

TA ed.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT Nr. 15

BERECHNUNG UND OPTIMIERUNG DES ENERGIE-  
GEWINNES BEI ANLAGEN ZUR LUFTERWARMUNG  
MITTELS ERDKANAL

200 \*  
F. J. PFREUNDT

Diese Arbeit wurde gefördert durch das Wirtschaftsministerium  
des Landes Rheinland-Pfalz und durch das Forschungsprojekt  
"Technomathematik" der Stiftung Volkswagenwerk.

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH MATHEMATIK  
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE  
6750 KAISERSLAUTERN

SEPTEMBER 1986

## I. Problembeschreibung

### Lufterwärmung im Erdkanal

Hallen, wie Turnhallen oder Fabrikationshallen werden häufig mit Warmluft beheizt (s. Abb. 1).

Dazu stellt ein Heizkessel Heißwasser bereit, das über einen Wärmetauscher (WT1) Luft erwärmt.

Diese Warmluft ("Zuluft") wird über ein Gebläse in die Halle eingebracht. An anderer Stelle der Halle wird die Luft, die sich abgekühlt hat, wieder angesaugt ("Umluft"). Diese wird im Wärmetauscher wieder auf Solltemperatur erwärmt und erneut eingeblasen.

Aus hygienischen Gründen (Luftfeuchte, Gerüche, CO<sub>2</sub> etc.) muß allerdings ein Teil der angesaugten Umluft ins Freie fortgeführt werden ("Fortluft") und stattdessen frische "Außenluft" zugeführt werden. Dies geschieht in einer Mischkammer.

Diese Außenluft hat während der Heizperiode eine recht niedrige Temperatur, so daß ein beachtlicher Anteil der Heizenergie für ihre Erwärmung aufgebracht werden muß. Um Energie zu sparen, wird die Außenluft über einen Wärmetauscher WT2 durch die Fortluft vorgewärmt.

Eine weitere Einsparung wäre möglich, wenn es gelänge, diese Außenluft auf irgendeine "natürliche" Art und Weise zusätzlich vorzuerwärmen.

### Erdreich

Im Gegensatz zur Lufttemperatur weist die Temperatur des Erdreiches auch bereits in geringen Tiefen nur eine geringe Variation während des Jahres auf (s. Abb. 2).

In 5 m Tiefe schwankt die Temperatur nur zwischen 17°C und +11°C während des Jahresablaufs (s. Abb. 3).

Während der Heizperiode liegt die Temperatur des Erdreiches also deutlich über der durchschnittlichen Lufttemperatur.

Zusätzlich existiert noch eine gewisse Phasenverschiebung zwischen Lufttemperatur und Erdreichtemperatur (s. Abb. 4).

Halle

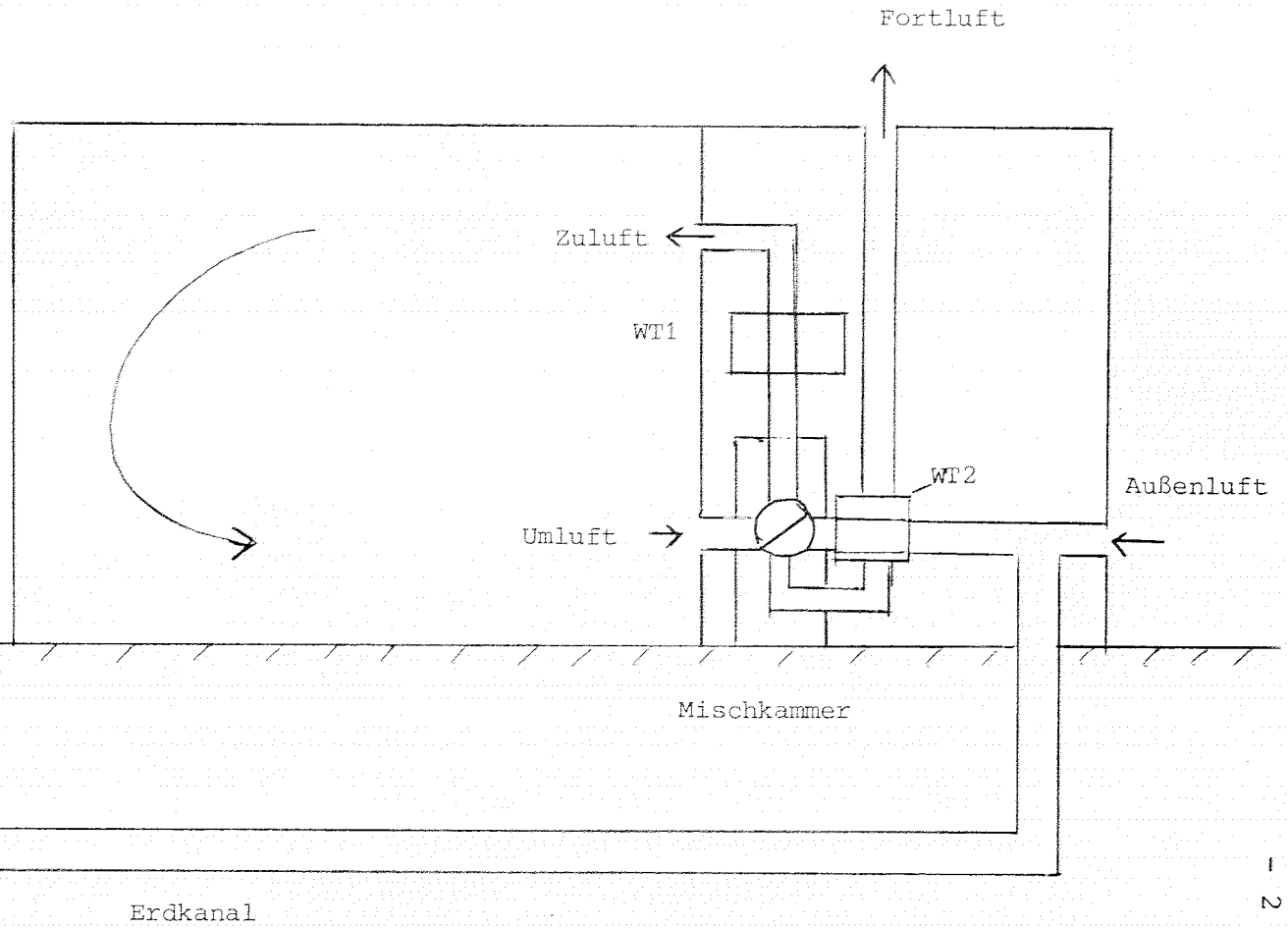
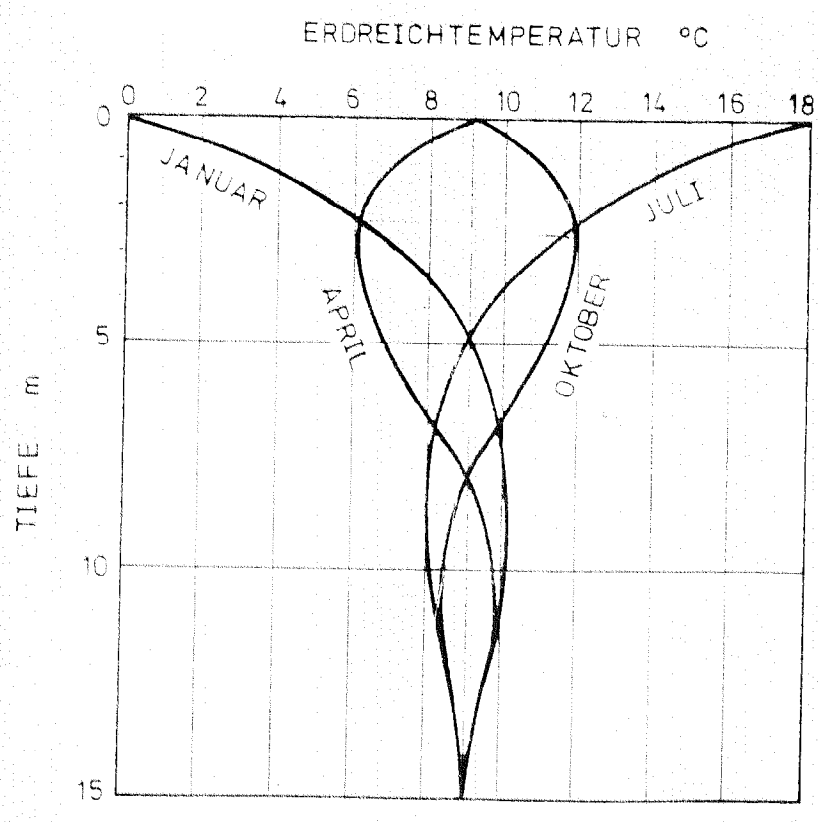
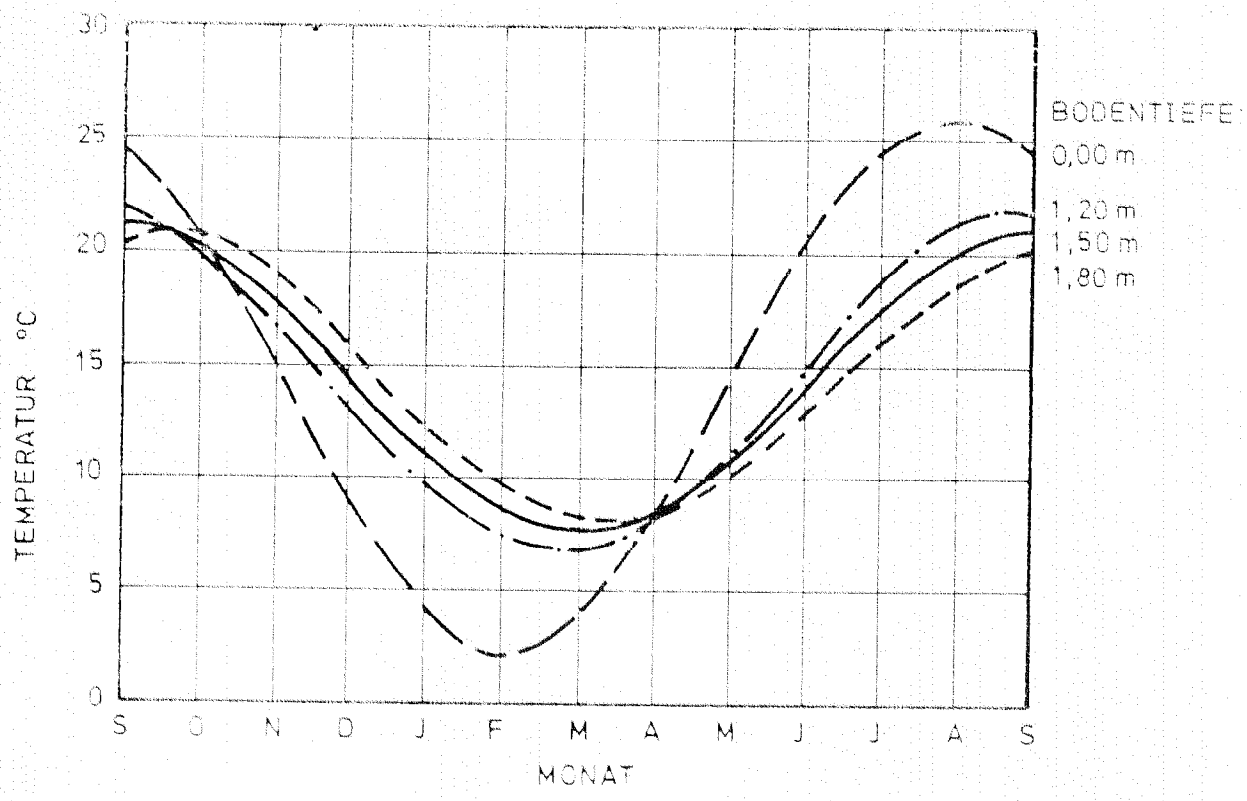


Abb. 1



ERDREICH-TEMPERATURPROFILE IM JAHRESABLAUF  
[QUELLE: VDI-BERICHT 343, 1979]

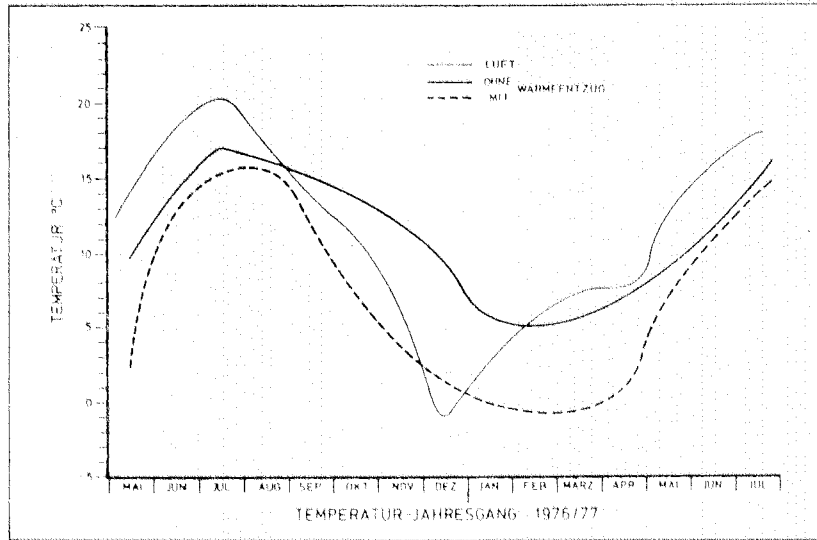
Abb. 2



JAHRESGANG DER ERDTEMPERATUREN IN UNTERSCHIEDLICHEN TIEFEN  
[QUELLE: WARMPEPUMPEN, VULKAN-VERLAG 1978]

Abb. 3

Bodentemperaturen mit und ohne Wärmeentzug in 1 m Tiefe



Quelle: O. Specht, VEW

Abb. 4

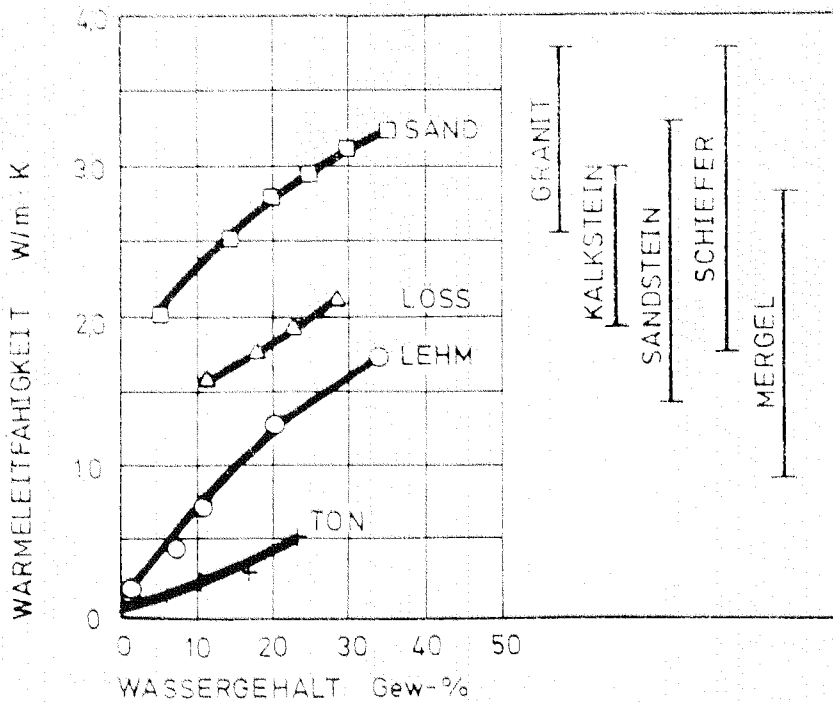


Abb. 5

WÄRMELEITFÄHIGKEIT VON ERDREICH UND GESTEINEN  
[QUELLE: VDI-BERICHT 343, 1979]

### Erdkanal

Wird in genügender Tiefe (aber oberhalb des Grundwasserspiegels) ein Kanal verlegt und im Winter die kalte Außenluft dadurch angesaugt, so wird sich diese Außenluft erwärmen und man kann somit prinzipiell Energie einsparen.

Unklar ist aber, ob dieses Verfahren wirtschaftlich ist wegen der für den Bau des Kanals notwendigen Investitionen.

Es ist dazu notwendig, die Wärmemenge abzuschätzen, die während der Heizperiode aus dem Kanal entnommen werden kann.

