KOMPETENZZENTRUM FÜR MATHEMATISCHE MODELLIERUNG IN MINT-PROJEKTEN IN DER SCHULE

KOMMS Reports Nr. 9 (2019)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule

KOMMS
Kompetenzzentrum für
Mathematische Modellierung in
MINT-Projekten in der Schule

MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School

Sebastian Blauth, Thomas Jung, Lena Leiß, Andrea Maier, Stefan Ruzika, Robert Sicks

MINT ec
Das nationale
Excellence-Schulnetzwerk

EUROPÄISCHER SOZIALFONDS
Mehr Chancen für Rheinland-Pfalz

Fraunhofer
ITWM

EUROPÄISCHE UNION
Europäischer Sozialfonds

FELIX KLEIN
ZENTRUM FÜR
MATHEMATIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Die *MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School* ist eine vom Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) initiierte Veranstaltung, die regelmäßig als Kooperation zwischen dem Felix-Klein-Zentrum für Mathematik und dem Verein mathematisch-naturwissenschaftlicher Excellence-Center an Schulen e.V. (Verein MINT-EC) durchgeführt wird. Das Felix-Klein-Zentrum für Mathematik ist eine gemeinsame Einrichtung des Fraunhofer- ITWM und des Fachbereichs Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern. Die methodisch-didaktische Konzeption der Math-Talent-Schools erfolgt durch das Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS), einer wissenschaftlichen Einrichtung des Fachbereichs Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern. Die inhaltlich-organisatorische Ausführung übernimmt das Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM in enger Abstimmung und Kooperation von Wissenschaftlern der Technischen Universität und des Fraunhofer ITWM. Die Veranstaltung wird finanziert durch das Nachwuchsförderungsprogramm der Fraunhofer-Gesellschaft und durch das Fraunhofer ITWM. Die MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School hat zum Ziel, Mathematik-interessierten Schülerinnen einen Einblick in die Arbeitswelt von Mathematikerinnen und Mathematikern zu geben. In diesem Artikel stellen wir die Math-Talent-School vor. Hierfür werden die fachlichen und fachdidaktischen Hintergründe der Projekte beleuchtet, der Ablauf der Veranstaltung erläutert und ein Fazit gezogen.

1 Einleitung

Vom 21. bis 24. Mai 2019 fand in Kaiserslautern die Math-Talent-School statt. Diese Veranstaltung ist ein Kooperationsprojekt zwischen dem Felix-Klein-Zentrum für Mathematik und dem Verein mathematisch-naturwissenschaftlicher Excellence-Center an Schulen e.V. (Verein MINT-EC). Die Umsetzung erfolgt innerhalb des Felix-Klein-Zentrums für Mathematik durch das Fraunhofer ITWM und das Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS), einer wissenschaftlichen Einrichtung des Fachbereichs Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern und dem Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM. Die Partner des Projekts werden im Folgenden vorgestellt.

1.1 Partner

Der *Verein mathematisch-naturwissenschaftlicher Excellence-Center an Schulen e.V.* (Verein MINT-EC) ist das nationale Excellence-Schulnetzwerk mit Sitz in Berlin, welches seit 2009 unter der Schirmherrschaft der Kultusministerkonferenz der Länder steht. Es fördert Schulen, die ein überdurchschnittliches mathematisch-naturwissenschaftliches Profil aufweisen und bietet mit seinen Veranstaltungen ein Angebot für Schülerinnen und Schüler, aber auch für Lehrkräfte und Schulleitungen. Ziel des MINT-EC ist es zum Einen, Schülerinnen und Schüler für MINT-Studiengänge und -Ausbildungen zu motivieren. Andererseits sollen jedoch auch Lehrkräfte zu MINT-Fachlehrkräften aus- und weitergebildet werden. Auch auf schulpolitischer Ebene hilft der MINT-EC, den Austausch und Wettbewerb zwischen Schulen zu fördern. Zu diesem Zweck werden neben Fortbildungen für Lehrkräfte und Schulleitertagungen auch Veranstaltungen für Schülerinnen und Schüler organisiert. Eine dieser

Veranstaltungen ist das MINT-EC-Girls-Camp, welches als Math-Talent-School zuletzt am Fraunhofer ITWM stattgefunden hat. Aktuell sind dem MINT-EC 316 Gymnasien mit ca. 336.000 Schülerinnen und Schülern und 27.000 Lehrkräften zugeordnet [3].

Das *Felix-Klein-Zentrum für Mathematik* stellt die institutionelle Verknüpfung zwischen dem Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM (Fraunhofer ITWM) und dem Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern dar. Es wurde im Dezember 2008 im Rahmen der Mathematikinitiative des Landes Rheinland-Pfalz gegründet. Benannt ist das Zentrum nach dem bedeutenden Mathematiker und Wissenschaftsorganisator Felix Klein (1849-1925). Das Mathematikzentrum und die angeschlossene Felix-Klein-Akademie haben vor allem die Nachwuchsförderung sowie die Fort- und Weiterbildung im Fokus.

Das *Fraunhofer ITWM* ist ein Institut der Fraunhofer-Gesellschaft, welches in Kaiserslautern ansässig ist. Es wurde 1995 mit dem Ziel gegründet, Mathematik und Praxis, sowie wissenschaftlichen Anspruch und unternehmerisches Denken zu verbinden. Das Fraunhofer ITWM ist unter anderem Kooperationspartner der Technischen Universität Kaiserslautern, insbesondere des Fachbereiches Mathematik, aber auch Mitglied im Verein MINT-EC und Förderer des KOMMS in dem vom Europäischen Sozialfonds (ESF) geförderten Projekt Schulentwicklung für Mathematische Modellierung in MINT-Fächern (*SchuMaMoMINT*). Im Zuge dieser Partnerschaft beteiligt sich das ITWM an der Durchführung und Umsetzung der Math-Talent-School [1].

Das *Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule* (KOMMS) ist eine wissenschaftliche Einrichtung des Fachbereichs Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern, welche zum Ziel hat, die Bereiche Schulprojekte, Lehreraus- und -fortbildung, Zertifizierung und Forschung zu verbinden. Hierbei geht das KOMMS im Besonderen auf die Verstetigung von Mathematischer Modellierung in der Schule ein. Im Zuge dieser Aufgabe bietet das KOMMS Fortbildungen für Lehrkräfte an, in denen sie zum Einen fachlich geschult werden, aber andererseits auch Hilfestellungen im Bezug auf die Umsetzung von Modellierungsprojekten in der Schule bekommen. Um den Einstieg zu erleichtern, werden von KOMMS zusätzlich Modellierungstage und Modellierungswochen angeboten. Modellierungstage sind in der Regel zweitägige Veranstaltungen, bei denen Mitarbeitende des KOMMS gesamte Schulklassen besuchen, und mit Unterstützung der Lehrkräfte Modellierungsprojekte durchführen. Modellierungswochen sind sechstägige Veranstaltungen, die zwei mal im Jahr stattfinden, und für besonders motivierte Schülerinnen und Schüler angeboten werden. Diese Veranstaltungen werden für rheinland-pfälzische Teilnehmende im Rahmen das vom ESF geförderten Projekts SchuMaMoMINT finanziert [2].

