

# Multidimensionale Systemtheorie

Eva Zerz

Vorlesung, WS 1995/96



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Skalare zweidimensionale Systeme</b>	<b>2</b>
1.1	Zweidimensionale Filter	2
1.2	Klassifizierung von Filtern via Impulsantwort	4
1.2.1	FIR und IIR Filter	4
1.2.2	Kausalität	4
1.2.3	Stabilität	6
1.3	Die $z$ -Transformation	6
1.4	Systemfunktion/Transferfunktion	7
1.5	Padé-Approximation	8
1.6	Klassifizierung von Filtern via rationale Systemfunktionen	10
1.6.1	FIR und IIR Filter	10
1.6.2	Kausalität	10
1.6.3	Stabilität	11
1.7	Teilerfremdheit und ggT für bivariate Polynome	14
1.7.1	Inhalt und Primitivität	14
1.7.2	Test auf Teilerfremdheit	14
1.7.3	Algorithmus zur Berechnung des ggT	15
1.8	Partielle Differenzgleichungen und Anfangsbedingungen	16
1.8.1	Anfangswerte für Differenzgleichungen über $\mathbf{N}^2$	17
1.8.2	Anfangswerte für Differenzgleichungen über $\mathbf{Z}^2$	18
1.9	Zustandsraummodelle für 2d Systeme	19
1.9.1	Das Roesser-Modell (RM)	20

1.9.2	Die Modelle von Fornasini und Marchesini . . . . .	20
1.9.3	Zweistufige Realisierung nach Eising . . . . .	21
1.9.4	Zusammenhang zwischen den Modellen . . . . .	22
1.9.5	Übergangsmatrizen . . . . .	22
1.9.6	Realisierungsproblem für RM . . . . .	25
1.10	Beobacht- und Kontrollierbarkeit für RM . . . . .	26
1.10.1	Beobachtbarkeit . . . . .	26
1.10.2	Kontrollierbarkeit . . . . .	27
1.10.3	Minimalität kanonischer Realisierungen . . . . .	28
1.10.4	Getrennte Beobacht- und Kontrollierbarkeit . . . . .	28
1.10.5	Modale Beobacht- und Kontrollierbarkeit . . . . .	29
<b>2</b>	<b>MIMO Systeme</b>	<b>31</b>
2.1	Behaviors . . . . .	31
2.2	Duale Vektorräume und adjungierte Abbildungen . . . . .	32
2.3	Folgerungen aus der Dualität . . . . .	34
2.3.1	Quasi-Eindeutigkeit der repräsentierenden Matrix . . . . .	34
2.3.2	Elimination latenter Variablen . . . . .	35
2.4	Input-Output-Strukturen und Transfermatrizen . . . . .	36
2.5	Systeme von Differenzgleichungen und Anfangsbedingungen . . . . .	38
2.6	Gröbnerbasen . . . . .	39
2.6.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	40
2.6.2	Berechnung von Gröbnerbasen . . . . .	42
2.6.3	Reduzierte Gröbnerbasen . . . . .	43
2.6.4	Verallgemeinerung auf Moduln . . . . .	44
2.6.5	Lösen linearer Gleichungssysteme mit polynomialen Koeffizienten . . . . .	46
2.6.6	Dimension von Idealen . . . . .	48
2.7	Anwendungen in der Systemtheorie . . . . .	50
2.7.1	Anfangswertgebiete . . . . .	50
2.7.2	Elimination latenter Variablen . . . . .	50
2.7.3	Beobacht- und Kontrollierbarkeit von 2d Behaviors . . . . .	51

## Einleitung

Die Theorie der mehrdimensionalen Systeme ist ein relativ junges Forschungsgebiet innerhalb der Systemtheorie, erste Arbeiten stammen aus den 70er Jahren. Hauptmotiv für das Studium multidimensionaler Systeme war die Notwendigkeit einer Erweiterung der Theorie der digitalen Filter, die in der klassischen, eindimensionalen Signalverarbeitung (zeitabhängige Signale) Anwendung finden, auf den Bereich der Bildverarbeitung, also auf zweidimensionale Signale.

Die Vorlesung beschäftigt sich daher in ihrem ersten Teil mit skalaren zweidimensionalen Systemen und beschränkt sich im wesentlichen auf den linearen Fall. Untersucht werden zweidimensionale Filter, ihre wichtigsten Eigenschaften, Kausalität und Stabilität, sowie ihre Zustandsraumrealisierungen, etwa die Modelle von Roesser und Fornasini-Marchesini. Parallelen und Unterschiede zur eindimensionalen Systemtheorie werden betont.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden allgemeine höherdimensionale und multivariable Systeme behandelt. Für diese Systeme erweist sich der von Jan Willems begründete Zugang zur Systemtheorie, der sogenannte *behavioral approach*, als zweckmäßig. Grundlegende Ideen dieses Ansatzes sowie eine der wichtigsten Methoden zum Rechnen mit Polynomen in mehreren Variablen, die Theorie der Gröbnerbasen, werden vorgestellt.

# Kapitel 1

## Skalare zweidimensionale Systeme

### 1.1 Zweidimensionale Filter

Ein zweidimensionaler (2d) Filter (siehe Literatur über 2d Signalverarbeitung, z.B. Lim oder Dudgeon, Mersereau) ist ein diskretes 2d SISO LSI Input-Output-System (SISO ... single input, single output, LSI ... linear, shift-invariant).

Die betrachteten **Signale** sind Funktionen auf einem zweidimensionalen diskreten Gitter, etwa  $\mathbf{Z}^2$ :

$$u, y : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad u, y \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^2} =: \mathcal{A}.$$

Der reelle Vektorraum  $\mathcal{A}$  wird als Signalraum bezeichnet. Alle hier behandelten Resultate behalten ihre Gültigkeit, wenn der Werteraum der Signale (hier:  $\mathbf{R}$ , der Körper der reellen Zahlen) durch einen beliebigen Körper ersetzt wird.

Der Filter bzw. das System sei durch eine **Input-Output-Relation** charakterisiert, einen Operator auf dem Signalraum:

$$T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad y = Tu.$$

Wie üblich bezeichnet  $u \in \mathcal{A}$  den Input und  $y \in \mathcal{A}$  den Output des Systems. Der betrachtete Operator  $T$  soll *linear* und *shift-invariant* sein.

**Linearität:**  $T(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Tu_1 + c_2Tu_2$  für  $u_i \in \mathcal{A}$  und  $c_i \in \mathbf{R}$ .

**Shift-Invarianz:** Die Shiftoperatoren  $\sigma_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $a \mapsto \sigma_i a$ ,  $i = 1, 2$  seien definiert durch

$$\begin{aligned} (\sigma_1 a)(n_1, n_2) &= a(n_1 + 1, n_2) \quad \text{'left shift'} \\ (\sigma_2 a)(n_1, n_2) &= a(n_1, n_2 + 1) \quad \text{'down shift'} \end{aligned}$$

für  $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$ . Da  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kommutieren, kann folgende Multiindexschreibweise verwendet werden:

$$\sigma^m = \sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2} \quad \text{für } m = (m_1, m_2) \in \mathbf{Z}^2.$$

Auch negative Exponenten sind zulässig, da die inversen Shifts existieren:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^{-1}a)(n_1, n_2) &= a(n_1 - 1, n_2) \quad \text{'right shift'} \\ (\sigma_2^{-1}a)(n_1, n_2) &= a(n_1, n_2 - 1) \quad \text{'up shift'}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:  $(\sigma^m a)(n) = a(m + n)$  für  $m, n \in \mathbf{Z}^2$ .

Shift-Invarianz kann also folgendermaßen definiert werden: Für alle  $m \in \mathbf{Z}^2$ :

$$T(\sigma^m u) = \sigma^m T u.$$

Also nächstes definieren wir ein spezielles Signal, den sogenannten **Einheitsimpuls**  $\delta \in \mathcal{A}$  durch

$$\delta : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad (n_1, n_2) \mapsto \delta(n_1, n_2) := \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die 'geshiftete' Version des Einheitsimpulses ist im wesentlichen ein 2d Kronecker-Delta: Für  $m \in \mathbf{Z}^2$  ist

$$\sigma^{-m} \delta : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad n \mapsto \sigma^{-m} \delta(n) = \delta(n - m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen  $u(n) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^2} u(m) \delta(n - m) = \sum_m u(m) (\sigma^{-m} \delta)(n)$  ist formal

$$u = \sum_{m \in \mathbf{Z}^2} u(m) (\sigma^{-m} \delta).$$

Zwar ist  $\{\sigma^{-m} \delta, m \in \mathbf{Z}^2\}$  keine Basis des Signalraums ( $\mathcal{A}$  ist nicht frei), aber formal/heuristisch kann man schreiben:

$$y = T u = T \left( \sum_m u(m) (\sigma^{-m} \delta) \right) = \sum_m u(m) T (\sigma^{-m} \delta) = \sum_m u(m) \sigma^{-m} T \delta.$$

Das Signal  $h := T \delta \in \mathcal{A}$  heißt **Impulsantwort** der Filters  $T$ . Die Impulsantwort  $h$  enthält alle Information von  $T$ , deshalb werden der lineare, shift-invariante Filter  $T$  und seine Impulsantwort  $h$  manchmal miteinander identifiziert. Man hat also

$$y = \sum_m u(m) \sigma^{-m} h \quad \text{und}$$

$$y(n) = \sum_m u(m) \sigma^{-m} h(n) = \sum_m u(m) h(n - m) = (h * u)(n).$$

Das heißt, der Output ergibt sich wie üblich durch eine Faltung des Inputs mit der Impulsantwort:

$$y = h * u = u * h.$$

Streng genommen braucht man für die Existenz der Faltung eine Zusatzannahme, etwa, daß für alle  $n \in \mathbf{Z}^2$

$$|\{m, m \in \text{supp}(u), n - m \in \text{supp}(h)\}| < \infty,$$

wobei  $\text{supp}(u) = \{m \in \mathbf{Z}^2, u(m) \neq 0\}$  den Träger von  $u$  bezeichnet. Für die Klasse der *kausalen* Filter und Signale ist diese Zusatzannahme erfüllt.

## 1.2 Klassifizierung von Filtern via Impulsantwort

Sei  $T$  ein LSI-Filter,  $h = T\delta$  seine Impulsantwort und  $\text{supp}(h)$  deren Träger.

### 1.2.1 FIR und IIR Filter

Je nachdem, ob der Träger der Impulsantwort endlich oder unendlich ist, spricht man von FIR oder IIR Filtern:

$$\begin{aligned} |\text{supp}(h)| < \infty &\Leftrightarrow \text{FIR Filter (finite impulse response)} \\ &\quad \text{'nicht-rekursiver Filter'} \\ |\text{supp}(h)| = \infty &\Leftrightarrow \text{IIR Filter (infinite impulse response)} \\ &\quad \text{'rekursiver Filter'}. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Kausalität

**Def.:** Ein Signal  $a \in \mathcal{A}$  heißt *kausal*, falls

$$\text{supp}(a) \subseteq \mathbf{N}^2 = \{n \in \mathbf{Z}^2, n_1 \geq 0, n_2 \geq 0\},$$

d.h.  $a(n_1, n_2) = 0$  für  $n_1 < 0$  oder  $n_2 < 0$ . Dabei bezeichnet  $\mathbf{N}^2$  den ersten Quadranten der diskreten Ebene.

Wir definieren den Raum der kausalen Signale:

$$\mathcal{A}_c := \{a \in \mathcal{A}, a \text{ kausal}\}.$$

Mittels folgender Einbettung (Fortsetzung durch Null bzw. Einschränkung auf den ersten Quadranten) kann  $\mathcal{A}_c$  mit  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^2}$  identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathbf{N}^2} &\hookrightarrow \mathcal{A}_c \subset \mathcal{A} = \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^2} \\ a &\mapsto a_c \text{ mit } a_c(n) = \begin{cases} a(n) & n \in \mathbf{N}^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ a_c|_{\mathbf{N}^2} &\leftarrow a_c \end{aligned}$$

**Def.:** Ein Filter  $T$  heißt *kausal*, falls seine Impulsantwort kausal ist, d.h. falls  $\text{supp}(h) \subseteq \mathbf{N}^2$ . Sind  $h$  und  $u$  kausal, so ist  $h * u$  wohldefiniert, denn

$$y(n) = \sum_{m \in \mathbf{N}^2, n-m \in \mathbf{N}^2} u(m)h(n-m)$$

ist für jedes  $n$  eine *endliche* Summe.