### Daten

#### a) Mehrzweckhalle

Die Mehrzweckhalle besteht aus der eigentlichen (Sport-)Halle, den Naßräumen sowie einem Foyer.

Volumen der Halle:	20.000 m <sup>3</sup>
Heizleistung des Kessels:	300 kW/h
Luftumwälzung der Luftheizung:	
Halle	20.000 m <sup>3</sup> /h
Naßräume	4.000 m <sup>3</sup> /h
Foyer	4.000 m <sup>3</sup> /h

#### b) Erdkanal

Der Kanal von 50 m Länge besteht aus Betonröhren mit einem Durchmesser von 0,40 m, die in einer Tiefe von 1,50 m verlegt wurden. Zur Verwirbelung der Luft sind im Kanalquerschnitt Störbleche angebracht. Der maximale Durchsatz durch den Kanal beträgt ca. 7000 m<sup>3</sup>/h.

### Fragestellung

Es ist zu berechnen, welche Wärmemenge vom Erdreich über den Kanal an die angesaugte Luft während einer Heizperiode abgegeben werden kann.

## II. Mathematisch-physikalisches Modell

### 1. Welche physikalischen Effekte sind relevant?

#### a) Luftströmung im Kanal

Bei den vorliegenden Werten von  $\sim 10$  m/s Luftgeschwindigkeit und Rohrdurchmesser 0.4 m haben wir es mit einer voll turbulenten Rohrströmung zu tun ( $Re \sim 10^5$ ). Durch eingesetzte Querstreben wird die Luft zusätzlich verwirbelt.

##### 1. Annahme:

Lufttemperatur ist über dem Querschnitt konstant.

##### Physikalischer Effekt:

Wärmeübergang findet in der turbulenten Grenzschicht zwischen Rohrwand und Luftströmung statt.

#### b) Wärmeleitung im Erdreich

Im Erdreich liegt eine Temperaturschichtung vor. Diese Temperaturschichtung ist jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen.

##### Berücksichtigung der Oberflächentemperatur:

Es liegt eine instationäre Wärmeströmung vor. Sie ist abhängig von Wärmeleitzahl, Dichte, spez. Wärme.

##### 2. Annahme:

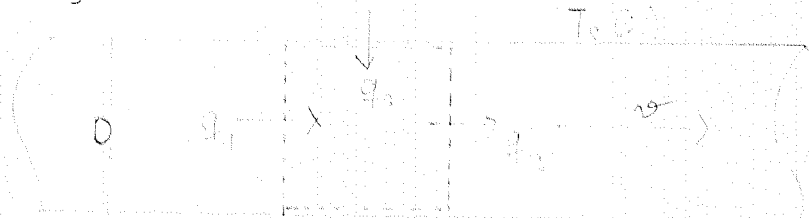
Eisbildung bzw. Kondensation seien vernachlässigbar. Die physikalischen Daten seien zeitunabhängig.

##### Physikalischer Effekt:

Instationärer Diffusionsprozeß, zeitlich veränderliche Randbedingungen.

### 2. Modell der Luftströmung im Rohr

Energiebilanz:



$$q_1 + q_2 = q_3$$

Wärmefluß in das Kontrollvolumen:

$$q_1 = \rho \frac{\pi D^2}{4} \cdot v c_p \cdot T_f|_x$$

Wärmefluß aus dem Kontrollvolumen:

$$q_3 = \rho \pi \frac{D^2}{4} v c_p T|_{x+\Delta x}$$

- wobei  $\rho$  = Luftdichte
- $p$  = Rohrdurchmesser
- $v$  = Strömungsgeschwindigkeit
- $c_p$  = spez. Wärme Luft
- $T_f|_x$  = Lufttemperatur am Ort  $x$ .

Wärmefluß zwischen Rohrwand und Rohrinnelem.

Eine wirklichkeitgerechte Beschreibung dieses Wärmeübergangs erfordert das gesamte Instrumentarium der Navier-Stokes-Gleichung. Dies ist im Rahmen der uns interessierenden Fragestellung jedoch ein zu großer Aufwand.

Wir gehen von der Hypothese aus:

$$\frac{q_3}{A} \sim \Delta T \quad \begin{array}{l} A = \text{Oberfläche} \\ \Delta T = T_s(x) - T_f(x) \end{array}$$

d.h.

$$q_3 = h \cdot \pi D \Delta x (T_s - T_f)(x)$$

$h$  = Wärmeübergangskoeffizient.

Im Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  ergibt sich also folgende Differentialgleichung:

$$\rho \pi \frac{D^2}{4} v c_p \frac{dT_f}{dx} = h \pi D (T_s - T_f)(x)$$

bzw.

$$\frac{dT_f}{dx} + \frac{h}{\rho v c_p} \frac{4}{D} \cdot T_f = \frac{h}{\rho v c_p} \frac{4}{D} T_s(x)$$

Der Quotient  $h/(\rho \cdot v \cdot c_p)$  wird auch Stanton-Zahl genannt.

Sie ist eine dimensionslose Größe. Somit

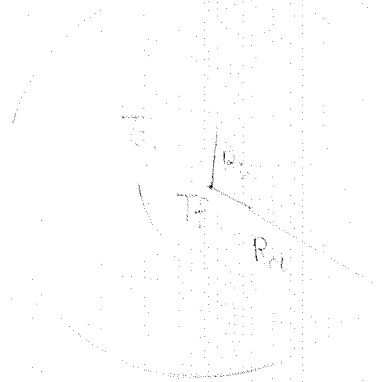
$$(1) \quad \frac{dT_f}{dx} + St \frac{4}{D} T_f = St \frac{4}{D} T_s(x)$$



### 3. Modell der Wärmeleitung im Erdreich

#### a) 1-dimensionales Modell:

Dazu betrachten wir folgendes zylindersymmetrisches Problem:



Die Wärmeleitung wird beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t,r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \alpha \frac{\partial}{\partial r} T(t,r) \right),$$

wobei  $\alpha$  der Diffusionskoeffizient im Erdreich ist.

Wie bereits in Teil 2 beschrieben, soll der Wärmeübergang an ein den Zylinder umströmendes Medium durch den Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  beschrieben werden.

Mit dem Newton'schen Kühlungsgesetz erhalten wir folgende Randbedingungen:

#### Fall I

Der Zylinder wird im Innern von Luft der Temperatur  $T_f$  durchströmt und ist nach außen hin isoliert.

$$r = R_i \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h}{k} (T_s - T_f)$$

$k$ : Wärmeleitfähigkeit des Erdreiches

$$r = R_a \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

#### Fall II

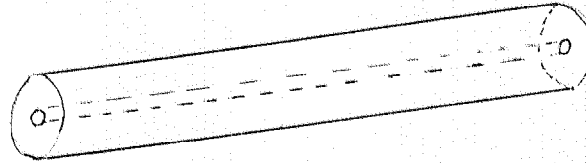
Der Zylinder ist nach innen isoliert und wird außen von Luft der Temperatur  $T_f$  umströmt. Dieser Fall dient nur numerischen Untersuchungen, da hier bereits analytische Lösungen vorlagen.

$$r = R_i \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$r = R_a \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h}{k} (T_s - T_f)$$

b) 2-dimensionaler Fall

Wir nehmen wiederum Zylindersymmetrie an, allerdings habe der Zylinder jetzt eine endliche Ausdehnung.



Annahme: Wir wollen weiterhin annehmen, daß die Wärmeströmung parallel zum Rohr für den zu untersuchenden Zeitraum vernachlässigbar ist. Diese Annahme ist dadurch gerechtfertigt, daß - wie wir später sehen werden und wie es bereits Sommerfeld 1 berechnet hatte - bereits in wenigen Metern Tiefe eine Phasenverschiebung gegenüber der Oberflächen-temperatur von einem halben Jahr vorliegt.

Problem: Einfluß der Außentemperatur auf die Temperaturschichtung des Erdreiches. Im vorliegenden Fall steht die nach unten gut gedämmte Turnhalle über dem Rohr, durch das die Luft angesaugt wird.

D.h., die

Annahme  $r = R_a$   $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$  ist gerechtfertigt.

Dies bedeutet, daß wir bei dieser Näherung einen nach außen isolierten Zylinder betrachten, dem im Winter Wärme entzogen und im Sommer Wärme (Kühlung der Luft) zugeführt wird.

Für eine Aussage zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit einer solchen Anlage sollte also folgendes Modell ausreichen:

Auf Grund der getroffenen Annahmen können wir unseren Zylinder in Scheiben schneiden und für die Wärmeströmung im Erdreich die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung betrachten

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}(t,r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \alpha \frac{\partial}{\partial r} T_j(t,r) \right)$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial T_j}{\partial r} = \frac{h}{k} (T_{sk} - T_{fj}) \quad r = R_i$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial r} = 0 \quad r = R_a$$

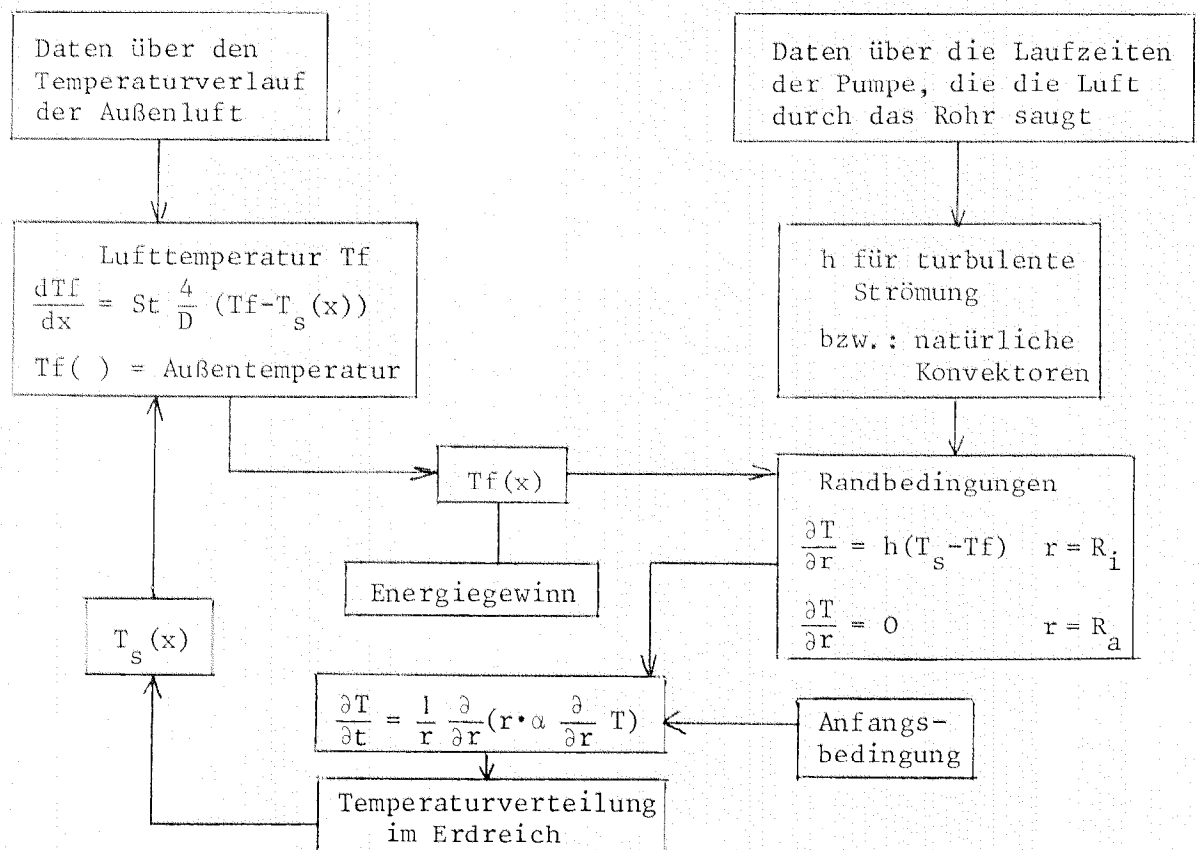
wobei:  $T_j(t,r)$  die Temperaturverteilung in der j-ten Scheibe darstellt.

$T_{Sj}$  : zugehörige Oberflächentemperatur der Rohrwand

$T_{fj}$  : zugehörige Temperatur der durchströmenden Luft

Zur Berechnung von  $T_{jf}$  wird das in 2. beschriebene Modell herangezogen. Diese stellt auch die Kopplung zwischen den verschiedenen Scheiben her.

Das Modell zeigt also folgenden schematischen Aufbau:



4. Berechnung der Stanton-Zahl bzw. des Wärmeübergangskoeffizienten

Für den Energiegewinn einer der entscheidendsten Faktoren ist neben der Leistungsfähigkeit des Erdreiches die richtige Modellierung des Wärmeübergangs und die Berechnung von  $h$ .

Es gibt eine ganze Reihe von Methoden und Ansätzen zur Berechnung von  $h$ . Ich möchte hier einen Teil davon präzisieren, allerdings ohne den ganzen strömungsdynamischen Hintergrund zu erläutern.

Einige Begriffe sollten allerdings zunächst erklärt werden:

a) Reynoldszahl:  $Re_D$

Strömungen sind mechanisch ähnlich, wenn sie die gleiche Reynoldszahl besitzen.  $1/Re$  ergibt sich als dimensionsloser Vorfaktor des Diffusionsterms in der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichung

$$Re_D = \frac{V \cdot D}{\nu} ,$$

wobei  $V$ : Strömungsgeschwindigkeit

$\nu$ : kinematische Zähigkeit

$D$ : in unserem Fall der Rohrdurchmesser.

b) Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$$

$k$  = Wärmeleitzahl

$c_p$  = spezifische Wärme

Sie setzt die Impulsübertragung und die thermische Diffusion in Beziehung zueinander.

c) Nusselt-Zahl:  $Nu_D$

Sie stellt die dimensionslosen Oberflächenübertragungsrates dar.

$$Nu_D = \frac{h \cdot D}{k} .$$

Für feste Geometrie und isothermen Rand ist die Nusselt-Zahl eine Funktion der  $Re$  und  $Pr$ -Zahl.

Nun zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten.

a) Nach der Dittus-Boelter-Formel:

Vgl. [2], S. 166; [3], S. 305.

Diese Formel geht von einer turbulenten Rohrströmung in einem glatten Rohr aus. Zur Herleitung sei auch auf das Buch von Brown, Marco [4] hingewiesen. Es enthält eine Beschreibung der Methoden, die zu dieser Formel mit ihren Variationen führt. Es gibt im wesentlichen 3 Ansätze:

- 1) Reynold's Analogie zwischen Wärmeübertragung und Strömungswiderstand
- 2) Dimensionsanalyse
- 3) Experimentelle Ansätze

Unter den Voraussetzungen:

- (1)  $L/D > 60$
- (2)  $0.7 < Pr < 100$
- (3)  $Re_D > 10^4$
- (4) Alle Materialeigenschaften werden für die mittlere Temperatur am Rand bestimmt.
- (5)  $n=0.4$ , falls das Fluid erwärmt wird,  
 $n=0.3$ , falls das Fluid gekühlt wird,  
gilt für die Nusselt-Zahl

$$\underline{Nu_D = 0.023 Re_D^{0.8} Pr^n}$$

Weiter ist noch ein Einström-Effekt zu berücksichtigen. Denn erst nach einigen Metern hat sich im Rohr ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil ausgebildet. Es wird deshalb eine durchschnittliche Nusselt-Zahl  $Nu_{ave}$  eingeführt und  $Nu_{ave} = c \cdot Nu$ , wobei  $c$  von  $L/D$  abhängt (vgl. Tabelle in [2], S. 265).

In unserem Fall  $L = 50$ ,  $D = 0.4$  ergibt sich  $c \approx 1.02$ , und wir berechnen

$$h = Nu_{ave} \cdot \frac{k}{D}$$

Für den vorliegenden Fall ergeben sich also folgende Werte:

$Pr = 0.713$  für Luft bei  $280^{\circ}K$

$\nu = 1.387 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  für Luft bei  $280^{\circ}K$

$k = 2.407 \cdot 10^{-2} \text{ W/mK}$  für Luft bei  $280^{\circ}K$

Luftgeschwindigkeit  $v = 10 \text{ m/s}$

$Nu_{ave} = Nu \cdot 1.02$ ,

somit:  $Re = 288\ 000$

$Nu = 477$   $n = 0.4$

und für den Wärmeübergangskoeffizienten ergibt sich

$h = 28.7.$

b) Da eine direkte Beziehung zwischen Wärmeübertragung und Druckverlust im Rohr besteht, ergibt sich eine andere Möglichkeit, den Wärmeübergangskoeffizienten zu bestimmen (vgl. [4]).