1.2 Mathematische Modellierung

Die Aufgaben, die in der Math-Talent-School gestellt werden, fallen in den Bereich der *Mathematischen Modellierung*. Bei solchen Projekten handelt es sich um Fragestellungen aus der Realität, die so offen wie möglich gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen dann zunächst herausfinden, wie sie eine konkrete Fragestellung formulieren können. Anschließend müssen die Informationen, die sie zur Beantwortung der Fragestellung benötigen, recherchiert und zusammengetragen werden. Erst dann kann das mathematische Modell aufgestellt werden. Dieser Schritt ist sehr wichtig für die Bearbeitung und Lösung des Problems. Hierbei müssen die Schülerinnen und Schüler zum Einen die Wirklichkeit

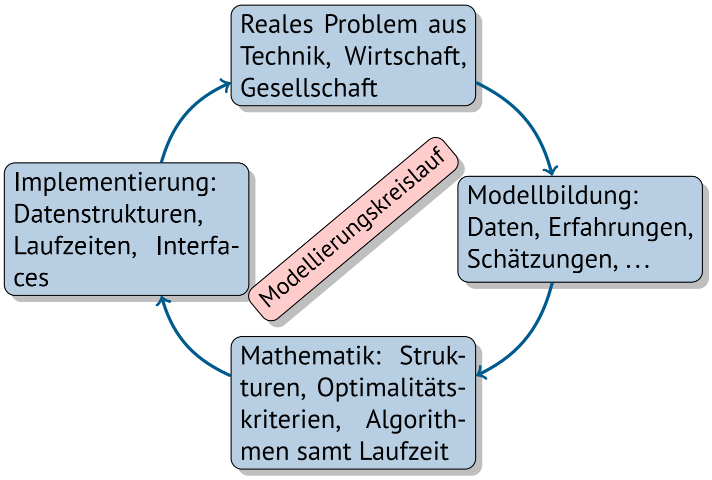


Abbildung 1: Modellierungskreislauf

in mathematische Ausdrücke transformieren. Andererseits müssen sie dafür auch Vereinfachungen und Annahmen treffen, sodass trotzdem noch aussagekräftige Ergebnisse erzielt werden können. Sobald ein mathematisches Modell aufgestellt ist, müssen die Schülerinnen und Schüler eine geeignete mathematische Methode finden, mit deren Hilfe sie ihr Problem innerhalb des Modells lösen. Sobald eine Lösung gefunden ist, wird diese wieder zurück in die Wirklichkeit – also die ursprüngliche Fragestellung – geführt, das mathematische Ergebnis also in der Realität interpretiert. Dieser Prozess des Übersetzens der Realität in die Mathematik, das Lösen des nun mathematischen Problems und die Rückführung des mathematischen Ergebnisses in die Wirklichkeit ist zyklisch zu verstehen. Meist ist nämlich die erste Lösung, die man nach einem solchen Prozess erhält, noch nicht zufriedenstellend, da das mathematische Modell zu ungenau aufgestellt wurde. Dies geschieht durch die wie oben beschriebenen getroffenen Annahmen und getätigten Vereinfachungen. Um die Lösung zu verbessern, muss das Modell verfeinert und das Problem im neuen Modell erneut gelöst werden. Diesen Zyklus durchläuft man so lange, bis das Ergebnis zufriedenstellend ist. In Abbildung 1 ist dieser Kreislauf dargestellt.

In der Math-Talent-School, die im Mai 2019 in Kaiserslautern stattfand, wurden vier mathematische Modellierungsaufgaben gestellt. Die erste beschäftigte sich mit dem Problem, eine optimale Portfoliostrategie zu entwickeln und ist dem Bereich der Finanzmathematik zuzuordnen. Diese Aufgabenstellung, wie man Geld in Aktien angelegen kann, wird in Kapitel 2 behandelt. In der zweiten Fragestellung ging es um die Entwicklung eines Verteilungsmusters von Kieselgel für die Herstellung von Vliesstoffen am Beispiel von Wundauflagen. Dieses Problem wird in Kapitel 3 erläutert und gehört zur Abteilung „Transportvorgänge“ des ITWM. Die dritte Aufgabe handelte von der Erstellung eines Fahrplans für den Singapur MRT. Hier sollten die Schülerinnen einen Fahrplan gestalten, der Umsteigezeiten optimiert. Diese Fragestellung kann der Optimierung zugeordnet werden und wird in Kapitel 4 besprochen. Die letzte Frage beschäftigte sich mit der Konzeption eines Modells für das autonome Fahren eines Fahrzeuges. Das Projekt und die Ergebnisse werden in Kapitel 5 erläutert.

1.3 Veranstaltungsablauf

23 Schülerinnen aus ganz Deutschland und zwei Schülerinnen aus der Türkei beschäftigten sich in diesem Zeitraum mit vier verschiedenen mathematischen Projekten. Am ersten Tag reisten die Schülerinnen selbstständig nach Kaiserslautern an, von wo aus sie dann mit zwei Reisebussen nach Trippstadt zur Unterkunft gebracht wurden. An diesem Abend wurde nach einem gemeinsamen Abendessen das Camp mit einer Präsentation eröffnet. Zwei Vertreterinnen des MINT-EC haben kurz die Aktivitäten des Vereins vorgestellt. Anschließend haben Prof. Dr. Stefan Ruzika der TU Kaiserslautern und Dr. Dietmar Hietel vom ITWM einen kleinen Einblick in Anwendungsgebiete der Mathematik gegeben. Danach wurden die Projekte durch die vier Betreuenden vorgestellt. Um sich besser kennen zu lernen, haben sich die Schülerinnen als Ausklang des Auftakttages einander vorgestellt.
Am ersten Arbeitstag wurden die Schülerinnen ans ITWM gebracht, wo sie von einer Mitarbeiterin des ITWM begrüßt und durch das Institut geführt wurden. Anschließend ging die Arbeitsphase in den Workshops los. Diese dauerte bis um 17 Uhr. Abends gab es eine organisierte Wandertour zum lokalen Humbergturm, von dem sich die Schülerinnen – mit Hilfe von Mitarbeitenden des Unisports der TUK – abseilen konnten. Als Ausklang des Arbeitstages wurde in der Unterkunft in Trippstadt gegrillt, bevor sich die Teilnehmerinnen im gemeinsamen Plenum getroffen haben, um den Tag zu reflektieren.
Der zweite Arbeitstag wurde ähnlich gestaltet wie der erste. Nachdem die Schülerinnen gearbeitet und mittags die Mensa besucht hatten, wurde sie von zwei Mitarbeiterinnen des Fachbereichs Mathematik über den Campus der TUK geführt. Außerdem hat der Leiter der Graduate School des Fachbereichs eine kleine Präsentation über das Mathematikstudium gehalten. Anschließend arbeiteten die Schülerinnen weiter in den Workshops, bevor sie dann zum Abendprogramm zur Bowlingbahn aufbrachen.
Am dritten und letzten Arbeitstag haben die Schülerinnen bis mittags an ihren Projekten gearbeitet und ihre Präsentationen vorbereitet, die dann am ITWM vor einem Publikum aus Mitarbeitenden des ITWM und Angehörigen der TUK gehalten wurden. Die Schülerinnen haben hierbei vorgestellt, was sie in den vorherigen Arbeitsphasen entwickelt haben und stellten sich anschließend den kritischen Fragen der Zuhörer.

