

TA ed.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 16

BERECHNUNG EINER 2-DIMENSIONALEN

KANALSTRÖMUNG MIT PARALLEL

EINGEBLASENER LUFT

F. J. ^{200*}PFREUNDT

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE
6750 KAISERSLAUTERN

MÄRZ 1986

Inhalt:

- I. Problembeschreibung
- II. Mathematisches Modell
 - a) Bestimmungsgleichungen
 - b) Turbulenzmodell
 - c) Randbedingungen
- III. Numerische Realisierung
 - a) Umformulierung der Gleichungen
 - b) Diskretisierung und Algorithmus
 - c) Behandlung der Randbedingungen
 - d) Bestimmung der Anfangswerte
 - e) Das Verfahren auf einen Blick
- IV. Ergebnisse
- V. Anhang
- VI. Literatur

I. Problembeschreibung

Das Designproblem eines Kanals mit parallel eingeblasener Luft war der Ausgangspunkt für diese Untersuchung. Um ein Gefühl für das Verhalten von Strömungen in einem Kanal gemäß (Abb. 1) zu bekommen, sollte von uns ein Verfahren entwickelt werden, welches für folgende Geometrie die relevanten strömungsdynamischen Daten liefert.

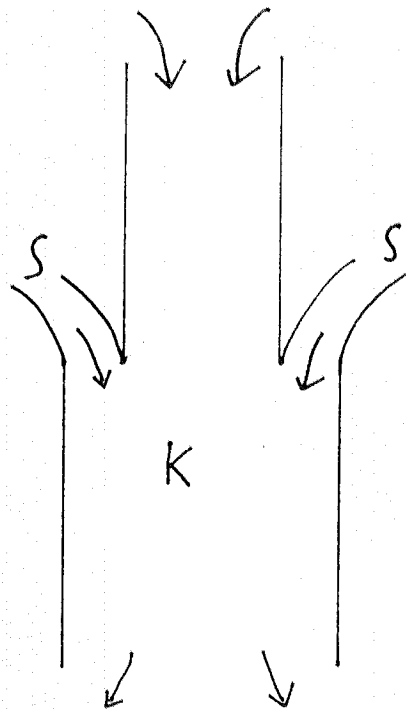


Abb. 1

Durch die Schlitzdüsen wird Luft mit hoher Geschwindigkeit eingeblasen. Für die sich dann einstellende quasistationäre Strömung im Kanal K soll die Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit vom Abstand zum Schlitz berechnet und die strömungsdynamischen Größen abgeleitet werden.

Von besonderem Interesse sind hier der Druckverlauf, der Impulsverlust und die Wandschubspannung sowie die sich daraus ergebende mittlere Ansauggeschwindigkeit.

Dabei sollen Geometrie, Einblasgeschwindigkeit sowie die Wandrauigkeit variabel gehalten werden.

Auf Grund von Experimenten erwartet man qualitativ etwa folgende Profile:

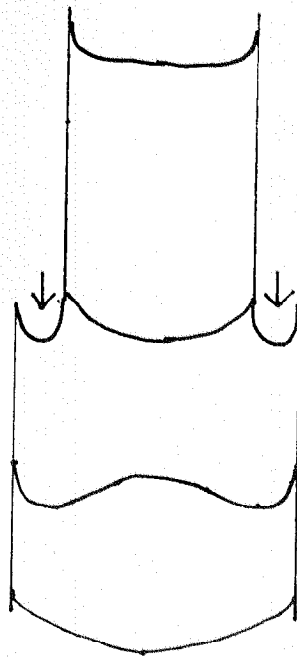


Abb. 2

II. Mathematisches Modell

a) Bestimmungsgleichungen

Die durch den Kanal K strömende Luft ist dort als inkompressibles zähes Fluid mit kinematischer Viskosität ν anzusehen. Die kinematische Viskosität (innere Reibung) ν ist für Luft allerdings so gering (bei 20°C und Atmosphärendruck $14,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$), daß sie allein die beobachteten Änderungen der Geschwindigkeitsprofile über die gegebenen Distanzen nicht zu erklären vermag.

Der Geschwindigkeitsausgleich würde in einer laminaren Strömung erst über viel größere Strecken erfolgen, in einer laminaren Strömung der Viskosität 0 überhaupt nicht.

Die vorliegenden Strömungen sind aber hochturbulent (die Reynoldszahl in K liegt in der Größenordnung $\sim 200\ 000$) und werden damit durch die Navier-Stokes-Gleichungen für große Reynoldszahl mit geeigneten Randbedingungen beschrieben:

$$\text{div } s = 0, \quad s = (u, v)$$

$$s_t + (s \cdot \nabla) s - \nu \cdot \nabla s = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Bei den gegenwärtig für die Navier-Stokes-Gleichungen existierenden analytischen und numerischen Verfahren, sowie den vorhandenen Rechnerkapazitäten, ist es aber aussichtslos, die Navier-Stokes-Gleichungen für die vorliegende Strömung numerisch lösen zu wollen. Es ist sogar möglich, daß dies auf Grund der Kompliziertheit turbulenter Strömungen für immer ein unerreichbares Ziel bleiben wird.

Zum Glück haben aber viele praxisrelevante Strömungen (so auch die hier zur Diskussion stehende) quasi-stationären Charakter, d.h. obwohl sie im Detail zeitabhängig und sehr kompliziert sind, zeigen sie im Mittel über Ortszellen und Zeitintervalle doch immer dasselbe Bild. Auf dieser Beobachtung beruht die Idee, solche Strömungen durch Turbulenzmodelle der Navier-Stokes- oder Grenzschichtgleichungen zu simulieren. Diese Turbulenzmodelle gehen durch Zeitmittelung aus den Grundgleichungen hervor, wenn noch für gewisse auftretende Korrelationsterme geeignete Ansätze gemacht werden [vgl. [1]]. Für die meisten praktischen Zwecke haben sich solche Turbulenzmodelle sehr gut bewährt.

Wir führen ein Koordinatensystem ein, in dem die x-Achse mit der Achse des Kanals K zusammenfällt und die Hauptströmungsrichtung mit der positiven x-Richtung. Der Nullpunkt soll in Höhe der Schlitzdüsen liegen (vgl. Abb. 3). u , v seien die x- bzw. y-Komponente der Geschwindigkeit.

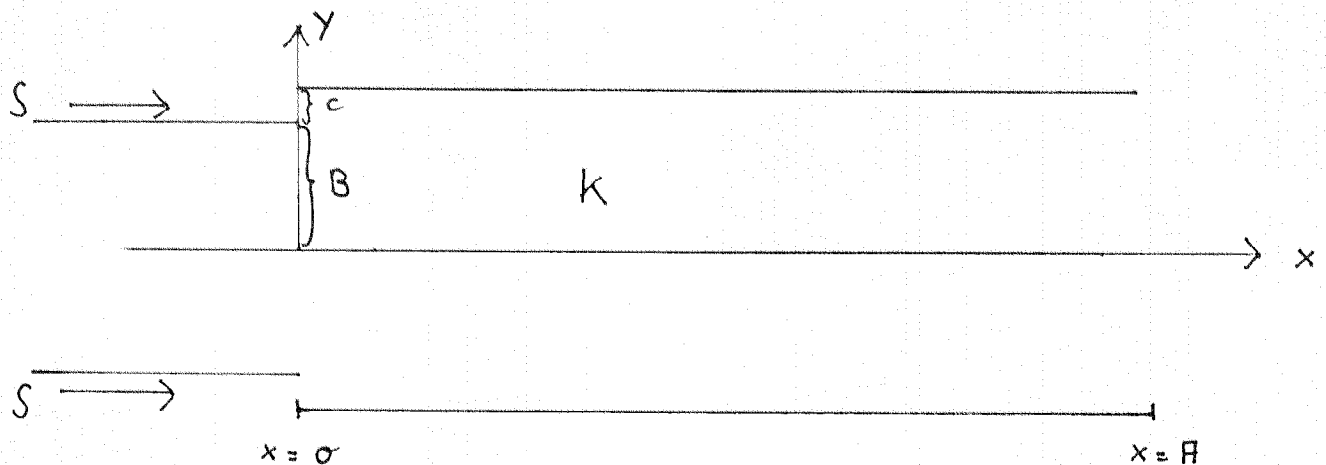


Abb. 3

Die in Frage stehende Strömung ist eine (bzgl. y) symmetrische zweidimensionale Kanalströmung. Diese läßt sich bei vertretbarem Aufwand mit den Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen modellieren.

Die Grenzschichtgleichungen lauten:

$$(2.1) \quad u_x + u_y = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \cdot u_{yy}, \quad (\text{Impulsbilanz})$$

wobei

$$\rho - \text{Dichte der Luft} \quad [\text{kg/m}^3]$$

$$\nu - \text{kinematische Viskosität} \quad [\text{m}^2/\text{sec}]$$

Um ein Turbulenzmodell zu erhalten, werden die Gleichungen (2.1) über ein Zeitintervall (t_1, t_2) gemittelt. Man definiert

$$\bar{u} := \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u dt, \quad \bar{v}, \bar{p} \text{ analog, und setzt}$$

$$u = \bar{u} + u_1, \quad v = \bar{v} + v_1, \quad p = \bar{p} + p_1.$$

Ist die Strömung quasistationär, so interessieren nur die Mittelwerte \bar{u} , \bar{v} und \bar{p} , und die "Turbulenzanteile" u_1 , v_1 und p_1 verschwinden im Mittel:

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{p}_1 = 0.$$

Durch Einsetzen in (2.1) und anschließende Mittelung erhält man

$$(2.2) \quad \bar{u}_x + \bar{v}_y = 0$$

$$\overline{u \cdot u_x + u_1 \cdot u_{1x} + v \cdot u_y + v_1 \cdot u_{1y}} = \frac{1}{\rho} \bar{p}_x + \nu \cdot \bar{u}_{yy}.$$

(Die Zeitableitung u_t verschwindet approximativ nach Mittelung, sofern nur $t_2 - t_1$ hinreichend groß gewählt wird:

$$\overline{(u - u_1)_t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{u}_t + u_{1t}) dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \underbrace{[\bar{u}(t_2) - \bar{u}(t_1)]}_0 + \frac{1}{t_2 - t_1} [u_1(t_2) - u_1(t_1)]$$

$$(\bar{u} \text{ unabhängig von } t) \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{für } t_2 - t_1 \rightarrow \infty.$$

Wir wollen die Gleichungen (2.2) noch etwas umformen:

Aus der Beziehung $u_{1x} + v_{1y} = 0$ folgt

$$u_1 \cdot u_{1x} + v_1 \cdot u_{1y} = (u_1 \cdot u_1)_x + (v_1 \cdot u_1)_y,$$

nach Einsetzen in (2.2) also

$$(2.3) \quad \bar{u} \cdot \bar{u}_x + \bar{v} \cdot \bar{u}_y + \overline{(u_1 \cdot u_1)_x} + \overline{(v_1 \cdot u_1)_y} = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_x + \nu \bar{u}_{yy}.$$

Um mit Gleichung (2.3) weiterarbeiten zu können, müssen nun Ansätze für die Korrelationsterme $\overline{(u_1 \cdot u_1)_x}$ und $\overline{(v_1 \cdot u_1)_y}$ gemacht werden. Ein alter, aber sehr erfolgreicher Ansatz ist das von Boussinesq 1877 vorgeschlagene Konzept der Wirbelviskosität:

$$(2.4) \quad \overline{u_1 \cdot u_1} = -2\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + k$$

$$\overline{v_1 \cdot u_1} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right).$$

Hierbei ist $k = \frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{v_1^2})$ die turbulente Energie und ν_t die turbulente (oder Wirbel-) Viskosität, die im Gegensatz zu ν keine Konstante ist, sondern stark vom Grade der Turbulenz abhängt. Die Ansätze für die Art dieser Abhängigkeit bestimmen die Anwendungsbreite des resultierenden Modells.

Die Korrelationsterme $\overline{u_1 \cdot u_1}$ und $\overline{u_1 \cdot v_1}$ sind viskose Spannungen, auch "Reynold'sche Spannungen" genannt. $\overline{u_1 \cdot v_1}$ stellt eine Scherspannung und $\overline{u_1 \cdot u_1}$ eine Normalspannung dar.

Im vorliegenden Fall einer Grenzschichtströmung sind für die Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile nur wenige der Terme in (2.3) und (2.4) von Bedeutung, während die anderen nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Im einzelnen:

- $-\rho \overline{u_1 v_1}$ die turbulente Scherspannung, die über alle anderen Effekte dominiert;
- die Normalspannung $-\rho \overline{u_1 u_1}$ ist dagegen zu vernachlässigen.
- Der Druckterm $-\frac{\bar{p}_x}{\rho}$. Er ist bei einer Kanalströmung nicht zu vernachlässigen.
- Schließlich ist der Viskositätsterm $\nu \cdot \bar{u}_{yy}$ vernachlässigbar im Vergleich zu den Turbulenzeffekten, außer in unmittelbarer Nähe des Randes, wo eine laminare und eine turbulente Grenzschicht die Verbindung zur eigentlichen Strömung herstellen (vgl. Abb. 4).

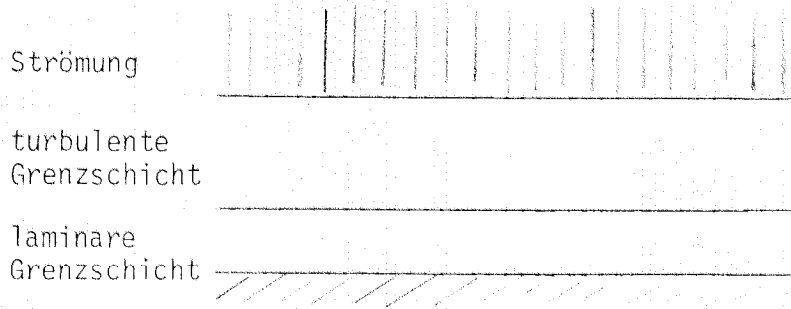


Abb. 4

Für Grenzschichtströmungen wird v (bzw. \bar{v}) als approximativ unabhängig von x angesetzt, so daß der Term $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ vernachlässigt werden kann. Wir erhalten als Modellgleichungssystem also:

$$(2.5) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (\text{Impulsbilanz})$$

Für die Abhängigkeit der Wirbelviskosität ν_t von der Strömung gibt es zahlreiche Ansätze, die je nach Kompliziertheit der Strömung von einfachen skalaren Abhängigkeiten bis zu "Mehr-Gleichungs-Modellen" reichen.

b) Turbulenzmodell

Für die Wirbelviskosität ν_t verwenden wir das auf L. Prandtl zurückgehende Konzept der Mischungslänge

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Für $\ell_m = \ell_m(x, y)$ hat sich der folgende einfache Ansatz als sinnvoll erwiesen:

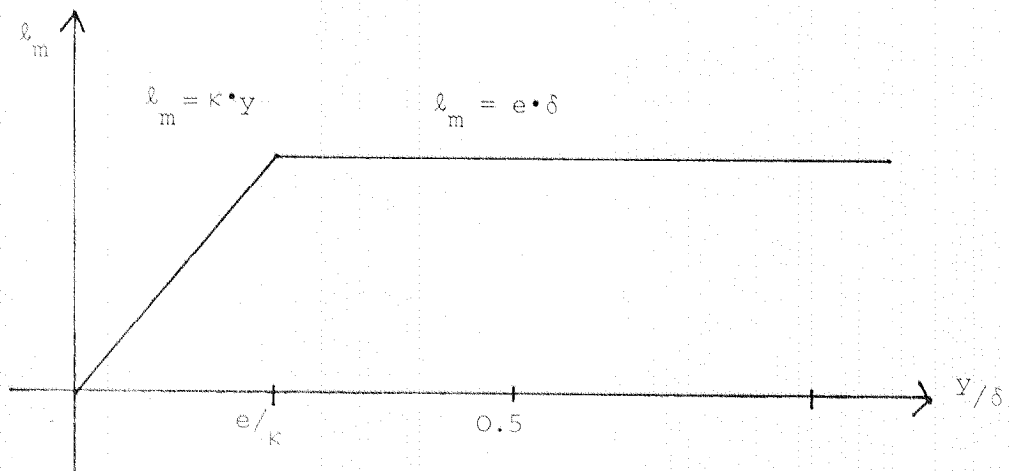


Abb. 5 (y bezeichnet den Abstand von der Wand)

δ = Grenzschichtdicke

κ = Kármán'sche Konstante $\kappa = 0.435$

e = empirische Konstante; sie hängt vom Strömungstyp ab (vgl. [3])

In den Koordinaten von Abb. 3 haben wir dann die folgende Funktion als Ansatz für die Mischungslänge verwendet:

$$l_m(x,y) = \begin{cases} \kappa \cdot (\delta - y), & \delta - y \leq \frac{e}{\kappa} \cdot \delta \\ e \cdot \delta, & \delta - y \geq \frac{e}{\kappa} \cdot \delta \end{cases}$$

Der Wert von e kann sinnvoll nur durch Vergleich mit Messungen eingestellt werden. Patankar, Spalding [5] schlagen auf Grund ihrer Rechnungen für Wandgrenzschichten mit Jets für e den Wert $e = 0.09$ vor.

