FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 14

EIN MATHEMATISCHES VERFAHREN ZUR OPTIMIERUNG VON NOCKEN

HARDY MOOCK

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE
6750 KAISERSLAUTERN

JANUAR 1986

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung des Entwicklungszentrums der Ford-Werke in Köln-Merkenich.
Die Erarbeitung des für die Modellentwicklung wichtigen technischen Hingergrundes sowie das Austesten der zum Verfahren erstellten Computer-Programme erfolgte mit Unterstützung der dortigen Abteilung Engine Computer Programs and Applications.
Mittlerweile wird eine Programmversion, bei der die meisten der in Kapitel 5 aufgeführten Erweiterungen realisiert sind, produktiv zur Generierung von Nocken bei den Ford-Werken eingesetzt.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Seite

LITERATURVERZEICHNIS II

EINLEITUNG 1

1. PROBLEMBESCHREIBUNG UND MODELLBILDUNG 3

1.1 Technischer Hintergrund 3

1.2 Mathematisches Modell 11

2. NUMERISCHES VERFAHREN ZUR LÖSUNG DES PROBLEMS 15

2.1 Diskretisierung mit Hilfe von Spline - Funktionen 15

2.2 Optimierung über den Spline - Koeffizienten 24

3. THEORETISCHE ERÖRTERUNG DES LÖSUNGSALGORITHMUS 27

3.1 Einbettung des Problems in den Sobolev - Raum 27

3.2 Existenz einer Lösung 30

3.3 Konvergenz des Verfahrens 35

3.4 Problematik fester Randbedingungen 46

4. MODIFIZIERBARKEIT DES VERFAHRENS IM HINBLICK AUF ZUKÜNFTIGE TECHNISCHE ANFORDERUNGEN 47

4.1 Vorgabe der Ventilfeder 47

4.2 Extreme Hubwerte 50

4.3 Kontrolle der Krümmungsradien 51

4.4 Vollständige Automatisierung 54

5. PRAKTISCHE ANWENDUNG DES VERFAHRENS 56

0. EINLEITUNG

Ein wichtiger Bestandteil bei der Entwicklung schnelllaufender Verbrennungsmotoren (Viertaktmotoren) ist die Konstruktion der Nockenwelle. Diese steuert das Öffnen und Schließen der Ein- bzw. Auslaßventile und damit den gesamten Gaswechselvorgang im Motor.
Über die technischen Aspekte beim Entwurf einer Nockenwelle ist reichlich Fachliteratur vorhanden (siehe [4],[7]). Dagegen läßt sich relativ wenig zu den in der Automobilindustrie benutzten Methoden und Verfahren zur expliziten Berechnung der Nockenform finden, da es sich hierbei um werksinterne Entwicklungen handelt. Eine der bekanntesten Veröffentlichungen beinhaltet das Verfahren von Kurz aus dem Jahre 1954 [6], das für die Berechnung mit relativ elementaren Hilfsmitteln konzipiert wurde. Der Einsatz des Computers gestattet heutzutage jedoch die Verwendung wesentlich aufwendigerer Methoden.

Die Entwicklung eines solchen, computergestützten Verfahrens zur Berechnung ruckfreier Nocken ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit, die sowohl den technischen als auch den mathematischen Aspekten des Problems in gleichem Maße gerecht wird.

Ausgehend von der Modellbildung (Kap.1) wird in Kap.2 ein Lösungsalgorithmus entwickelt, wobei alle, für die spätere Programmerstellung relevanten Formeln sowie deren Herleitung bereits an dieser Stelle ausführlich dargestellt werden. Dem Techniker wird es somit ermöglicht, das Verfahren selbst zu programmieren oder ähnliche Problemstellungen mit den gleichen Methoden zu bearbeiten, ohne sich näher mit dem mathematischen Hintergrund auseinanderzusetzen. Denn die, ausschließlich für den Mathematiker interessanten, theoretischen Betrachtungen (sprich Existenz - und Konvergenzbeweis) werden separat in Kap.3 erläutert. Modifikationen des Verfahrens im Hinblick auf neuere technische Entwicklungen oder im Rahmen der vollständigen Automatisierung sind wiederum für Technik und Mathematik gleichermaßen von Interesse und in Kap. 4 nachzulesen. Hinweise zur Programmerstellung,einige Beispielrechnungen sowie Erkenntnisse aus dem praktischen Einsatz des Verfahrens in der Automobilindustrie sind Gegenstand der Schlußbetrachtungen in Kap.5.

1. PROBLEMBESCHREIBUNG UND MODELLBILDUNG

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines mathematischen Verfahrens zur Generierung einer Ventilöffnungsfunktion über den Nockenwellendrehwinkeln (mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage). Auf die notwendigen technischen Details sowie auf das aus dem technischen Problem resultierende, mathematische Verfahren wird im Folgenden näher eingegangen.

1.1 Technischer Hintergrund [8]

Für die Leistung,die Laufkultur und den Benzinverbrauch eines Verbrennungsmotors ist der Gaswechselvorgang im Zylinder von großer Bedeutung. Bei diesem Prozeß werden die Verbrennungsgase möglichst vollständig aus dem Zylinder gedrückt und durch frisches, brennbares Gemisch ersetzt. Der Ladungsaustausch erfolgt über die Ein- und Auslaßventile. Jenachdem, ob frischer Brennstoff angesaugt oder das verbrauchte Gemisch ausgestossen werden soll, müssen Ein- und Auslaßventil sich öffnen bzw. schließen. Die Steuerung wird durch die Nockenwelle besorgt, die über den Zahnriemen mit der Kurbelwelle verbunden und somit an die Kolbenbewegung gekoppelt ist.

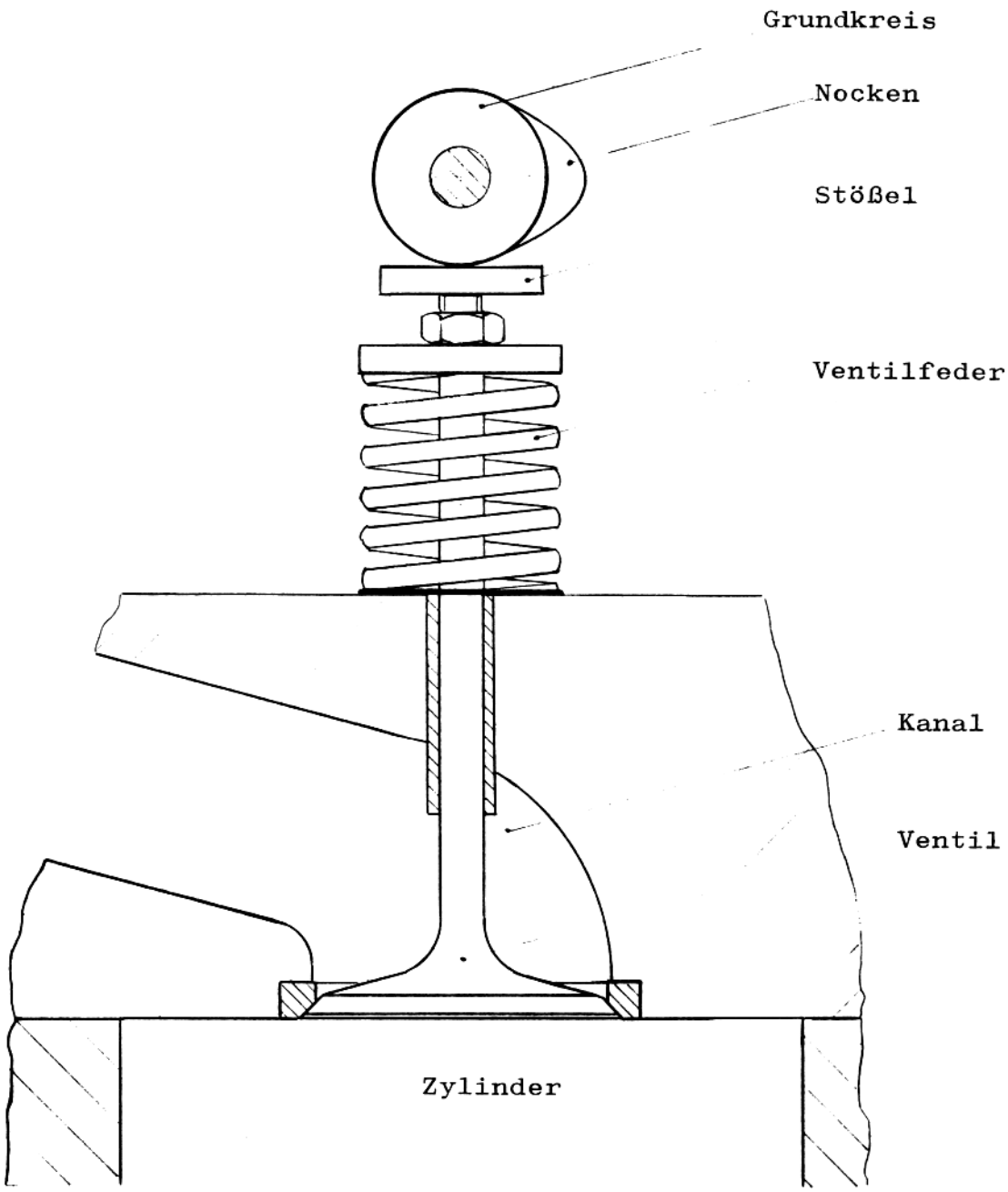


Abb.1 Querschnitt einer Ventilsteuerung Direktantrieb mit Tassenstößel bei obenliegender Nockenwelle

Der Nocken kann entweder direkt auf das Ventilschaftende einwirken oder indirekt im Zusammenspiel mit ebenen, gewölbten oder kreisförmigen Stößeln, mit Kipp- oder Schlepphebeln.

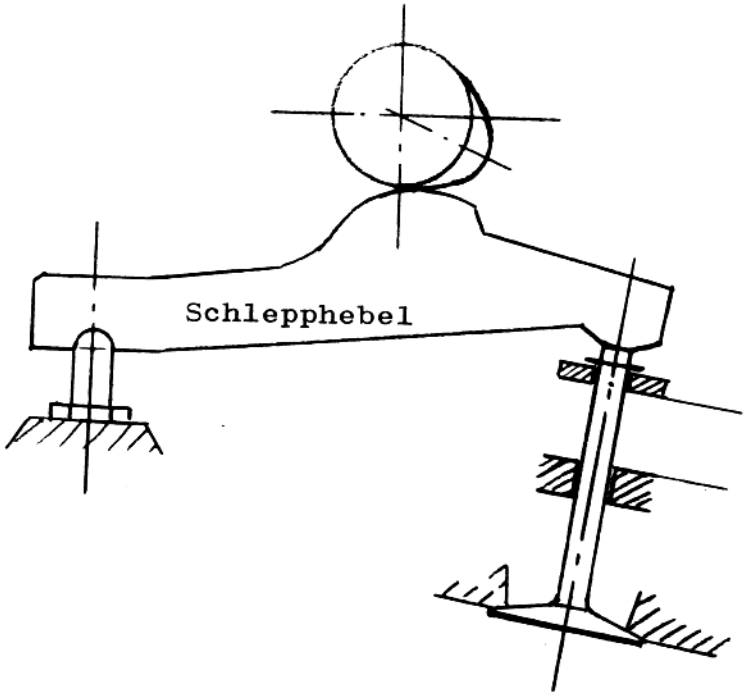


Abb.2 Direkt angetriebener Schlepphebel

Die Ventilfeder hat die Funktionen:

1. die Ventile im geschlossenen Zustand auf ihren Sitz zu drücken.
2. während der Öffnungsphase die Beschleunigungskräfte zu kompensieren, sodaß ein Abweichen von der vorgegebenen Erhebungskurve verhindert wird.

Aus der Nockenkontur läßt sich also die Hubfunktion über den Nockenwellendrehwinkeln ermitteln. Umgekehrt kann die Gestalt des Nockens vom Kurbeltrieb mittels geometrischer Betrachtungen unter Beachtung der verwendeten Kopplungsglieder aus einer gegebenen Erhebungsfunktion bestimmt werden.

Daher muß für die Nockenberechnung eine Ventilöffnungsfunktion über Nockenwellendrehwinkeln unter Berücksichtigung verschiedener Richtlinien, auf die später noch eingegangen wird, erzeugt werden. Die 1. Ableitung dieser Funktion nach dem Winkel beschreibt den Geschwindigkeitskennwert, die 2. Ableitung den Beschleunigungskennwert und die 3.Ableitung den Ruck. Die drei Größen werden kurz als Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck bezeichnet.