2 Eine optimale Portfoliostrategie entwickeln – Robert Sicks

2.1 Problemstellung

Will man für sein angelegtes Geld eine höhere Rendite als mit dem klassischen Bankkonto erzielen, kann man es in Aktien anlegen. Aber, wie es nicht nur „die eine" Bank gibt, gibt es auch nicht „die eine" Aktie. Anleger müssen aus weit mehr als tausend verschiedenen Aktien wählen. Der Entscheidungsraum ist beträchtlich und wird noch größer, wenn die Anleger ihr Kapital auf mehrere Aktien aufteilen. In diesem Fall spricht man von einem Portfolio (wobei streng genommen die Investition in nur eine Aktie ebenfalls bereits ein Portfolio darstellt).

Eine solche Anlage geht allerdings neben höheren Renditechancen auch mit Verlustmöglichkeiten einher. Hierbei spiegeln Aktienkurse in ihren Schwankungen die Unsicherheit wider, mit der der zugehörige Unternehmenswert behaftet ist. Die Apple-Aktie beispielsweise hatte Anfang August 2018 einen Wert von 160€, ist zwischenzeitlich auf knapp 200€ angestiegen und lag Anfang Dezember 2018 wieder bei ungefähr 160€. Innerhalb von vier Monaten kam es also zu einer beachtlichen Preissteigerung und einem anschließenden genauso großen Preisfall. Um solchen Unsicherheiten in der Portfoliooptimierung Rechnung zu tragen, sind nicht nur erwartete Erträge, sondern auch mögliche Verluste zu beachten.

Ziel des Projektes war es, eine optimale Aufteilung zu finden, also eine optimale Portfoliostrategie zu entwickeln. Das verwendbare Kapital betrug 1000€ und sollte für einen Monat gewinnbringend angelegt werden. Leerverkäufe (das Verkaufen von Aktien, die man nicht besitzt) und auch die Anlage in ein „sicheres" Bankkonto waren nicht erlaubt.

2.2 Vorüberlegungen

Zu Anfang wurden mit den Schülerinnen folgende Fragestellungen erörtert:

- Aktien haben unterschiedliche Werte. Wie kann man Aktien dennoch miteinander vergleichen?
- Was ist der Unterschied, wenn man einen Monat oder ein Jahr betrachtet?
- Wie kann man die erwarteten Erträge und Unsicherheiten darstellen?

Zunächst wurde gemeinsam der Begriff der „Rendite" eingeführt und das Konzept zur Renditeberechnung erarbeitet. Hiermit wurde die Performance von Aktien auf Basis der vergangenen Entwicklung vergleichbar. Die Schülerinnen erkannten, dass Renditen auf historischen Daten am besten monatsweise berechnet werden, damit dies dem vorgegebenen Anlagehorizont von einem Monat entspricht. Auch stellten sie fest, dass man Aktien auf den Wert 100€ (oder einen beliebigen anderen Wert) normieren kann, indem man den entsprechenden Anteil kauft. Basierend auf monatlich berechneten Renditewerten wurde mit den Schülerinnen Erwartungswert, Standardabweichung und Korrelation eingeführt. Sie erkannten, dass der Erwartungswert als vertrauenswürdigere Performancekennzahl an Stelle der letzten Rendite und die Standardabweichung als Quantifizierung der Unsicherheit aufgefasst werden konnten. Die Korrelation erkannten sie als Indikator für die Abhängigkeit von zwei Aktien. In den darauf folgenden eigenverantwortlichen und unbetreuten Arbeitsphasen stellten sie fest, dass eine Korrelation von 1 in dem von ihnen erarbeiteten Markowitz-Modell ohne Leerverkäufe nicht zum Diversifizieren geeignet ist.

Neben dem Ansatz, die vergangenen Verläufe der Aktienkurse zu betrachten, merkten die

Schülerinnen richtigerweise an, dass auch äußere Einflüsse die zukünftige Entwicklung beeinflussen: Katastrophen, wirtschaftspolitische Entscheidungen oder Ähnliches können den Verlauf der Kurse extrem verändern. Auch Nachhaltigkeits- und Verantwortungsbewusstsein kann die Entscheidung, in welches Unternehmen man investieren will, beeinflussen. Diese Aspekte sollten von daher neben Kennzahlen erwarteter Performance und Unsicherheiten in der Investitionsentscheidung ein Rolle spielen. Die Schülerinnen entschlossen sich daher in einer Vorab-Analyse herauszufinden, welche Aktien sie in ihren Entscheidungsraum aufnehmen wollen. Die resultierenden Unternehmen waren die folgenden:

- SAP SE
- Microsoft Corporation
- Puma SE
- Procter&Gamble Company (P&G)

Mit den gemeinsam hergeleiteten Konzepten lag es an den Schülerinnen, sich eine Möglichkeit zu überlegen wie sie eine optimale Aufteilung ihres Kapitals auf die verschiedenen Aktien berechnen können. Hierbei war das Ziel die Portfoliotheorie nach Markowitz, welche sich die Schülerinnen erarbeiten sollten. Weder wurde ihnen der Name dieser Theorie genannt, noch diese zuvor erläutert.

2.3 Ergebnisse der Arbeitsgruppe

Das Ergebnis der Schülerinnen bestand aus einem Vortrag, in dem sie

- die Problemstellung beschrieben und Erwartungswert, Standardabweichung sowie Korrelation einführten,
- die betrachteten Unternehmen analysierten,
- die Portfoliotheorie nach Markowitz erklärten und
- diese Theorie auf die betrachteten Aktien in zwei Paaren anwendeten.

Die Problemstellung aus 2.1 wurde beschrieben und die Problematik erklärt, dass die zukünftige Performance nur schwer greifbar ist. Der Anlagehorizont sowie das zur Verfügung stehende Kapital wurden genannt.

Bei der Analyse der Aktien haben die Schülerinnen pro Aktie den Aktienkursverlauf gezeigt und erklärt, warum sie diese Unternehmen wählten. Sie betonten in diesem Zuge, wie wichtig es ist, auf äußere Einflüsse und das aktuelle Weltgeschehen zu achten. Die Aktienkursdaten zu diesen Unternehmen haben sie eigenständig gesucht, heruntergeladen und so aufbereitet, dass sie berechnete Erwartungswerte, Standardabweichungen und paarweise Korrelationen angeben konnten.

Die Portfoliotheorie nach Markowitz haben die Schülerinnen mit großer Sorgfalt herausgearbeitet: Sie erkannten, dass das Kernkonzept der Theorie die Diversifikation (Risikostreuung) ist. Weiter haben sie den Unterschied zwischen systematischen und unsystematischen Risiko erklärt und erkannt, dass sie mit dem Modell lediglich das systematische Risiko minimieren. Sie erklärten, dass auf Basis der Theorie dominierte Kombinationen der Gewichte existieren und haben diese graphisch aufgezeigt. Das Bild 2 zeigt einen von den Schülerinnen generierten μ-σ-Plot. Dominierte Portfolios haben den gleichen oder kleineren Erwartungswert als andere Portfolios, besitzen allerdings eine größere Standardabweichung. Auf der Graphik liegen sie also „unten rechts“. Außerdem haben sie in diesem Zuge auf die Portfolioeffizienzlinie hingewiesen, welche von allen nicht-dominierten Port-