Die Grenzschichtdicke δ entspricht hier der halben Kanalbreite. In unserem numerischen Verfahren starten wir von einem kleineren Wert, der langsam zur halben Kanalbreite ansteigt.

c) Randwerte

Die Wahl der Rand- und Anfangswerte ist zentral für das hier betrachtete Verfahren.

Das turbulente Geschwindigkeitsprofil zeigt zur Wand hin sehr steile Gradienten, so daß es ratsam ist, den numerischen Rand nicht auf die Wand zu legen. Auch die Zone höchster Turbulenz befindet sich in unmittelbarem Anschluß an die laminare Unterschicht. Bei der Überwindung dieser Schwierigkeit hilft das logarithmische Wandgesetz.

Aus dem linearen Ansatz für die Mischungslänge in Wandnähe ergibt sich für die turbulente Randschicht das logarithmische Wandgesetz [4]. Seine Gültigkeit ist durch viele Messungen bestätigt.

Logarithmisches Wandgesetz:

ν : Viskosität der Luft

β : empirische Konstante (Wandrauhigkeit)

$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$: Reibungsgeschwindigkeit

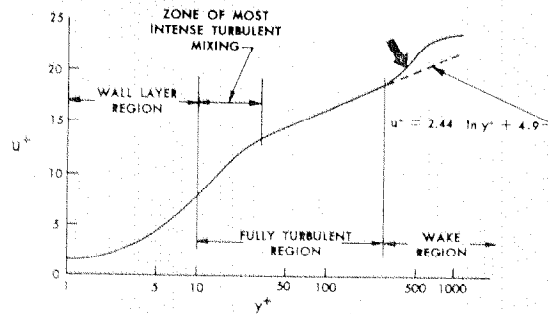
τ_w : Wandschubspannung

$y^+ := \frac{v_* \cdot d}{\nu}$ d : Abstand von der Wand

$u^+ := \frac{u}{v_*}$

Dann lautet das Wandgesetz:

$$(2.6) \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ - \frac{1}{\kappa} \ln \beta \quad y^+ > 30$$



Wir können also unseren numerischen Rand an die Stelle $y^+ = 50$ legen und dort Randbedingungen vorgeben.

Randbedingungen

$$y^+ = 50$$

- a) Die Längsgeschwindigkeit $u = u_0$ sei durch das logarithmische Wandgesetz gegeben.
- b) $v = v_0 = 0$.

Bemerkung

Die zweite Bedingung an die Geschwindigkeit v ist physikalisch nicht korrekt. v ist zwar klein, aber nicht Null. Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich mittels des logarithmischen Wandgesetzes

$$v_0 = - \frac{y_0 \cdot u_0}{v_*} \frac{dV_*}{dx} \quad ; \quad 50 = \frac{y_0 \cdot v_*}{v}$$

Problem

Zur Berechnung von u_0 ist die Kenntnis der Wandschubspannung τ_w notwendig.

$$y = 0 \quad (\text{Symmetrieachse})$$

Als Randbedingung an der Symmetrieachse fordern wir:

- c) Symmetrielinie ist Stromlinie, d.h. die Stromfunktion $f = \text{const}$
- d) $\frac{du}{dy} = 0$ aus Symmetriegründen

Bemerkung

Die Bedingungen b) und c) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung bedeuten Massenerhaltung, denn

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\text{Rand}} u dy = \int_0^{\text{Rand}} u_x dy = - \int_0^{\text{Rand}} v_y dy \stackrel{\text{b)c)}}{=} 0$$

Wandschubspannung

Durch Integration der Impulsgleichung erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Wandschubspannung:

$$\int_0^R (uu_x + vu_y) dy = \int_0^R (vu_{yy} - \frac{p_x}{\rho}) dy$$

Kontinuitätsgleichung

$$\rightarrow v(x,y) = - \int_0^y u_x dy' \quad \text{bei } v|_{y=0} = 0$$

Somit

$$\int_0^R \frac{1}{2} (u^2)_x dy - \int_0^R u_y (\int_0^y u_x dy') dy = - \frac{\tau_w}{\rho} - R \cdot \frac{p_x}{\rho}$$

wegen

$$v \int_0^R u_{yy} dy = \frac{u}{\rho} u_y|_{y=R} = - \frac{\tau_w}{\rho} \quad u_y|_{y=0} = 0$$

Mittels partieller Integration ergibt sich schließlich, wenn man berücksichtigt, daß $u \cdot \int_0^y u_x dy' \Big|_0^R = 0$

$$(2.7) \quad \frac{\tau_w}{\rho} + \frac{p_x}{\rho} \cdot R + \frac{d}{dx} \int_0^R u^2 dy = 0$$

Bemerkung

Wir sind bei dieser Betrachtung von den stationären ungemittelten Gleichungen ausgegangen. Das heißt u in obiger Gleichung enthält noch alle Fluktuationen. In einer Näherung können wir davon ausgehen, daß diese keinen wesentlichen Beitrag zu obigem Integral leisten.

Anfangsbedingung

Bei den Grenzschichtgleichungen handelt es sich um parabolische partielle Differentialgleichungen, so daß wir ausgehend von einer Geschwindigkeitsverteilung für $x=0$ in x -Richtung fortschreitend eine Lösung bestimmen können.

Bekannt ist uns allerdings nur der Wert der mittleren Geschwindigkeit im Schlitz S . Wenn wir annehmen, daß sowohl im Schlitz wie auch im Ansaugbereich ein voll ausgebildetes turbulentes Profil vorliegt, so benötigen wir zur Konstruktion des Anfangsprofils noch die mittlere Geschwindigkeit im Ansaugbereich. Die Wandschubspannung wird in erster Näherung durch die Blasius'sche Widerstandsformel

$$\tau_w = \frac{1}{8} \lambda \cdot \rho \cdot u^2$$
$$\lambda = 0.3164 \left(\frac{u \cdot d}{\nu} \right)^{-1/4}$$

berechnet und $v(0,y) = 0$ gesetzt.

Integration der Gleichung (2.7) über die Kanallänge liefert

$$\int_0^A \frac{\tau_w}{\rho} dx + p(x) \cdot \frac{R}{\rho} \Big|_{x=0}^{x=R} + \int_0^R u^2 dy \Big|_{x=0}^{x=A} = 0$$

Da wir keine Druckdifferenz zwischen Eingang und Ausgang des Kanals haben, fällt der Druckterm für die Gesamtbilanz weg, und wir erhalten

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \int_0^A \tau_w dy + \int_0^R u^2 \Big|_{x=A} dy - \int_0^R u^2 \Big|_{x=0} dy = 0$$

Dies können wir über ein Iterationsverfahren ausnutzen, um die Ansauggeschwindigkeit zu berechnen.

Das vollständige Gleichungssystem, das es zu lösen gilt, lautet also:

$$(2.9) \quad u_x + v_y = 0$$

$$(2.10) \quad uu_x + vu_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + \text{Im}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}) \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

$$(2.11) \quad v(x,0) = v(x,R) = 0$$

$$(2.12) \quad u_y(x,0) = 0$$

$$(2.13) \quad u(x,R) = u_0$$

$$(2.14) \quad u_0 = \frac{v_*}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{v_* \cdot d}{\nu} \right) - \ln \beta \right) \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$(2.15) \quad \frac{\tau_w}{\rho} + R \cdot \frac{p_x}{\rho} + \frac{d}{dx} \int_0^R u^2 dy = 0$$

$$(2.16) \quad \frac{1}{\rho} \int_0^A \tau_w dy + \int_0^R u^2 \Big|_{x=0}^{x=A} dy = 0$$

III. Numerische Realisierung

a) Umformulierung der Gleichungen

Aus der Kontinuitätsgleichung (2.9) folgt die Existenz einer Stromfunktion $f(x,y)$.

$$(3.1) \quad f_y = u, \quad f_x = -v$$

Gleichung (2.10) wird dann zu

$$(3.2) \quad f_y f_{yx} - f_x f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} p_x$$

Dies läßt sich äquivalent umformen zu einem System aus 3 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$(3.3) \quad \begin{cases} f_y = g \\ g_y = h \\ gg_x - f_x h = \tau_y - \frac{1}{\rho} p_x \end{cases}$$

$$\tau = (v + \text{Im}^2(x,y) |h|) \cdot h$$

mit den Randbedingungen

$$(3.4) \quad \begin{aligned} f_x(x,0) &= f_x(x,R) = 0 \\ h(x,0) &= 0 \\ g(x,R) &= u_0, \end{aligned}$$

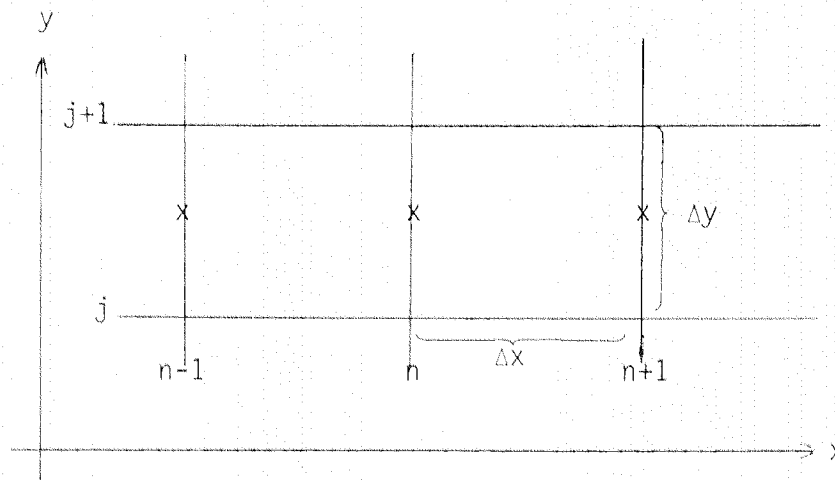
wobei u_0 durch die Gleichungen (2.14), (2.15) gegeben ist.

Es liegt also ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen

1. Ordnung vor, bei dem die Randbedingungen über eine nichtlineare Gleichung mit dem System gekoppelt ist.

b) Diskretisierung und Algorithmus

Als Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems (3.3), (3.4) verwenden wir eine Modifikation des Keller'schen BOX-Verfahrens.



Zur Diskretisierung

In x-Richtung wollen wir eine äquidistante Diskretisierung annehmen.

Dagegen soll die Diskretisierung in y-Richtung variabel bleiben.

Es gelten folgende Definitionen:

$$f_j^n := f(n \cdot \Delta x, y(j)) \quad n = 0, \dots, N$$

$$j = 0, \dots, M$$

$$\Delta y(j) = y(j) - y(j-1) \quad j = 1, \dots, M$$

$$(3.5) \quad \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta y(j+1)} = \frac{g_j^{n+1} + g_{j+1}^{n+1}}{2} \quad (= : g_{j+1/2}^{n+1})$$

$$(3.6) \quad \frac{g_{j+1}^{n+1} - g_j^{n+1}}{\Delta y(j+1)} = \frac{h_j^{n+1} + h_{j+1}^{n+1}}{2} \quad (= : h_{j+1/2}^{n+1})$$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad & g_{j+1/2}^{n-1} \cdot \frac{g_{j+1/2}^{n+1} - g_{j+1/2}^{n-1}}{\Delta x} - h_{j+1/2}^{n-1} \cdot \frac{f_{j+1/2}^{n+1} - f_{j+1/2}^{n-1}}{\Delta x} \\
 &= \frac{1}{\Delta y(j+1)} [((v + (lm_{j+1}^n)^2 |h_{j+1}^{n-1}|) \cdot \frac{1}{2} (h_{j+1}^{n+1} + h_{j+1}^{n-1}) \\
 &\quad - (v + (lm_j^n)^2 |h_j^{n-1}|) \cdot \frac{1}{2} (h_j^{n+1} + h_j^{n-1})) - \frac{1}{\rho} \frac{p^{n+1} - p^{n-1}}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

Bemerkung

In der letzten Gleichung wurde der Ansatz

$$\tau_{j+1}^n := (v + (lm_{j+1}^n)^2 |h_{j+1}^{n-1}|) \cdot h_{j+1}^n$$

zur Linearisierung verwendet.

Nach Auflösung ergeben sich aus (3.5)-(3.7) folgende Gleichungen:

$$-\frac{1}{\Delta y(j+1)} f_j^{n+1} - \frac{1}{2} g_j^{n+1} + \frac{1}{\Delta y(j+1)} f_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{2} g_{j+1}^{n+1} = 0$$

$$-\frac{1}{\Delta y(j+1)} g_j^{n+1} - \frac{1}{2} h_j^{n+1} + \frac{1}{\Delta y(j+1)} g_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{2} h_{j+1}^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\Delta x} y_{j+1/2}^{n-1} \cdot \boxed{g_j^{n+1}} + \frac{1}{2\Delta x} g_{j+1/2}^{n-1} \cdot \boxed{g_{j+1}^{n+1}} \\
 & - \frac{1}{2\Delta x} h_{j+1/2}^{n-1} \cdot \boxed{f_j^{n+1}} - \frac{1}{2\Delta x} h_{j+1/2}^{n-1} \cdot \boxed{f_{j+1}^{n+1}} \\
 & + \frac{1}{2\Delta y(j+1)} (v + (lm_j^n)^2 |h_j^{n-1}|) \boxed{h_j^{n+1}} \\
 & - \frac{1}{2\Delta y(j+1)} (v + (lm_{j+1}^n)^2 |h_{j+1}^{n-1}|) \boxed{h_{j+1}^{n+1}} + \frac{1}{\rho \Delta x} p^{n+1} \\
 = & \frac{1}{\Delta x} g_{j+1/2}^{n-1} g_{j+1/2}^{n-1} - \frac{1}{\Delta x} h_{j+1/2}^{n-1} f_{j+1/2}^{n-1} \\
 & + \frac{1}{2\Delta y(j+1)} (v + (lm_{j+1}^n)^2 |h_{j+1}^{n-1}|) h_{j+1}^{n-1} \\
 & + \frac{1}{2\Delta y(j+1)} (v + (lm_j^n)^2 |h_j^{n-1}|) h_j^{n-1} + \frac{1}{\rho \Delta x} p^{n-1}
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$c(j) := -\frac{1}{2\Delta x} h_{j+1/2}^{n-1}$$

$$d(j) := \frac{1}{2\Delta x} g_{j+1/2}^{n-1}$$

$$e(j) := \frac{1}{2} (v + (1m_j^n)^2 |h_j^{n-1}|)$$

$$R(j) := \frac{1}{\Delta x} g_{j+1/2}^{n-1} g_{j+1/2}^{n-1} - \frac{1}{\Delta x} h_{j+1/2}^{n-1} f_{j+1/2}^{n-1} + \frac{1}{\rho\Delta x} p^{n-1} \\ + \frac{1}{\Delta y(j+1)} \cdot e(j+1) \cdot h_{j+1}^{n-1} - \frac{1}{\Delta y(j+1)} \cdot e(j) h_j^{n-1}$$

Berücksichtigen wir noch die Randbedingungen:

$$u_y(x,0) = 0 \quad \hat{=} \quad h_0^{n+1} = 0$$

$$(3.8) \quad u(x,R) = u_0 \quad \hat{=} \quad y_m^{n+1} = 0$$

$$v(x,R) = 0 \quad \hat{=} \quad f_m^{n-1} = f_m^{n+1}$$

Bemerkung:

u_0 ist a priori nicht bekannt! (Vgl. 2.14/2.15.)

So ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$p := \frac{1}{\rho} p$$

$-\frac{1}{\Delta y(1)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\Delta y(1)}$	$-\frac{1}{2}$	0	0			
0	$-\frac{1}{\Delta y(1)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\Delta y(1)}$	$-\frac{1}{2}$				
		1							
			$-\frac{1}{\Delta y(2)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\Delta y(2)}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
			0	$\frac{1}{\Delta y(2)}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\Delta y(2)}$	$-\frac{1}{2}$	
$c(0)$	$d(0)$	$\frac{1}{\Delta y(1)} \cdot e(0)$	$c(0)$	$d(0)$	$\frac{1}{\Delta y(1)} \cdot e(1)$	0			
						$\frac{1}{\Delta y(3)}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
						0	$\frac{1}{\Delta y(3)}$	$-\frac{1}{2}$	
			$c(1)$	$c(1)$	$\frac{1}{\Delta y(2)} \cdot e(1)$	$c(1)$	$d(1)$	$\frac{1}{\Delta y(2)} \cdot e(2)$	

x

f_0^{n+1}
g_0^{n+1}
h_0^{n+1}
f_1^{n+1}
g_1^{n+1}
h_1^{n+1}
f_2^{n+1}
g_2^{n+1}
h_2^{n+1}

=

0
0
0
0
0
R(0)
0
0
R(1)

+ p^{n+1}

0
0
0
0
0
$\frac{1}{-\Delta x}$
0
0
$\frac{1}{-\Delta x}$

\dots

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \cdot \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \times \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R(M-3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R(M-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_M^{n-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R(M-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

f_{M+1}^{n+1}	g_{M-1}^{n+1}	h_{M-1}^{n+1}	f_M^{n+1}	g_M^{n+1}	h_M^{n+1}
-----------------	-----------------	-----------------	-------------	-------------	-------------

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$u_0 = u_S + u_D$ $u_2 = \text{Schätzwert}$

Mit A_j, B_j, C_j (3×3)-Matrizen, und E_j, R_j Spaltenvektoren mit 3 Komponenten läßt sich das Gleichungssystem in folgender Gestalt darstellen:

$$(3.9) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} B_0 & C_0 & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & A_{m-1} & B_{M-1} & C_{M-1} \\ & & & & & A_m & B_M \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_M \end{pmatrix}}_E = \underbrace{\begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_M \end{pmatrix}}_{=: \tilde{R}} + p \cdot \hat{R} + u_D \cdot \bar{R},$$

wobei

$$E_j := \begin{pmatrix} f_j^{n+1} \\ g_j^{n+1} \\ h_j^{n+1} \end{pmatrix} \quad j = 0, \dots, M \text{ die zu berechnenden Werte}$$

$$R_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(j-1) \end{pmatrix}$$

\hat{R} enthält $-\frac{1}{\Delta x}$ in den Zeilen, in denen $R(j)$ vorkommt.

\hat{R} enthält 1, an der Stelle, an der die Randgeschwindigkeit eingesetzt wird (bei g_M^{n+1}).

Die (3×3)-Matrizen sind folgendermaßen aufgebaut:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1/\Delta y(0) & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/\Delta y(0) & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_0 = \begin{pmatrix} 1/\Delta y(0) & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/\Delta y(0) & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

j = 1 bis m-1

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c(j-1) & d(j-1) & e(j-1) \end{pmatrix}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & -1/\Delta y(j) & -1/2 \\ -1/\Delta y(j) & -1/2 & 0 \\ c(j-1) & d(j-1) & e(j) \end{pmatrix}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta y(j) & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/\Delta y(j) & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c(m-1) & d(m-1) & e(m) \end{pmatrix}$$

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c(m-1) & d(m-1) & e(m) \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lautet also in Kurzschreibweise:

$$A \cdot E = \tilde{R} + p \cdot \hat{R} + u_D \cdot \bar{R} ,$$

wobei $p = \text{Druck}/\rho$ an der Stelle $n+1$

$u_D = \text{Differenz zwischen } u_0 \text{ und einem Schätzwert } u_s$.

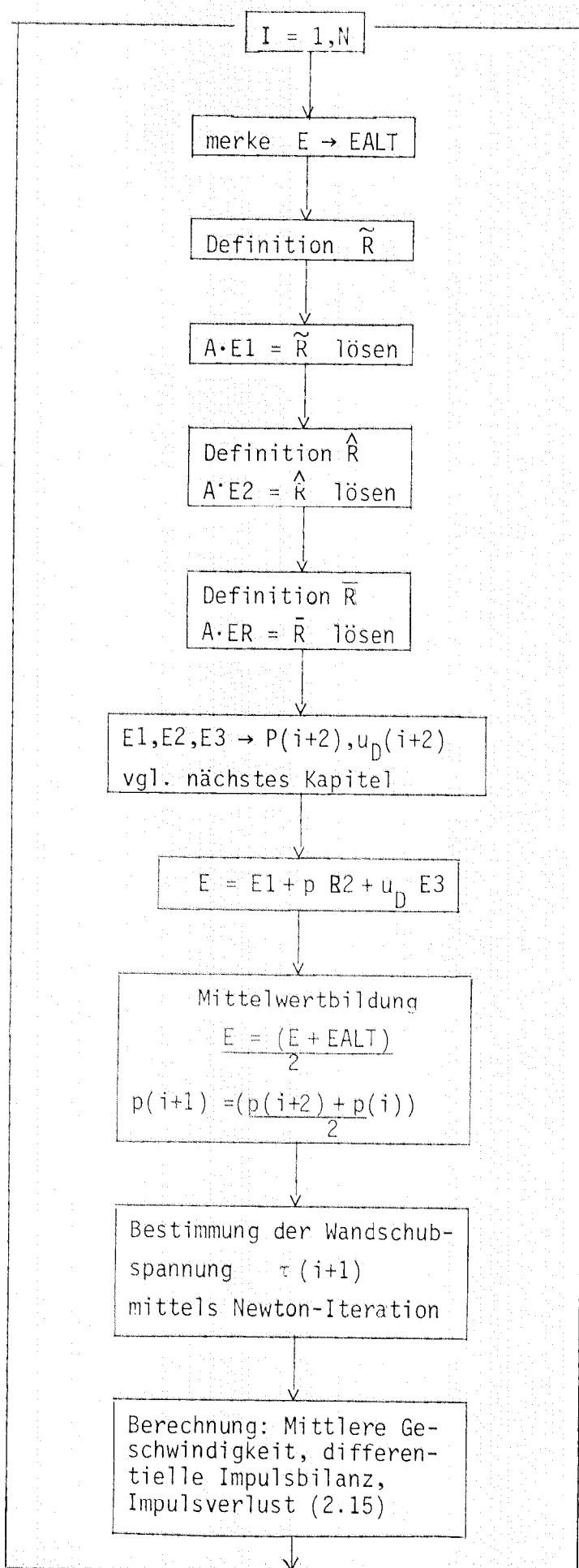
Zur Bestimmung von p und u_D möchte ich auf Teil c) dieses Kapitels verweisen.

Das Verfahren zur Auflösung des Gleichungssystems

$$A \cdot E = R$$

ist im Anhang I beschrieben.

Der Algorithmus besitzt also folgende Struktur:



c) Behandlung der Randbedingungen

Wie bereits in Teil II beschrieben, kommt den Randbedingungen zentrale Bedeutung zu. Dabei ist eine möglichst exakte Bestimmung der Wandschubspannung notwendig, d.h. ein Schätzverfahren kommt nicht in Betracht.

Insgesamt ist folgendes System von Randbedingungen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} f_x(x,0) = f_x(x,R) = 0 & \hat{=} v = 0 \\ h(x,0) = 0 & \hat{=} u_y = 0 \\ g(x,R) = u_0 & \hat{=} u = u_0 \\ u_0 = \frac{V_*}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{V_* \cdot d}{\nu} \right) - \ln \beta \right) & V_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \frac{\tau_w}{\rho} + R \cdot \frac{p_x}{\rho} + \frac{d}{dx} \int_0^R u^2 dy = 0$$

Im folgenden sei $p := \frac{p}{\rho}$ $\tau_w := \frac{\tau_w}{\rho}$.

Damit kommt die Dichte in den Gleichungen nicht mehr vor.

In das Gleichungssystem (3.9) sind die Randbedingungen $v(x,R) = 0$, $u_y(x,0) = 0$ direkt integriert.

$u(x,R) = u_0$ ist noch an das logarithmische Wandgesetz und damit an die Wandschubspannung gekoppelt. $v(x,0) = 0$ ist bisher nicht erfaßt.

Wenn wir die Gleichung (3.10) diskretisieren, erhalten wir insgesamt folgendes gekoppeltes System von Gleichungen:

$$A \cdot E = \tilde{R} + p \hat{R} + u_D \cdot \bar{R} \quad (\text{vgl. S. 19})$$

mit

$$V_*^2(n) = \frac{V_*^2(n-1) + (V_*^2(n+1) - V_*^2(n-2))}{3} \quad (\text{quadratische Interpolation})$$

$$(3.11) \quad \frac{V_*^2(n-1) + (V_*^2(n+1) - V_*^2(n-2))}{3} + \frac{p(n+1) - p(n-1)}{2\Delta x} \cdot R + \frac{I(n+1) - I(n-1)}{2\Delta x} = 0$$

$$U_{RS} + u_D = \frac{V_*}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{V_* \cdot d}{\nu} \right) - \ln \beta \right)$$

$$I(n) := \int_0^R u^2 dy \Big|_{x=x(n)}$$

Bemerkung

1) Die Randbedingung $f_x(x,0) = 0$ bestimmt, falls u_D bekannt ist, den Druck vollständig.

$$f_x(x,0) = 0 \quad \hat{=} \quad f_0^{n-1} = f_0^{n+1}$$

Wenn ich die Lösungen E1, E2, E3 einsetze und nach p auflöse, so ergibt sich

$$p(n+1) = - \frac{E1(0,1) - u_D E3(0,1)}{E2(0,1)}$$

2) $I(n+1)$ hängt quadratisch von der Lösung E ab.

$$I(n+1) = \int_0^R (E1(2) + p(n+1)E2(2) + u_D E3(2))^2 dy$$

Mit obiger Gleichung für $p(n+1)$ erhalte ich für $I(n+1)$ ein quadratisches Polynom in u_D und die Gleichung (3.11) hat nun die Gestalt:

$$V_*^2(n+1) = q(u_D) \quad q: \text{quadratisches Polynom mit bekannten Koeffizienten (vgl. Anhang II)}$$

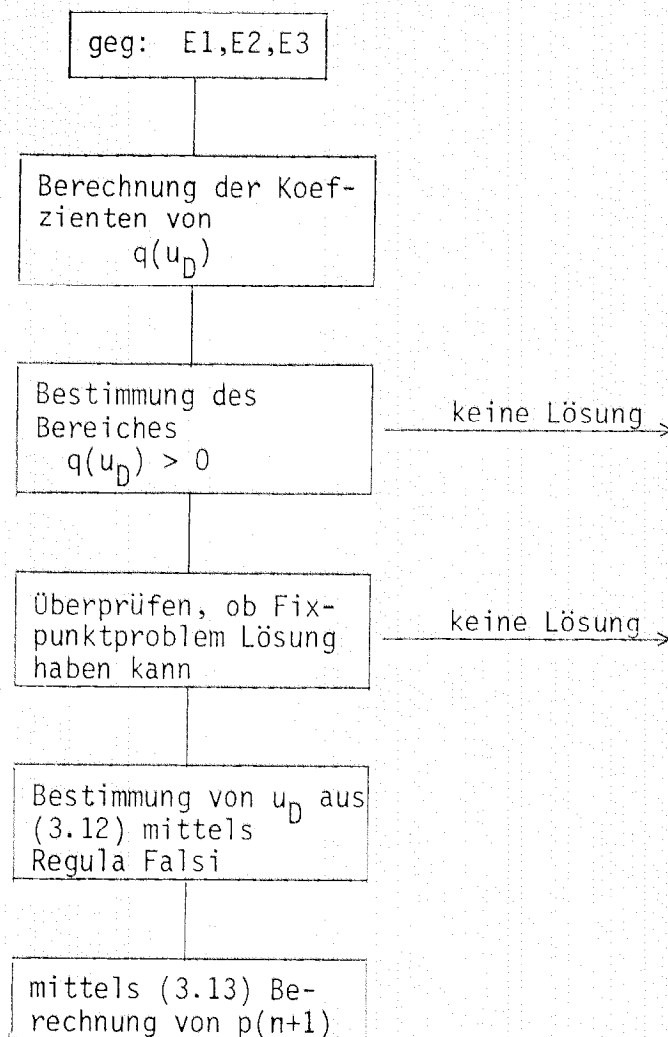
Das vollständige Gleichungssystem lautet nun:

$$\begin{aligned} A \cdot E1 &= R \\ A \cdot E3 &= R \\ A \cdot E3 &= \bar{R} \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad E1(M,2) + u_D = u_0 = \frac{\sqrt{q(u_D)}}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{q(u_D)} \cdot d}{v} \right) - \ln \beta \right)$$

$$(3.13) \quad p(n+1) = - \frac{E1(0,1) - u_D E3(0,1)}{E2(0,1)}$$

Ablaufdiagramm



d) Anfangswerte

Um den Algorithmus starten zu können, benötigen wir einen Anfangswert für E . p wird zu Beginn auf Null gesetzt. D.h. Stromfunktion, die Geschwindigkeit u sowie deren Ableitung u_y sind für $x = 0$ vorzuschreiben.

Annahme

Sowohl im Schlitz wie auch im Ansaugbereich liegt ein ausgebildetes turbulentes Profil vor, welches durch das logarithmische Wandgesetz beschrieben wird.

Falls die mittleren Geschwindigkeiten vorgegeben werden, läßt sich die Wandschubspannung näherungsweise durch die Blasius'sche Widerstandsformel berechnen.