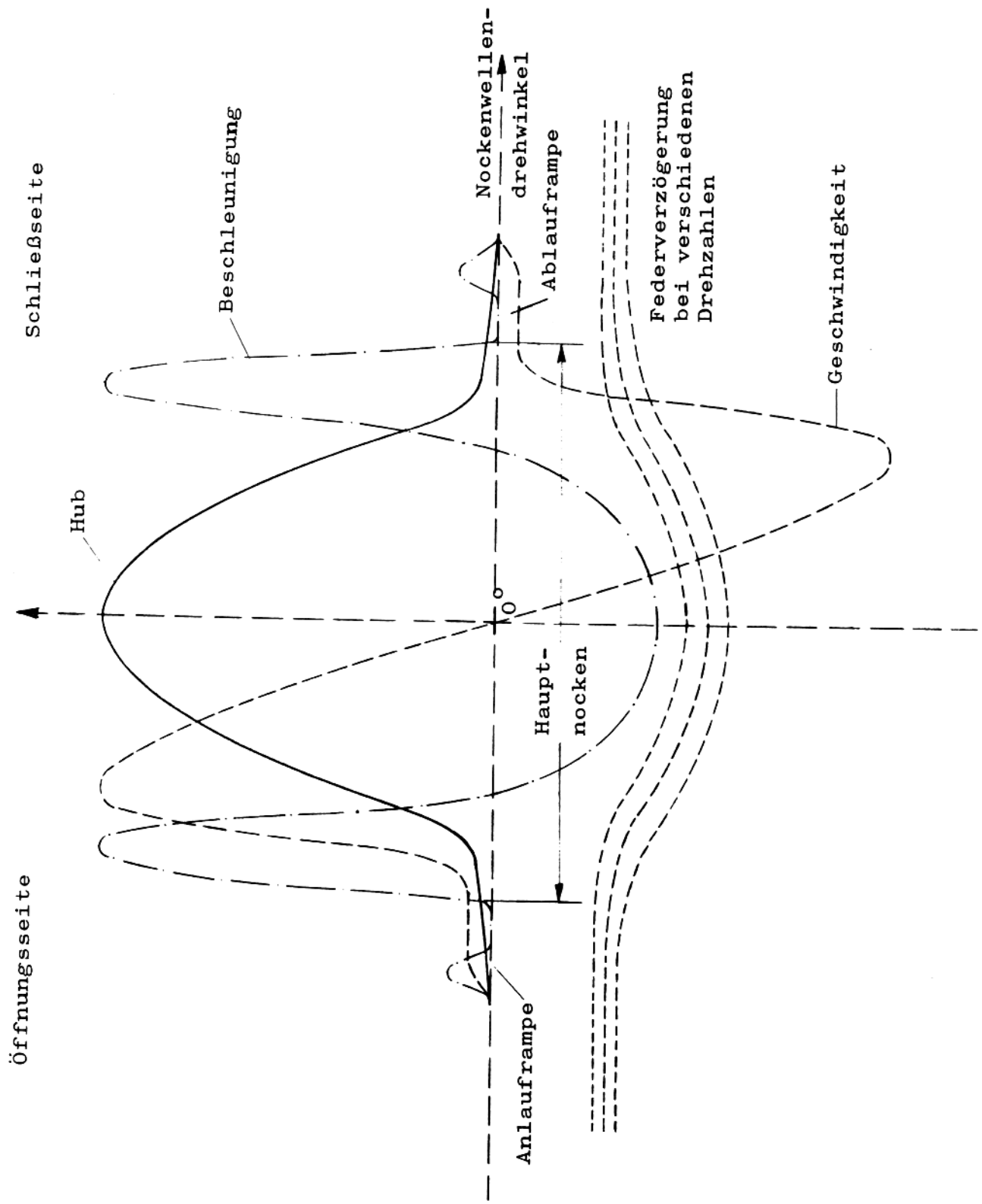


Abb.3 Charakteristischer Verlauf einer Ventilöffnungsfunktion

Die Ventilöffnungsfunktion muß bestimmten Anforderungskriterien genügen:

a) Völligkeit der Ventilerhebungsfunktion (d.h. möglichst große Fläche unter der Kurve) und maximaler Hub

Damit in kurzer Zeit durch die Ventile viel Gas hindurchströmen kann, müssen die Fläche unter der Erhebungskurve und der maximale Hub möglichst groß werden.

b) Berücksichtigung technisch bedingter Grenzwerte
- für maximale Beschleunigung auf Öffnungs- und Schließseite
- für maximale positive und negative Geschwindigkeit auf Öffnungs- und Schließseite
- für maximale negative Beschleunigung

c) Einhaltung von Richtwerten für Hub, Geschwindigkeit und Beschleunigung an den Rampenenden

Um ein einwandfreies Schließen der Ventile zu garantieren, muß ein gewisses Spiel in der Ventilsteuerung vorhanden sein. Beim Anheben des Stößels durch den Nocken wird dieses Spiel aufgehoben und das Ventil ruckartig auf die momentane Stößelgeschwindigkeit gebracht. Zur Dämpfung des dabei auftretenden Stoßes, sowohl beim Öffnen als auch beim Schließen des Ventils, setzt man vor und hinter den Hauptnocken eine Anlauf- bzw. Ablauframpe.

Diese Rampen werden so konstruiert, daß an ihrem Ende Auftreff- oder Schließgeschwindigkeit einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten und der Hub etwas größer als das maximal beim Betrieb auftretende Spiel ist.

d) Stetigkeit der 3. Ableitung

Unstetigkeitsstellen im Ruck können zu größeren elastischen Verformungen in der Ventilsteuerung führen, die wiederum Ursache für stärkere Geräuschentwicklung und für Abweichungen von der Erhebungskurve sind. Ziel ist somit die Konstruktion eines "ruckfreien" Nockens.

Aus Abb.3 geht weiterhin hervor, daß die Fläche unter der positiven Beschleunigungskurve gleich der unter der negativen Beschleunigungskurve ist (Geschwindigkeit in der Nockenspitze = 0). Dies muß bei der Auslegung der Ventilöffnungsfunktion berücksichtigt werden. Zur Darstellung ihres charakteristischen Verlaufs kann man einzelne oder abschnittsweise zusammengesetzte, mathematische Funktionen verwenden. Als Beispiel für die Beschreibung mit zusammengesetzten Funktionen sei das Verfahren von Kurz [6] genannt, das schiefe Sinuslinien von 1/2 und 1/4 Periodenlänge sowie ein Polynom 4. Grades benutzt.

Zusammenfassung

Für die Berechnung der Nockenform wird ein mathematisches Verfahren zur Generierung einer Ventilöffnungsfunktion über Nockenwellendrehwinkeln gesucht.Dabei müssen die Fläche unter der Funktion und der Hub in der Nockenspitze maximiert werden. Die vorgegebenen Sollwerte für Hub, Geschwindigkeit und Beschleunigung an den Rampenenden sowie die Öffnungslänge (Event) sind einzuhalten und die Grenzwerte für maximale positive und negative Geschwindigkeit und Beschleunigung optimal auszunutzen.

1.2 Mathematisches Modell

Für die Entwicklung eines mathematischen Verfahrens zur Berechnung einer Ventilöffnungsfunktion ist es erforderlich, ein dem technischen Problem entsprechendes mathematisches Modell zu entwerfen.

Im Folgenden bedeuten:

OS	: Öffnungsseite
SS	: Schließseite
a	: Drehwinkel am Anfang des Hauptnockens
b	: Drehwinkel am Ende des Hauptnockens
b-a	: Öffnungslänge oder Event mit $a=t_1<t_2<\ldots<t_7=b$
t_2	: Winkel, bei dem die Beschleunigung auf OS maximal ist
t_3	: Winkel, bei dem die Geschwindigkeit auf OS maximal ist
t_4	: Winkel, bei dem der Hub maximal ist (Nockenspitze, 0 Grad)
t_5	: Winkel, bei dem die Geschwindigkeit auf SS minimal ist
t_6	: Winkel, bei dem die Beschleunigung auf SS maximal ist
b_{OS}, b_{SS}	: Beschleunigung am Rampenende auf OS und SS
h_{OS}, h_{SS}	: Hub am Rampenende auf OS und SS
g_{OS}, g_{SS}	: Geschwindigkeit am Rampenende auf OS und SS

a_{OS}, a_{SS} : Grenzwert für maximale Beschleunigung auf OS und SS

v_{OS}, v_{SS} : Grenzwert für maximale positive und negative Geschwindigkeit auf OS und SS

a_V : Grenzwert für maximale Verzögerung

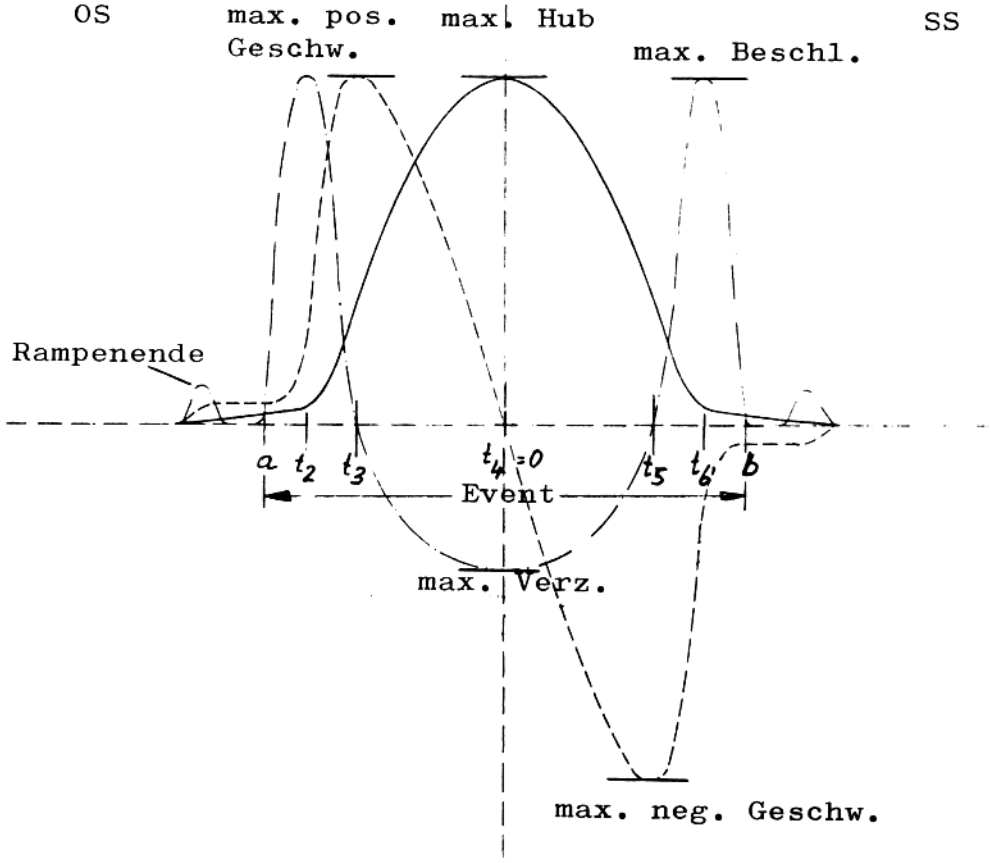


Abb.4 Ventilöffnungsfunktion über Nockenwellendrehwinkeln

Die in Abschnitt (1.1) dargestellte Problemstellung läßt sich mathematisch folgendermaßen fassen:

Gesucht ist eine dreimal stetig differenzierbare Funktion

$$f \in C^3([a,b])$$

über dem Intervall [a,b], die das Funktional F maximiert.

$$F(f) = \lambda_1 \int_a^b f(t)dt + \lambda_2 f(t_4) + \lambda_3 f''(t_4) - \lambda_4 f'(t_3)$$
$$+ \lambda_5 f'(t_5) - \lambda_6 f''(t_2) - \lambda_7 f''(t_6)$$

mit $\lambda_i \in [0,1]$, $i=1,\ldots,7$ und $\sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 1$

Die λ_i dienen der Gewichtung der zu maximierenden Komponenten:

- Fläche unter der Funktion f
- Hub in der Nockenspitze
- Ausnutzung der vorgegebenen Grenzwerte (maximal im Sinne von möglichst weit unterschreiten)

An den Intervallgrenzen muß die Funktion f den folgenden Bedingungen genügen:

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} f''(a) = b_{OS}, & f''(b) = b_{SS} \quad \text{Beschleunigung an den Rampenenden} \\ f'(a) = g_{OS}, & f'(b) = g_{SS} \quad \text{Geschwindigkeit an den Rampenenden} \\ f(a) = h_{OS}, & f(b) = h_{SS} \quad \text{Hübe an den Rampenenden} \end{cases}$$

Weiterhin gilt für deren Extrema:

$$(1.2.2)\quad \begin{cases} f''(t_2) <= a_{OS}\ ,\ f''(t_6) <= a_{SS} & \text{Einschränkungen für max. Beschl.} \\ f'(t_3) <= v_{OS}\ ,\ f'(t_5) >= v_{SS} & \text{Einschränkungen für max. pos. und neg. Geschw.} \\ f''(t_4) >= a_V & \text{Einschränkung für max. Verz.} \end{cases}$$

$$(1.2.3)\quad \begin{cases} f'''(t_2) = 0\ ,\ f'''(t_6) = 0 \\ f''(t_3) = 0\ ,\ f''(t_5) = 0 \\ f'(t_4) = 0\ ,\ f'''(t_4) = 0 \end{cases}$$

Aus dem in Abb.3 dargestellten charakteristischen Verlauf der Kurve ergeben sich die Monotonieforderungen:

$$(1.2.4)\quad \begin{cases} f''(x) \text{ monoton steigend für } x \in [a,t_2] \\ f''(x) \text{ monoton fallend für } x \in [t_2,t_4] \\ f''(x) \text{ monoton steigend für } x \in [t_4,\ t_6] \\ f''(x) \text{ monoton fallend für } x \in [t_6,b] \end{cases}$$

Als Ergebnis der mathematischen Modellbildung erhalten wir somit das folgende Variationsproblem:

$$(1.2.5)\quad \begin{cases} \max\{F(f) \mid f \in T\} \\ T = \{f \in C^3([a,b]) \mid f \text{ erfüllt } (1.2.1),\ldots,(1.2.4)\} \end{cases}$$

2. NUMERISCHES VERFAHREN ZUR LÖSUNG DES PROBLEMS

2.1 Diskretisierung mit Hilfe von Spline - Funktionen

Zur Lösung des Variationsproblems (1.2.5) diskretisieren wir in einem ersten Schritt unser Modell, d.h. wir gehen von dem unendlich dimensionalen Raum $C^3([a,b])$ zu einem endlich dimensionalen Teilraum über.Die Idee zur Lösung des Problems besteht darin, die gesuchte optimale Funktion mit Hilfe von Spline - Polynomen 5.Grades zu approximieren.

Es seien: $x_i \in [a,b]$, $i=1,\ldots,N$

mit $a=x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$

die Stützstellen für die Spline - Polynome

Im Hinblick auf eine unproblematische Umsetzung des Verfahrens in ein Computerprogramm ist folgendes zu beachten:

1. Eine Stützstelle liegt immer bei $x = 0$
2. Auf Öffnungs- und Schließseite wird die gleiche Anzahl von Stützstellen vorgegeben.

   Das bedeutet: a) N ungerade

   b) $x_{\frac{N-1}{2}+1} = 0$ (mittlere Stützstelle)
3. Die Stützstellen sind so zu wählen, daß die Extrema der Funktion sowie die der 1. und 2. Ableitung in einigen der Stützstellen angenommen werden.