Wenn ich mit  $f$  den Reibungswiderstand bezeichne, so ergibt sich im Falle einer turbulenten Strömung die Formel

$$h = \frac{f}{\gamma} \cdot v \cdot c_p \cdot \rho / Pr^{0.6}$$

als Näherungsformel auch für raue Rohre  $f$  läßt sich aus Tabelle 1 entnehmen:

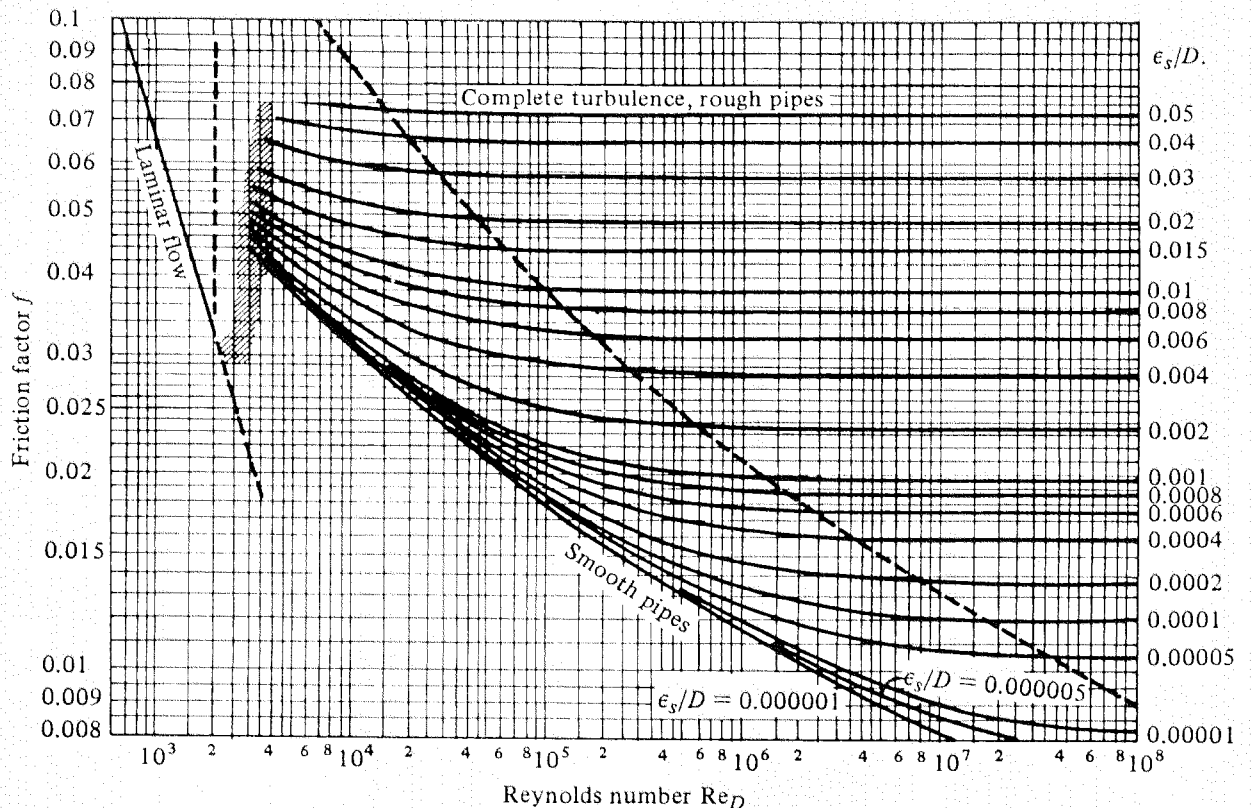


Tabelle 1

Bemerkung: Für Beton  $\epsilon_s$ : 0.3 - 3 mm.

Für die beiden Extremwerte

$$\epsilon_s = 0.0003 \text{ m} \quad \epsilon_s = 0.003 \text{ m}$$

ergeben sich für f die Werte

$$f = 0.02 \quad f = 0.036$$

und somit erhalten wir für h

$$h_1 = 38.8 \quad h_2 = 69.8 .$$

Setzen wir den Wert für glattes Rohr ein, so erhalten wir wie in a)  $h = 29$ .

- c) Eine genauere Formel für voll turbulente Strömung und rauhe Rohre findet sich in [2] S. 264-205 (halb empirisch).

$$\epsilon_s^+ := \text{Re}_D (f/8)^{1/2} \cdot \epsilon_s / D$$

Falls  $\epsilon_s^+ > 60$ , dann:

$$f = \frac{1}{(1.74 + 2 \log_{10} (\frac{D}{2\epsilon_s}))^2}$$

$$h = \frac{f}{8} \cdot v \cdot \rho \cdot c_p \frac{1}{1 + (\frac{f}{8})^{1/2} [5.19 \cdot \epsilon_s^+ 0.2 \cdot p_r^{0.44} - 8.5]}$$

In unserem Fall ergibt sich für  $\epsilon_s = 0.002$

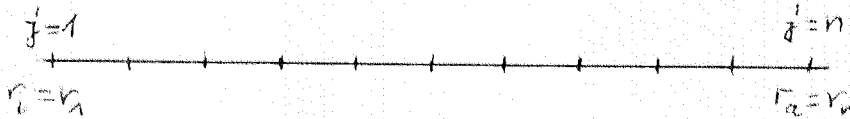
$$\underline{\underline{h = 42}}$$

Diesen Wert wollen wir unseren Berechnungen zugrunde legen.

III. Vergleich verschiedener numerischer Verfahren zur Berechnung der Lösung des 1-dimensionalen Problems

A) Beschreibung der drei getesteten numerischen Verfahren.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$



Fall I:  $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h}{k} (T(t, r_1) - T_f)$   $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

Fall II:  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$   $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{h}{k} (T(t, r_n) - T_f)$

Verfahren 1

Crank-Nicholsen im Inneren, einseitige Differenz am Rand

$$T_j^m := T[m \cdot \Delta t, r_j]$$

$$\Delta r_j := r_{j+1} - r_j$$

$$\Delta t := \text{Zeitschrittweite}$$

$$j = 2, \dots, n-1$$

$$(3.1) \quad T_j^{m+1} - T_j^m = \frac{\Delta t}{r_j \Delta r_j^2} \left[ \frac{1}{2} \left( r_j + \frac{4r_j}{2} \right) \cdot (T_{j+1}^{m+1} - T_j^{m+1} + T_{j+1}^m - T_j^m) \right] \\ - \frac{\Delta t}{r_j \Delta r_{j-1}^2} \left[ \frac{1}{2} \left( r_j - \frac{\Delta r_{j-1}}{2} \right) \cdot (T_j^{m+1} - T_{j-1}^{m+1} + T_j^m - T_{j-1}^m) \right]$$

Fall I:  $j = 1$

$$(3.2) \quad T_1^{m+1} - T_1^m = \frac{h \cdot \Delta r_1}{k} (T_1^{m+1} - T_f)$$

$$j = n$$

$$(3.3) \quad T_n^{m+1} - T_{n-1}^{m+1} = 0$$



Fall II:  $j = 1$

$$(3.4) \quad T_2^{m+1} - T_1^{m+1} = 0$$

$j = n$

$$(3.5) \quad R_n^{m+1} - T_{n-1}^{m+1} = - \frac{h \Delta r_{n-1}}{k} (T_n^{m+1} - T_f)$$

Da eine Wärmeströmung in Richtung Rand vorliegt, wurde zunächst vermutet, daß eine einseitige Differenz diesem Verhalten der Lösung am besten entsprechen würde.

Da der Algorithmus am Rand jedoch von niedrigerer Ordnung als der Cr-N ist, wurde als 2. Verfahren folgende Variante gewählt:

Verfahren 2 (r-N mit zentraler Differenz am Rand)

Gleichung (3.1) ist jetzt gültig auf  $j = 1, \dots, n$ ;

Fall I: Randbedingung bei  $r_1$

$$(3.6) \quad T_2^{m+1} - T_0^m = \frac{h^2 r_1}{k} (T_1^{m+1} - T_f)$$

Randbedingung bei  $r_n$

$$(3.7) \quad T_{n+1}^{m+1} - T_{n-1}^{m+1} = 0$$

Durch Auflösen von (3.6) nach  $T_0$  und (3.7) nach  $T_{n+1}$  und Einsetzen in (3.1) lassen sich die virtuellen Werte  $T_0, T_{n+1}$  eliminieren.

Bemerkung: Für die Gleichung  $u_t = \sigma u_{xx}$   $\sigma = \text{const}$  ist bekannt, daß bei spezieller Wahl von  $\theta$  im Algorithmus

$$(*) \quad \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \sigma \frac{\theta (S^2 u)_j^{m+1} + (1-\theta) (S^2 u)_j^m}{(\Delta x)^2},$$

$$\text{wobei } (S^2 u)_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$$

sich die Ordnung des Verfahrens bzgl.  $(\Delta x)$  erhöhen läßt.  
 Für das Verfahren 2 gilt: Der lokale Diskretisierungsfehler  
 $c = O(\Delta x^2) + O(\Delta x^2)$  - das Verfahren ist implicit und somit stabil.

Verfahren 3 ist eine Übertragung dieses Verfahrens höherer  
 Ordnung auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten.

### Verfahren 3

Mit Hilfe der Substitution  $y = \ln r$  geht die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

in die Gleichung

$$\tilde{T}(t, y) = T(t, e^y)$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\sigma}{e^{2y}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{T}$$

über, denn

$$\frac{1}{e^{2y}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(t, e^y) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} T + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} .$$

Und wir diskretisieren nun folgendermaßen:

$$\underline{j' = 1, \dots, n} \quad (\tilde{T} = T)$$

$$(3.9) \quad \frac{1}{12} \frac{T_{j+1}^{m+1} - T_{j+1}^m}{\sigma e^{-2y_{j+1}} \Delta t} + \frac{5}{6} \frac{T_j^{m+1} - T_j^m}{\sigma e^{-2y_j} \Delta t} + \frac{1}{12} \frac{T_{j-1}^{m+1} - T_{j-1}^m}{\sigma e^{-2y_{j-1}} \Delta t}$$

$$= \frac{T_{j+1}^{m+1} - 2T_j^{m+1} + T_{j-1}^{m+1} + T_{j+1}^m - 2T_j^m + T_{j-1}^m}{2 \cdot (\Delta y)^2}$$

bei äquidistanter Diskretisierung.

Fall I: Randbedingung bei  $r_1 \leftrightarrow y_1$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \longmapsto \frac{1}{e^y} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}$$

Wir diskretisieren also folgendermaßen:

$$(3.10) \quad (T_2^{m+1} - T_0^{m+1}) = \frac{e^{y_1} \cdot 2\Delta y \cdot h}{k} (T_1^{m+1} - T_f)$$

Randbedingung bei  $r_m \leftrightarrow y_n$

$$(3.11) \quad T_{n+1}^{m+1} - T_{n-1}^{m+1} = 0$$

Von den angegebenen impliziten Verfahren ist bekannt, daß sie unabhängig von der Schrittweite stabil sind (vgl. [6]).

B) Berechnung von analytischen Lösungen zum 1-dimensionalen Problem

Vgl. Carslaw, Jaeger [7], S. 332.

Für den Hohlzylinder mit  $a < r < b$  seien die Randbedingungen

$$(3.12) \quad k_1 \frac{\partial v}{\partial r} - k_2 v = k_3 \quad r = a$$

$$(3.13) \quad k'_1 \frac{\partial v}{\partial r} + k'_2 v = k'_3 \quad r = b$$

gegeben, wobei für  $v$  die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

gelte.

Für die Anfangsbedingung  $v(0, r) = v_0 = 0$  erhalten wir mittels der Laplace-Transformation

$$(3.14) \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{p}{K} \bar{v} = 0,$$

wobei  $\bar{v} = L[v](p)$   $L\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right](p) = p \cdot L[v](p)$

Es sei  $q^2 := \frac{p}{K}$ . Dann besitzt das Eigenwertproblem (3.14) folgende allgemeine Lösung:

$$(3.15) \quad \bar{v} = A \cdot I_0(q \cdot r) + B K_0(q \cdot r),$$

wobei  $A, B$  so zu wählen sind, daß die Randbedingungen erfüllt werden.

$I_0, K_0$  sind die modifizierten Besselfunktionen

$$I_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\nu} - I_\nu}{\sin(\nu\pi)}$$

Über die inverse Laplace-Transformation läßt sich  $\nu$  wiedergewinnen.

Es treten dabei im Integranden einfache Pole bei 0 und bei  $\lambda = -K\alpha_n^2$  auf, wobei  $I\alpha_n$  reelle, einfache Wurzeln der Gleichung

$$[k_1 \alpha J_1(\alpha\alpha) + k_2 J_0(\alpha\alpha)] \cdot [k'_1 \alpha Y_1(b\alpha) - k'_2 Y_0(b\alpha)]$$

$$- [k_1 \alpha Y_1(\alpha\alpha) + k_2 Y_0(\alpha\alpha)] \cdot [k'_1 \alpha J_1(b\alpha) - k'_2 J_0(b\alpha)] = 0$$

sind.

Da ich für Fall II die Nullstellen aufgelistet finden konnte, habe ich diese Variante für die Tests verwandt.

Fall II:

$$k_1 = 1 \quad k_2 = k_3 = 0$$

$$k'_1 = 1 \quad k'_2 = \frac{h}{K} \quad k'_3 = \frac{h}{K} \text{ Tf}$$

Als Nullstellengleichung bleibt also übrig

$$\alpha J_1(\alpha\alpha) \left[ \alpha Y_1(b\alpha) - \frac{h}{K} Y_0(b\alpha) \right]$$

$$- \alpha Y_1(\alpha\alpha) \left[ \alpha J_1(b\alpha) - \frac{h}{K} J_0(b\alpha) \right]$$

Mit  $b\alpha = x$   $\frac{1}{b} = m$  ergibt sich

$$\frac{x}{b} J_1(mx) \left[ \frac{x}{b} Y_1(x) - \frac{h}{K} Y_0(x) \right]$$

$$- \frac{x}{b} Y_1(mx) \left[ \frac{x}{b} J_1(x) - \frac{h}{K} J_0(x) \right] = 0$$

Nun liegt die Gleichung in der Form vor, wie sie von Lipow und S.A. Zwick [8] studiert wurde (siehe Tab. 2).

$$Y_1(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$$

309

TABLE OF ROOTS OF THE EQUATION:

$$Y_1(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$$

i	B										
	.01	.05	.10	.20	.50	1.0	2.0	5.0	10	50	100
$m = 0.2$											
1	.144170	.320886	.451105	.630827	.964422	1.292655	1.657892	2.088201	2.305908	2.516315	2.544764
2	4.238531	4.249644	4.263487	4.291002	4.371977	4.500635	4.730033	5.207590	5.595006	6.085823	6.158529
3	8.056872	8.062022	8.070478	8.085569	8.130543	8.240399	8.346402	8.710128	9.11820	9.805035	9.925062
4	11.927616	11.931752	11.936920	11.947246	11.978139	12.027253	12.129580	12.406565	12.766248	13.585142	13.746548
5	15.821825	15.824960	15.828577	15.836707	15.860160	15.899089	15.976087	16.195808	16.507665	17.388557	17.500650
6	19.727684	19.730204	19.733355	19.739654	19.758530	19.780008	19.832211	20.033027	20.302288	21.207797	21.447211
7	23.640021	23.642128	23.644761	23.650027	23.665812	23.692070	23.744323	23.897443	24.132557	—	—
$m = 0.4$											
1	.154158	.343418	.483401	.677320	1.042046	1.410444	1.830284	2.380068	2.695836	3.015502	3.060546
2	5.304164	5.406071	5.429005	5.456097	5.537348	5.676536	5.930638	6.502588	7.031714	7.811522	7.936728
3	10.559288	10.565530	10.57325	10.588890	10.63353	10.711881	10.860581	11.259601	11.752525	12.804161	13.007448
4	15.767510	15.771716	15.775970	15.787472	15.818006	15.871012	15.973821	16.265551	16.676010	17.847488	18.122584
5	20.988992	20.992158	20.996116	21.004027	21.027730	21.067112	21.145268	21.372172	21.712354	22.916097	23.255007
$m = 0.6$											
1	.176655	.394000	.555397	.780396	1.210571	1.659846	2.213978	3.011478	3.527801	4.145006	4.240387
2	7.093195	7.915508	7.961057	7.991828	8.082908	8.230322	8.507325	9.192437	9.945379	11.379014	11.649054
3	15.748863	15.755185	15.763080	15.778856	15.826009	15.903966	16.057076	16.487137	17.085540	18.825416	19.254033
4	23.589387	23.593618	23.598305	23.609472	23.641126	23.693087	23.797939	24.100993	24.560676	—	—
$m = 0.8$											
1	.235624	.526173	.742892	1.047147	1.639499	2.281512	3.127053	4.533749	5.670055	7.493995	7.835368
2	15.740718	15.753370	15.760159	15.800651	15.894423	16.048295	16.346599	17.162313	18.267297	21.637976	22.577390