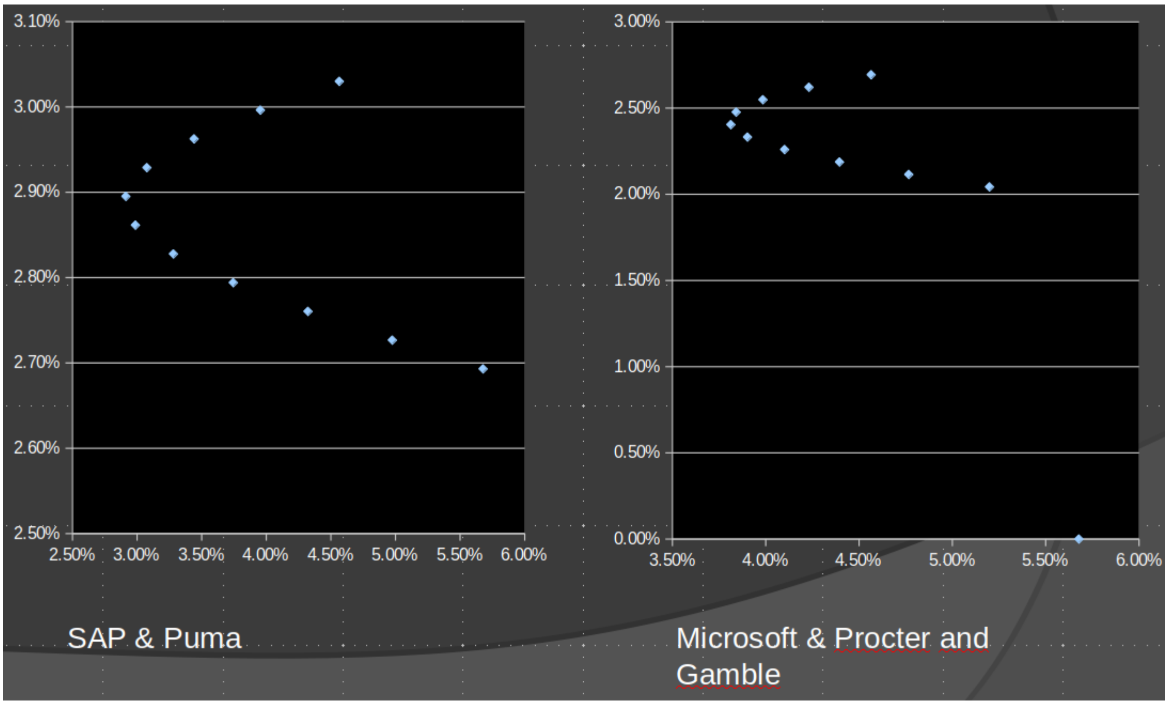


Abbildung 2: Das Bild zeigt zwei von den Schülerinnen generierte μ-σ-Plots. μ, der Erwartungswert, steht auf der y-Achse und σ, die Standardabweichung, auf der x-Achse. Abgetragen sind verschiedene Portfoliowerte: Die Schülerinnen berechneten μ und σ für verschiedene Gewichtsaufteilungen.

folios gebildet wird. Die Schülerinnen haben den Einfluss dieser Theorie betont und darauf hingewiesen, dass Harry Markowitz hierfür 1990 den Nobelpreis erhielt.

Für die Kombinationen SAP & Puma sowie Microsoft & P&G wandten sie die Theorie an. Als Ergebnis empfahlen sie in beiden Fällen eine Aufteilung von 60% zu 40%. Sie erwähnten aber auch, dass die letztendliche Gewichtung von der Risikobereitschaft des Investors abhängig ist, da jedes nicht-dominierte Portfolio zunächst nicht verworfen werden kann. In ihrem Ausblick am Ende der Präsentation gaben die Schülerinnen an, dass der nächste Schritt die Betrachtung aller vier Aktien zusammen wäre.

3 Vliesstoffe intelligent produzieren – Sebastian Blauth

3.1 Problemstellung

Vliesstoffe kommen im Alltag sehr häufig vor, auch wenn man sie oftmals gar nicht wahrnimmt. Sie werden zum Beispiel als Filter in Staubsaugern, als Dämmmaterial in Wohnungen oder in Reinigungstüchern verwendet. Das besondere an Vliesen, im Vergleich zu anderen Stoffen, ist, dass sie zwar aus einzelnen Fasern bestehen, diese aber weder gestrickt noch gewebt wurden. Für dieses Projekt wurde folgendes Szenario gewählt: Eine Firma möchte Wundauflagen für Brandverletzungen herstellen. Als Material wird dafür Kieselgel (Silicagel) verwendet, welches ohne Rückstände vom Körper abgebaut werden kann. Deswegen muss das Pflaster nicht gewechselt werden und die behandelte Wunde kann steril bleiben, was sehr förderlich für den Heilungsprozess ist. Für die Produktion des Vlieses wird das Gel erhitzt und durch Düsen gepresst, wobei Fäden entstehen, welche auf einer Unterlage abgelegt werden. Durch geschickte Bewegung der Unterlage verbinden sich die Fäden dann zu einem Vliesstoff.

Das Ziel der Firma ist es nun, die Qualität des Vlieses zu verbessern, bzw. die Fläche der Unterlage optimal zu nutzen, indem die Bewegung der Unterlage optimiert wird. Dazu gibt es folgende Qualitätskriterien: Es müssen genügend Fäden übereinander liegen, sodass das Vlies eine gewünschte Mindestdicke erreicht. Weiterhin sollte der Stoff möglichst gleichmäßig sein und keine lokalen Schwachpunkte haben. Schließlich muss auch berücksichtigt werden, dass sich die Fäden nur dann gut zu einem Vlies verbinden, solange sie noch nicht abgekühlt sind, weshalb sie sich möglichst schnell kreuzen sollten.

Aufgabe der Schülerinnen war es, die Bewegung der Unterlage unter den oben genannten Gesichtspunkten zu optimieren. Dazu wurden ihnen folgende Daten zur Verfügung gestellt:

- Die Unterlage hat die gleichen Maße wie ein DIN A4 Blatt.
- Die Fäden würden auf einer kreisförmigen Fläche mit Radius 1 cm auftreffen, falls sich die Unterlage nicht bewegt.
- Die Geschwindigkeit der Unterlage ist mit 50 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ fix vorgegeben, man kann nur die Bewegungsrichtung ändern.
- Auf die Unterlage treffen pro Sekunde 50 mg Gel auf.
- Die gewünschte Dichte für den Vliesstoff beträgt 5 $\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2}$.

3.2 Vorüberlegungen

Die Schülerinnen bekommen ein komplexes, realitätsnahes Problem, und müssen sich zunächst einmal ein sinnvolles, ihrem Kenntnisstand entsprechendes Modell für den Produktionsprozess überlegen. Ein mögliches Problem dabei ist, wie man das Auftreffen der Fäden auf der Unterlage modelliert, da eine vollständige Modellierung der einzelnen Fäden zu komplex ist. Stattdessen könnten sie als einfachste Approximation annehmen, dass sich das Gel gleichmäßig auf der Kreisfläche verteilt. Eine sinnvollere, aber auch komplexere Annahme wäre zum Beispiel, dass sich das Gel entsprechend einer Normalverteilung auf die Kreisfläche aufteilt.