$x_{\frac{N-1}{2}+1} = 0 = t_4$ (max. Hub)

$x_{i_{BOS}} = t_2$ (max. Beschl. auf OS)

$x_{i_{BSS}} = t_6$ (max. Beschl. auf SS)

$x_{i_{GOS}} = t_3$ (max. pos. Geschw. auf OS)

$x_{i_{GSS}} = t_5$ (max. neg. Geschw. auf SS)

Um die Einhaltung der Sollwerte an den Rampenenden sowie das Aneinanderfügen der Splines in der Mitte (x = 0) zu erleichtern, werden die Spline - Polynome auf folgende Art und Weise festgelegt:

Öffnungsseite:

$$s(x) = A_i(x-x_i)^5 + B_i(x-x_i)^4 + C(x-x_i)^3 + D_i(x-x_i)^2 + E_i(x-x_i) + F_i$$

für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i <= (N-1)/2$

Schließseite:

$$s(x) = A_i(x-x_{i+1})^5 + B_i(x-x_{i+1})^4 + C_i(x-x_{i+1})^3 + D_i(x-x_{i+1})^2 + E_i(x-x_{i+1}) + F_i$$

für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i >= (N-1)/2+1$

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad \text{für } i=1,\ldots,(N-1)/2$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i+1} \qquad \text{für } i=(N-1)/2+1,\ldots,N-1$$

Hiermit gilt an den Stützstellen:

$$s(x_j) = A_i \Delta x_i^5 + B_i \Delta x_i^4 + C_i \Delta x_i^3 + D_i \Delta x_i^2 + E_i \Delta x_i + F_i$$

$$s'(x_j) = 5A_i \Delta x_i^4 + 4B_i \Delta x_i^3 + 3C_i \Delta x_i^2 + 2D_i \Delta x_i + E_i$$

$$s''(x_j) = 20A_i \Delta x_i^3 + 12B_i \Delta x_i^2 + 6C_i \Delta x_i + 2D_i$$

$$s'''(x_j) = 60A_i \Delta x_i^2 + 24B_i \Delta x_i + 6C_i$$

mit $i = 1,\ldots,N-1$

$$j = \begin{cases} i+1 & \text{falls } i<=(N-1)/2 \\ i & \text{falls } i>=(N-1)/2+1 \end{cases}$$

Das Funktional F, angewandt auf die Spline - Funktion s, ergibt:

$$F(s) = \lambda_1 \int_a^b s(t)dt + \lambda_2 s(x_{\frac{N-1}{2}+1}) + \lambda_3 s''(x_{\frac{N-1}{2}+1}) - \lambda_4 s'(x_{i_{GOS}})$$

$$+\lambda_5 s'(x_{i_{GSS}}) - \lambda_6 s''(x_{i_{BOS}}) - \lambda_7 s''(x_{i_{BSS}})$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^{N-1} [1/6A_i \Delta x_i^6 + 1/5B_i \Delta x_i^5 + 1/4C_i \Delta x_i^4 + 1/3D_i \Delta x_i^3 +$$

$$1/2E_i \Delta x_i^2 + F_i \Delta x_i]$$

$$+\lambda_2 [A_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^5_{\frac{N-1}{2}} + B_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^4_{\frac{N-1}{2}} + C_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^3_{\frac{N-1}{2}} + D_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^2_{\frac{N-1}{2}} +$$

$$E_{\frac{N-1}{2}} \Delta x_{\frac{N-1}{2}} + F_{\frac{N-1}{2}}]$$

$$+\lambda_3 [20A_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^3_{\frac{N-1}{2}} + 12B_{\frac{N-1}{2}} \Delta x^2_{\frac{N-1}{2}} + 6C_{\frac{N-1}{2}} \Delta x_{\frac{N-1}{2}} + 2D_{\frac{N-1}{2}}]$$

$$-\lambda_4 [5A_{i_{GOS}-1} \Delta x^4_{i_{GOS}-1} + 4B_{i_{GOS}-1} \Delta x^3_{i_{GOS}-1} +$$

$$3C_{i_{GOS}-1} \Delta x^2_{i_{GOS}-1} + 2D_{i_{GOS}-1} \Delta x_{i_{GOS}-1} + E_{i_{GOS}-1}]$$

$$+\lambda_5 [5A_{i_{GSS}} \Delta x^4_{i_{GSS}} + 4B_{i_{GSS}} \Delta x^3_{i_{GSS}} + 3C_{i_{GSS}} \Delta x^2_{i_{GSS}} +$$

$$2D_{i_{GSS}} \Delta x_{i_{GSS}} + E_{i_{GSS}}]$$

$$-\lambda_6 [20A_{i_{BOS}-1} \Delta x^3_{i_{BOS}-1} + 12B_{i_{BOS}-1} \Delta x^2_{i_{BOS}-1} +$$

$$6C_{i_{BOS}-1} \Delta x_{i_{BOS}-1} + 2D_{i_{BOS}-1}]$$

$$-\lambda_7 [20A_{i_{BSS}} \Delta x^3_{i_{BSS}} + 12B_{i_{BSS}} \Delta x^2_{i_{BSS}} + 6C_{i_{BSS}} \Delta x_{i_{BSS}} +$$

$$2D_{i_{BSS}}]$$

Zur Vereinfachung des Verfahrens wird für die weiteren Betrachtungen angenommen, daß die 2. und 3. Ableitung an den Rändern gleich null ist. Auf die Anwendung in der Industrie wirkt sich diese Einschränkung kaum aus, weil dort fast ausschließlich mit linearen Rampen gearbeitet wird.

Die Anforderungen (1.2.1), (1.2.2) und (1.2.3) führen dann zu den Bedingungen:

$$(2.1.1)\quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_{N-1} = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_{N-1} = 0 \\ E_1 = g \\ E_{N-1} = g \\ F_1 = h \\ F_{N-1} = h \end{cases}$$

$$(2.1.2)\quad \begin{cases} 20A_{i_{BOS}-1}\Delta x^3_{i_{BOS}-1} + 12B_{i_{BOS}-1}\Delta x^2_{i_{BOS}-1} + 6C_{i_{BOS}-1}\Delta x_{i_{BOS}-1} \\ + 2D_{i_{BOS}-1} <= a_{OS} \\ 20A_{i_{BSS}}\Delta x^3_{i_{BSS}} + 12B_{i_{BSS}}\Delta x^2_{i_{BSS}} + 6C_{i_{BSS}}\Delta x_{i_{BSS}} \\ + 2D_{i_{BSS}} <= a_{SS} \\ 5A_{i_{GOS}-1}\Delta x^4_{i_{GOS}-1} + 4B_{i_{GOS}-1}\Delta x^3_{i_{GOS}-1} + 3C_{i_{GOS}-1}\Delta x^2_{i_{GOS}-1} \\ + 2D_{i_{GOS}-1}\Delta x_{i_{GOS}-1} + E_{i_{GOS}-1} <= v_{OS} \\ 5A_{i_{GSS}}\Delta x^4_{i_{GSS}} + 4B_{i_{GSS}}\Delta x^3_{i_{GSS}} + 3C_{i_{GSS}}\Delta x^2_{i_{GSS}} \\ + 2D_{i_{GSS}}\Delta x_{i_{GSS}} + E_{i_{GSS}} >= v_{SS} \\ 20A_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^3_{\frac{N-1}{2}} + 12B_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^2_{\frac{N-1}{2}} + 6C_{\frac{N-1}{2}}\Delta x_{\frac{N-1}{2}} + 2D_{\frac{N-1}{2}} >= a_V \end{cases}$$

$$
(2.1.3)\quad \begin{cases}
60A_{i_{BOS}-1}\Delta x^2_{i_{BOS}-1} + 24B_{i_{BOS}-1}\Delta x_{i_{BOS}-1} + 6C_{i_{BOS}-1} = 0 \\
60A_{i_{BSS}}\Delta x^2_{i_{BSS}} + 24B_{i_{BSS}}\Delta x_{i_{BSS}} + 6C_{i_{BSS}} = 0 \\
20A_{i_{GOS}-1}\Delta x^3_{i_{GOS}-1} + 12B_{i_{GOS}-1}\Delta x^2_{i_{GOS}-1} + 6C_{i_{GOS}-1}\Delta x_{i_{GOS}-1} \\
+ 2D_{i_{GOS}-1} = 0 \\
20A_{i_{GSS}}\Delta x^3_{i_{GSS}} + 12B_{i_{GSS}}\Delta x^2_{i_{GSS}} + 6C_{i_{GSS}}\Delta x_{i_{GSS}} \\
+2D_{i_{GSS}} = 0 \\
60A_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^2_{\frac{N-1}{2}} + 24B_{\frac{N-1}{2}}\Delta x_{\frac{N-1}{2}} + 6C_{\frac{N-1}{2}} = 0 \\
60A_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x^2_{\frac{N-1}{2}+1} + 24B_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x_{\frac{N-1}{2}+1} + 6C_{\frac{N-1}{2}+1} = 0 \\
5A_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^4_{\frac{N-1}{2}} + 4B_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^3_{\frac{N-1}{2}} + 3C_{\frac{N-1}{2}}\Delta x^2_{\frac{N-1}{2}} + 2D_{\frac{N-1}{2}}\Delta x_{\frac{N-1}{2}} + E_{\frac{N-1}{2}} = 0 \\
5A_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x^4_{\frac{N-1}{2}+1} + 4B_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x^3_{\frac{N-1}{2}+1} + 3C_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x^2_{\frac{N-1}{2}+1} \\
+ 2D_{\frac{N-1}{2}+1}\Delta x_{\frac{N-1}{2}+1} + E_{\frac{N-1}{2}+1} = 0
\end{cases}
$$

Die Einhaltung der Monotonieforderungen (1.2.4) wird durch die Vorgabe des Krümmungsverhaltens der Beschleunigungskurve (4.Ableitung) auf den einzelnen Teilintervallen erreicht. Wegen der Linearität der 4.Ableitung genügen bereits Einschränkungen an den Endpunkten, um den Verlauf auf dem gesamten Intervall festzulegen. In der Praxis hat sich nämlich gezeigt, daß die Beschleunigungskurve einer optimalen Hubkurve ein charakteristisches Krümmungsverhalten besitzt.

Aus diesem Grund haben die über die Forderungen (1.2.4) hinausgehenden Bedingungen an das Krümmungsverhalten keinen Einfluß auf die Berechnung der optimalen Lösung.

Daraus ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$
(2.1.4)\quad \begin{cases}
120A_1\Delta x_1 + 24B_1 & <= 0 \\
\quad . & \\
\quad . & \\
\quad . & \\
120A_{i_{GOS}-1}\Delta x_{i_{GOS}-1} + 24B_{i_{GOS}-1} & <= 0 \\
120A_{i_{GOS}}\Delta x_{i_{GOS}} + 24B_{i_{GOS}} & >= 0 \\
\quad . & \\
\quad . & \\
\quad . & \\
120A_{i_{GSS}-1}\Delta x_{i_{GSS}-1} + 24B_{i_{GSS}-1} & >= 0 \\
120A_{i_{GSS}}\Delta x_{i_{GSS}} + 24B_{i_{GSS}} & <= 0 \\
\quad . & \\
\quad . & \\
\quad . & \\
120A_{N-1}\Delta x_{N-1} + 24B_{N-1} & <= 0 \\
B_2,\ldots,B_{i_{GOS}-1},B_{i_{GSS}},\ldots,B_{N-2} & <= 0 \\
B_1,B_{i_{GOS}},\ldots,B_{i_{GSS}-1},B_{N-1} & >= 0
\end{cases}
$$

Um die geforderte dreimal stetige Differenzierbarkeit in den Stützstellen zu erreichen, muß darüberhinaus gelten:

$$
(2.1.5)\quad \begin{cases}
A_i \Delta x_i^5 + B_i \Delta x_i^4 + C_i \Delta x_i^3 + D_i \Delta x_i^2 + E_i \Delta x_i + F_i = F_{i+1} \\
5A_i \Delta x_i^4 + 4B_i \Delta x_i^3 + 3C_i \Delta x_i^2 + 2D_i \Delta x_i + E_i = E_{i+1} \\
20A_i \Delta x_i^3 + 12B_i \Delta x_i^2 + 6C_i \Delta x_i + 2D_i = 2D_{i+1} \\
60A_i \Delta x_i^2 + 24B_i \Delta x_i + 6C_i = 6C_{i+1} \\
\text{für } i = 1,\ldots,(N-1)/2-1
\end{cases}
$$

$$
(2.1.6)\quad \begin{cases}
A_{i+1} \Delta x_{i+1}^5 + B_{i+1} \Delta x_{i+1}^4 + C_{i+1} \Delta x_{i+1}^3 + D_{i+1} \Delta x_{i+1}^2 + \\
E_{i+1} \Delta x_{i+1} + F_{i+1} = F_i \\
5A_{i+1} \Delta x_{i+1}^4 + 4B_{i+1} \Delta x_{i+1}^3 + 3C_{i+1} \Delta x_{i+1}^2 + 2D_{i+1} \Delta x_{i+1} + \\
E_{i+1} = E_i \\
20A_{i+1} \Delta x_{i+1}^3 + 12B_{i+1} \Delta x_{i+1}^2 + 6C_{i+1} \Delta x_{i+1} + 2D_{i+1} = 2D_i \\
60A_{i+1} \Delta x_{i+1}^2 + 24B_{i+1} \Delta x_{i+1} + 6C_{i+1} = 6C_i \\
\text{für } i = (N-1)/2+2,\ldots,N-1
\end{cases}
$$

$$(2.1.7)\begin{cases} A_J \Delta x_J^5 + B_J \Delta x_J^4 + C_J \Delta x_J^3 + D_J \Delta x_J^2 + E_J \Delta x_J + F_J - A_{J+1} \Delta x_{J+1}^5 - \\ B_{J+1} \Delta x_{J+1}^4 - C_{J+1} \Delta x_{J+1}^3 - D_{J+1} \Delta x_{J+1}^2 - E_{J+1} \Delta x_{J+1} - F_{J+1} = 0 \\ 20A_J \Delta x_J^3 + 12B_J \Delta x_J^2 + 6C_J \Delta x_J + 2D_J - 20A_{J+1} \Delta x_{J+1}^3 - \\ 12B_{J+1} \Delta x_{J+1}^2 - 6C_{J+1} \Delta x_{J+1} - 2D_{J+1} = 0 \\ \text{für } J = (N-1)/2 \end{cases}$$

In (2.1.7) können die entsprechenden Gleichungen für die 1. und 2.Ableitung entfallen, da hier feste Werte vorgegeben werden (siehe (2.1.3)).

2.2 Optimierung über den Spline - Koeffizienten

Die Diskretisierung des Modells (vgl. Abschn. 2.1) führt zu einem linearen Programm (LP) bzgl. der Koeffizienten der Spline - Polynome, dessen optimale Lösung mit Methoden der linearen Optimierungstheorie ermittelt werden kann. Zunächst wird der Umfang des LP's reduziert und zwar sowohl die Anzahl der Spline - Koeffizienten (Variablen) als auch die der Nebenbedingungen.