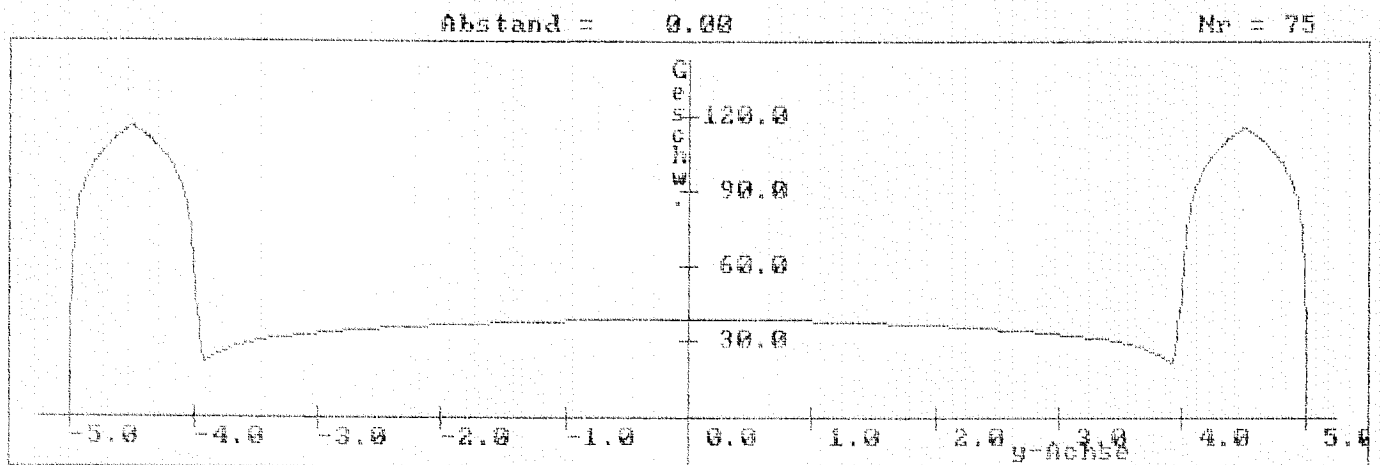
$$\tau_w = \frac{1}{\rho} \lambda \cdot \rho \cdot u$$
$$\lambda = 0.3164 \left(\frac{u \cdot d}{\nu} \right)^{-1/4},$$

wobei

- u: mittlere Geschwindigkeit
- d: Kanal- bzw. Schlitzbreite

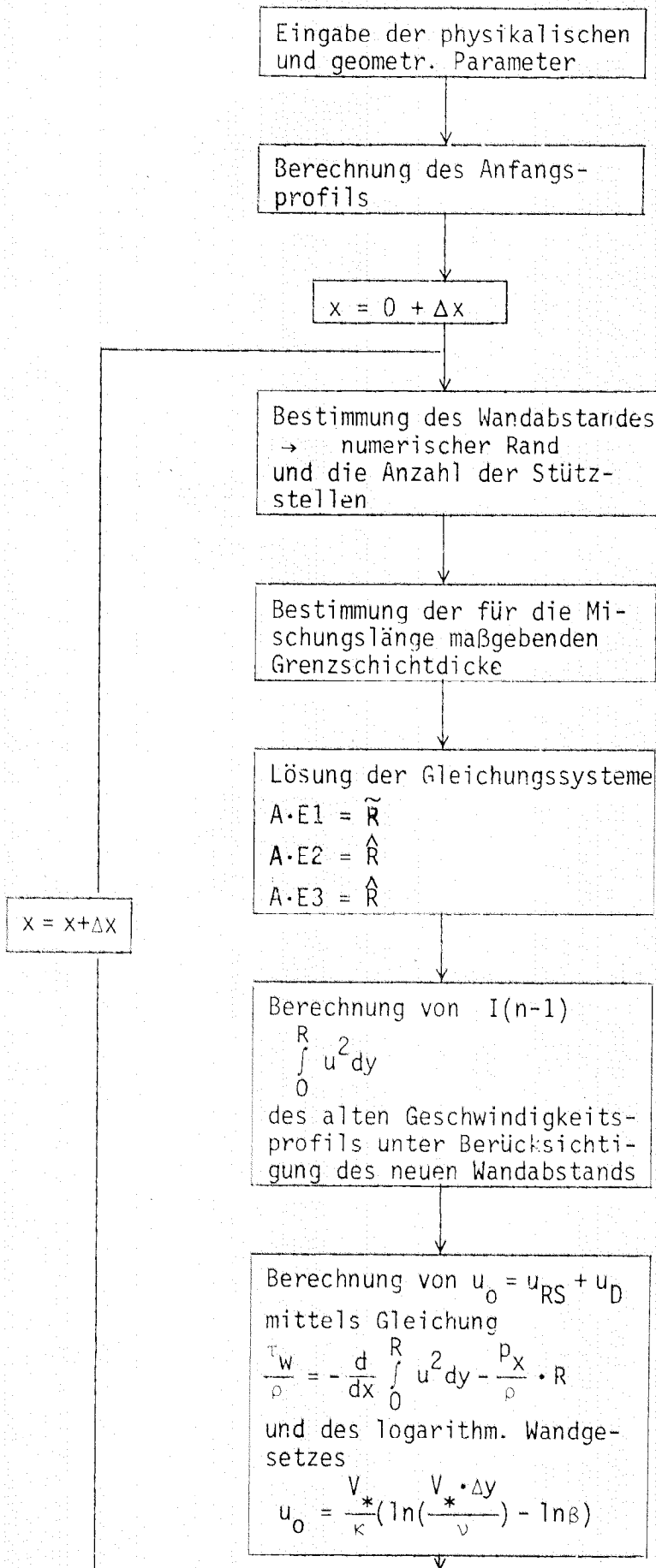
Mit dem logarithmischen Wandgesetz lassen sich dann die Geschwindigkeitsprofile im Kanal berechnen. Um die extremen Gradienten im Trennbereich zwischen Schlitz und Ansaugbereich zu vermeiden, wird das Profil in diesem Bereich stetig differenzierbar geglättet.

(vgl. Mena, Cebeci, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 35 (1982), p. 72)

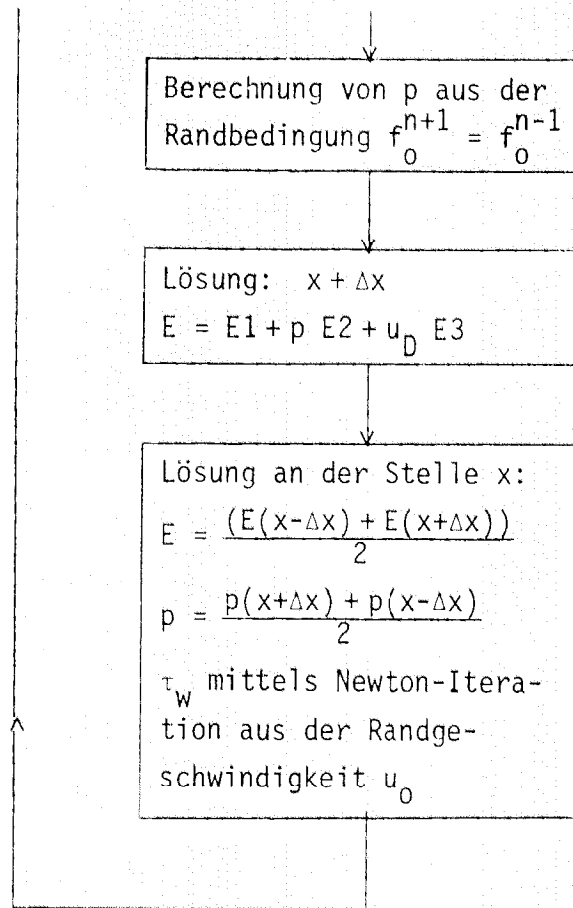


Stromfunktion und Ableitung lassen sich dann leicht durch numerische Integration bzw. Differentiation berechnen.

e) Das Verfahren auf einen Blick



Univ.-Bibl.
Koblenz



ERGÄNZUNG

Berücksichtigung variabler Wandrauigkeit

Um verschiedene Materialoberflächen behandeln zu können, ist es notwendig, in das logarithmische Wandgesetz die Art der Wandrauigkeit mit einzubeziehen. (vgl. 4. Seite 128.)

Seien

$$\begin{aligned}k &= \text{Höhe der Störung} \\k^+ &= k \cdot V_* / \nu \quad \text{Rauigkeits-Re-Zahl} \\u^+ &:= u / V_*\end{aligned}$$

Der Ansatz für das logarithmische Wandgesetz sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} (\ln y^+ - \ln \beta) + \Delta u^+$$

Δu^+ ist eine Verschiebung des Profils entsprechend der Rauigkeit. Hier hat sich folgender Ansatz bewährt:

$$\begin{aligned}\Delta u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln k^+ + 17.35(0.706 \ln \lambda - 1) \\ \lambda &= \frac{\text{Gesamtoberfläche}}{\text{mit Rauigkeit versehene Oberfläche}}\end{aligned}$$

Diese Formel ist in der Subroutine Wandgesetz implementiert.

IV. Ergebnisse

Zum Abschluß sollen noch einige Ergebnisse vorgestellt werden:

Die Rechnungen wurden für einen Kanal folgender Geometrie durchgeführt:

Länge	300 mm
Breite des Schlitzes	1 mm
Kanalbreite	10 mm

Die Luft wird dabei mit einer mittleren Geschwindigkeit von 100 m/s durch den Schlitz eingeblasen.

Jeder Berechnung ist eine laufende Nummer zugeordnet, die Sie sowohl auf dem Protokoll wie auf den Graphiken finden. Protokoll und Graphik sind selbst-erklärend.

Zu den Rechnungen 73/74/75:

Hier wurde jeweils die Schrittweite in x-Richtung halbiert. Dabei sind bei den Geschwindigkeitsprofilen kaum Unterschiede feststellbar. Auch der Verlauf der Wandschubspannung zeigt bis auf die Anfangsphase kaum Unterschiede. In der kritischen Anfangsphase bewirkt die feinere Schrittweite eine Glättung der Kurve.

Gerade diese Startphase ist auch entscheidend für die Entwicklung des Druckverlaufs. Hier zeigen sich die deutlichsten Unterschiede. Sie dürften mit der schrittweisen Linearisierung der Gleichung zusammenhängen.

Quer zur Strömungsrichtung ist die Schrittweite dem Anfangsprofil angepaßt. Wie die beiden Rechnungen 74/76 zeigen, tritt auch hier eine Stabilisierung der Ergebnisse ein.

P R O T O K O L L

Laufende Nummer : 73
Datum : 24 : 3 : 1986 Zeit : 18 h 12 min 40 sec

Geometrische Daten

Laenge des Kanals : 300.0 mm
Breite des Schlitzes : 1.0 mm
Halbe Kanalbreite : 5.0 mm

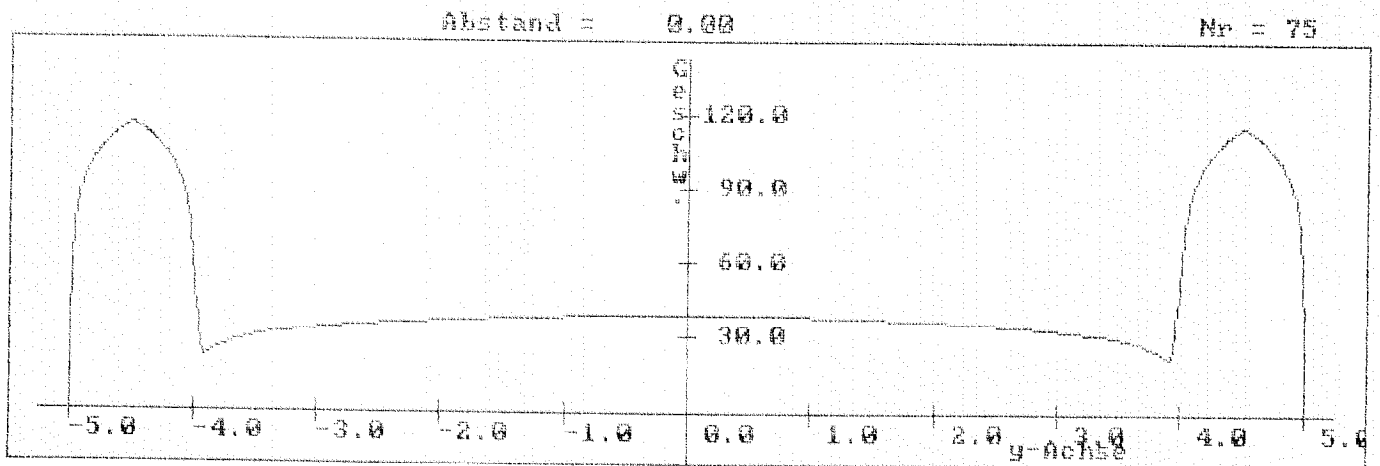
Physikalische Daten

Viskosität der Luft : 0.00001480
Wandrauhsigkeit : 0.1110
Karmansche Konstante : 0.4350
Einblasgeschwindigkeit : 100.0 m/s
Ansauggeschwindigkeit : 35.0 m/s

Numerische Daten

x - Diskretisierung : 1.0000 mm
y - Diskretisierung klein : 0.0100 mm
gross : 0.1000 m
empirische Konstante : 0.090000
Modus : 0
Diskretisierungsweite : 0.600000

Anfangsverteilung der Geschwindigkeit in x-Richtung



PROTOKOLL

Laufende Nummer : 74
Datum : 24 : 3 : 1986 Zeit : 19 h 19 min 17 sec

Geometrische Daten

Laenge des Kanals : 300.0 mm
Breite des Schlitzes : 1.0 mm
Halbe Kanalbreite : 5.0 mm

Physikalische Daten

Viskosität der Luft : 0.00001480
Wandrauhigkeit : 0.1110
Karmansche Konstante : 0.4350
Einblasgeschwindigkeit : 100.0 m/s
Ansauggeschwindigkeit : 35.0 m/s

Numerische Daten

x - Diskretisierung : 0.5000 mm
y - Diskretisierung klein : 0.0100 mm
 gross : 0.1000 m
empirische Konstante : 0.090000
Modus : 0
Diskretisierungsweite : 0.600000

PROTOKOLL

Laufende Nummer : 75

Datum : 24 : 3 : 1986 Zeit : 20 h 39 min 21 sec

Geometrische Daten

Laenge des Kanals : 300.0 mm
Breite des Schlitzes : 1.0 mm
Halbe Kanalbreite : 5.0 mm

Physikalische Daten

Viskosität der Luft : 0.00001480
Wandrauhigkeit : 0.1110
Karmansche Konstante : 0.4350
Einblasgeschwindigkeit : 100.0 m/s
Ansauggeschwindigkeit : 35.0 m/s

Numerische Daten

x - Diskretisierung : 0.2500 mm
y - Diskretisierung klein : 0.0100 mm
gross : 0.1000 m
empirische Konstante : 0.090000
Modus : 0
Diskretisierungsweite : 0.600000

PROTOKOLL

Laufende Nummer : 76

Datum : 7 : 4 : 1986 Zeit : 20 h 0 min 0 sec

Geometrische Daten

Laenge des Kanals : 300.0 mm
Breite des Schlitzes : 1.0 mm
Halbe Kanalbreite : 5.0 mm