Außerdem sollen sie sich überlegen, wie sie Bewegungen der Unterlage mathematisch beschreiben können, und wie sich aus einer gegebenen Bewegung dann die Qualität des Vlieses berechnen lässt. Dafür haben sie keine Musterbewegung gegeben, sondern sie müssen sich selbst überlegen, was sinnvolle Bewegungen sein könnten. Dabei ist angedacht, dass sie möglichst einfache Bewegungen - mit ein oder zwei freien Parametern - untersuchen sollen, um dann die Bewegung bezüglich dieser Parameter zu optimieren. Es soll also nicht darum gehen, aus allen möglichen und zulässigen Bewegungen der Unterlage eine (global) optimale zu finden, sondern darum, eine, bzw. mehrere parametrisierte Bewegungen zu optimieren und gegebenenfalls anschließend zu vergleichen. Da das Auswählen einer sinnvollen Bewegung eventuell Schwierigkeiten bereiten kann, wird den Schülerinnen spätestens am zweiten Tag eine einfache Bewegung vorgegeben, die sie dann im Laufe des Tages optimieren können.

Im Idealfall haben die Schülerinnen schon Programmierkenntnisse und können damit die Bewegung der Unterlage im Computer simulieren. Dies hätte dann auch den Vorteil, dass die Messung der Qualität automatisch erfolgen könnte. Die Problemstellung kann aber auch rein analytisch und geometrisch behandelt werden. Dabei könnte die Gruppe dann von den Parametern der Bewegung abhängige Funktionale aufstellen, und diese dann analytisch oder numerisch optimieren.

Der angedachte Zeitplan ist im Folgenden zu sehen:

- Am ersten Tag sollten die Schülerinnen sich mit dem Thema vertraut machen, ein möglichst einfaches mathematisches Modell entwickeln und sich mögliche Bewegungen bzw. deren Parametrisierung überlegen.
- Am zweiten Tag sollten die vorher erarbeiteten Bewegungen dann mathematisch analysiert und im Anschluss bezüglich der freien Parameter optimiert werden.
- Am letzten Tag wird nur vormittags gearbeitet. Diese Zeit ist für die Erstellung der Abschlusspräsentation vorgesehen. Dort soll die Gruppe ihre Herangehensweise und Ergebnisse den Schülerinnen und BetreuerInnen der anderen Projekte vorstellen.

3.3 Ergebnisse der Arbeitsgruppe

Für die Schülerinnen war die komplexe Thematik ungewohnt. Sie machten sich jedoch nach einer Weile vertraut mit der neuen Aufgabe. Sie sammelten erste Ideen im Brainstorming, und überlegten sich folgende weitere Vorgehensweise: Sie beschlossen, zuerst anzunehmen, dass sich das Gel gleichmäßig auf die vorgegebene Kreisfläche verteilt, um ein möglichst einfaches Modell zu erhalten. Im Anschluss berechneten sie unter diesen Annahmen, wie viele Lagen an Gel man braucht, um die gewünschte Dichte des Vlieses zu erhalten.

Nachdem die ersten Schritte gemacht waren, wollte sich die Gruppe weiter aufteilen: Die eine Hälfte wollte sich überlegen, wie man die Bewegungen mathematisch beschreiben kann. Die andere Hälfte wollte sich Gedanken über mögliche Muster, welche die Unterlage abfahren soll, machen. Ihr Ziel war, am Ende des Tages so große Fortschritte gemacht zu haben, dass sie am nächsten Tag die Ergebnisse in ein Computerprogramm übersetzen könnten, mit dem sie das Problem dann lösen wollten.

In der Praxis ergab sich dann aber eine andere Dynamik: Die Schülerinnen stellten fest, dass es sehr viele verschiedene Bewegungen der Unterlage gibt, und überlegten sich in der Gruppe eine handvoll sinnvoller Bewegungen. Dabei waren sie vor allem daran interessiert, möglichst symmetrische und gleichmäßige Bewegungen zu erhalten, um den Stoff damit automatisch homogen zu gestalten. Dabei überlegten sie sich vor allem Muster, welche zuerst auf einem kleinen Teil der Unterlage einen guten Stoff produzieren sollten, um diese

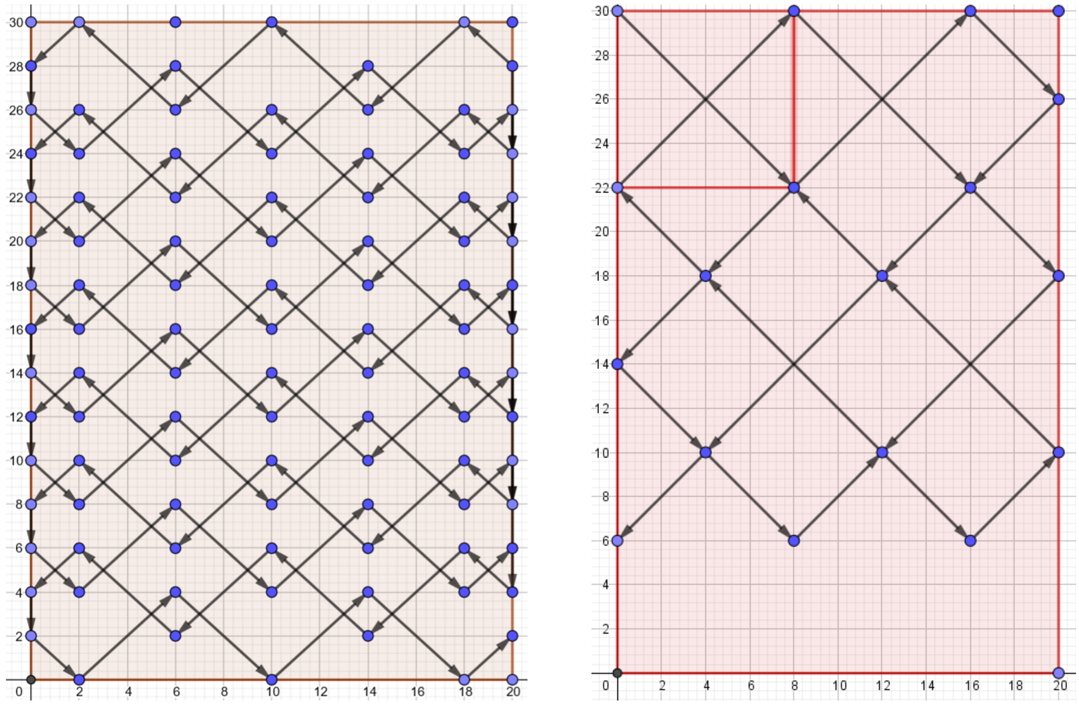


Abbildung 3: Von den Schülerinnen erarbeitete Muster für die Bewegung der Unterlage. Grafiken erstellt mit GeoGebra [4].

dann nach und nach über die komplette Unterlage zu verschieben. Dadurch versuchten die Schülerinnen zu erreichen, dass sich die Fäden möglichst schnell überkreuzen, um einen hochwertigen Vliesstoff zu erhalten. In Abbildung 3 sind zwei Muster gezeigt, welche die Gruppe im Laufe der Talent-School untersucht hat.

Nachdem die Gruppe sechs Muster erarbeitet hatte, spaltete sie sich in 3 Teilgruppen auf: Je zwei Schülerinnen untersuchten zusammen zwei der Muster auf folgende Gesichtspunkte: Wie oft muss das Muster wiederholt werden, um die gewünschte Dichte des Stoffes zu erreichen? Wie lange dauert es höchstens, bis sich schon abgelegte Fäden mit neuen überkreuzen? Dabei tauschten sie sich kontinuierlich zwischen den einzelnen Teilgruppen aus, um auf ein möglichst einheitliches Bewertungssystem zu kommen.