Aus den Stetigkeitsbedingungen (2.1.5) und (2.1.6) lassen sich die unter (2.2.1) aufgeführten Rekursionsformeln herleiten, die es erlauben, die Koeffizienten C_i, D_i, E_i und F_i $(i=2,\ldots,N-2)$ durch A_i und B_i $(i=1,\ldots,N-1)$ auszudrücken (zu beachten: C_1, C_{N-1}, D_1, D_{N-1}, E_1, E_{N-1}, F_1 und F_{N-1} durch (2.1.1) gegeben). Damit ist die Anzahl der freien Variablen im LP von 6N-14 auf 2N-2 reduziert worden.

$$
(2.2.1)\left\{
\begin{aligned}
6C_k &= \sum_{1}^{k-1} (60A_i\Delta x_i^2 + 24B_i\Delta x_i) \\
6C_{N-k} &= \sum_{1}^{k-1} (60A_{N-i}\Delta x_{N-i}^2 + 24B_{N-i}\Delta x_{N-i}) \\
2D_k &= \sum_{1}^{k-1} (20A_i\Delta x_i^3 + 12B_i\Delta x_i^2 + 6C_i\Delta x_i) \\
2D_{N-k} &= \sum_{1}^{k-1} (20A_{N-i}\Delta x_{N-i}^3 + 12B_{N-i}\Delta x_{N-i}^2 + 6C_{N-i}\Delta x_{N-1}) \\
E_k &= \sum_{1}^{k-1} (5A_i\Delta x_i^4 + 4B_i\Delta x_i^3 + 3C_i\Delta x_i^2 + 2D_i\Delta x_i) + E_i \\
E_{N-k} &= \sum_{1}^{k-1} (5A_{N-i}\Delta x_{N-i}^4 + 4B_{N-i}\Delta x_{N-i}^3 + 3C_{N-i}\Delta x_{N-1}^2 + \\
&\qquad 2D_{N-i}\Delta x_{N-i}) + E_{N-i} \\
F_k &= \sum_{1}^{k-1} (A_i\Delta x_i^5 + B_i\Delta x_i^4 + C_i\Delta x_i^3 + D_i\Delta x_i^2 + E_i\Delta x_i) + F_i \\
F_{N-k} &= \sum_{1}^{k-1} (A_{N-i}\Delta x_{N-i}^5 + B_{N-i}\Delta x_{N-i}^4 + C_{N-i}\Delta x_{N-i}^3 + \\
&\qquad D_{N-i}\Delta x_{N-i}^2 + E_{N-i}\Delta x_{N-i}) + F_{N-1} \\
&\text{für } k = 2,\ldots,(N-1)/2
\end{aligned}
\right.
$$

Als nächstes werden die Ungleichungen, die das Krümmungsverhalten der 2.Ableitung beschreiben (2.1.4) durch Addition resp. Subtraktion von Schlupfvariablen z_i in Gleichungen übergeführt.

$$(2.2.2)\quad \begin{cases} 120A_i\Delta x_i + 24B_i + z_i = 0 \\ \qquad z_i = 0 \quad ; \; i=2,\ldots,i_{GOS}-1,i_{GSS},\ldots,N-2 \\ 120A_i\Delta x_i + 24B_i - z_i = 0 \\ \qquad z_i = 0 \quad ; \; i=i_{GOS},\ldots,i_{GSS}-1 \end{cases}$$

Nach A aufgelöst ergibt sich

$$(2.2.3)\quad \begin{cases} A_i = \dfrac{(-z_i - 24B_i)}{120\Delta x_i} & ; \; i=2,\ldots,i_{GOS}-1,i_{GSS},\ldots,N-2 \\ A_i = \dfrac{(z_i - 24B_i)}{120\Delta x_i} & ; \; i=i_{GOS},\ldots,i_{GSS}-1 \end{cases}$$

Ein Ersetzen der A_i durch die gewonnenen Ausdrücke (2.2.3) bringt den Vorteil, daß das LP nun nur noch beschränkte Variablen, B_i und z_i, besitzt. Mit den A_i hätte es auch unbeschränkte Variablen enthalten. Die Anzahl der Variablen ändert sich durch die Substitution nicht. Die Nebenbedingungen für das Krümmungsverhalten der 2.Ableitung können weggelassen werden, da diese Ungleichungen nun implizit in den anderen Restriktionen des LP's enthalten sind.

Insgesamt bleibt ein LP zu bearbeiten mit 2N-2 Variablen (B_i und z_i ; i=1,...,N-1) und 15 Nebenbedingungen, das in Standardform vorliegt. Bemerkenswert hierbei ist die Tatsache, daß trotz Veränderung der Variablenzahl die Anzahl der Restriktionen konstant bleibt. Für die Optimierung wird ein revidiertes Simplex - Verfahren benutzt, das in 2 Phasen arbeitet. In der 1.Phase wird eine zulässige Startlösung gesucht, von der ausgehend in Phase 2 die optimale Lösung ermittelt wird.

3. THEORETISCHE ERÖRTERUNG DES LÖSUNGSALGORITHMUS

3.1 Einbettung in den Sobolev - Raum

Im Hinblick auf den Beweis der Existenz einer optimalen Lösung und der Konvergenz des numerischen Verfahrens wird das Variationsproblem (1.2.5) in einen Hilbertraum eingebettet.

Hierzu betrachten wir:

den Funktionenraum

(3.1.1) $$W_2^3([a,b]) = \{f \in AC^2([a,b]) \mid f''' \in \mathcal{L}^2([a,b])\}$$

mit

$AC^2([a,b])$ = Menge aller Funktionen über $[a,b]$ mit f, f', f'' absolutstetig (vgl. [2], Seite 45 u. 72)

das Skalarprodukt

(3.1.2) $$(f,g) = \sum_{i=0}^{3} \int_a^b f^{(i)}(x) g^{(i)}(x)\,dx$$

sowie die daraus resultierende Norm

(3.1.3) $$\|f\| = (f,f)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{3} \int_a^b (f^{(i)}(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

Der Raum $W_2^3([a,b])$ ist ein separabler Hilbertraum, in dem der Raum $C^3([a,b])$ und die Spline - Funktionen 5.Grades dicht liegen.

Für die theoretischen Betrachtungen müssen wir die Menge T der zulässigen Funktionen um die Bedingung

(3.1.4) $\|f'''\|_\infty <= M \; ; \; M > 0$

erweitern. Damit erhalten wir:

$$T = \{f \in C^3([a,b]) \mid f \text{ erfüllt } (1.2.1) - (1.2.4) \text{ und } (3.1.4)\}$$

Die zusätzliche Einschränkung ist erforderlich, da die Menge T sonst nicht beschränkt ist und das Maximum von F auf dem Rand liegen könnte, was gleichbedeutend ist mit:

$$\exists (f_n) \subseteq T : \|f_n\| \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{aber} \quad F(f_n) <= c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Forderung (3.1.4) ist auch aus technischen Gründen sinnvoll, da sie verhindert, daß die Beschleunigungskurve beliebig steil ansteigen kann. Im numerischen Verfahren sorgen die Konstruktion der Spline - Polynome sowie der Abstand der Stützstellen, der ein Mindestmaß nicht unterschreitet, dafür, daß die Steigung der 2. Ableitung nicht beliebig groß werden kann.

Das Variationsproblem (1.2.5) geht über in:

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} \max\limits_{f \in T} F(f) \\ \\ T \text{ Abschluß von } T \text{ in } W_2^3([a,b]) \end{cases}$$

Es ist zu beachten, daß die Menge T bzgl. der Supremumsnorm in $C^3([a,b])$ abgeschlossen ist, jedoch nicht in $W_2^3([a,b])$ bzgl. der durch das Skalarprodukt (3.1.2) induzierten Norm. Da für den Existenzbeweis einer optimalen Lösung die Abgeschlossenheit erforderlich ist, muß der Abschluß T betrachtet werden.

Mit der Einbettung des Problems in einen Hilbertraum sind nun die Voraussetzungen geschaffen, um die Existenz einer optimalen Lösung und die Konvergenz des Verfahrens zu zeigen.

3.2 Existenz einer Lösung

Die Existenz einer Lösung wird mit Hilfe des folgenden, aus der Optimierungstheorie allgemein bekannten Satzes nachgegewiesen.

Satz 1

"Sei X eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraumes und sei $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges konvexes Funktional. Dann nimmt f sein Infimum auf X an." ([5], Seite 87)

Um diesen Satz anwenden zu können, werden wir zeigen, daß F ein lineares, stetiges Funktional und der Abschluß T von T im Raum $W_2^3([a,b])$ beschränkt und konvex ist.
Hierzu werden die folgenden Lemmata benötigt, deren Beweise in ([2],Seite 73ff) zu finden sind.

Lemma 1:

Es existiert eine reelle Zahl c > 0 mit:

$$(3.2.1) \quad \|f^{(i)}\|_\infty^2 <= c(\|f^{(i)}\|_2^2 + \|f^{(i+1)}\|_2^2) \quad \text{für} \quad i=0,1,2$$

$$\text{mit} \quad \|f^{(i)}\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|$$

$$\|f^{(i)}\|_2 = \left(\int_a^b (f^{(i)}(t))^2 dt\right)^{1/2} \quad \text{für } f \in W_2^3([a,b])$$

Lemma 2:

Es existiert eine reelle Zahl $c > 0$ mit:

$$(3.2.2) \qquad \int_a^b (f^{(i)}(t))^2 dt \;<=\; c\Big(\sum_{j=i}^{m-1} f^{(j)}(a)^2 + \int_a^b f^{(m)}(t)^2 dt\Big)$$

mit $m = 3$, $i=0,1,2$ und $f \in W_2^3([a,b])$

Beh. 1: F ist linear und stetig.

Bew.:

$$F(f) = \lambda_1 \int_a^b f(t)dt + \lambda_2 f(t_4) - \lambda_3 f''(t_4) + \lambda_4 f'(t_3)$$
$$- \lambda_5 f'(t_5) + \lambda_6 f''(t_2) + \lambda_7 f''(t_6)$$

Die Linearität von F folgt unmittelbar aus der Linearität von Integration und Differentiation.

$$|F(f)| <= |\lambda_1| \int_a^b |f(t)|dt + |\lambda_2||f(t_4)| + |\lambda_3||f''(t_4)|$$
$$+ |\lambda_4||f'(t_3)| + |\lambda_5||f'(t_5)| + |\lambda_6||f''(t_2)|$$
$$+ |\lambda_7||f''(t_6)|$$
$$<= |\lambda_1||b-a|\,\|f\|_\infty + |\lambda_2|\|f\|_\infty + |\lambda_3|\|f''\|_\infty$$
$$+ |\lambda_4|\|f'\|_\infty + |\lambda_5|\|f'\|_\infty + |\lambda_6|\|f''\|_\infty$$
$$+ |\lambda_7|\|f''\|_\infty$$
$$<= a_1\|f\|_\infty + a_2\|f'\|_\infty + a_3\|f''\|_\infty \qquad , a_1, a_2, a_3 > 0$$
$$<= c_1\Big(\int_a^b f(x)^2 dx + \int_a^b f'(x)^2 dx\Big)^{1/2} + c_2\Big(\int_a^b f'(x)^2 dx$$
$$+ \int_a^b f''(x)^2 dx\Big)^{1/2} + c_3\Big(\int_a^b f''(x)^2 dx + \int_a^b f'''(x)^2 dx\Big)^{1/2}$$
$$<= c\,\|f\|$$

Damit ist die Stetigkeit von F gezeigt und Beh.1 bewiesen.

Beh.2: $\overline{T}$ ist in $W_2^3([a,b])$ beschränkt und konvex.

Bew.:

Für den Beweis betrachten wir die Erweiterung T' der Menge T auf Funktionen aus $W_2^3([a,b])$, für die anstatt (1.2.3) und (3.1.4) die Bedingung (3.2.3) und (3.2.4) gelten müssen.

$$T' = \{f \in W_2^3([a,b]) \text{ mit } f \text{ erfüllt } (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4), (3.2.3) \text{ und } (3.2.4)\}$$

mit

$$(3.2.3) \quad \begin{cases} f''(t_2) = 0 \\ f''(t_3) = 0 \\ f'(t_4) = 0 \end{cases}$$

$$(3.2.4) \quad \int_a^b f'''(x)^2 dx \leq M^2(b-a)$$

Von den Extremumsbedingungen (1.2.3) bleiben nur die Bedingungen (3.2.3) erhalten, da in $W_2^3([a,b])$ die 3.Ableitung nicht überall existiert und die Extrema sich aus den Monotonieforderungen für die 2.Ableitung bereits ergeben.
Wir zeigen, daß T' in $W_2^3([a,b])$ abgeschlossen, beschränkt und konvex ist. Dann folgt sofort wegen $T \subset T'$ und damit auch $\overline{T} \subset T'$ die Beschränktheit von T. Die Konvexität von T läßt sich analog zur Konvexität von T' beweisen.

a) Beschränktheit:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{3} \int_a^b f^{(i)}(t)^2\,dt$$

$$<= 4c\left(\sum_{j=0}^{2} f^{(j)}(a)^2 + \int_a^b f'''(t)^2\,dt\right)$$

$$<= 4c \sum_{j=0}^{2} f^{(j)}(a)^2 + 4cM^2(b-a)$$

$$< \infty$$

b) Konvexität:

Die Konvexität der Bedingungen (1.2.1) bis (1.2.4), (3.2.3) und (3.2.4) ist offensichtlich.

c) Abgeschlossenheit:

Sei $g \in W_2^3([a,b])$ Häufungspunkt von T', d.h.:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ f \in T' : \quad \|f-g\|^2 <= \varepsilon^2$$

Dann gilt wegen Lemma 1 für die Supremumsnorm:

$$\|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty^2 <= \varepsilon^2 \qquad i = 0,1,2$$

Hieraus ist sofort ersichtlich, daß g die Bedingungen (1.2.1), (1.2.2), (3.2.3) und (3.2.4) erfüllt.
Es bleibt die Abgeschlossenheit bzgl. der Monotonieforderungen (1.2.4) zu zeigen.

O.E. sei $f \in T'$ monoton steigend in $[\alpha,\beta]$, d.h.:

$$\forall\ x_1, x_2 \in [\alpha,\beta] \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ gilt } f''(x_1) - f''(x_2) <= 0$$

Annahme: $\exists\ x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ mit $x_1 < x_2$ und $g''(x_1)-g''(x_2) > 0$,
dann existiert $\delta_1 > 0$, so daß $g''(x_1) = g''(x_2)+\delta_1$
Nach Voraussetzung gibt es $\delta_2 >= 0$ mit $f''(x_1) = f''(x_2)-\delta_2$
Es folgt:

$$\begin{aligned} |f''(x_1)-g''(x_1)| &= |g''(x_2)+\delta_1-f''(x_2)+\delta_2| \\ &= |g''(x_2)-f''(x_2)+\delta| \quad \text{mit } \delta = \delta_1+\delta_2 > 0 \\ &>= \big||g''(x_2)-f''(x_2)|-\delta\big| \end{aligned}$$

Wählen wir $\varepsilon = \delta/4$, dann gilt:

$$\big||g''(x_2)-f''(x_2)|-\delta\big| >= 3/4\,\delta > \varepsilon$$

Dies ist jedoch im Widerspruch zu $\|f'' - g''\|_\infty <= \varepsilon$, also ist g'' monoton steigend. Damit ist Beh.2 bewiesen.

