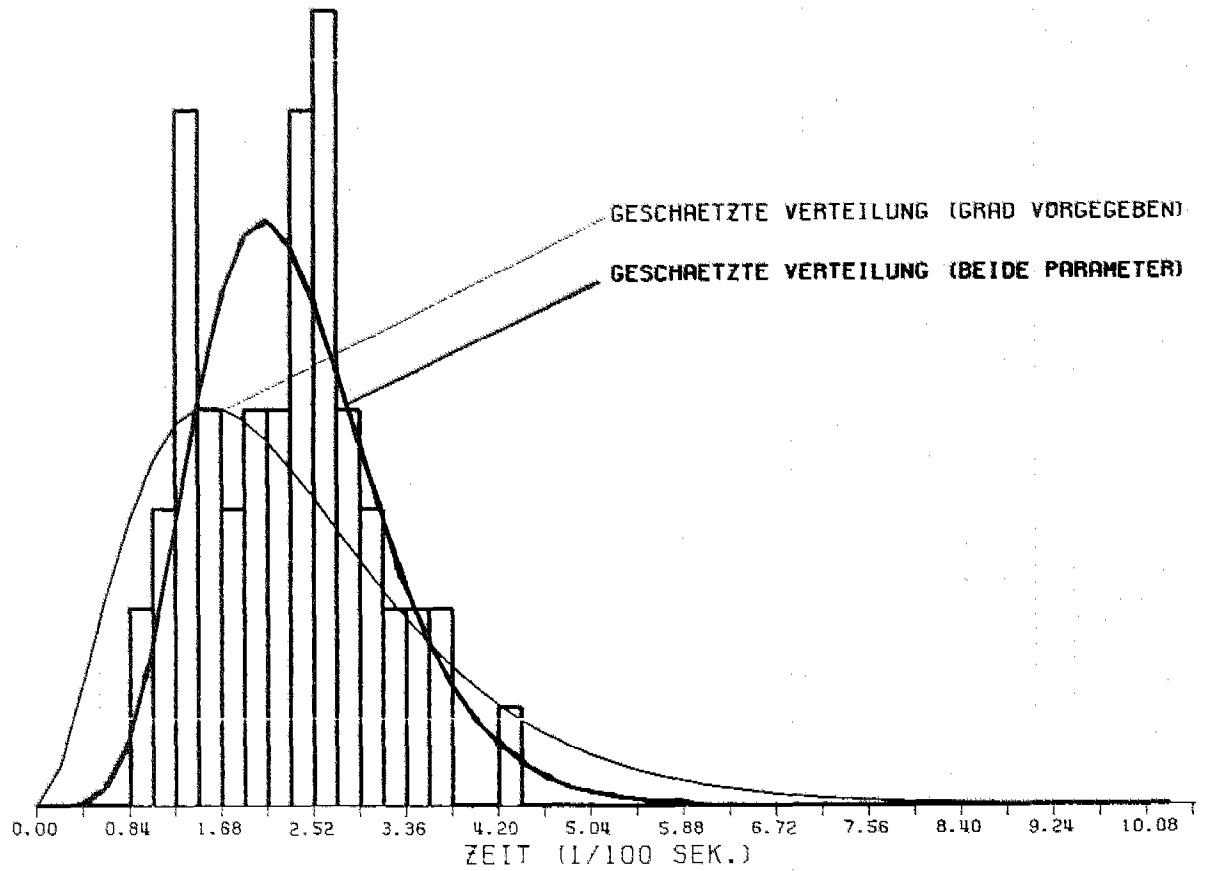


Bild 4: Verteilung der Übergangszeit für (19,16)
(56 gezählte Übergänge)
(AUDI80, Federbein (z-Richtung))

4.2 Erklärung

Bei einer Fahrt überlagern sich Schwingungen zweier völlig verschiedener Frequenzbereiche:

Niederfrequente, durch Fahrmanöver hervorgerufene Schwingungen des ganzen Fahrzeugs und höherfrequente, durch die Fahrbahn angeregte Schwingungen der Radaufhängungen.

Es darf vermutet werden, daß beide Phänomene Gamma-Verteilungen besitzen, die sich vermischen.

4.3 Bemerkung

Es gibt zwei Gründe, dieses Phänomen zu vernachlässigen.

Zum einen tritt es nur bei einigen Halbschwingungen (i,j) auf (Bild 4 ist ein extremes Beispiel), und zum anderen ist eine exakte Trennung zweier Verteilungen nur bei sehr großem Datenaufkommen zu realisieren.

Wir haben es aber i.a. nur mit weniger als 200 Daten pro Halbschwingung (i,j) zu tun.

4.4 Bemerkung

Die allgemeine Gamma-Verteilung hat zwei Parameter λ und α . Ihre Dichte ist

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$$

Es hat sich gezeigt, daß die Schätzung beider Parameter oftmals zu wesentlich besseren Ergebnissen führt, als die Festlegung von α durch $\alpha := |j - i|$ (vgl. 3.14).

Dies verdeutlichen die folgenden Bilder.

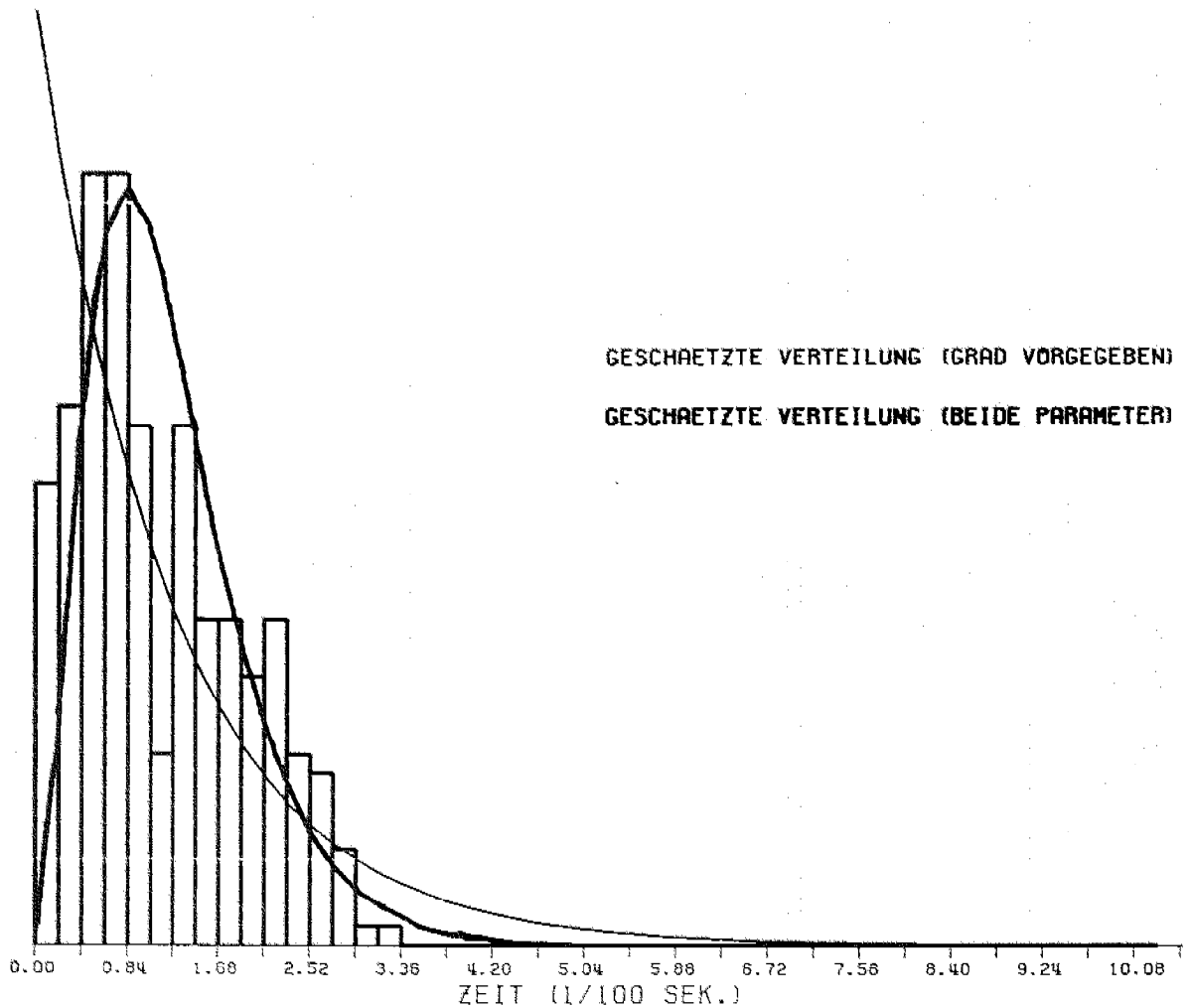


Bild 5: Zeitverteilung für Übergang (15,16)
(287 gezählte Übergänge)
(AUDI80, Federbein (z-Richtung))

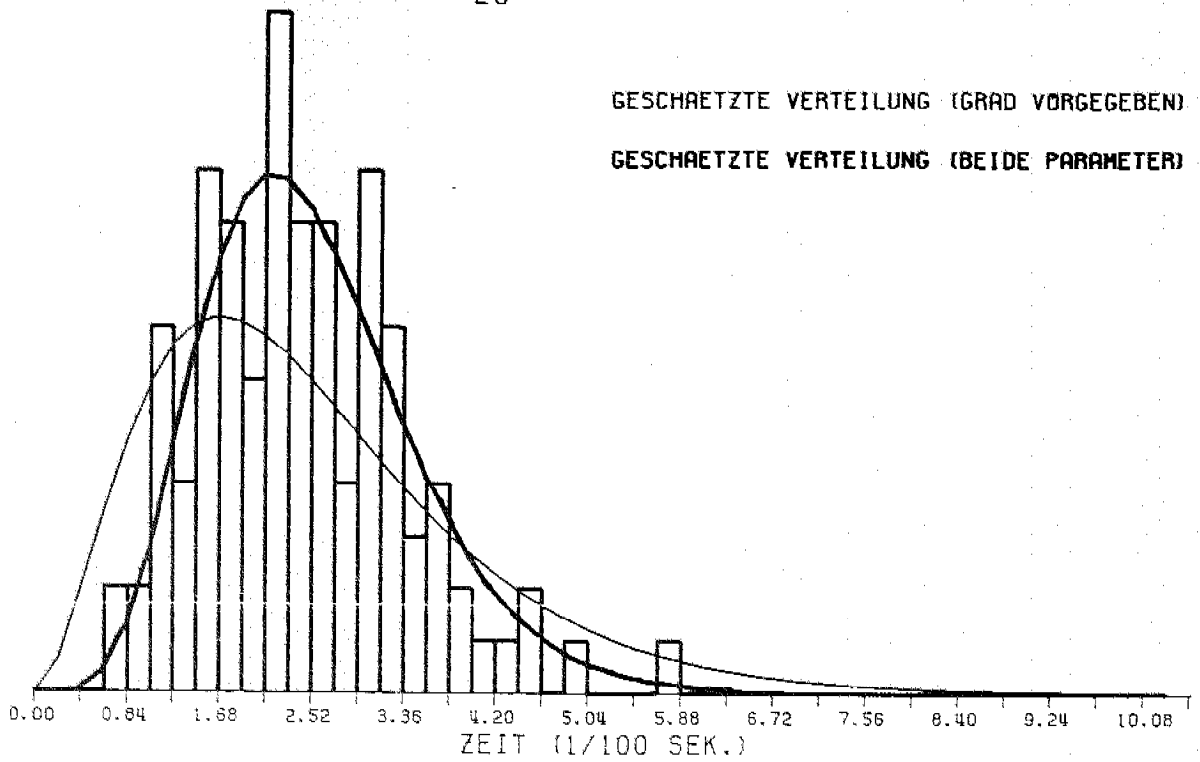


Bild 6: Zeitverteilung für Übergang (15,18)
(107 gezählte Übergänge)

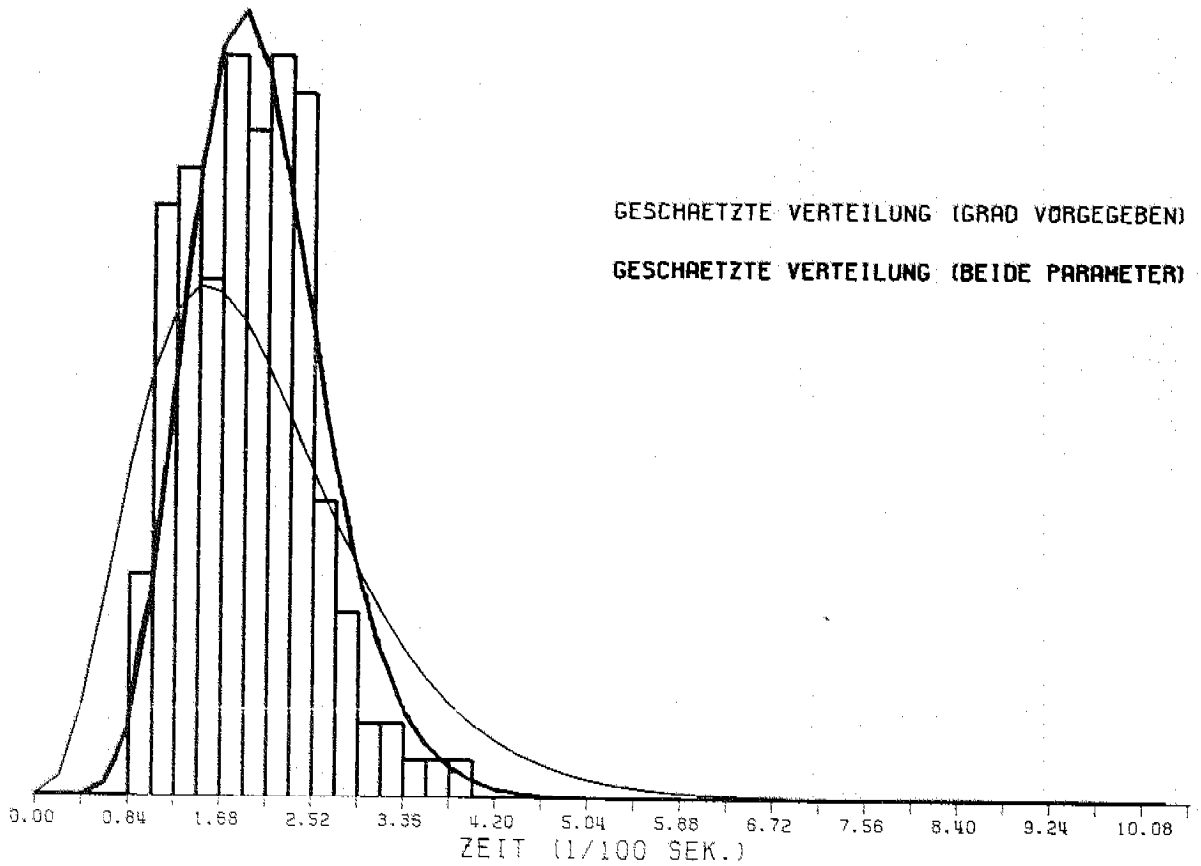


Bild 7: Zeitverteilung für Übergang (13,17)
(156 gezählte Übergänge)

Kommen wir nun zu unserem endgültigen Modell.

4.5 Das Modell für Markov mit Zeit

Alle bisherigen Modellannahmen für eine Halbschwingung (i,j) führten uns hin zur Gamma-Verteilung.

Diese waren: - die Annahme der Beschreibbarkeit durch einen Markov-Prozeß,
- die Forderung, keinen Zustand zu überspringen,
- die Monotonie aufgrund der Min-Max-Eigenschaft und
- die Linearitätsannahme für die Pfade
(vgl. 2.2, 3.).

Wir wollen nur eine kleine Änderung an unserem Modell vornehmen, indem wir einfach alle diese Forderungen durch die ersetzen, daß die Zeiten der Halbschwingungen (i,j) Gammaverteilungen besitzen und daß ihre Pfade linear sind.

Dabei wird die Gammaverteilung als Verteilung mit den beiden Parametern α und λ betrachtet, und es werden auch beide Parameter geschätzt (7.).

5. Problem "Brummen"

Wir haben bisher nur die Übergänge $i \rightarrow j$, $i \neq j$ in dem Prozeß $\bar{X}(n)$ betrachtet, also die Halbschwingungen.

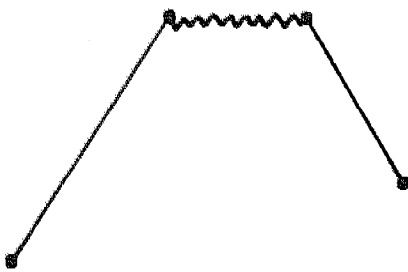
Nach (I 2.) besitzt $\bar{X}(n)$ aber auch Übergänge $i \rightarrow i$, d.h. $\bar{X}(k) = i$, $\bar{X}(k+1) = i$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Diese können wir nicht durch einen Poisson-Prozeß beschreiben.

Wir wollen daher zuerst einmal die Frage klären, wie sie zustande kommen.

Bei Beobachtung einer BAZF stellt man häufig folgenden Verlauf fest:

(i)



(ii)

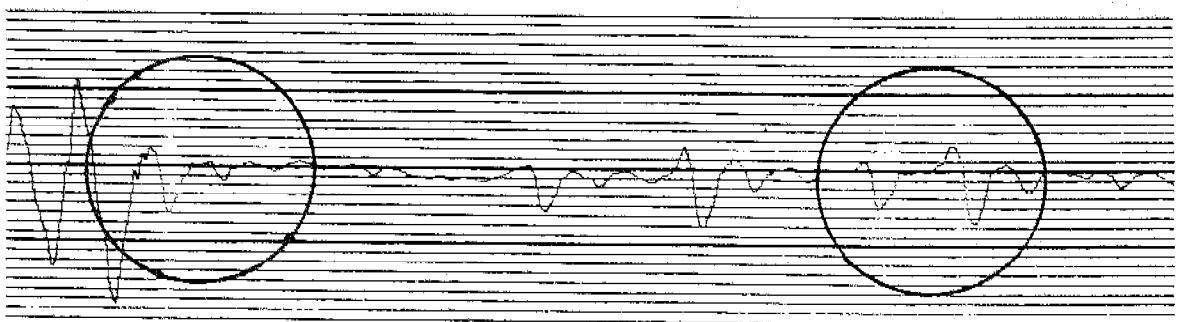
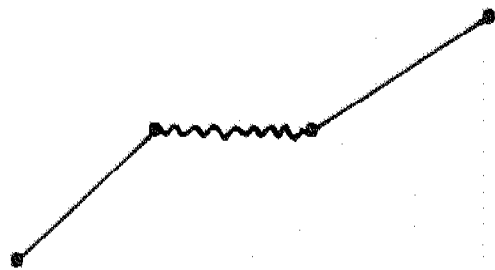


Bild 8: Ausschnitt einer BAZF
(AUDI80, Federbein (z-Richtung), Höckerkurve)

5.1 Erklärung

Das Phänomen tritt auf in Ruhephasen der Belastung (z.B. bei einer Vollbremsung, nachdem sich die Kraft der Bremsen voll aufgebaut hat): Vibrationen (= Brummen). Es tritt aber auch immer auf, wenn sehr kleine Lastwechsel stattfinden.

Wegen des in (I 2.) geschilderten Grundes muß eine solche Zitterkurve herausgefiltert werden.

Dies geschieht folgendermaßen:

5.2 Filterung des "Brummens"

Die Filterung ist eine Transformation des Prozesses \bar{Y} in den Prozeß \bar{X} .

Wir definieren dazu einen Prozeß \check{Y} wie folgt:

$$\check{Y}(0) = \bar{Y}(0),$$

$$\check{Y}(k) = \bar{Y}(n), \text{ falls } |\bar{Y}(1) - \bar{Y}(n)| < \epsilon \text{ für alle } l$$

mit $n \leq 1 \leq k$

und falls n minimal ist mit dieser Eigenschaft,

$$\check{Y}(k) = \bar{Y}(k) \text{ sonst.}$$

Aus \check{Y} erhalten wir nun den Prozeß \bar{X} , indem wir \check{Y} klassieren und dann alle Übergänge der Form $i \rightarrow i \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow i$ transformieren in $i \rightarrow i$.

Wir nennen einen solchen Übergang $i \rightarrow i$ in \bar{X} ein Brummen in \bar{X} , und auch die entsprechenden Abschnitte der Zeitfunktion \bar{Y} nennen wir Brummen in \bar{Y} .

Damit ist geklärt, was ein Brummen ist.

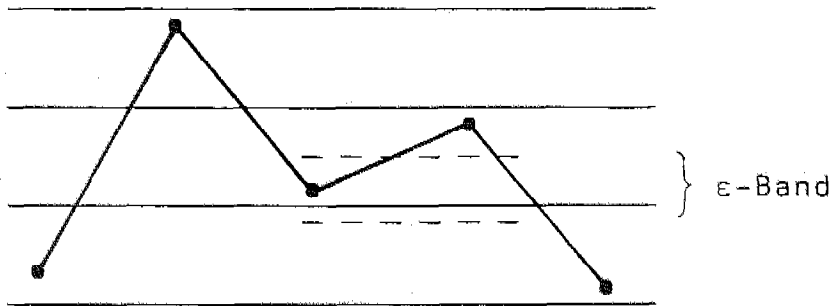
Die Filterung besteht also darin, alle Übergänge innerhalb eines Brummvorgangs zu streichen und das gesamte Brummen mit Anfangspunkt in Klasse i als Übergang $i \rightarrow i$ im Prozeß $\bar{X}(n)$ zu betrachten.

5.3 Bezeichnung

Wir nennen jeden Übergang $i \rightarrow j$ in $\bar{X}(n)$, der nicht zu einem Brummen gehört, Halbschwingung (i, j) .

5.4 Bemerkung

Da wir noch nichts über die Schranke ϵ gesagt haben, kann eine Halbschwingung auch innerhalb einer Klasse liegen.

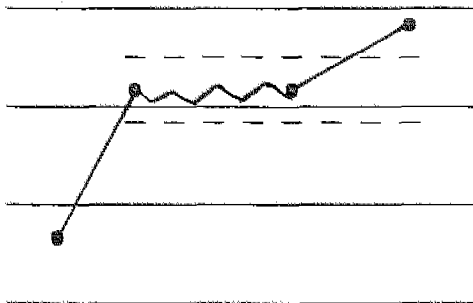


Welchen Wert sollen wir also für ϵ verwenden?

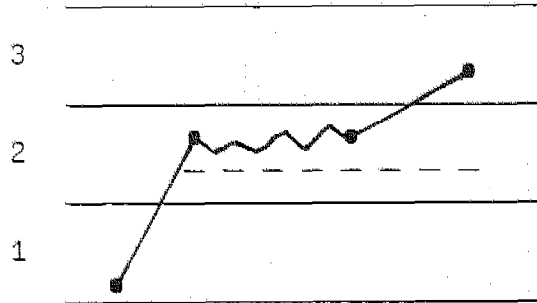
5.5 ϵ -Umgebung für das Brummen

Betrachten wir zwei gleiche Brummvorgänge, die in ihrer Lage verschoben sind:

(i)



(ii)



Im Falle (i) erhalten wir nach der Filterung eine Halbschwingung (1,3) und ein Brummen in Klasse 3.

Im Falle (ii) ergeben sich eine Halbschwingung (1,2) und ein Brummen in Klasse 2 mit einer anschließenden Halbschwingung (2,3).

Obwohl in beiden Fällen der Verlauf der BAZF bis auf die Lage völlig identisch ist, registrieren wir sie völlig verschieden.

Diesen unerwünschten Effekt kann man vermeiden, wenn ϵ als eine Klassenbreite gewählt wird.

Damit erreichen wir zusätzlich noch, daß Halbschwingungen nicht innerhalb einer Klasse liegen können (5.4).

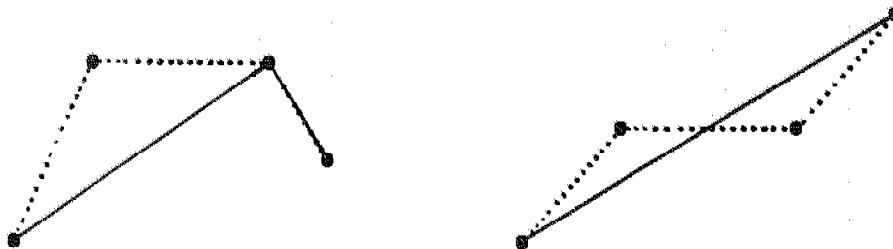
Wir können uns nun der Frage zuwenden, wie die Übergänge $i \rightarrow i$ für den zeitlichen Verlauf des Prozesses $Y(t)$ zu behandeln sind.

5.6 Erste Annahme für Brummphasen

Eine erste Annahme wäre, daß wir sie vernachlässigen und sie als Teil der vorangegangenen Halbschwingung betrachten könnten.

(i)

(ii)



..... $Y(t)$

————— angenommener Verlauf

Es ist leicht einzusehen, daß dadurch das Frequenzspektrum des Prozesses $Y(t)$ verändert wird, welches es ja zu erhalten gilt (vgl. I 2.4).

Wir dürfen also das Brummen nicht vernachlässigen.

Es ist nun unser Problem, die Zeit des Brummens zu erfassen und mathematisch zu beschreiben.

5.7 Brummen für die Zeitfunktion $Y(t)$

In (5.2) ist ein Brummen im Min-Max-Prozeß $\bar{Y}(n)$ erklärt.

Ein Brummen in $\bar{Y}(n)$ beginne zum Zeitpunkt n_0 und ende zur Zeit n_1 .

Sind dann t_0 und t_1 die zugehörigen Eintrittszeitpunkte des Prozesses $Y(t)$ in die Zustände $Y(n_0)$ bzw. $Y(n_1)$, so nennen wir den Prozeß $\{Y(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ ein Brummen in $Y(t)$.

Univ.-Bibl.
Kaiserlautern

5.8 Mathematisches Modell

Es handelt sich also um eine Zitterkurve zwischen zwei Schranken.

Mathematische Modelle für solche Zeitfunktionen sind die Irrfahrt (im zeitlich diskreten Fall) und die Brownsche Bewegung (im zeitlich kontinuierlichen Fall), jeweils mit zwei absorbierenden Grenzen in $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$, falls y_0 der Startpunkt $Y(t_0)$ des Brummens ist.

Da ein Brummprozeß oberhalb der Nulllage eine Tendenz nach unten zeigt (und umgekehrt), wie man aus Plots der Zuwachsverteilungen von Brummphasen sehen kann, müssen wir den Prozeß als nichtsymmetrische Irrfahrt bzw. als Brownsche Bewegung mit Drift ansehen.

6. Das Modell für das Brummen - Brownsche Bewegung

6.1 Definition

Es sei $\{Y(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ein stochastischer Prozeß mit:

(i) $Y(0) = 0,$

(ii) Für $0 \leq t_0 < \dots < t_n$ sind

$$Y(t_n) - Y(t_{n-1}), \dots, Y(t_1) - Y(t_0) \text{ unabhängig,}$$

d.h. $Y(t)$ hat unabhängige Zuwächse,

(iii) $Y(t) - Y(s)$ hat Verteilung $N(0, \sigma^2(t-s))$ für $t > s$.

Dann heißt $Y(t)$ Brownsche Bewegung (BB).

Sind die Zuwächse $Y(t) - Y(s) N(m(t-s), \sigma^2(t-s))$ -verteilt, so spricht man von einer BB mit Drift m .

6.2 Bemerkung

Für die Brownsche Bewegung $Y(t)$ gelten:

(1) $E(Y^2(t)) = \sigma^2 t$ für alle $t \geq 0,$

(2) $\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \sigma^2 \text{Min}\{t, s\}$ für alle $s, t \geq 0,$

(3) $E(Y(t) \mid Y(s)=y_0) = y_0$ für $t > s$.

Beweis:

(1) folgt aus (6.1) (i), (iii)

(2) folgt aus (6.1) (ii) und (1)

(3) folgt aus (6.1) (ii), (iii)

6.3 Bemerkung

(1) Die BB hat stetige Pfade.