Am Ende des zweiten Tages hatten alle Gruppen ihre Muster analysiert, und jeweils verschiedene Funktionen für die gewünschten Qualitätsmerkmale in Abhängigkeit je eines Parameters aufgestellt. Teilweise wurden diese Funktionen auch in GeoGebra [4] nach Extrempunkten untersucht. Damit konnten dann tatsächlich auch einige der Muster optimiert werden. Durch den Vergleich zwischen den Teilgruppen konnte somit das beste der sechs Muster als Bewegung der Unterlage bestimmt werden.

Schließlich nutzte die Gruppe den letzten Tag, um in der Abschlusspräsentation ihre Ergebnisse den Schülerinnen der anderen Projekte vorzustellen. Dort stellten sie ihren oben geschilderten Arbeitsablauf und ihre Ideen vor, und konnten auch die optimierte Bewegung der Unterlage präsentieren.

4 Mit Bahn und Co entspannt ans Ziel – Andrea Maier

4.1 Problemstellung

Egal ob Straßenbahn, Bus oder Zug, viele nutzen heutzutage öffentliche Verkehrsmittel, um entspannt ans Ziel zu kommen. Autofahren in Großstädten oder über längere Distanzen bedeutet oftmals für viele Menschen Stress. Doch kommt man mit Bahn und Co immer so entspannt ans Ziel? Gerade bei zu knappen Umstiegszeiten entsteht Hektik und ist dann mal der Zug verpasst, dann bedeutet dies oftmals lange Wartezeiten und Probleme bei der Anschlussfindung. Genauso ist die Frustration bei größeren Taktungen groß. Hier stellt sich die Frage, wie man Fahrpläne überhaupt optimieren kann.

Für das Projekt wurde als Szenario ein Ausschnitt der Singapur Mass Rapid Transit (MRT) gewählt, der in Abbildung 4 zu sehen ist. Dabei wurden die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen:

- Zwischen den einzelnen Stationen beträgt die Reisezeit eine Minute.
- Der Zeitplan ist periodisch und wiederholt sich alle 40 Minuten. Dabei haben die einzelnen Linien folgende Frequenzen:

Linie:	East-West Line	Circle Line	North-South Line	North-East Line
Frequenz:	2	2	4	2

Zu bestimmen ist ein Fahrplan der abgebildeten Linien. Dabei sollen die Schülerinnen selbst entscheiden, wie das Problem modelliert wird, welche weiteren Annahmen getroffen werden können und was genau das Ziel der Modellierung ist.

4.2 Vorüberlegungen

Die Schülerinnen werden mit einem komplexen, realitätsnahen Problem konfrontiert, welches sie erst in einfachere Teilprobleme zerlegen müssen. Dabei ist wichtig, dass sie sich darüber bewusst werden, welche weiteren Annahmen für die Modellierung sinnvoll sind. Dies führt unter anderem zu den folgenden Problemstellungen:

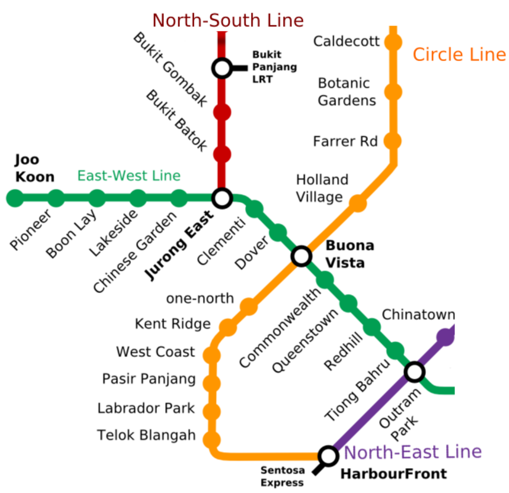


Abbildung 4: Ausschnitt der Singapur MRT [5].

- Was ist das Ziel des Optimierungsproblems?
- Was sind akzeptable Umstiegszeiten aus Sicht der Passagiere?
- Wie macht man den Fahrplan robuster gegen Verspätungen?
- Welche Teilprobleme kann man betrachten, um einen Fahrplan modellieren zu können? Wie kann man diese Teilprobleme wieder zusammenfügen, um das große Problem zu lösen?

Ziel ist es, dass die Schülerinnen den Modellierungskreislauf durchlaufen und sich auch möglicher Erweiterungen bewusst werden. Um ein Gefühl für die Modellierung zu bekommen und diese mathematisch aufschreiben zu können, sollen erst einfache Fälle betrachtet werden, deren Lösung man intuitiv ablesen kann. Diese sollen dann nach und nach erweitert werden, bis eine allgemeine Lösungs- oder Approximationsmethode entsteht. Probleme bei der Fahrplanoptimierung entstehen, wenn das zu Grunde liegende Verkehrsnetz zum Beispiel Kreise enthält, wie der in Abbildung 4 erzeugte Kreis durch die East-West Line, Circle Line und die North-East Line. Je nach Vorgehensweise kann der Fahrplan analytisch oder geometrisch modelliert werden.

Der Zeitplan gestaltet sich wie folgt:

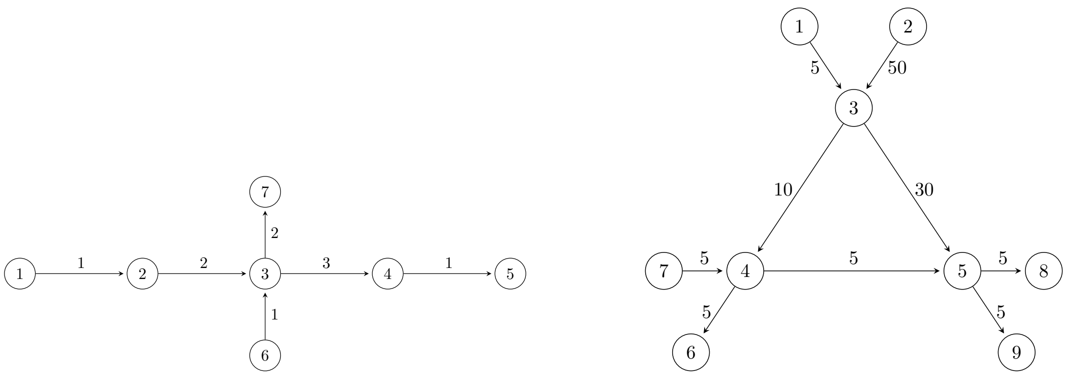
- Am ersten Tag soll ein Brainstorming über die Fahrplanoptimierung gemacht werden. Es soll ein erstes vereinfachtes mathematisches Modell entwickelt werden, welches sehr grundlegende Fälle eines Fahrplanes behandelt. Sofern möglich, soll identifiziert werden, in welchen Fällen man das Modell durch simple Methoden erweitern kann.
- Am zweiten Tag soll vormittags eine Art Algorithmus aufgeschrieben werden, der die als einfach eingestuften Fälle aus dem ersten Tag lösen kann. Grenzen der Methode sollen erkannt werden und mögliche Erweiterungen diskutiert werden. Der Algorithmus soll angepasst werden, sodass er auch Fahrpläne für allgemeinere Linienpläne lösen kann. Dies beinhaltet auch den Linienplan in Abbildung 4. Am Nachmittag soll die Abschlusspräsentation angefangen werden.
- Am letzten Tag soll die Abschlusspräsentation fertig gestellt und vorgetragen werden.