Physikalische Daten

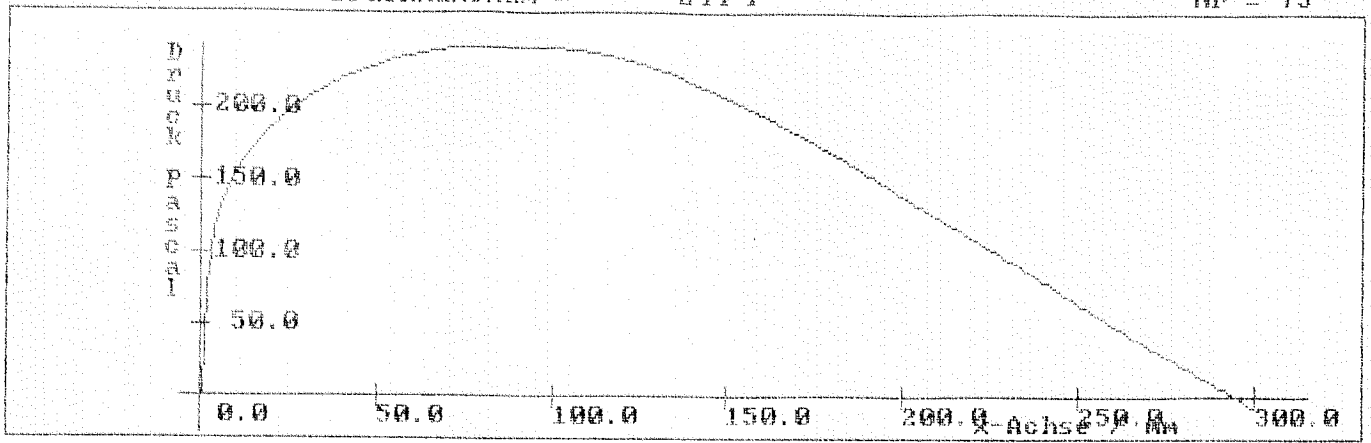
Viskosität der Luft : 0.00001480
Wandrauhigkeit : 0.1110
Karmansche Konstante : 0.4350
Einblasgeschwindigkeit : 100.0 m/s
Ansauggeschwindigkeit : 35.0 m/s

Numerische Daten

x - Diskretisierung : 0.5000 mm
y - Diskretisierung klein : 0.0200 mm
gross : 0.1000 m
empirische Konstante : 0.090000
Modus : 0
Diskretisierungsweite : 0.600000