(2) Die BB kann als "Grenzprozeß" der symmetrischen Irrfahrt aufgefaßt werden im folgenden Sinn:

Es sei S_n eine symmetrische Irrfahrt,

$$\text{d.h. } S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$X_i \text{ u.i.v. mit } P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Betrachte diese Irrfahrt auf einem Gitter $\mathbb{N}\Delta t \times \mathbb{Z}\Delta x$:

$$\xi(t) := S_n \Delta x \text{ für } n = t/\Delta t.$$

Mit $\Delta x = 1/\sqrt{m}$ und $\Delta t = 1/m$ erhält man als Grenzprozeß für $m \rightarrow \infty$ die BB, d.h. die Verteilung des Prozesses konvergiert gegen die der BB (Wiener-Maß).

Allgemeiner ist dies bekannt als Donsker'sches Invarianzprinzip.

(siehe /4/ 12.3, Theorem 13.12)

Da wir uns für den Fall einer BB mit zwei absorbierenden Grenzen interessieren, wollen wir dies nun untersuchen.

6.4 Lemma

Es sei $\{Y(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ eine BB,

$$m(t)(\omega) := \text{Min}\{Y(s)(\omega), 0 \leq s \leq t\},$$

$$M(t)(\omega) := \text{Max}\{Y(s)(\omega), 0 \leq s \leq t\}.$$

Außerdem sei $t > 0, a < 0 < b$.

Dann gilt für alle $J \subset (a,b)$:

$$P\{a < m(t) \leq M(t) < b, Y(t) \in J\} = \int_J k_t(x) dx, \text{ wobei}$$

$$k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-2k(b-a))^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x-2a+2k(b-a))^2}{2t}\right)$$

Beweis: (siehe /5/, Prop. 2.10)

6.5 Folgerung

Es sei $\{Y(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ eine BB mit zwei absorbierenden Grenzen $a < 0 < b$.

Dann gilt für alle $J \subset (a,b)$:

$$P\{Y(t) \in J\} = \int_J k_t(x) dx,$$

wobei $k_t(x)$ wie in (6.4).

Wir stellen also fest, daß die Verteilung der Zeit eines Brummens eine sehr komplizierte Struktur besitzt. Dies verdeutlicht auch das folgende Bild:

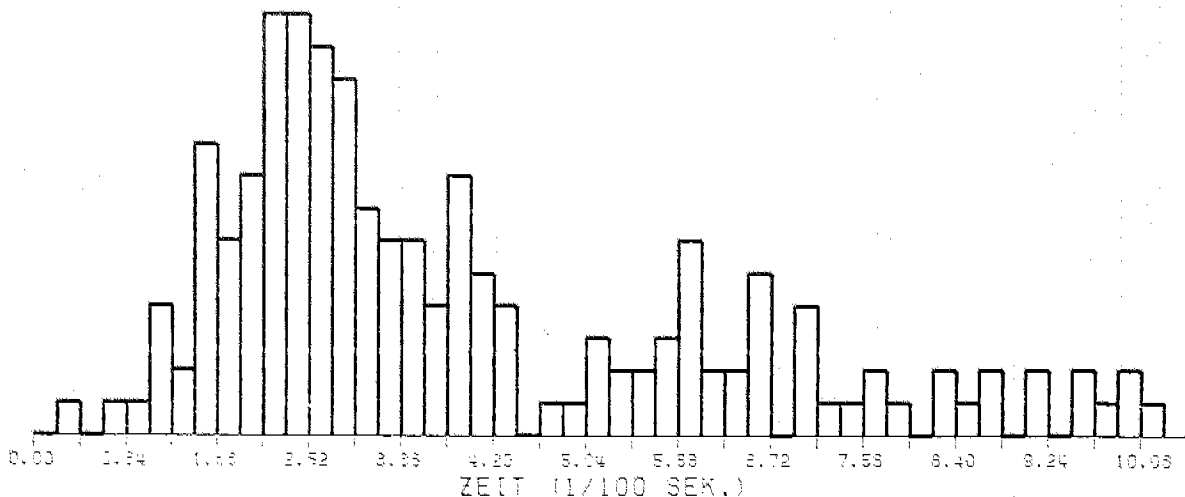


Bild 9: Zeitverteilung eines Brummens in Klasse 16
(AUDI80, Kugelbolzen (x-Richtung), Höckerkurve)

6.6 Bemerkung

Wir werden daher nicht diese Verteilung schätzen oder simulieren, sondern wir schätzen die Ortszuwachsverteilung der BB pro Zeiteinheit (II 8.) und simulieren die Zeit bis zum Austritt aus der ϵ -Umgebung um den Startpunkt des Brummens.

Folgendes Bild zeigt, daß die Normalverteilungs-Annahme für die Ortszuwächse recht gut paßt.

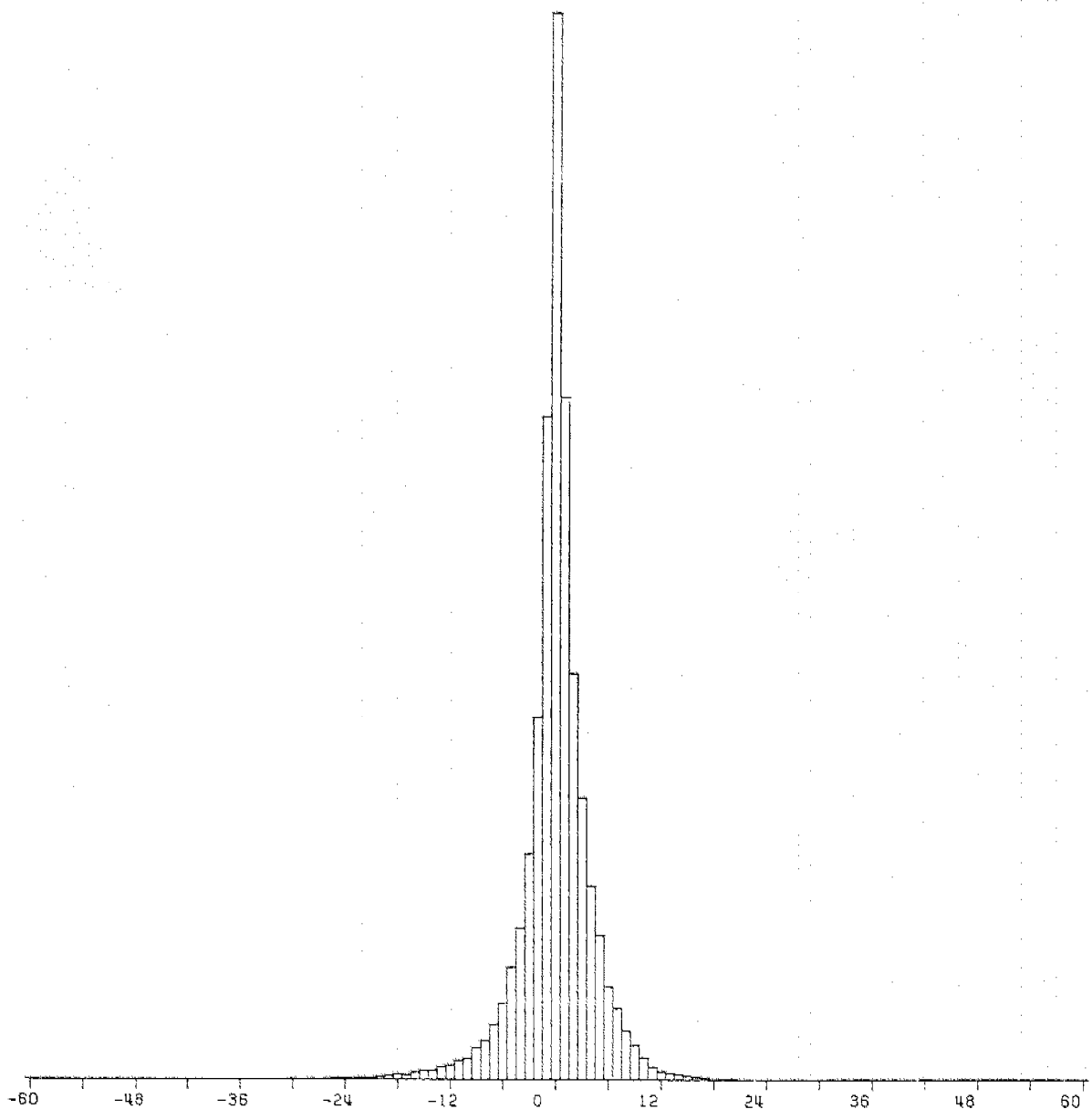


Bild 10: Ortszuwachsverteilung des Brummens in Klasse 16
(AUDI80, Federbein (z-Richtung))

6.7 Bemerkung

Bei Beobachtung anderer Bilder der Ortszuwachsverteilungen des Brummens stellt man jedoch fest, daß es sich nicht um eine Normalverteilung handelt, sondern um eine Überlagerung einer Normalverteilung $N(mt, \sigma^2 t)$ mit einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und sehr kleiner Varianz. Der Einfachheit halber kann man diese zweite Normalverteilung als Punktverteilung ϵ_0 mit Masse 1 im Punkt 0 auffassen, also

$$P_{\text{Brummen}} = \lambda N(mt, \sigma^2 t) + (1 - \lambda) \epsilon_0 \text{ mit } \lambda \in (0, 1).$$

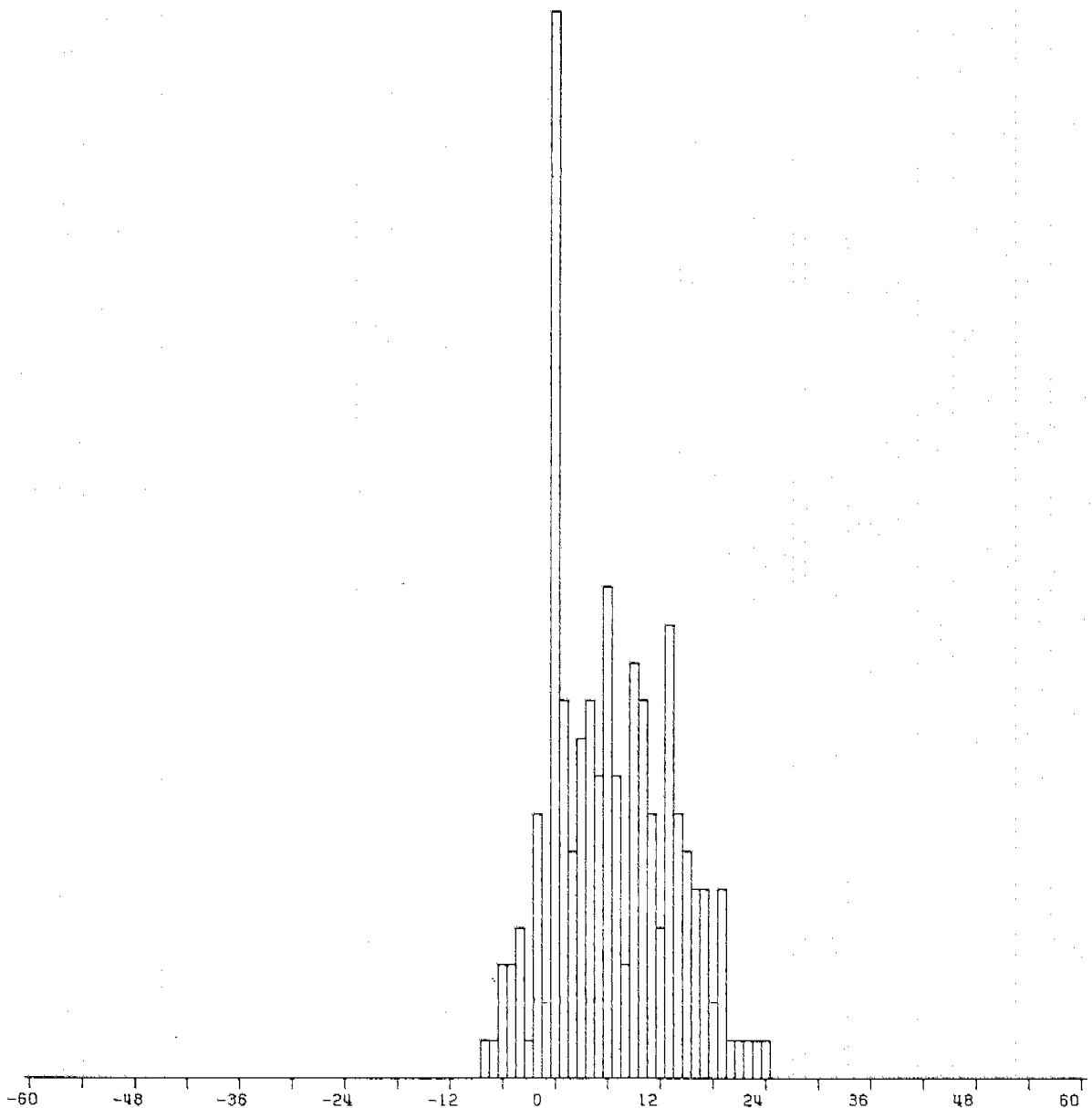
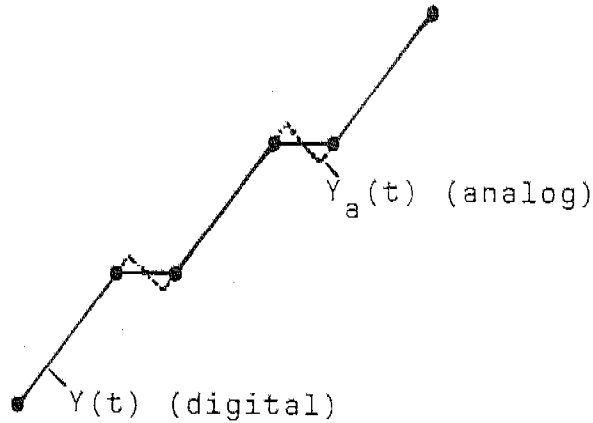


Bild 11: Zuwachsverteilung des Brummens in Klasse 13
(unterhalb der 0-Lage)
(AUDI80, Federbein (z-Richtung), Höckerkurve)

6.8 Erklärung

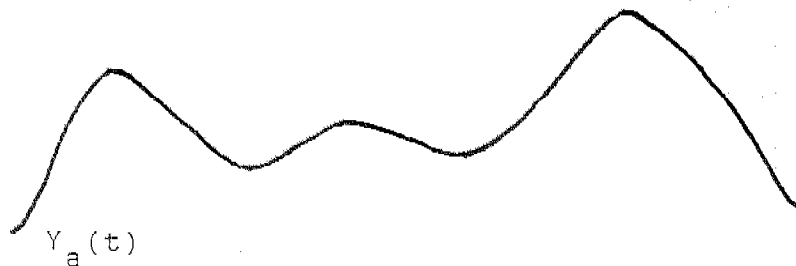
Es gibt drei Möglichkeiten, das Phänomen zu erklären.

- (1) Wenn eine monotone Auf- oder Abwärtsbewegung der BAFZ $Y(t)$ durch ein leichtes Brummen überlagert wird, erhält man folgendes Bild:

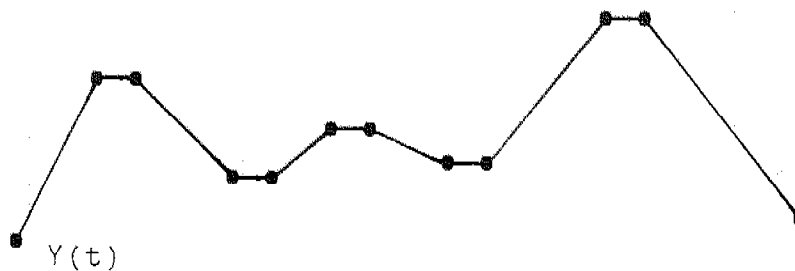


Die sehr kleinen Schwingungen im analogen Signal erscheinen im digitalisierten Prozeß $Y(t)$ nur als 0-Zuwächse.

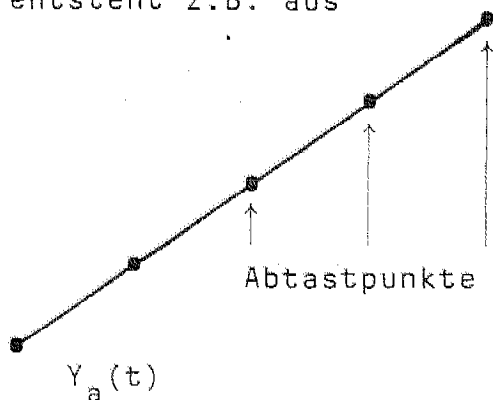
- (2) Wenn wir uns vorstellen, daß das Brummen physikalisch gesehen eine Überlagerung von vielen kleinen Schwingungen ist, ergibt sich folgendes Bild:



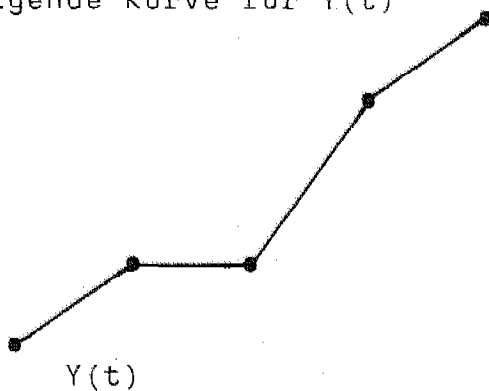
Durch die Digitalisierung werden aus den flachen Kurven im Bereich der Extrema 0-Zuwächse:



(3) Die Originaldaten werden durch einen Analog-Digital-Wandler von $-10V \dots +10V$ auf Werte $\{0, \dots, 1023\}$ transformiert (vgl. I 2.1). Der A-D-Wandler ist im letzten Bit der Darstellung der transformierten Werte ungenau; das bedeutet ein "Umkippen" einer 0 zu einer 1 bzw. umgekehrt. Es entstehen also 0-Zuwächse, obwohl die tatsächlichen Zuwächse sogar größer sein können als der zum digitalen Zuwachs 1 zugehörige analoge Zuwachs. So entsteht z.B. aus



folgende Kurve für $Y(t)$



In allen drei Fällen treten also viele 0-Zuwächse auf.

Damit können wir nun das endgültige Modell für das Brummen angeben:

6.9 Das Modell

Das Brummen ist ein Prozeß $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $X(0) = x_0$ (Startpunkt des Brummens),
- (ii) X hat unabhängige Zuwächse,
- (iii) $X(t) - X(s)$ ist verteilt gemäß $\lambda N(m(t-s), \sigma^2(t-s)) + (1 - \lambda)\epsilon_0$ für $t > s$,
- (iv) $X(t)$ stoppt zum Zeitpunkt $\tau = \inf\{t: X(t) \in \{x_0 \pm \epsilon\}\}$,
d.h. $x_0 \pm \epsilon$ sind absorbierende Zustände.

Die Parameter λ , m und σ^2 können vom Startpunkt x_0 des Brummens abhängen.

7. Gamma-Verteilung - Schätzen der Parameter

7.1 Definition

Die Gamma-Verteilung mit Parameter λ und Grad α ($\Gamma(\alpha, \lambda)$) hat die Dichte

$$f_{\alpha, \lambda}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t},$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die Gammafunktion ist.

7.2 Bemerkung

Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

Es gilt: (1) $E(X) = \alpha/\lambda$,

(2) $\text{Var}(X) = \alpha/\lambda^2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} (1) E(X) &= \int_0^{\infty} t \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{Var}(X) &= \int_0^{\infty} t^2 \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt - E^2(X) \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

7.3 Bemerkung

Es seien x_1, x_2, \dots, x_N unabhängige Beobachtungen einer Zufallsvariablen X .

$$\text{Es seien } \bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

$$s^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Dann sind \bar{x} und s^2 gleichmäßig beste Schätzer (für konvexe Risikofunktionen) für $E(X)$ bzw. $\text{Var}(X)$.

Dabei ist ein gleichmäßig bester Schätzer $T: X \rightarrow \Theta$,

X Beobachtungsraum, Θ Parameterraum, ein Schätzer

mit in $\Theta \in \Theta$ (zu schätzender wahrer Parameter)

gleichmäßig kleinstem Risiko gegenüber allen erwartungstreuen Schätzern für Θ .

(siehe /6/, Beispiel 3.30)

7.4 Schätzer

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

(1) Es sei α fest.

Dann gilt: $\lambda = \frac{\alpha}{E(X)}$, wegen (7.2 (1)).

Wir schätzen daher $E(X)$ durch \bar{x} (7.3) und

λ durch $T(x_1, \dots, x_N) = \frac{\alpha}{\bar{x}}$.

(2) Es gilt: $\lambda = \frac{\alpha}{E(X)}$ (7.2 (1)).

Damit und mit (7.2 (2)) folgt

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha E^2(X)}{\alpha^2}$$

$$= \frac{E^2(X)}{\alpha}$$

$$\text{Also: } \alpha = \frac{E^2(X)}{\text{Var}(X)}$$

$$\text{und } \lambda = \frac{E(X)}{\text{Var}(X)} \quad (7.2 (1)).$$

Wir schätzen $E(X)$ durch \bar{x} , $\text{Var}(X)$ durch s^2 (7.3)

und (α, λ) durch

$$T(x_1, \dots, x_N) = \left(\frac{\bar{x}^2}{s^2}, \frac{\bar{x}}{s^2} \right).$$

8. Das Brummen - Schätzen der Parameter

Wir haben drei Parameter zu schätzen, die Drift m , die Varianz σ^2 und den Mischungsparameter λ von $P = \lambda N(m, \sigma^2) + (1 - \lambda)\varepsilon_0$. ($t = 1$ gesetzt, weil konstante Zeitintervalle)

8.1 Lemma

Die ersten drei Momente der Verteilung P sind:

$$M_1 = \lambda m,$$

$$M_2 = \lambda(\sigma^2 + m^2),$$

$$M_3 = \lambda m(3\sigma^2 + m^2).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int t \, dP \\ &= \lambda \int t \, dN(m, \sigma^2)(t) + (1 - \lambda) \int t \, d\varepsilon_0(t) \\ &= \lambda m + (1 - \lambda)0 \\ &= \lambda m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int t^2 \, dP \\ &= \lambda(\sigma^2 + m^2) + (1 - \lambda)0 \\ &= \lambda(\sigma^2 + m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \int t^3 \, dP \\ &= \lambda \int t^3 \, dN(m, \sigma^2)(t) \\ &= \lambda \int t^3 (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-1} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \lambda \int (t+m)^3 (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\int t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt + 3m \int t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \right. \\ &\quad \left. + 3m^2 \int t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt + m^3 \int \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \right] \\ &= \lambda [0 + 3m\sigma^2 + 3m^2 \cdot 0 + m^3] \\ &= \lambda m(3\sigma^2 + m^2) \end{aligned}$$

8.2 Bemerkung

Die Verteilung ist nicht eindeutig durch die drei Momente bestimmt.

Beispiel:

Für $\lambda = \frac{2}{3 \pm \sqrt{2}/2}$, $m = \frac{3 \pm \sqrt{2}/2}{2}$, $m_2 = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich:

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = \lambda m_2$$

$$= 2$$

$$M_3 = \lambda m(3m_2 - 2m^2)$$

$$= 7/2$$

Daher ist die Momentenmethode, d.h. die Schätzung der Verteilung aufgrund einiger ihrer Momente nicht - oder zumindest nicht in einfacher Form - anwendbar.

Andere Verfahren zur Trennung zweier Verteilungen sind zum Beispiel sogenannte graphische Verfahren (vgl. /7/).

8.3 Einige graphische Verfahren zur Bestimmung von Normalverteilungen

(1) Betrachten wir die Dichtefunktion $g_{m, \sigma^2}(t)$ einer $N(m, \sigma^2)$ -Verteilung, so gilt für ihren Logarithmus:

$$\log g_{m, \sigma^2}(t) = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Dies ist eine Parabel zweiten Grades.

Ein Verfahren besteht nun darin, diese Parabel zu approximieren.

Der Nachteil des Verfahrens ist der, daß sehr viele Punkte der empirischen Dichte-Funktion benötigt werden, um eine Parabel gut anpassen zu können.

(2) Ein weiteres Verfahren beruht auf der Tatsache, daß der Quotient $g_{m, \sigma^2}(t_2) / g_{m, \sigma^2}(t_1)$ folgendes Aussehen hat:

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((t_2 - m)^2 - (t_1 - m)^2)\right).$$

Betrachten wir den Logarithmus davon, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sigma^2}((t_2 - m)^2 - (t_1 - m)^2) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} (t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - 2m) \\ &= -\frac{\delta}{2\sigma^2} (t_1 + t_2 - 2m) \text{ für } t_2 = t_1 + \delta. \end{aligned}$$

Bei festem $\delta > 0$ liegen diese Logarithmen also auf einer Geraden, wenn wir auf der Abszisse die arithmetischen Mittel $(t_1 + t_2) / 2$ der beiden t-Werte abtragen.

Das Verfahren bestünde nun darin, diese Gerade zu approximieren.

Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem ersten besteht darin, daß der Grad des Ausgleichspolynoms jetzt 1 ist.

Wieder aber werden viele Punkte der Dichte-Funktion benötigt.

(3) Ein drittes Verfahren braucht ebenfalls nur eine Regressions-Gerade zur Bestimmung der Verteilung. Betrachten wir dazu die Verteilungsfunktion $\Phi_{m, \sigma^2}(t)$ der $N(m, \sigma^2)$ -Verteilung.

Zeichnen wir diese in Gauß-Papier ein (d.h. ist der Funktionswert $\Phi_{0,1}(t)$, so zeichnen wir ihn auf der Ordinate an die Stelle t), so erhalten wir eine Gerade $y = \frac{x-m}{\sigma}$.

Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber den beiden anderen liegt in der glättenden Wirkung der Aufsummierung der Häufigkeiten. Wir kommen daher mit weniger Punkten zur Bestimmung der Geraden aus.

Alle drei Verfahren sind in unserem speziellen Fall anwendbar, da es sich bei der überlagerten Verteilung nur um eine Punktverteilung handelt.

Ein Verfahren zur Schätzung der Mischverteilung P ergibt sich nun durch ein Zusammenspiel der Momentenmethode mit einer graphischen Methode.

8.4 Schätzverfahren

(1) Wir bestimmen den Mittelwert \bar{x} und das empirische zweite Moment m_2 ohne Einbeziehung des Punktes 0 (vgl. 7.3):

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i \neq 0} x_i g(x_i),$$

$$m_{2,1} = \frac{1}{N_1} \sum_{i \neq 0} x_i^2 g(x_i),$$

wobei g die empirische Dichte und $N_1 = \sum_{i \neq 0} g(x_i)$ die Anzahl der gemessenen Punkte ohne die 0 ist.

(2) Mit einem "graphischen" Verfahren bestimmen wir den Punkt $g_{m, \sigma^2}(0)$ durch Extrapolation der gefundenen Ausgleichs-Geraden bzw. -Parabel.

Dann ist $g(0) - g_{m, \sigma^2}(0)$ die Anzahl der Punkte der Verteilung ε_0 , und $N = N_1 + g_{m, \sigma^2}(0)$ ist die Anzahl der Punkte der Normalverteilung.

(3) Es ergeben sich somit als Schätzer:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{N_1 + g(0)},$$

$$\hat{m} = \bar{x}$$

$$= \frac{1}{N} N_1 \bar{x}_1,$$

$$m_2 = \frac{1}{N} N_1 m_{2,1},$$

also

$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

$$= \frac{1}{N-1} (N_1 m_{2,1} - N \hat{m}^2).$$

Damit sind \hat{m} und $\hat{\sigma}^2$ gleichmäßig beste Schätzer gegeben $\hat{\lambda}$.

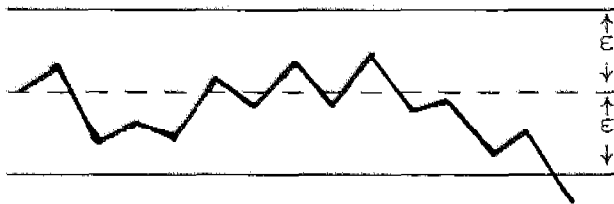
9. Das Markov-Zählverfahren mit Zeit

Das gewöhnliche Markov-Verfahren zählt wie in (1.2) beschrieben die Lastwechsel $i \rightarrow j$ des Prozesses $\bar{X}(n)$ in eine Matrix A .