4.3 Ergebnisse der Arbeitsgruppe

Die Schülerinnen mussten sich zu Beginn mit der Komplexität des Themas auseinandersetzen und Möglichkeiten der Vereinfachung finden. Erste Modellierungsideen wurden in einem Brainstorming gesammelt. Als erstes mathematisches Modell wurden zwei Linien genommen, die nur eine Haltestelle gemeinsam haben (siehe Abbildung 5a). Dabei wurden die folgenden Annahmen getroffen:

- Alle Passagiere sollen transportiert werden können.
- Um Kosten, Emission oder Lärm einzuschränken, sollten so wenig Busse wie möglich fahren.
- Die Umstiegszeit darf nicht zu lange sein, da die Passagiere sonst frustriert sind. Allerdings darf sie auch nicht zu kurz sein, da sonst das Risiko steigt, Anschlüsse zu verpassen.
- Die Wartezeit des Verkehrsmittels (Bahn/Bus/...) wird zunächst vernachlässigt.

Die Schülerinnen haben festgestellt, dass sich aus den ersten zwei Punkten die Frequenz



(a) Erstes mathematisches Modell: Linie 1 verläuft horizontal, Linie 2 vertikal.

(b) Kreisstruktur: Erweiterung des Modells.

Abbildung 5: Mathematische Modellierung von Verkehrsnetzen mit Reisezeit an den Verbindungsstrecken.

der beiden Linien berechnen lässt. Um nun die beiden Linien in der gemeinsamen Haltestelle abstimmen zu können, haben sie versucht, die minimale Zeit zwischen den Umstiegen zu maximieren bzw. die maximale Zeit zu minimieren. Wie sich herausstellte, kann man für beide Probleme eine einfache Formel finden, die beide Probleme löst. Dies haben sie durch geometrische Veranschaulichung herausgefunden, jedoch keinen mathematischen Beweis für die Gültigkeit der Formel geführt. Als nächsten Schritt sollte das Modell auf mehrere Linien erweitert werden. Dies haben die Schülerinnen anhand von Beispielen ausprobiert und gemerkt, dass es auf Linienplänen, bei denen durch jede Haltestelle maximal zwei Linien fahren und die eine Baumstruktur (enthält keine Kreise) besitzt, einfach geht. Die Idee der Lösungsmethode besteht darin, dass man sich entlang der Baumstruktur hangelt und die Fahrpläne in den gemeinsamen Haltestellen abstimmt. Da kein Kreis in dem Linienplan ist, kommt es zu keinen Komplikationen.

Am zweiten Tag haben die Schülerinnen sich überlegt, was bei einem Kreis passiert (siehe Abbildung 5b). In diesem Fall haben sie eine heuristische Methode verwendet, die zuerst von einem Baum ausgeht, und dann die letzte Linie an die zwei anderen anpasst, indem wieder die minimale Zeit zwischen den Umstiegen zu maximieren bzw. die maximale Zeit zu minimieren ist. In dem Praxisbeispiel wurde zunächst die Circle und die North-East Line abgestimmt und erst im Anschluss die East-West Line an die anderen beiden angepasst. Danach existieren keine Kreise mehr und man kann wie im ersten Abschnitt vorgehen.

Da man nun einen gültigen Lösungsvorschlag für die Beispielaufgabe hatte, sollten sich die Schülerinnen eine Erweiterung ihrer Wahl anschauen. Als Möglichkeiten wurden

- in einer Haltestelle treffen sich mehr als zwei Linien,
- der Kreis wird nicht mehr heuristisch optimiert, sondern exakt,
- es werden Wartezeiten der Verkehrsmittel betrachtet und
- es gibt mehr als einen Kreis

identifiziert. Die Schülerinnen haben sich für das erste Thema entschieden und angefangen, drei Linien in einer Haltestelle aufeinander abzustimmen und erste Ergebnisse zu diesem Problem erlangt. Der Nachmittag des zweiten und der Vormittag des letzten Tages wurden genutzt, um die erlangten Erkenntnisse in der Abschlusspräsentation zu verarbeiten.

5 Verkehrsszenarien für das autonome Fahren – Thomas Jung

5.1 Problemstellung

Autonomes Fahren ist ein Thema, welches in letzter Zeit große Aufmerksamkeit genießt – sowohl in der Forschung als auch in der Öffentlichkeit. Durch den vermehrten Einsatz von Assistenzsystemen und den ersten autonomen Fahrzeugen hält das Thema aktuell Einzug in den Straßenverkehr. Es gibt eine Vielzahl an Feldern die für die erfolgreiche Entwicklung von autonomen Fahrzeugen wichtig sind. In diesem Projekt sollen einfache Aufgaben des autonomen Fahrens verstanden, mathematisch modelliert und gelöst werden. Startpunkt ist ein Folge-Szenario in einer Spur, wobei davon ausgegangen wird, dass das Fahrzeug die Spur halten kann, siehe Abb.**??**. Das Szenario kann dann erweitert werden durch eine

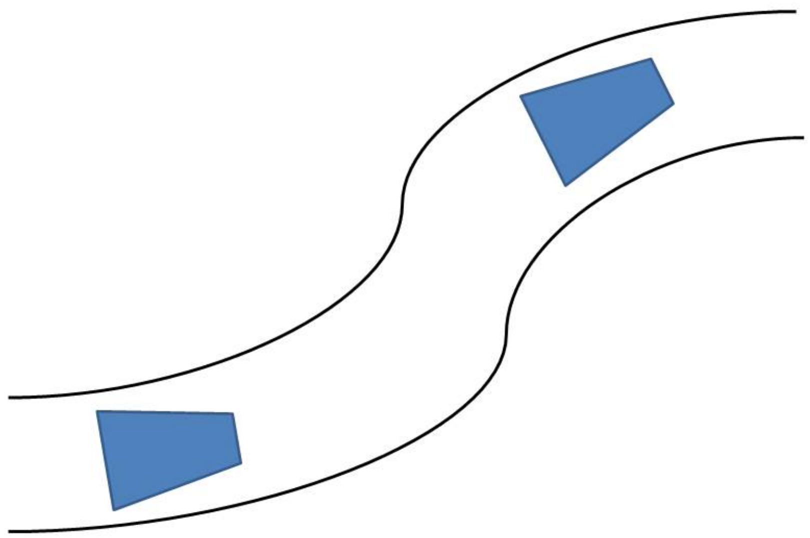


Abbildung 6: Autonomes Folgen eines Fahrzeuges

weitere Spur und das Einführen von Spurwechseln, z.B. zum Überholen oder um Hindernissen auszuweichen. Zusätzlich kann für die Szenarien eine Implementierung des mathematischen Modells durchgeführt werden, um das Modell besser untersuchen und Effekte darstellen zu können.