Setzen wir nun in Satz 1

$$f = -F \quad \text{und} \quad X = \overline{T}$$

so folgt, da $W_2^3([a,b])$ als Hilbertraum reflexiv und vollständig ist, daß F sein Maximum auf $\overline{T}$ annimmt.

Also:

$$\exists\ f_o \in \overline{T} \text{ mit } F(f_o) = \max_{f \in \overline{T}} F(f)$$

3.3 Konvergenz des Verfahrens

Das numerische Verfahren in Abschnitt(2.1) und (2.2) besteht darin, dem Ausgangsproblem (1.2.5) im unendlich dimensionalen separablen Hilbertraum $W_2^3([a,b])$ entsprechende Probleme in endlich dimensionalen Teilräumen zu konstruieren und diese endlich dimensionale Probleme dann zu lösen. Interessant ist nun die Frage, ob die Folge der Lösungen, die durch Erhöhen der Dimension erzeugt wird, eine Maximalfolge ist (vgl. hierzu Ritz'sches Approximationsverfahren in [1], S.31ff).

Definition:

Sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes X und sei $F: M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ein Funktional auf M.
Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ mit: $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = \sup\limits_{x \in M} \{F(x)\}$ heißt Maximalfolge. (siehe [1],S.31)

Bezeichnung:

Sei $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$P_r(I)$ = Menge der Polynome r-ten Grades auf dem Intervall I

$$H_n^r([a,b]) = \{s \mid \exists\, s_1, \ldots, s_n \in P_r \text{ mit } s(x) = s_i(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ und } s_{i-1}^{(j)}(x_i) = s_i^{(j)}(x_i) \text{ für } i=0,\ldots,n;\ j=0,\ldots,r-2\}$$

heißt der Raum der (r-2) mal stetig differenzierbaren Spline - Polynome r-ten Grades über n Stützstellen. (vgl. [8], S.108)

Sei $f \in W_2^3([a,b])$, $\Delta : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ und $\bar{\Delta} = \max_i\{|x_{i+1} - x_i|\}$.

Dann gilt für genügend kleines $\bar{\Delta}$:

Es existiert $s_f \in H_n^5([a,b])$ mit:

$$\|D^j(f-s_f)\|_\infty \leq C_j(\bar{\Delta})^{3-j-1/2}\|f\| \ , \ j=0,1,2$$

wobei die Konstante C von f unabhängig ist.(siehe hierzu den wesentlich allgemeineren Satz in [6] , S.210).

Es ist nun zu zeigen, daß sich jede Funktion $f \in \bar{T}$ beliebig genau durch Spline - Polynome 5. Grades, die in T liegen, bzgl. der Supremumsnorm approximieren läßt.

D.h.:

$$(3.3.1) \quad \forall f \in \bar{T} \ \exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^5 \cap T \ \text{ mit } \lim_{n\to\infty} s_n = f$$

Nach Satz 1 existiert zu jedem n ein $s_{n,max}$ mit

$$(3.3.2) \qquad F(s_{n,max}) = \max_{s_n \in T_n} F(s_n) \ ,$$

da H_n^5 als endlich dimensionaler Raum vollständig und reflexiv und $T_n = H_n^5 \cap T$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Infolge der Stetigkeit von F gilt für:

$$(3.3.3) \qquad \begin{array}{l} F(f_o) = \max_{f\in\bar{T}} F(f) \text{ und } \lim_{n\to\infty} s_n = f_o \\ F(s_n) \leq F(s_{n,max}) \leq F(f_o) \end{array}$$

Hieraus ergibt sich: $\lim_{n\to\infty} F(s_{n,max}) = F(f_o)$

$(s_{n,max})_{n=1}^{\infty}$ ist in der Tat eine Maximalfolge. Dies besagt jedoch nicht, daß $s_{n,max}$ gegen f_o konvergiert, sondern lediglich, daß die so konstruierte Folge eine gute Näherung für den maximalen Wert des Funktionals F liefert.

Zum Nachweis, daß:

$$(3.3.4) \qquad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^5 \cap T} = \overline{T}$$

benötigen wir den folgenden Satz, der besagt, daß sich jede monotone Funktion $g \in W_2^1([a,b])$ mit $\|g'\|_\infty <= M$ durch eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_n^3$ mit $\|t_n'\|_\infty <= M$ beliebig genau annähern läßt.

Satz 2:

Sei $g \in C^1([\alpha,\beta])$ mit g monoton auf $[\alpha,\beta]$ und $\|g'\|_\infty <= M$, so gilt:

$$(3.3.5) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit: } \|g-t_n\|_\infty <= \varepsilon$$

wobei $t_n \in H_n^5$ monoton auf $[\alpha,\beta]$ und $\|t_n'\|_\infty <= M$ ist.

Beweis:

O.B.d.A. kann das Intervall [0,1] zugrunde gelegt werden. Nach einer Arbeit von Ronald DeVore [3] ist bekannt, daß sich jede Funktion $g \in C^1([0,1])$, die monoton auf [0,1] ist, durch ebenfalls monotone Splines $t_n \in H_n^5$ approximieren läßt. Jedoch gilt für diese Spline - Polynome i.a. nicht, daß mit $\|g'\|_\infty <= M$ auch $\|t_n'\|_\infty <= M$ ist.

Für die Konstruktion derartiger Splines sei:

$$s = j*h \quad , \; 0<=j<=n \text{ mit } h = 1/n$$

$$s = 0 \quad , \; j<0$$

$$s = 1 \quad , \; j>n$$

$$M(x,t) = r(t-x)_+ = \begin{cases} r(t-x) & , \; x >= t \\ 0 & , \; x < t \end{cases}$$

(3.3.6) $N_{i,n,r}(x) = M(x; s_i, \dots s_{i+r})$

$= r[s_i, \dots, s_{i+r}] (. - x)_+^{r-1}$

für $-r+1 <= i <= n-1$

seien die B - Splines der Ordnung r (vgl. [9],S.109ff) $M(x;s_i, \dots, s_{i+r})$ ist die Darstellung mit Hilfe dividierter Differenzen.

Die B - Splines besitzen die folgenden Eigenschaften:

$N_{i,n,r}(x) = 0$ für $x \notin [x_i, x_{i+r}]$

(3.3.7) $$\int_{-\infty}^{\infty} N_{i,n,r}(x)dx = 1$$

(siehe [4] S.893)

o.E. sei g monoton steigend.

Wir setzen $l = [n/3]$ und definieren

$b_k := g(x_k) - g(x_{k-1})$; $k=1,\dots,l+1$

mit $x_k = x_{k-1} + 3n^{-1}$

Es gilt:

(3.3.8) $b_{k+1} <= 3Mn^{-1}$, da $\|g''\|_\infty <= M$

Um Splines bestimmen zu können, deren Ableitung überall kleiner gleich M ist, unterscheiden wir drei Typen von Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$.

Definition:

Das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ heiße

vom Typ 1, falls $0 <= b_{k+1} <= 4/3Mn^{-1}$

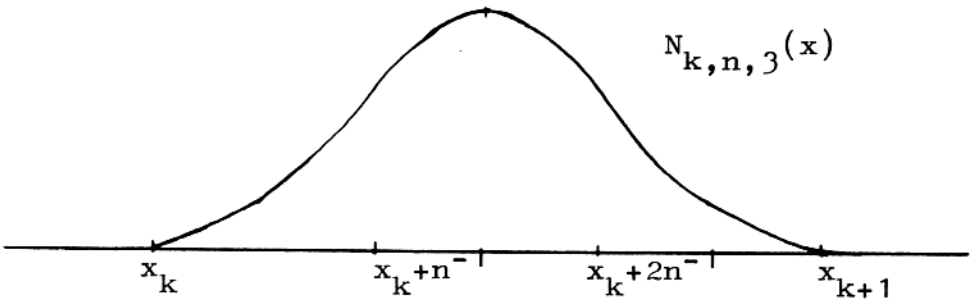
vom Typ 2, falls $4/3Mn^{-1} < b_{k+1} <= 5/3Mn^{-1}$

vom Typ 3, falls $5/4Mn^{-1} < b_{k+1} <= 3Mn^{-1}$ ist.

Auf diesen Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$ definieren wir die folgenden Polynome:

1. $[x_k, x_{k+1}]$ vom Typ 1

(3.3.9) $$t_{I_k,n}(x) := \int_{x_k}^{x} b_{k+1} N_{k,n,3}(t)\, dt + g(x_k)$$



Aus (3.3.7) folgt:

$$t_{I_k,n}(x_k) = g(x_k) \text{ und } t_{I_k,n}(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$$

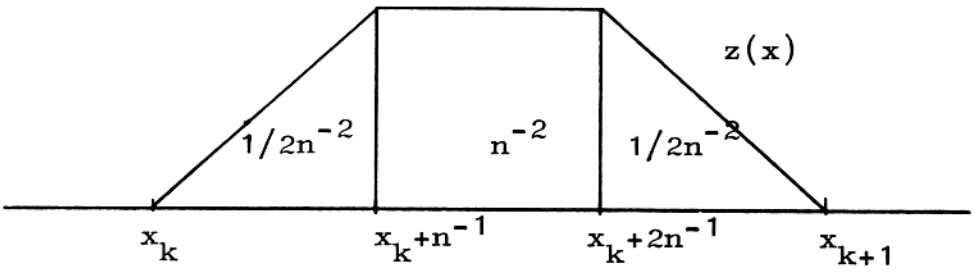
sowie $t'_{I_k,n}(x_k) = t'_{I_k,n}(x_{k+1}) = 0$

Wegen $N_{k,n,3}(x) <= 3/4n$ und $b_{k+1} <= 4/3Mn^{-1}$ gilt:

$$t'_{I_k,n}(x) <= 3/4nb_{k+1} <= 3/4n\ 4/3Mn^{-1} = M$$

2. $[x_k, x_{k+1}]$ vom Typ 2

Es sei $z(x) := (x-x_k)_+ - 2(x-x_k+n^{-1})_+ + (x-x_k+2n^{-1})_+ +$
$(x_k+n^{-1}-x)_+ - 2(x_k+2n^{-1}-x)_+ + (x_k+3n^{-1}-x)_+$



und $$t^*(x) = \int_{x_k}^{x} 1/2Mn\ z(t)\, dt + g(x_k)$$

Dann gilt:

$$t^*(x_k) = g(x_k)$$

$$t^*(x_{k+1}) = g(x_k) + 1/4Mn^{-1} + 1/2Mn^{-1} + 1/4Mn^{-1} = g(x_k) + Mn^{-1}$$

Für die Differenz an der Stelle x_{k+1} erhalten wir die Abschätzung:

$$1/3Mn^{-1} <= g(x_{k+1}) - t^*(x_{k+1}) <= 2/3Mn^{-1}$$

Zur Korrektur dieses Fehlers addieren wir

$$\int_{x_k}^{x} (g(x_{k+1}) - t^*(x_{k+1})) * N_{k,n,3}(t)\, dt$$

Das Spline - Polynom

$$(3.3.10)\quad t_{I_k,n}(x) = t^*(x) + \int_{x_k}^{x} (g(x_{k+1}) - t^*(x_{k+1})) * N_{k,n,3}(t)\, dt$$

besitzt nun die Eigenschaften:

$$t_{I_k,n}(x_k) = g(x_k)$$

$$t_{I_k,n}(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$$

und

$$t'_{I_k,n}(x) = t^{*\prime}(x) + (g(x_{k+1}) - t^*(x_{k+1})) * N_{k,n,3}(x)$$

$$<= 1/2M + 2/3Mn^{-1} * 3/4n <= M$$

3. $[x_k, x_{k+1}]$ vom Typ 3

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$t^*(x) := \int_{x_k}^{x} M\, dt + g(x_k)$$

und bestimmen wiederum den Fehler an der Stelle x_{k+1}

$$4/3Mn^{-1} >= t^*(x_{k+1}) - g(x_{k+1}) >= 0$$

Durch Subtraktion von $\int_{x_k}^{x} (t^*(x_{k+1})-g(x_{k+1}))*N_{k,n,3}(t)\,dt$

erhalten wir den Spline

$$(3.3.11)\quad t_{I_k,n}(x) = t^*(x) - \int_{x_k}^{x} (t^*(x_{k+1})-g(x_{k+1}))*N_{k,n,3}(t)\,dt$$

für den gilt:

$$t_{I_k,n}(x_k) = g(x_k)$$

$$t_{I_k,n}(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$$

sowie $\quad t'_{I_k,n}(x) = t^{*\prime}(x) - (t^*(x_{k+1})-g(x_{k+1}))*N_{k,n,3}(x)$

und damit die Abschätzung

$$M - 4/3Mn^{-1}*3/4Mn <= t'_{I_k,n}(x) <= M$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 0 <= t'_{I_k,n}(x) <= M$$

Da auf den einzelnen Teilintervallen $t_{I_k,n}(x_k) = g(x_k)$ und $t_{I_k,n}(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$ gilt, liefert das Zusammensetzen der auf den Teilintervallen definierten Splines eine stetige Spline - Funktion

$$t_n(x) = t_{I_k,n}(x) \quad \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}],$$

für deren Ableitung die Bedingung $\|t'_n(x)\|_\infty <= M$ im Innern von $[x_k, x_{k+1}]$; $k=1,\ldots,l+1$ erfüllt ist. Jedoch ist t'_n an den Grenzen nicht notwendigerweise stetig.

Für Intervalle vom Typ 1 und Typ 2 ist wegen

$$t'_{I_k,n}(x_k) = t'_{I_k,n}(x_{k+1}) = 0$$

das stetige Aneinanderfügen der Polynome unproblematisch.

Dagegen bereiten Typ 3 Intervalle wegen

$$t'_{I_k,n}(x_k) = t'_{I_k,n}(x_{k+1}) = M$$

beim Zusammensetzen Schwierigkeiten. Um die Stetigkeit der Ableitung zu erreichen, müssen wir t_n an den kritischen Punkten verändern.

Seien hierzu $[x_k, x_{k+1}]$ vom Typ 1 oder 2 und $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ vom Typ 3, dann setzen wir:

$$(3.3.12) \quad t_n(x) = t_{I_k,n}(x) + \int_{x_k}^{x} (t-x_k-2n^{-1})_+ * Mn \, dt \quad \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}]$$

Es folgt $t'(x_{k+1}) = t'_{I_{k+1},n}(x_{k+1}) = M$

Damit ist t'_n an der Stelle x_{k+1} stetig.