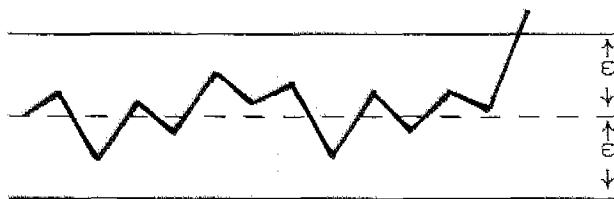
Zusätzlich müssen nun noch die Brummvorgänge gezählt werden.

9.1 Bezeichnung

$B^+(i)$ sei die Anzahl der Brummvorgänge in Klasse i (d.h. in Klasse i gestartet), die die ϵ -Umgebung um den Startpunkt nach unten verlassen.



$B^-(i)$ sei die Anzahl der Brummvorgänge in i , die die ϵ -Umgebung nach oben verlassen.



9.2 Zählung des Brummens

Während eines Brummens in Klasse i sind die Anzahl N_i der Zeitschritte (= Anzahl der Ortszuwächse), der Erwartungswert m_i und das zweite Moment $m_{2,i}$ der Ortszuwächse (rekursiv) zu bestimmen.

Außerdem sind einige Dichtewerte bzw. Summenhäufigkeiten (vgl. 8.3) zu registrieren.

Das Schätzverfahren ist dann gemäß (8.4) durchzuführen.

9.3 Übergangszeiten

Eine Halbschwingung (i, j) wird gemäß (1.2) nach Markov gezählt.

Zusätzlich zur Markov-Matrix A werden noch eine Matrix E der Erwartungswerte und eine Matrix V der Varianzen der Übergangszeitne rekursiv aufgebaut.

Die Schätzung der Parameter α^{ij} , λ^{ij} erfolgt dann wie in (7.4) beschrieben.

Beim Aufsummieren der beobachteten Werte bzw. Wertequadrate zur Bestimmung des Mittelwertes bzw. des zweiten Momentes werden die Summen oft sehr groß (evtl. größer als die größte Maschinenzahl).

Daher kann es sinnvoll sein, die Schätzer rekursiv zu bestimmen:

9.4 Lemma

x_1, \dots, x_N seien unabhängige Beobachtungen derselben Zufallsvariablen,

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ und } s_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \bar{x}_N^2 \text{ seien}$$

die gleichmäßig besten Schätzer für Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen (vgl. 7.3).

Dann gilt:

$$(i) \quad \bar{x}_N = \frac{N-1}{N} \bar{x}_{N-1} + \frac{1}{N} x_N$$

$$(ii) \quad s_N^2 = \frac{N-2}{N-1} s_{N-1}^2 + \frac{1}{N} (\bar{x}_{N-1} - x_N)^2.$$

Beweis:

(i) klar

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \frac{N-2}{N-1} s_{N-1}^2 + \frac{1}{N} (\bar{x}_{N-1} - x_N)^2 \\ &= \frac{N-2}{N-1} \left(\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - \frac{N-1}{N-2} \bar{x}_{N-1}^2 \right) + \frac{1}{N} \bar{x}_{N-1}^2 \\ & \quad - \frac{2}{N} \bar{x}_{N-1} x_N + \frac{1}{N} x_N^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 + \frac{N-1}{N(N-1)} x_N^2 - \bar{x}_{N-1}^2 + \frac{1}{N} \bar{x}_{N-1}^2 \\ & \quad - \frac{2}{N} \bar{x}_{N-1} x_N \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N(N-1)} x_N^2 - \frac{N-1}{N} \bar{x}_{N-1}^2 - \frac{2}{N} \bar{x}_{N-1} x_N \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N^2} x_N^2 + \frac{(N-1)^2}{N^2} \bar{x}_{N-1}^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(N-1)}{N^2} \bar{x}_{N-1} x_N \right) \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} x_N + \frac{N-1}{N} \bar{x}_{N-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \bar{x}_N^2 \quad (\text{wegen (i)}) \\ &= s_N^2 \end{aligned}$$

9.5 Alle Parameter

Haben nur wenige Übergänge von i nach j stattgefunden bzw. gab es nur wenige Brummphasen in i , so erhält man möglicherweise sehr schlechte Schätzungen.

Daher ist es sinnvoll, eine Schätzung der kompletten Parametermatrizen durch eine geeignete Glättung der ermittelten vorzunehmen.

Ein zusätzlicher Effekt dabei ist die Vervollständigung der Parametermatrizen. Dies ist bei einer Extrapolation der Markov-Matrix auf eine größere Fahrstrecke notwendig.

10. Modifizierte Rekonstruktion des Markov-Zählverfahrens ohne Zeit

Zuerst sehen wir uns kurz die Markov-Inversion ohne Zeit an (vgl. /1/ 3.1).

10.1 Graph zu Markov-Inversion

Zum Min-Max-Prozeß $\bar{X}(n)$ wurde die Markov-Matrix A bestimmt.

Gesucht sind nun alle Min-Max-Prozesse, die zu dieser Matrix führen.

Dazu definieren wir zu A einen bipartiten Graphen

$G(A) = (V^-, V^+, E)$ mit

$V^- = \{1^-, 2^-, \dots, (M-1)^-\}$, (M Klassenzahl des Prozesses)

$V^+ = \{2^+, 3^+, \dots, M^+\}$,

$E = \{(i^-, j^+) : (i, j) \text{ Aufwärtshalbschwingung in } \bar{X}\}$

u $\{(i^+, j^-) : (i, j) \text{ Abwärtshalbschwingung in } \bar{X}\}$

$= \{(i^-, j^+)_{ij} : A(i, j) = n_{ij}, i < j\}$

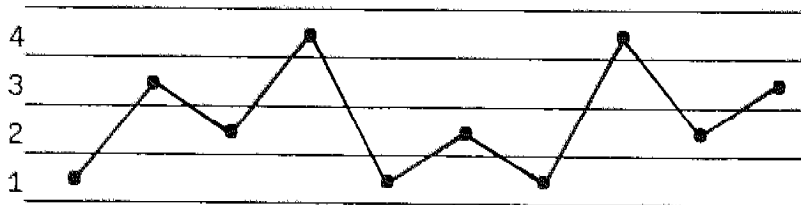
u $\{(i^+, j^-)_{ij} : A(i, j) = n_{ij}, i > j\}$.

Damit wird jeder Halbschwingung in $\bar{X}(n)$ genau eine Kante zugeordnet.

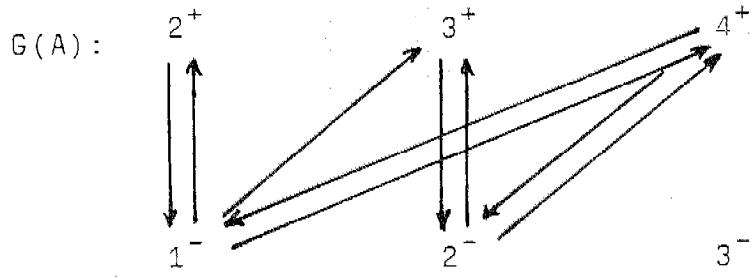
Es ist klar, daß ein Prozeß, der zu derselben Matrix A führt, auch denselben Graphen $G(A)$ hat.

Ein Prozeß gehört nun zum Graphen $G(A)$, wenn er einen Euler-Weg in $G(A)$ beschreibt, d.h. wenn jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Beispiel:



$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

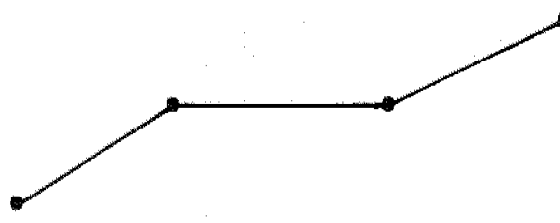


10.2 Bezeichnung

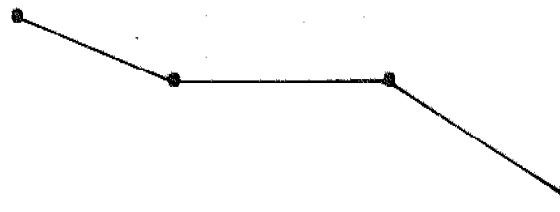
$B^{++}(i)$ sei die Anzahl der Brummvorgänge in Klasse i , in die der Prozeß von unten hineingelaufen ist und die die Klasse i nach unten verlassen.



$B^{+-}(i)$ sei die Anzahl der Brummvorgänge in i , in die der Prozeß von unten hineinläuft und die i nach oben verlassen.



$B^{-+}(i)$ sei die Anzahl der Brummen in i , in die der Prozeß von oben hineinläuft und die i nach unten verlassen.



$B^{--}(i)$ sei die Anzahl der Brummen in i , in die der Prozeß von oben hineinläuft und die i nach oben verlassen.



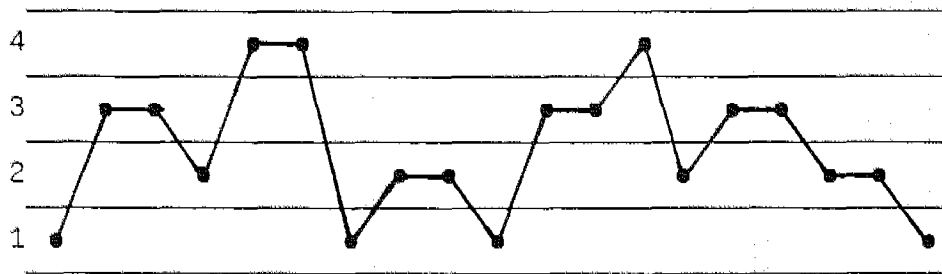
10.3 Graph zu Markov mit Brummen

Seien $B^{++}(i)$, $B^{+-}(i)$, $B^{--}(i)$ und $B^{-+}(i)$ wie in (10.2).
Wir definieren zu A , B^{++} , B^{+-} , B^{--} , B^{-+} einen Graphen $\tilde{G} = (V^-, V^+, \tilde{E})$ mit

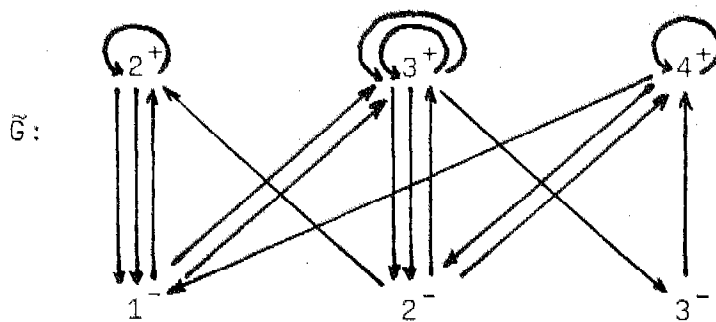
V^-, V^+ wie in (10.1)

$$\begin{aligned} \tilde{E} = E \cup & \{(i^-, i^-)_1, \dots, (i^-, i^-)_{n_i} : B^{--}(i) = n_i\} \\ & \cup \{(i^-, i^+)_1, \dots, (i^-, i^+)_{n_i} : B^{+-}(i) = n_i\} \\ & \cup \{(i^+, i^+)_1, \dots, (i^+, i^+)_{n_i} : B^{++}(i) = n_i\} \\ & \cup \{(i^+, i^-)_1, \dots, (i^+, i^-)_{n_i} : B^{-+}(i) = n_i\} \end{aligned}$$

Beispiel:



$A =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	2	0	2	0	1	1	0	2	0	1	1	1	0	0	$B^{++} = (0, 1, 2, 1)$
	0	1	2	0														
	2	0	1	1														
	0	2	0	1														
1	1	0	0															
$B^{+-} = (0, 0, 1, 0)$																		
$B^{--} = (0, 0, 0, 0)$																		
$B^{-+} = (0, 1, 0, 0)$																		



In diesem Graphen wird wieder ein Euler-Weg gesucht. Wir müssen allerdings die Bedingung an den Euler-Weg stellen, daß keine zwei Brumm-Kanten aufeinanderfolgen dürfen.

Wir können einen Graphen konstruieren, bei dem wir auf diese Bedingung nicht zu achten brauchen, allerdings ist der Informationsbedarf für die Konstruktion wesentlich höher.

Genauer: Wir müssen zu jeder an ein Brummen i anschließenden Halbschwingung (i,j) den Zielort j kennen. Dann können wir die Definition des Graphen wie folgt vornehmen:

$\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, wobei

$\tilde{V} = V^- \cup V^+ \cup \{1_B, 2_B, \dots, M_B\}$,

$\tilde{E} = \{(i^-, j^+): i < j, \text{ Halbschwingung in } \bar{X}, \text{ nicht nach Brummen}\}$

$\cup \{(i^+, j^-) \mid i > j, \text{ Halbschwingung, nicht nach Brummen}\}$

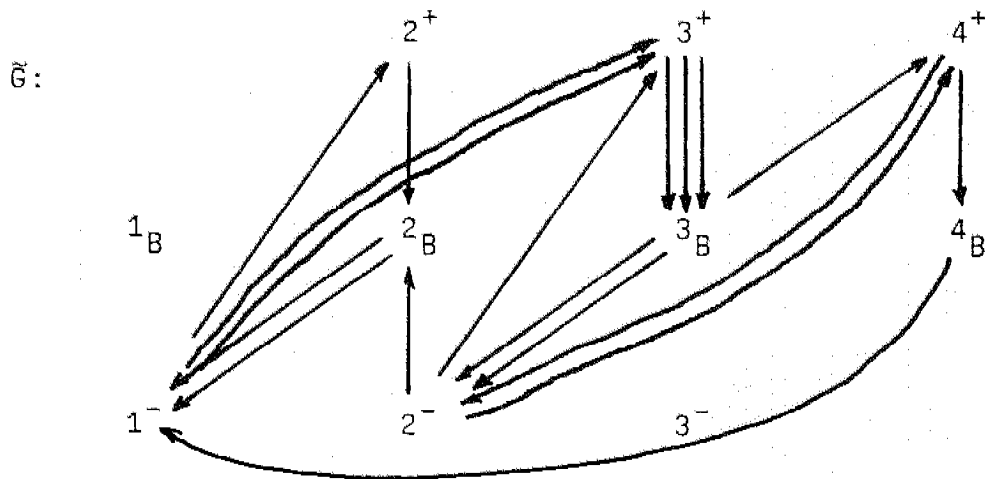
$\cup \{(i_B, j^+): i < j, \text{ Halbschwingung, nach Brummen in } i\}$

$\cup \{(i_B, j^-): i > j, \text{ Halbschwingung, nach Brummen in } i\}$

$\cup \{(i^-, i_B): (i,i) \text{ Brummen in } \bar{X} \text{ von unten}\}$

$\cup \{(i^+, i_B): (i,i) \text{ Brummen in } \bar{X} \text{ von oben}\}$

Beispiel:



Wir entscheiden uns aufgrund des geringeren Informationsbedarfs für den ersten Graphen.

10.4 Rekonstruktion

Die Rekonstruktion des Markov-Verfahrens besteht nun darin, daß ein aufspannender Baum der letzten zu durchlaufenden Nicht-Brummen-Kanten (im Euler-Weg) bestimmt wird, dieser von der Matrix A subtrahiert wird und dann die Matrix A abgearbeitet wird (vgl. /1/).

An die Kanten aus $\tilde{E} \setminus E$ (Brummkanten, vgl. 10.3) muß die Bedingung gestellt werden, daß nicht zwei aufeinanderfolgen dürfen.

Kommt der Prozeß an eine Stelle, von wo es nicht mehr weitergeht (keine ausgehenden Kanten mehr vorhanden),

wird von dort aus die vom aufspannenden Baum vorgeschriebene letzte Kante verwendet.

Es stellt sich nun die Frage, nach welchen Kriterien wir uns für oder gegen ein Brummen an einer Stelle i entscheiden.

10.5 Wahrscheinlichkeiten für Brummen

Zuerst einmal verringern wir aus praktischen Gründen die Daten für die Brumm-Anzahlen:

Für jede Klasse i seien die Anzahlen $B^+(i)$ und $B^-(i)$ der Brummvorgänge bekannt, die die ϵ -Umgebung um den Startpunkt des Brummens nach unten bzw. oben verlassen (vgl. 9.1).

Wir nehmen an, daß die Brummvorgänge gleichmäßig über den Prozeß verteilt sind.

Dies bedeutet für den Prozeß $\bar{X}(n)$:

$\bar{X}(n)$ befinde sich im Zustand i (nach einer Halbschwingung).

Es gebe noch m_i Möglichkeiten, im Zustand i zu landen.

$m_i = \tilde{S}_{u,i} + \tilde{S}_{o,i}$, wobei $\tilde{S}_{u,i}$ die Anzahl der Halbschwingungen von unten nach i

und $\tilde{S}_{o,i}$ die Anzahl der Halbschwingungen von oben nach i ist (vgl. /1/ 3.1).

Außerdem existieren noch n_i Brummen in Klasse i .

Dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein Brummen

n_i / m_i .

Nun ist noch zu entscheiden, ob es sich um ein Auf- oder Abwärts-Brummen handelt. Auch hier wollen wir eine Gleichverteilung jedes einzelnen Brummens annehmen.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für ein Aufwärts-

brummen $\frac{\tilde{B}^-(i)}{\tilde{B}^-(i) + \tilde{B}^+(i)}$, wobei \tilde{B}^- und \tilde{B}^+ die momen-

tanen Werte von B^- und B^+ sind.

10.6 Bemerkung

Aufgrund dieser Festlegung der Wahrscheinlichkeiten ist gewährleistet, daß alle Brummvorgänge bei der Rekonstruktion vorkommen.

Denn sei zu einem Zeitpunkt $n_i = m_i$, dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein Brummen gleich 1.

Also kommt jedes Brummen vor.

Die eigentliche on-line-Simulation kann nun leicht wie folgt durchgeführt werden:

10.7 Simulation

- (1) Simuliere Zufallszahl U gemäß $U(0,1)$
- (2) $U > n_i / m_i$, gehe nach (13)
- (3) Simuliere Brummen in i
- (4) $m_i := m_i - 1$
- (5) Simuliere Zufallszahl U gemäß $U(0,1)$
- (6) $U > \frac{\tilde{B}^-(i)}{\tilde{B}^-(i) + \tilde{B}^+(i)}$, gehe nach (10)
- (7) $\tilde{B}^-(i) := \tilde{B}^-(i) - 1$
- (8) Führe einen Simulationsschritt (gemäß dem alten Verfahren) wie nach einer Abwärtshalbschwingung durch
- (9) gehe nach (14)
- (10) $\tilde{B}^+(i) := \tilde{B}^+(i) - 1$
- (11) Führe einen Simulationsschritt wie nach einer Aufwärtshalbschwingung durch
- (12) gehe nach (14)
- (13) Führe einen Simulationsschritt durch
- (14) Neuer Zustand j nach Simulation, gehe nach (15) sonst STOP
- (15) $n_i := n_i - 1$
- (16) $i := j$
- (17) gehe nach (1)

10.8 Bemerkung

Statt zweier $U(0,1)$ -Simulationen kommen wir mit einer aus, indem wir das Intervall $(0,1)$ zum einen in die zwei Teile $(0, n_i/m_i]$ und $(n_i/m_i, 1)$ für die Entscheidung für oder gegen Brummen einteilen und zum andern das erste noch für die Entscheidung Aufwärts- Abwärts-Brummen aufteilen.

11. Markov-Rekonstruktion mit Zeit

Wir haben nun alle Vorbereitungen für eine Rekonstruktion des Markov-Algorithmus mit Zeit geschaffen.

11.1 Verfahren

Wir rekonstruieren gemäß (10.) einen Min-Max-Prozeß mit Brummen.

Währenddessen simulieren wir die zugehörigen Übergangszeiten gemäß der geschätzten Gamma-Verteilungen (vgl. 7.) bzw. die Zeiten des Brummens gemäß (6.6) mit den nach (8.) geschätzten Parametern.

11.2 Bemerkung

Wie die benötigten Verteilungen zu simulieren sind, wird in Kapitel IV erklärt.

11.3 Komplexitäten

Es ist leicht einzusehen, daß mit diesem Verfahren ein von der Anzahl der Klassen quadratisch, aber von der Länge der Zeitfunktion unabhängiger Platz benötigt wird.

Außerdem wächst der Zeitbedarf für die Simulation des Brummens und der Gamma-Verteilungen und damit der Zeitbedarf des ganzen Verfahrens linear mit der Länge der BAZF.

Damit haben wir die Forderung der Praxis an ein on-line-Verfahren erfüllt.

III RAINFLOW

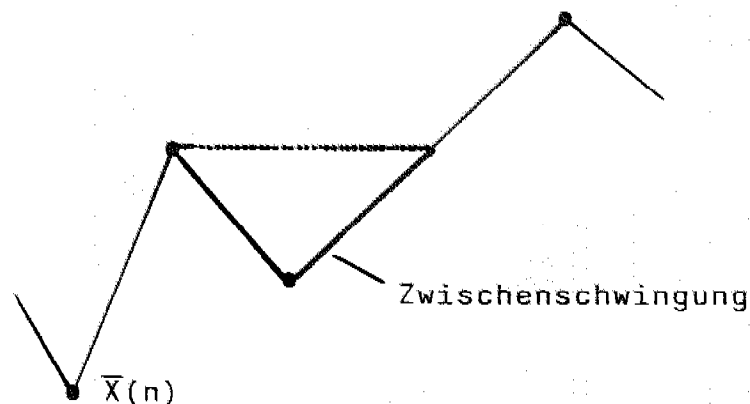
1. Zählverfahren

Es stellt sich die Frage, wozu ein zweites Zählverfahren gebraucht wird.

1.1 Nachteile des Markov-Verfahrens

Der Markov-Zählalgorithmus beruht auf der Annahme, daß für die Lebensdauer eines Bauteils nur die Häufigkeiten der Lastwechsel von Bedeutung sind. Dies ist sicherlich nicht richtig, da die Schädigung z.B. auch von der zeitlichen Reihenfolge der Lastwechsel abhängt.

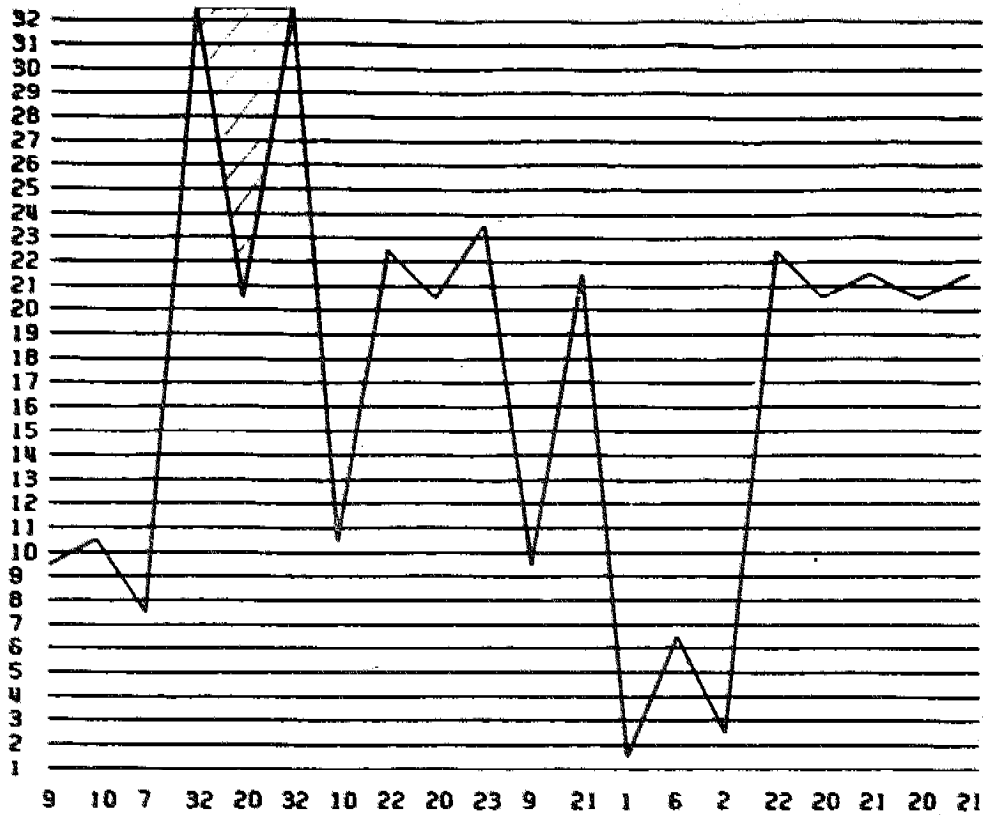
Außerdem sagt der Ingenieur, daß für die Beanspruchung eines Bauteils und damit für seine Lebensdauer sogenannte Zwischenschwingungen oder geschlossene Hysteresis-Schleifen eine entscheidende Rolle spielen.



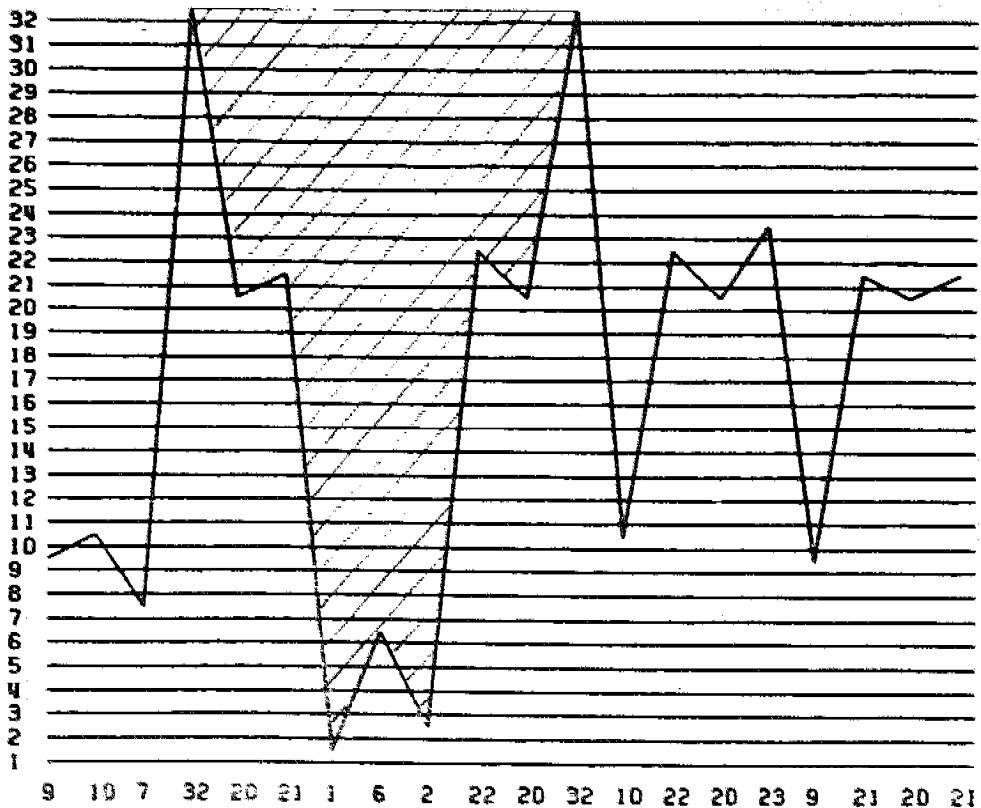
Diese Hysteresis-Schleifen gilt es daher so gut wie möglich bei der Rekonstruktion zu erhalten. Das Markov-Zählverfahren hat die Eigenschaft, den Prozeß $\bar{X}(n)$ in seine einzelnen Halbschwingungen zu "zerhacken" und diese dann bei der Rekonstruktion in vielen Fällen falsch zusammensetzen. Dabei bedeutet "falsch", daß zum einen die zeitliche Reihenfolge der Lastwechsel verändert wird und zum andern bestimmte - für die Lebensdauer entscheidende - Teillastfolgen (Zwischenschwingungen) nicht richtig rekonstruiert werden.

Beispiel:

Wir betrachten folgende BAZF:



Eine mögliche Rekonstruktion davon ist:



Wir sehen, daß die Teillastfolge (32, 20, 32) völlig falsch wiedergegeben wird. Das lokale Minimum zwischen 32 ... 32 liegt hier bei 1, wodurch die Schädigung hier viel größer ist als bei der Original-Teillastfolge.