**Def.:** Die *komponentenweise* (cw-) Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  (bzw.  $\mathbf{Z}^2$ ) ist gegeben durch

$$m \leq_{cw} n \Leftrightarrow m_i \leq n_i, \quad i = 1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad n - m \in \mathbf{N}^2.$$

Insbesondere gibt es für jedes  $n \in \mathbf{N}^2$  nur endlich viele  $m \in \mathbf{N}^2$  mit  $m \leq_{cw} n$ . Obige Summe für kausales  $h$  und  $u$  ist also

$$y(n) = \sum_{0 \leq_{cw} m \leq_{cw} n} u(m)h(n-m).$$

**Bem.:** Das Konzept der Kausalität ist in der 2d Situation keine so ‘natürliche’ Forderung wie in der 1d Systemtheorie, wo ein (zeitlicher) Parameter betrachtet wird und natürliche Begriffe von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft existieren. Kausalität heißt dann: Der Outputwert  $y(n)$  hängt nur von den Inputwerten  $u(m)$  mit  $m \leq n$  ab, d.h. der gegenwärtige Output ist unabhängig von zukünftigen Inputs. Bei 2d Systemen betrachten wir zwei (räumliche) Parameter, Kausalität besagt, daß der Outputwert  $y(n)$  nur von Inputwerten  $u(m)$  mit  $m \leq_{cw} n$  abhängt.

**Def.:** Ein Signal  $a \in \mathcal{A}$  heißt *strikt kausal*, falls  $\text{supp}(a) \subseteq (1, 1) + \mathbf{N}^2$ , d.h. falls  $a(n_1, n_2) = 0$  für  $n_1 \leq 0$  oder  $n_2 \leq 0$ . Ein Filter heißt *strikt kausal*, falls seine Impulsantwort strikt kausal ist.

**Bem.:** Strikt kausale Systeme sind kausal. In der 1d Systemtheorie ist ein System strikt kausal, falls  $y(n)$  nur von  $u(m)$  mit  $m < n$  abhängt, der gegenwärtige Output also nur von vergangenen Inputs beeinflusst wird. Für 2d Systeme bedeutet das, daß  $y(n_1, n_2)$  nur von  $u(m_1, m_2)$  mit  $m_1 < n_1$  und  $m_2 < n_2$  abhängt.

**Def.:** Ein Signal  $a \in \mathcal{A}$  heißt *schwach kausal*, falls  $\text{supp}(a) \subseteq C$ , wobei  $C$  ein Kausalitätskegel ist.

**Def.:**  $C \subset \mathbf{R}^2$  heißt *Kausalitätskegel*, falls  $C$  ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit  $\mathbf{R}_{\geq}^2 \subseteq C$  und  $C \cap (-C) = \{0\}$  ist. Dabei ist

$$\mathbf{R}_{\geq}^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

der erste Quadrant der kontinuierlichen Ebene.

**Def.:** Ein Filter heißt *schwach kausal*, falls seine Impulsantwort schwach kausal ist, d.h. falls ein Kausalitätskegel  $C$  mit  $\text{supp}(h) \subseteq C$  existiert.

**Bem.:** Kausale Filter sind schwach kausal, da  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{R}_{\geq}^2 \cap \mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{R}_{\geq}^2$  und  $\mathbf{R}_{\geq}^2$  selbst ein Kausalitätskegel ist. Der Begriff der schwachen Kausalität hat kein 1d Analogon.

### 1.2.3 Stabilität

Wie üblich, ist für Input-Output-Systeme der Begriff der externen oder BIBO-Stabilität (BIBO ... bounded input, bounded output) maßgeblich, d.h.

$$|u(n)| < M \quad \text{für alle } n \quad \Rightarrow \quad |y(n)| < N \quad \text{für alle } n.$$

Analog zur 1d Situation ist BIBO-Stabilität äquivalent zur Forderung, daß die Impulsantwort des Filters absolut summierbar ist, d.h.  $\sum_{n \in \mathbf{Z}^2} |h(n)| < \infty$ . Klarerweise sind FIR-Filter immer BIBO-stabil.

## 1.3 Die z-Transformation

Für  $a \in \mathcal{A}$ , d.h.  $a : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  ist

$$A := \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} a(n) z^n = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbf{Z}} a(n_1, n_2) z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

die *z-Transformierte* von  $a$ .

**Bem.:** In der Literatur wird die z-Transformierte oft als  $A = \sum a(n) z^{-n}$  definiert, das Vorzeichen im Exponenten ist aber nur eine Konventionsfrage.

### Interpretation von $A$ :

1. als formale Potenzreihe ( $z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}$  fungieren als Platzhalter), dann ist die  $z$ -Transformation nichts anderes als die bekannte Identifikation

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}]] &\leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^2} = \mathcal{A} \\ \text{Potenzreihe } A &\leftrightarrow \text{Folge der Koeffizienten } a \end{aligned}$$

Speziell für kausale Signale:

$$\mathbf{R}[[z_1, z_2]] \leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}^2} = \mathcal{A}_c$$

2. als Funktion  $A : \text{ROC} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $(z_1, z_2) \mapsto A(z_1, z_2) = \sum a(n)z^n$ , wobei

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbf{C}^2, \sum a(n)z^n \text{ existiert}\}$$

für 'region of convergence' steht.

### Eigenschaften der $z$ -Transformation:

1. Die  $z$ -Transformierte einer Faltung ist das Produkt der  $z$ -Transformierten, d.h.  $y = h * u \Rightarrow Y = HU$ .
2. Die  $z$ -Transformierte eines geshifteten Signals ist Vielfaches der  $z$ -Transformierten des ursprünglichen Signals, genauer:  $y = \sigma^{-m}u \Rightarrow Y = z^m U$  für  $m \in \mathbf{Z}^2$ . (Hier ist wichtig, daß Signale über  $\mathbf{Z}^2$  betrachtet werden, für  $\mathbf{N}^2$  ist eine Modifikation notwendig, analog zur 1d Theorie.)

## 1.4 Systemfunktion/Transferfunktion

Die Systemfunktion eines Filters ist die  $z$ -Transformierte seiner Impulsantwort, d.h. für  $h = T\delta$

$$H := \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} h(n)z^n \in \mathbf{R}[[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}]]$$

**Ziel:** Rationale Transferfunktionen. Approximiere  $H$  durch eine rationale Funktion

$$H \simeq \frac{Q}{P} \quad \text{mit Laurent-Polynomen } Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}].$$

Natürlich muß dazu festgelegt werden, in welchem Sinne diese Approximation zu verstehen ist, z.B. Padé-Approximation.

**Motiv:** Rationale Transferfunktionen ermöglichen eine Implementierung des Filters in Form einer Differenzgleichung und somit die rekursive Berechenbarkeit des Outputs.

Sei  $H = \frac{Q}{P}$  mit Laurent-Polynomen  $P = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} p_m z^m$  und  $Q = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} q_m z^m$  (endliche Summen). Die I-O-Relation für die  $z$ -Transformierten ist dann

$$Y = HU = \frac{Q}{P}U \quad \text{bzw.} \quad PY = QU \quad \text{oder} \quad \left(\sum p_m z^m\right)Y = \left(\sum q_m z^m\right)U.$$

Wendet man die inverse  $z$ -Transformation an, so wird aus der Multiplikation mit  $z^m$  die Anwendung des Shifts  $\sigma^{-m}$ , also

$$\left(\sum p_m \sigma^{-m}\right)y = \left(\sum q_m \sigma^{-m}\right)u.$$

Wir definieren  $p := \sum p_m \sigma^{-m}$  und  $q := \sum q_m \sigma^{-m}$  als jene Polynome in den Shift-Variablen, die aus  $P$  und  $Q$  hervorgehen, wenn  $z_i$  durch  $\sigma_i^{-1}$  ersetzt wird. Dann erhält man

$$py = qu, \quad u, y \in \mathcal{A}, \quad p, q \in \mathbf{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}].$$

Das ist eine Kurzschreibweise für die lineare partielle Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\left(\sum p_m \sigma^{-m}\right)y(n) = \left(\sum q_m \sigma^{-m}\right)u(n) \quad \text{bzw.} \quad \sum p_m y(n-m) = \sum q_m u(n-m)$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}^2$ .

## 1.5 Padé-Approximation

Gegeben sei eine Potenzreihe  $H = \sum_{n \in \mathbb{N}^2} h(n)z^n$ . Wir beschränken uns hier auf ein kausales  $h$  und somit auf eine gewöhnliche Potenzreihe in  $z_1$  und  $z_2$ , der allgemeine Fall ist ähnlich.

**Ziel:**  $H \simeq \frac{Q}{P}$  mit  $P, Q \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$ , d.h. Approximation der Potenzreihe  $H$  durch eine rationale Funktion. OBdA sollen  $Q, P$  gewöhnliche Polynome anstelle von Laurent-Polynomen sein, denn für  $Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}]$  kann man  $\frac{Q}{P}$  mit einer genügend großen Potenz  $z^m$  erweitern, so daß nur positive (oder nur negative) Exponenten vorkommen.

**Def.:** Eine rationale Funktion  $\frac{Q}{P}$  mit  $Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$  heißt *Padé-Approximierende* für

$$H = \sum_{n \in \mathbb{N}^2} h(n)z^n$$

(Schreibweise:  $H \simeq \frac{Q}{P}$ ), falls

$$PH - Q = \sum_{n \in \mathbf{N}^2} r(n)z^n$$

erfüllt:  $r(n) = 0$  für  $n \in E$ , wobei  $E$  eine passende Interpolationsmenge ist.

**Bem.:** Für die Wahl von  $E$  gibt es verschiedene Methoden, z.B. nach Karlsson und Wallin.

**Def.:** Für  $n \in \mathbf{N}^2$  sei  $|n| := n_1 + n_2$ . Die *graduierete* Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  ist gegeben durch

$$m <_{grad} n \iff |m| < |n|.$$

Mit  $|n| = |n_1| + |n_2|$  erhält man die analoge Definition für  $\mathbf{Z}^2$ . Die graduierete Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  ist eine weitere *partielle* Ordnung neben der *cw*-Ordnung (d.h. es gibt unvergleichbare Elemente).

**Interpolation nach Karlsson und Wallin:** Wähle natürliche Zahlen  $n_Q, n_P$  mit  $n_P \geq n_Q$ . Ansatz:  $Q = \sum_{|n| \leq n_Q} q_n z^n$ ,  $P = \sum_{|n| \leq n_P} p_n z^n$  und  $p_{00} := 1$ .

Beispiel:  $n_Q = 1, n_P = 2$ :

$$H \simeq \frac{q_{00} + q_{10}z_1 + q_{01}z_2}{1 + p_{10}z_1 + p_{01}z_2 + p_{20}z_1^2 + p_{11}z_1z_2 + p_{02}z_2^2}$$

Anzahl der Unbekannten:

$$\frac{(n_Q + 1)(n_Q + 2)}{2} + \frac{(n_P + 1)(n_P + 2)}{2} - 1$$

Karlsson-Wallin-Interpolationsmenge: Wähle  $E$  so, daß

1.  $|E| =$  Anzahl der Unbekannten
2.  $E \supseteq \{n, |n| \leq n_Q\}$ .

Im Beispiel:  $|E| = 8$ ,  $E \supseteq \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ,  $r(n) = 0$  für  $n \in E$  liefert 8 lineare Gleichungen für die 8 Unbekannten

**Bem.:** Betrachten ab jetzt rationale Systemfunktionen (und somit durch Differenzgleichungen gegebene Filter):

$$H = \frac{Q}{P} \quad \text{mit} \quad Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2] \quad \text{oder} \quad \mathbf{R}[s_1, s_2] \quad (s_i = z_i^{-1}).$$

$H$  ist eine rationale Funktion, die entweder in den  $z_i$  oder den  $s_i$  geschrieben wird, also  $H \in \mathbf{R}(z_1, z_2)$  oder  $\mathbf{R}(s_1, s_2)$ . I.a. sind die Potenzreihenkoeffizienten  $h$  in der Entwicklung

$$H = \frac{Q}{P} = \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} h(n)z^n$$

durch  $H$  nicht eindeutig bestimmt, d.h. verschiedene Filter können dieselbe Systemfunktion haben. Allerdings ist  $h$  eindeutig durch  $H$  plus zusätzliche Randbedingungen.

Beispiel:  $H = \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i = -\sum_{i=-\infty}^{-1} z^i$ , für Eindeutigkeit braucht man den Anfangswert  $h(0)$ .