Tabelle 2

Für den Fall II ergibt sich schließlich als Lösung folgende Reihe:

$$v = \frac{bk_3''k_1}{bk_1k_2''} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 t} \cdot \frac{C_0(r, \alpha_n)}{F(\alpha_n)} \cdot L(\alpha_n) ,$$

wobei

$$L(\alpha_n) := (k_1' \alpha_n J_1(b \alpha_n) - k_2'' J_0(b \alpha_n)) \cdot [-k_3' k_1 \alpha_n J_1(a \alpha_n)]$$

$$F(\alpha_n) = (k_1'^2 \alpha_n^2 + k_2''^2) k_1^2 \alpha_n^2 J_1^2(a \alpha_n) - k_1^2 \alpha_n^2 [k_1' \alpha_n J_1(b \alpha_n) - k_2'' J_0(b \alpha_n)]^2$$

$$C_0(r, \alpha_n) = J_0(r \alpha_n) [k_1 \alpha_n Y_1(a \alpha_n)] - Y_0(r \alpha_n) (k_1 \alpha_n J_1(a \alpha_n))$$

Zu Testzwecken habe ich schließlich folgenden Parametersatz ausgewählt:

$$a = 0.16 \text{ m}$$

$$b = 0.4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad m = 0.4$$

$$h = 50, \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{h}{k} b = 10$$

$$\text{und somit } k_2'' = 25,$$

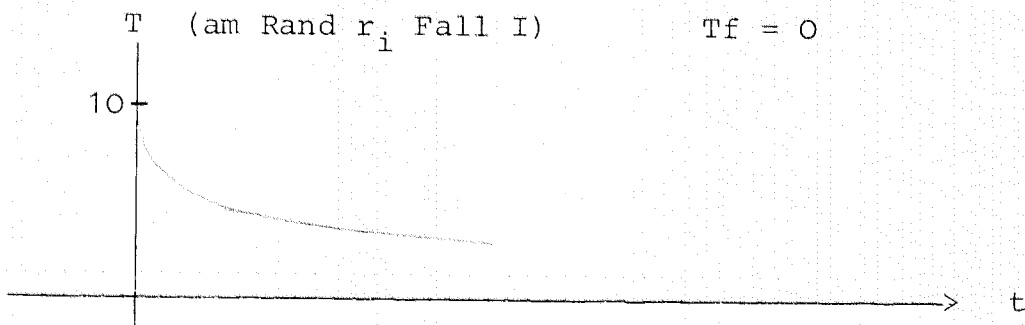
$$\text{mit } T_f = 10 \text{ ergibt sich } k_3'' = 250.$$

### C) Bemerkungen zur Implementation der Algorithmen

1) Alle 3 beschriebenen Verfahren führen in jedem Zeitschritt zur Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ , wobei A eine tridiagonale  $n \times n$ -Matrix ist. A hängt dabei nur von der Diskretisierung und der Zeitschrittweite ab.

Da A nur tridiagonal ist, bietet sich ein direktes Verfahren zur Auflösung des Gleichungssystems an. Ich führe eine L-R-Zerlegung durch und erhalte dann leicht die Lösung. Pivottieren ist nicht notwendig.

Wie das unten stehende Bild zeigt, ist eine Schrittweisen-



steuerung in der Zeit notwendig, um zu vernünftigen Rechenzeiten zu kommen.

Ich habe zunächst die einfachste Methode für partielle Differentialgleichungen angewandt:

$$T^n \xrightarrow{\Delta t} T^{n+1}$$

$$T^n \xrightarrow{\Delta t/2} \tilde{T}^{n+1} \xrightarrow{\Delta t/2} \tilde{T}^{n+2}$$

Falls  $\|T^{n+1} - \tilde{T}^{n+2}\| < \text{eps}$ ,

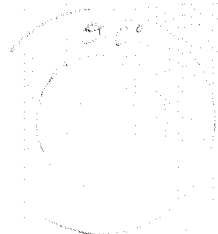
dann verdopple die Schrittweite, sonst rechne mit  $\Delta t/2$  weiter und beginne bei  $\tilde{T}^{n+1}$ .

- 2) Zur Berechnung der analytischen Lösung sind viele Auswertungen der Besselfunktionen notwendig. Für die verwendeten Algorithmen möchte ich auf [9] verweisen.
- 3) Eine genaue Beschreibung der Implementation der beschriebenen Verfahren findet sich in der Programmdokumentation.

D) Vergleich der verschiedenen Verfahren

Ich möchte zunächst noch einmal kurz skizzieren, für welches Problem die Vergleichsrechnungen durchgeführt wurden.

Hohlzylinder  $a < r < b$



innen isoliert:  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

außen umströmt:  $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h}{k}(T - T_f)$

$$T_f = 10^\circ\text{C}$$

$a = 0.16$        $b = 0.4$        $h = 50$        $k = 2$

$a_1 = 0.0000005$  Diffusionskoeffizient

Anfangstemperatur im Erdreich:  $0^\circ\text{C}$

Sehen wir uns zunächst Bild 6, 7, 8 an. Sie zeigen die Ergebnisse der 3 Verfahren im Vergleich zur analytischen Lösung nach 1000, 2000 und 5000 sec, bei einer äquidistant verteilten Stützstellenzahl von 40.

Die analytische Lösung und die Ergebnisse nach Verfahren 2, Cr-N mit zentraler Differentiation am Rand sind so gut wie nicht unterscheidbar.

Wenn wir uns auf die Randtemperatur  $r = 0.4$  konzentrieren, so stellen wir bei Verfahren 3, Lösung mit Transformation der Gleichung, Abweichungen nach oben fest. Auch Verfahren 1 liegt bei diesen noch sehr gut.

Anders sieht es jedoch aus, wenn wir mit weniger Stützstellen rechnen.

Bild 9 zeigt bei Verfahren 1 nach 2000 sec bereits eine erhebliche, nicht mehr tolerierbare Abweichung der Randtemperatur von fast  $1^{\circ}\text{C}$  nach oben. Auch Verfahren 3 liegt um ein halbes  $^{\circ}\text{C}$  zu hoch. Gerade die Randtemperatur ist jedoch für den Wärmeübergang entscheidend, so daß sich hier Fehler verstärken.

Bild 10 zeigt die Ergebnisse von Verfahren 2 bei verschiedener Anzahl von Stützstellen. Hier zeigt sich, daß man bei diesem Verfahren mit sehr wenig Stützstellen auskommen kann. Selbst bei nur 5 Stützstellen liegt die Abweichung an den Stützstellen bei  $\sim 0.1^{\circ}\text{C}$ .

Unsere Suche galt einem schnellen, über lange Zeiträume genauen Verfahren, um damit das 2-dimensionale Problem anzugehen.

Wir halten also folgende Ergebnisse fest:

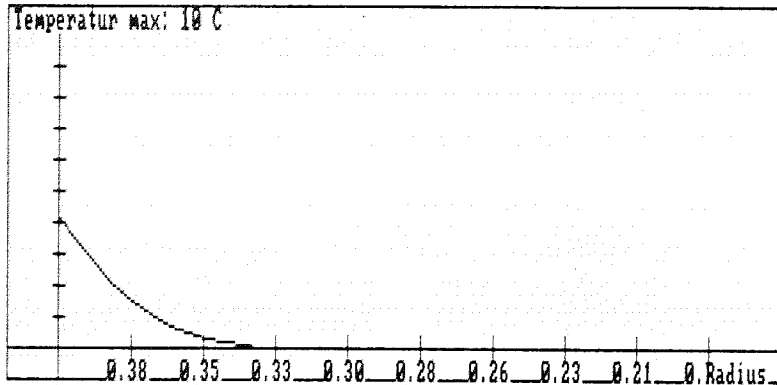
- Verfahren 1 scheidet aus, da es bei kleinerer Stützstellenzahl zu ungenau wird, bei gleichem Rechenzeitbedarf wie Verfahren 2.
- Verfahren 3 scheidet aus, da es höheren Rechenaufwand erfordert als Verfahren 2.
- Verfahren 2 hat sich deutlich als das beste herausgestellt. Auch wenn ich bei der Schrittweitensteuerung die Genauigkeit  $\epsilon_{\text{ps}}$  und den Faktor 100 verkleinere, ergeben sich keine Änderungen.



Lösung mit Transformation der Gleichung

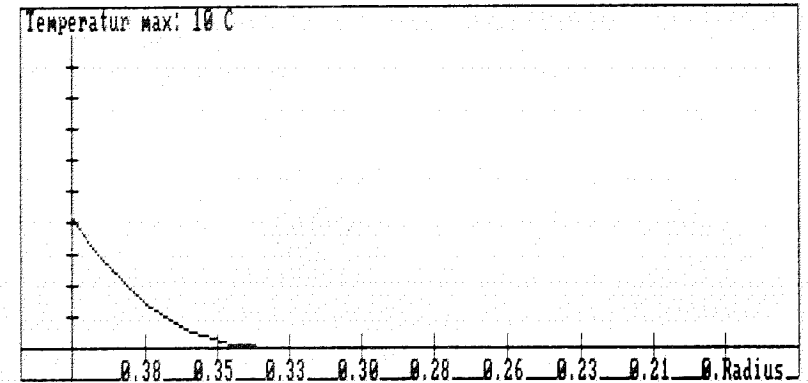
m= 125

nach 1000.0 sec Stützstellen = 40  
 h=50 al=0.0000005 k=2 tf = 10 eps = 0.00001  
 ra = 0.4 m , ri = 0.16 m



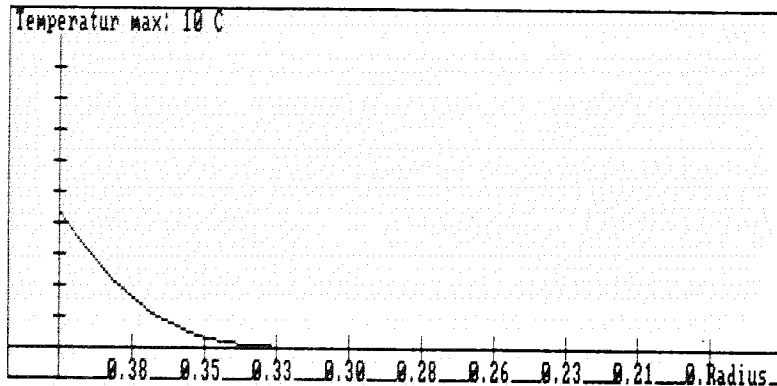
ANALYTISCHE LÖSUNG

nach 1000.0 sec  
 h=50 al=0.0000005 k=2 tf = 10  
 ra = 0.4 m , ri = 0.16 m



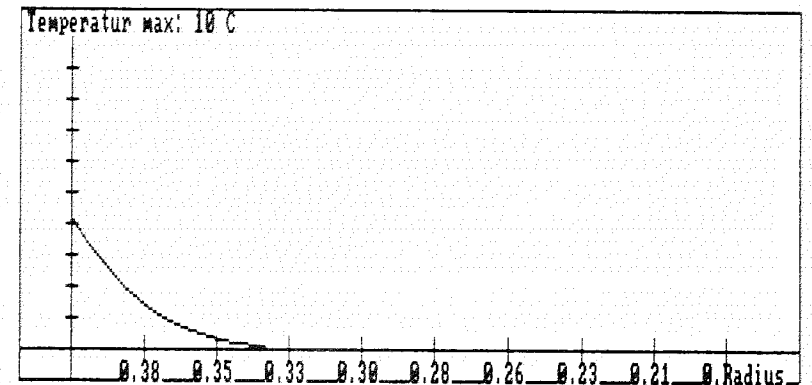
Lösung nach Crank-Nich. mit einseitiger Diff

nach 1000.0 sec Stützstellen = 40  
 h=50 al=0.0000005 k=2 tf = 10 eps = 0.00001  
 ra = 0.4 m , ri = 0.16 m



Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

nach 1000.0 sec Stützstellen: 40  
 h=50 , al=0.0000005 , k=2 , tf = 10  
 ra = 0.4 m , ri = 0.16 m



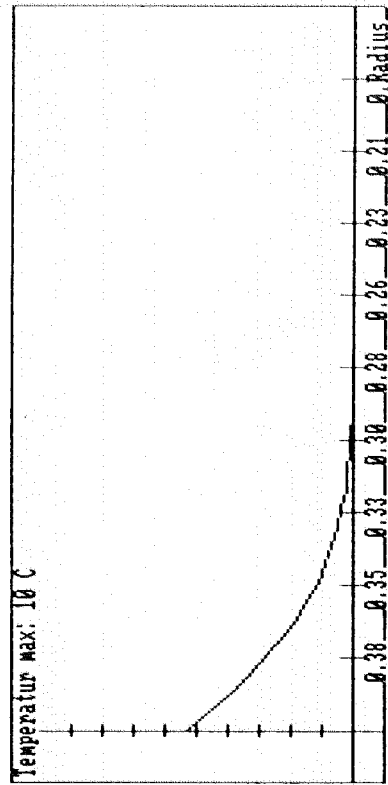
Lösung mit Transformation der Gleichung

Nr 151

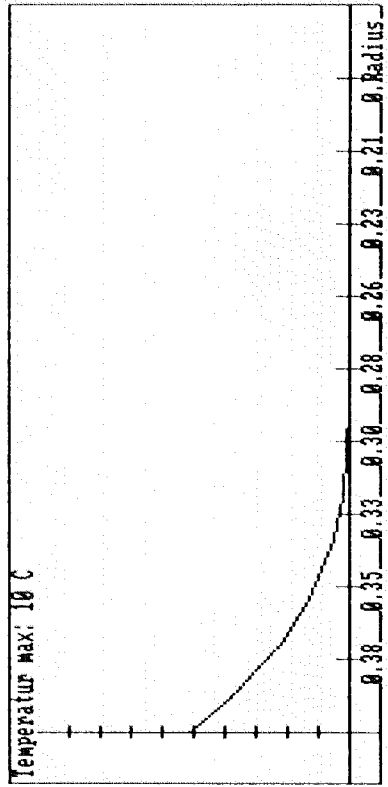
ANALYTISCHE LÖSUNG

Bild 7

nach 2000,0 sec Stützstellen = 40  
h=50 al=0,0000005 k=2 tf=10 eps=0,00001  
ra=0,4 m , ri=0,16 m