Diese Bilder sind keine Ausnahme. Allgemein besteht die Tendenz, die Prozesse so zu rekonstruieren, daß die geschätzte mittlere Lebensdauer zu klein ist (vgl. /1/ 4.2).

Daher wird ein neues Zählverfahren eingeführt (RAINFLOW), das die für die Lebensdauer von Bauteilen wichtigen Eigenschaften einer BAZF

- Reihenfolge großer Lastwechsel
- Mittellastverschiebungen

registriert.

1.2 Verfahren

Das Verfahren beruht auf der Streichung von geschlossenen Hysterisis-Schleifen.

(i) Es sei $\{\bar{X}(n), n = 0, \dots, N\}$ ein Min-Max-Prozeß ohne Brummen mit Zustandsraum $S = \{1, \dots, M\}$.

Wir bilden Folgen $(\bar{X}_v)_{v \in \mathbb{N}}$, $(A_v)_{v \in \mathbb{N}}$, $(n_v)_{v \in \mathbb{N}}$ mit

$\bar{X}_v \in S^{N+1}$, $A_v \in \mathbb{N}^{M^2}$, $n_v \in \{0, \dots, N-2\}$.

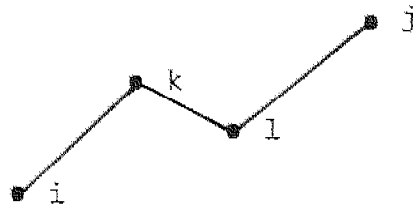
$\bar{X}_0 = \bar{X}$, $A_0 = 0$, $n_0 = 0$.

$(\bar{X}_{v+1}, A_{v+1}, n_{v+1})$ entstehe durch Anwendung eines RAINFLOW-Schrittes aus (\bar{X}_v, A_v, n_v) :

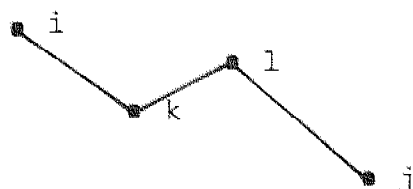
Es sei $\bar{X}_v(n_v) = i$, $\bar{X}_v(n_v+1) = k$, $\bar{X}_v(n_v+2) = l$,

$\bar{X}_v(n_v+3) = j$.

Gilt $i \leq l < k \leq j$



oder $i \geq l > k \geq j$



dann:

$$A_{v+1}(k', l') := \begin{cases} A_v(k', l') + 1, & \text{falls } (k', l') = (k, l) \\ A_v(k', l') & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$n_{v+1} := \text{Max}\{n_v - 2, 0\},$$

$$\bar{X}_{v+1}(n) := \begin{cases} \bar{X}_v(n), & \text{falls } n \leq n_v \text{ (Streichen der} \\ & \text{Zwischenschwingung)} \\ \bar{X}_v(n+2), & \text{falls } n > n_v. \end{cases}$$

Sonst: $(\bar{X}_{v+1}, A_{v+1}, n_{v+1}) := (\bar{X}_v, A_v, n_v + 1)$.

Der Algorithmus stoppt, wenn der Min-Max-Prozeß komplett abgearbeitet ist, d.h. wenn

$$n_{v+1} + 1 > |\bar{X}_{v+1}| - 3.$$

Dann ist $A = A_v$ die RAINFLOW-Matrix

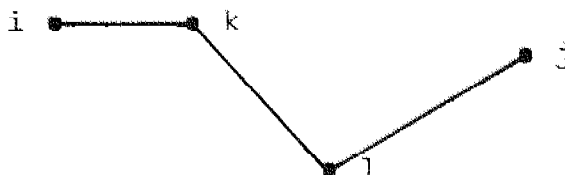
und $R = \bar{X}_v$ das RAINFLOW-Residuum.

(ii) Ist $\bar{X}(n)$ ein Min-Max-Prozeß mit Brummen, so sind folgende Modifikationen durchzuführen:

Es seien wieder $\bar{X}_v(n_v) = i, \bar{X}_v(n_v+1) = k,$

$\bar{X}_v(n_v+2) = l, \bar{X}_v(n_v+3) = j.$

Gilt nun $i = k$



dann:

$$A_{v+1}(k', l') := \begin{cases} A_v(k', l') + 1, & \text{falls } (k', l') = (i, k) \\ A_v(k', l') & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$n_{v+1} := \text{Max}\{n_v - 2, 0\},$$

$$\bar{X}_{v+1}(n) := \begin{cases} \bar{X}_v(n), & \text{falls } n \leq n_v \text{ (Streichen des} \\ & \text{Brummens)} \\ \bar{X}_v(n+1), & \text{falls } n > n_v \end{cases}$$

Gilt $i \leq l \leq k \leq j$



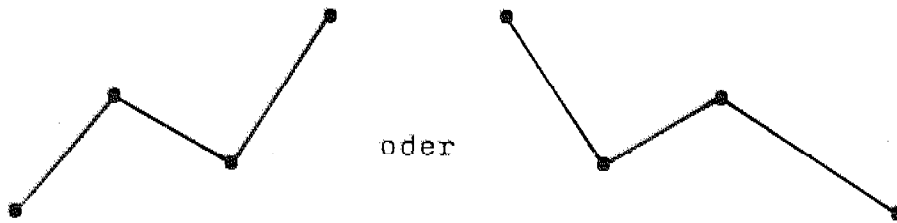
oder umgekehrt $i \geq l \geq k \geq j,$

dann verfahren wir wie (i).

Hier werden also alle Brummphasen herausgestrichen und in der Diagonale der RAINFLOW-Matrix A gezählt.

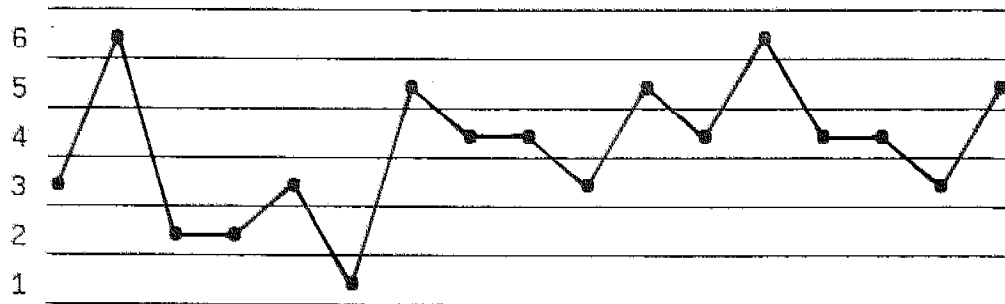
1.3 Bezeichnung

Wir nennen einen Abschnitt des Min-Max-Prozesses der Form



einen RAINFLOW-Zyklus.

1.4 Beispiel



$\bar{X} =$	3	6	2	2	3	1	5	4	4	3	5	4	6	4	4	3	5	
$\bar{X}_0 =$	(3, 6, 2, 2, 3, 1, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 6, 4, 4, 3, 5)																$n_0 = 0$	
$\bar{X}_1 =$	\bar{X}_0																$n_1 = 1$	
$\bar{X}_2 =$	\bar{X}_1																$n_2 = 2$	
$\bar{X}_3 =$	(3, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 6, 4, 4, 3, 5)																$A_3(2, 2) = 1$	$n_3 = 0$
$\bar{X}_4 =$	\bar{X}_3																$n_4 = 1$	
$\bar{X}_5 =$	(3, 6, 1, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 6, 4, 4, 3, 5)																$A_5(2, 3) = 1$	$n_5 = 0$
$\bar{X}_6 =$	\bar{X}_5																$n_6 = 1$	
$\bar{X}_7 =$	\bar{X}_6																$n_7 = 2$	
$\bar{X}_8 =$	\bar{X}_7																$n_8 = 3$	
$\bar{X}_9 =$	(3, 6, 1, 5, 3, 5, 4, 6, 4, 4, 3, 5)																$A_9(4, 4) = 1$	$n_9 = 1$
$\bar{X}_{10} =$	\bar{X}_9																$n_{10} = 2$	
$\bar{X}_{11} =$	(3, 6, 1, 5, 4, 6, 4, 4, 3, 5)																$A_{11}(5, 3) = 1$	$n_{11} = 0$
$\bar{X}_{12} =$	\bar{X}_{11}																$n_{12} = 1$	
$\bar{X}_{13} =$	\bar{X}_{12}																$n_{13} = 2$	
$\bar{X}_{14} =$	(3, 6, 1, 6, 4, 4, 3, 5)																$A_{14}(5, 4) = 1$	$n_{14} = 0$
$\bar{X}_{15} =$	\bar{X}_{14}																$n_{15} = 1$	
$\bar{X}_{16} =$	\bar{X}_{15}																$n_{16} = 2$	
$\bar{X}_{17} =$	\bar{X}_{16}																$n_{17} = 3$	

$$\bar{X}_{18} = (3, 6, 1, 6, 3, 5)$$

$$\bar{X}_{19} = \bar{X}_{18}$$

$$\bar{X}_{20} = \bar{X}_{19}$$

$$n_{20} + 1 = 4 > 3 = |\bar{X}_{20}| - 3$$

STOP

$$A_{18}(4, 4) = 2 \quad n_{18} = 1$$

$$n_{19} = 2$$

$$n_{20} = 3$$

A =

0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

$$R = (3, 6, 1, 6, 3, 5)$$

Vorbemerkung für die folgenden drei Abschnitte

Die Hauptaufgabe bestand - wie schon im Vorwort bemerkt - in der Modell-Bildung.

Daher wollen wir uns in den nächsten Abschnitten die Entwicklung vom ersten naiven Modellansatz (2.) bis hin zum endgültigen Modell (5.) ansehen.

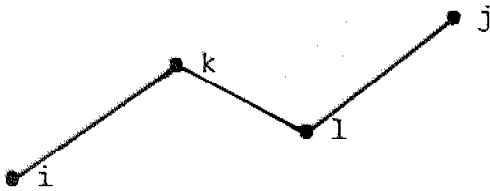
Wir werden sehen, wie rein mathematische Gründe, aber auch vor allem die Realität, das Modell zum endgültigen zurechtfeilen.

Wer sich nicht für die Modellbildung interessiert, kann die Abschnitte 2. bis 4. weglassen und sofort zum Abschnitt 5. kommen.

Wegen des motivierenden Charakters der ersten Hypothesen für das endgültige Modell empfiehlt es sich jedoch, diese Abschnitte nicht zu übergehen.

2. Erste Hypothese für den Prozeß mit Zeit

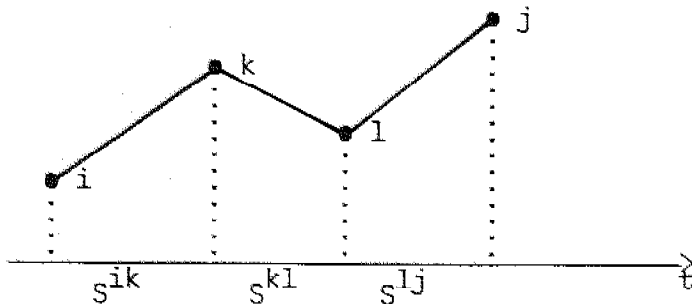
Wir betrachten einen RAINFLOW-Zyklus der Form



im Min-Max-Prozeß.

Wie im Fall Markov nehmen wir die Pfade wieder als "linear" an (vgl. II 2.).

Es seien S^{ik} , S^{kl} , S^{lj} die Übergangszeiten in unserem Zyklus.



Wir nehmen an, daß sich die Zeit S^{ij} für den Übergang $i \rightarrow j$ nach Streichen der Zwischenschwingung (k,l) zusammensetzt aus S^{ik} und S^{lj} , und zwar unabhängig von (k,l) , d.h.

$$P_{S^{ij}} = P_{S^{ik} + S^{lj}} \text{ für alle } (k,l) \text{ mit } i \leq l < k \leq j.$$

Außerdem nehmen wir - ähnlich wie bei Markov - die Zeiten S^{ik} und S^{lj} als unabhängig an.

Für die Zeit der Zwischenschwingung S^{kl} machen wir vorerst keine Annahme, da das erste Ziel ein Modell für die Aufteilung einer Zeit S^{ij} in S^{ik} und S^{lj} (zur anschließenden Einfügung der Zwischenschwingungszeit S^{kl}) ist.

2.1 Annahme

Es gibt einen Prozeß $\{X(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ mit den obigen Annahmen.

Also: $P_{S^{ij}} = P_{S^{ik}} * P_{S^{lj}}$ (wegen der Unabhängigkeit von S^{ik} und S^{lj}) für alle (k,l) mit $i \leq l < k \leq j$.

Wir werden sehen, daß es keinen solchen Prozeß gibt.

Zur Vorbereitung benötigen wir folgendes Lemma:

2.2 Lemma

Es sei P ein Wahrscheinlichkeits-Maß über $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit

$$P = P * P.$$

Dann gilt: $P = \epsilon_0$, wobei ϵ_0 das Punktmaß im Punkt 0 ist.

Beweis:

Es sei \hat{P} die Fourier-Transformierte von P .

$$P = P * P$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \hat{P}(t) &= \hat{P}(t) \hat{P}(t) \\ &= \hat{P}(t)^2 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit: $\hat{P}(t) \in \{0, 1\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wegen des Satzes über die Stetigkeit der Fourier-Transformierten (vgl. /8/ 47.4) folgt damit

$$\hat{P} \equiv 0 \text{ oder } \hat{P} \equiv 1,$$

also $\hat{P} \equiv 1$, weil P ein W-Maß ist.

Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten (vgl. /8/ 48.4)

liefert wegen $\hat{\epsilon}_0 = 1$:

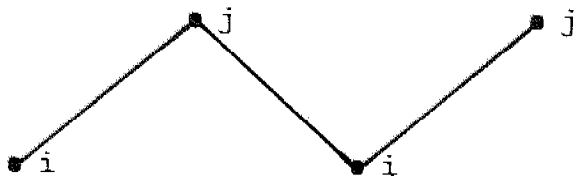
$$P = \epsilon_0$$

2.3 Folgerung

Die Annahme (2.1) führt zum Widerspruch.

Beweis:

Wir betrachten einen Zyklus $i \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow j$



mit Zeiten S_1^{ij}, S_2^{ij} .

$$\begin{aligned} \text{Laut Definition gilt: } P_{S^{ij}} &= P_{S_1^{ij}} * P_{S_2^{ij}} \\ &= P_{S^{ij}} * P_{S^{ij}}. \end{aligned}$$

Wegen Lemma (2.2) folgt daraus:

$$P_{S^{ij}} = \epsilon_0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $S^{ij} > 0$ (Übergangszeit).

Wir sehen, daß der Widerspruch aus der Zulässigkeit von $(k, l) = (j, i)$ folgt. Wir ändern daher unsere Annahme ab:

2.4 Annahme

Für den Prozeß $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ gelte:

$$P_{Sij} = P_{Sik} * P_{Slj} \text{ für alle } (k,l) \text{ mit } i < l < k \leq j.$$

Wir werden auch dies zu einem Widerspruch führen:

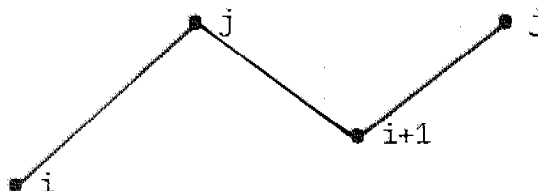
2.5 Lemma

$$P_{Sij} = \epsilon_0.$$

Beweis:

Es sei $f_{ij} := \hat{P}_{Sij}$ und $i + 2 \leq j$.

Es gilt: $f_{ij} = f_{ij} f_{i+1,j}$



Per Induktion ergibt sich:

$$f_{ij} = f_{ij}^{n+1} f_{i+1,j} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit

$$f_{ij} (1 - f_{ij}^n f_{i+1,j}) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit:

$$f_{ij}^n(t) f_{i+1,j}(t) = 1 \text{ für alle } t \in \text{Träger}(f_{ij}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also:

$$f_{i+1,j}(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in \text{Träger}(f_{ij})$$

und

$$f_{ij}(t) = f_{i+1,j}^{-n}(t) \text{ für alle } t \in \text{Träger}(f_{ij}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten:

$$f_{ij}(t) = 1 \text{ für alle } t \in \text{Träger}(f_{ij}),$$

woraus wie im Beweis von (2.2) die Behauptung folgt.

2.6 Folgerung

Es existiert kein Prozeß, der die Annahme (2.4) erfüllt.

2.7 Bemerkung

Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch für $i \leq l < k < j$.

Wir wollen weiterhin annehmen, daß sich die Zeit S^{ij} aus Zeiten des Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ zusammensetzt. Aufgrund des Gezeigten müssen wir jedoch die Zwischenschwingungen (k,l) unterschiedlich behandeln, in Abhängigkeit von den Halbschwingungen (i,j) , in die sie eingelagert sind.

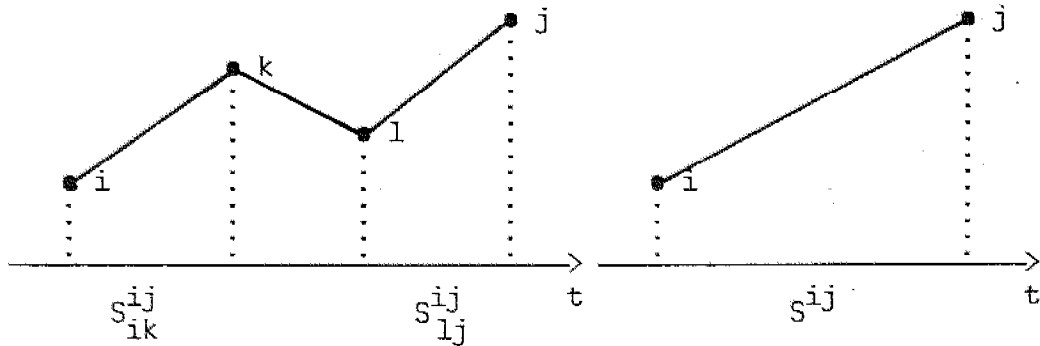
(Denn die Widerspruchs-Beweise beruhen auf der Gleichbehandlung der Zwischenschwingungen.)

3. Zweite Hypothese für den Prozeß mit Zeit

3.1 Annahme

Es gebe einen Prozeß $\{X(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ mit folgenden Eigenschaften:

Es sei $S_{i'j}^{ij}$, die Wartezeit für den Übergang $i' \rightarrow j'$ innerhalb des RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$, wobei $(i',j') \in \{(i,k), (l,j)\}$, und S^{ij} sei die Zeit für einen Übergang $i \rightarrow j$.



Für diese Zeiten gelte:

$$P_{S_{ik}^{ij} + S_{lj}^{ij}} = P_{S_{ik}^{ij}} * P_{S_{lj}^{ij}} = P_{S^{ij}}$$

für alle Zwischenschwingungen $(k,l) \neq (j,i)$.

3.2 Bemerkung

Wie in (2.) müssen wir wieder $(k,l) = (j,i)$ ausnehmen.

Wir werden zeigen, daß die Annahme (3.1) mit der ersten Hypothese übereinstimmt und daher ebenfalls falsch ist.

3.3 Lemma

Wegen der Verwendung des RAINFLOW-Zählalgorithmus gilt:

Die Verteilungen $P_{S_{ik}^{ij}}$ und $P_{S_{lj}^{ij}}$ sind unabhängig von (i,j) .

Beweis:

Die RAINFLOW-Zählung verläuft rekursiv.

Deshalb muß $P_{S_{ij}^{uv}}$ gleich der Verteilung von S_{ij}^{uv} sein mit $u = i, v > j$ oder $u < i, v = j$, denn $i \rightarrow j$ kann selbst wieder Teil eines Zyklus sein (z.B. $u = i \rightarrow j \rightarrow l' \rightarrow v$) für $(i,j) \neq (1,M)$.

Es folgt:

$$P_{S_{ij}^{uv}} = P_{S_{ij}^{u'v'}} \text{ für alle in Frage kommenden } (u,v), (u',v').$$

Also ist $P_{S_{ij}^{uv}}$ unabhängig von (u,v) .

3.4 Folgerung

Wegen (3.3) ist die Annahme (3.1) nun:

$$P_{S_{ik}} * P_{S_{lj}} = P_{S_{ij}} = P_{S_{ij}}$$

für alle $(k,l) \neq (j,i)$ mit $i \leq 1 < k \leq j$.

Dies führt aber wie Annahme (2.4) zum Widerspruch.

4. Dritte Hypothese

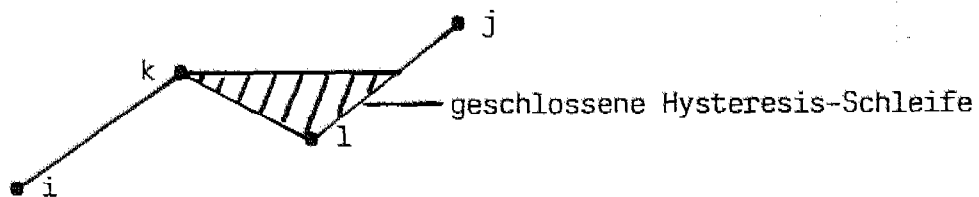
Wie müssen wir das Modell für RAINFLOW mit Zeit verändern, um nicht zu einem Widerspruch zu gelangen?

Die bisherigen Forderungen verlangen zu viel von dem Prozeß.

Die Unabhängigkeit der Summe der Zeiten für die Übergänge $i \rightarrow k$ und $k \rightarrow j$ von k und l kann nicht erfüllt werden.

4.1 Motivation für das neue Modell

Das RAINFLOW-Verfahren zählt geschlossene Hysterisis-Schleifen, die in den Prozeß eingelagert sind (vgl. 1.2).



Dies führt zu der Überlegung, einer solchen Zwischenschwingung eine eigene Zeit zuzuschreiben.

Der Rest der Zeit des RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ ist dann die zur Halbschwingung (i,j) nach Streichung der Zwischenschwingung zugehörige Zeit.

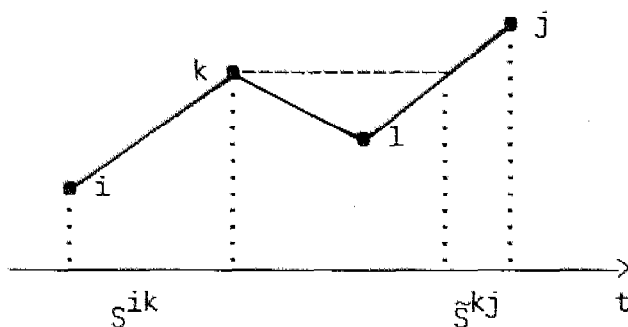
Damit kommen wir zu der Annahme, daß sich die Zeit für (i,j) aus zwei Zeiten $((i,k)$ und $k \rightarrow j$) zusammensetzt, und zwar unabhängig von der Einfügestelle k der Zwischenschwingung (vgl. 2. und 3.).

Wir können nun unsere neue Annahme formulieren:

4.2 Annahme

Der Prozeß $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ habe folgende Eigenschaften:

s^{ik} sei die Zeit für die Halbschwingung (i,k) und \bar{s}^{kj} sei die Zeit für den Übergang $k \rightarrow j$.



Es gelte:

$$P_{S^{ik}} + S^{kj} = P_{S^{ik}} * P_{S^{kj}} = P_{S^{ij}} \text{ für alle } k, i < k \leq j.$$

Außerdem seien sowohl die Verteilungen $P_{S^{ik}}$ und $P_{S^{kj}}$ als auch $P_{S^{ij}}$ Elemente derselben einparametrischen Verteilungsfamilie.

4.3 Bemerkung

Wir machen vorerst keine Annahme über die Zeitverteilung der Zwischenschwingung, da unser Problem nicht darin, sondern in der Zusammensetzung der Zeit S^{ij} der Halbschwingung (i,j) nach Streichung der Zwischenschwingung besteht.

4.4 Bemerkung

Warum fordern wir die Zugehörigkeit zu derselben einparametrischen Verteilungsfamilie?

Es handelt sich bei den Übergängen um sehr ähnliche Vorgänge, weshalb es naheliegt, die Zeiten durch dieselbe Verteilungsfamilie zu beschreiben.

Die Forderung nach einer einparametrischen Verteilungsfamilie ist vor allem durch die einfache mathematische Handhabung zu rechtfertigen. Unser Ziel ist es - wie bei Markov - Gamma-Verteilungen zu verwenden.

Es stellt sich nun noch die Frage, wie eine Rekonstruktion eines (4.2) erfüllenden Prozesses aussieht:

4.5 Idee zu Rekonstruktion (Aufteilungs- und Einfüge-Strategie)

Die Rekonstruktion verläuft umgekehrt zum Zählalgorithmus.

In die Halbschwingung (i,j) soll eine Hysterese-Schleife in k eingefügt werden.

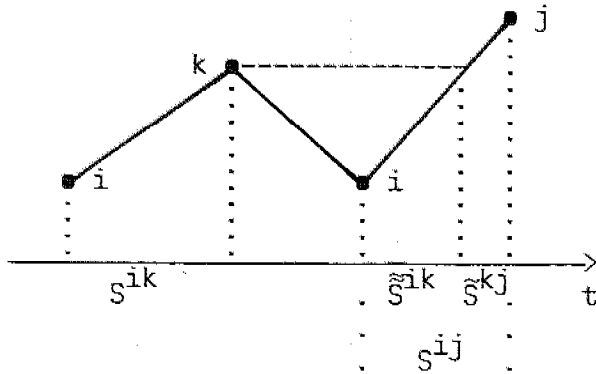
Wir teilen die Zeit S^{ij} von (i,j) so auf, daß die Zeiten S^{ik} und S^{kj} die richtige Verteilung haben. Was dabei "richtig" heißt, werden wir später genau formulieren (Abschnitte 5. und 7.).

Dann fügen wir die Zwischenschwingung mit der zugehörigen Zeit ein.

Bei unserer Hypothese tritt ein Problem auf, das es zu beheben gilt:

4.6 Problembeschreibung

Wir sehen uns einen RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow i \rightarrow j$ an.



Die Zeiten seien wie im Bild.

Aus der Annahme (4.2) über unseren Prozeß folgt:

$$s^{ij} \stackrel{L}{=} s^{ik} + \hat{s}^{kj}, \text{ wobei } \stackrel{L}{=} \text{ die Gleichheit in Verteilung ist.}$$

Außerdem gilt natürlich

$$s^{ij} = \hat{s}^{ik} + \hat{s}^{kj}.$$

Es folgt also:

$$\hat{s}^{ik} \stackrel{L}{=} s^{ik},$$

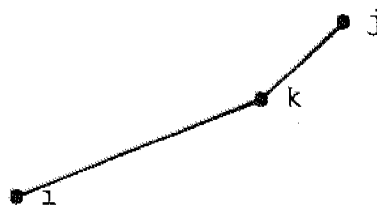
d.h. der Übergang von i nach k innerhalb der Halbschwingung (i,j) hat dieselbe Zeitverteilung wie die Halbschwingung (i,k) .

Bei Beobachtung von BAZFen stellt man fest, daß große Schwingungen zwar mehr Zeit benötigen als kleine, daß diese Zeit aber nicht linear von der Größe der Schwingung abhängt.

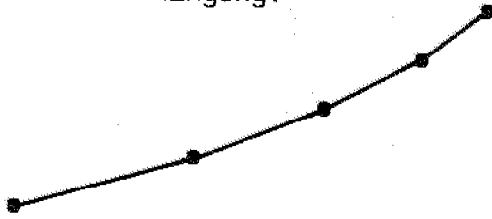
Dies bedeutet anschaulich z.B. für die Halbschwingungen (i,k) und (i,j) :



Da sich (i,j) aber aus (i,k) und einem Rest (mit Zeit \hat{s}^{kj}) zusammensetzt, erhalten wir für (i,j) folgendes Bild:



Betrachten wir nun jeden Ein-Klassen-Übergang, so ergibt sich bei der Zeitzusammensetzung von unten nach oben folgendes typische Bild einer Halbschwingung:



Dies widerspricht aber unserer Linearitätsannahme für die Pfade und kann auch aufgrund von Beobachtungen realer BAZFen widerlegt werden (vgl. Bild 1 (II 2.)).