## 1.6 Klassifizierung von Filtern via rationale Systemfunktionen

### 1.6.1 FIR und IIR Filter

Ein FIR Filter liegt vor, wenn  $H = \frac{Q}{P} = \sum h(n)z^n$  mit  $|\text{supp}(h)| < \infty$ . Das ist genau dann der Fall, wenn  $P$  ein Teiler von  $Q$  ist, d.h. die rationale Funktion  $H$  ist selbst ein Laurent-Polynom:

$$H \in \mathbf{R}[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}] \subset \mathbf{R}(z_1, z_2).$$

IIR Filter sind durch echt-rationale Transferfunktionen gekennzeichnet:

$$H \in \mathbf{R}(z_1, z_2) \setminus \mathbf{R}[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}].$$

### 1.6.2 Kausalität

Wir haben Kausalität als Eigenschaft von  $h$  definiert. Wie läßt sich dieses Konzept auf  $H = \frac{Q}{P}$  übertragen?

Sei  $Q = \sum q_m z^m$ ,  $P = \sum p_m z^m$  ( $\text{supp}(P), \text{supp}(Q)$  endlich).

**Satz + Def.:** Sei  $p_{00} \neq 0$  und existiere ein Kausalitätskegel  $C$  mit  $\text{supp}(Q), \text{supp}(P) \subset C$ . Dann hat  $\frac{Q}{P}$  eine eindeutige Entwicklung

$$H = \frac{Q}{P} = \sum_{n \in C} h(n)z^n,$$

d.h. mit  $\text{supp}(h) \subseteq C$ .  $H$  heißt dann *schwach kausal*.

**Folgerung + Def.:** Seien  $Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$ , also gewöhnliche Polynome, und  $p_{00} \neq 0$ . Dann ist

$$H = \frac{Q}{P} = \sum_{n \in \mathbf{N}^2} h(n)z^n$$

mit eindeutig bestimmtem, kausalem  $h$ .  $H$  heißt dann *kausal*.

**Bem.:** Die Folgerung ergibt sich aus dem vorigen Satz mit  $C = \mathbf{R}_{\geq}^2$ .

Die  $h(n)$  sind in diesem Fall die Taylorreihenoeffizienten von  $H$  (Entwicklung um den Punkt  $(0, 0)$ ; da  $p_{00} \neq 0$ , sind  $H(0, 0)$  und alle Ableitungen von  $H$  im Punkt  $(0, 0)$  wohldefiniert.)

Die Karlsson–Wallin–Methode liefert für kausales  $h$  kausales  $\frac{Q}{P} \simeq H$ .

**Folgerung + Def.:** Seien  $P, Q \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$ ,  $p_{00} \neq 0$  und  $Q \in z_1 z_2 \mathbf{R}[z_1, z_2]$ . Dann ist

$$H = \frac{Q}{P} = \sum_{n \geq_{cw} (1,1)} h(n)z^n$$

mit eindeutig bestimmtem, strikt kausalem  $h$ .  $H$  heißt dann *strikt kausal*.

**Def.:**  $P \in \mathbf{R}[s_1, s_2]$  hat *cw-Grad*, falls es ein  $n_0 \in \text{supp}(P)$  gibt, so daß  $n_0 \geq_{cw} n$  für alle  $n \in \text{supp}(P)$ . Dann ist  $n_0 =: \text{cwdeg}(P)$ .

**Folgerung:** Seien  $P, Q \in \mathbf{R}[s_1, s_2]$  ( $s_i = z_i^{-1}$ ).  $H = \frac{Q}{P} \in \mathbf{R}(s_1, s_2)$  ist kausal, falls  $P$  cw-Grad hat und  $\text{cwdeg}(P) \geq_{cw} n$  für alle  $n \in \text{supp}(Q)$  gilt.

### 1.6.3 Stabilität

Sei  $H = \frac{Q}{P} \in \mathbf{R}(z_1, z_2)$  eine rationale Systemfunktion mit  $Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$ .

**Annahme 1:**  $Q, P$  sind relativ prim, d.h. es gibt kein  $R \in \mathbf{R}[z_1, z_2] \setminus \mathbf{R}$  mit  $Q = Q_1 R$ ,  $P = P_1 R$  und  $Q_1, P_1 \in \mathbf{R}[z_1, z_2]$ .

**Annahme 2:**  $H$  sei kausal, d.h.  $p_{00} \neq 0$ .  $H = \sum_{n \in \mathbf{N}^2} h(n)z^n$  sei die eindeutig bestimmte Taylorreihenentwicklung von  $H$  mit kausalem  $h$  (diese konvergiert in einer Umgebung des Entwicklungspunktes  $(0, 0)$  gleichmäßig).

Bisher:  $h$  ist BIBO-stabil genau dann, wenn  $h$  absolut summierbar ist, d.h.  $\sum |h(n)| < \infty$ .

Jetzt: Stabilität für  $H$ ?

In der 1d Systemtheorie gilt: Ist  $H = \frac{Q}{P}$  eine rationale Transferfunktion mit relativ primen Polynomen  $Q, P \in \mathbf{R}[z]$  (Polynome in einer Variable), so ist

$H$  strukturstabil  $:\Leftrightarrow P(z) \neq 0$  für  $|z| \leq 1 \Leftrightarrow \sum |h(n)| < \infty \Leftrightarrow h$  BIBO-stabil.

Dabei wird  $P$  als Funktion  $P: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto P(z)$  aufgefaßt. BIBO-Stabilität ist genau dann gegeben, wenn alle Pole von  $\frac{Q}{P}$  außerhalb des abgeschlossenen Einheitskreises liegen (insbesondere spielt  $Q$  in der 1d Theorie keine Rolle bei Stabilitätsfragen).

**Bem.:** Für einen allgemeinen *unendlichen* Signalwertkörper  $F$  muß man hier den algebraischen Abschluß  $\bar{F}$  anstelle von  $\mathbf{C}$  einsetzen. Polynome und Polynomfunktionen können in unendlichen Körpern miteinander identifiziert werden.

**Def.:**  $H = \frac{Q}{P} \in \mathbf{R}(z_1, z_2)$  heißt *strukturstabil*, falls

$$P(z_1, z_2) \neq 0 \text{ für alle } z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \text{ mit } |z_1|, |z_2| \leq 1.$$

$P$  wird hier als 2d Polynomfunktion  $P: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}, (z_1, z_2) \mapsto P(z_1, z_2)$  aufgefaßt.

**Shanks' Vermutung:**  $h$  BIBO-stabil  $\Leftrightarrow H$  strukturstabil

Aber: Es gilt nur ' $\Leftarrow$ ', ' $\Rightarrow$ ' ist i.a. falsch. Aus BIBO-Stabilität von  $h$  folgt nur

$$P(z_1, z_2) \neq 0 \text{ für } |z_1|, |z_2| < 1,$$

am Rand  $|z_1| = |z_2| = 1$  kann  $P$  Nullstellen haben.

**Gegenbeispiel zu Shanks' Vermutung:** Goodman, Dautov

$$H_m = \frac{(1 - z_1)^m (1 - z_2)^m}{2 - z_1 - z_2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$H_m$  ist nicht strukturstabil (da  $P(1, 1) = 0$ ), aber  $H_1$  (resp. das dazugehörige  $h_1$ ) ist nicht BIBO-stabil und  $H_m$  (bzw.  $h_m$ ) für  $m \geq 2$  ist BIBO-stabil.

**Folgerung:** In der 2d Situation kann  $Q$  die Stabilität beeinflussen. Der Grund dafür sind mögliche gemeinsame Nullstellen von  $Q$  und  $P$  auf  $|z_1| = |z_2| = 1$ .

**Shanks' Theorem:** Unter der Zusatzannahme

$$P(z_1, z_2) \neq 0 \text{ für } |z_1| = |z_2| = 1$$

oder (schwächer) ' $P, Q$  haben keine gemeinsamen Nullstellen auf  $|z_1| = |z_2| = 1$ ' gilt Shanks' Vermutung.

## Singularitäten rationaler Funktionen in 2 Variablen:

1. Pole ( $P(z_1, z_2) = 0, Q(z_1, z_2) \neq 0$ ): aus 1d Theorie bekannt
2. Nicht-essentielle Singularitäten der zweiten Art ( $P(z_1, z_2) = Q(z_1, z_2) = 0$ ): kein 1d Analogon, diese Singularitäten machen Stabilitätstheorie für 2d Systeme schwierig

Für Polynome in einer Variablen gilt: Haben zwei Polynome gemeinsame Nullstellen, so sind sie nicht relativ prim (Primfaktorenzerlegung über  $\mathbf{C}[z]$ , dem Polynomring in einer Variable). Daher können in der 1d Situation unter der Voraussetzung 'Q, P relativ prim' keine Singularitäten der zweiten Art auftreten. Hingegen können bivariate, relativ prime Polynome durchaus gemeinsame Nullstellen haben.

## Vergleich der Polynomringe $\mathbf{C}[z]$ und $\mathbf{C}[z_1, z_2]$ :

- $\mathbf{C}[z]$ , der Polynomring in einer Variable, ist ein euklidischer Bereich und somit ein Hauptidealbereich, insbesondere ein faktorieller Bereich (Zerlegung in Primelemente).
  - Die Primelemente von  $\mathbf{C}[z]$  sind von der Form  $z - \lambda, \lambda \in \mathbf{C}$ .
  - Der euklidische Algorithmus (basierend auf der Division mit Rest) ermöglicht die Konstruktion des größten gemeinsamen Teilers (ggT) zweier Polynome auch ohne explizite Primfaktorenzerlegung.
  - Die Nullstellenmenge eines Polynoms  $P \in \mathbf{C}[z]$  ist endliche Menge von Punkten in  $\mathbf{C}$ .
  - Es gilt die Bezout-Identität, d.h. für  $P, Q \in \mathbf{C}[z]$  gibt es Polynome  $R_1, R_2 \in \mathbf{C}[z]$ , so daß  $\text{ggT}(P, Q) = R_1P + R_2Q$ .
- $\mathbf{C}[z_1, z_2]$  ist zwar ein faktorieller Bereich (Zerlegung in irreduzible Faktoren), aber kein Hauptidealbereich und daher nicht euklidisch.
  - Für  $P, Q \in \mathbf{C}[z_1, z_2]$  existiert zwar  $\text{ggT}(P, Q)$ , aber die Konstruktion ist schwieriger, da kein euklidischer Algorithmus existiert (keine Division mit Rest).
  - Irreduzible Polynome in  $\mathbf{C}[z_1, z_2]$  sind nicht notwendigerweise linear.
  - Nullstellenmenge eines Polynoms in  $\mathbf{C}[z_1, z_2]$  ist eine algebraische Hyperfläche in  $\mathbf{C}^2$  (i.a. eine eindimensionale Kurve).
  - Die Bezout-Identität gilt nicht. Insbesondere folgt aus  $\text{ggT}(P, Q) = 1$  nicht  $1 = R_1P + R_2Q$ , sondern nur die Existenz von Polynomen  $R_i, i = 1, \dots, 4$ , so daß

$$R_1P + R_2Q \in \mathbf{C}[z_1] \quad \text{und} \quad R_3P + R_4Q \in \mathbf{C}[z_2].$$

$Q, P$  heißen *null-koprim*, falls sie keine gemeinsamen Nullstellen haben. Für null-koprim Polynome  $P, Q$  folgt aus Hilberts Nullstellensatz die Existenz von  $R_1, R_2 \in \mathbf{C}[z_1, z_2]$  mit  $1 = R_1P + R_2Q$  wie in der Bezout-Identität.

## 1.7 Teilerfremdheit und ggT für bivariate Polynome

### 1.7.1 Inhalt und Primitivität

Sei  $P \in \mathbf{R}[z_1, z_2] = \mathbf{R}[z_2][z_1]$ , d.h. fasse  $P$  als Polynom in  $z_1$  auf, dessen Koeffizienten Polynome in  $z_2$  sind:

$$P = \sum_{i=0}^n p_i(z_2)z_1^i \quad \text{mit} \quad p_i(z_2) \in \mathbf{R}[z_2].$$

**Def.:** Der *Inhalt* von  $P$  ist

$$\text{cont}(P) := \text{ggT}(p_0, \dots, p_n).$$

$P$  heißt *primitiv*, falls  $\text{cont}(P) = 1$ . Der *primitive Teil* von  $P$  ist

$$\text{pp}(P) := \frac{P}{\text{cont}(P)}.$$

Es gilt:  $\text{cont}(P)$  ist der größte Teiler von  $P$  in  $\mathbf{R}[z_2]$ .  $\text{pp}(P)$  enthält keine Teiler in  $\mathbf{R}[z_2] \setminus \mathbf{R}$ .

**Bem.:**  $\mathbf{R}[z_1, z_2] = \mathbf{R}[z_2][z_1] = \mathbf{R}[z_1][z_2]$ , aber Primitivität in  $\mathbf{R}[z_1][z_2]$  ist nicht äquivalent zu Primitivität in  $\mathbf{R}[z_2][z_1]$ , obige Reihenfolge ist zwar willkürlich, aber fix.