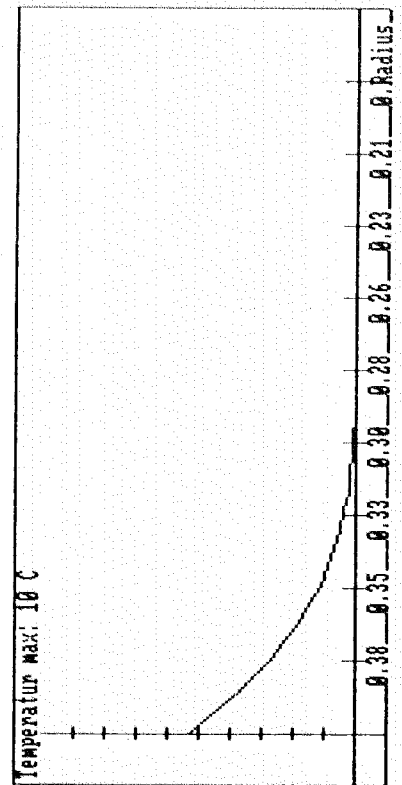


nach 2000,0 sec  
h=50 al=0,0000005 k=2 tf=10  
ra=0,4 m , ri=0,16 m



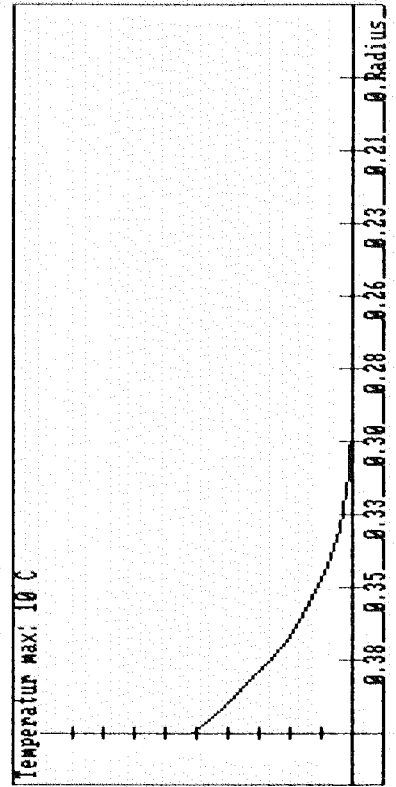
Lösung nach Crank-Nich. mit einseitiger Diff

nach 2000,0 sec Stützstellen = 40  
h=50 al=0,0000005 k=2 tf=10 eps=0,00001  
ra=0,4 m , ri=0,16 m



Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

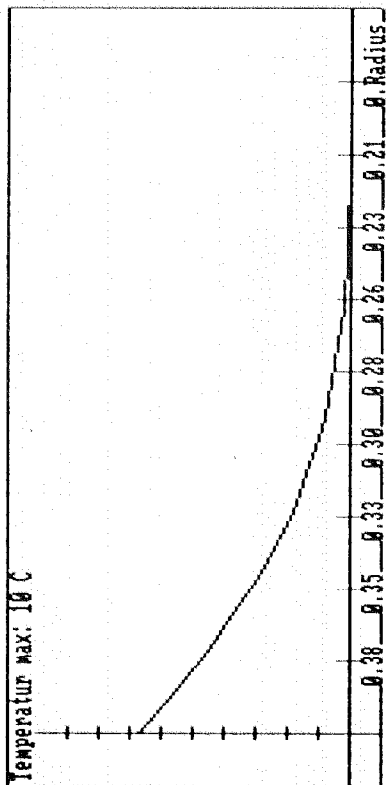
nach 2000,0 sec Stützstellen: 40  
h=50 , al=0,0000005 , k=2 , tf=10  
ra=0,4 m , ri=0,16 m



Univ.-Bibl.  
Kaiserslautern

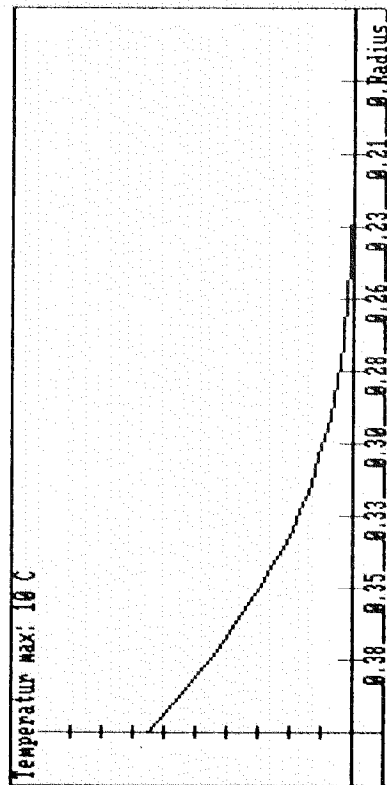
Lösung mit Transformation der Gleichung

nach 5000.0 sec Stützstellen = 40  
 $h=50$   $al=0.0000005$   $k=2$   $tf=10$   $eps=0.000001$   
 $ra=0.4$  m ,  $ri=0.16$  m



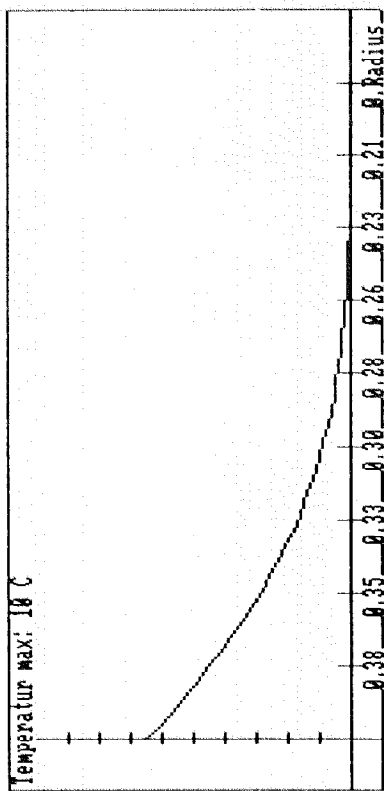
Lösung nach Crank-Nich. mit einseitiger Diff

nach 5000.0 sec Stützstellen = 40  
 $h=50$   $al=0.0000005$   $k=2$   $tf=10$   $eps=0.000001$   
 $ra=0.4$  m ,  $ri=0.16$  m



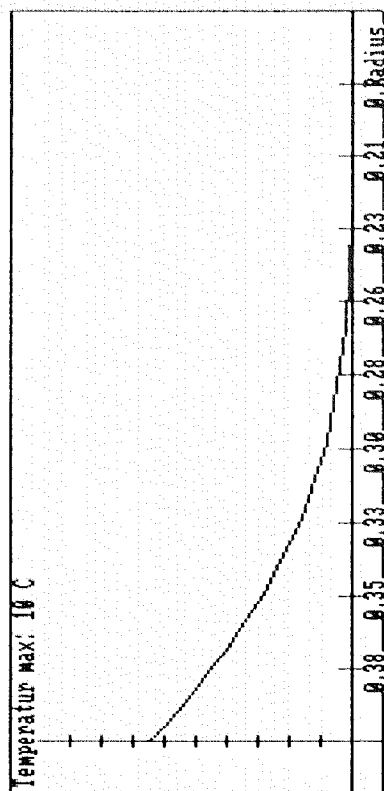
ANALYTISCHE LÖSUNG

nach 5000.0 sec  
 $h=50$   $al=0.0000005$   $k=2$   $tf=10$   
 $ra=0.4$  m ,  $ri=0.16$  m



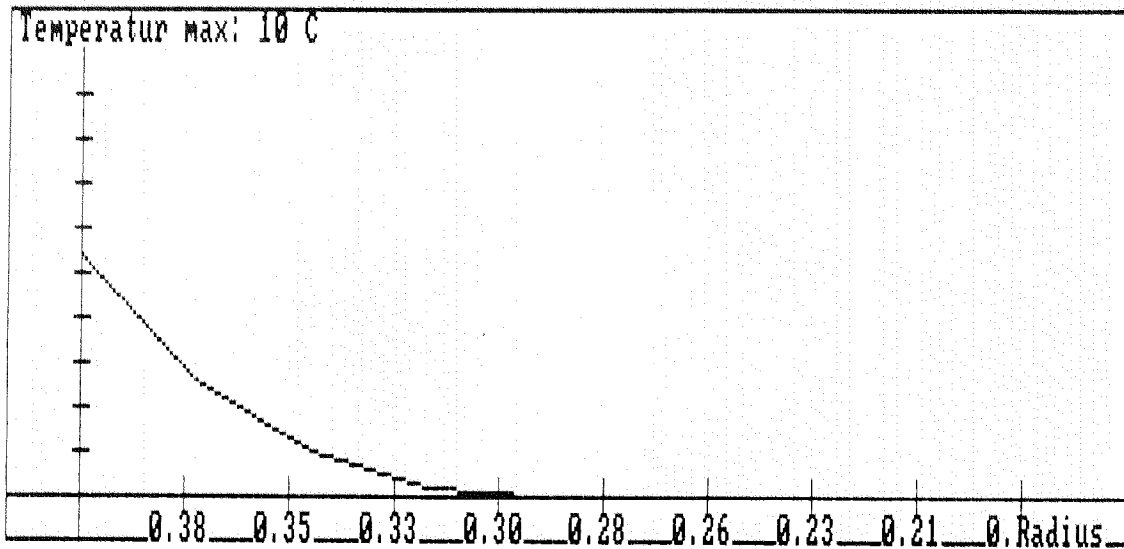
Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

nach 5000.0 sec Stützstellen: 40  
 $h=50$  ,  $al=0.0000005$  ,  $k=2$  ,  $tf=10$   
 $ra=0.4$  m ,  $ri=0.16$  m



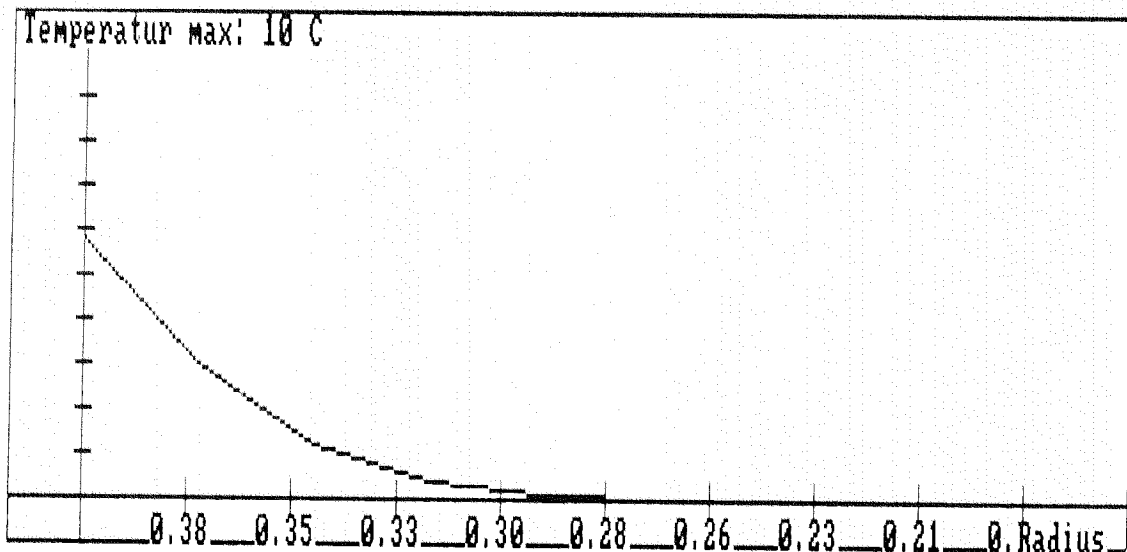
Lösung mit Transformation der Gleichung

nach 2000.0 sec            Stützstellen = 10  
h=50   al=0.0000005   k=2   tf = 10   eps = 0.00001  
ra = 0.4 m , ri = 0.16 m



Lösung nach Crank-Nich. mit einseitiger Diff

nach 2000.0 sec            Stützstellen = 10  
h=50   al=0.0000005   k=2   tf = 10   eps = 0.00001  
ra = 0.4 m , ri = 0.16 m

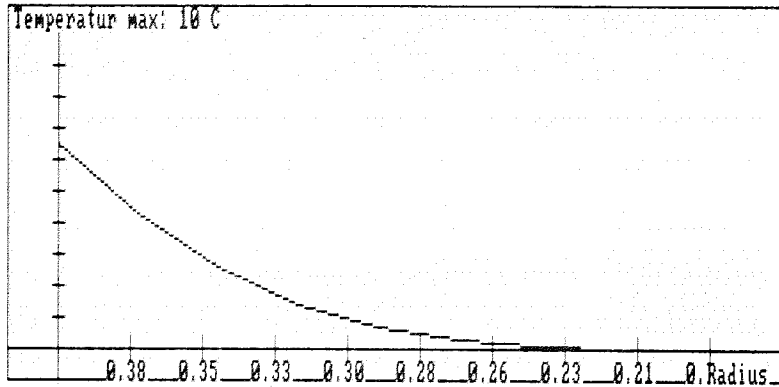


Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

nach 5000.0 sec Stützstellen: 10

$h=50$ ,  $al=0.0000005$ ,  $k=2$ ,  $tf=10$

$ra=0.4$  m,  $ri=0.16$  m



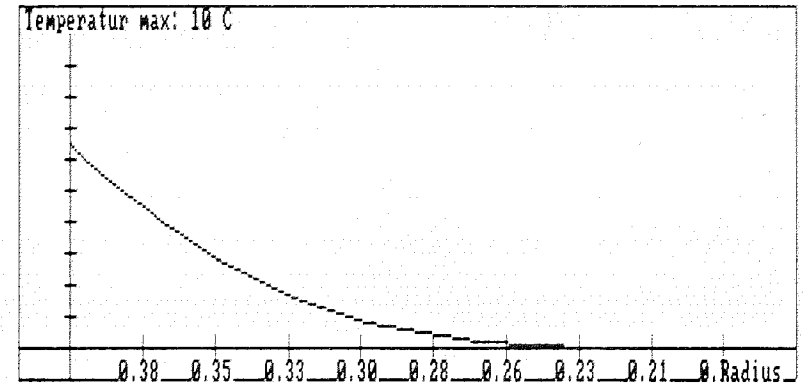
Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

Bild 10

nach 5000.0 sec Stützstellen: 40

$h=50$ ,  $al=0.0000005$ ,  $k=2$ ,  $tf=10$

$ra=0.4$  m,  $ri=0.16$  m

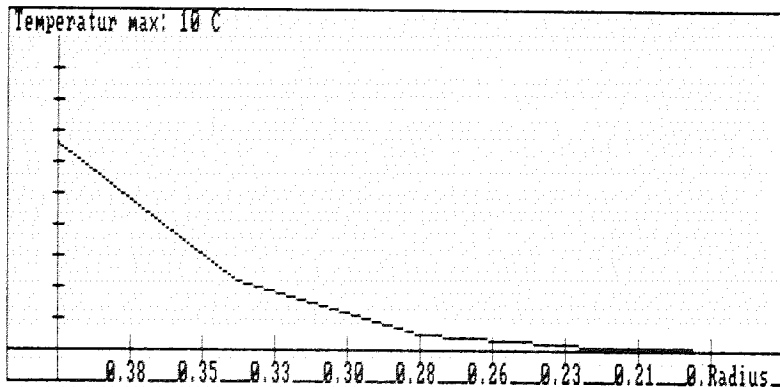


Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

nach 5000.0 sec Stützstellen: 5

$h=50$ ,  $al=0.0000005$ ,  $k=2$ ,  $tf=10$

$ra=0.4$  m,  $ri=0.16$  m

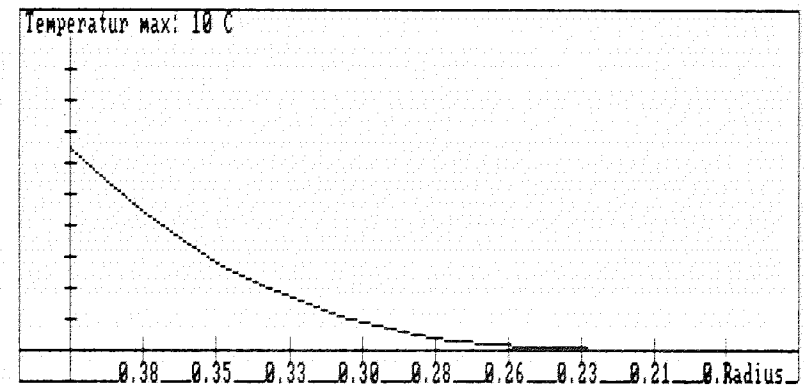


Lösung nach Crank-Nich. mit zentr. Diff am Rand

nach 5000.0 sec Stützstellen: 20

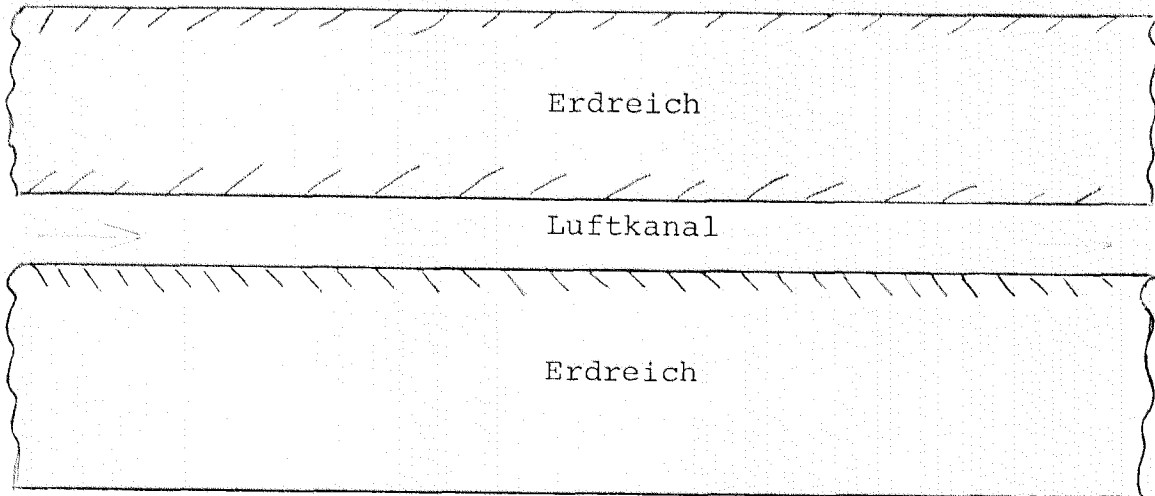
$h=50$ ,  $al=0.0000005$ ,  $k=2$ ,  $tf=10$