Wo liegt der Fehler in unserem Modell?

4.7 Erklärung

Offensichtlich beruht der Fehler auf der Gleichheit der Verteilungen der Zeiten \tilde{S}^{ik} und S^{ik} (siehe 4.6).

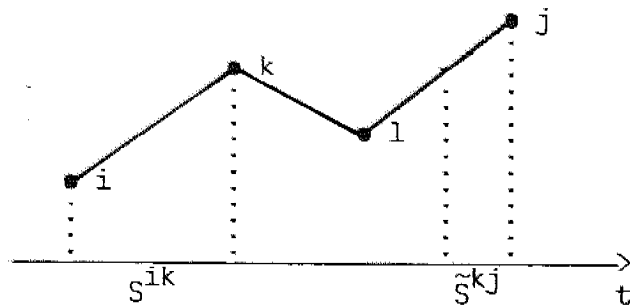
Dies ist bedingt durch die Forderung in (4.2), daß $S^{ik} + \tilde{S}^{kj}$ und S^{ij} identisch verteilt sind.

Wir dürfen zwar fordern: $P_{S^{ik} + \tilde{S}^{kj}}$ ist unabhängig von k , $i < k \leq j$, aber wir dürfen nicht die Gleichheit mit $P_{S^{ij}}$ fordern.

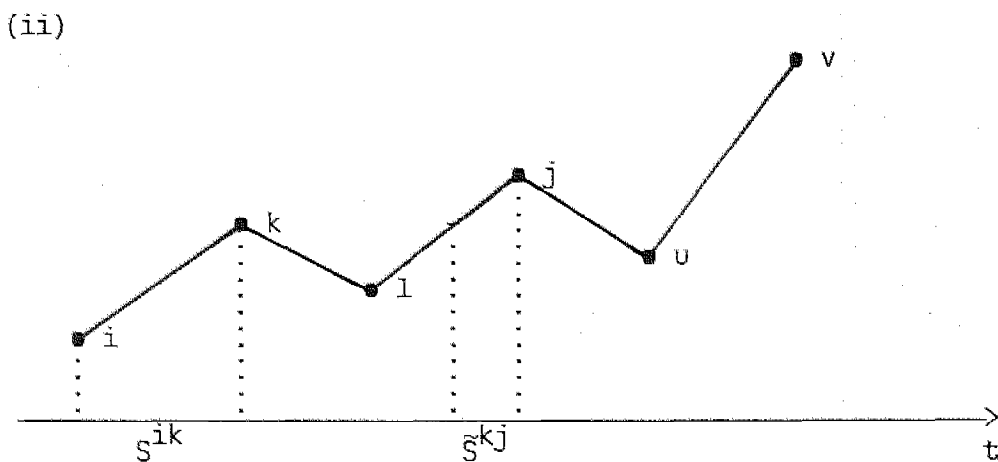
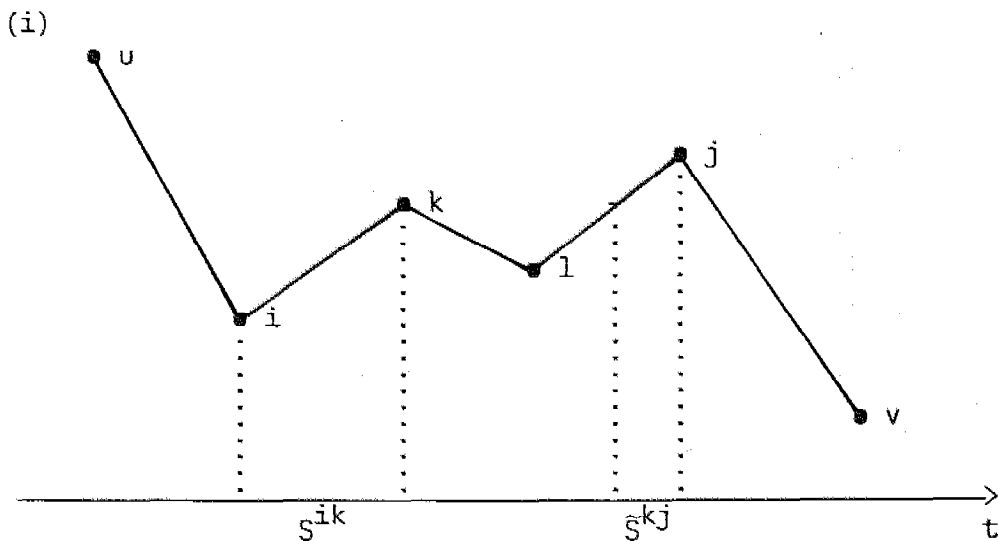
Was sind denn nun S^{ij} und $S^{ik} + \tilde{S}^{kj}$?

4.8 Zwischenschwingungs- und Nicht-Zwischenschwingungs-Zeiten

Betrachten wir einen RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$:



Dieser Zyklus kann selbst wieder Teil eines Zyklus sein, und zwar kann zum einen $i \rightarrow j$ Zwischenschwingung einer Halbschwingung (u,v) sein (i), und zum andern kann $i \rightarrow j$ z.B. das Anfangsstück eines Zyklus sein (ii):



Im Fall (i) ist $s^{ik} + \tilde{s}^{kj}$ ein Teil der Zeit einer Zwischenschwingung $i \rightarrow j$.

Im Fall (ii) hingegen ist $s^{ik} + \tilde{s}^{kj}$ die Zeit des Anfangsstückes eines Zyklus $i \rightarrow j \rightarrow u \rightarrow v$, also gleich der Zeit einer Halbschwingung (i, j) s^{ij} .

Dies verdeutlicht noch einmal, worin der Fehler in unserer Annahme (4.2) besteht:

s^{ij} ist eine Nicht-Zwischenschwingungszeit, während $s^{ik} + \tilde{s}^{kj}$ sowohl Zwischenschwingungs- als auch Nicht-Zwischenschwingungszeit sein kann.

4.9 Bemerkung

Bei Realdaten stellt man auch fest, daß die Summe der Zeiten s^{ik} und \tilde{s}^{kj} keine Gamma-Verteilung besitzt, im Gegensatz zu den Zeiten s^{ij} und - wie wir später sehen werden - zu den Zwischenschwingungszeiten.

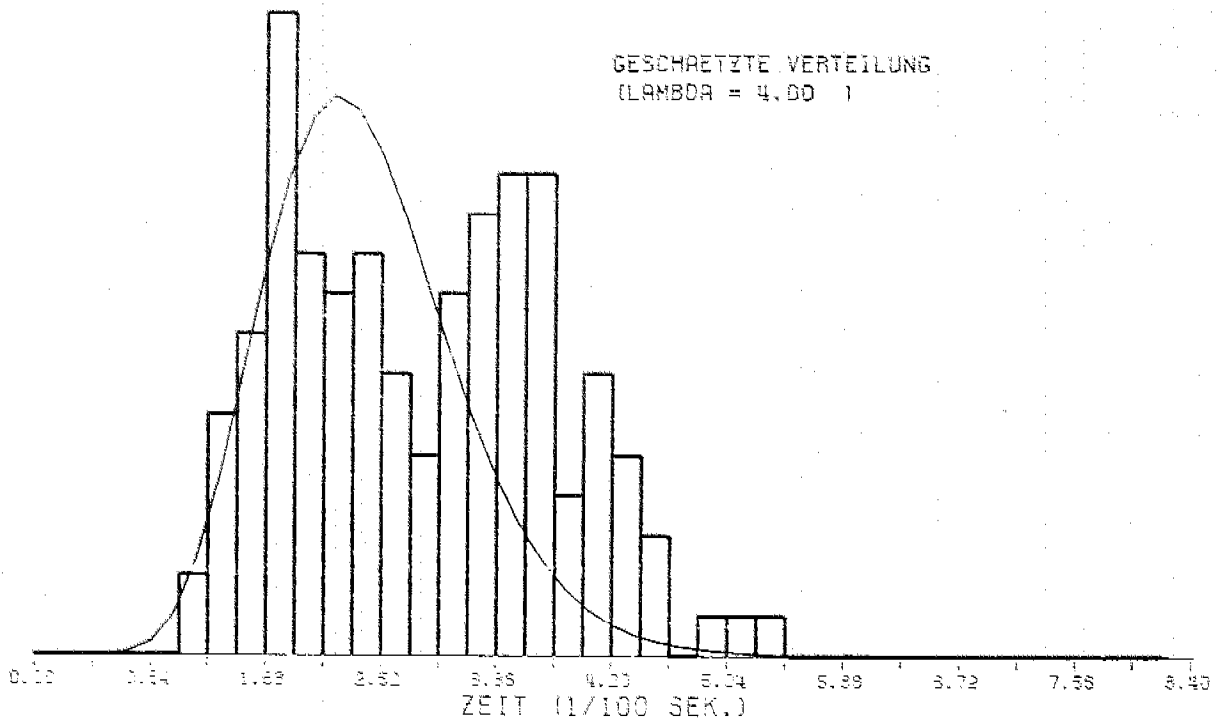


Bild 12: $S^{ik} + \bar{S}^{kj}$ für $i = 14, j = 18$
(AUDI80, Federbein (z-Richtung), Unebene Fahrbahn)

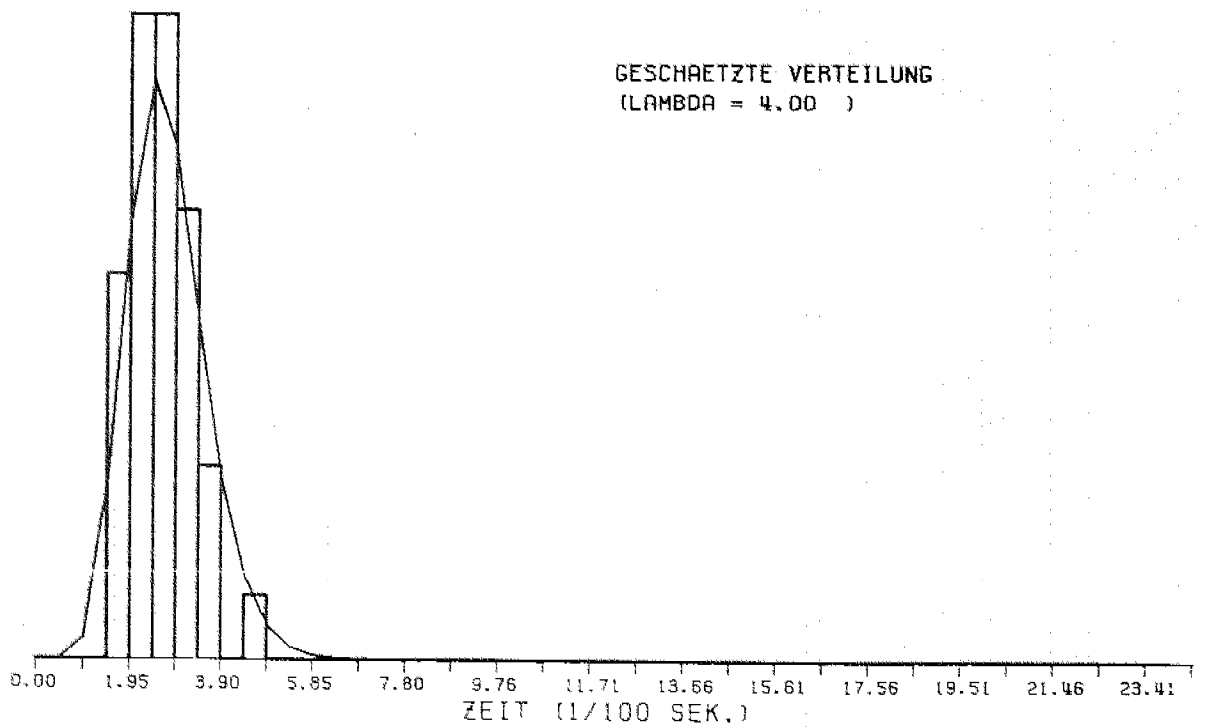
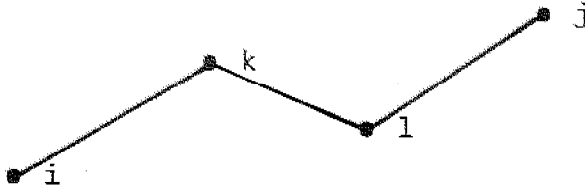


Bild 13: Verteilung von S^{ij} für $i = 14, j = 18$
(AUDI80, Federbein (z-Richtung), Schlechtwegstrecke)

5. Das Modell für RAINFLOW mit Zeit

Bevor wir zum endgültigen Modell kommen, sehen wir uns (noch) einmal die bisherigen Ansätze an.

Wir haben grundsätzlich immer einen festen RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ betrachtet.

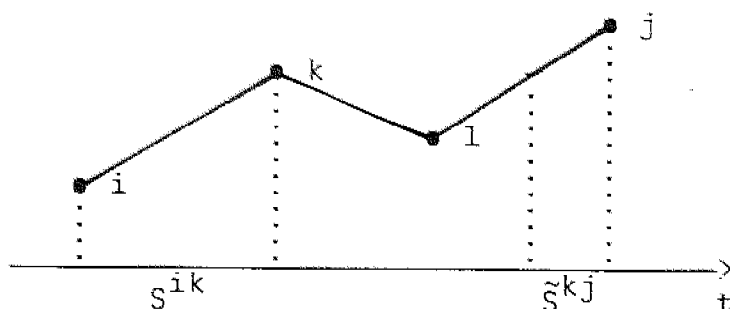


Alle drei Annahmen betrafen die Zusammensetzung der Zeit für den Übergang $i \rightarrow j$ durch Zeiten des Zyklus, wobei diese Zeiten jeweils als unabhängig angenommen wurden. Die ersten beiden Modellansätze erklärten die Zeit für $i \rightarrow j$ als Summe der Zeiten für die Halbschwingungen (i,k) und (l,j) . Wie wir gesehen haben, existiert kein Prozeß, der diese Annahme erfüllt (2.6, 3.4).

Außerdem war die zweite Hypothese ein Versuch, die Zeiten für (i,k) und (l,j) in Abhängigkeit von (i,j) zu betrachten. Wir konnten jedoch zeigen, daß diese Abhängigkeit so nicht gefordert werden kann (3.3).

Es war daher notwendig, unsere Forderungen an den Prozeß etwas zurückzuschrauben.

Die Grundphilosophie von RAINFLOW brachte die Motivation: Wir betrachten den ganzen Prozeß als entstanden durch in ein Residuum eingelagerte geschlossene Hysteresis-Schleifen. Wir gaben daher dieser Hysteresis-Schleife eine eigene Zeit, und damit setzte sich die Zeit S^{ij} für eine Halbschwingung (i,j) nach Streichung der Zwischenschwingung zusammen aus den Zeiten S^{ik} für die Halbschwingung (i,k) und S^{kj} für den Übergang $k \rightarrow j$.



Damit ergab sich die Aufteilungs- und Einfüge-Strategie für die Rekonstruktion, da wir die Unabhängigkeit der Summe der Zeiten S^{ik} und \tilde{S}^{kj} von k forderten.

Für den Leser, der die letzten drei Abschnitte übersprungen hat, hier noch einmal die Aufteilungs- und Einfüge-Strategie:

Die Rekonstruktion verläuft umgekehrt zum Zählalgorithmus. In die Halbschwingung (i,j) soll eine Hysteresis-Schleife in k eingefügt werden.

Wir teilen die Zeit S^{ij} von (i,j) so auf, daß die Zeiten S^{ik} und \tilde{S}^{kj} die richtige Verteilung haben. Was dabei "richtig" heißt, werden wir noch genau formulieren.

Dann fügen wir die Zwischenschwingung mit der zugehörigen Zeit ein.

Außerdem verlangten wir die Zugehörigkeit aller Zeiten zu einer einparametrischen Verteilungsfamilie.

Hier noch einmal die Erläuterung für die Forderung nach einer einparametrischen Verteilungsfamilie:

Es handelt sich bei den Übergängen um sehr ähnliche Vorgänge, weshalb es naheliegt, die Zeiten durch dieselbe Verteilungsfamilie zu beschreiben.

Die Forderung nach einer einparametrischen Verteilungsfamilie ist vor allem durch die einfache mathematische Handhabung zu rechtfertigen. Unser Ziel ist es - wie bei Markov - Gamma-Verteilungen zu verwenden.

Fast alle diese Annahmen können beibehalten werden.

In (4.7) und (4.8) haben wir jedoch gesehen, daß noch ein Fehler in diesem Modellansatz steckt:

Wir hatten verlangt, daß $P_{S^{ik}} + \tilde{S}^{kj} = P_{S^{ij}}$ gilt.

Nun kann aber der RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ zu völlig verschiedenen Vorgängen gehören. Er kann selbst wieder als Zwischenschwingung in einer anderen Halbschwingung liegen, er kann aber auch Anfangs- oder Endstück eines anderen Zyklus sein (vgl. Bilder 4.8 oder nächste Seite).

Damit ist auch die Zeit $S^{ik} + \tilde{S}^{kj}$ nicht immer gleich (in Verteilung) der Zeit S^{ij} , welche ja Zeit eines Anfangsstücks eines Zyklus ist.

Daher darf unsere Forderung zwar lauten: $P_{S^{ik}} + S^{kj}$ ist identisch für alle $k, i < k \leq j$.

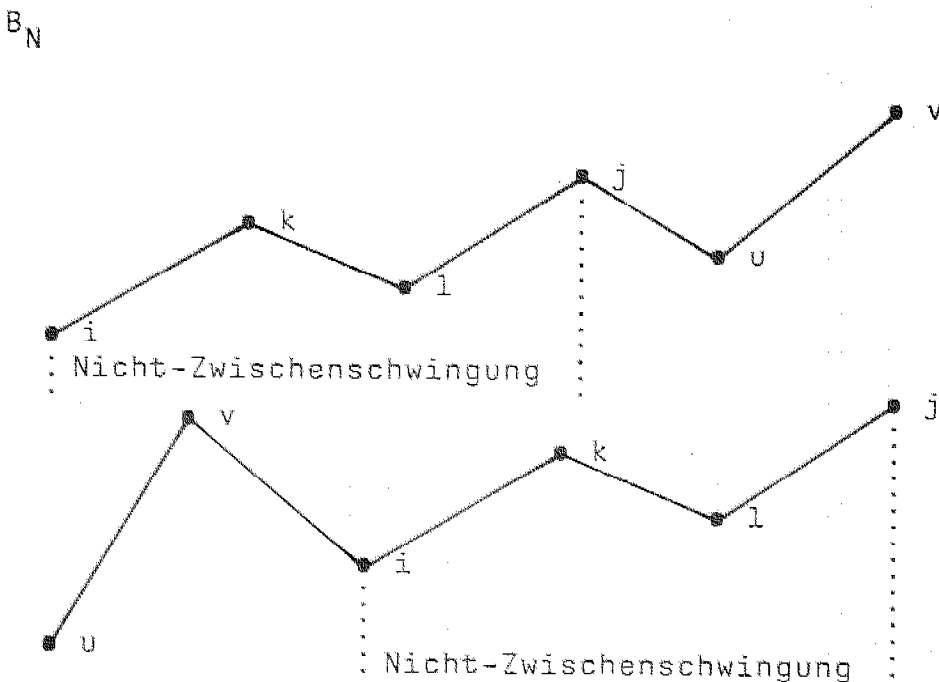
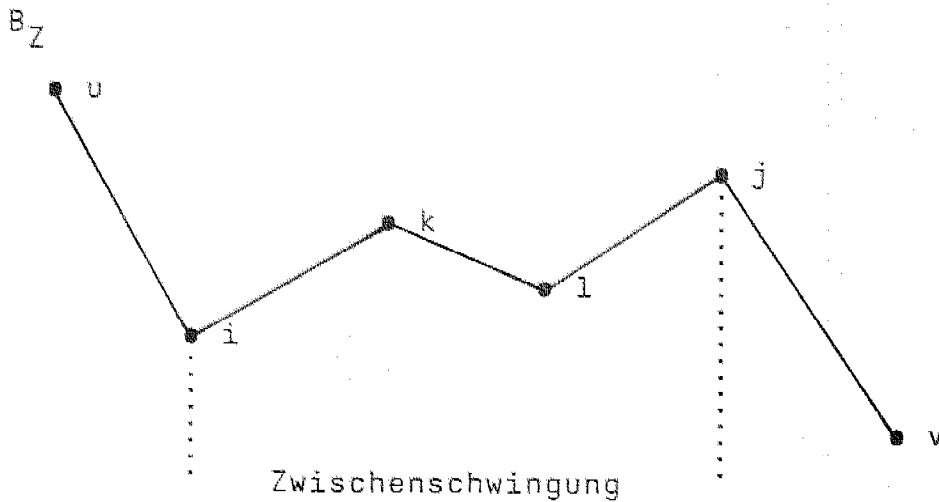
Aber wir dürfen nicht die Gleichheit mit $P_{S^{ij}}$ fordern.

Die Unabhängigkeit der Zeiten S^{ik} und S^{kj} und damit auch die Zugehörigkeit ihrer Verteilungen zu derselben einparametrischen Verteilungsfamilie wird nun nicht mehr allgemein gefordert, sondern nur unter jeder der beiden folgenden Bedingungen:

$B_Z = \{i \rightarrow j \text{ ist selbst Zwischenschwingung einer Schwingung } (u,v)\}$,

$B_N = \{i \rightarrow j \text{ ist Nicht-Zwischenschwingung eines Zyklus}\}$.

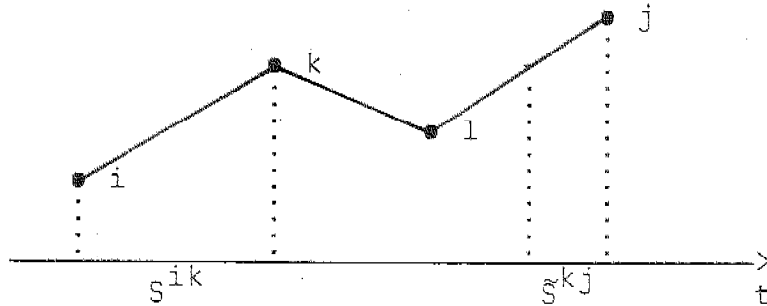
Dabei sei eine Nicht-Zwischenschwingung das Anfangs- oder das Endstück eines RAINFLOW-Zyklus.



Damit ist der Teil unseres endgültigen Modells geklärt, der sich mit der Zusammensetzung der Zeit $i \rightarrow j$ aus Zeiten des Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ beschäftigt.

5.1 Modell

Der Prozeß $\{X(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ habe folgende Eigenschaften:
 In einem RAINFLOW-Zyklus $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ seien die Übergangszeiten wie im Bild:



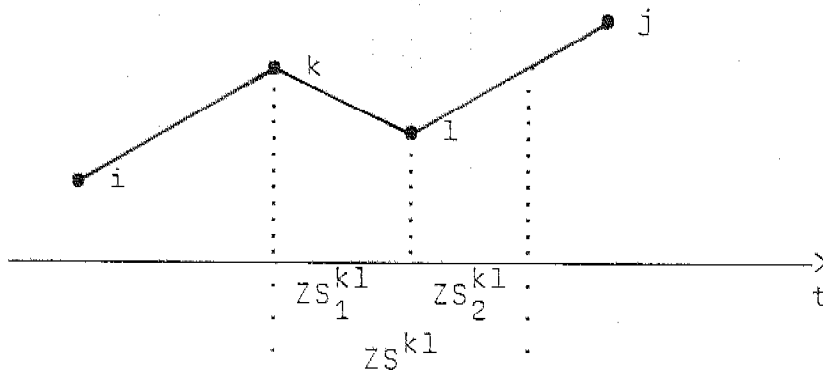
(i) Die Verteilungen

$P_{S^{ik} + S^{kj}}$ seien unabhängig von k , $i < k \leq j$.

(ii) Bedingt nach B_Z oder nach B_N seien die Zeiten s^{ik} und s^{kj} unabhängig, und die bedingten Verteilungen von s^{ik} und s^{kj} seien Elemente derselben einparametrischen Verteilungsfamilie.

Was nun noch fehlt, ist das Modell für die Zwischenschwingungen.

Wir wollen die Zwischenschwingung tatsächlich als eine Schwingung im physikalischen Sinn betrachten. Wir erhalten damit eine "Symmetrie" in der Verteilung der Zeiten für (k,l) und $l \rightarrow k$.



Das bedeutet:

$$P_{ZS_1}^{kl} = P_{ZS_2}^{kl}.$$

Und außerdem:

$$\begin{aligned} P_{ZS}^{kl} &= P_{ZS_1}^{kl} + ZS_2^{kl} \\ &= P_{ZS_1}^{kl} * P_{ZS_2}^{kl}, \text{ wenn wir die beiden Teile} \end{aligned}$$

noch als unabhängig ansehen.

Wir fordern auch für diese Zeiten die Zugehörigkeit zu derselben einparametrischen Verteilungsfamilie wie in (5.1), und wir erhalten folgende

5.2 Ergänzung des Modells

(iii) In der Zwischenschwingung (k,l) seien die Zeiten wie oben.

$$\begin{aligned} \text{Es gelte: } P_{ZS_1}^{kl} &= P_{ZS_2}^{kl}, \\ P_{ZS}^{kl} &= P_{ZS_1}^{kl} + ZS_2^{kl} \\ &= P_{ZS_1}^{kl} * P_{ZS_2}^{kl}. \end{aligned}$$

$P_{ZS_1}^{kl}$ und $P_{ZS_2}^{kl}$ seien Elemente derselben einparametrischen Verteilungsfamilie wie in (5.1).

5.3 Bemerkung

Wir können die Aufteilungs- und Einfüge-Strategie auch in diesem endgültigen Modell anwenden.

Nachfolgende Bilder zeigen, daß Punkt (i) unseres Modells - die Unabhängigkeit der Verteilung $P_{Sik} + \xi_{kj}$ von k - in der Realität tatsächlich zu beobachten ist.