### 1.7.2 Test auf Teilerfremdheit

Seien  $Q, P \in \mathbf{R}[z_1, z_2] = \mathbf{R}[z_2][z_1]$ ,

$$P = \sum_{i=0}^n p_i(z_2)z_1^i, \quad Q = \sum_{i=0}^m q_i(z_2)z_1^i.$$

$n$  und  $m$  seien minimal gewählt, d.h.  $p_n(z_2) \neq 0 \neq q_m(z_2)$  oder  $n = \deg_{z_1}(P)$ ,  $m = \deg_{z_1}(Q)$ . OBdA seien  $n, m \geq 1$ .

**1. Schritt:** Berechne  $\text{cont}(P), \text{cont}(Q)$ . Falls

$$\text{ggT}(\text{cont}(P), \text{cont}(Q)) \neq 1,$$

sind  $P, Q$  offensichtlich nicht teilerfremd.

**2. Schritt:** OBdA:  $\text{ggT}(\text{cont}(P), \text{cont}(Q)) = 1$ , d.h.

$$\text{ggT}(p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_m) = 1.$$

Definiere die  $(n+m) \times (n+m)$  Sylvester-Matrix

$$R := \begin{pmatrix} p_n & \cdots & \cdots & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n & \cdots & \cdots & p_0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_m & \cdots & \cdots & \cdots & q_0 \\ & & & \vdots & & & & \\ q_m & \cdots & \cdots & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Satz:** In obiger Situation gilt

$$P, Q \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \det(R) \neq 0.$$

### 1.7.3 Algorithmus zur Berechnung des ggT

$$P = \text{cont}(P)\text{pp}(P), Q = \text{cont}(Q)\text{pp}(Q)$$

Da  $\text{pp}(P)$  und  $\text{cont}(Q)$  teilerfremd sind (und ebenso  $\text{cont}(P)$  und  $\text{pp}(Q)$ ), gilt

$$\text{ggT}(P, Q) = \text{ggT}(\text{cont}(P), \text{cont}(Q)) \text{ggT}(\text{pp}(P), \text{pp}(Q)).$$

**1. Schritt:** Berechne  $\text{cont}(P), \text{cont}(Q)$  und ersetze  $P, Q$  durch  $\text{pp}(P), \text{pp}(Q)$ .

**2. Schritt:** OBdA:  $P, Q$  primitiv. Definiere folgende Matrizen:

$\Delta^0 := R$  (Sylvester-Matrix) und  $\Delta^i$  entsteht aus  $\Delta^{i-1}$  durch Streichen der ersten und letzten Zeile sowie der ersten und letzten Spalte.  $\Delta^i$  heißt die  $i$ -te *innere* Matrix. Definiere  $\delta^i := \det(\Delta^i)$ .

**Satz:** Ist  $\delta^0 = \dots = \delta^{r-1} = 0$  und  $\delta^r \neq 0$ , so hat  $\text{ggT}(P, Q)$  Grad  $r$  in  $z_1$  und

$$\text{ggT}(P, Q) = \text{pp det } \widetilde{\Delta}^r,$$

wobei  $\widetilde{\Delta}^r$  aus  $\Delta^r$  hervorgeht, indem man die letzte Spalte ersetzt durch:

$$\begin{pmatrix} z_1^{m-r-1}P \\ \vdots \\ z_1P \\ P \\ Q \\ z_1Q \\ \vdots \\ z_1^{n-r-1}Q \end{pmatrix}.$$

Ist umgekehrt  $\text{ggT}(P, Q)$  vom Grad  $r$  in  $z_1$ , so gilt  $\delta^0 = \dots = \delta^{r-1} = 0$ ,  $\delta^r \neq 0$  und  $\text{ggT}(P, Q)$  ist durch obigen Ausdruck gegeben.

## 1.8 Partielle Differenzgleichungen und Anfangsbedingungen

Eine rationale Systemfunktion  $H = \frac{Q}{P}$  liefert die I-O-Relation  $PY = QU$ .  
OBdA seien  $P, Q \in \mathbf{R}[s_1, s_2]$  ( $s_i = z_i^{-1}$ ), also

$$P = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} p_m s^m \quad \text{und} \quad Q = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} q_m s^m,$$

d.h. die betrachtete Differenzgleichung ist

$$\sum_{m \in \mathbf{N}^2} p_m y(n+m) = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} q_m u(n+m) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{Z}^2.$$

Der Output  $y$  ist durch den Input  $u$  nicht eindeutig bestimmt, für eine Zuordnung  $u \rightarrow y = Tu$  brauchen wir zusätzlich Anfangswerte. Dafür ist das Konzept des *Grades* eines Polynoms notwendig, der Gradbegriff soll also auf bivariate Polynome erweitert werden. Dazu braucht man eine totale Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  (d.h. je zwei Elemente sind vergleichbar).

**Def.:** Eine Ordnung  $\leq$  auf  $\mathbf{N}^2$  heißt *zulässig*, falls

1.  $\leq$  totale Ordnung
2.  $0 \leq n$  für alle  $n \in \mathbf{N}^2$

3.  $m \leq n \Rightarrow m + l \leq n + l$  für alle  $l \in \mathbf{N}^2$  (Verträglichkeit mit der Addition)

Eine zulässige Ordnung ist insbesondere mit der cw-Ordnung verträglich, d.h.

$$m \leq_{cw} n \quad \Rightarrow \quad m \leq n.$$

**Beispiele:** Lexikographische Ordnung, graduiert-lexikographische Ordnung

**Def.:** Sei  $\leq$  eine zulässige Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  und  $0 \neq P = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} p_m s^m$  in  $\mathbf{R}[s_1, s_2]$ . Der *Grad* von  $P$  ist

$$\deg(P) := \max\{m, p_m \neq 0\} = \max \operatorname{supp}(P),$$

wobei das Maximum bezüglich der zulässigen Ordnung genommen wird. Der *Leitkoeffizient* und der *Leitterm* von  $P$  sind

$$\operatorname{lc}(P) := p_{\deg(P)} \quad \text{und} \quad \operatorname{lt}(P) := \operatorname{lc}(P) s^{\deg(P)}.$$

$P$  läßt sich also schreiben als  $P = \operatorname{lt}(P) + \sum_{m < \deg(P)} p_m s^m$ . Ist  $\operatorname{lc}(P) = 1$ , so heißt  $P$  *normiert/monic*. Als Konvention setzt man  $\deg(0) := -\infty$ . Es gelten die üblichen Rechenregeln für den Grad von Polynomen:

1. Ist  $P = \operatorname{const.} \neq 0$ , so ist  $\deg(P) = (0, 0)$  und  $\deg(P) \leq \deg(Q)$  für alle  $Q \in \mathbf{R}[s_1, s_2] \setminus \{0\}$ .
2.  $\deg(P) \leq \deg(s^m P) = m + \deg(P)$  für alle  $m \in \mathbf{N}^2$ .
3.  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$  und  $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ . Falls  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ , gilt in dieser Relation das Gleichheitszeichen.

**Charakterisierung zulässiger Ordnungen:** Nach dem Satz von Hahn läßt sich  $\mathbf{N}^2$  mit einer zulässigen Ordnung in einen  $\mathbf{R}^p$  mit der lexikographischen Ordnung einbetten.

### 1.8.1 Anfangswerte für Differenzgleichungen über $\mathbf{N}^2$

Auf  $\mathcal{A}_c = \mathbf{R}^{\mathbf{N}^2}$  erfüllen die Shifts nur  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \operatorname{id}$ , nicht aber  $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \operatorname{id}$ . Den sich daraus ergebenden Schwierigkeiten geht man aus dem Weg, indem man für Differenzgleichungen über  $\mathbf{N}^2$  nur die Shifts  $\sigma^m$  mit  $m \in \mathbf{N}^2$  zuläßt. Seien also  $P, Q \in \mathbf{R}[s_1, s_2]$ . Betrachtet werden Differenzgleichungen

$$\sum_{m \in \mathbf{N}^2} p_m y(m+n) = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} q_m u(m+n) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}^2.$$

Wir verwenden wieder die Kurzschreibweise  $py = qu$  mit  $p, q \in \mathbf{R}[\sigma_1, \sigma_2]$  und nehmen zusätzlich an, daß  $p \neq 0$ .  $P$  sei jenes Polynom, das aus  $p$  hervorgeht, wenn  $\sigma_i$  durch  $s_i$  ersetzt wird.

**Satz:** Die Differenzengleichung  $py = qu$  ist für alle Inputs lösbar, d.h. für alle  $u \in \mathcal{A}_c$  existiert ein  $y \in \mathcal{A}_c$ , so daß  $py = qu$ .

**Ziel:** *Eindeutige* Lösbarkeit. Wähle eine zulässige Ordnung auf  $\mathbf{N}^2$  und bestimme  $d := \deg(P) \in \mathbf{N}^2$ . Teile  $\mathbf{N}^2$  in zwei disjunkte Teilmengen auf, nämlich

$$G' := d + \mathbf{N}^2 \quad \text{und} \quad G := \mathbf{N}^2 \setminus G'.$$

**Satz:** Durch den Input  $u$  und den Anfangswert  $y|_G$  ist der Output  $y$  eindeutig bestimmt, d.h. das Anfangswertproblem (Cauchy-Problem)

$$py = qu, \quad y|_G = x$$

ist für alle  $u, x$  eindeutig lösbar, d.h. für alle  $u \in \mathcal{A}_c$  und alle  $x \in \mathbf{R}^G$  existiert genau ein  $y \in \mathcal{A}_c$  mit  $py = qu$  und  $y|_G = x$ .

**Satz:** Sei  $G$  jetzt eine beliebige Teilmenge von  $\mathbf{N}^2$  und  $G'$  deren Komplement. Äquivalent:

1. Das inhomogene Cauchy-Problem  $py = qu, y|_G = x$  ist für alle  $u, x$  eindeutig lösbar.
2. Das homogene Cauchy-Problem  $py = 0, y|_G = x$  ist für alle  $x$  eindeutig lösbar.
3.  $\mathcal{A}_c = \mathbf{R}^{\mathbf{N}^2} = \text{ke}(p) \oplus \mathbf{R}^{G'}$ , wobei  $p$  als Abbildung

$$p: \mathcal{A}_c \rightarrow \mathcal{A}_c, \quad y \mapsto py$$

interpretiert wird (Anwendung des Operators  $p(\sigma_1, \sigma_2)$ ).

4.  $\mathbf{R}[s_1, s_2] = \mathbf{R}^{(\mathbf{N}^2)} = \text{im}(P) \oplus \mathbf{R}^{(G)}$ , wobei  $P$  als Abbildung

$$P: \mathbf{R}[s_1, s_2] \rightarrow \mathbf{R}[s_1, s_2], \quad f \mapsto Pf$$

interpretiert wird (Multiplikation mit dem Polynom  $P(s_1, s_2)$ ). Es ist also  $\text{im}(P) = \mathbf{R}[s_1, s_2]P = \langle P \rangle$ , das von  $P$  erzeugte Ideal, und  $\mathbf{R}^{(G)}$  bezeichnet wie üblich die Menge aller Funktionen von  $G$  nach  $\mathbf{R}$  mit endlichem Träger.

## 1.8.2 Anfangswerte für Differenzengleichungen über $\mathbf{Z}^2$

$Q_1, \dots, Q_4$  bezeichnen die abgeschlossenen Quadranten von  $\mathbf{Z}^2$ , d.h.  $Q_1 = \mathbf{N}^2$ ,  $Q_2 = (-\mathbf{N}) \times \mathbf{N}$  usw.

**Def.:** Eine Ordnung  $\leq$  auf  $\mathbf{Z}^2$  heißt *zulässig*, falls

1.  $\leq$  totale Ordnung
2.  $0 \leq n$  für alle  $n \in \mathbf{Z}^2$
3. Aus  $m \leq n$  mit  $m \in Q_i$  und  $n \in Q_j$  folgt  $m+l \leq n+l$  für alle  $l \in Q_i \cap Q_j$

Insbesondere ist eine zulässige Ordnung auf jedem der vier Quadranten mit der Addition verträglich. Wie im vorigen Abschnitt werden Grad, Leitkoeffizient und Leitterm eines Polynoms in  $\mathbf{R}[s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1}]$  definiert.

Wir betrachten Differenzgleichungen über  $\mathbf{Z}^2$ , d.h.  $py = qu$  mit  $p, q \in \mathbf{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}]$ ,  $p \neq 0$  und  $u, y \in \mathcal{A}$ .

OBdA seien  $p, q \in \mathbf{R}[\sigma_1, \sigma_2]$ .