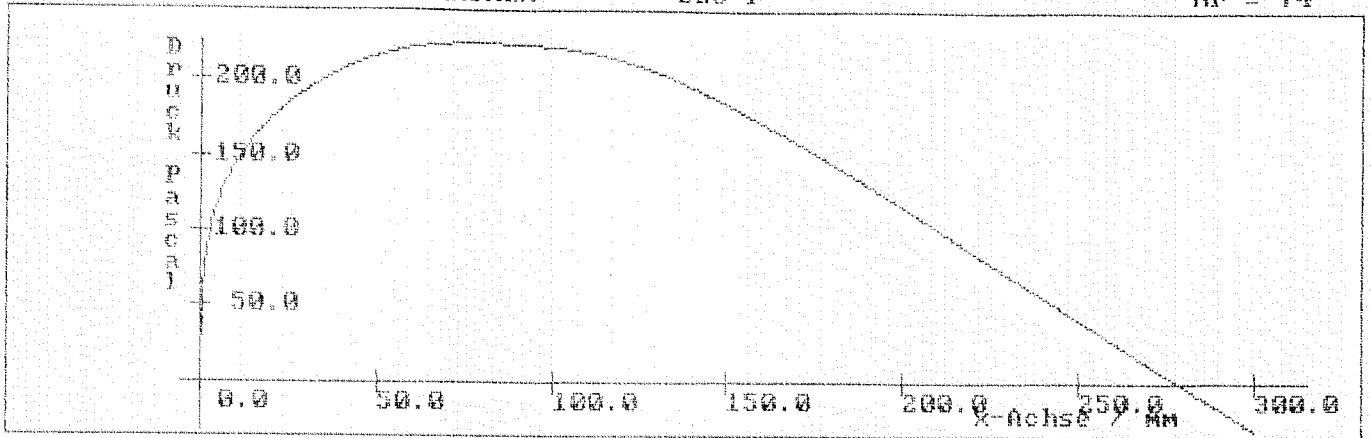
Druckmaximum = 244 P

Nr = 73



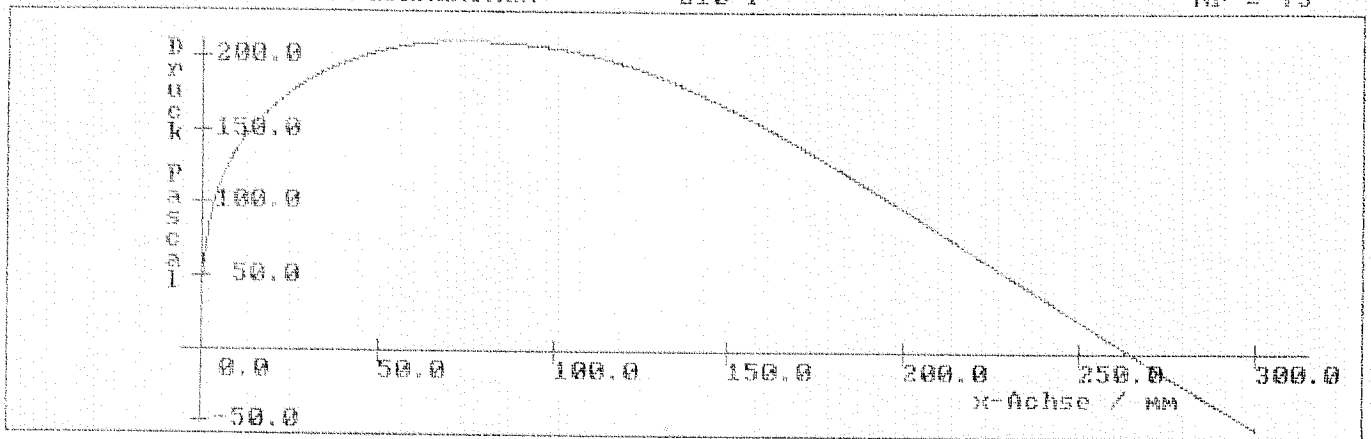
Druckmaximum = 225 P

Nr = 74



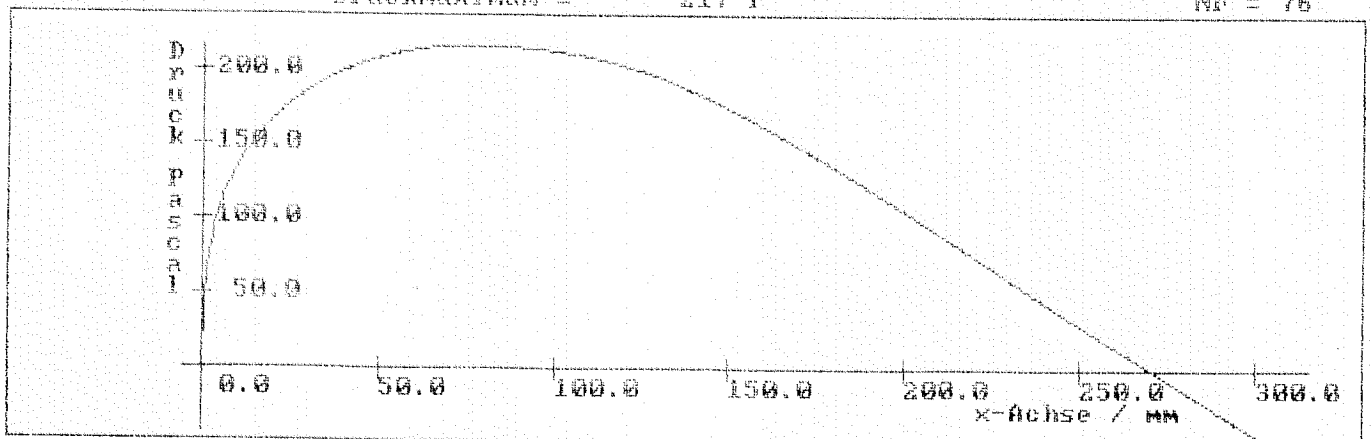
Druckmaximum = 210 P

Nr = 75



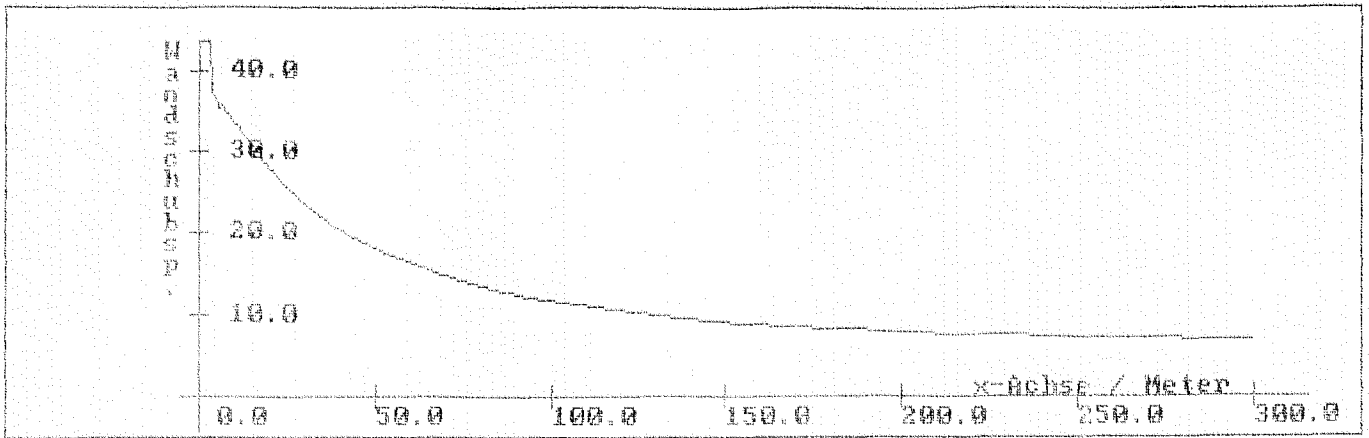
Druckmaximum = 217 P

Nr = 76

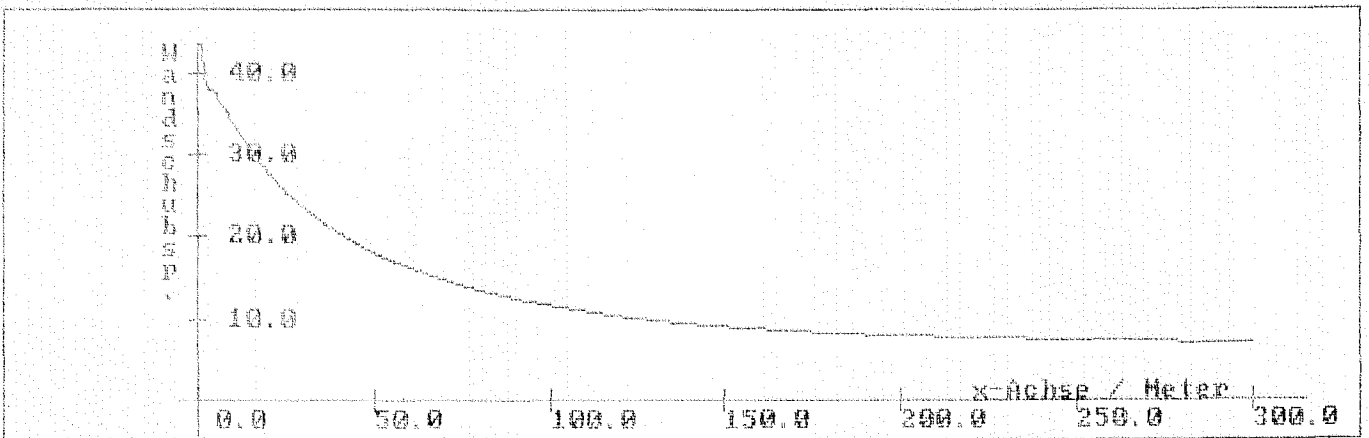


Handschubspannung

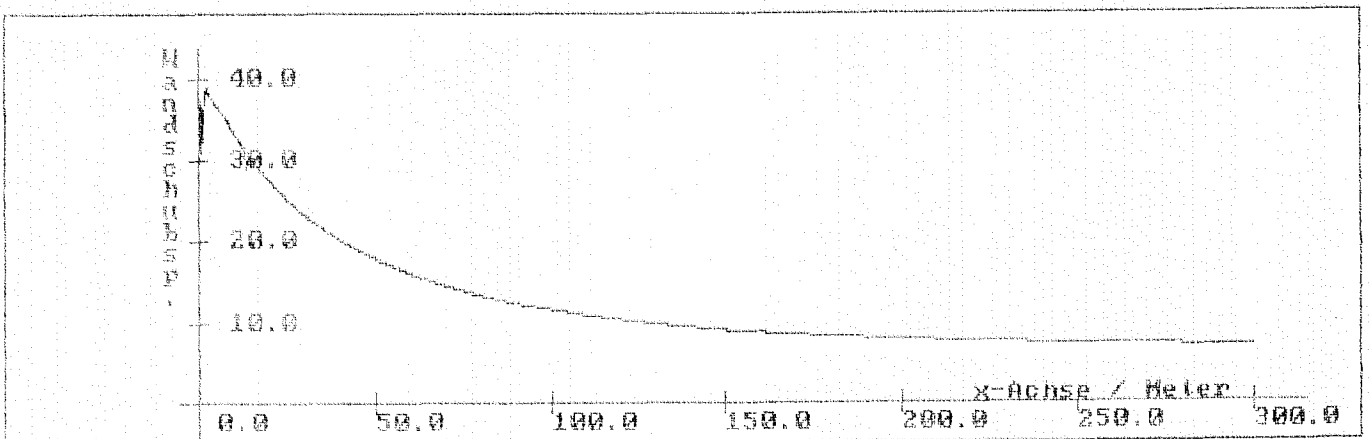
Nr = 73



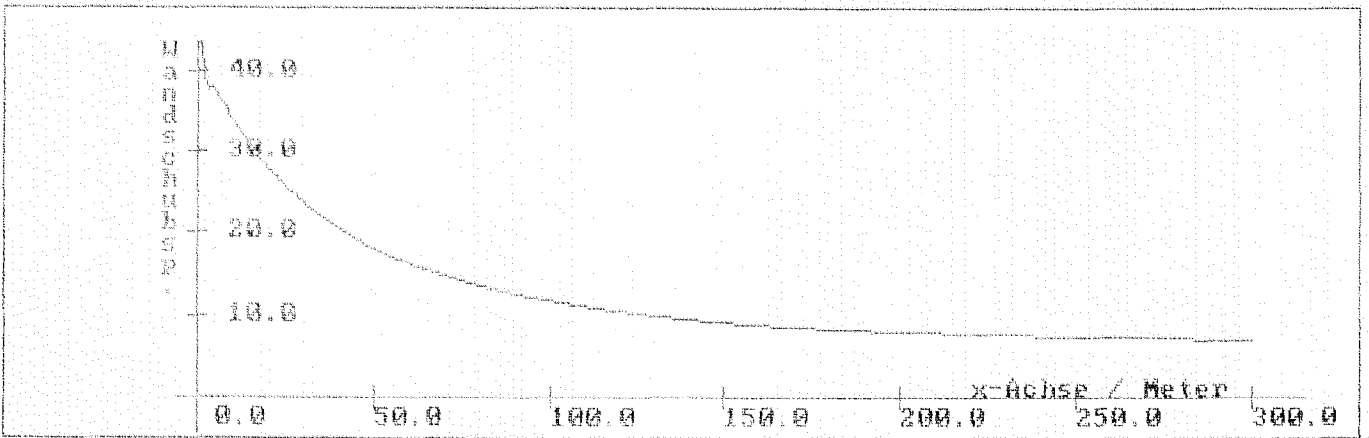
Nr = 74



Nr = 75

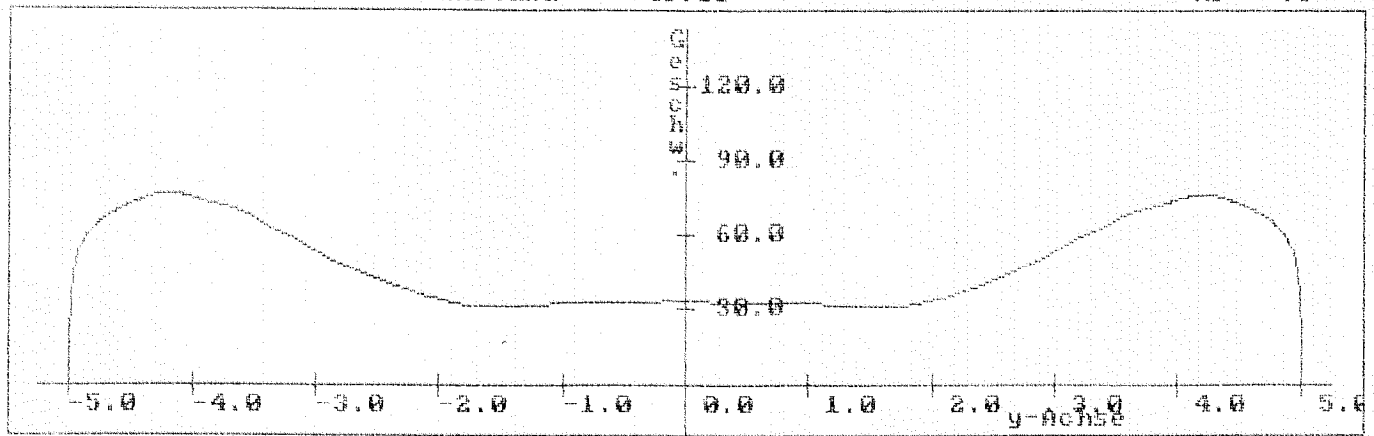


Nr = 76



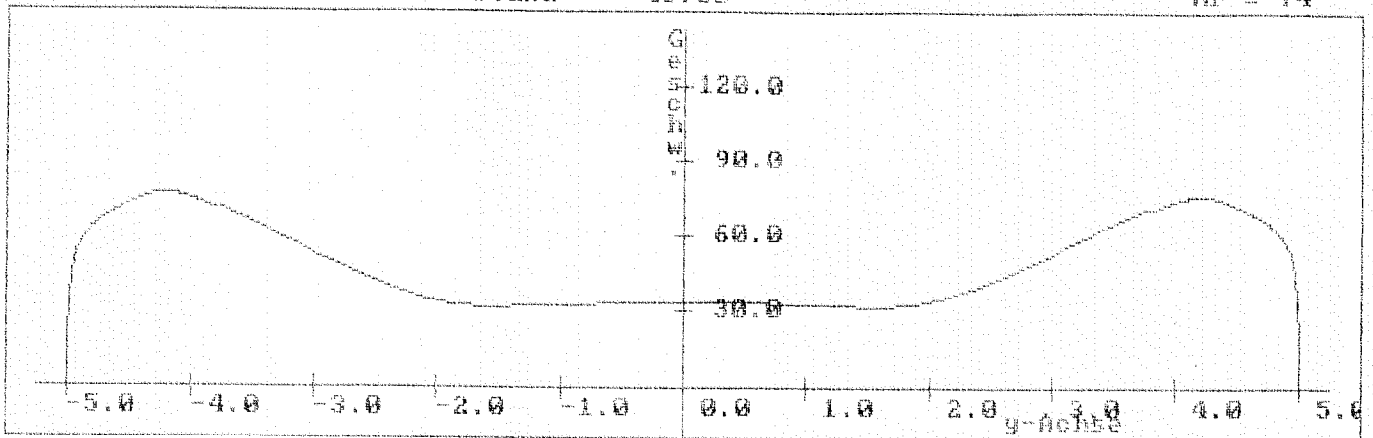
Abstand = 45.00

Nr = 73



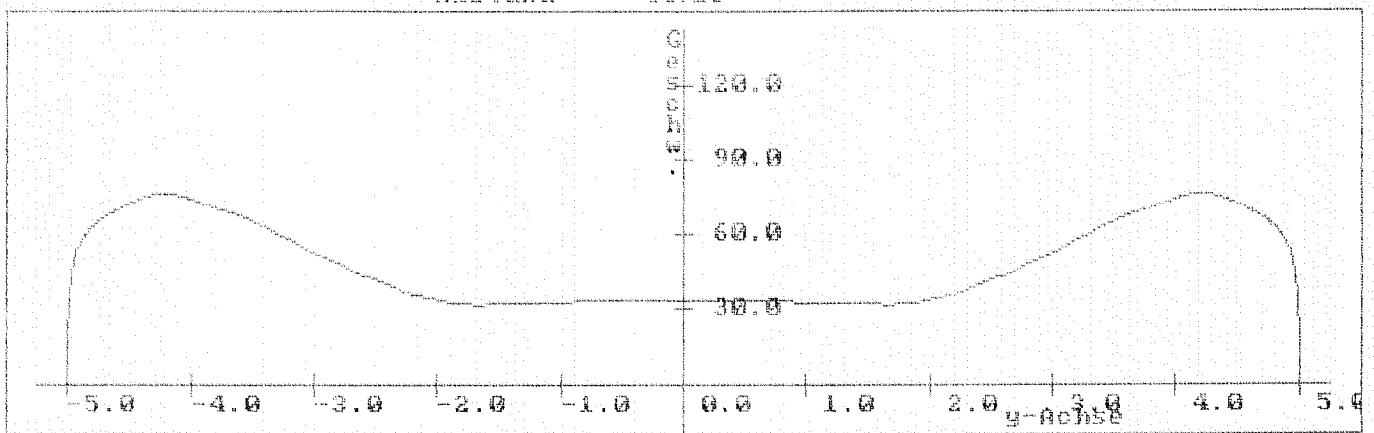
Abstand = 45.00

Nr = 74



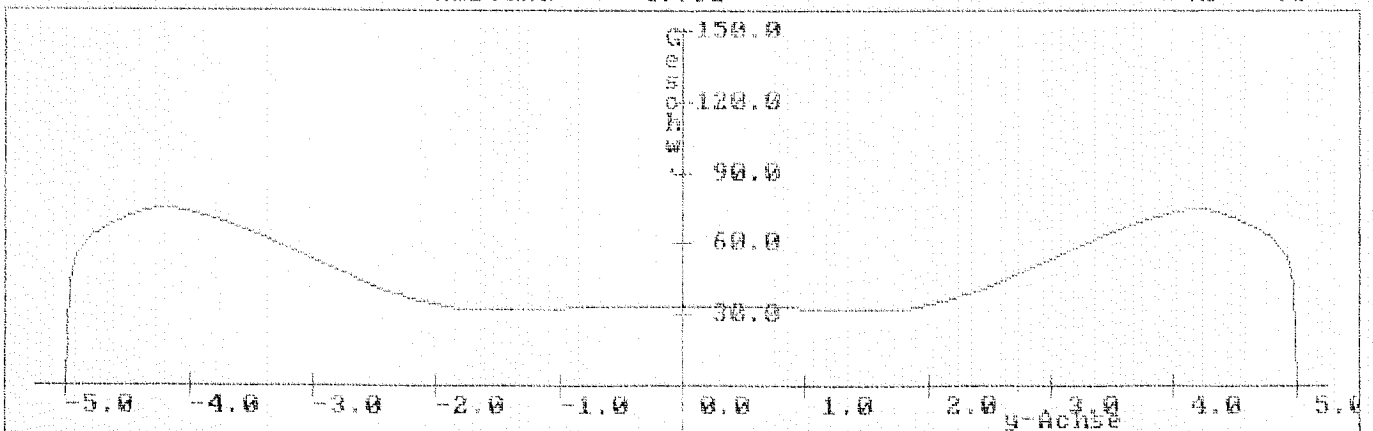
Abstand = 44.25

Nr = 75



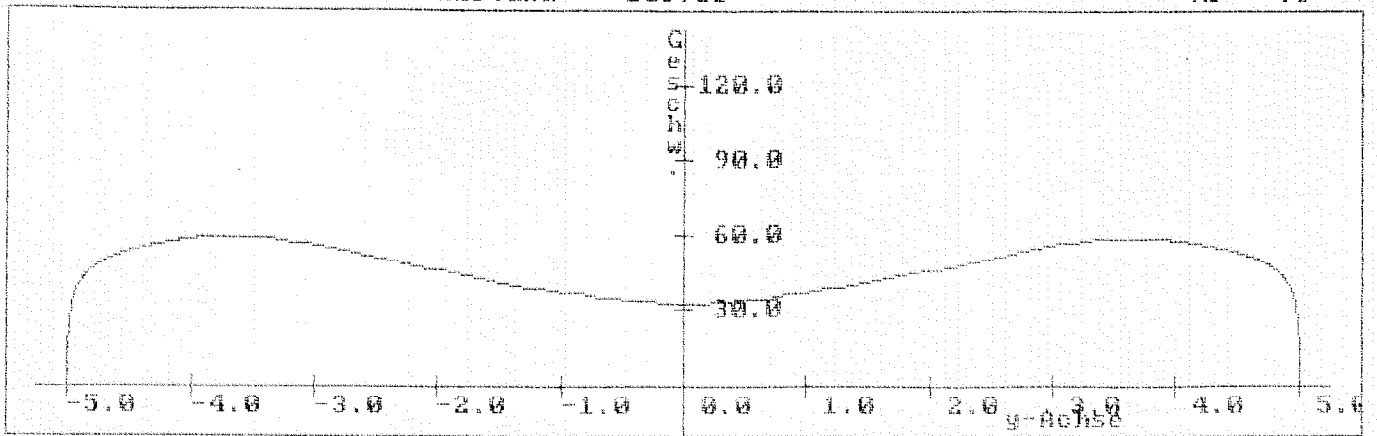
Abstand = 47.50

Nr = 76



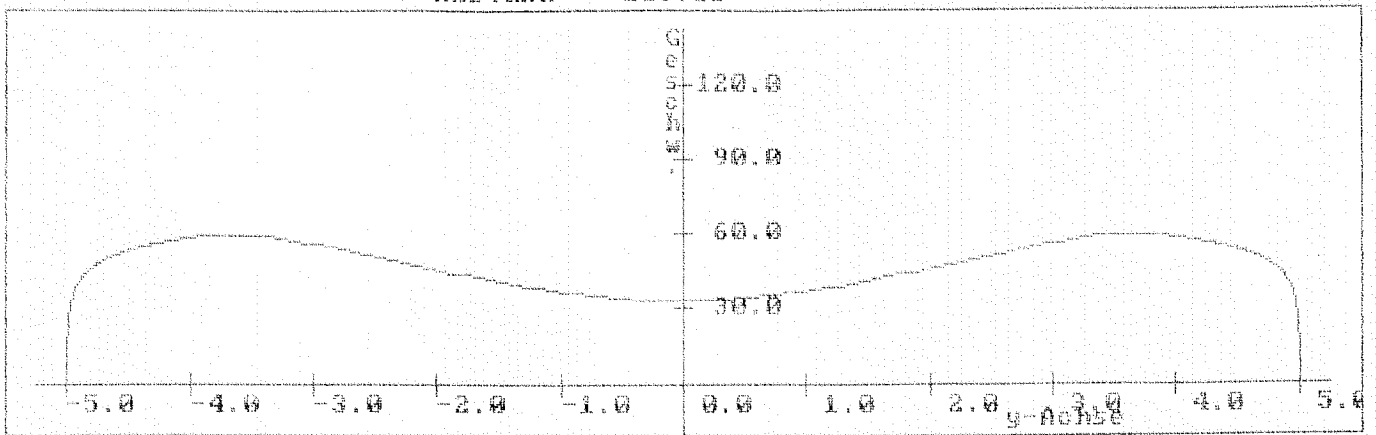
Abstand = 105.00

Nr = 73