$ra=0.4$  m,  $ri=0.16$  m



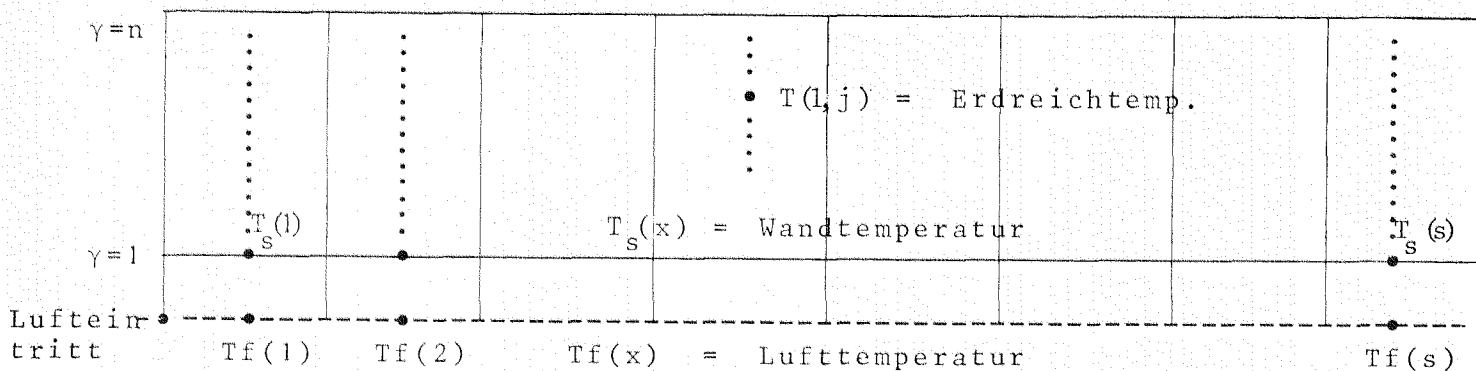
IV. Numerisches Vorgehen und Ergebnisse im 2-dim Fall

Zunächst möchte ich noch einmal die geometrischen Verhältnisse darstellen und die Bezeichnungen wiederholen.



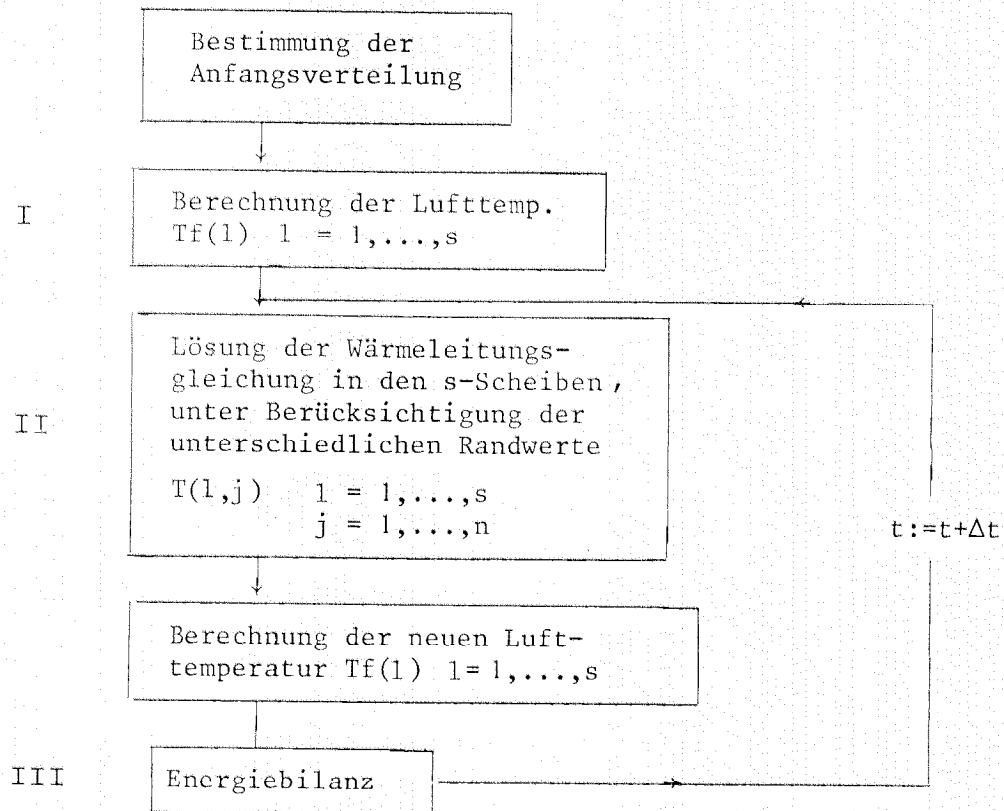
Bezüglich der Mitte des Luftkanals als Achse hatten wir Zylindersymmetrie angenommen.

Die Diskretisierung stellt sich nun folgendermaßen dar:



$$l := 1, 2, \dots, s$$

Ich möchte den groben Ablauf des Verfahrens in einem kleinen Diagramm verdeutlichen:



I. Berechnung der Lufttemperatur (vgl. S. 4)

Mit der Abkürzung  $E := St \cdot 4/D$  ist folgende gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen

$$\frac{d}{dx} Tf(x) + E \cdot Tf(x) = T_s(x) \cdot E.$$

Die explizite Lösung dieser Gleichung lautet

$$Tf(x) = Tf(0)e^{-Ex} + e^{-Ex} \int_0^x e^{+E \cdot t} T_s(t) dt.$$

Aufgrund der Einteilung des Gebietes in Scheiben, liegt  $T_s(x)$  nur an den Stützstellen  $\{x_l\}_{l=1}^S$  vor.

$T_s(x)$  sei durch eine Treppenfunktion approximiert.

$$T_s(x) \approx \sum_{l=1}^S T_s(l) \chi_{\left[x_l - \frac{\Delta x}{2}, x_l + \frac{\Delta x}{2}\right]}.$$

Für Tf an der Stützstelle  $x_k$  gilt dann

$$\begin{aligned} Tf(k) &= Tf(o) e^{-Ex_k} + e^{-Ex_k} \sum_{l=1}^s T_s(l) \int_0^{x_k} x [x_1 - \frac{\Delta x}{2}, x_1 + \frac{\Delta x}{2}] \cdot e^{+Et} E dt \\ &= Tf(o) e^{-Ex_k} + e^{-Ex_k} \sum_{l=1}^{k-1} T_s(l) \int_{x_1 - \Delta x/2}^{x_1 + \frac{\Delta x}{2}} e^{+Et} E dt \\ &\quad + e^{-Ex_k} T_s(k) \cdot \int_{x_k - \frac{\Delta x}{2}}^{x_k} e^{+Et} E dt \end{aligned}$$

Mit  $x = L/S$  gilt dann

$$\begin{aligned} Tf(k) &= Tf(o) e^{-Ex_k} + e^{-Ex_k} \sum_{l=1}^{k-1} T_s(l) \left[ +e^{+E l \Delta x} - e^{+E(l-1)\Delta x} \right] \\ &\quad + e^{-Ex_k} T_s(k) \left[ -e^{+(k-1)E \cdot \Delta x} + e^{+E(k \Delta x - \frac{\Delta x}{2})} \right] \end{aligned}$$

Somit erhalte ich ein Verfahren, welches zumindest von der Ordnung  $O(\Delta x^2)$  ist. Es hat also folgende Form:

für  $k = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned} Tf(k) &= Tf(o) e^{-k \cdot E \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} E} + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k-1} T_s(l) e^{-E(k-l) \cdot \Delta x - E \cdot \frac{\Delta x}{2}} (-1 + e^{+E \cdot \Delta x}) \\ &\quad + T_s(k) \left[ -e^{-\frac{\Delta x}{2} \cdot E} + 1 \right] \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Energiebilanz benötigen wir auch Tf am Ende des Kanals,  $L =$  Kanallänge

$$Tf(L) = Tf(o) e^{-L \cdot E} + e^{-L \cdot E} \sum_{l=1}^s T_s(l) \left[ -e^{+E(l-1)\Delta x} + e^{+E \cdot l \cdot \Delta x} \right]$$



## II. Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Aus Kapitel III hat sich das Verfahren 2 als das günstigste für diesen Zweck herausgestellt.

Es ist also für jede Scheibe  $l = 1, \dots, s$  ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Da die Randbedingung von der Lufttemperatur abhängt, ergeben sich verschiedene rechte Seiten.

Mit

$$T_l = \begin{pmatrix} T(l,1) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ T(l,n) \end{pmatrix} \quad R_l = \begin{pmatrix} R(l,1) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ R(l,n) \end{pmatrix}$$

ergibt sich für  $l = 1, \dots, s$

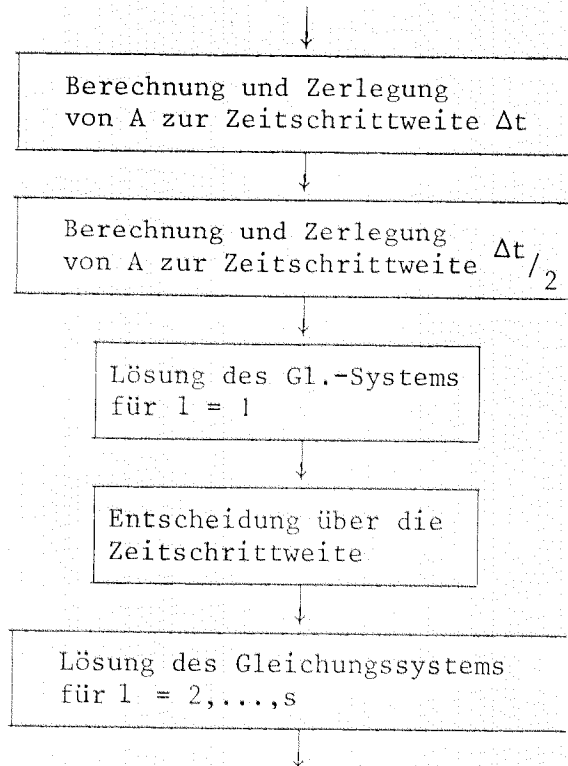
$$A \cdot T_l = R_l .$$

Wobei die Matrix A tridiagonale Gestalt hat und nur von der Ortsdiskretisierung in radialer Richtung sowie der Zeitschrittweite abhängt.

Um zu akzeptablen Rechenzeiten zu kommen ist eine Schrittweitensteuerung unbedingt notwendig.

Ich verwende hier das in III c) beschriebene Verfahren, angewandt auf Scheibe  $l = 1$ .

Somit erhalten wir folgende Struktur:



### III. Energiebilanz

Ziel dieses ganzen Projektes soll es sein, Aussagen über die Wirtschaftlichkeit einer wie in Kapitel I beschriebenen Wärmegewinnungsanlage zu machen. Dazu ist es notwendig, den Energiegewinn zu berechnen. Hierzu bieten sich drei Möglichkeiten an. Durch sie ist eine zusätzliche Kontrolle für die Genauigkeit der Rechnungen gegeben.

- 1.) Energiegewinn auf Grund der Temperaturdifferenz zwischen einströmender und ausströmender Luft.

$$Q_L = \int_{t_1}^{t_2} T_f(t, L) = T_f(t, 0) dt \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot c_{p, \text{Luft}} \cdot \text{Volumen/Zeit}$$

- 2.) Energiedifferenz auf Grund der Temperaturabnahme im Erdreich.

$$Q_T = 2\pi \int_0^L \int_{r_i}^{r_a} (T(t_1, r, x) - T(t_2, r, x)) r dr dx \cdot \rho_{\text{Erde}} \cdot c_{p, \text{Erde}}$$

- 3.) Energiemenge, welche infolge des Temperaturgradienten durch die Rohrwand fließt.

Der Energiefluß ist dabei gegeben durch

$$q = k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

A = betrachtete Oberfläche

k = Wärmeleitfähigkeit des Erdreiches.

Somit

$$QG = \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial T}{\partial r}(t, r_i, x) dt dx \cdot 2r_i \cdot \pi$$

Nun gilt als Randbedingung

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = h(T_s(r_i) - T_f)$$

so daß wir die rechte Seite der Einfachheit halber einsetzen können

$$QG = h \cdot \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_s(t, x) - T_f(t, x) dx dt \cdot 2r_i \cdot \pi$$

### Numerische Realisierung

- 1.) Da die Zeit nicht äquidistant diskretisiert ist  $\Delta t = t_2 - t_1$ , bietet sich folgende Approximation an:

$$QL = \frac{1}{2} [Tf(t_2, L) + Tf(t_1, L) - Tf(t_2, 0) - Tf(t_1, 0)]$$

$$\cdot \Delta t \cdot \rho_L \cdot c_{pL} \cdot v_l \cdot r_i^2 \cdot \pi$$

$v_l$  = Luftgeschwindigkeit

Energiegewinn in einem Zeitschritt.

- 2.) In x und r-Richtung ist eine äquidistante Zerlegung vorgesehen:  $\Delta x = L/S$

$$\Delta r = (r_a - r_i) / (n-1)$$

Sei I(t) der Energieinhalt des Erdreiches zum Zeitpunkt t. QT berechnet sich dann als

$$QT = I(t_1) - I(t_2):$$

Energieabgabe während des Zeitintervalles  $t_2 - t_1$ .

Die gesamte abgegebene Energie SQT:

$$SQT = I(0) - I(t).$$

$$I_1(t) := \pi \sum_{j=2}^n (T(t, j, l) + T(t, j-1, l)) / 2 \cdot (r_j^2 - r_{j-1}^2)$$

$$I(l) = \sum_{l=1}^S I_1(t) \cdot \rho_{\text{Erde}} \cdot c_{p_{\text{Erde}}} \cdot \Delta x.$$

### 3.) Berechnung von QQ.

Da die Funktionswerte von  $T_s$  und  $T_f$  an den Mittelpunkten der  $x$ -Intervalle vorliegen, ergibt die Trapezregel

$$J(t) := \int_0^L T_s(t, x) - T_f(t, x) dx$$

$$J(t) = \sum_{l=1}^S T_s(t, l) - T_f(t, l) \cdot \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Der Energiegewinn in einem Zeitschritt  $t = t_2 - t_1$  ist also

$$QQ = h \cdot 2\pi r_i \cdot \frac{1}{2} (J(t_2) + J(t_1)) \cdot \Delta t.$$

Die Berechnung des Gesamtenergiegewinnes kann also sukzessiv geschehen:

$$SQQ := \int_0^t J(t) dt \cdot h \cdot 2\pi r_i$$

$$SQQ(t) = SQQ(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} (J(t - \Delta t) + J(t)) \cdot h \cdot 2\pi r_i + O(\Delta x^2).$$

Zur näheren Erläuterung der konkreten Realisierung des 2-dim Problems sei auf die Programmdokumentation verwiesen.

## Ergebnisse

Zunächst sollten zum besseren Verständnis noch einmal Ein- und Ausgabedaten als Programm beschrieben werden.

## Eingangsdaten

- Geometrie:
- Kanallänge
  - Rohrdurchmesser
  - Verlegungstiefe des Rohres
- Temperatur:
- Außentemperatur stundenweise
  - von Tag zu Tag änderbar
  - Anfangstemperaturverteilung
- Physik:
- $k$ -Wert Erde
  - Dichte Erde
  - spez. Wärme Erde
  - Wärmeübergangskoeffizient für
  - turbulente Strömung
  - natürliche Konvektion
- techn. Daten:
- Luftgeschwindigkeit
  - Laufzeiten der Pumpe, tagesweise vorgebbar.