**Satz:** Definiere  $d_i := \deg_{s_i}(P)$ ,  $d := (d_1, d_2)$ ,

$$D := \{\deg(s^{-k}P), 0 \leq_{cw} k \leq_{cw} d\}, \quad D_i := D \cap Q_i, \quad G' := \cup_{i=1}^4 D_i + Q_i$$

und  $G$  als Komplement von  $G'$  in  $\mathbf{Z}^2$ . Dann ist  $y$  durch  $u$  und  $y|G$  eindeutig bestimmt.

## 1.9 Zustandsraummodelle für 2d Systeme

Für 1d Systeme ist der Zustandsraum endlich-dimensional. Zu einem kausalen  $H = \frac{Q}{P} \in \mathbf{R}(s)$  existieren reelle Matrizen  $A, B, C, D$ , so daß  $py = qu$  äquivalent ist zu einer Zustandsraumrealisierung

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i) \end{aligned}$$

oder in Shift-Notation:  $sx = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$ . Dann ist

$$H = \frac{Q}{P} = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Der globale Zustandsraum eines 2d Systems ist i.a. unendlich-dimensional. Für kausale Transferfunktionen gibt es jedoch lokale Zustandsraumrealisierungen.

### 1.9.1 Das Roesser-Modell (RM)

$$\begin{pmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^h \\ B^v \end{pmatrix} u(i, j)$$

$$y(i, j) = \begin{pmatrix} C^h & C^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{pmatrix} + Du(i, j)$$

Dabei bezeichnet  $x^h$  den *horizontalen* und  $x^v$  den *vertikalen* Zustandsvektor. Die Dimensionen seien  $n_1 \times 1$  bzw.  $n_2 \times 1$ . Die Matrizen  $A_{ij}, B^h, B^v, C^h, C^v, D$  sind reelle Matrizen passender Dimension. Man definiert  $n := n_1 + n_2$ ,

$$x = \begin{pmatrix} x^h \\ x^v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^h \\ B^v \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C^h & C^v \end{pmatrix}.$$

In Shift-Notation ist das RM durch

$$Sx := \begin{pmatrix} s_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & s_2 I_{n_2} \end{pmatrix} x = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

gegeben, die Transferfunktion ist  $H = C(S - A)^{-1}B + D$ .

### 1.9.2 Die Modelle von Fornasini und Marchesini

**Modell I (FM I):** für strikt kausale Transferfunktionen

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + A_0 x(i, j) + Bu(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) \end{aligned}$$

FM I in Shift-Notation:

$$s_1 s_2 x = (A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_0)x + Bu, \quad y = Cx$$

Transferfunktion:

$$H = C(s_1 s_2 I - A_1 s_1 - A_2 s_2 - A_0)^{-1} B = z_1 z_2 C(I - A_1 z_2 - A_2 z_1 - A_0 z_1 z_2)^{-1} B$$

**Modell II (FM II):** allgemeiner, nur Kausalität erforderlich

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j) \end{aligned}$$

FM II in Shift-Notation:

$$s_1 s_2 x = (A_1 s_1 + A_2 s_2)x + (B_1 s_1 + B_2 s_2)u, \quad y = Cx + Du$$

Transferfunktion:

$$\begin{aligned} H &= C(s_1 s_2 I - A_1 s_1 - A_2 s_2)^{-1} (B_1 s_1 + B_2 s_2) + D \\ &= C(I - A_1 z_2 - A_2 z_1)^{-1} (B_1 z_2 + B_2 z_1) + D \end{aligned}$$

### 1.9.3 Zweistufige Realisierung nach Eising

Fasse wieder  $\mathbf{R}[s_1, s_2]$  als  $\mathbf{R}[s_2][s_1]$  auf. Ein 2d System über  $\mathbf{R}$  wird so als 1d System über dem Ring  $\mathbf{R}[s_2]$  interpretiert (Systemtheorie über Ringen). Hier genügt es, Systeme über dem Körper  $\mathbf{R}(s_2)$  zu betrachten.

**1. Stufe:** Realisierung über  $\mathbf{R}(s_2)$  liefert

$$\begin{aligned} s_1 x &= A(s_2)x + B(s_2)u \\ y &= C(s_2)x + D(s_2)u \end{aligned}$$

$A, B, C, D$  sind Matrizen über  $\mathbf{R}(s_2)$ . Fasse diese wieder als Transfermatrizen auf.

**2. Stufe:** Realisierung über  $\mathbf{R}$

$$A(s_2) = AC(s_2I - AA)^{-1}AB + AD$$

$AA, AB, \dots$  bezeichnen reelle Matrizen (keine Produkte).

$$\begin{aligned} s_2 a &= AAa + ABx \\ A(s_2)x &= ACa + ADx \end{aligned}$$

$$B(s_2) = BC(s_2I - BA)^{-1}BB + BD$$

$$\begin{aligned} s_2 b &= BAb + BBu \\ B(s_2)u &= BCb + BDu \end{aligned}$$

$C(s_2), D(s_2)$  analog. Insgesamt ergibt sich die Realisierung

$$\begin{pmatrix} s_1 x \\ s_2 a \\ s_2 b \\ s_2 c \\ s_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD & AC & BC & 0 & 0 \\ AB & AA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & BA & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 & CA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & DA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BD \\ 0 \\ BB \\ 0 \\ DB \end{pmatrix} u$$

$$y = \left( CD \mid 0 \quad 0 \quad CC \quad DC \right) \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + DDu$$

Das ist ein RM mit horizontalem Zustandsvektor  $x$  und vertikalem Zustandsvektor  $(a, b, c, d)^T$ .

**Bem.:** Vorteil der zweistufigen Realisierung ist die vollständige Rückführung auf 1d Algorithmen. Nachteil ist die Asymmetrie in horizontal/vertikal, da willkürlich  $\mathbf{R}_{[s_2][s_1]}$  betrachtet wurde. Ebenso gut könnte man zuerst über  $\mathbf{R}(s_1)$  und dann über  $\mathbf{R}$  realisieren. Obige Realisierungsmethode ist nicht als effizienter Algorithmus aufzufassen, eher als Existenzaussage.

### 1.9.4 Zusammenhang zwischen den Modellen

**FM I  $\rightarrow$  RM:** Aus einem FM I entsteht durch

$$x^h := s_2x - A_1x, \quad x^v := x$$

ein RM mit  $A_{11} = A_2$ ,  $A_{12} = A_0 + A_2A_1$ ,  $A_{21} = I$ ,  $A_{22} = A_1$ ,  $B^h = B$ ,  $B^v = 0$ ,  $C^h = 0$ ,  $C^v = C$ ,  $D = 0$ .

**RM  $\rightarrow$  FM II:** Ein RM kann in ein FM II mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B^v \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B^h \\ 0 \end{pmatrix}$$

eingebettet werden.

### 1.9.5 Übergangsmatrizen

Betrachtet man im 1d Zustandsraummodell  $sx = Ax + Bu$  den Input  $u = 0$ , so ergibt sich als Lösung von  $sx = Ax$  bzw.  $x(i+1) = Ax(i)$  die Folge  $x(i) = A^i x(0)$ , wobei  $x(0)$  den Anfangszustand bezeichnet. Die Übergangsmatrizen (Übergang  $x(0) \rightarrow x(i)$ ) sind dann gerade die Potenzen der Matrix  $A$ :  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2$ ,  $A^3 \dots$

**Übergangsmatrizen für FM II:** Betrachte  $u = 0$ , also

$$s_1s_2x = A_1s_1x + A_2s_2x.$$

Als Anfangswerte (über  $\mathbf{N}^2$ ) braucht man  $x(i, 0)$ ,  $x(0, j)$  für  $i, j \in \mathbf{N}$ .

**Satz + Def.:** Die allgemeine Lösung der homogenen FM II-Gleichung ist

$$x(i, j) = \sum_{k=1}^i A^{i-k, j-1} A_1 x(k, 0) + \sum_{l=1}^j A^{i-1, j-l} A_2 x(0, l) \text{ für } i, j \geq 1,$$

wobei die *Übergangsmatrizen*  $A^{i,j}$  durch folgende Gleichungen definiert sind:

1.  $A^{0,0} = I$ .
2.  $A^{i,j} = 0$  für  $i < 0$  oder  $j < 0$ .
3.  $A^{i,j} = A_1 A^{i,j-1} + A_2 A^{i-1,j}$  für  $(i,j) \neq (0,0)$ .

Also:  $A^{0,0} = I$ ,  $A^{0,1} = A_1$ ,  $A^{1,0} = A_2$ ,  $A^{0,2} = A_1^2$ ,  $A^{1,1} = A_1 A_2 + A_2 A_1$  usw.

Insbesondere:  $A^{0,j} = A_1^j$ ,  $A^{i,0} = A_2^i$  für  $i, j \geq 0$ . Es gilt:

$$(I - z_2 A_1 - z_1 A_2)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (z_2 A_1 + z_1 A_2)^i = \sum_{i,j=0}^{\infty} A^{i,j} z_1^i z_2^j$$

und  $A^{i,j} = A^{i,j-1} A_1 + A^{i-1,j} A_2$ .

**Bem.:** Vergleich mit 1d Relation  $(I - zA)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i z^i$  rechtfertigt die Bezeichnung 'Übergangsmatrizen'.

**Satz:** Lösung von FM II zum Anfangswert Null

Sei  $x(i,0) = x(0,j) = 0$  für  $i, j \in \mathbf{N}$ . Dann ist

$$x(i,j) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j (A^{i-k,j-l-1} B_1 + A^{i-k-1,j-l} B_2) u(k,l) + \sum_{k=1}^i A^{i-k,j-1} B_1 u(k,0) + \sum_{l=1}^j A^{i-1,j-l} B_2 u(0,l)$$

für  $i, j \in \mathbf{N}$  eine partikuläre Lösung der FM II-Gleichung.

**Bem.:** Aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich durch Superposition die allgemeine Lösung von FM II.

**Hamilton-Cayley-Theorem:** Für eine  $n \times n$  Matrix  $A$  ist das charakteristische Polynom

$$\chi_A(s) = \det(sI_n - A) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$$

und es gilt:  $\chi_A(A) = 0$ . Daher ist  $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$ , d.h.  $A^n$  ist Linearkombination der  $A^i$  mit  $0 \leq i < n$ .

**Def.:** Seien  $A_1$  und  $A_2$  zwei  $n \times n$  Matrizen. Das *charakteristische Polynom für FM II* ist

$$\chi_{A_1, A_2} := \det(s_1 s_2 I_n - s_1 A_1 - s_2 A_2) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} s_1^i s_2^j.$$

Es gilt:  $a_{nn} = 1$  und  $a_{ij} = 0$  für  $i + j < n$ .

**Satz:** 2d Hamilton–Cayley–Theorem für FM II

Die Übergangsmatrizen  $A^{i,j}$  erfüllen ihre charakteristische Gleichung, d.h.

$$\sum_{i,j=0}^n a_{ij} A^{i,j} = 0.$$

Insbesondere ist  $A^{n,n}$  Linearkombination der  $A^{i,j}$  mit  $(i,j) <_{cw} (n,n)$  ( $<_{cw}$  bedeutet  $\leq_{cw}$  und  $\neq$ , nicht: komponentenweise  $<$ ).

Dieses Resultat läßt sich wie folgt verschärfen:

**Satz:** Die  $n \times n$  Übergangsmatrizen  $A^{i,j}$  eines FM II sind Linearkombinationen der  $A^{k,l}$  mit  $k+l < n$ .

**Übergangsmatrizen für RM:** RM ist ein Spezialfall von FM II mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten zunächst das homogene Problem ( $u = 0$ ), also

$$s_1 x^h = A_{11} x^h + A_{12} x^v, \quad s_2 x^v = A_{21} x^h + A_{22} x^v \text{ oder}$$

$$s_1 \begin{pmatrix} x^h \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x^h \\ x^v \end{pmatrix}, \quad s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x^v \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x^h \\ x^v \end{pmatrix}.$$

Anfangswerte (über  $\mathbf{N}^2$ ):  $x^h(0, j), x^v(i, 0)$  für  $i, j \in \mathbf{N}$ .

**Satz:** Die allgemeine Lösung von RM mit  $u = 0$  ist

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^i A^{i-k,j} \begin{pmatrix} 0 \\ x^v(k, 0) \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^j A^{i,j-l} \begin{pmatrix} x^h(0, l) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere für  $x^h(0, l) = 0, l \geq 1, x^v(k, 0) = 0, k \geq 1$ :

$$x(i, j) = A^{i,j} x(0, 0).$$

Vgl. mit 1d Relation  $x(i) = A^i x(0)$ .

**Satz:** Eine partikuläre Lösung von RM (zum Anfangswert Null) ist

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j (A^{i-k,j-l-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B^v \end{pmatrix} + A^{i-k-1,j-l} \begin{pmatrix} B^h \\ 0 \end{pmatrix}) u(k, l).$$

**Def.:** Das *charakteristische Polynom* für RM ist

$$\chi_A := \det(S - A) = \det \begin{pmatrix} s_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s_2 I_{n_2} - A_{22} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} s_1^i s_2^j.$$

Es gilt:  $a_{n_1 n_2} = 1$ .