Sei $h := \max\{m: [x_{k+j}, x_{k+j+1}]$ vom Typ 3 für $2<=j<=m\}$ der Index für das letzte einer Serie von Typ 3 Intervallen.

Wir ändern t_n zu:

$$(3.3.12) \quad t_n(x) = t_{I_{k+h},n}(x) - \int_{x_{k+h}}^{x} (t-x_{k+h}+2n^{-1}) *Mn \, dt$$

und erreichen dadurch die Stetigkeit von t'_n in x_{k+h+1}.

Die Funktion t_n ist jetzt auf dem gesamten Intervall [0,1] stetig differenzierbar, und es ist leicht nachzurechnen, daß für die Ableitung die Ungleichung: $0 <= t'_n(x) <= M$ gilt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Folge der Spline - Funktionen (t_n) gegen die Funktion g konvergiert.

Für die Abweichung $|g(x) - t_n(x)|$ erhalten wir die Abschätzung:

1. $|g(x) - t_n(x)| <= |g(x) - g(x_k)| + |t_n(x_k) - t_n(x)|$

$$<= 2b_{k+1} <= 6Mn^{-1} \quad \text{(nach (3.3.8))}$$

falls x Element eines Typ 1 oder Typ 2 Intervalls ist, das nicht an ein Typ 3 Intervall grenzt.

2. $|g(x) - t_n(x)| <= |g(x) - g(x_k)| + |t_n(x_k) - t_n(x) - Mn^{-1}|$

$$<= 2b_{k+1} + Mn^{-1} <= 7Mn^{-1}$$

falls x Element eines Typ 3 Intervalls oder eines Grenzintervalls ist.

Am Beginn einer Serie von Typ 3 Intervallen wird jeweils Mn^{-1} zu viel aufaddiert. Dieser Fehler wird am Ende (im letzten Typ 3 Intervall) subtrahiert, sodaß für die Funktionswerte an den Rändern des Gesamtintervalls gilt:

$$g(0) = t_n(0) \quad \text{und} \quad g(1) = t_n(1)$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Für die weiteren Betrachtungen werden die Bedingungen (1.2.1) an den Grenzen des Intervalls [a,b] abgeändert.

$$(3.3.13) \quad \begin{cases} f''(a) = b_{0S} & & f''(b) = b_{SS} & \\ g_{0S} - \delta = f'(a) & = g_{0S} + \delta & g_{SS} - \delta = f'(b) & = g_{SS} + \delta \\ h_{0S} - \delta = f(a) & = h_{0S} + \delta & h_{SS} - \delta = f(b) & = h_{SS} + \delta \end{cases}$$

Für die Werte der Funktion und der 1. Ableitung werden jetzt an den Rändern keine festen Punkte mehr vorgegeben, sondern nur noch kleine Intervalle. Für die Menge der zulässigen Funktionen T ergibt sich:

$$T = \{f \in C^3([a,b]): f \text{ erfüllt } (3.3.1), (1.2.2) - (1.2.4) \text{ und } (3.1.5)\}$$

Wir nehmen eine beliebige Funktion $f \in \bar{T}$ mit

$$(3.3.14) \quad \begin{cases} f'(a) \in (g_{0S}-\delta, g_{0S}+\delta) & f'(b) \in (g_{SS}-\delta, g_{SS}+\delta) \\ f(a) \in (h_{0S}-\delta, h_{0S}+\delta) & f(b) \in (h_{SS}-\delta, h_{SS}+\delta) \\ f'(t_3) \in (0, v_{0S}-\delta) & f'(t_5) \in (v_{SS}+\delta, 0) \end{cases}$$

wobei $f'(t_3) = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$ und $f'(t_5) = \min_{x \in [a,b]} f'(x)$ ist.

Das Intervall [a,b] läßt sich folgendermaßen zerlegen:

$$[a,b] = [a,t_2] \cup [t_2,t_3] \cup \ldots \cup [t_6,b]$$

Die 2. Ableitung f'' ist auf diesen Teilintervallen entweder monoton fallend oder steigend.

Sei $I = [\alpha,\beta]$ eines dieser Intervalle, dann existiert nach Satz 2 eine monotone Spline - Funktion $s''_{n,I} \in H_n^3$ mit

$$|f''(x) - s''_{n,I}(x)| <= 7Mn^{-1}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$s'_{n,I}(x) = \int_\alpha^x s''_n(t)\,dt + f'(\alpha)$$

sowie

$$s_{n,I}(x) = \int_\alpha^x s'_n(t)\,dt + f(\alpha)$$

$$= \int_\alpha^x \int_\alpha^x s''_n(t)\,dt + f'(\alpha)\,dy + f(\alpha)$$

Für den Approximationsfehler ergibt sich:

$$|s'_{n,I}(x) - f'(x)| <= \left|\int_\alpha^x s''_n(t) - f''(t)\,dt\right|$$

$$<= 7Mn^{-1} * (\beta - \alpha)$$

und

$$|s_{n,I}(x) - f(x)| <= \left|\int_\alpha^x s'_n(t) - f'(t)\,dt\right|$$

$$<= 7Mn^{-1} * (\beta - \alpha)^2$$

Also läßt sich auf $[\alpha,\beta]$ die Funktion f durch einen Spline $s_{n,I} \in H_n^5$, dessen 2. Ableitung ebenfalls monoton ist, beliebig genau annähern.

Die so konstruierten Spline - Polynome auf den Teilintervallen lassen sich in der Mitte (bei x=0) beginnend nach links und rechts bis zu den Rändern dreimal stetig differenzierbar aneinanderfügen. Die Polynome auf der Öffnungsseite werden zuerst für positive Teilintervalle konstruiert und dann an der Y - Achse gespiegelt. Die Splines wurden so gewählt, daß sie das gleiche Monotonieverhalten und die gleichen Werte für die 2. Ableitung an den Rändern wie die Funktion selbst besitzen. Aus diesem Grund erfüllt der zusammengesetzte Spline s_n selbstverständlich die Monotoniebedingungen (1.2.4), die Extremumsbedingungen (1.2.3) und die Einschränkung (3.1.4) für die 3. Ableitung. Nach Voraussetzung (3.3.14) liegen die Werte von f im Innern der Intervalle aus (1.2.2) und (3.3.1), sodaß für hinreichend großes n auch diese Forderungen von s_n erfüllt werden.

Also gilt: $s_n \in T$

Wegen der Konvexität von $\overline{T}$ existiert dann zu jedem $f_o \in \overline{T}$ eine Folge $(f_n)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{T}$ von Funktionen f_n, die der Voraussetzung (3.3.14) genügen und für die gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f_o$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_o\|_\infty < \varepsilon/2$
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - s_{n,k}\|_\infty < \varepsilon/2$

und somit:

3. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n,k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_o - s_{n,k}\|_\infty < \varepsilon$

Also ist unser Ziel erreicht, wir haben eine Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Splines konstruiert für die gilt:

$$\lim_{m\to\infty} s_m = f_o$$

und damit ist die Konvergenz des Verfahrens bewiesen.

3.4 Problematik fester Randbedingungen

Anders als beim numerischen Verfahren werden für den Konvergenzbeweis keine festen Randbedingungen verlangt und zwar aus dem folgenden Grund:

Die Frage, ob es möglich ist, eine konvexe (bzw. konkave) Funktion g auf einem Intervall $[\alpha,\beta]$ durch konvexe (bzw. konkave) Spline - Polynome s, die an beiden Intervallrändern mit g übereinstimmt, d.h. $g(\beta) = s(\beta)$ und $g(\alpha) = s(\alpha)$, beliebig genau zu approximieren, ist ein bisher ungeklärtes Problem. Als eine der neusten Veröffentlichungen auf diesem Gebiet sei die Arbeit von J.W. Schmidt und W.Hess von der Universität Dresden über konvexe Spline Interpolation [9] erwähnt. Wegen der Monotonieforderungen an die 2. Ableitung ist das Krümmungsverhalten der 1. Ableitung und der Funktion selbst auf den Teilintervallen festgelegt. Daher können nur auf einer Seite der Intervalle die Werte für die Funktion und die 1. Ableitung vorgeschrieben werden. Für die andere Seite ist nur bekannt, daß man beliebig nahe an diese Werte herankommen kann, also in jedem vorgegebenen Intervall liegt. Für das technische Problem ist es nicht unbedingt erforderlich feste Werte für Geschwindigkeit und Hub an den Rampenenden einzuhalten. Die Rampen sind so zu konstruieren, daß an ihrem Ende der Hub etwas größer, als das maximal auftretende Ventilspiel ist und daher der Wert am Rampenende nicht exakt vorgeschrieben werden muß. Außerdem gestatten die zur Rampenberechnung verwendeten Computerprogramme eine flexible Anpassung an den konstruierten Hauptnocken.

4. MODIFIZIERBARKEIT DES VERFAHRENS IM HINBLICK AUF ZUKÜNFTIGE TECHNISCHE ANFORDERUNGEN

4.1 Vorgabe der Ventilfeder

Die Ventilfeder sorgt dafür, daß beim Öffnen des Ventils der Stößel fest auf dem Nocken aufliegt. Ist nun die negative Beschleunigung des Ventils größer als die Federverzögerung, d.h. schneidet die Beschleunigungskurve die Kurve der Federverzögerung (Abb.5) , so führt dies zu einem Abheben des Stößels von der Nockenoberfläche. Dies muß jedoch auf jeden Fall vermieden werden. Aus diesem Grund ist die Ventilfeder so zu wählen, daß die Federverzögerung immer größer als die Ventilverzögerung ist.

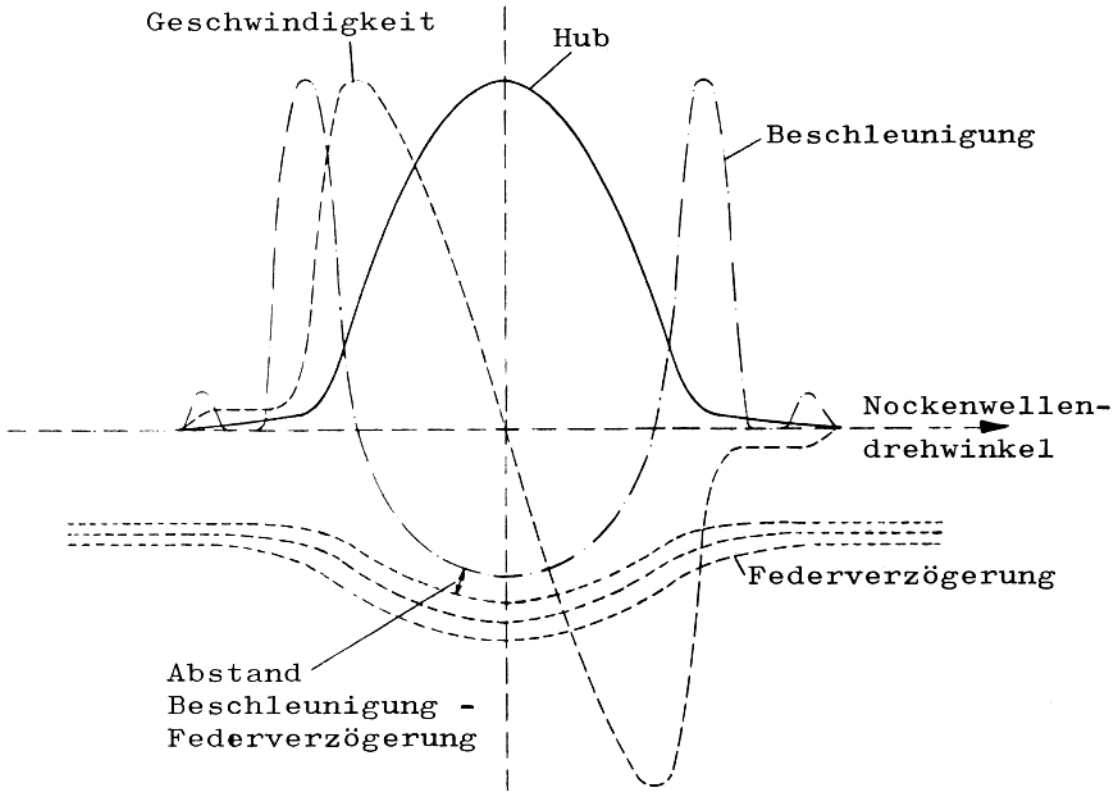


Abb.5 Ventilöffnungsfunktion mit Federverzögerung

Um günstige Ventilfedern einsetzen zu können, ist es wünschenswert, zu einer vorgegebenen Ventilfeder die optimale Erhebungsfunktion zu ermitteln.

Die Federverzögerung berechnet sich folgendermaßen:

$$F(x) = 1000*(P + R*f(x))/36mu^2$$

x	Nockenwellendrehwinkel
f(x)	Hub über dem Winkel x
P	Federvorspannung
R	Federkonstante
m	reduzierte Ventilmasse
u	Drehzahl

Dies führt zu der folgenden Ungleichung:

$$F(x) + (1+SPA) * f''(x) >= 0$$

Hierbei gibt SPA an, um wieviel Prozent die Federverzögerung mindestens größer als die Beschleunigung f''(x) sein soll. Es ist leicht einzusehen, daß nur im Verzögerungsteil der Beschleunigungskurve die obige Bedingung verletzt werden kann. Erhöhen wir in diesem Bereich die Anzahl der Stützstellen für das numerische Verfahren, so erhalten wir die folgenden linearen Nebenbedingungen bzgl. der Spline - Koeffizienten:

$$1000*(P + R*s(x_i))/36*m*u^2 + (1+SPA)*s''(x_i) >= 0$$

Mittels der Identitäten:

$$s(x_i) = A_i \Delta x_i^5 + B_i \Delta x_i^4 + C_i \Delta x_i^3 + D_i \Delta x_i^2 + E_i \Delta x_i + F_i$$

$$s''(x_i) = 20A_i \Delta x_i^3 + 12B_i \Delta x_i^2 + 6C_i \Delta x_i + 2D_i$$

$$Konst = 1000R/(36mu^2)$$

kann die obige Ungleichung übergeführt werden in:

$$\begin{aligned} &\text{Konst}*(A_i\Delta x_i^5 + B_i\Delta x_i^4 + C_i\Delta x_i^3 + D_i\Delta x_i^2 + E_i\Delta x_i + F_i) \\ &\quad +(1 + SPA)*(20A_i\Delta x_i^3 + 12B_i\Delta x_i^2 + 6C_i\Delta x_i + 2D_i) \\ &>= \quad -1000P\ /36mu^2 \end{aligned}$$

$$\text{für} \quad i=i_{GOS},\ldots,i_{GSS}-1$$

Diese Restriktionen können ohne Schwierigkeiten dem linearen Programm hinzugefügt werden. Desweiteren kann dann die Nebenbedingung für die maximale Verzögerung entfallen. Wegen der Glattheit der Federverzögerungskurve dürfte schon eine relativ geringe Anzahl zusätzlicher Stützstellen (etwa 10 auf jeder Seite) zur Kontrolle genügen. Diese Erweiterung des Verfahrens führt dazu, daß sich die Beschleunigung an die Federverzögerungskurve anschmiegt.