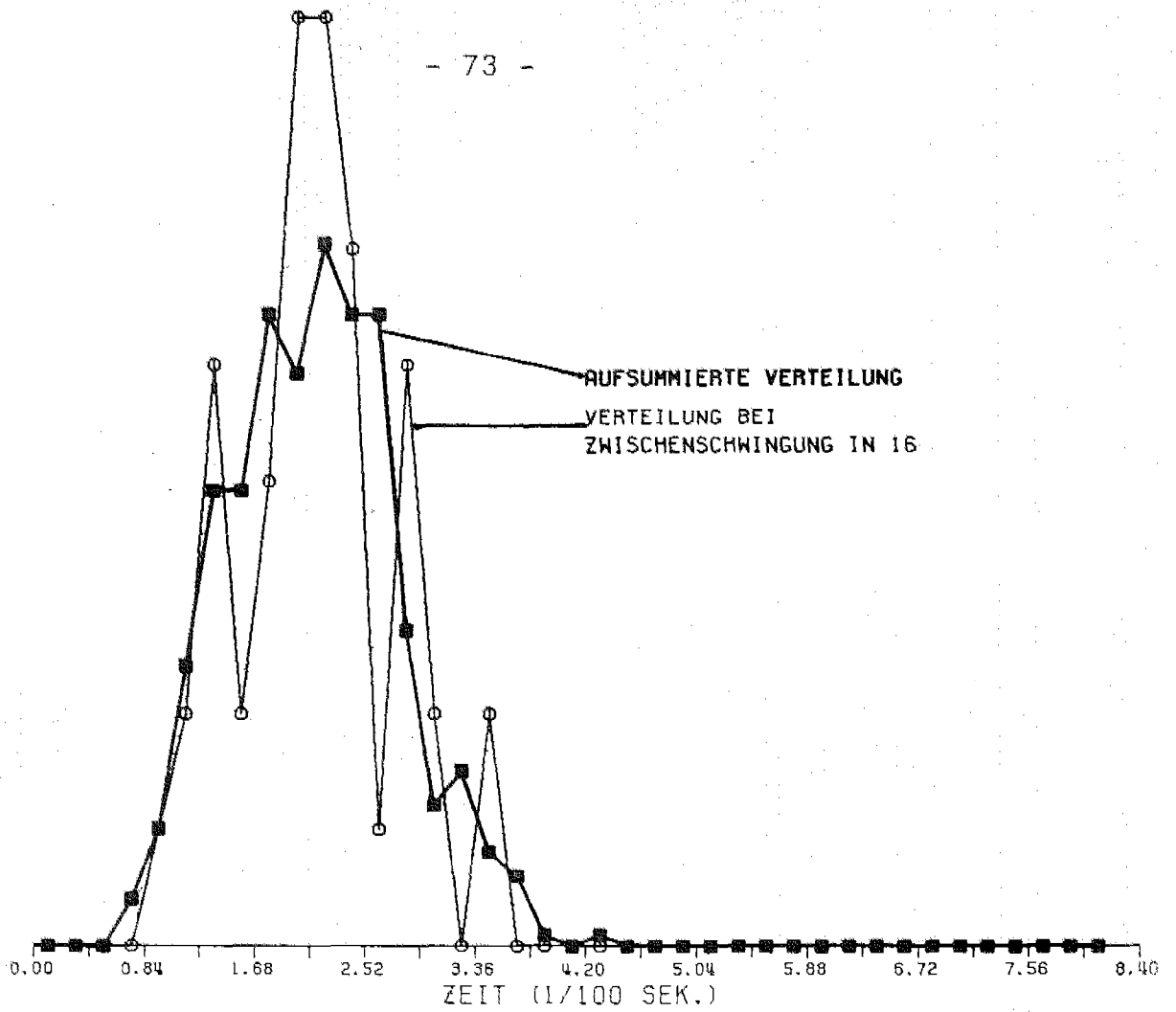


Bild 14

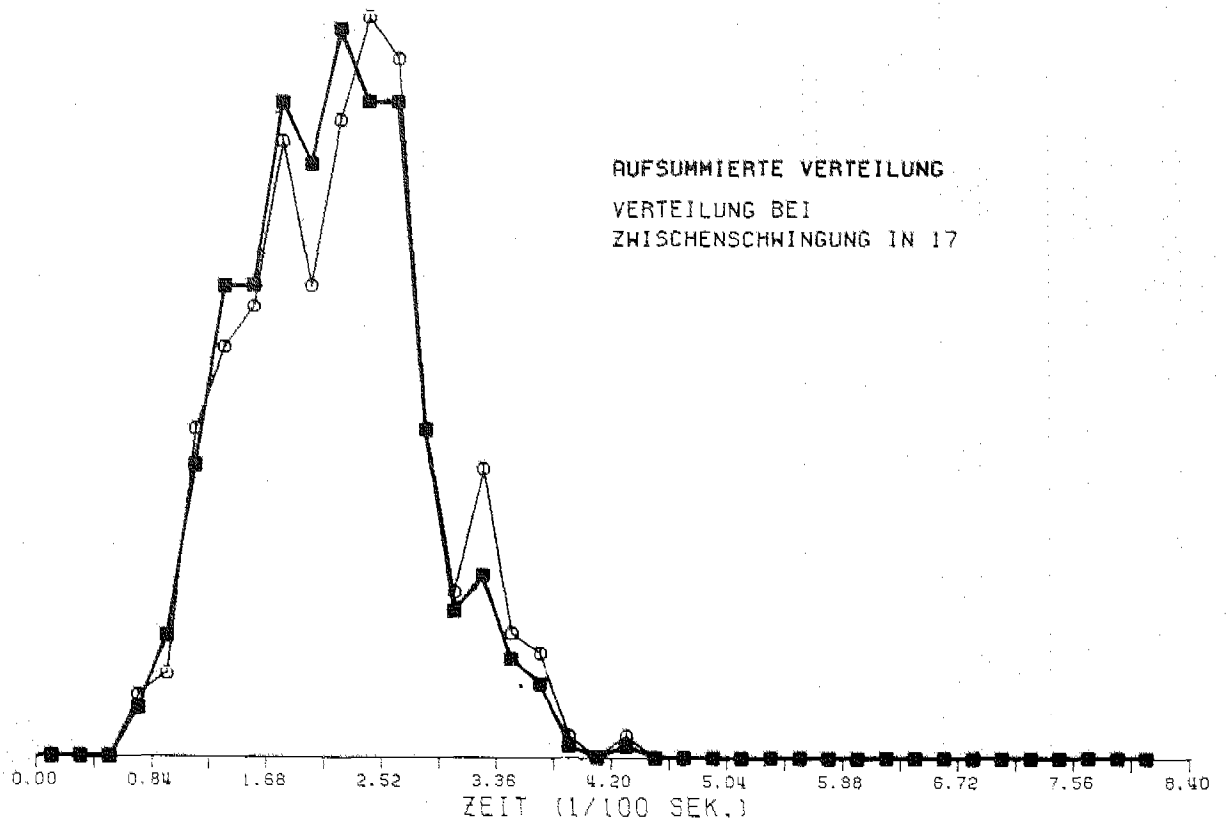


Bild 15

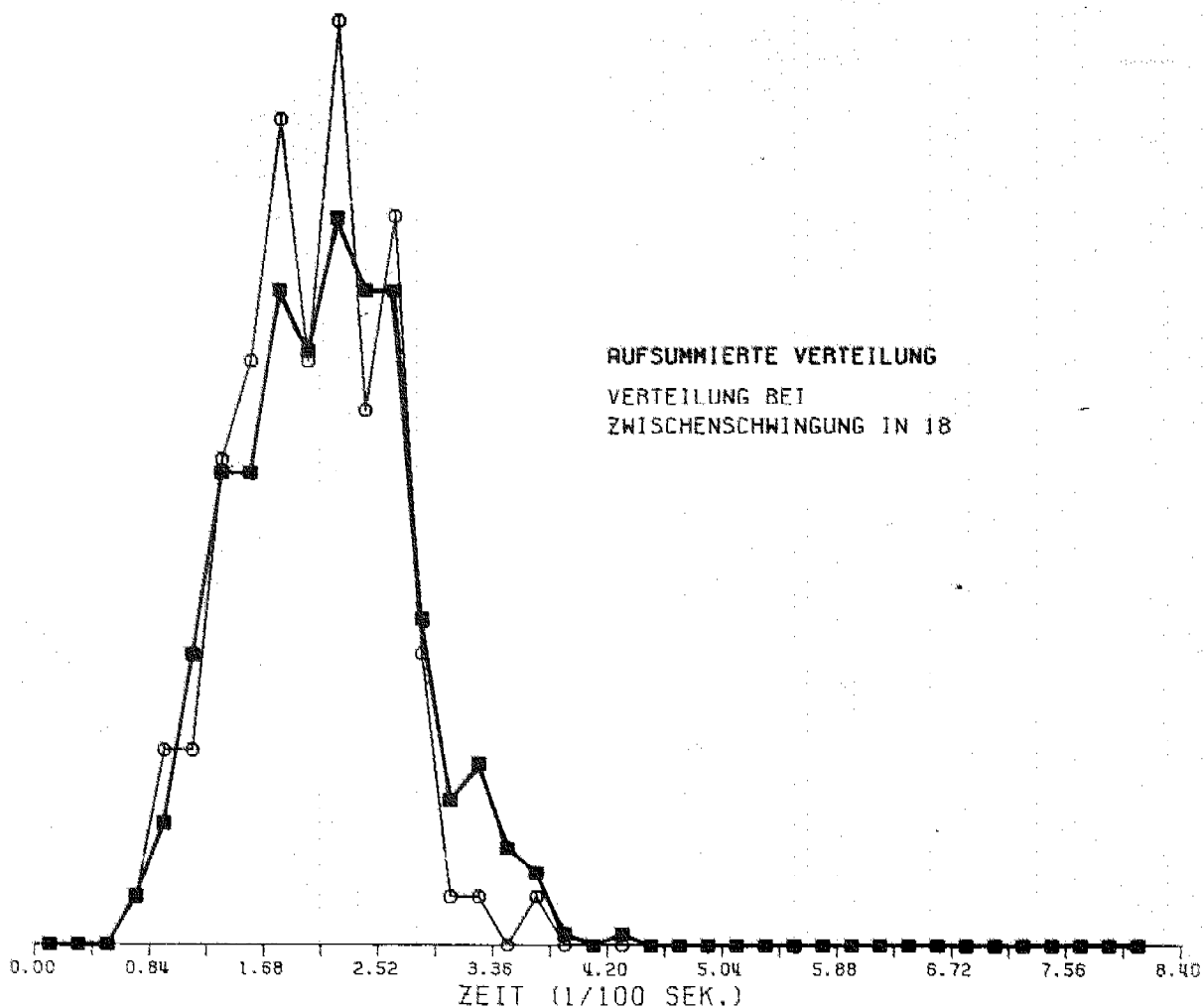


Bild 16

Bilder 14, 15, 16: Vergleich $S^{ik} + \tilde{S}^{kj}$ für $k = 16, 17, 18$
jeweils mit $S^{i \cdot} + \tilde{S}^{\cdot j}$ für $i = 13, j = 19$
(AUDI80, Beschleunigungsaufnehmer (z-Richtung),
EVP-Teststrecke)

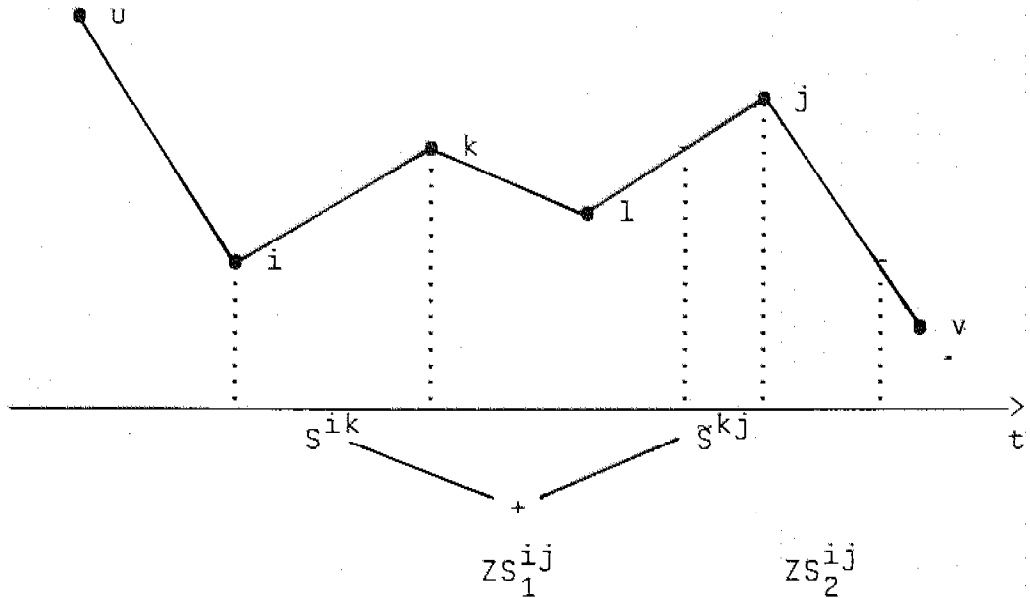
5.4 Folgerung aus (5.1) und (5.2)

Aus den Punkten (ii) und (iii) folgt die Zugehörigkeit der Verteilung von $S^{ik} + \tilde{S}^{kj}$ unter jeder der beiden Bedingungen B_Z oder $\{i \rightarrow j$ ist Anfangsstück eines Zyklus $i \rightarrow j \rightarrow u \rightarrow v\}$ zu derselben Verteilungsfamilie wie in (5.1).

Denn:

Gilt B_Z , d.h. $i \rightarrow j$ ist selbst Zwischenschwingung,
dann gilt:

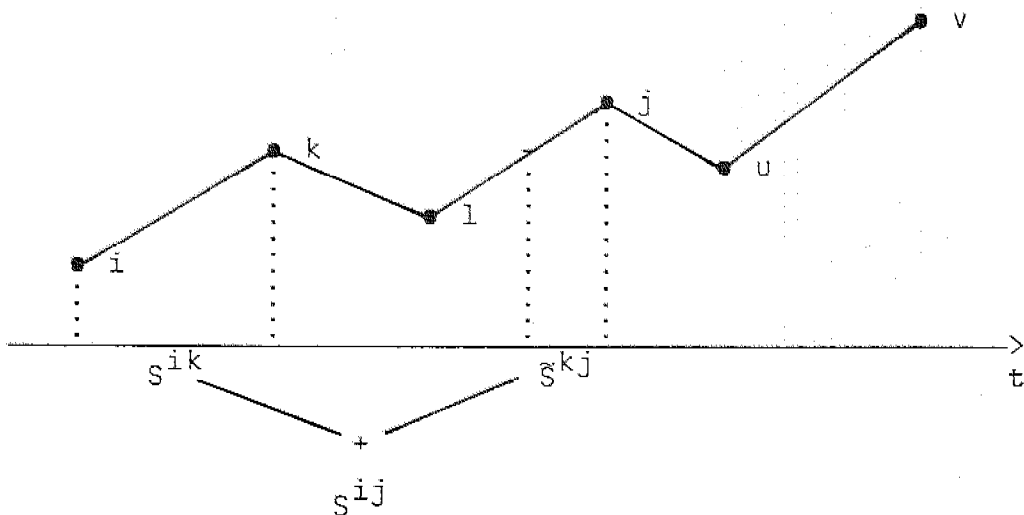
$$s^{ik} + s^{kj} \leq ZS_1^{ij} \leq ZS_2^{ij}$$



und ZS_1^{ij} ist wegen (iii) Element dieser Verteilungsfamilie.

Gilt " $i \rightarrow j$ ist Anfangsstück eines Zyklus $i \rightarrow j \rightarrow u \rightarrow v$ ",
dann gilt:

$$s^{ik} + s^{kj} \leq s^{ij}$$



und s^{ij} ist wegen (ii) Element der Verteilungsfamilie
(in jedem der Fälle B_Z oder B_N für $i \rightarrow v$).

5.5 Bemerkung

Diese Eigenschaft - die Zugehörigkeit der Verteilung der Summe zweier Zufallsvariablen mit Verteilung aus derselben Verteilungsfamilie zu dieser selben Verteilungsfamilie - führt uns zu dem Begriff Faltungsinvarianz, mit dem wir uns im nächsten Abschnitt auseinandersetzen werden.

Dies wird uns schließlich auf die Gamma-Verteilung hinführen, die wir ja - wie bei Markov - verwenden wollen.

6. Faltungshalbgruppen

Um die Forderung im letzten Abschnitt nach einer festen einparametrischen Verteilungsfamilie zu präzisieren, führen wir zuerst einmal den Begriff der Faltungsinvarianz ein:

6.1 Definition

Es sei $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ eine Verteilungsfamilie.

Die Familie heißt faltungsinvariant

(*-invariant), wenn für alle $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$ ein $\vartheta \in \Theta$ existiert, so daß

$$P_{\vartheta_1} * P_{\vartheta_2} = P_{\vartheta}.$$

6.2 Bemerkung

Dies entspricht genau der Forderung an die bedingten Verteilungen der Übergangszeiten S^{ik} , S^{kj} und $S^{ik} + S^{kj}$.

6.3 Beispiele

- (i) $\Gamma(\cdot, \lambda)$ für festes $\lambda > 0$
- (ii) $N(0, \sigma^2)$
- (iii) $N(m, \sigma^2)$ zweiparametrisch
- (iv) $P(\lambda)$, wobei P die Poisson-Verteilung ist.

denn:

$$\Gamma(\alpha_1, \lambda) * \Gamma(\alpha_2, \lambda) = \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

$$N(0, \sigma_1^2) * N(0, \sigma_2^2) = N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$N(m_1, \sigma_1^2) * N(m_2, \sigma_2^2) = N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$P(\lambda_1) * P(\lambda_2) = P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Wir sehen, daß es einige Verteilungen gibt, bei denen sich die Parameter addieren.

Dies für die Übergangszeiten zu fordern liegt nahe, da ein linearer Zusammenhang zwischen den Zeiten und ihren Parametern gut zu handhaben ist und da unser Ziel die Gamma-Verteilung ist.

6.4 Definition

Es sei $(P_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ eine Verteilungsfamilie.

Die Familie heißt Faltungshalbgruppe, wenn für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$P_{s+t} = P_s * P_t.$$

6.5 Bemerkung

(i) Eine Faltungshalbgruppe ist *-invariant.

(ii) Die Halbgruppeneigenschaften gelten tatsächlich:

Nullelement: P_0 , denn $P_0 * P_\vartheta = P_\vartheta * P_0 = P_\vartheta$.

Assoziativität: $(P_{\vartheta_1} * P_{\vartheta_2}) * P_{\vartheta_3} = P_{\vartheta_1} * (P_{\vartheta_2} * P_{\vartheta_3})$.

Eng zusammen mit dem Begriff der Faltungshalbgruppe hängt der Begriff der unbegrenzten Teilbarkeit eines Maßes:

6.6 Definition

Ein Maß μ heißt unbegrenzt teilbar, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Maß μ_n existiert mit

$$\mu_n * \dots * \mu_n = \mu.$$

n Faktoren

6.7 Lemma

Es sei $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \mathbb{R}_+}$ eine Faltungshalbgruppe.

Dann ist jedes P_ϑ unbegrenzt teilbar.

Beweis:

$$P_\vartheta = \underbrace{P_{\vartheta/n} * \dots * P_{\vartheta/n}}_{n \text{ Faktoren}}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

6.8 Bemerkung

$(P_\vartheta)_{\vartheta \in \mathbb{R}_+}$ sei eine Faltungshalbgruppe.

Dann gilt für die Fourier-Transformierte \hat{P}_ϑ eines jeden P_ϑ :

$$\hat{P}_\vartheta(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: (vgl. /8/ 52.2)

6.9 Folgerung

Für eine Faltungshalbgruppe $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \mathbb{R}_+}$ gilt stets:

$$P_0 = \varepsilon_0.$$

Beweis:

$$P_1 = P_{0+1} = P_0 * P_1.$$

Daher gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $\hat{P}_1(t) = \hat{P}_0(t) \hat{P}_1(t)$,

also: $\hat{P}_0(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, da $\hat{P}_1(t)$ wegen (6.8) für alle $t \in \mathbb{R}$ ungleich 0 ist.

Damit folgt die Behauptung.

6.10 Beispiele für Faltungshalbgruppen

- (i) $N(0, \sigma^2)$,
 - (ii) $\Gamma(\alpha, \lambda)$ für festes λ ,
 - (iii) $P(\lambda)$.
- (vgl. 6.3)

Für Übergangszeiten von stochastischen Prozessen sehr gebräuchlich ist die Weibull-Verteilung.

6.11 Bemerkung

Die Weibull-Verteilung $W(\alpha, \lambda)$ mit Dichte

$f_{\alpha, \lambda}(t) = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^\alpha)$ für $t \geq 0$
ist nicht *-invariant.

Beweis:

$f_{1,1}(t) = \exp(-t)$ für $t \geq 0$ ist die Dichte der $E(1)$ -Verteilung.

Mit sich selbst gefaltet ergibt sich:

$$f_{1,1} * f_{1,1}(t) = t \exp(-t),$$

die Dichte der $\Gamma(2,1)$ -Verteilung.

Dies ist keine Weibull-Verteilung,

denn:

Angenommen es existieren α und λ mit

$$\alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^\alpha) = t \exp(-t) \text{ für } t \geq 0.$$

Dann ist der Quotient aus beiden Seiten für alle $t \geq 0$ und damit auch für den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ gleich 1.

Also gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-2} \exp(-(\lambda t)^\alpha + t) = 1.$$

Aber im Widerspruch dazu gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha-2} \exp(-(\lambda t)^\alpha + t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha > 1, \\ 0, & \text{falls } \alpha = 1, \lambda \geq 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha = 1, \lambda < 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Eine Verteilung mit ähnlichem Verlauf der Dichte ist die Doppelte Normal-Verteilung.

6.12 Bemerkung

Die Doppelte Normalverteilung mit Dichte

$$f_{\mu, \sigma^2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ für } t \geq 0$$

ist nicht faltungs-invariant.

Beweis:

Es sei $\sigma = 1, \mu = 0$.

$$f_{0,1}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\ = C \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \text{ für ein } C > 0.$$

Bei Faltung mit sich selbst ergibt sich:

$$f_{0,1} * f_{0,1}(t) = C^2 \int_0^t \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \\ = C^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \exp(t\tau - \tau^2) d\tau.$$

Angenommen $f_{0,1} * f_{0,1}(t) = \tilde{c} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ für alle $t \geq 0$.

Dann folgt:

$$\tilde{c} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) + \frac{t\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) = \int_0^t \exp(t\tau - \tau^2) d\tau$$

für alle $t \geq 0$ für ein \tilde{c} , also:

$$\tilde{c} \exp(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) = \int_0^t \exp(t\tau - \tau^2) d\tau \text{ für } t \geq 0.$$

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\tilde{c}(2c_2 t + c_1) \exp(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) = \exp(t^2 - t^2) \\ = 1 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Daher $c_2 = c_1 = 0$, weil $\exp(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) = \text{const.}$

Also folgt: $0 = 1$.

7. Rechtfertigung der Gamma-Verteilung

Die Übergangszeiten bei Markov wurden durch Gamma-Verteilungen beschrieben (II 3. und 4.), weshalb wir auch hier Gamma-Verteilungen verwenden wollen.

Außerdem haben - wie Abschnitt 6. gezeigt hat - andere gebräuchliche ähnliche Verteilungen nicht die gewünschten Eigenschaften (Weibull-Verteilung (6.11), Doppelte Normal-Verteilung (6.12)).

Ein entscheidendes Argument für Gamma-Verteilungen liefern die Auswertungen von Realdaten:

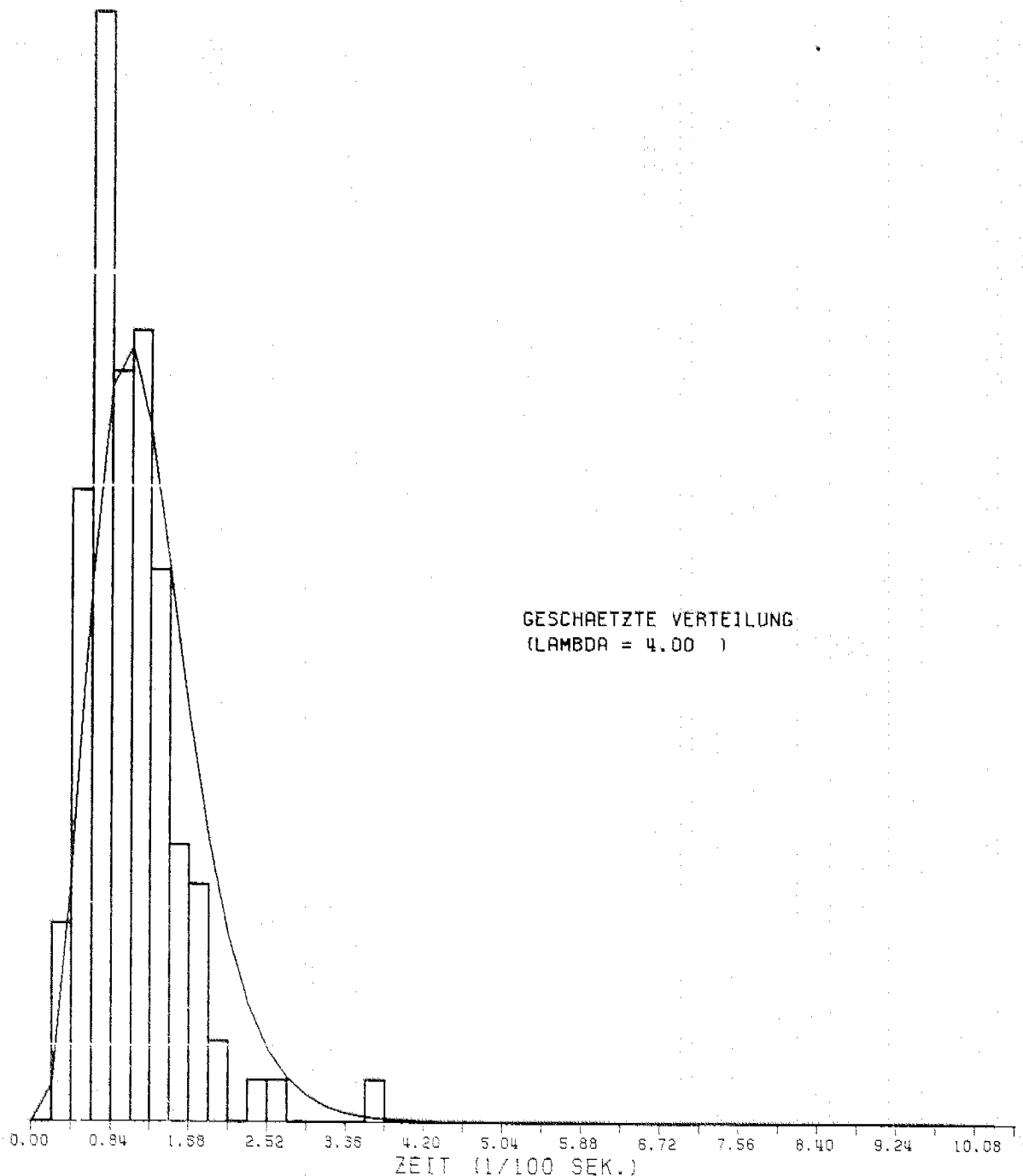


Bild 17

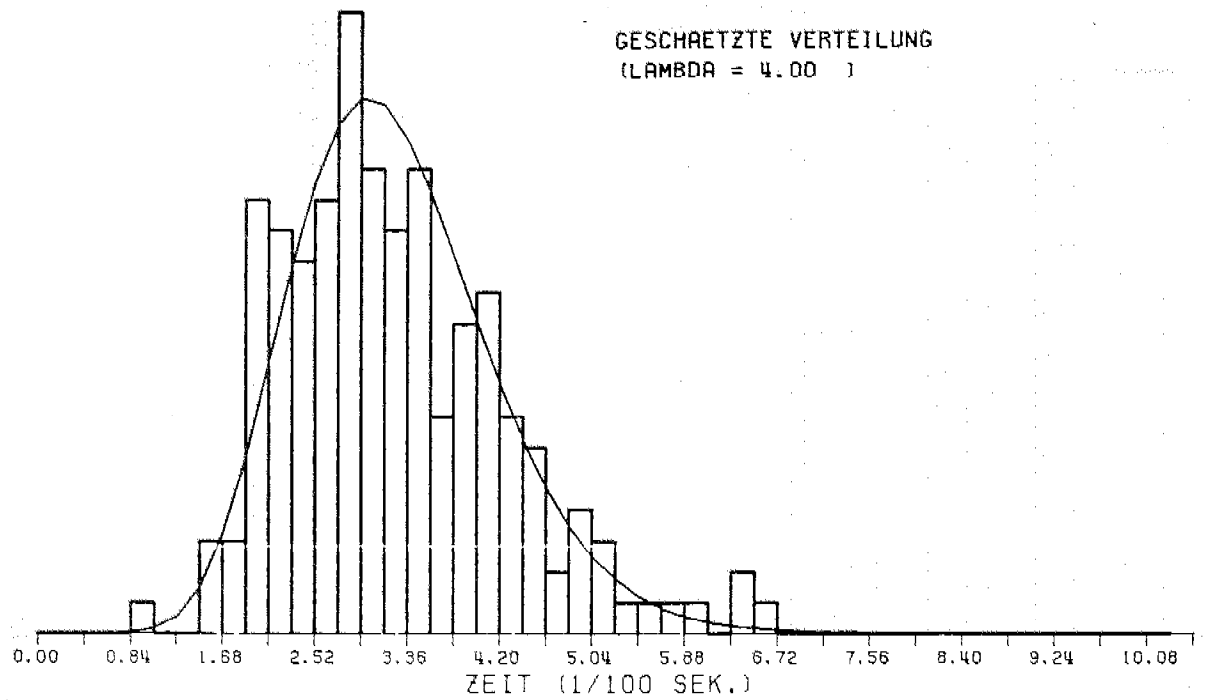


Bild 18

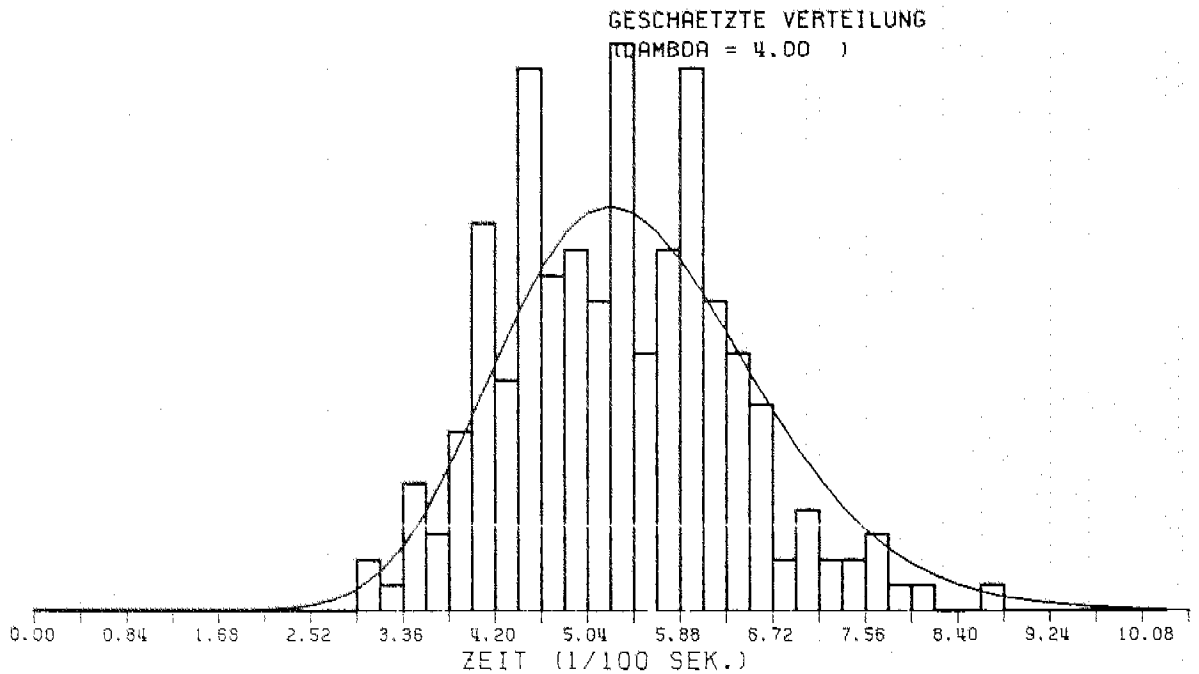


Bild 19

Bilder 17, 18, 19: Zeitverteilung für Zwischenschwingung
(17,18), (14,18) bzw. (21,13)
(AUDI80, Beschleunigungsaufnehmer (z-Richtung),
EVP-Teststrecke)

Für die Nicht-Zwischenschwingungszeiten siehe auch Bild 13
(Abschnitt 4.).