**Satz:** 2d Hamilton-Cayley-Theorem für RM

Die Übergangsmatrizen eines RM erfüllen ihre charakteristische Gleichung, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i,j} = 0.$$

Verschärfte Version: Die  $A^{i,j}$  eines RM sind Linearkombinationen der  $A^{k,l}$  mit  $(k, l) <_{cw} (n_1, n_2)$ .

## 1.9.6 Realisierungsproblem für RM

Die Transferfunktion eines RM ist

$$H = C(S - A)^{-1}B + D \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} s_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & s_2 I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Das Realisierungsproblem besteht darin, zu gegebenem kausalem  $H \in \mathbf{R}(s_1, s_2)$  Matrizen  $A, B, C, D$  zu finden, so daß diese Relation erfüllt ist.  $\{A, B, C, D\}$  heißt dann eine *Realisierung* von  $H$ .

**Satz:** Aus  $H = C(S - A)^{-1}B + D$  folgt

$$H = C(s_2)(s_1 I_{n_1} - A(s_2))^{-1}B(s_2) + D(s_2) \quad \text{mit}$$

$$\begin{pmatrix} A(s_2) & B(s_2) \\ C(s_2) & D(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ C_2 \end{pmatrix} (s_2 I_{n_2} - A_{22})^{-1} \begin{pmatrix} A_{21} & B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & B_1 \\ C_1 & D \end{pmatrix}.$$

**Realisierungsalgorithmus:** Realisierung von  $H$  über  $\mathbf{R}(s_2)$  liefert die Matrizen  $A(s_2), B(s_2), C(s_2), D(s_2)$ . Dann ist

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_1 \\ C_1 & D \end{pmatrix} = \lim_{s_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} A(s_2) & B(s_2) \\ C(s_2) & D(s_2) \end{pmatrix},$$

da  $\lim_{s_2 \rightarrow \infty} (s_2 I_{n_2} - A_{22})^{-1} = 0$ .

Wir erhalten also die Matrizen  $A_{11}, B_1, C_1, D$ , betrachten dann

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} A(s_2) - A_{11} & B(s_2) - B_1 \\ C(s_2) - C_1 & D(s_2) - D \end{pmatrix}$$

und realisieren die strikt kausale Transfermatrix  $\tilde{H} \in \mathbf{R}(s_2)^{(n_1+1) \times (n_1+1)}$  über  $\mathbf{R}$

$$\tilde{H} = \tilde{C}(s_2 I_{n_2} - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}.$$

Vergleich mit der Relation aus obigem Satz liefert

$$\tilde{A} = A_{22}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ C_2 \end{pmatrix}$$

und somit die Matrizen  $A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_2, C_2$ .

**Def.:** Eine Realisierung mit einer  $n_1 \times n_1$  Matrix  $A_{11}$  und einer  $n_2 \times n_2$  Matrix  $A_{22}$  heißt Realisierung der *Dimension*  $n_1 + n_2$  (oder genauer  $(n_1, n_2)$ ). Eine Realisierung heißt *minimal*, wenn sie unter allen möglichen Realisierungen minimale Dimension besitzt.

**Bem.:** Mit obigem Algorithmus kann man für  $H = \frac{Q}{P}$  und  $(d_1, d_2) = \text{cwdeg}(P)$  Realisierungen der Dimension  $d_1 + 2d_2$  konstruieren. Wegen der Vertauschbarkeit  $\mathbf{R}[s_1, s_2] = \mathbf{R}[s_2][s_1] = \mathbf{R}[s_1][s_2]$  kann man ebenso Realisierungen der Dimension  $2d_1 + d_2$  erzeugen.

Insgesamt ist die minimale Dimension also höchstens  $\min(2d_1 + d_2, d_1 + 2d_2)$ . Andererseits ist die minimale Dimension sicher mindestens  $d_1 + d_2$ , wenn man oBdA annimmt, daß  $P$  und  $Q$  teilerfremd sind.

In der 1d Systemtheorie sind minimale Realisierungen beobacht- und kontrollierbar. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Beobacht- und Kontrollierbarkeitsbegriffe für 2d Systeme eingeführt und hinsichtlich Minimalität untersucht.

## 1.10 Beobacht- und Kontrollierbarkeit für RM

### 1.10.1 Beobachtbarkeit

Im 1d Zustandsraummodell  $sx = Ax + Bu, y = Cx + Du$  bedeutet Beobachtbarkeit 'x ist aus u und y rekonstruierbar', d.h.

$$Cx = 0, (sI - A)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Das ist für eine  $n \times n$  Matrix  $A$  äquivalent zur Forderung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = n.$$

Das Hamilton–Cayley–Theorem erlaubt es, sich dabei auf die endliche *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

zu beschränken.

**Def.:** Ein RM heißt *beobachtbar*, falls

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \vdots \\ CA^{i,j} \\ \vdots \end{pmatrix} = n,$$

wobei  $\mathcal{O}$  alle  $CA^{i,j}$  mit  $(i, j) <_{cw} (n_1, n_2)$  enthält. Die *Beobachtbarkeitsmatrix* für *RM* ist also vom Format  $(n_1 n_2 + n_1 + n_2) \times n$ ,  $n = n_1 + n_2$ .

**Satz:** Charakterisierung von Beobachtbarkeit. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. RM ist beobachtbar.
2. Aus  $Cx = 0$ ,  $(S - A)x = 0$ ,  $x^h(0, j) = 0$ ,  $x^v(i, 0) = 0$  für  $i, j \geq 1$  folgt  $x = 0$ .
3.  $x$  ist aus  $u, y$  und den Randwerten  $x^h(0, j)$ ,  $x^v(i, 0)$  für  $i, j \geq 1$  rekonstruierbar.

## 1.10.2 Kontrollierbarkeit

Kontrollierbarkeit eines 1d Zustandsraummodells  $sx = Ax + Bu$  mit der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  heißt: ‘Aus beliebigem  $x_0$  kann man durch geeignete Wahl von  $u$  jeden beliebigen Zustand  $\bar{x}$  erreichen’, d.h. für alle  $x_0, \bar{x}$  gibt es ein  $u$  und ein  $i \in \mathbb{N}$ , so daß  $x(i) = \bar{x}$ . Das ist äquivalent zu

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots \end{pmatrix} = n,$$

wobei es wieder genügt, die endliche *Kontrollierbarkeitsmatrix*

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

zu betrachten.

**Def.:** Ein RM heißt *kontrollierbar*, falls

$$\text{Rang}(\mathcal{C}) = \text{Rang} \left( \dots \quad A^{i,j-1}B_1 + A^{i-1,j}B_2 \quad \dots \right) = n,$$

wobei  $(0,0) <_{cw} (i,j) \leq_{cw} (n_1, n_2)$  und

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B^v \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B^h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die *Kontrollierbarkeitsmatrix* für RM hat das Format  $n \times (n_1n_2 + n_1 + n_2)$ .

**Satz:** Charakterisierung von Kontrollierbarkeit

RM kontrollierbar  $\Leftrightarrow$  Für beliebige Anfangswerte  $x^h(0, j)$ ,  $x^v(i, 0)$  und beliebiges  $\bar{x}$  kann man durch geeignete Wahl von  $u$  erreichen, daß für ein  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  gilt:  $x(i, j) = \bar{x}$ .

### 1.10.3 Minimalität kanonischer Realisierungen

Für 1d Systeme ist eine Realisierung genau dann minimal, wenn sie beobachtbar und kontrollierbar ist.

Für 2d Systeme gibt es sowohl beobacht- und kontrollierbare Realisierungen, die nicht minimal sind, als auch minimale nichtkanonische Realisierungen. Zwei Modifikationen der Definition von Beobacht- und Kontrollierbarkeit liefern notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für Minimalität.

### 1.10.4 Getrennte Beobacht- und Kontrollierbarkeit

Die Beobachtbarkeits- und Kontrollierbarkeitsmatrizen werden folgendermaßen partitioniert:

$$\mathcal{O} = \left( \underbrace{\mathcal{O}^h}_{n_1} \quad \underbrace{\mathcal{O}^v}_{n_2} \right), \quad \mathcal{C} = \left( \begin{array}{c} \mathcal{C}^h \\ \mathcal{C}^v \end{array} \right) \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \end{array}$$

**Def.:** RM heißt *getrennt beobachtbar*, falls  $\text{Rang}(\mathcal{O}^h) = n_1$ ,  $\text{Rang}(\mathcal{O}^v) = n_2$  und *getrennt kontrollierbar*, falls  $\text{Rang}(\mathcal{C}^h) = n_1$ ,  $\text{Rang}(\mathcal{C}^v) = n_2$ .

**Bem.:** Aus Beobachtbarkeit folgt getrennte Beobachtbarkeit, aus Kontrollierbarkeit folgt getrennte Kontrollierbarkeit.

**Satz:** Charakterisierung von getrennter Beobacht- und Kontrollierbarkeit

1. RM getrennt beobachtbar  $\Leftrightarrow$  Aus  $Cx = 0$ ,  $(S - A)x = 0$ ,  $x^h(0, j) = 0$ ,  $x^v(i, 0) = 0$  für  $i, j \geq 1$  und  $(x^h(0, 0) = 0$  oder  $x^v(0, 0) = 0)$  folgt  $x = 0$ .
2. RM getrennt kontrollierbar  $\Leftrightarrow$  Für beliebige Anfangswerte  $x^h(0, j)$ ,  $x^v(i, 0)$  und beliebige  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  kann man einen Input  $u_1$  wählen, so daß für ein  $(i, j) \in \mathbf{N}^2$  gilt  $x^h(i, j) = \bar{x}_1$  und man kann einen Input  $u_2$  finden, so daß für ein  $(k, l) \in \mathbf{N}^2$  gilt  $x^v(k, l) = \bar{x}_2$ .

**Satz:** Minimale Realisierungen sind getrennt beobacht- und kontrollierbar. Getrennte Beobacht- und Kontrollierbarkeit ist also notwendige Bedingung für Minimalität.

**Ähnliche Realisierungen:** Zwei 1d Realisierungen  $\{A, B, C, D\}$  und  $\{A', B', C', D'\}$  heißen *ähnlich*, falls eine nicht-singuläre Matrix  $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  existiert mit

$$A' = T^{-1}AT, \quad B' = TB, \quad C' = CT^{-1}, \quad D' = D.$$

Dann ist  $H' = C'(sI - A')^{-1}B' + D' = C(sI - A)^{-1}B + D = H$ .

**Def.:** Zwei RM  $\{A, B, C, D\}$ ,  $\{A', B', C', D'\}$  heißen *ähnlich*, falls eine nicht-singuläre Matrix der Form

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad T_{ii} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$$

existiert mit  $A' = TAT^{-1}$ ,  $B' = TB$ ,  $C' = CT^{-1}$ ,  $D' = D$ . Dann ist  $H' = H$ .

**Bem.:** Für allgemeines  $T \in \text{Gl}_n(\mathbf{R})$  ist nicht notwendigerweise  $H' = H$ .

### 1.10.5 Modale Beobacht- und Kontrollierbarkeit

Ein bekanntes Resultat von Rosenbrock besagt, daß Beobacht- und Kontrollierbarkeit durch Koprimitätsbedingungen an die Systemmatrizen formuliert werden können:

$$\begin{aligned} (C, A) \text{ beobachtbar} &\Leftrightarrow C, sI - A \text{ rechts koprim} \\ (A, B) \text{ kontrollierbar} &\Leftrightarrow sI - A, B \text{ links koprim.} \end{aligned}$$

**Def.:** Zwei polynomiale Matrizen mit gleicher Zeilenanzahl

$$P \in \mathbf{R}[s_1, s_2]^{m \times p}, \quad Q \in \mathbf{R}[s_1, s_2]^{m \times q}$$

heißen *links koprim*, falls aus

$$P = DP_1, \quad Q = DQ_1, \quad D \in \mathbf{C}[s_1, s_2]^{m \times m}, \quad P_1 \in \mathbf{C}[s_1, s_2]^{m \times p}, \quad Q_1 \in \mathbf{C}[s_1, s_2]^{m \times q}$$

folgt, daß  $D$  unimodular ist, d.h.  $\det(D) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

Zwei Matrizen mit gleicher Spaltenanzahl sind *rechts koprim*, falls ihre Transponierten links koprim sind.

**Def.:** RM heißt *modal beobachtbar*, falls  $C, S - A$  rechts koprim sind und *modal kontrollierbar*, falls  $S - A, B$  links koprim sind.