Weiterhin sind für die Numerik folgende Parameter festzulegen:

- Anzahl der Stützstellen in  $r$ -Richtung
- Anzahl der Stützstellen in  $x$ -Richtung
- Genauigkeitsschranke für die Zeitschrittweitensteuerung
- Zeitpunkte, zu denen Ergebnisse abgespeichert werden sollen.

## Ausgabedaten

Zu den vorgegebenen Zeitpunkten wird folgender Datensatz ausgegeben:

- Tag
- Stunde
- Sekunde
- Energiemenge, die bis dato durch die Rohrwand geflossen ist: SQQ
- Energiemenge, bestimmt durch die Temperaturabnahme im Erdreich: SQT

- Energiegewinn auf Grund der Lufterwärmung SQL
- Lufttemperatur am Rohrende
- Erdreichtemperatur am Rohranfang
- Erdreichtemperatur am Rohrende
- Pumpe läuft, Pumpe läuft nicht

#### a) Test des Verfahrens

Im Januar 1984 wurden von uns in der Turnhalle Queidersbach, in der eine solche Anlage installiert ist, Messungen durchgeführt. Eine Woche lang wurden die Lufttemperaturen am Rohranfang und -ende kontinuierlich gemessen und aufgezeichnet.

#### Eingangsdaten

Kanallänge	50.0 m
Rohrdurchmesser	0.4 m
Verlegungstiefe	1.8 m
Anfangstemperatur des Erdreiches	10°

#### Physikalische Daten

k-Wert Erde	2.0 w/m K°
Dichte Erde	2000.0 kg/m <sup>3</sup>
spez. Wärme Erde	1900.0 J/kg K°
turbulenter Wärmeübergangskoeffizient	42.0
Wärmeübergangskoeff. natürl. Konvektion	1.0
Luftgeschwindigkeit	10 m/s

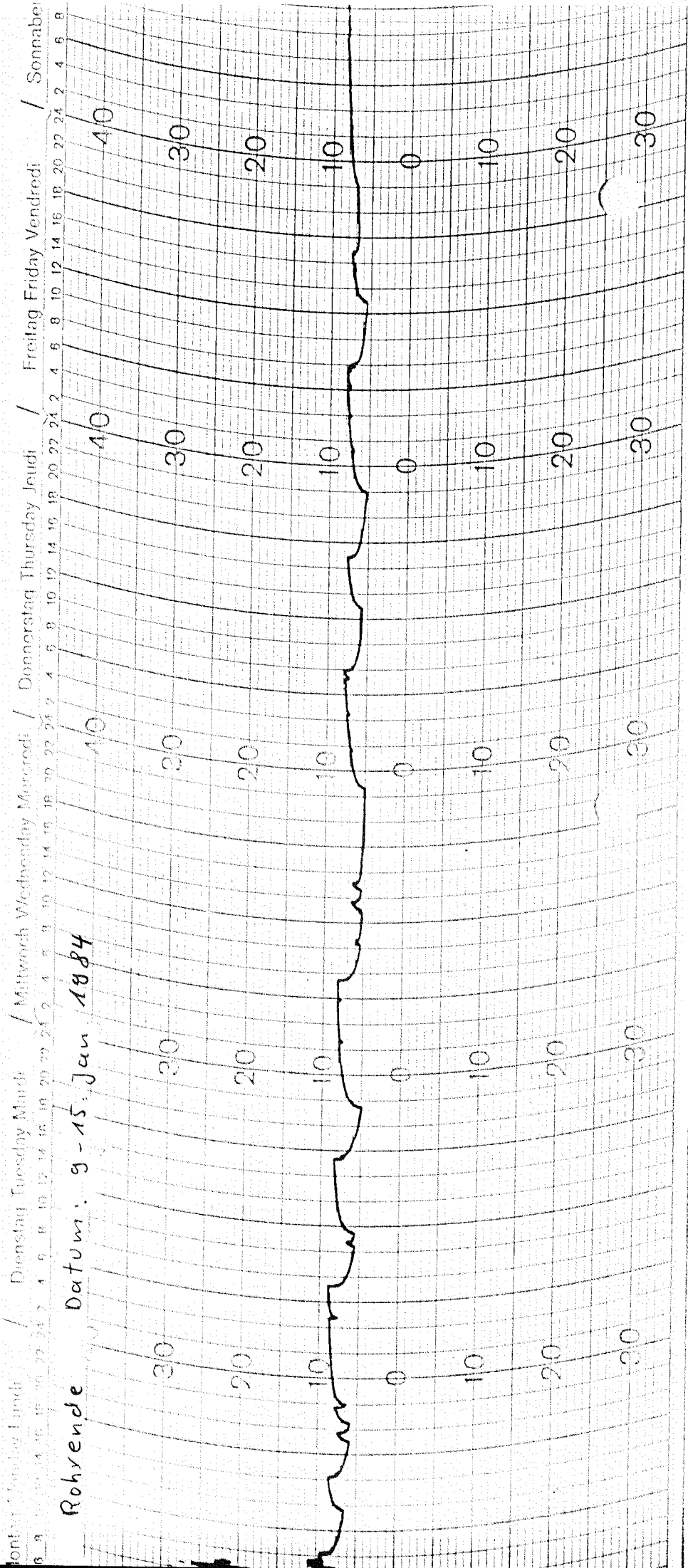
#### Numerische Daten

Stützstellen in v-Richtung	40
Stützstellen in x-Richtung	10
Genauigkeitsschranke	0.0001

Ergebnisse werden alle 900 sec abgespeichert.

Die Laufzeiten der Anlage wurden dem Meßprotokoll (vgl. Bild Nr. 11 ) entnommen.

Die Bilder Nr. 12 bis Nr. 15 beschreiben den bezeichneten Verlauf der Lufttemperatur am Kanalende für die Tage Dienstag bis Freitag. Die Lufttemperaturen am Kanaleingang sind Bild Nr. 16 entnommen.



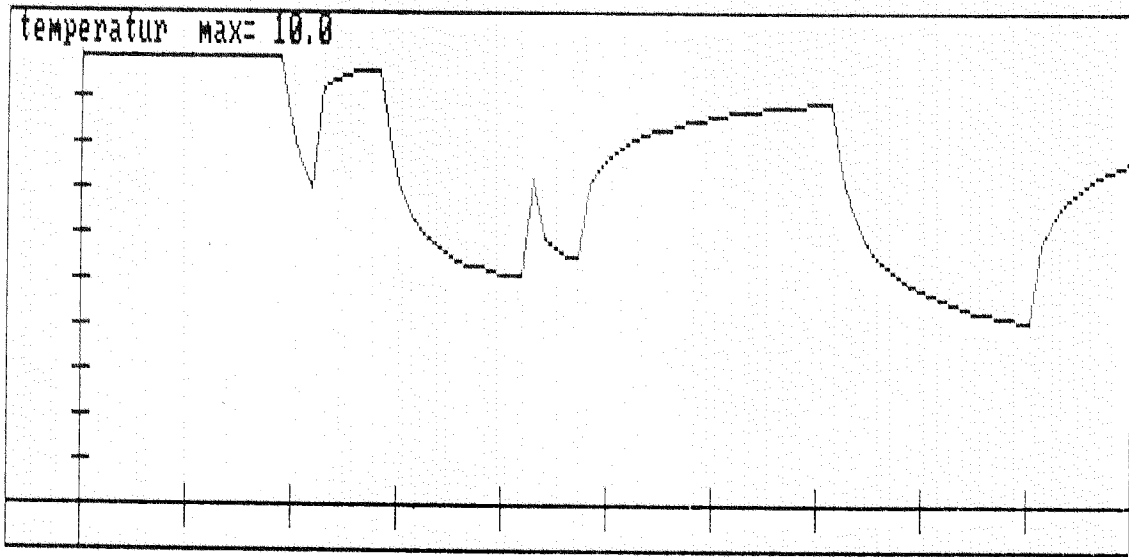


Bild 12

Mittwoch

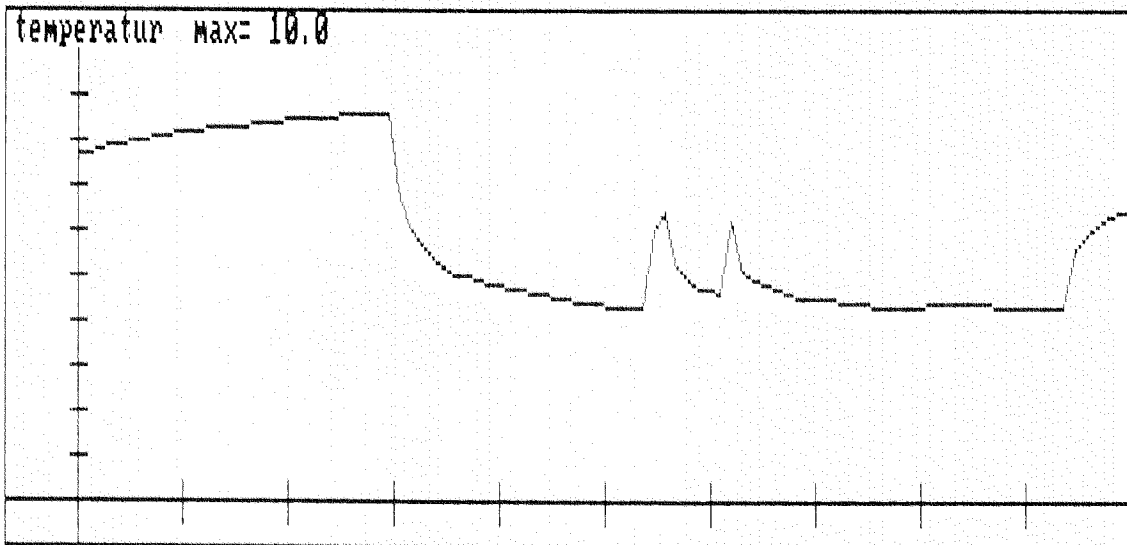


Bild 13



Donnerstag

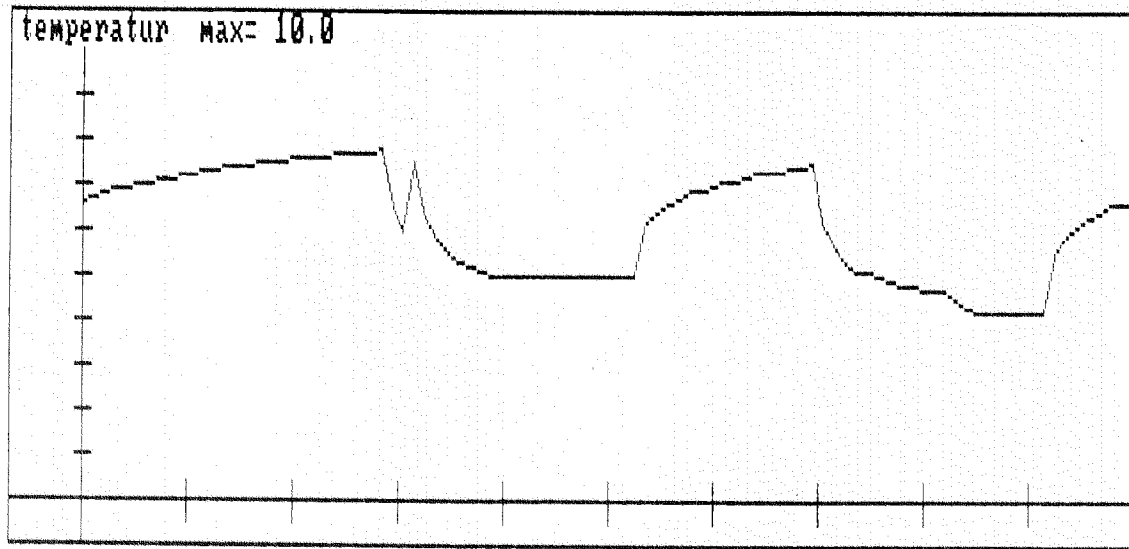


Bild 14

Freitag

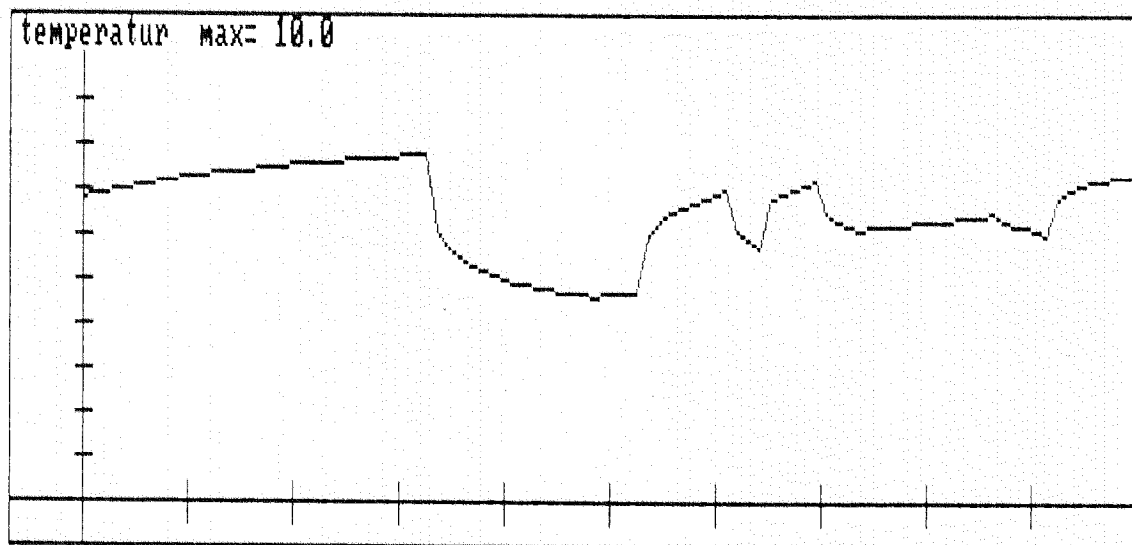
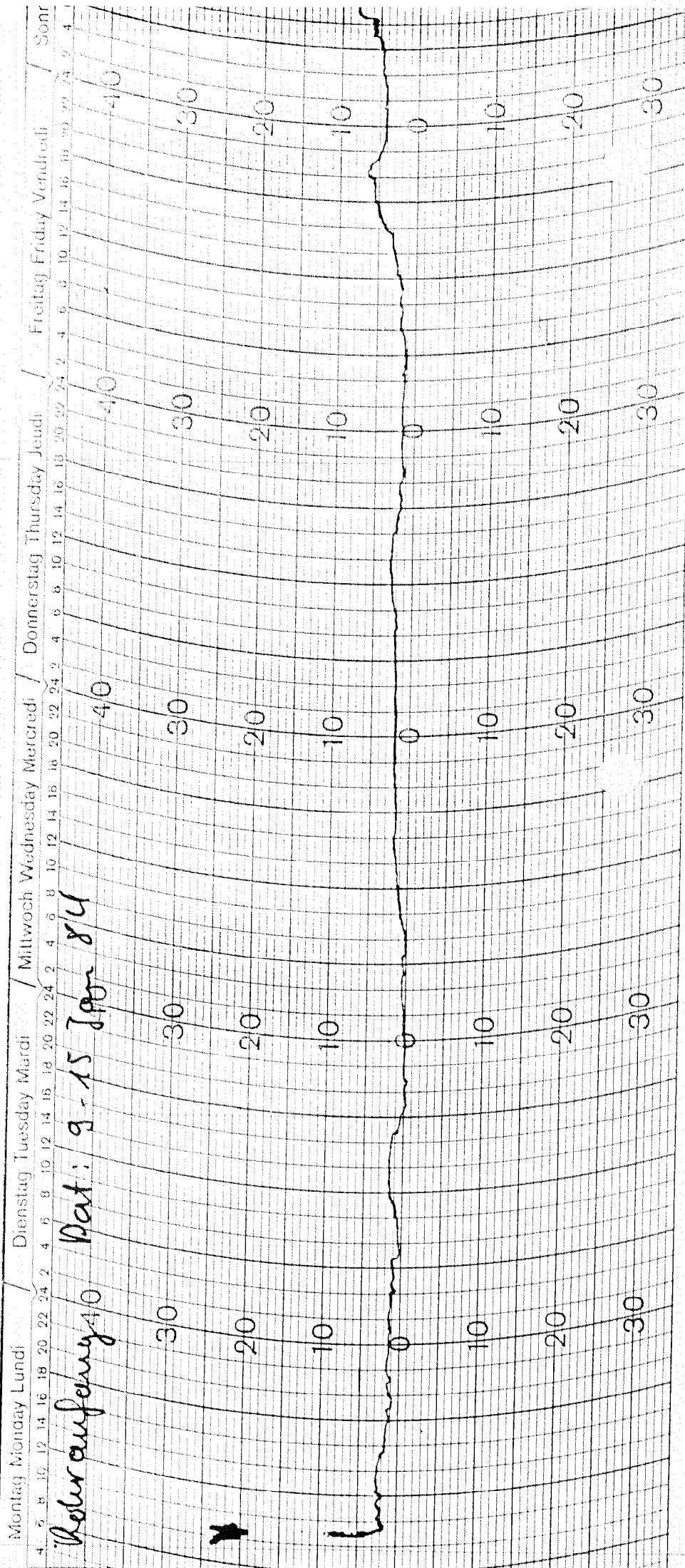


Bild 15



### Bewertung der Ergebnisse

Der Vergleich zwischen Messung und Rechnung ergibt qualitativ eine sehr gute Übereinstimmung. Bei den absoluten Temperaturwerten gibt es allerdings Abweichungen von bis zu einem Grad. Diese lassen sich sicher zum Teil auf Meßfehler, Unkenntnis des Anfangsstandes des Erdreiches und Unkenntnis der genauen physikalischen Parameter zurückführen. Da der Verlauf des Temperaturanstieges am Rohrende nach Abschalten der Ventilation für den Energiegewinn nur von geringer Bedeutung ist, sollten Abweichungen in diesem Bereich weniger stark bewertet werden.