8. Bestimmung der Aufteilungszeitpunkte

Es besteht jetzt nur noch das Problem, wie der Aufteilungszeitpunkt zu bestimmen ist.

8.1 Lemma

Es seien X_1, X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen $\Gamma(\alpha, \lambda)$ und $\Gamma(\beta, \lambda)$.

Dann gelten:

- (i) $X_1 + X_2$ ist $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ -verteilt,
- (ii) $f_{X_1 | X_1 + X_2 = T}(t) = T^{1-\alpha-\beta} B(\alpha, \beta)^{-1} t^{\alpha-1} (T-t)^{\beta-1}$,

wobei $B(\alpha, \beta)$ die Beta-Funktion ist.

Dies ist die Dichte der $B(\alpha, \beta)$ -Verteilung auf

$[0, T]$ ($B^{[0, T]}(\alpha, \beta)$).

Beweis:

(i) klar

(ii) Die gemeinsame Dichte von X_1 und $X_1 + X_2$ ist

$$\begin{aligned} & f_{X_1, X_1 + X_2}(t, T) \\ &= f_{X_1, X_2}(t, T-t) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (T-t)^{\beta-1} e^{-\lambda t} e^{-\lambda(T-t)} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (T-t)^{\beta-1} e^{-\lambda T}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die bedingte Dichte von X_1 bedingt nach $X_1 + X_2 = T$ zu:

$$\begin{aligned} & f_{X_1 | X_1 + X_2 = T}(t) \\ &= f_{X_1, X_1 + X_2}(t, T) / f_{X_1 + X_2}(T) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{t^{\alpha-1} (T-t)^{\beta-1}}{T^{\alpha+\beta-1}}, \text{ wegen (i)}. \end{aligned}$$

Wegen $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ folgt daraus die Behauptung.

8.2 Folgerung

Es sei (i,j) eine Zwischenschwingung bzw. eine Nicht-Zwischenschwingung mit Zeit $T^{ij} = T$, wobei $P_{T^{ij}} = \Gamma(\alpha, \lambda)$.

(k,l) sei eine in (i,j) einzufügende Zwischenschwingung. Nach (5.1 (ii)) sind S^{ik} und \tilde{S}^{kj} unabhängig, und es gilt: $S^{ik} + \tilde{S}^{kj} = T^{ij}$ mit $P_{S^{ik}} = \Gamma(\alpha_1, \lambda)$.

Also $P_{\tilde{S}^{kj}} = \Gamma(\alpha - \alpha_1, \lambda)$ wegen der Unabhängigkeit.

$$\begin{aligned} P_{S^{ik} | T^{ij}=T} &= P_{S^{ik} | S^{ik} + \tilde{S}^{kj} = T} \\ &= B^{[0,T]}(\alpha_1, \alpha - \alpha_1) \text{ wegen Lemma (8.1).} \end{aligned}$$

Also ist der Aufteilungszeitpunkt Beta-verteilt auf $[0, T]$ mit Parametern α_1 und $\alpha - \alpha_1$.

Diese Aufteilungsmethode hat zwei Nachteile:

Zum einen muß immer garantiert sein, daß $\alpha > \alpha_1$ gilt, was i.a. zwar richtig ist, was aber durch schlechte Meßdaten zerstört werden kann.

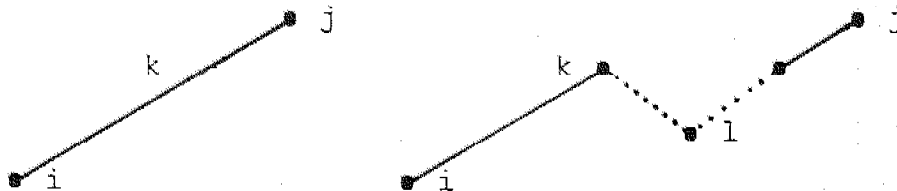
Zum andern gibt es noch einen Nachteil für die Praxis. Es sind noch zwei komplette Parameter-Matrizen für die Zeiten S^{ik} unter den Bedingungen B_Z und B_N zu bestimmen und abzuspeichern.

Wir wollen deshalb eine andere Möglichkeit betrachten:

8.3 Zweite Aufteilungsmethode

Unsere Grundannahme für die Pfade war die Linearitätsannahme (vgl. II 2. und III 2.).

Um diese Linearität bei einer Aufteilung beizubehalten, ist es sinnvoll, diese Aufteilung linear abhängig von der Einfügestelle k der Zwischenschwingung (k,l) zu machen.



Dies kann deterministisch geschehen, d.h. bei gegebener Zeit $T^{ij} = T$ wird die Zeit S^{ik} bestimmt durch

$$S^{ik} = T \frac{k-i}{j-i}.$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es sehr schnell durchzuführen ist auf einem Rechner.

Unser ganzes Rekonstruktions-Verfahren läuft jedoch immer nichtdeterministisch ab, weshalb es möglicherweise sinnvoll ist, auch den Aufteilungszeitpunkt probabilistisch zu bestimmen.

Lemma (8.1) gibt uns das "lineare" Aufteilungsverfahren an.

Wir sehen dazu S^{ik} als $\Gamma(k-i, \lambda')$ -verteilt und S^{kj} als $\Gamma(j-k, \lambda')$ -verteilt an.

Der Aufschneidepunkt besitzt dann die Verteilung

$$P_{S^{ik} | T^{ij}=T} = B^{[0, T]}(\alpha_1, \alpha_2), \text{ wobei } \alpha_1 = k - i \text{ und} \\ \alpha_2 = j - k \text{ ist.}$$

Besser noch machen wir die Aufteilung abhängig vom Parameter α der Zeit T^{ij} .

Wir erhalten dann:

$$P_{S^{ik} | T^{ij}=T} = B^{[0, T]}(\alpha_1, \alpha_2), \text{ wobei } \alpha_1 = \alpha \frac{k-i}{j-i} \text{ und} \\ \alpha_2 = \alpha \frac{j-k}{j-i} \text{ ist.}$$

9. Schätzen der Parameter

9.1 Brummen

Natürlich tritt auch bei RAINFLOW das Phänomen "Brummen" auf.

Es wird im Zählalgorithmus wie eine Zwischenschwingung behandelt (vgl. 1.2 (ii)).

Ansonsten ändert sich gegenüber Markov nichts (vgl. II 5., 6. und 8.).

Damit werden auch die Parameter des Brummens wie bei Markov geschätzt (vgl. II 8.).

9.2 Zwischenschwingungen (bzw. Halbschwingungen)

X sei eine Zufallsvariable mit Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

$\lambda > 0$ sei fest.

Dann gilt:

$$\alpha = \lambda E(X), \text{ wegen (II 7.2).}$$

Wir schätzen daher $E(X)$ mit \bar{x} (vgl. II 7.3) und α durch

$T(x_1, \dots, x_N) = \lambda \bar{x}$, wobei x_1, \dots, x_N unabhängige Beobachtungen von X seien.

(Zur Schätzung von Gamma-Verteilungen siehe auch II 7.4.)

Offen bleibt noch, wie wir zu dem richtigen Wert für λ kommen.

9.3 Parameter λ für alle Zwischenschwingungen

Nach (II 7.4) können wir aus Erwartungswert und Varianz beide Parameter α und λ schätzen:

$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (\frac{\bar{x}^2}{s^2}, \frac{\bar{x}}{s^2})$, wobei \bar{x} , s^2 gleichmäßig beste Schätzer für Erwartungswert und Varianz sind.

Führen wir dies für alle Schwingungen durch $(\alpha^{ij}, \lambda^{ij})$, so stellen wir fest, daß λ^{ij} nicht überall gleich ist.

Wir suchen ein λ , das für alle Schwingungen möglichst gut "paßt", besonders für die großen, da diese den größten Schädigungseinfluß auf das Bauteil haben.

Wir wählen daher λ als ein nach der Größe der Schwingung gewichtetes Mittel aller geschätzten λ^{ij} .

Die Schätzung der α^{ij} erfolgt dann erneut mit diesem λ gemäß (9.2).

9.4 Bemerkung

Die Festlegung eines einzigen Parameters λ für alle Schwingungen ist zwingend, da die Gamma-Verteilung nur für festen Parameter λ faltungsinvariant ist und somit die Aufteilungs- und Einfüge-Strategie ermöglicht wird.

10. RAINFLOW-Zählverfahren mit Zeit

Wir zählen - wie in II - den nicht klassierten Prozeß $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, d.h. wir zählen den Prozeß $\bar{X}(n)$ und bestimmen die restlichen benötigten Werte aus $Y(t)$.

Das Brummen wird wie bei Markov gezählt (II 9.2).

Das Problem bei RAINFLOW besteht im Zählen der Zeiten der Zwischenschwingungen (bzw. Nicht-Zwischenschwingungen).

10.1 Zählen der Zeiten

Wir bilden zu der Folge $(\bar{X}_v)_{v \in \mathbb{N}}$ des RAINFLOW-Zählverfahrens (vgl. 1.2) eine Folge $(Z_v)_{v \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Ein-Klassen-Übergangszeiten.

Außerdem definieren wir analog zur Folge $(n_v)_{v \in \mathbb{N}}$ eine Folge $(m_v)_{v \in \mathbb{N}}$ für $(Z_v)_{v \in \mathbb{N}}$.

Damit ist es möglich, durch einfaches Aufsummieren der entsprechenden Ein-Klassen-Übergangszeiten alle benötigten Zeiten zu bestimmen.

Wir erhalten am Ende ein zum Residuum $R = \bar{X}_0$ passendes Zeitresiduum $ZR = Z_0$ der Ein-Klassen-Übergangszeiten von R .

Damit haben wir auch die Zeiten des Residuums, mit denen wir die Rekonstruktion starten können.

10.2 Parameter der Zeiten

Die Erwartungswerte und Varianzen der Zeiten müssen bestimmt werden. Wir bilden sie rekursiv gemäß (II 9.4) und speichern sie in Matrizen ab.

Abschnitt 9. liefert dann die Schätzverfahren für die Parameter.

Wir erhalten die Matrix ZS (bzw. S_Z und S_N) der Parameter der Zwischenschwingungszeiten (bzw. Nicht-Zwischenschwingungszeiten unter den Bedingungen B_Z und B_N).

10.3 Alle Parameter

Wie bei Markov ist es auch hier wieder sinnvoll, eine Glättung der gesamten Parameter-Matrix (bzw. -Matrizen) vorzunehmen.

Dazu betrachten wir zuerst jede einzelne Nebendiagonale der RAINFLOW-Matrix (Schwingungen gleicher Spanne und Richtung) und anschließend alle Nebendiagonalen zusammen.

Dabei ergaben sich folgende Bilder:

ERWARTUNGSWERTE DER
ZWISCHENSCHWINGUNGSZEITEN
FUER DIAGONALE -3

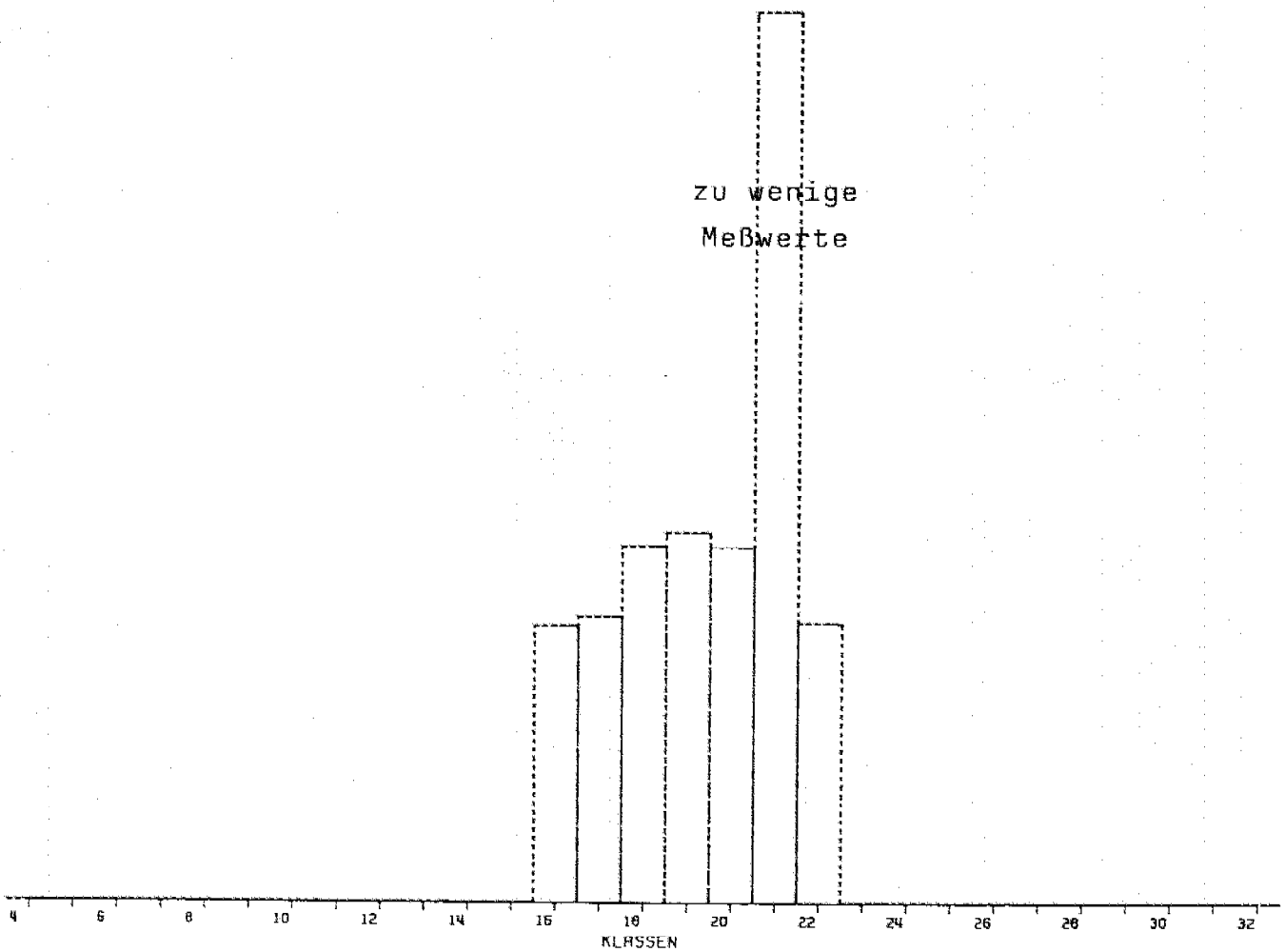


Bild 20

ERWARTUNGSWERTE DER
ZWISCHENSCHWINGUNGSZEITEN
FUER DIAGONALE -1

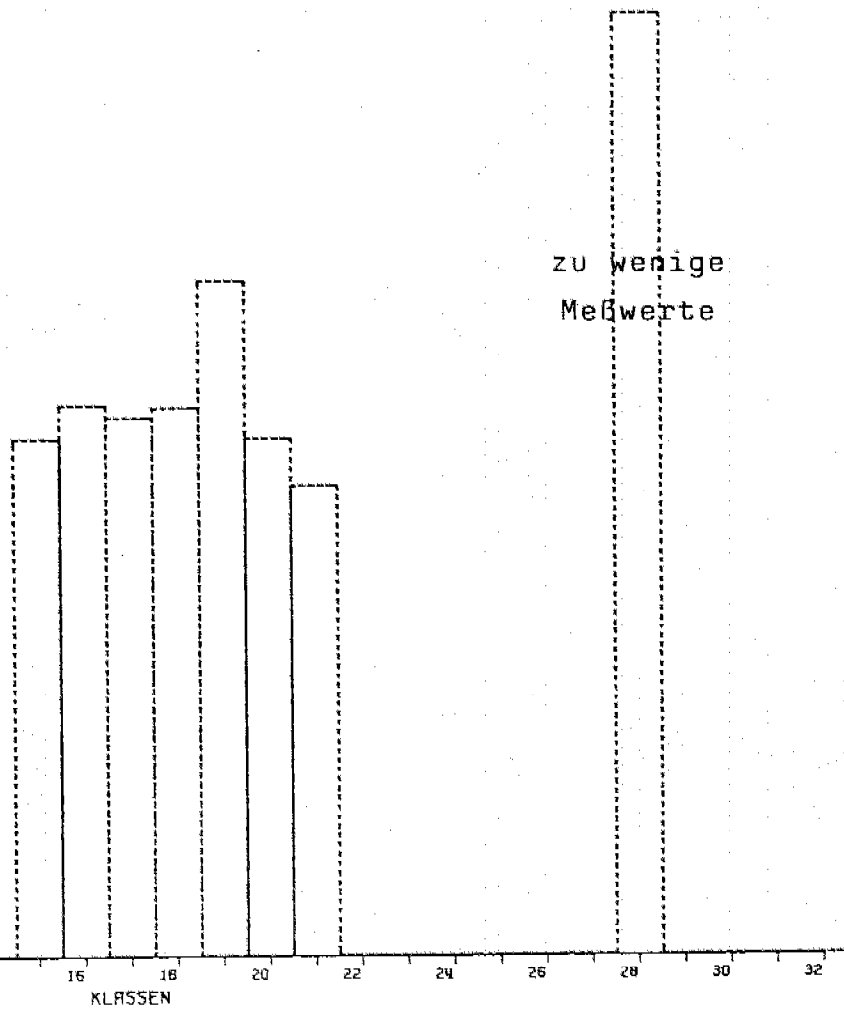


Bild 21

ERWARTUNGSWERTE DER
ZWISCHENSCHWINGUNGSZEITEN
FUER DIAGONALE 5

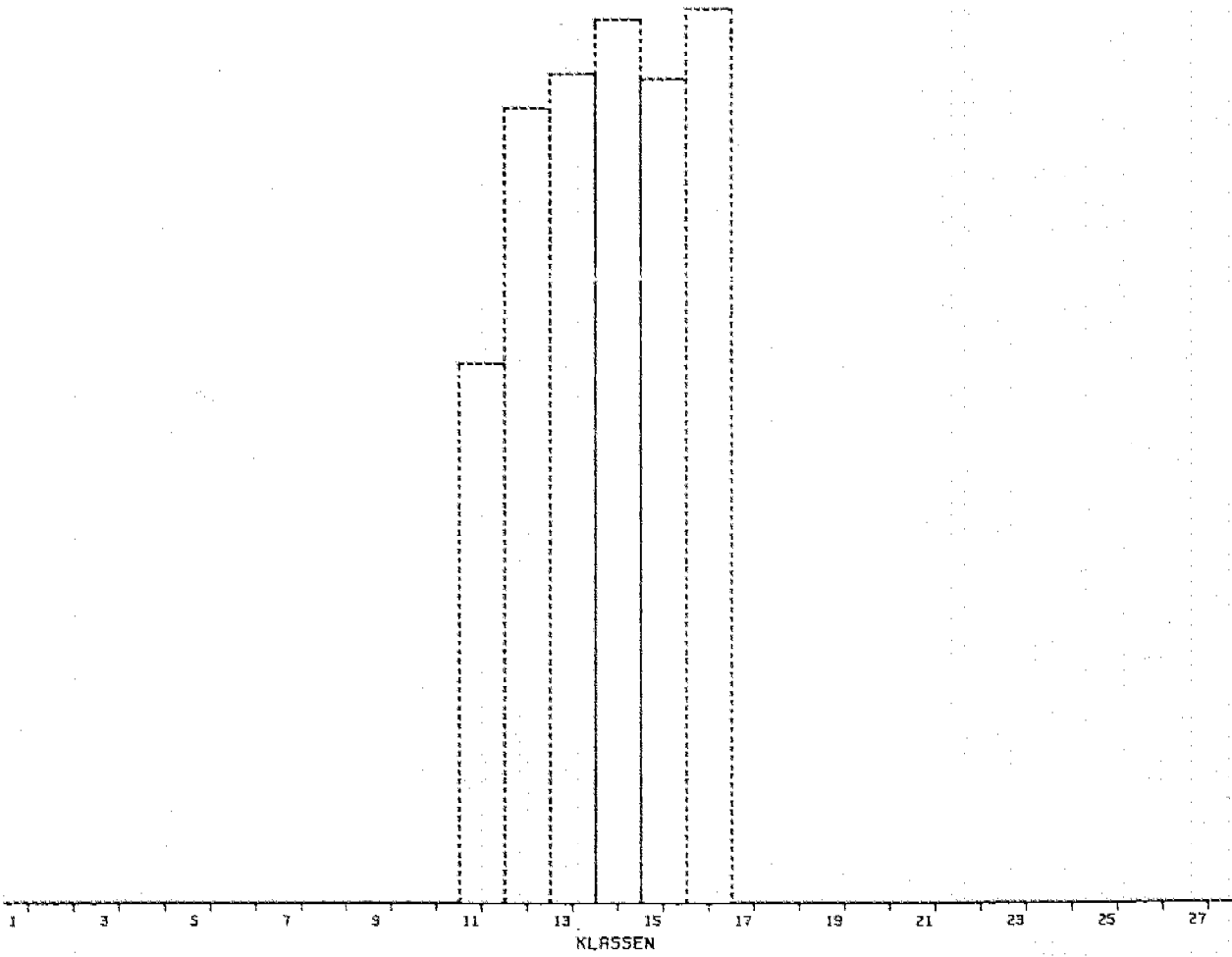


Bild 22

Bilder 20, 21, 22: Erwartungswerte der Zwischenschwingungszeiten auf den Diagonalen -3, -1 bzw. +5 (AUDI80, Federbein (z-Richtung), EVP-Teststrecke)

ERWARTUNGSWERTE DER NEBENDIAGONALEN
(ZWISCHENSCHWINGUNGEN)

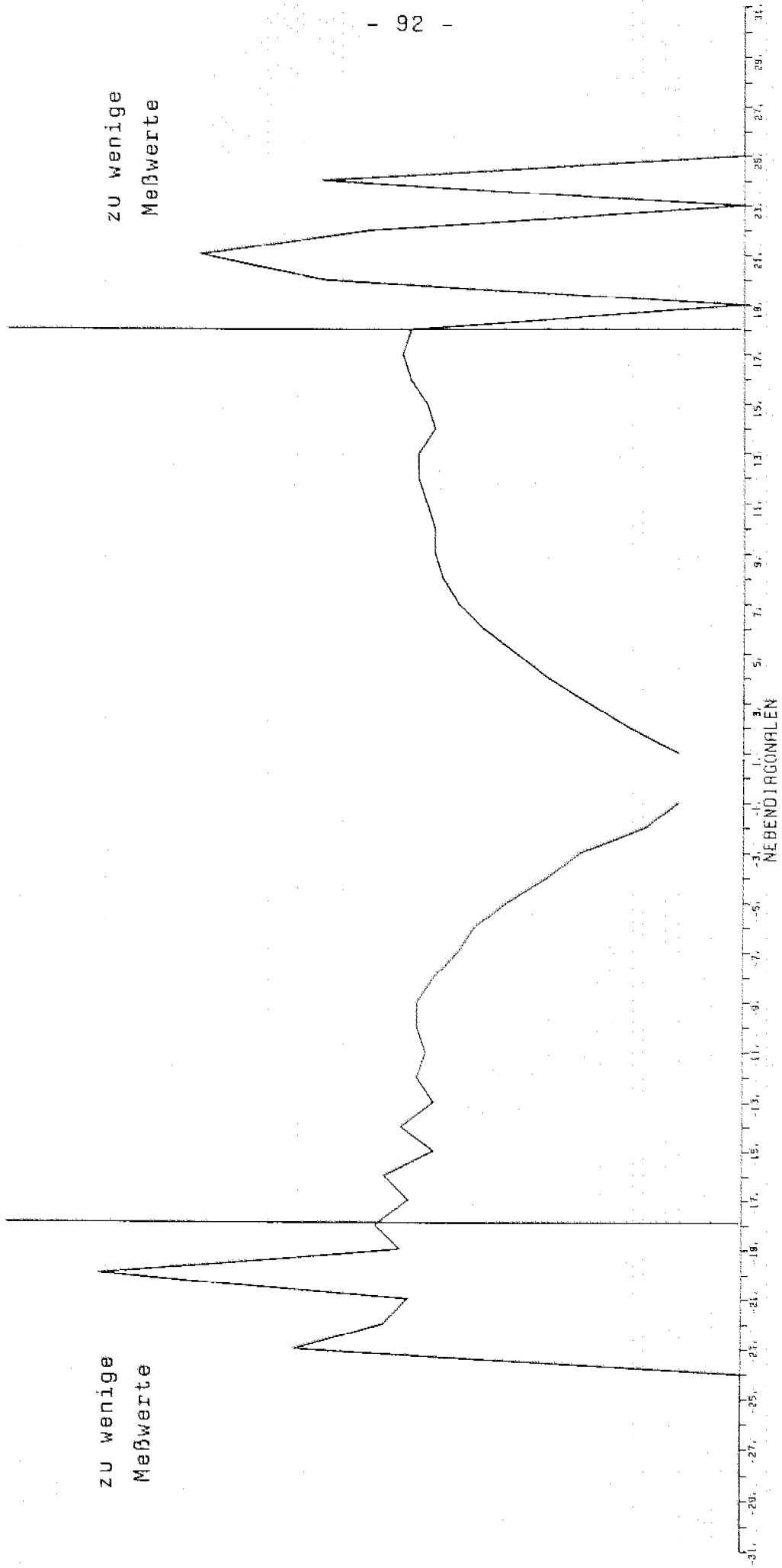


Bild 23: Erwartungswerte der Zwischenschwingungszeiten aller Nebendiagonalen
(AUDI80, Federbein (z-Richtung), EVP-Teststrecke)

Dasselbe gilt natürlich auch für das Brummen.