**Satz:** Ist ein RM modal beobacht- und kontrollierbar, so sind Zähler und Nenner der rationalen Transferfunktion

$$H = C(S - A)^{-1}B + D = \frac{C(S - A)_{ad}B}{\det(S - A)} + D = \frac{C(S - A)_{ad}B + D \det(S - A)}{\det(S - A)}$$

teilerfremd. Die Dimension des RM, also der cw-Grad von  $\det(S - A)$ , ist dann gleich dem minimalen cw-Grad aller möglichen Nenner  $P$  in einer Darstellung  $H = \frac{Q}{P}$ . Insbesondere folgt, daß das RM minimal ist.

Modale Beobacht- und Kontrollierbarkeit ist daher hinreichende Bedingung für Minimalität.

**Bem.:** Nicht jede Transferfunktion besitzt eine modal beobacht- und kontrollierbare Realisierung.

# Kapitel 2

## MIMO Systeme

### 2.1 Behaviors

Der von J. Willems begründete ‘behavioral approach’ stellt einen neuen Zugang zur Systemtheorie dar. Man betrachtet zunächst anstelle von Input-Output-Relationen die Menge aller Input-Output-Paare, d.h. zur I-O-Relation  $y = Tu$  für  $u, y \in \mathcal{A}$  gehört das ‘Verhalten’ des Systems

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^2, y = Tu \right\}.$$

Speziell für ein  $T$  mit rationaler Systemfunktion  $H = \frac{Q}{P}$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^2, py = qu \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^2, (-q, p) \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Wir betrachten nun den allgemeineren MIMO-Fall, d.h.  $u \in \mathcal{A}^m, y \in \mathcal{A}^p$ . Dann hat  $\mathcal{B}$  die Gestalt

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{m+p}, R \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Das Wesentliche ist nun, daß man in dieser Darstellung auf eine a priori Einteilung der Systemvariablen in Inputs und Outputs verzichtet (in vielen Systemen ist ohnehin nicht von vornherein klar, welche Größen frei sind und welche andere determinieren). Im nachhinein kann dem System durchaus eine Input-Output-Struktur auferlegt werden, aber welche der Variablen Inputs und welche Outputs sind, sollte aus den Systemgleichungen *deduziert*, nicht dem System auferlegt werden. Insbesondere kann ein und dasselbe System mehrere Input-Output-Strukturen ermöglichen, etwa bei elektrischen Schaltkreisen.

Im behavioral approach werden also Objekte der Form  $(w = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, l = m + p)$

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^l, R w = 0\}$$

untersucht. Dabei ist  $\mathcal{A} = F^{\mathbf{N}^r}$ ,  $F$  ein beliebiger Körper (bisher  $\mathbf{R}$ ) und

$$R \in \mathcal{D}^{k \times l} := F[s]^{k \times l} := F[s_1, \dots, s_r]^{k \times l}, \quad k, l, r \geq 1.$$

Die Variable  $s_i$  entspricht dem Shift-Operator in  $i$ -ter Richtung und  $r$  ist die Dimension des Systems (bisher  $r=2$ ). Die Gleichung  $Rw = 0$  ist eine Kurzschreibweise für das lineare System partieller Differenzgleichungen

$$\sum_{j=1}^l R_{ij} w_j = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

oder mit  $R_{ij} = \sum_{m \in \mathbf{N}^r} R_{ij}(m) s^m$

$$\sum_{j=1}^l \sum_{m \in \mathbf{N}^r} R_{ij}(m) w_j(m+n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}^r \text{ und } i = 1, \dots, k.$$

**Bem.:** Wir betrachten hier nur noch kausale Signale und verzichten ab jetzt auf die Unterscheidung zwischen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_c$ . Natürlich kann man auch  $\mathcal{A} = F^{\mathbf{Z}^r}$  und Laurent-polynomiale Matrizen  $R$  betrachten.

Im behavioral approach werden alle Systemvariablen  $w_i$  gleichberechtigt behandelt, es erfolgt keine externe Einteilung in Inputs und Outputs. Die Systemvariablen sind durch die Gleichungen  $Rw = 0$  miteinander verknüpft, es sind verschiedene Interpretationen  $w = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$  möglich.

Nicht das Gleichungssystem  $Rw = 0$  wird als System betrachtet, sondern dessen Lösungsraum, die Menge aller *Trajektorien*  $w$ , die den Systemgleichungen genügen. Die *repräsentierende Matrix*  $R$  ist durch  $\mathcal{B}$  nicht eindeutig bestimmt.

## 2.2 Duale Vektorräume und adjungierte Abbildungen

Ist  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $F$ , so ist

$$V^* := \text{Hom}_F(V, F) = \{v^* : V \rightarrow F, v^* \text{ } F\text{-linear}\}$$

der duale Vektorraum. Für  $\dim V < \infty$  sind  $V$  und  $V^*$  isomorph mit den üblichen Eigenschaften (lineare Algebra). Die hier betrachteten Vektorräume sind unendlich-dimensional.

**Def.:** Die *Evaluationsabbildung* ist die Bilinearform

$$\langle -, - \rangle : V \times V^* \rightarrow F, \quad (v, v^*) \mapsto \langle v, v^* \rangle := v^*(v).$$

Zu einer  $F$ -linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  definiert man die *duale* Abbildung

$$f^* : V^* \rightarrow V^*, \quad v^* \mapsto f^*(v^*) := v^* \circ f.$$

$f^*$  ist gleichzeitig die zu  $f$  adjungierte Abbildung bzgl.  $\langle -, - \rangle$ , denn

$$\langle v, f^*(v^*) \rangle = \langle v, v^* \circ f \rangle = (v^* \circ f)(v) = v^*(f(v)) = \langle f(v), v^* \rangle.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln für adjungierte Abbildungen:

1.  $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
2.  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
3.  $(rf)^* = rf^*$  für  $r \in F$
4.  $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$
5.  $f$  Isomorphismus  $\Rightarrow (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$
6.  $\text{ke}f^* = (\text{im}f)^\perp$ ,  $(\text{im}f^*)^\perp = \text{ke}f$ .

**Speziell:** Sei  $I$  eine unendliche Menge und

$$V = F^{(I)} = \{\text{Funktionen von } I \text{ nach } F \text{ mit endlichem Träger}\}.$$

$V$  ist dann ein freier unendlich-dimensionaler  $F$ -Vektorraum mit der Basis

$$\{\delta_i, i \in I\}, \quad \delta_i : I \rightarrow F, \quad \delta_i(j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mittels folgender Isomorphie kann  $V^*$  mit  $F^I$  identifiziert werden:

$$\begin{aligned} V^* = \text{Hom}_F(F^{(I)}, F) &\leftrightarrow F^I \\ \text{lineare Abbildung } v^* &\mapsto \text{Bild der Basis } (v^*(\delta_i), i \in I). \end{aligned}$$

Zum Vektorraum  $F^{(I)}$  gehört also der duale Vektorraum  $F^I$ .

**Speziell:**  $I = \mathbf{N}^r$ ,  $V = F^{(\mathbf{N}^r)} = F[s_1, \dots, s_r] = F[s] = \mathcal{D}$ . Die Basiselemente  $\delta_i$  sind dann die  $s^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^r$ , und

$$V^* = F^{\mathbf{N}^r} = \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{D}$  sind duale topologische Vektorräume. Ist

$$\mathcal{D}^{1 \times m} \xrightarrow{f} \mathcal{D}^{1 \times k} \xrightarrow{g} \mathcal{D}^{1 \times l}$$

eine *exakte Folge*, d.h. ist  $\text{im}f = \text{ke}g$ , so ist die dazu duale Folge

$$\mathcal{A}^m \xleftarrow{f^*} \mathcal{A}^k \xleftarrow{g^*} \mathcal{A}^l$$

ebenfalls exakt. Die Evaluationsabbildung ist hier

$$\mathcal{D} \times \mathcal{A} \rightarrow F, \quad (s^n, a) \mapsto \langle s^n, a \rangle = a(n) = (s^n a)(0).$$

Zur Abbildung

$$p : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, \quad d \mapsto dp \quad \text{für } p \in \mathcal{D}$$

(Multiplikation mit  $p$ ) gehört die duale Abbildung

$$p^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad a \mapsto p(\sigma)a$$

(Anwendung des Shift-Operators, der aus  $p$  durch  $s_i \rightarrow \sigma_i$  hervorgeht).

Für Matrizen: Die duale Abbildung von

$$R : \mathcal{D}^{1 \times k} \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times l}, \quad d \mapsto dR, \quad R \in \mathcal{D}^{k \times l} \quad \text{ist}$$

$$R^* : \mathcal{A}^l \rightarrow \mathcal{A}^k, \quad w \mapsto R(\sigma)w.$$

Äquivalent zur Untersuchung von behaviors  $\mathcal{B} = \ker(R^*)$  ist aufgrund der Dualität die Untersuchung von

$$\text{im}(R) = \mathcal{D}^{1 \times k} R,$$

dem Zeilenmodul der polynomialen Matrix  $R$  in  $\mathcal{D}^{1 \times l}$ .  $\mathcal{B}$  ist eindeutig bestimmt durch den Zeilenmodul einer repräsentierenden Matrix  $R$ .

**Bem.:** Bisher wurden Abbildungen wie  $p, R$  mit Großbuchstaben, die dazugehörigen  $p^*, R^*$  mit den entsprechenden kleinen Buchstaben gekennzeichnet. In Zukunft werden entsprechende Funktionen identifiziert, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, ob die Abbildung auf  $\mathcal{D}$  oder  $\mathcal{A}$  gemeint ist.

## 2.3 Folgerungen aus der Dualität

### 2.3.1 Quasi-Eindeutigkeit der repräsentierenden Matrix

**Satz:** Die Matrizen  $R_1$  und  $R_2$  repräsentieren ein und dasselbe System, d.h.  $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^l, R_1 w = 0\} = \{w \in \mathcal{A}^l, R_2 w = 0\}$  mit zwei Matrizen  $R_i \in \mathcal{D}^{k_i \times l}$  genau dann, wenn Matrizen

$$X_1 \in \mathcal{D}^{k_2 \times k_1}, \quad X_2 \in \mathcal{D}^{k_1 \times k_2} \quad \text{mit} \quad R_2 = X_1 R_1, \quad R_1 = X_2 R_2$$

existieren.

**Bem.:** Man kann im Gegensatz zur 1d Theorie *nicht* oBdA annehmen, daß  $k_1 = k_2$ .

### 2.3.2 Elimination latenter Variablen

**Def.:** Eine Matrix  $X \in \mathcal{D}^{m \times k}$  heißt *minimaler (Links-)Annihilator* von  $R \in \mathcal{D}^{k \times l}$ , falls

1.  $XR = 0$  und
2.  $yR = 0$  für ein  $y \in \mathcal{D}^{1 \times k}$  die Existenz von  $z \in \mathcal{D}^{1 \times m}$  mit  $y = zX$  impliziert.

**Bem.:**  $X$  ist genau dann ein minimaler Annihilator von  $R$ , wenn

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^{1 \times m} & \xrightarrow{X} & \mathcal{D}^{1 \times k} & \xrightarrow{R} & \mathcal{D}^{1 \times l} \\ d & \longmapsto & dX & \longmapsto & dXR \end{array}$$

eine exakte Folge ist, d.h. falls  $\text{im}(X) = \text{ke}(R)$ .

Da  $\mathcal{D}$  noethersch ist, hat der  $\mathcal{D}$ -Modul  $\text{ke}(R)$  ein endliches Erzeugendensystem und daher besitzt jede polynomiale Matrix einen minimalen Annihilator.

**Vom ARMA Modell zum AR Modell:**  $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^l, R_1 w = 0\}$  ist eine AR ('autoregressive') Repräsentation. Eine ARMA ('autoregressive moving average') Repräsentation hat die Gestalt

$$\mathcal{S} = \{w \in \mathcal{A}^l, \text{ es gibt ein } x \in \mathcal{A}^n \text{ mit } R_1 w = Mx\}.$$

Ein ARMA System kann folgenderweise in AR Form gebracht werden:

**Satz:** Ist  $\mathcal{S}$  wie oben gegeben und  $X$  ein minimaler Annihilator von  $M$ , so ist

$$\mathcal{S} = \{w \in \mathcal{A}^l, XR_1 w = 0\}.$$

**Bem.:** Aus dem ARMA System  $\mathcal{S}$  werden so die 'latenten'/'versteckten' Variablen  $x$  eliminiert.

**Vom Zustandsraummodell zum AR Modell:** Wir betrachten ein allgemeines Zustandsraummodell:

$$M_1 x = Bu, \quad y = Cx + Du,$$

z.B. für FM II:  $M_1 = s_1 s_2 I - A_1 s_1 - A_2 s_2$ , für RM:  $M_1 = S - A$ .