4.2 Extreme Hubwerte

Die neusten Entwicklungen bei der Konstruktion von Nockenwellen tendieren dazu, bei einem kleinen Event (Öffnungslänge) extrem hohe Werte für die maximale Ventilerhebung zu erreichen. Dies gelingt durch Veränderung des charakteristischen Verlaufs der Beschleunigungskurve, z.B. der Einführung eines Bereichs mit Beschleunigung null. Das numerische Verfahren aus Kapitel 2 erlaubt ohne Schwierigkeiten eine Anpassung an solche Veränderungen der Ventilöffnungsfunktion. Hierzu werden entweder die entsprechenden Nebenbedingungen geändert oder neue Restriktionen dem linearen Programm hinzugefügt.

Gerade für die Beschleunigung läßt sich wegen des niedrigen Polynomgrades die Funktion auf dem gesamten Teilintervall durch Vorgabe der 2. und 3.Ableitung an den Intervallrändern leicht manipulieren.

4.3 Kontrolle der Krümmungsradien

Für das vernünftige Arbeiten eines Nockens ist es erforderlich, daß der Krümmungsradius der tatsächlichen Nockenkontur ein bestimmtes Mindestmaß nicht unterschreitet oder negativ wird (hohler Nocken). Unter der tatsächlichen Nockenkontur versteht man die aus der erzeugten Ventilerhebungsfunktion unter Berücksichtigung der verwendeten Kopplungsglieder gegebildete Nockenform. Bis jetzt müssen die Soll- und Grenzwerte für das Verfahren so gewählt werden, daß der Krümmungsradius nicht zu klein wird. Gegebenenfalls muß das Programm mit neuen Werten für die Einschränkungen mehrmals durchlaufen werden. Aus diesem Grund ist es von Interesse, den Algorithmus dahingehend zu erweitern, daß schon bei der Generierung der Ventilöffnungsfunktion der Krümmungsradius kontrolliert wird.

Zur Berechnung des Krümmungsradius der tatsächlichen Nockenkontur benutzt man jenachdem, ob der Nocken mit einem ebenen oder kreisförmigen Stößel zusammenarbeitet, eine der folgenden Formeln:

ebener Stößel

(4.3.1) $\varphi(x) = RG + s(x) + s''(x)$

kreisförmiger Stößel

(4.3.2) $\varphi(x) = (s(x)^2 + s'(x)^2)^{3/2} / (S(x)^2 + 2s'(x) - S(x)s''(x)) - r$

Hierbei sind:

$\varphi(x)$	-	Krümmungsradius zum Winkel x
RG	-	Grundkreisradius der Nockenwelle
r	-	Gegenflächenradius
s(x)	-	Hub beim Winkel x
s'(x)	-	Geschwindigkeit beim Winkel x
s''(x)	-	Beschleunigung beim Winkel x
S(x)	=	RG + s(x) + r

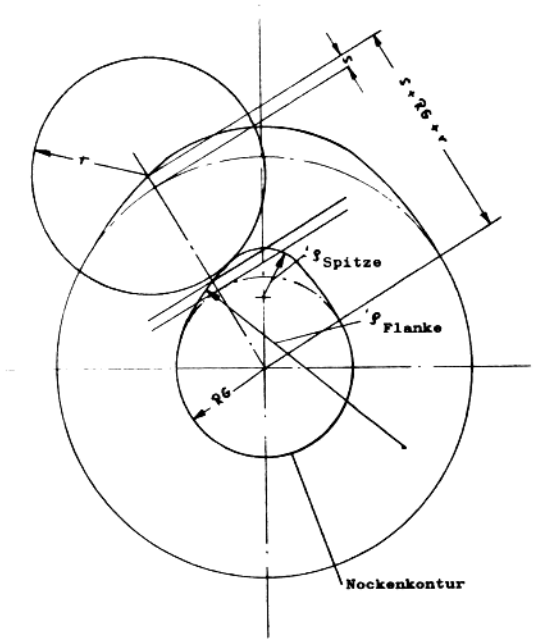


Abb.6 Nocken mit kreisförmigem Stößel

Bei diesen Formeln wurde ein eventuell durch die Kopplungsglieder auftretendes Übersetzungsverhältnis nicht berücksichtigt. Dieses muß entsprechend der jeweiligen Konstruktion der Ventilsteuerung hinzugefügt werden.

Aus der praktischen Erfahrung heraus lassen sich die Bereiche, in denen die Krümmungsradien kritisch werden, ziemlich genau angeben. So ist aus der Formel für ebene Gegenfläche (4.3.1) schon ersichtlich, daß nur im negativen Teil der Beschleunigungskurve der Krümmungsradius zu klein werden kann. Wogegen bei kreisförmigem Stößel die kritische Zone sich zwischen Rampenende und maximaler Beschleunigung befindet.

Für ebene Gegenfläche läßt sich der Krümmungsradius durch die Einführung neuer linearer Nebenbedingungen im Verzögerungsbereich kontrollieren. Dazu werden an relativ vielen Stützstellen Restriktionen der folgenden Art eingeführt:

$$A_i \Delta x_i^5 + B_i \Delta x_i^4 + C_i \Delta x_i^3 + D_i \Delta x_i^2 + E_i \Delta x_i + F_i + 20A_i \Delta x_i^3 + 12B_i \Delta x_i^2 + 6C_i \Delta x_i + 2D_i <= \varepsilon - RG$$

ε untere Grenze für den Krümmungsradius

Für den ebenen Fall handelt es sich also nur um eine Erweiterung des linearen Programms. Dagegen bereiten die Einschränkungen für die Krümmungsradien bei kreisförmiger Gegenfläche erhebliche Schwierigkeiten, da man in diesem Fall hochgradig nichtlineare Nebenbedingungen in großer Zahl erhält. Hier muß noch ein geeigneter Algorithmus zur Einhaltung der Anforderungen gesucht werden.

4.4 Vollständige Automatisierung

Bisher wird jeweils zu einem fest vorgegebenen Stützstellensatz eine optimale Spline - Funktion gesucht. Durch Verschieben von Hand kann man versuchen, die Kurve auch bzgl. der Stützstellen x_i zu optimieren. Hierbei ist besonders die Lage der Stützstellen von Bedeutung, an denen die Grenzwerte für maximale Beschleunigung vorgegeben werden. Aus Erfahrung bei der Konstruktion von Nockenwellen wissen die Ingenieure die Stützstellen von Anfang an recht gut zu plazieren, sodaß ein längeres Hin- und Herschieben nicht nötig ist. Diese Vorgehensweise hat außerdem den Vorteil, daß sie dem Konstrukteur erlaubt, Einfluß auf den Kurvenverlauf zu nehmen und so auch das Verhalten bzgl. Federverzögerung und Krümmungsradius der tatsächlichen Nockenkontur zu beeinflussen.

Werden die unter (4.1) und (4.3) angeführten Erweiterungen des Verfahrens jedoch vorgenommen, so ist eine vollständige Automatisierung, d.h. eine Optimierung auch über den Stützstellen, möglich.

Das resultierende Optimierungsproblem stellt sich wie folgt dar:

$$
(4.4.1)\quad \begin{cases} \max\limits_{X} \; \max\limits_{A(X),B(X)\in K_n(X)} \; Q(A(X),B(X)) \\ \text{mit} \\ T = \{X=(x_2,\ldots,x_{\frac{N-1}{2}},x_{\frac{N-1}{2}+2},\ldots,x_{N-1}): \\ \qquad x_2,\ldots,x_{\frac{N-1}{2}}<0 \; ; \; x_{\frac{N-1}{2}+2},\ldots,x_{N-1}>0; \\ \qquad a<x_2<x_3<\ldots<x_{N-1}<b\} \end{cases}
$$

Die Stützstellen:

$$x_1 = a$$
$$x_N = b$$
$$x_{\frac{N-1}{2}+1} = 0$$

sind fest vorgegeben und müssen daher nicht berücksichtigt werden.

$A(X) = (A_1(X),\ldots,A_{N-1}(X))$ und

$B(X) = (B_1(X),\ldots,B_{N-1}(X))$

sind die vom Stützstellensatz X abhängigen Koeffizienten der Spline - Polynome.

$K_n(X)$ ist die Menge der zulässigen Koeffizienten $A(X),B(X)$ zu dem jeweiligen Stützstellensatz X. $K_n(X)$ ergibt sich aus den einzuhaltenden Nebenbedingungen (1.2.1) bis (1.2.4).

$$\max_{A(X),B(X)\in K_n(X)} Q(A(X),B(X))$$

stellt die Zielfunktion des behandelten linearen Programms dar.