Hier ergab sich folgendes:

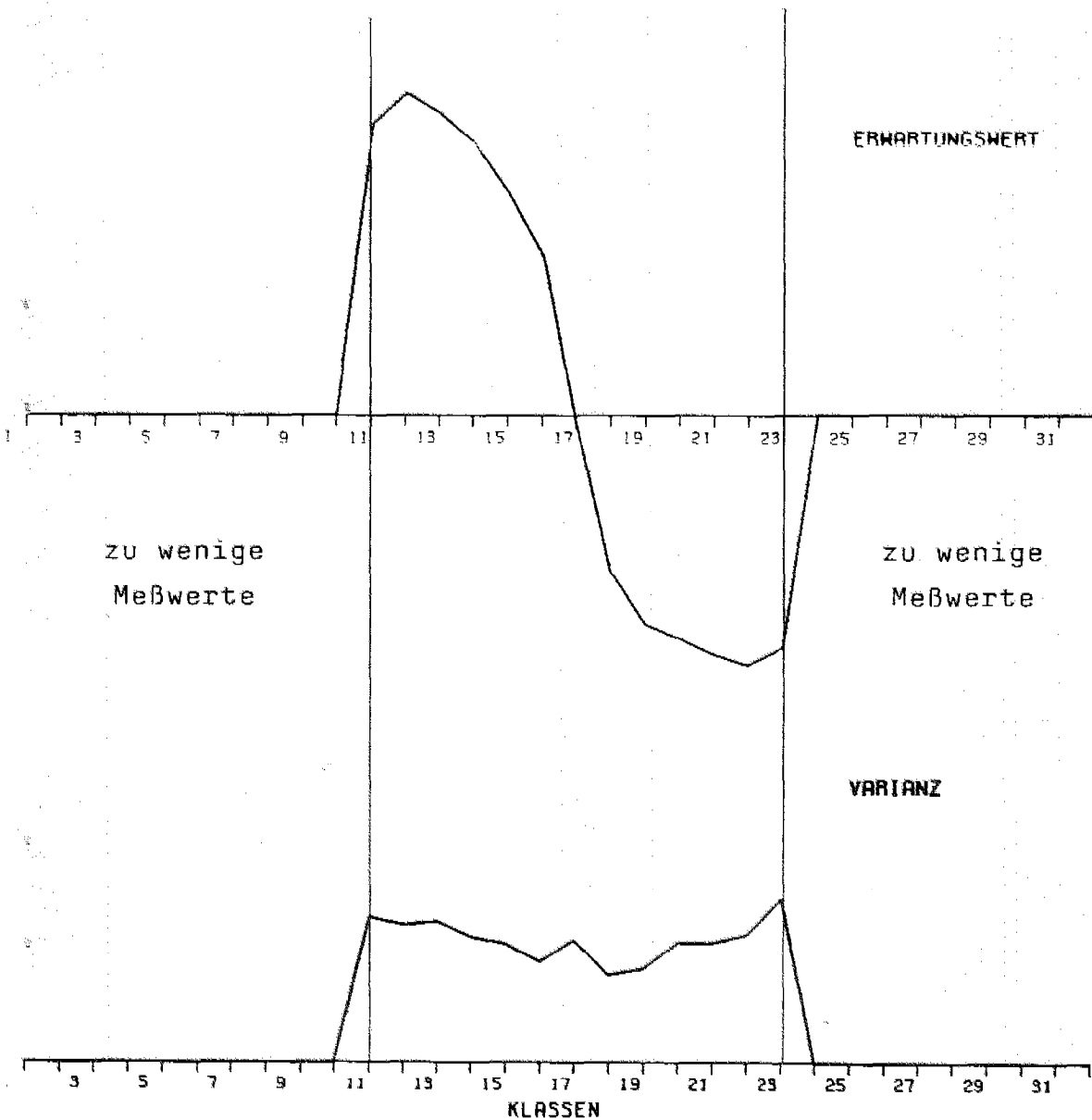


Bild 24: Erwartungswerte und Varianzen beim Brummen
in allen Klassen
(AUDI80, Beschleunigungsaufnehmer (z-Richtung),
EVP-Teststrecke)

Es werden Glättungen geeignet gewählt werden, z.B.
Glättungen durch Bestimmen von Regressionskurven durch
die geschätzten Parameter.

Sehen wir uns noch die Komplexitäten des Verfahrens an:

10.4 Komplexitäten

Es ist leicht einzusehen, daß der Platzbedarf nur von der Klassenzahl M abhängt, und zwar quadratisch, nicht aber von der Länge der BAZF, da für das Residuum nur $2M - 2$ und für das Zeitresiduum $M(M - 1)$ an Platz benötigt wird.

Der Zeitbedarf des Verfahrens ist linear in der Länge der BAZF.

11. Modifizierte Rekonstruktion ohne Zeit

Die komplette RAINFLOW-Rekonstruktion hier zu erklären, würde zu weit führen (vgl. /1/ 3.2). Ich möchte daher nur etwas zum Grundprinzip sagen:

11.1 Idee der RAINFLOW-Inversion ohne Zeit

Wir beginnen mit dem Residuum R .

Dann legen wir nacheinander zuerst die großen Schwingungen der RAINFLOW-Matrix A in das Residuum und fügen dann immer kleinere ein, bis alle Schwingungen von A verbraucht sind.

Dabei verläuft das Hineinlegen genau umgekehrt zum Herausziehen.

Wie bei Markov geht es jetzt auch hier wieder darum, die Brummphasen in den Prozeß hineinzulegen (vgl. II 10.).

11.2 Brummen

Wir nehmen wieder an, daß alle Brummphasen gleichmäßig über den ganzen Prozeß $\bar{X}(n)$ verteilt sind:

Es sei $\bar{X}(n_0) = i$ und es gebe noch $B(i)$ Brummprozesse in der Klasse i .

Existieren für den restlichen Prozeß $\{\bar{X}(n), n \geq n_0\}$ noch m_i Durchgänge durch den Zustand i , also m_i mögliche Brummen in i , so ist die Wahrscheinlichkeit für ein Brummen $B(i) / m_i$.

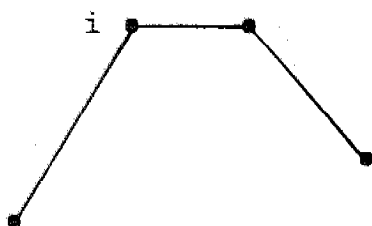
Wir könnten auch hier - wie bei Markov - Aufwärts- und Abwärts-Brummen unterscheiden (vgl. II 10.5).

Wie ergibt sich die Anzahl m_i der möglichen Brummphasen in i ?

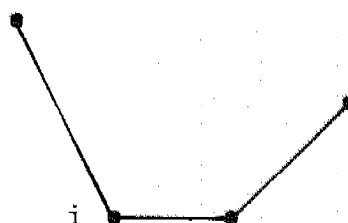
11.3 Mögliche Brummphasen

Dazu sehen wir uns an, wo ein Brummen liegen kann:

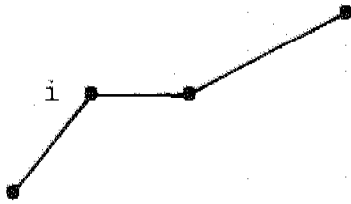
(1)



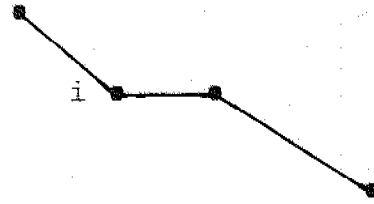
(2)



(3)



(4)



In den Fällen (1) und (2) liegt das Brummen zwischen zwei Halbschwingungen.

S_i sei die Anzahl der in i endenden Halbschwingungen:

$$S_i = \sum_{j \neq i} A(j, i).$$

In den Fällen (3) und (4) liegt das Brummen innerhalb einer Halbschwingung (wie eine Zwischenschwingung).

\bar{S}_i sei die Anzahl der Halbschwingungen (k, l) mit $k < i < l$ bzw. $k > i > l$:

$$\bar{S}_i = \sum_{k < i < l} A(k, l) + \sum_{k > i > l} A(k, l).$$

Also: $m_i = S_i + \bar{S}_i$

$$= \sum_{k < i \leq l} A(k, l) + \sum_{k > i \geq l} A(k, l).$$

Die Simulation kann nun analog zu (II 10.7) durchgeführt werden.

12. RAINFLOW-Rekonstruktion mit Zeit

Wir können nun den Algorithmus zur Inversion angeben:

12.1 Algorithmus

- (1) Wir starten mit dem Residuum R und den aus dem Zeitresiduum ZR gewonnenen Übergangszeiten von R (vgl. 10.1).
- (2) Dann wenden wir die RAINFLOW-Inversion ohne Zeit gemäß (11.) an.
In (i,j) soll eine Zwischenschwingung (k,l) eingefügt werden ($(i,j) = (k,l)$ erlaubt, entspricht parallelem Legen der Schwingungen (i,j)).
- (2.1) Wir bestimmen den Aufteilungszeitpunkt gemäß (8.2) bzw. (8.3) und
- (2.2) simulieren eine $\Gamma(\alpha^{kl}, \lambda)$ -Verteilung für die Zwischenschwingung (k,l) .
- (3) In (i,j) soll ein Brummen in k eingefügt werden.
- (3.1) Ist $k = j$, so ist eine Aufteilung überflüssig, sonst verfahren wir wie in Punkt (2.1).
- (3.2) Dann simulieren wir ein Brummen gemäß (II 6.6).

12.2 Eingaben für das Verfahren

Für die Rekonstruktion werden gebraucht:

Die RAINFLOW-Matrix A , das Residuum R , die Zwischenschwingungs-Parameter-Matrix (und die Parameter-Matrizen der Nicht-Zwischenschwingungszeiten), die Übergangszeiten des Residuums, die Brumm-Anzahlen $B(i)$ für $i = 1, \dots, M$ und die Brumm-Parameter.

12.3 Komplexitäten

Wir können uns überlegen:

Die Patzkomplexität ist unabhängig von der Länge der BAZF und quadratisch abhängig von der Klassenzahl M . Der Zeitbedarf ist linear in der Länge der BAZF.

A N H A N G

IV Simulation von Verteilungen

Die eigentliche Problemstellung dieser Arbeit ist nun gelöst.

Da es für unsere Rekonstruktionen notwendig ist, Verteilungen zu simulieren, sehen wir uns jetzt die hier benötigten an:

1. Exponential-Verteilung

1.1 Lemma

Es sei X eine gleichmäßig auf $(0,1)$ verteilte Zufallsvariable.

Dann ist $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ exponentialverteilt mit Parameter λ .

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } P(Y \leq y) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq y\right) \\ &= P(\ln X \geq -\lambda y) \\ &= P(X \geq e^{-\lambda y}) \\ &= 1 - e^{-\lambda y}, \text{ weil } X \text{ } U(0,1)\text{-verteilt} \\ &\quad \text{ist.} \end{aligned}$$

1.2 Folgerung

Wir können $E(\lambda)$ -verteilte Zufallszahlen erzeugen, indem wir $U(0,1)$ -verteilte Zufallszahlen x überführen in $y = -\frac{1}{\lambda} \ln x$.

2. Gamma-Verteilung

2.1 Bemerkung

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig identisch exponentialverteilt mit Parameter λ .

Dann ist $X_1 + \dots + X_n$ Gamma-verteilt mit Grad n und Parameter λ .

Beweis: klar (vgl. II 3.12)

2.2 Folgerung

Wir erzeugen exponential-verteilte Zufallszahlen

x_1, \dots, x_n nach (1.).

$y = x_1 + \dots + x_n$ ist dann eine $\Gamma(n, \lambda)$ -verteilte Zufallszahl.

Auf diese Weise lassen sich nur $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -Verteilungen mit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ simulieren.

Für $\alpha \notin \mathbb{N}$ könnten wir daher $\{\alpha\}$ verwenden, wobei

$\{\alpha\} := \text{Min}\{n \in \mathbb{N} : n \geq \alpha\}$ ist.

Da aber - besonders für kleine α - die Verteilungen $\Gamma(\alpha, \lambda)$ und $\Gamma(\{\alpha\}, \lambda)$ stark von einander abweichen, muß nach einem Verfahren gesucht werden, mit dem auch allgemeine Gamma-Verteilungen simuliert werden können (vgl. /9/).

2.3 Bemerkung

Es sei $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

X_1 und X_2 seien $\Gamma(\{\alpha\}, \lambda)$ bzw. $\Gamma(\alpha - \{\alpha\}, \lambda)$ -verteilt.

Dann ist $X = X_1 + X_2$ $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verteilt.

Beweis: klar

Wegen dieser Bemerkung genügt es, $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen mit $\alpha \in (0, 1)$ zu simulieren.

2.4 Voraussetzungen

Es sei $(\Omega, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ ein Maßraum, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ die Borel-Mengen von \mathbb{R}_+ sind.

Es sei $\gamma > 0$,

$A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ mit $A_1 = [0, \gamma]$, $A_2 = (\gamma, \infty)$.

X sei eine $\Gamma(\alpha, 1)$ -verteilte Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{B}) .

(Ω, \mathcal{B}, P) sei ein Wahrscheinlichkeits-Raum.

2.5 Lemma

Es gibt eine Zufallsvariable Y auf $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ mit

$$f_Y(x|A_1) = 1_{A_1}(x) \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\gamma^\alpha},$$

$$f_Y(x|A_2) = 1_{A_2}(x) e^{-x+\gamma}.$$

Beweis:

$f_Y(x|A_i)$ sind bedingte Dichten,

denn: $f_Y(x|A_i) \geq 0$ und

$$\int_0^\infty f_Y(x|A_i) dx = 1 \text{ für } i = 1, 2.$$

Wir wählen Y mit Dichte

$$f_Y(x) = f_Y(x|A_1) P(A_1) + f_Y(x|A_2) P(A_2).$$

Wir suchen eine Menge $S \in \mathcal{B}$ mit

$$f_Y(x|S) = f_X(x) \text{ } \lambda\text{-f.Ü.}$$

2.6 Bezeichnung

S sei definiert durch

$$\begin{aligned} S &:= \left\{ \omega \in \Omega : U(\omega) \leq g_i(Y(\omega)), \text{ falls } \omega \in A_i \right\} \\ &= \bigcup_{i=1}^2 \left\{ \omega \in A_i : U(\omega) \leq g(Y(\omega)) \right\}, \end{aligned}$$

wobei U eine Zufallsvariable mit Verteilung $U(0,1)$ ist

und $g_1(x) = 1_{A_1}(x) e^{-x}$,

$$g_2(x) = 1_{A_2}(x) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}.$$

2.7 Bemerkung

(i) $g_i(x) \in (0, 1]$ für $x \in \mathbb{R}_+$

(ii) $S \in \mathcal{B}$,

da $U(\omega)$, $Y(\omega)$ und damit $g_i(Y(\omega))$ \mathcal{B} -meßbar sind,

also $\{U \leq g_i(Y)\} \in \mathcal{B}$.

Es sei P so, daß gilt:

$$P(A_1) = \frac{\gamma}{\gamma + \alpha e^{-\gamma}},$$

$$P(A_2) = 1 - P(A_1) \\ = \frac{\alpha e^{-\gamma}}{\gamma + \alpha e^{-\gamma}},$$

$$P(S) = \frac{\gamma^{1-\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{\gamma + \alpha e^{-\gamma}}.$$

2.8 Lemma

$$f_Y(x|S) = f_X(x)$$

Beweis:

$$(i) \quad P(S|Y=x, A_i) = P\{U(\omega) \leq g_i(Y(\omega)) | Y=x, A_i\} \\ = P\{U(\omega) \leq g_i(x)\} \\ = g_i(x), \text{ weil } U \text{ } U(0,1)\text{-verteilt ist.}$$

$$(ii) \quad \frac{f_Y(x|S, A_i)}{f_Y(x|A_i)} = \frac{P(Y \in dx | S, A_i)}{P(Y \in dx | A_i)} \\ = \frac{P(S|Y=x, A_i)}{P(S|A_i)}, \text{ woraus folgt:}$$

$$f_Y(x|S, A_i) = \frac{P(S|Y=x, A_i) f_Y(x|A_i)}{P(S|A_i)}.$$

(iii) Aus (i) und (ii) folgt:

$$f_Y(x|S, A_i) = \frac{g_i(x) f_Y(x|A_i)}{P(S|A_i)} \text{ und damit:}$$

$$f_Y(x|S) = \sum_{i=1}^2 f_Y(x|S, A_i) P(A_i|S) \\ = \sum_{i=1}^2 g_i(x) f_Y(x|A_i) \frac{P(A_i|S)}{P(S|A_i)} \\ = \sum_{i=1}^2 g_i(x) f_Y(x|A_i) \frac{P(A_i)}{P(S)}.$$

(iv) Einsetzen von $g_i(x)$, $f_Y(x|A_i)$, $P(A_i)$ und $P(S)$ liefert die Behauptung.

2.9 Folgerung

Wir können nun also X simulieren, indem wir Y unter der Bedingung S simulieren.

Dies geschieht folgendermaßen:

- (1) Simuliere Y
- (2) Überprüfe S
- (3) gilt S, STOP Ausgabe,
sonst gehe nach (1)

Damit ist $P(S)$ die Wahrscheinlichkeit für Erfolg bei einem Experiment.

Es gilt, $P(S)$ möglichst groß zu machen.

2.10 Lemma

$P(S)$ ist maximal für γ mit

$$\gamma (e^\gamma - 1) = 1 - \alpha.$$

Beweis:

$$\text{Es sei } f(\gamma) = \frac{\gamma^{1-\alpha}}{\gamma + \alpha e^{-\gamma}}.$$

$$\frac{d}{d\gamma} f(\gamma) = \frac{(1-\alpha)\gamma^{-\alpha}(\gamma + \alpha e^{-\gamma}) - \gamma^{1-\alpha}(1 - \alpha e^{-\gamma})}{(\gamma + \alpha e^{-\gamma})^2}$$

$f'(\gamma) = 0$ für $\gamma > 0$ ($\gamma = 0$ ist Minimum) genau dann,

$$\text{wenn } (1-\alpha)(\gamma^{1-\alpha} + \gamma^{-\alpha} \alpha e^{-\gamma}) - \gamma^{1-\alpha} + \alpha \gamma^{1-\alpha} e^{-\gamma} = 0 \quad (*),$$

$$-\alpha \gamma^{1-\alpha} + (1-\alpha)\alpha \gamma^{-\alpha} e^{-\gamma} + \alpha \gamma^{1-\alpha} e^{-\gamma} = 0,$$

$$-\gamma + (1-\alpha)e^{-\gamma} + \gamma e^{-\gamma} = 0, \text{ weil } \alpha \gamma^{-\alpha} \neq 0 \text{ für } \gamma > 0,$$

genau dann,

$$\text{wenn } \gamma e^\gamma = 1 - \alpha + \gamma,$$

$$\gamma (e^\gamma - 1) = 1 - \alpha.$$

Es bleibt noch, für (*) zu zeigen: $\gamma + \alpha e^{-\gamma} \neq 0$.

Wir nehmen dazu an: $\gamma + \alpha e^{-\gamma} = 0$.

$$\text{Damit: } \frac{1-\alpha}{e^\gamma - 1} + \alpha e^{-\gamma} = 0,$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{also: } \gamma = -\ln \frac{1}{\alpha}$$

$$= \ln \alpha$$

< 0 im Widerspruch zu $\gamma > 0$.

Außerdem gilt: $f''(\gamma) < 0$, woraus die Behauptung folgt.

Da es aufwendig ist, dieses γ in jedem Fall zu bestimmen, wählen wir $\gamma = 0.5$, welches dem Optimum sehr nahe kommt.

Sehen wir uns nun den Algorithmus zur Erzeugung einer allgemeinen Gamma-Verteilung an:

2.11 Algorithmus

$\alpha, \lambda, p = P(A_1), \gamma$ und $k = [\alpha], \delta = \alpha - k$ seien gegeben.

- (1) $\delta = 0$, gehe nach (14)
- (2) Erzeuge U gemäß $U(0,1)$
- (3) Erzeuge V gemäß $E(1)$
- (4) $U > p$, gehe nach (9)
($U > p$ impliziert A_2)
- (5) $Y := \gamma \exp(-\frac{V}{\delta})$
- (6) Erzeuge V gemäß $E(1)$
- (7) $V \geq Y, X := Y$, gehe nach (13)
($V \geq Y$ impliziert S)
- (8) Gehe nach (2)
- (9) $Y := V + \gamma$
- (10) Erzeuge V gemäß $E(1)$
- (11) $V \geq (1-\delta) \ln(\frac{Y}{\delta}), X := Y$, gehe nach (13)
(Bedingung impliziert S)
- (12) Gehe nach (2)
- (13) $k = 0, X := \frac{X}{\lambda}$, STOP Ausgabe X
- (14) Erzeuge Y gemäß $\Gamma(k,1)$
- (15) $X := (X + Y) / \lambda$, STOP Ausgabe X

Wir überprüfen noch die Korrektheit des Algorithmus:

2.12 Korrektheit des Algorithmus

(4) $U \leq p$ mit Wahrscheinlichkeit $p = P(A_1)$ und $U > p$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = P(A_2)$, also impliziert die Bedingung " $U \leq p$ " A_1 .

(7) $V_2 \geq Y, V_2 = -\ln U_2$ (wegen 1.1).

Daher $U_2 \leq e^{-Y} = g_1(Y)$, weil $Y = \gamma \exp(-\frac{V_1}{\delta})$ (5)

$$= \gamma U_1^{\frac{1}{\delta}} \in (0, \gamma) \text{ (wegen 1.1).}$$

Damit folgt S .

$$(11) V_2 \geq (1-\delta) \ln\left(\frac{Y}{\gamma}\right), \text{ also}$$

$$U_2 \leq \left(\frac{Y}{\gamma}\right)^{\delta-1}$$

$$= g_2(Y), \text{ weil } Y = V_1 + \gamma \quad (9) \\ > \gamma.$$

Somit folgt S.

(5) Es gilt A_1 .

$$\text{Es ist zu zeigen: } f_Y(x|A_1) = \delta \frac{x^{\delta-1}}{\gamma^\delta}.$$

$$P(Y \leq x | A_1) = P(\gamma e^{-\frac{V}{\delta}} \leq x), \text{ weil } A_1 \text{ gilt,}$$

$$= P(U_1 \frac{1}{\delta} \leq \frac{x}{\gamma})$$

$$= P(U_1 \leq \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\delta)$$

$$= \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\delta.$$

Durch Differenzieren nach x erhalten wir die Behauptung.

(9) Es gilt A_2 .

$$\text{Wir müssen zeigen: } f_Y(x|A_2) = e^{\gamma-x}$$

$$P(Y \leq x | A_2) = P(V + \gamma \leq x), \text{ weil } A_2 \text{ gilt,}$$

$$= P(U_1 \geq e^{\gamma-x})$$

$$= 1 - e^{\gamma-x},$$

womit durch Differenzieren nach x die Behauptung folgt.

Die restlichen Schritte des Algorithmus sind klar.

3. Beta-Verteilung

3.1 Lemma

X_1 sei $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verteilt, X_2 sei $\Gamma(\beta, \lambda)$ -verteilt,

X_1 und X_2 seien unabhängig.

Dann ist $C \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ Beta-verteilt mit Parametern (α, β) auf $[0, C]$.

Beweis:

$$P\left(C \frac{X_1}{X_1 + X_2} \leq x \mid X_1 + X_2 = T\right) = P\left(X_1 \leq \frac{Tx}{C} \mid X_1 + X_2 = T\right) \text{ ist}$$

wegen (III 8.1) gleich der $B^{[0, T]}(\alpha, \beta)$ -Verteilung an der Stelle $\frac{Tx}{C}$.

Mit dem Transformationssatz ergibt sich:

$$\begin{aligned} B^{[0, T]}(\alpha, \beta) \left(\frac{Tx}{C}\right) &= B^{[0, 1]}(\alpha, \beta) \left(\frac{x}{C}\right) \\ &= B^{[0, C]}(\alpha, \beta) (x). \end{aligned}$$

Da dies unabhängig von T ist, folgt die Behauptung.

3.2 Folgerung

Wir erzeugen Zufallszahlen mit Verteilungen $\Gamma(\alpha, \lambda)$

und $\Gamma(\beta, \lambda)$ gemäß (2.): x_1, x_2 .

Dann ist $C \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ eine $B^{[0, C]}(\alpha, \beta)$ -verteilte Zufallszahl.

4. Normal-Verteilung

Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der $N(0,1)$ -Verteilung ist nicht invertierbar.

Aus diesem Grund betrachten wir die zweidimensionale Standard-Normalverteilung:

4.1 Lemma

Es seien U_1 und U_2 unabhängig $U(0,1)$ -verteilte Zufallsvariablen.

Dann sind $Y_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$
und $Y_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$

unabhängig $N(0,1)$ -verteilte Zufallsvariablen.

Beweis:

(i) Es sei $V := -\ln U_1$.

Dann ist V $E(1)$ -verteilt (vgl. 1.1).

(ii) Es gelten nun:

$$Y_1 = \sqrt{2V} \cos(2\pi U),$$

$$Y_2 = \sqrt{2V} \sin(2\pi U), \text{ wobei } U = U_2.$$

Wir definieren $g : (U, V) \mapsto (Y_1, Y_2)$.

g ist auf Umgebungen injektiv:

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 2V,$$

$$\frac{Y_2}{Y_1} \stackrel{f. \ddot{U}}{=} \tan(2\pi U), \text{ wobei wir f\u00fcr } U \text{ eine Umgebung}$$

I der L\u00e4nge $\frac{1}{2}$ in $(0,1)$ w\u00e4hlen, da \tan auf Intervallen der L\u00e4nge π injektiv ist.

Also erhalten wir die \u00c4quivalenz zu:

$$\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2} = V,$$

$$\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \stackrel{f. \ddot{U}}{=} U, \text{ wobei } \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow 2\pi I.$$

(iii) Gesucht ist: $P_{Y_1, Y_2} = P_g(U, V)$

Da U und V unabhängig sind, gilt:

$$f_{U, V}(u_0, v_0) = 1_{(0,1)}(u_0) e^{-v_0}.$$

Nach dem Transformationssatz für Dichten gilt:

$$\begin{aligned} & f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\ &= f_{U, V}(g^{-1}(y_1, y_2)) |Dg(g^{-1}(y_1, y_2))|^{-1} \\ &= 1_{(0,1)}\left(\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right) \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right), \text{ weil } \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \in 2\pi\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch die Gleichheit der Determinanten mit $\frac{1}{2\pi}$ nachweisen:

$$\begin{aligned} |Dg(g^{-1}(y_1, y_2))|^{-1} &= |Dg^{-1}(y_1, y_2)| \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi} & \frac{1}{y_2^2} & \frac{y_2}{y_1^2} \\ & 1 + \frac{y_2^2}{y_1^2} & \\ & & y_1 \\ & & & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \left| -\frac{1}{2\pi} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ ist die Dichte der zweidimensionalen Standard-Normalverteilung, was zu zeigen war.

4.2 Folgerung

Zur Simulation $N(0,1)$ -verteilter Zufallszahlen y_1, y_2 erzeugen wir Zufallszahlen u_1, u_2 gemäß $U(0,1)$ und

$$\begin{aligned} \text{bilden } y_1 &:= \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2), \\ y_2 &:= \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2). \end{aligned}$$

Literatur

- /1/ Krüger, Scheutzwow, Beste, Petersen
Markov- und RAINFLOW-Rekonstruktionen stochastischer
Beanspruchungszeitfunktionen
(Bericht der Arbeitsgruppe Technomathematik der
Universität Kaiserslautern)
- /2/ Karlin, Taylor
A First Course in Stochastic Processes
- /3/ Breiman
Probability and Stochastic Processes: With a View
toward Applications
- /4/ Breiman
Probability
- /5/ Hida
Brownian Motion
- /6/ Witting
Mathematische Statistik
- /7/ Weichselberger
Graphisches Verfahren zur Trennung von Mischverteilungen
(Metrika, Band 4)
- /8/ Bauer
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie
- /9/ Fishman
Principles of Discrete Event Simulation