Insgesamt weist das Berechnungsverfahren eine für den angestrebten Zweck ausreichende Genauigkeit auf. Verbesserungen können durch exakte Bestimmung der physikalischen Parameter und höhere Stützstellenzahlen erreicht werden.

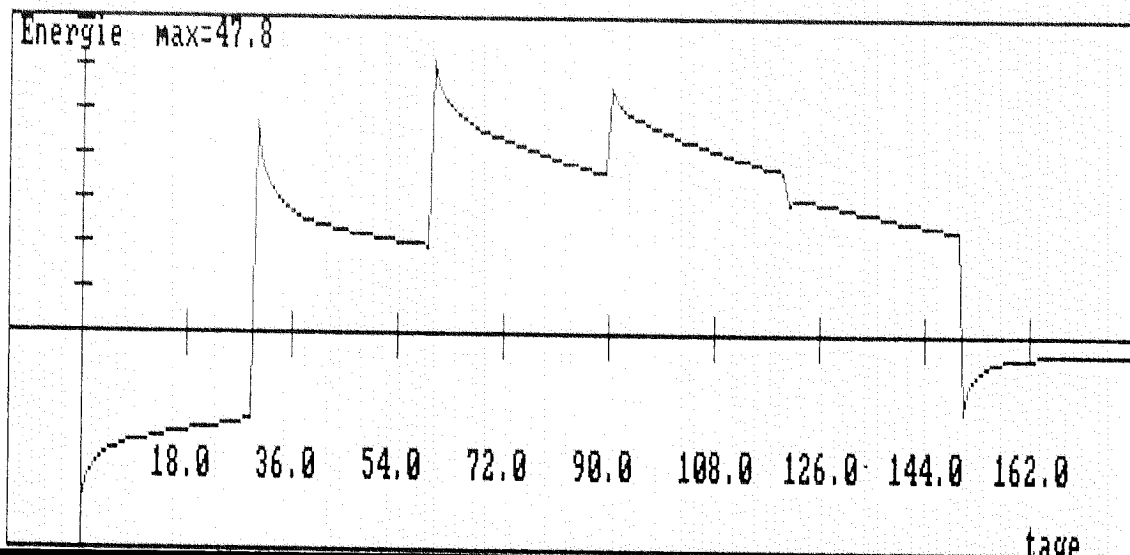
### b) Langzeitberechnung

Die geometrischen, physikalischen und numerischen Daten sind wie in Teil a).

Die Rechnung soll jetzt die Entwicklung des Energiegewinnes (-verlustes) über einen Zeitraum von 6 Monaten ermitteln. Die Lufttemperaturen am Kanaleingang werden dabei gleich der Außentemperatur gesetzt und während eines Monats konstant gehalten. Die stündlichen Veränderungen der Temperatur sind Tabelle 3 zu entnehmen. Der Einfachheit halber wurden die Betriebszeiten der Lüftung über die 6 Monate, Oktober bis März, konstant gehalten und zwar täglich: 7<sup>00</sup>h - 12<sup>00</sup>h und 17<sup>00</sup>h - 22<sup>00</sup>h.

Die Rechnung ergab folgende Resultate:

1.) Täglicher Energiegewinn, -verlust:



Lufttemperaturwerte umgerechnet auf  
Queidersbach

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Januar	-1,4	-1,4	-1,4	-1,4	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,4	-1,3	-1,0	-0,6
Februar	-1,15	-1,35	-1,55	-1,65	-1,75	-1,85	-1,85	-1,75	-1,35	-0,75	-0,15	+0,55
März	+2,03	+1,63	+1,23	+1,03	+0,93	+0,93	+1,13	+1,73	+2,53	+3,53	+4,43	+5,23
April	7,87	7,27	6,87	6,47	6,27	6,47	7,17	8,17	9,17	10,17	11,17	12,07
Mai	12,49	11,99	11,49	11,29	11,49	11,99	12,79	13,79	14,89	15,79	16,69	17,39
Juni	17,04	16,34	15,94	15,84	16,04	16,64	17,44	18,44	19,44	20,34	21,24	21,94
Juli	18,17	17,57	17,27	17,07	17,17	17,67	18,47	19,47	20,47	21,97	22,17	22,77
August	18,0	17,5	17,2	17,1	17,2	17,6	18,3	19,2	20,3	21,2	22,1	22,7
September	14,79	14,29	13,89	13,59	13,39	13,59	14,19	15,19	16,49	17,69	18,69	19,49
Oktober	10,61	10,21	9,91	9,71	9,51	9,61	9,91	10,51	11,41	12,41	13,31	14,01
November	4,68	4,48	4,28	4,18	4,08	4,08	4,08	4,38	4,78	5,48	6,08	6,58
Dezember	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,3	0,3	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6

Tabelle 3

Lufttemperaturwerte umgerechnet auf  
Queidersbach

Monat	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Januar	-0,2	+0,2	+0,1	0	-0,3	-0,5	-0,7	-0,8	-1,0	-1,2	-1,3	-1,4
Februar	+1,05	+1,25	+1,35	+1,15	+0,95	+0,65	+0,35	-0,05	-0,35	-0,65	-0,95	-1,15
März	+5,83	+6,33	+6,53	+6,33	+5,93	+5,43	+4,73	+4,13	+3,63	+3,23	+2,83	+2,43
April	12,67	13,17	13,47	13,37	12,97	12,37	11,57	10,87	10,17	9,47	8,97	8,47
Mai	17,99	18,39	18,69	18,59	18,29	17,59	16,79	15,99	15,19	14,49	13,79	13,19
Juni	22,54	23,04	23,24	23,34	23,14	22,64	21,94	21,04	20,14	19,24	18,54	17,84
Juli	23,37	23,87	24,17	24,27	23,97	23,47	22,57	21,57	20,77	19,97	19,27	18,87
August	23,3	23,9	24,2	24,2	23,9	23,3	22,4	21,3	20,5	19,8	19,2	18,8
September	20,09	20,49	20,69	20,39	19,99	19,19	18,29	17,39	16,69	16,09	15,59	15,19
Oktober	14,61	15,01	15,21	15,01	14,51	13,71	13,11	12,51	11,91	11,41	11,11	10,91
November	6,98	7,28	7,18	6,78	6,28	5,98	5,68	5,48	5,28	5,08	4,98	4,88
Dezember	2,0	2,2	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Tabelle 3

Zeit

Die auftretenden Sprünge werden durch die sich am Monatsende ändernden Lufttemperaturen verursacht. Eine Simulation, welche von Tag zu Tag wechselnde Temperaturverläufe der Außentemperatur berücksichtigt, ist vom Parameter her möglich und zeigt diese Sprünge nicht. Für den Energiegewinn insgesamt ist dies jedoch nicht entscheidend.

## 2.) Monatliche Ergebnisse

Im ersten und letzten Monat des Berechnungszeitraumes, Oktober und März, lagen die Außentemperaturen so hoch, daß durch den Kanal eine Abkühlung bewirkt wurde. Hier sollte also mit einer Regelung eingegriffen werden.

Die einzelnen Monate zeigen folgende Energiebilanz:

Oktober	-550 kWh
November	575 kWh
Dezember	1000 kWh
Januar	1000 kWh
Februar	700 kWh
März	-150 kWh .

Aufgrund der verschiedenen berechneten Energiebilanzen (vgl. Programmbeschreibung) ergibt sich ein Fehler in der Größenordnung von 10 %.

### Bewertung:

Da durch eine Regelung verhindert wird, daß die Verluste im Oktober und März auftreten, kann man von einem Energiegewinn durch diese Konstruktion von ungefähr 3000 kWh ausgehen.

In Rechnung gestellt werden muß allerdings der zusätzliche Strombedarf zur Überwindung des Rohrwiderstandes durch die Klimaanlage. Hierzu wurde im betrachteten Fall eine zusätzliche Leistung von 1 kW benötigt.

Bei 10 Betriebsstunden täglich sind also für die Monate November bis Februar 1200 kWh in Rechnung zu stellen.

Das heißt, die Anlage zeigt einen Wirkungsgrad ähnlich dem einer Elektrowärmepumpe.

### Schlußbemerkungen

Im vorliegenden Berechnungsbeispiel wurden die Daten einer bereits installierten Anlage verwendet. Sie stellen keine optimalen Werte bzgl. der Energiebilanz dar. Mit dem jetzt vorhandenen Programm kann durch Variation der Parameter eine bessere Geometrie entworfen und das Langzeitverhalten des Erdreiches für verschiedene Böden untersucht werden.

Eine erhebliche Verbesserung der Energiebilanz wird dadurch erreicht, daß im Sommer die Luft zur Kühlung durch den Kanal angesaugt wird. Man spart entsprechend Kühlleistung, während gleichzeitig das Erdreich mit Wärme aufgeladen wird und so besser auf den Winter vorbereitet ist.

Literatur

- [1] Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen, Kap. 14
- [2] Edwards, Denny, Mills  
Transferprocesses (1979)
- [3] Welty, Wicks, Wilson  
Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer
- [4] Brown, Marco  
Introduction to Heat Transfer (1958)
- [5] Meis-Markowitz  
Numerische Behandlung partieller Differential-  
gleichungen
- [6] Richtmeyer-Morton  
Difference Methods for unitial Value Problems (1967)
- [7] Carslaw-Jaeger  
Conduction of heat in solids (1959)
- [8] Lipow, Zwick  
J. math. Phys. 34 (1955) 308-315
- [9] Abramowitz  
Handbook of Mathematical Functions



BISHER SIND FOLGENDE BERICHTE ERSCHIENEN:

- Nr. 1 FORSCHUNG  
W.G. Eschmann und Ralph Götz  
Optimierung von Gelenksehsecken
- Nr. 2 WEITERBILDUNG  
H. Neunzert, M. Schulz-Reese  
Mathematische Weiterbildung
- Nr. 3 FORSCHUNG  
W. Krüger  
The Trippstadt Problem
- Nr. 4 WEITERBILDUNG  
H. Neunzert, M. Schulz-Reese, K.E. Hoffmann  
Mathematics in the University and Mathematics  
in Industry - Complement or Contrast?
- Nr. 5 FORSCHUNG  
A.K. Louis  
The Limited Angle Problem in Computerized Tomography
- Nr. 6 FORSCHUNG  
W. Krüger  
Regression für Ellipsen in achsenparalleler Lage  
(Interner Bericht)
- Nr. 7 FORSCHUNG  
Th. Mietzner  
Umströmung von Ecken und Kanten
- Nr. 8 FORSCHUNG  
W. Krüger, J. Petersen  
Simulation und Extrapolation von Rainflow-Matrizen
- Nr. 9 FORSCHUNG  
W. Krüger, M. Scheutzwow u. A. Beste, J. Petersen  
Markov- und Rainflow-Rekonstruktionen stochastischer  
Beanspruchungszeitfunktionen
- Nr. 10 FORSCHUNG  
Th. Mietzner  
Umströmung von Ecken und Kanten, Teil 2
- Nr. 11 FORSCHUNG  
H. Ploss  
Simulationsmethoden zur Lösung der Boltzmann-Gleichung

- Nr. 12 FORSCHUNG  
M. Keul  
Mathematische Modelle für das Zeitverhalten stochastischer  
Beanspruchungszeitfunktionen
- Nr. 13 AUSBILDUNG  
W. Krüger, H. Neunzert, M. Schulz-Reese  
Fundamentals of Identification of time series
- Nr. 14 FORSCHUNG  
H. Moock  
Ein Mathematisches Verfahren zur Optimierung von Nocken

Die Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik  
können angefordert werden bei:

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
Fachbereich Mathematik  
Arbeitsgruppe Technomathematik  
Erwin-Schrödinger-Straße

6750 Kaiserslautern

# ARBEITSGRUPPE TECHNOMATHEMATIK AM FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Leiter: Prof. Dr. H. Neunzert, Universität Kaiserslautern

Die Arbeitsgruppe Technomathematik hat es sich zur Aufgabe gemacht, neue Formen und Möglichkeiten einer Kooperation zwischen Universität und Industrie im Bereich der Mathematik zu erarbeiten und durchzuführen. Dabei beschäftigt sich die Arbeitsgruppe mit den folgenden Schwerpunkten:

## EINBEZIEHUNG KONKRETER FRAGESTELLUNGEN AUS DER INDUSTRIE IN DIE MATHEMATISCHE FORSCHUNG.

Im Rahmen des von der VW-Stiftung geförderten Forschungsprojekts "Technomathematik" werden mathematische Probleme aus der industriellen Praxis in Form von Problemseminaren, Diplomarbeiten und Forschungsaufträgen bearbeitet. Als Beispiele für schon bearbeitete oder in Bearbeitung befindliche Probleme seien genannt

- die Optimierung von Kurbelgetrieben, Nocken und Felgen;
- die analytische und numerische Untersuchung spezieller strömungsdynamischer und akustischer Probleme;
- die Simulation stochastischer Prozesse in der Zuverlässigkeitsanalyse.

## PRAXISORIENTIERTE GESTALTUNG DER MATHEMATISCHEN AUSBILDUNG IM HINBLICK AUF EINE BESSERE VORBEREITUNG DER ABSOLVENTEN AUF DIE BERUFSWIRKLICHKEIT.

Dies geschieht z.B. durch den Studiengang "Technomathematik"; die wesentlichen Lernziele sind dabei:

- Bildung mathematischer Modelle für technische Probleme,
- Kenntnis von mathematischen Methoden zur analytischen und numerischen Auswertung der Modelle,
- Beherrschung des Computers als Werkzeug,
- Kommunikationsfähigkeit mit Ingenieuren.

Auch in die Mathematikausbildung der Ingenieure sollen Modellbildung und moderne, insbesondere numerische und stochastische Methoden verstärkt integriert werden.

## MATHEMATISCHE WEITERBILDUNG FÜR DEN PRAKTIKER.

Das aus dem "Modellversuch zur mathematischen Weiterbildung" hervorgegangene Konzept für eine mathematische Weiterbildung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker wird weiterentwickelt und fortgesetzt. Die angebotenen Kurse dienen der

- Unterstützung bei der Bewältigung praktischer Probleme,
- Anpassung an den neuesten wissenschaftlichen Erkenntnisstand,
- Einordnung des praktisch-beruflichen Wissens in einen theoretisch-wissenschaftlichen Rahmen,
- Auffrischung von Hochschulwissen.

Die Arbeitsgruppe Technomathematik setzt sich aus Professoren und Mitarbeitern der Universität Kaiserslautern und einer Gruppe von Mathematikern an der Technischen Hochschule Darmstadt unter der Leitung von Prof. Dr. Törnig zusammen.