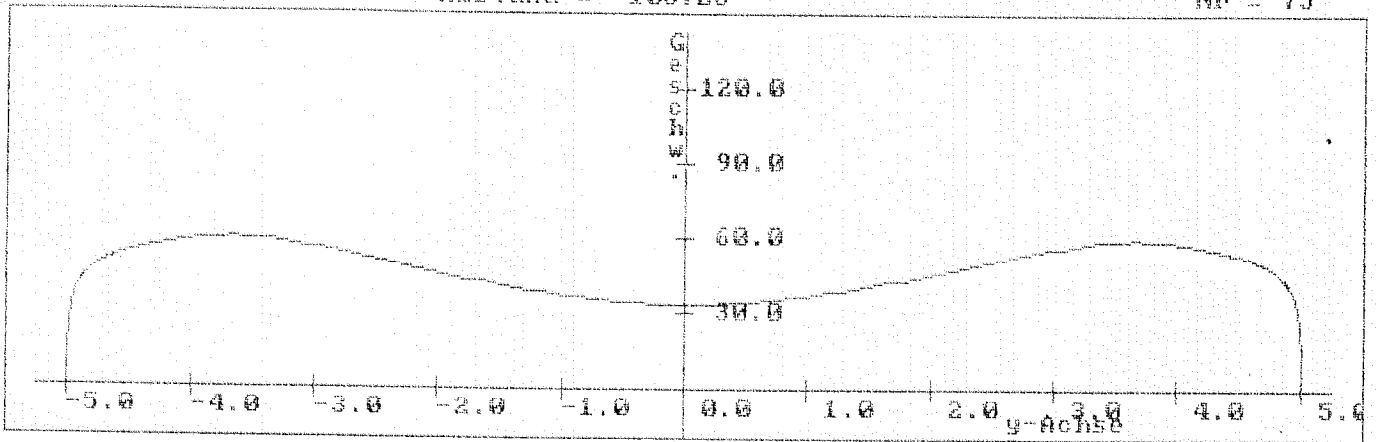
Abstand = 105.00

Nr = 74



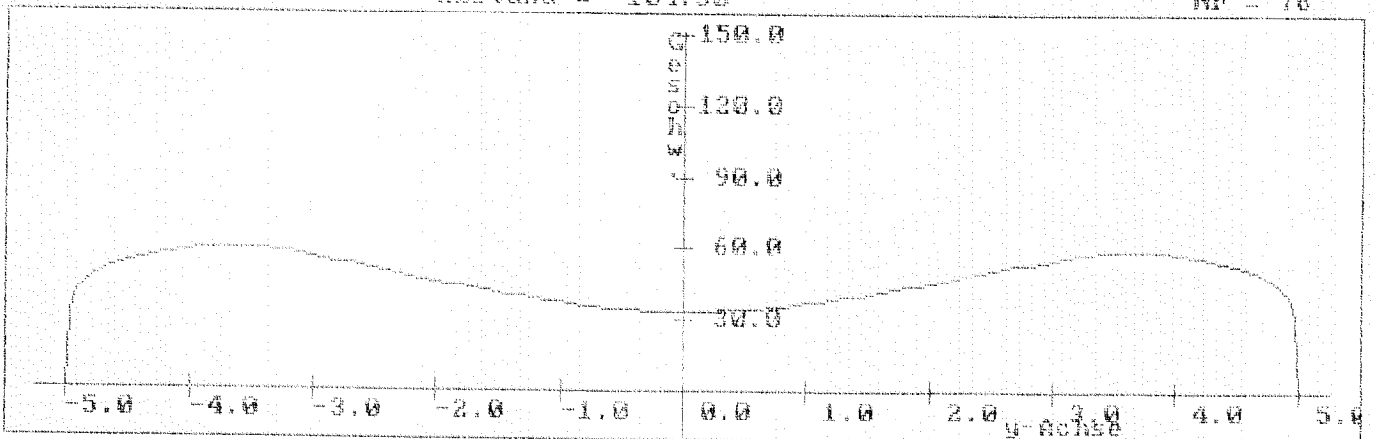
Abstand = 103.25

Nr = 75



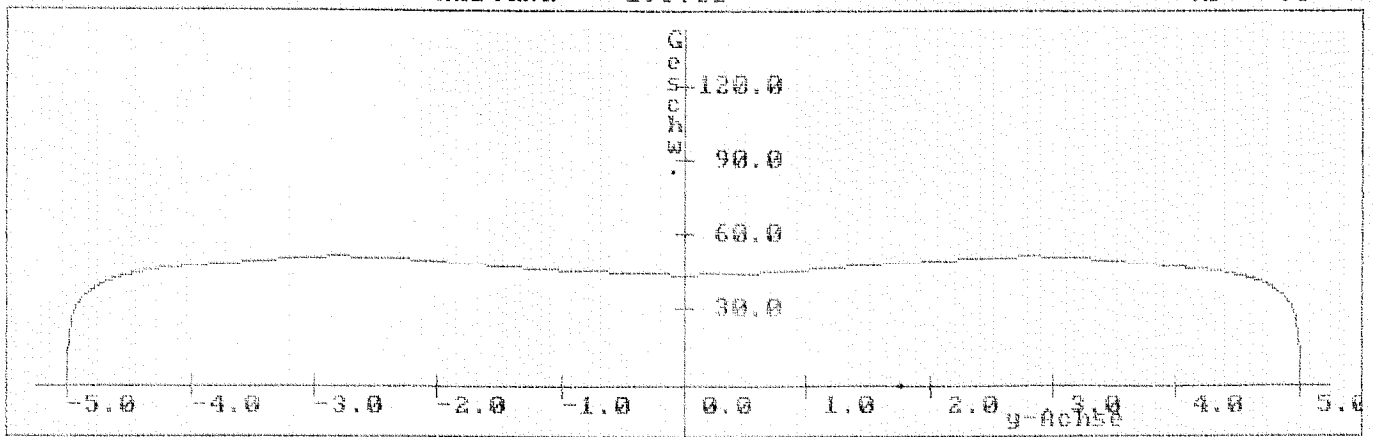
Abstand = 104.50

Nr = 76



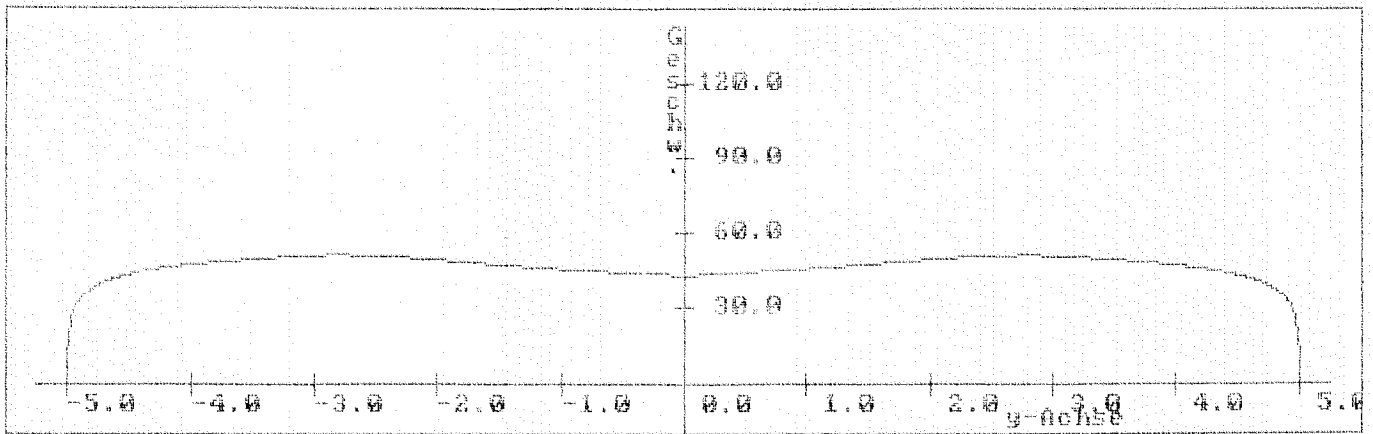
Abstand = 195.00

Nr = 73



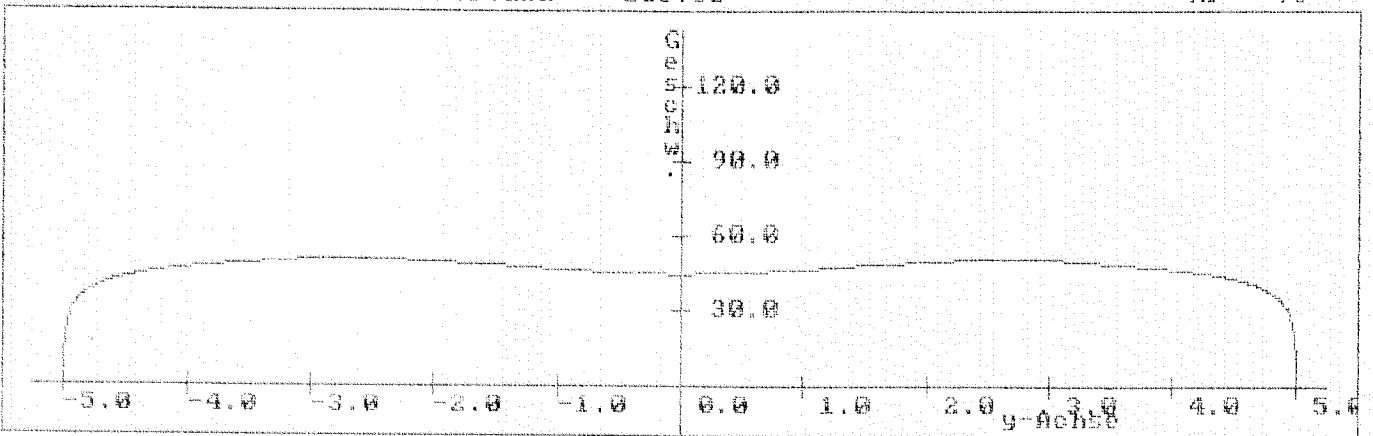
Abstand = 195.00

Nr = 74



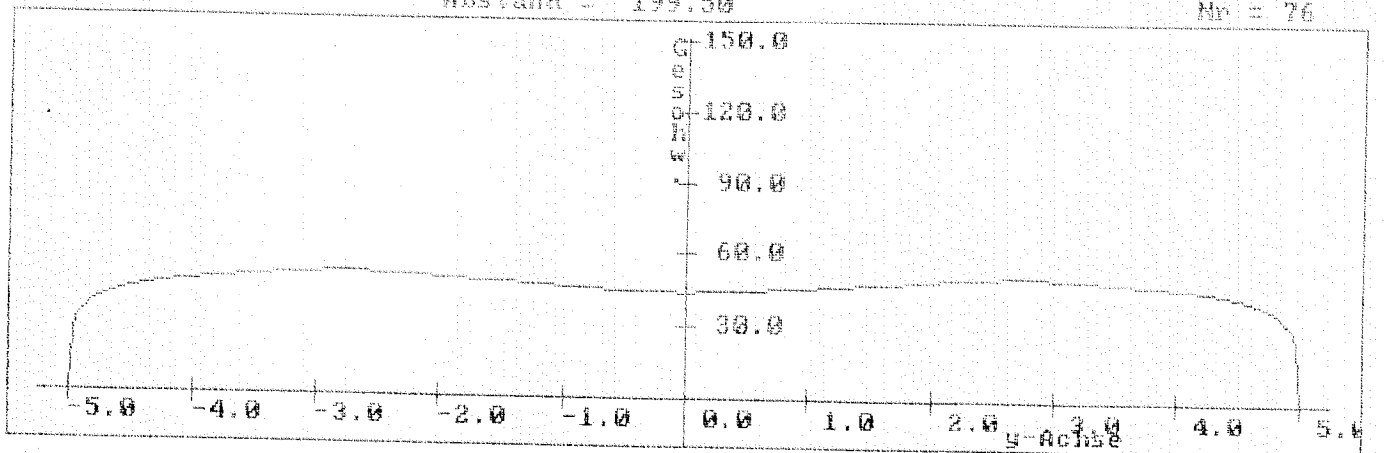
Abstand = 206.50

Nr = 75



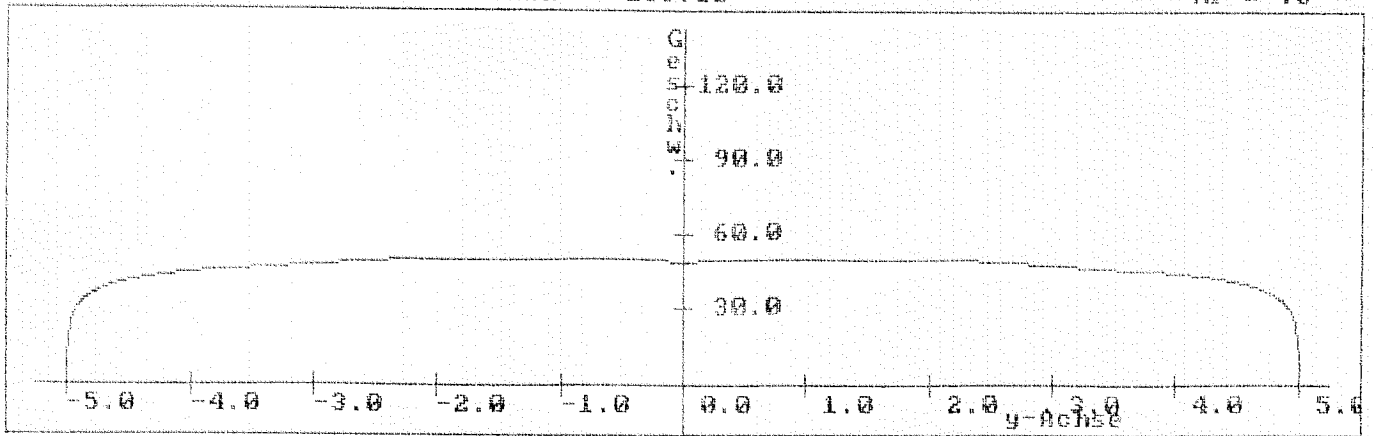
Abstand = 199.50

Nr = 76



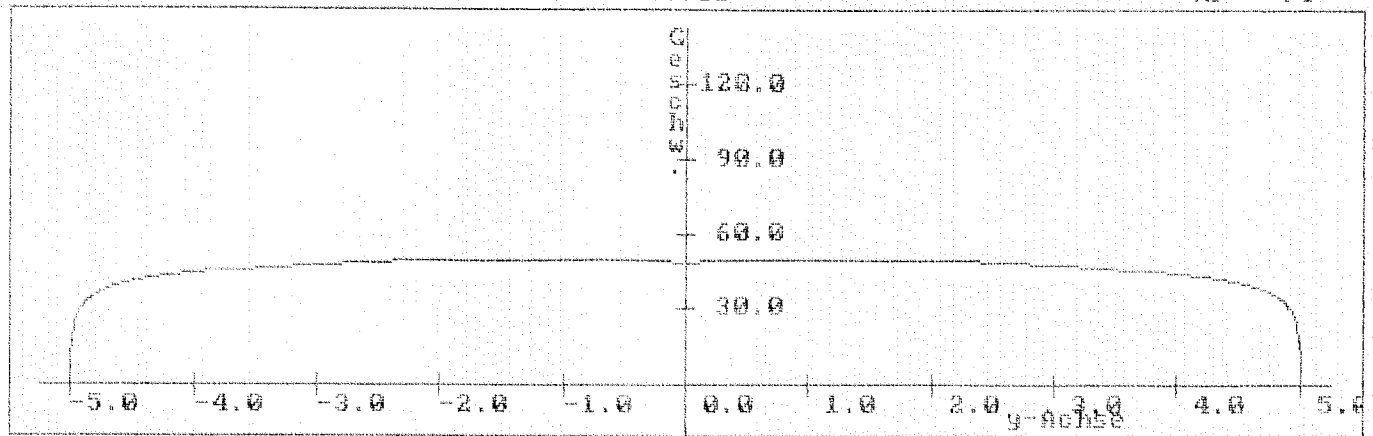
Abstand = 285.00

Nr = 73



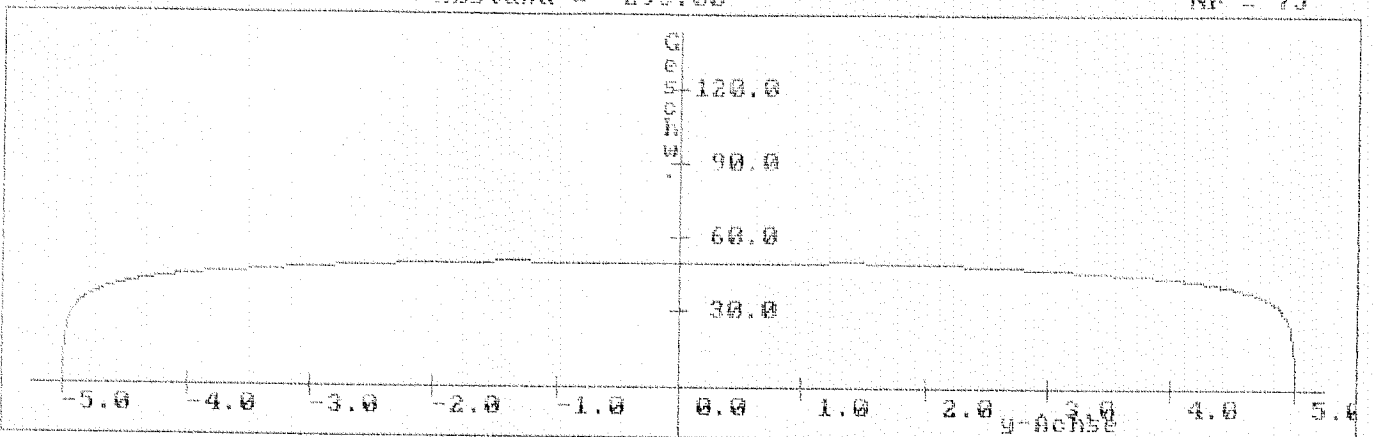
Abstand = 285.00

Nr = 74



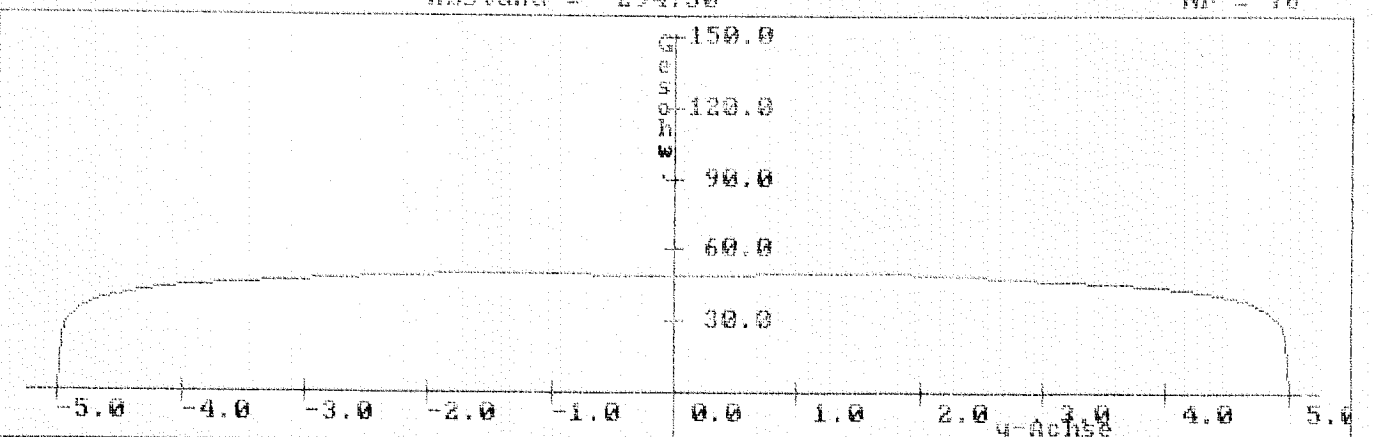
Abstand = 295.00

Nr = 75



Abstand = 294.50

Nr = 76



V. Anhang

ANHANG I

Lösungsverfahren für das Gleichungssystem

$$A \cdot E = R \quad (\text{vgl. Seite 18}),$$

wobei A Blocktridiagonalgestalt besitzt.