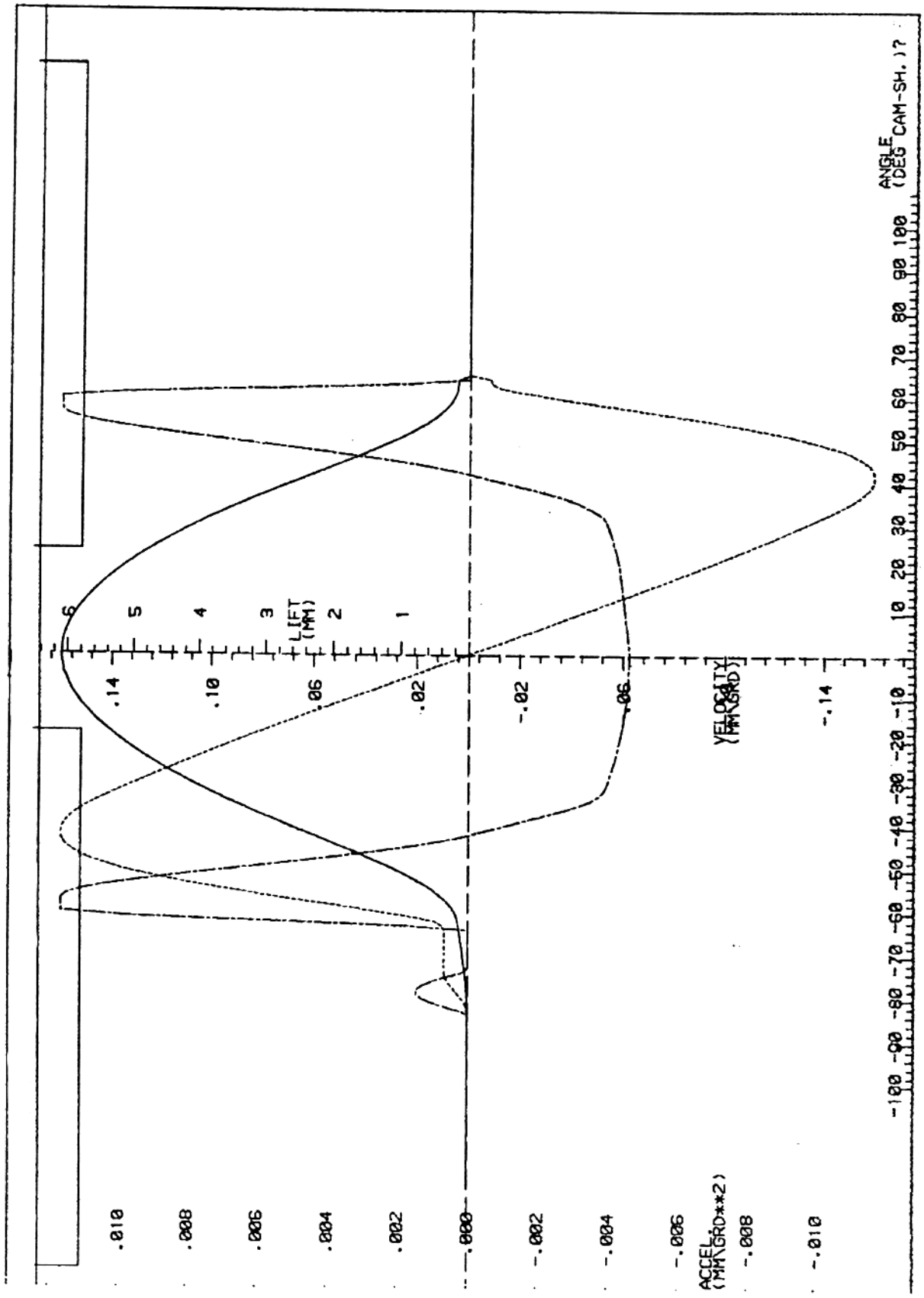
5. PRAKTISCHE ANWENDUNG DES VERFAHRENS

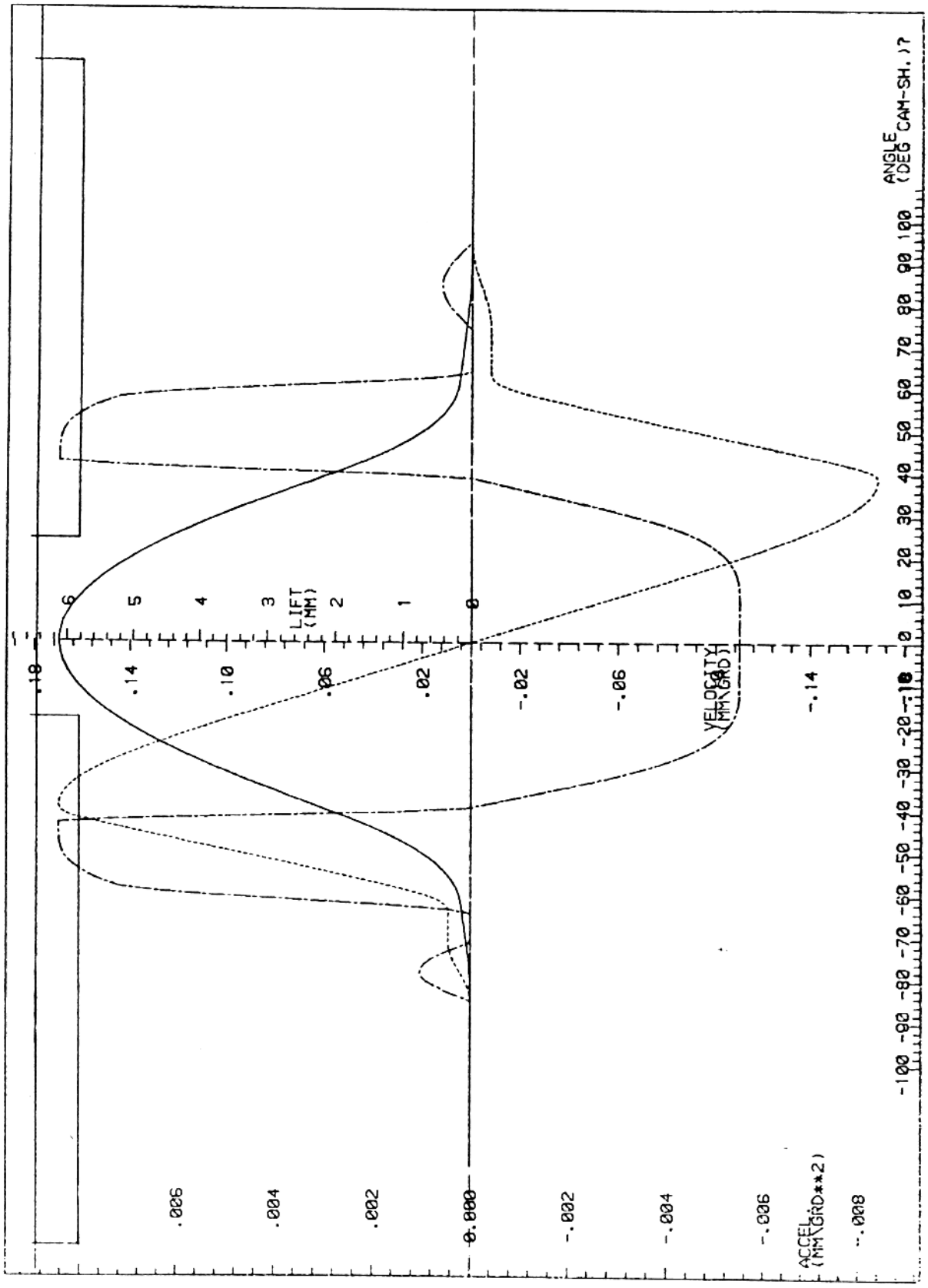
Zu dem in Kap. 2 vorgestellten Verfahren wurde ein Computerprogramm erstellt (siehe Anhang), das teilweise um die in Kap. 4 angesprochenen Modifikationen erweitert wurde. Dieses spezialisierte Programm wird bereits in der Industrie, der Entwicklungsabteilung der Ford - Werke in Köln, produktiv eingesetzt. Bei der Programmerstellung hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die für die Reduzierung des Umfangs benötigten Rekursionsformeln sowie das Ersetzen der Variablen in eigens dafür vorgesehenen Unterprogrammen abzuarbeiten, da sich dadurch Erweiterungen und Veränderungen des linearen Programms leichter durchführen lassen.

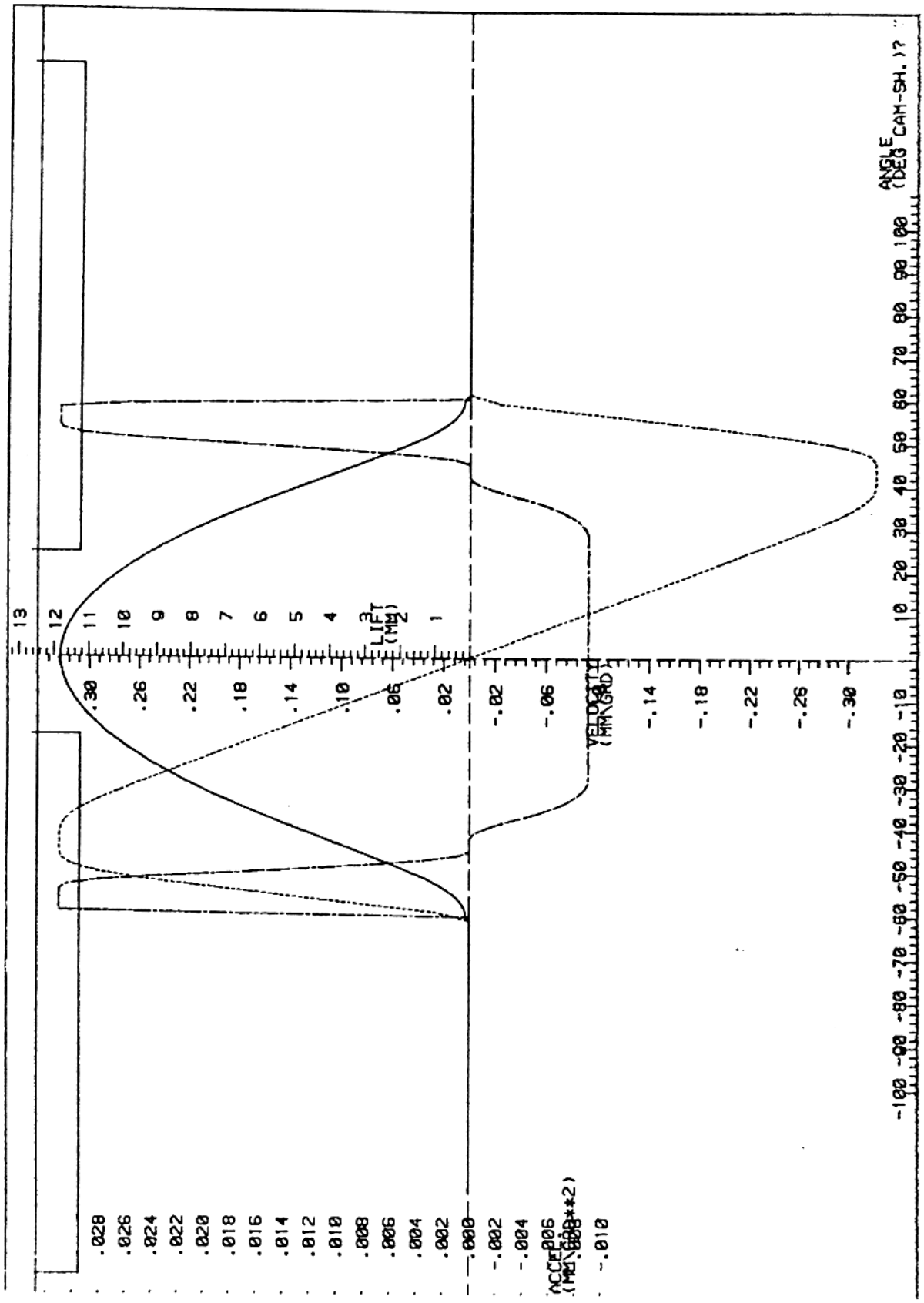
Numerische Schwierigkeiten traten in extremen Fällen beim Lösen des lineraren Optimierungsproblems auf, dann nämlich, wenn die Beschleunigungskurve an den Rändern stark wachsen bzw. fallen sollte und die Stützstellen sehr eng zusammengelegt wurden. In solchen Fällen wiesen die berechneten Spline - Koeffizienten erhebliche Größenunterschiede auf, was zu Rechenungenauigkeiten führte. Abhilfe wurde hier durch ein numerisch besonders stabiles, revidiertes Simplex-Verfahren sowie eine progamminterne Korrektur durch Veränderung der Fehlerschranken für die Nullabfragen geschaffen. Ein Vergleich mit dem Verfahren von Kurz zeigte, daß bereits bei relativ wenig Stützstellen (etwa 19) der

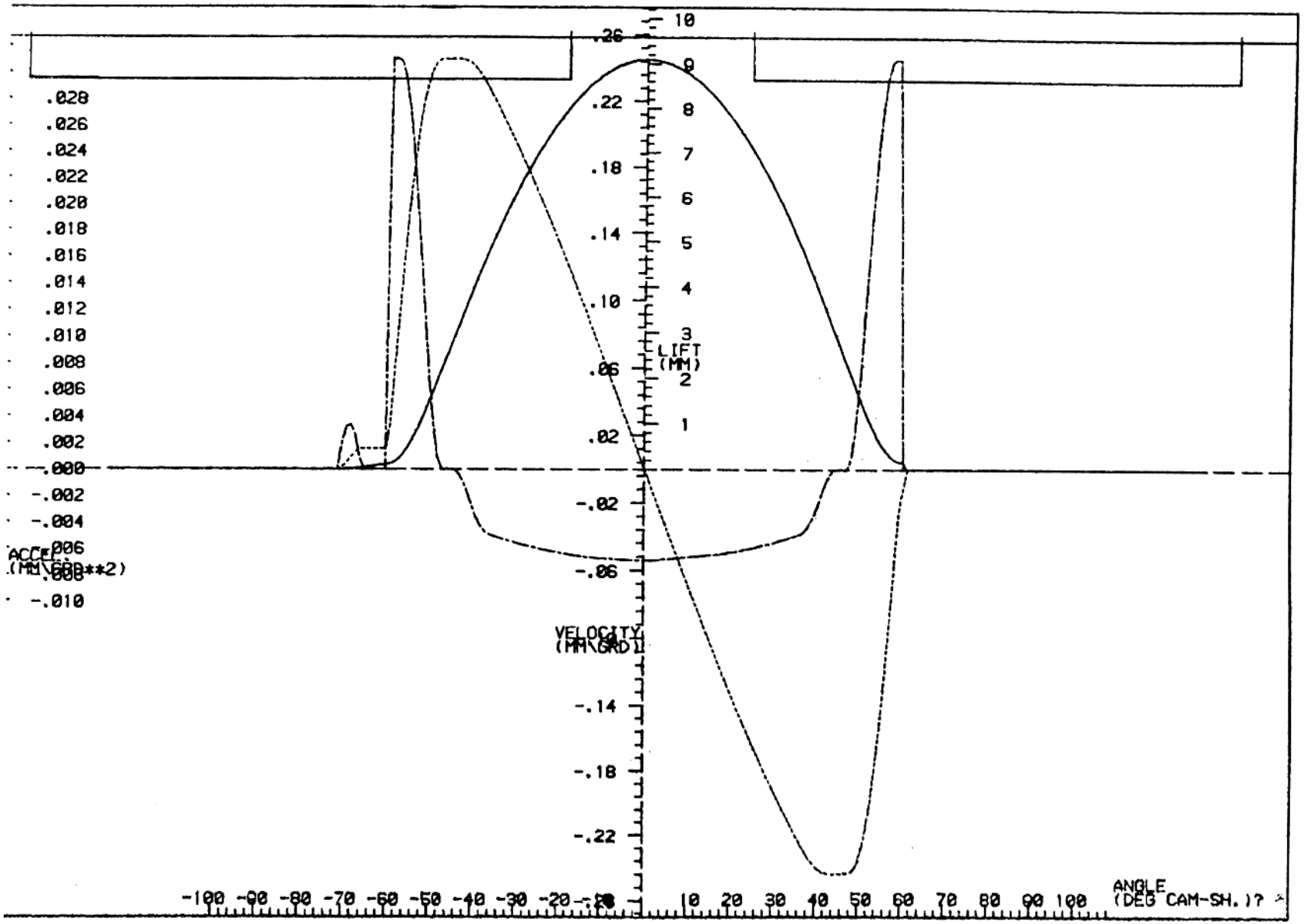
gleiche maximale Hub und die gleiche Fläche unter der Erhebungskurve erreicht wurden, wobei die Grenzwerte für maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung um 20-30% geringer gewählt werden konnten.

Von besonderem Vorteil war die Erweiterung des Verfahrens bzgl. der Kontrolle von Federverzögerung und Krümmungsradius der tatsächlichen Nockenkontur. Zumal trotz der dann hohen Zahl von Variablen und Nebenbedingungen die Rechenzeit relativ gering blieb, d.h. unter 15 CPU-sec sowohl auf der Siemens Anlage der Uni Kaiserslautern wie auch auf der Cyber 720 der Ford - Werke in Köln. Dies erlaubt, bei einiger Erfahrung im Festlegen der Stützstellen schon nach kurzer Zeit brauchbare Ergebnisse zu erzielen.
Bei den abschließend angegebenen Beispielen für mit Hilfe des Verfahrens generierte Erhebungsfunktionen werden alle in Kapitel 4 angesprochenen Modifikationen verdeutlicht.


ANGLE
(DEG CAM-SH.)
-100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
LIFT
(MM)
6
5
4
3
2
1
.14
.10
.06
.02
-.02
-.06
-.14
VELOCITY
(MM\GRD)
ACCEL.
(MM\GRD**2)
.010
.008
.006
.004
.002
.000
-.002
-.004
-.006
-.008
-.010


ANGLE
(DEG CAM-SH.)?
-100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
LIFT
(MM)
6
5
4
3
2
1
0
.10
.14
.10
.06
.02
-.02
-.06
-.10
-.14
VELOCITY
(MM\GRD)
.006
.004
.002
0.000
-.002
-.004
-.006
-.008
ACCEL
(MM\GRD**2)


ANGLE
(DEG CAM-SH.17
LIFT
(MM)
VELOCITY
(MM\GRD)
ACCEL
(MM\GRD**2)


.028
.026
.024
.022
.020
.018
.016
.014
.012
.010
.008
.006
.004
.002
.000
-.002
-.004
-.006
-.008
-.010
ACCEL.
(MM\GRD**2)
.26
.22
.18
.14
.10
.06
.02
-.02
-.06
-.14
-.18
-.22
VELOCITY
(MM\GRD)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
LIFT
(MM)
-100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
ANGLE
(DEG CAM-SH.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Blanchard, Ph. ; Brüning, E.
Direkte Methoden der Variationsrechnung
Wien, 1982

[2] Böhmer, K.
Spline - Funktionen
Stuttgart, 1974

[3] De Boor, C.
A practical guide to splines
New York, 1978

[4] DeVore, R.A.
Monotone approximation by splines
in: SIAM Journal on mathematical analysis
Vol.8, No.5, Oktober 1977

[5] Endres, W.
Verbrennungsmotoren, Bd.II
Berlin, 1966

[6] Krabs, W.
Optimierung und Approximation
Stuttgart, 1975

[7] Kurz, D.
Entwurf und Berechnung ruckfreier Nocken
in: Automobiltechnische Zeitschrift
Nr.11, November 1954

[8] Mettig, H.
Die Konstruktion schnellaufender Verbrennungs-
motoren
Berlin, 1973

[9] Schmidt, J.W. ; Hess, W.
Schwach verkoppelte Ungleichungssysteme
und konvexe Spline - Interpolation
in: Elemente der Mathematik
Vol.39, 1984, S.84ff

[10] Schumaker, L.L.
Spline functions : basic theory
New York, 1981