5.2 Vorüberlegungen

Die Schülerinnen müssen sich einen Überblick über die Situation verschaffen und mehrere Größen identifizieren. Zunächst müssen sie erkennen, über welche Kanäle man Einfluss auf das Fahrzeug nehmen kann und was davon relevant ist. Dann müssen sie entscheiden, welche Größen bekannt sind, gemessen werden können und welche sinnvoll genutzt

werden können, um das eigene Fahrzeug zu steuern. Schülerinnen, die eigene Erfahrungen, zum Beispiel aus der Fahrschule, haben, könnte dies leichter fallen als Schülerinnen, die noch nicht selbst Auto fahren. Ähnliche Überlegungen müssen für die Erweiterung auf mehrere Spuren angestellt werden. Hier muss erarbeitet werden, welche Größen bestimmen, wann man wechseln möchte und wann ein Spurwechsel sicher ist. Zudem kann es hier interessant sein zu betrachten, was die Unterschiede zwischen Überholmanövern und zum Beispiel Spurzusammenführungen sind.
Die Implementierung ist stark von den Vorkenntnissen der Schülerinnen abhängig. Hier kann es von Nöten sein, eine Einarbeitungsphase einzuplanen, damit die Schülerinnen mit der entsprechenden Programmiersprache/Programmierumgebung vertraut werden.

5.3 Ergebnisse der Arbeitsgruppe

Die Schülerinnen hatten schnell Ideen, welche Größen wichtig sind. Mit ein wenig Hilfe identifizierten sie die Beschleunigung als Größe, die sie am Fahrzeug steuern wollen. Nach einiger Zeit des Probierens, wählten sie den Abstand zum Vordermann und den Unterschied in der Geschwindigkeit als Größen, auf die zu reagieren sei. Beim Aufstellen einer mathematischen Gleichung entschieden sie nach mehreren Durchläufen, nur noch den Abstand zu betrachten. Dadurch kamen sie auf eine Art Safety-Distance-Modell. Der nächste Schritt war das Implementieren des Modells in Matlab. Da ein Großteil der Schülerinnen keine Programmiererfahrung hatte, mussten sie sich hier erst einarbeiten und mit Matlab vertraut machen. Danach konnten die Schülerinnen ihre Modellparameter variieren und deren Effekte beobachten. Um den Fokus nicht vollständig auf das Erlernen von Matlab zu legen, war der nächste Schritt die Betrachtung des Spurwechsels. Auch hier war der erste Schritt die Identifikation der wichtigen Größen. Dies gelang wieder schnell mit guten Ideen für Überholmanöver, und es konnte eine Liste von Voraussetzungen aufgestellt werden, die erfüllt sein müssen um einen sicheren Spurwechsel zum Überholen zu gewährleisten. Das Szenario eines Zusammenlaufens von Spuren wurde zunächst nicht bedacht, nach Rücksprache dann aber auch betrachtet und behandelt. Am Ende standen ein Modell zur Regelung eines Fahrzeugs im Einspurfall, sowie eine Erweiterung, die den Mehrspurfall betrachtet. Eine grundlegende Implementierung des Einspurmodells sowie eine Betrachtung der Effekte des freien Modellparameters wurden ebenfalls durchgeführt.

6 Fazit

Die MINT-EC-Girls Camp: Math-Talent-School, die im Mai 2019 in Kaiserslautern stattfand, wurde zum Einen durch das ITWM, aber auch durch den MINT-EC mit Hilfe von Fragebögen evaluiert. Die Ergebnisse werden im Folgenden besprochen.
Insgesamt kam die Math-Talent-School sehr gut bei den Schülerinnen an. Alle Teilnehmerinnen bewerteten die Veranstaltung mit mindestens vier von fünf Punkten (MINT-EC Feedback), beziehungsweise fünf von sechs Punkten (ITWM Feedback). Über 90% der Teilnehmerinnen empfanden die gestellten Themen als interessant und bedeutsam:

> „Ich denke, dass die Themen, mit denen wir uns beschäftigt haben, mir sowohl in der Schule als auch im späteren Leben weiterhelfen werden."

> „Ich fand die Themenauswahl sehr gut und interessant."

Fast alle würden die Math-Talent-School weiter empfehlen. So wurden einige Kommentare ähnlich dem folgenden gegeben:

> „Ich würde die Teilnahme an einem solchen Camp auf jeden Fall weiterempfehlen, da ich finde, dass sie eine sehr gute Möglichkeit darstellen, um praktische Eindrücke und Erfahrungen zu sammeln."

An den Kommentaren lässt sich außerdem ablesen, dass die Schülerinnen einen Einblick in die Mathematik außerhalb des Schulunterrichts erhalten haben, was unter anderem durch die folgenden Zitate aus Feedbackbögen ersichtlich ist:

> „Ich habe einen guten Eindruck darüber gewonnen was angewandte Mathematik ist und kenne jetzt den Unterschied zwischen der Schulmathematik und Universitätsmathematik."

Auch das Anliegen, den Schülerinnen den Modellierungskreislauf nahe zu bringen und für die Mathematische Modellierung zu sensibilisieren, ist geglückt, wie von vielen Teilnehmerinnen durch entsprechende Kommentare gezeigt:

> „In unseren Projekten mussten wir das Problem aber erst einmal auf eine mathematische Ebene übertragen."

Jedoch auch neben der mathematischen Fertigkeiten und Kenntnisse, die in der Math-Talent-School erworben und ausgebaut werden, wurde die soziale Komponente von den Schülerinnen nicht vernachlässigt. Auch hier haben sich die Teilnehmerinnen durch die spezielle Arbeitssituation weiterentwickelt:

> „Außerdem galt es eine Planung zu entwerfen, in der jeder seine Stärken einsetzen konnte und man zwischendurch arbeitsteilig arbeitete, man gleichzeitig aber gut in der Gruppe harmonierte."

Insgesamt sind sich die meisten Teilnehmerinnen einig, dass das Camp länger sein könnte:

> „Das Mint-Camp könnte einen Tag länger dauern, damit wir uns mit dem Thema besser auseinandersetzen können. "

Die Schülerinnen haben jedoch nicht nur den eigentlichen Workshop, sondern auch die begleitenden Aktivitäten durch zahlreiche Kommentare positiv erwähnt. Die Betreuung im ITWM, an der Universität und vom MINT-EC wurde gelobt.
Durch die deutlich positiven Rückmeldungen sowohl zu den mathematischen Themen als auch zu den weiteren Kompetenzen, an denen die Schülerinnen während der Math-Talent-School gearbeitet haben, kann die Veranstaltung als Erfolg angesehen werden. Durch die großzügige Unterstützung des ITWMs, um welche sich Prof. Dr. Karl-Heinz Küfer und Sylvia

Gerwalin ständig bemühen, kann die Math-Talent-School weiterhin durchgeführt werden.

Literatur

[1] Fraunhofer-ITWM. https://www.itwm.fraunhofer.de. Accessed: 2019-07-03.

[2] Kompetenzzentrum für mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule. https://komms.uni-kl.de. Accessed: 2019-07-03.

[3] MINT-EC: Das nationale Excellence-Schulnetzwerk. https://www.mint-ec.de. Accessed: 2019-07-03.

[4] M. Hohenwarter, M. Borcherds, G. Ancsin, B. Bencze, M. Blossier, J. Éliás, K. Frank, L. Gál, A. Hofstätter, F. Jordan, Z. Konečný, Z. Kovács, E. Lettner, S. Lizelfelner, B. Parisse, C. Solyom-Gecse, C. Stadlbauer, and M. Tomaschko. GeoGebra 5.0.507.0, Oct. 2018. http://www.geogebra.org.

[5] Jpatokal. Wikimedia Commons, Nov. 2007. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Singapore-MRT.png (modified), License: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.