1. Schritt

Zerlegung von $A = L \cdot R$, wobei L untere Dreiecksmatrix, R obere Dreiecksmatrix.

$$\begin{matrix}
 & A & = & L & \cdot & R \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 B_0 & C_0 & & \\
 A_1 & B_1 & C_1 & \\
 & A_2 & B_2 & C_2 \\
 & & & \ddots & \\
 & & A_j & B_j & C_j \\
 & & & A_{j+1} & B_{j+1} & C_{j+1}
 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cccc}
 \nabla & & & \\
 \square & \nabla & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 0
 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc}
 \nabla & \square & & \\
 & \nabla & \square & \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & & & \ddots & \square \\
 & & & & 0
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Bezeichnungen

Nebendiagonale von L: $L(j) \quad j = 0, \dots, M-1$

Diagonale von L: $DL(j) \quad j = 0, \dots, M$

Nebendiagonale von R: $R(j) \quad j = 1, \dots, M$

Diagonale von R: $DR(j) \quad j = 0, \dots, M$

wobei $L(j)$, $DL(j)$, $R(j)$, $DR(j)$ 3×3 -Matrizen darstellen,
in der Diagonale von $DL(j)$ stehen '1'.

Die Zerlegung kann auf Grund der Struktur der Matrizen ohne Pivotisierung durchgeführt werden.

Unterprogramm

1) $B_0 = DL(0) \cdot DR(0)$
ergibt $DL(0)$, $DR(0)$

LR004

$A_1 = L(0) \cdot DR(0)$
ergibt $L(0)$

LR001

	<u>Unterprogramm</u>
2) $j = 1, \dots, M-1$	
$C(j-1) = DL(j-1) \cdot R(j)$	LR002
ergibt $R(j)$	
$B(j) = L(j-1) \cdot R(j) + DL(j) \cdot DR(j)$	LR004
→ $DL(j), DR(j)$	
$A(j+1) = L(j) \cdot DR(j)$	LR001
ergibt $L(j)$	
3) $C(M-1) = DL(M-1) \cdot R(M)$	LR002
$B(M) = L(M-1) \cdot R(M) + DL(M) \cdot DR(M)$	LR004

Die Algorithmen sind im Detail der Programmdokumentation zu entnehmen.

Bemerkung

Diese LR-Zerlegung muß für jeden x-Schritt erneut durchgeführt werden. Die Koeffizienten der Matrix A hängen von (n) ab.

2. Schritt

Auflösung der Gleichung $L \cdot R \cdot E = \tilde{R}$

a) forward-sweep

$L \cdot y = \tilde{R}$ zu lösen

b) backward-sweep

$R \cdot E = y$

Da L, R Dreiecksmatrizen sind, können die Gleichungssysteme direkt aufgelöst werden, vgl. dazu die Unterprogramme

FORWARDSWEEP,

BACKWARDSWEEP.

ANHANG II

Berechnung des quadratischen Polynoms $q(u_D)$

$$I(n+1) = \int_0^R (E_1 + p(n+1)E_2 + u_D E_3)^2 dy$$

(jeweils die 2. Komponente von E_1, E_2, E_3)

$$I_1 := \int_0^R E_1^2 dy$$

$$I_2 := \int_0^R E_2^2 dy$$

$$I_3 := \int_0^R E_3^2 dy$$

$$I_4 := \int_0^R E_1 E_2 dy$$

$$I_5 := \int_0^R E_2 E_3 dy$$

$$I_6 := \int_0^R E_1 E_3 dy$$

$$SD := \frac{E_1(0,1)}{E_3(0,1)} \quad PD := \frac{E_2(0,1)}{E_3(0,1)} \quad p := p(n+1)$$

Dann folgt wegen

$$p = -SD - u_D PD$$

$$\begin{aligned} I(n+1) &= u_D^2 \cdot (I_3 + PD^2 I_2 - 2PDI_5) + u_D (-2PDI_4 - 2SDI_5 + 2I_6 + 2PDI_2) + I_1 - 2SDI_4 + SD^2 I_2 \\ &=: u_D^2 \cdot \tilde{q}_2 + u_D \cdot \tilde{q}_1 + \tilde{q}_0 \end{aligned}$$

In Gleichung (3.11) eingesetzt:

$$\begin{aligned} q(u_D) &= -\frac{\tilde{q}_2 \cdot 3}{2\Delta x} u_D^2 \\ &\quad + \left(-\frac{3\tilde{q}_1}{2\Delta x} + \frac{3PD \cdot R}{2\Delta x} \right) \cdot u_D \\ &\quad - 3V_*^2(n-1) + V_*^2(n-2) + \frac{3p(n-1)}{2\Delta x} + \frac{3SD \cdot R}{2\Delta x} + \frac{I(n-1) \cdot 3}{2\Delta x} - \frac{3\tilde{q}_0}{2\Delta x} \\ &= q_2 u_D^2 + q_1 u_D + q_0 \end{aligned}$$

Entscheidungskriterien

- a) $q(u_D) > 0 \iff$ a) $q_1^2 - 4q_2q_0 > 0$
b) u_D liegt zwischen den beiden Nullstellen
(q_2 negativ)

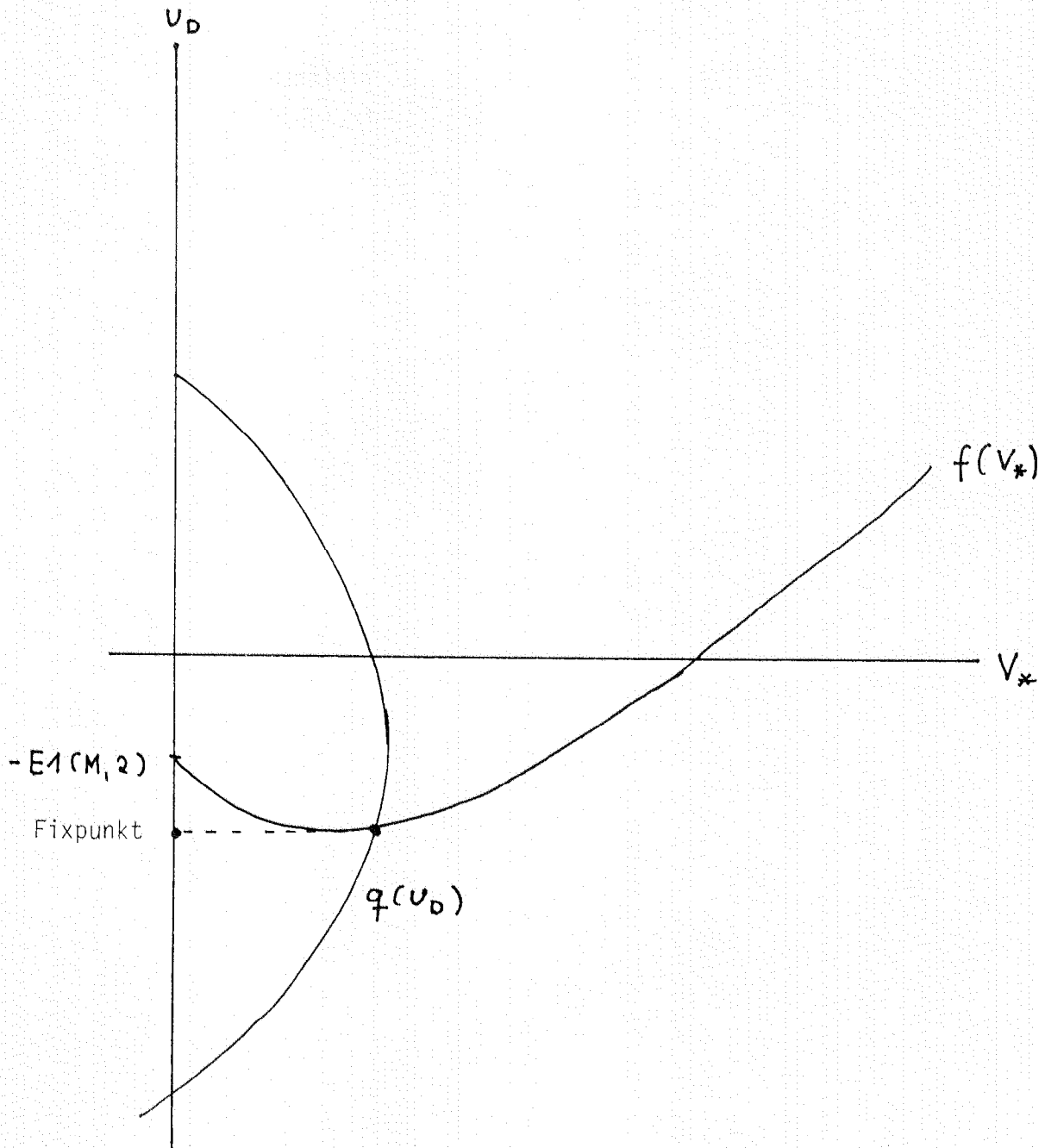
b) Fixpunktproblem

$$E_1(M,1) + u_D = \frac{\sqrt{q(u_D)}}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{q(u_D)} \cdot d}{v} \right) - \ln \beta \right)$$

\iff

$$u_D = -E_1(M,2) + \frac{v}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{v \cdot d}{v^*} \right) - \ln \beta \right) = f(v_*)$$

Anschauung



Es liegt sicher eine Lösung vor, falls $-E_1(M,2)$ von den Nullstellen von q eingeschlossen wird.

Da $u_D \ll E_1(M,2)$, wird dies als Entscheidungskriterium für die Existenz eines sinnvollen Fixpunktes gewonnen.

VI. Literatur

- [1] Schlichting: Boundary-Layer Theorie; 7. Ausgabe, McGraw-Hill (1979)
- [2] Cebeci, Bradshaw: Physical and computational aspects of convective Heat Transfer; Springer (1984)
- [3] W. Rodi: Turbulence models and their application in hydraulics; IAHR (1980)
- [4] Cebeci, Smith: Analysis of turbulent boundary layers. Academic Press (1974)
- [5] Patankar, Spalding: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2nd ed. Intertext, London (1970)

BISHER SIND FOLGENDE BERICHTE ERSCHIENEN:

- Nr. 1 FORSCHUNG
W.G. Eschmann und Ralph Götz
Optimierung von Gelenksehsecken
- Nr. 2 WEITERBILDUNG
H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Mathematische Weiterbildung
- Nr. 3 FORSCHUNG
W. Krüger
The Trippstadt Problem
- Nr. 4 WEITERBILDUNG
H. Neunzert, M. Schulz-Reese, K.E. Hoffmann
Mathematics in the University and Mathematics
in Industry - Complement or Contrast?
- Nr. 5 FORSCHUNG
A.K. Louis
The Limited Angle Problem in Computerized Tomography
- Nr. 6 FORSCHUNG
W. Krüger
Regression für Ellipsen in achsenparalleler Lage
(Interner Bericht)
- Nr. 7 FORSCHUNG
Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten
- Nr. 8 FORSCHUNG
W. Krüger, J. Petersen
Simulation und Extrapolation von Rainflow-Matrizen
- Nr. 9 FORSCHUNG
W. Krüger, M. Scheutzow u. A. Beste, J. Petersen
Markov- und Rainflow-Rekonstruktionen stochastischer
Beanspruchungszeitfunktionen
- Nr. 10 FORSCHUNG
Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten, Teil 2
- Nr. 11 FORSCHUNG
H. Ploss
Simulationsmethoden zur Lösung der Boltzmanngleichung

- Nr. 12 FORSCHUNG
M. Keul
Mathematische Modelle für das Zeitverhalten stochastischer
Beanspruchungszeitfunktionen
- Nr. 13 AUSBILDUNG
W. Krüger, H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Fundamentals of Identification of time series
- Nr. 14 FORSCHUNG
H. Moock
Ein Mathematisches Verfahren zur Optimierung von Nocken
- Nr. 15 FORSCHUNG
F. J. Pfreundt
Berechnung und Optimierung des Energiegewinnes bei
Anlagen zur Lufterwärmung mittels Erdkanal

Die Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik
können angefordert werden bei:

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Technomathematik
Erwin-Schrödinger-Straße

6750 Kaiserslautern

ARBEITSGRUPPE TECHNOMATHEMATIK AM FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Leiter: Prof. Dr. H. Neunzert, Universität Kaiserslautern

Die Arbeitsgruppe Technomathematik hat es sich zur Aufgabe gemacht, neue Formen und Möglichkeiten einer Kooperation zwischen Universität und Industrie im Bereich der Mathematik zu erarbeiten und durchzuführen. Dabei beschäftigt sich die Arbeitsgruppe mit den folgenden Schwerpunkten:

EINBEZIEHUNG KONKRETER FRAGESTELLUNGEN AUS DER INDUSTRIE IN DIE MATHEMATISCHE FORSCHUNG.

Im Rahmen des von der VW-Stiftung geförderten Forschungsprojekts "Technomathematik" werden mathematische Probleme aus der industriellen Praxis in Form von Problemseminaren, Diplomarbeiten und Forschungsaufträgen bearbeitet. Als Beispiele für schon bearbeitete oder in Bearbeitung befindliche Probleme seien genannt

- die Optimierung von Kurbelgetrieben, Nocken und Felgen;
- die analytische und numerische Untersuchung spezieller strömungsdynamischer und akustischer Probleme;
- die Simulation stochastischer Prozesse in der Zuverlässigkeitsanalyse.

PRAXISORIENTIERTE GESTALTUNG DER MATHEMATISCHEN AUSBILDUNG IM HINBLICK AUF EINE BESSERE VORBEREITUNG DER ABSOLVENTEN AUF DIE BERUFSWIRKLICHKEIT.

Dies geschieht z.B. durch den Studiengang "Technomathematik"; die wesentlichen Lernziele sind dabei:

- Bildung mathematischer Modelle für technische Probleme,
- Kenntnis von mathematischen Methoden zur analytischen und numerischen Auswertung der Modelle,
- Beherrschung des Computers als Werkzeug,
- Kommunikationsfähigkeit mit Ingenieuren.

Auch in die Mathematikausbildung der Ingenieure sollen Modellbildung und moderne, insbesondere numerische und stochastische Methoden verstärkt integriert werden.

MATHEMATISCHE WEITERBILDUNG FÜR DEN PRAKTIKER.

Das aus dem "Modellversuch zur mathematischen Weiterbildung" hervorgegangene Konzept für eine mathematische Weiterbildung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker wird weiterentwickelt und fortgesetzt. Die angebotenen Kurse dienen der

- Unterstützung bei der Bewältigung praktischer Probleme,
- Anpassung an den neuesten wissenschaftlichen Erkenntnisstand,
- Einordnung des praktisch-beruflichen Wissens in einen theoretisch-wissenschaftlichen Rahmen,
- Auffrischung von Hochschulwissen.

Die Arbeitsgruppe Technomathematik setzt sich aus Professoren und Mitarbeitern der Universität Kaiserslautern und einer Gruppe von Mathematikern an der Technischen Hochschule Darmstadt unter der Leitung von Prof. Dr. Törnig zusammen.