Hier sind  $M_1, B, C, D$  beliebige polynomiale Matrizen. Die Menge der dazugehörigen I-O-Paare ist

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^p, \text{ es gibt ein } x \in \mathcal{A}^n \text{ mit } M_1 x = Bu, y = Cx + Du \right\}.$$

Das ist ein ARMA System mit

$$R_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ -D & I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ C \end{pmatrix}.$$

Ist  $(X_1 \ X_2)$  also ein minimaler Annihilator von  $\begin{pmatrix} M_1 \\ C \end{pmatrix}$ , so ist laut obigem Satz

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^p, (X_1 \ X_2) \begin{pmatrix} B & 0 \\ -D & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

eine AR Repräsentation des Zustandsraummodells, d.h. die Gleichungen des allgemeinen Zustandsraummodells sind äquivalent zu

$$X_2 y = (-X_1 B + X_2 D) u.$$

## 2.4 Input–Output–Strukturen und Transfermatrizen

Sei  $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^l, R w = 0\}$ ,  $\mathcal{A} = F^{\mathbb{N}^r}$ ,  $R \in \mathcal{D}^{k \times l}$ ,  $\mathcal{D} = F[s]$ . Der Polynomring  $\mathcal{D}$  ist in seinem Quotientenkörper

$$\mathcal{K} = \text{Quot}(\mathcal{D}) = F(s) = F(s_1, \dots, s_r)$$

enthalten, dem Körper der rationalen Funktionen in  $s_1, \dots, s_r$ . Man kann  $R$  als Matrix über  $\mathcal{K}$  auffassen und den Rang von  $R$  berechnen.

**Def.:**  $p := \text{Rang}(R)$  heißt *Outputdimension* von  $\mathcal{B}$ ,  $m := l - p$  ist die *Inputdimension* von  $\mathcal{B}$ .

**Bem.:** In- und Outputdimension hängen nur von  $\mathcal{B}$  ab, nicht von der Wahl der repräsentierenden Matrix  $R$ .

**Def.:** Zerlege  $\{1, \dots, l\}$  in zwei disjunkte Teilmengen  $O$  und  $I$ , so daß  $|O| = p$  und  $|I| = m$ , wobei  $p$  und  $m$  wie oben Out- bzw. Inputdimension bezeichnen. Dann gibt es eine Permutationsmatrix  $\Pi$  mit

$$R\Pi = (R_{-i, i \in I}, R_{-j, j \in O}) =: (-Q, P), \quad Q \in \mathcal{D}^{k \times m}, P \in \mathcal{D}^{k \times p},$$

$$\Pi^{-1}w = \begin{pmatrix} w_{i,i \in I} \\ w_{j,j \in O} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{A}^m, y \in \mathcal{A}^p \quad \text{und}$$

$$\mathcal{B} = \{w, Rw = 0\} = \{\Pi \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, (-Q, P) \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = 0\} = \{\Pi \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, Py = Qu\}.$$

Sind die  $p$  Spalten von  $P$   $\mathcal{K}$ -linear unabhängig, d.h. gilt

$$\text{Rang}(R) = \text{Rang}(P) = p,$$

so heißt obige Zerlegung eine *Input-Output-Struktur* von  $\mathcal{B}$  mit Input  $u \in \mathcal{A}^m$  und Output  $y \in \mathcal{A}^p$ .

**Bem.:** I.a. läßt  $\mathcal{B}$  mehrere I-O-Strukturen zu, jede Wahl von  $p$   $\mathcal{K}$ -linear unabhängigen Spalten von  $R$  liefert eine. OBdA nennen wir  $R\Pi$  wieder  $R$  und  $\Pi^{-1}w$  wieder  $w$ .

**Satz + Def.:** Sei  $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^p, Py = Qu\}$  behavior mit I-O-Struktur. Es gilt:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Matrix  $H \in \mathcal{K}^{p \times m}$  mit  $PH = Q$ .
2. Für alle  $u \in \mathcal{A}^m$  gibt es ein  $y \in \mathcal{A}^p$  mit  $Py = Qu$  bzw.  $\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$ .

Die rationale  $p \times m$  Matrix  $H$  heißt die (zur gewählten I-O-Struktur gehörende) *Transfermatrix*.

**Bem.:** Die zweite Behauptung aus obigem Satz rechtfertigt die Bezeichnungen 'Input' und 'Output' ( $u$  ist frei).

Der Beweis dieser Aussage basiert auf dem *Fundamentalprinzip* von Ehrenpreis. Dieses besagt, daß ein lineares System von Differenzen- oder Differentialgleichungen  $Py = v$  ( $v \dots$  vorgegebene 'rechte Seite',  $y \dots$  gesuchte Lösung,  $P_{ij} \dots$  Polynome in den Shift- oder Differentialoperatoren) genau dann lösbar ist, wenn für einen minimalen Annihilator  $X$  von  $P$  gilt:  $Xv = 0$ .

Die Transfermatrix  $H$  hängt von  $\mathcal{B}$  und der gewählten I-O-Struktur ab, nicht aber von der repräsentierenden Matrix  $R$ .

**Speziell:** Sei  $k = p = \text{Rang}(R)$ ,  $R \in \mathcal{D}^{p \times l}$  also eine Matrix mit maximalem Zeilenrang. Dann ist  $P$  eine  $p \times p$  Matrix und eine I-O-Struktur liegt vor, wenn  $\det(P) \neq 0$ , also wenn  $P^{-1} \in \mathcal{K}^{p \times p}$  existiert. In dieser Situation hat die Transfermatrix die traditionelle Gestalt

$$H = P^{-1}Q$$

und  $P$  ist eindeutig bis auf Linksmultiplikation mit einer unimodularen Matrix.

**Bem.:**  $H = P^{-1}Q$  heißt *Matrixbruchdarstellung* von  $H$ . Im Gegensatz zur Id Theorie ist eine solche Darstellung nur in obigem Spezialfall möglich, i.a. nicht.

## 2.5 Systeme von Differenzengleichungen und Anfangsbedingungen

Sei  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^p, Py = Qu \right\}$  behavior mit I-O-Struktur. Ziel ist eine konstruktive Zerlegung von  $\mathcal{B}$  folgender Struktur:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\cong \{\text{Inputs}\} \times \{\text{Anfangswerte}\} \\ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} &\leftrightarrow \left( u, \quad y|_G \right). \end{aligned}$$

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß  $\{\text{Inputs}\} \cong \mathcal{A}^m$ , wobei  $m$  die Inputdimension von  $\mathcal{B}$  ist. Jetzt wollen wir den zweiten Faktor, den Raum der freiwählbaren Anfangswerte untersuchen, also

$$\{\text{Anfangswerte}\} \cong \mathcal{B}/\{\text{Inputs}\} \cong \{y \in \mathcal{A}^p, Py = 0\} \cong F^G.$$

Gesucht wird also ein Anfangswertgebiet  $G$ , das das Cauchy-Problem  $Py = Qu$ ,  $y|_G = x$  für alle Inputs  $u$  und alle Anfangswerte  $x$  eindeutig lösbar macht. Dabei ist  $G$  eine Teilmenge von  $[p] \times \mathbb{N}^r$ ,  $[p] := \{1, \dots, p\}$  und  $F^G$  wird mittels folgender Einbettung als Unterraum von  $\mathcal{A}^p$  aufgefaßt:

$$F^G \hookrightarrow \mathcal{A}^p = (F^{\mathbb{N}^r})^p = F^{[p] \times \mathbb{N}^r}.$$

Das heißt,  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathcal{A}^p$  wird als Abbildung

$$y : [p] \times \mathbb{N}^r \rightarrow F, \quad (i, n) \mapsto y_i(n)$$

gedeutet.

**Satz:** Wie im SISO-Fall (vgl. Abschnitt 1.8.1) ist das Cauchyproblem genau dann eindeutig lösbar, wenn die Menge  $G$  und ihr Komplement  $G'$  die äquivalenten Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^p &= \text{ke}(P) \oplus F^{G'} \quad \text{oder (dual dazu)} \\ \mathcal{D}^{1 \times p} &= \text{im}(P) \oplus F^{(G)} \end{aligned}$$

erfüllen. Dabei ist  $\text{im}(P)$  wie üblich der Zeilenmodul von  $P$ ,

$$\text{im}(P) = \mathcal{D}^{1 \times k} P \subseteq \mathcal{D}^{1 \times p}.$$

Ist obige Bedingung erfüllt, so ist  $\{s^n e_i, (i, n) \in G\}$  ( $e_i \dots i$ -ter Standardbasisvektor) eine  $F$ -Basis von  $\mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times k} P$ . Ein Verfahren zur Konstruktion solcher Basen liefert die Theorie der Gröbnerbasen.

**Speziell:** MISO-Fall ( $p = 1$ )

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{m+1}, Py = Qu \right\}.$$

Dann ist der Zeilenmodul von  $P$  einfach das von  $P_1, \dots, P_k$  erzeugte Ideal  $\mathcal{J}$ .  
Schreibweise:  $\mathcal{J} = \langle P_1, \dots, P_k \rangle = \sum_{i=1}^k \mathcal{D}P_i$ .

Im nächsten Abschnitt werden Basen polynomialer Ideale untersucht.

## 2.6 Gröbnerbasen

Beim Rechnen mit Polynomen in einer Variable spielen die Division mit Rest und der euklidische Algorithmus eine wesentliche Rolle. Die Theorie der Gröbnerbasen verallgemeinert diese Algorithmen für das Rechnen mit Polynomen in mehreren Variablen. Ein 1965 von Buchberger entwickeltes Verfahren ermöglicht die Konstruktion dieser Basen in endlich vielen Schritten. Der Algorithmus ist in vielen Computeralgebrasystemen (maple, Macaulay, Singular, ...) implementiert.

**Bezeichnungen:**  $F$  ... ein Körper

$\mathcal{D} = F[s_1, \dots, s_r]$  ... der Polynomring in  $r$  Variablen über  $F$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$  ... eine endliche nichtleere Teilmenge mit  $0 \notin \mathcal{F}$

$\langle \mathcal{F} \rangle$  ... das von  $\mathcal{F}$  erzeugte Ideal

$g \in \mathcal{D}$  ... ein Polynom

### Anwendungen:

- Entscheidungsprobleme wie ' $g \in \langle \mathcal{F} \rangle$ ?' aus der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie
- Gleichheit von polynomialen Idealen und Moduln mit unterschiedlichen Erzeugendensystemen (Systemtheorie: Gleichheit von durch verschiedene Gleichungssysteme gegebenen behaviors)
- Algebraische Gleichungssysteme (Lösbarkeit? Endliche Lösungsmenge? Berechnung von Lösungen)
- Lösen von Gleichungssystemen mit polynomialen Koeffizienten (Systemtheorie: Konstruktion minimaler Annihilatoren)
- Teilerfremdheit von Polynomen, Faktorisieren polynomialer Matrizen

## 2.6.1 Grundlegende Definitionen

Eine  $F$ -Basis von  $\mathcal{D}$  ist  $\{s^n, n \in \mathbf{N}^r\}$ . Um Grade von Polynomen in  $r$  Variablen zu definieren, brauchen wir eine zulässige Ordnung auf  $\mathbf{N}^r$ .

**Def.:** Eine Ordnung  $\leq$  auf  $\mathbf{N}^r$  heißt zulässig (vgl. Abschnitt 1.8), falls

1.  $\leq$  totale Ordnung
2.  $0 \leq n$  für alle  $n \in \mathbf{N}^r$
3.  $m \leq n \Rightarrow m + l \leq n + l$  für alle  $l \in \mathbf{N}^r$ .

**Def.:** Sei  $\leq$  eine zulässige Ordnung auf  $\mathbf{N}^r$  und  $0 \neq P = \sum_{m \in \mathbf{N}^r} p_m s^m \in \mathcal{D}$ . Grad ( $\deg$ ), Leitkoeffizient ( $lc$ ) und Leitterm ( $lt$ ) von  $P$  werden analog zu Abschnitt 1.8 definiert. Zusätzlich für  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F}) &= \{\deg(f), f \in \mathcal{F}\} \quad \text{und} \\ \deg\langle \mathcal{F} \rangle &= \{\deg(f), f \in \langle \mathcal{F} \rangle, f \neq 0\}. \end{aligned}$$

**Bem.:**  $\deg(\mathcal{F})$  ist eine endliche Menge,  $\deg\langle \mathcal{F} \rangle$  ist unendlich, da

$$n \in \deg\langle \mathcal{F} \rangle, m \geq_{cw} n \Rightarrow m \in \deg\langle \mathcal{F} \rangle.$$

**Def.:** Eine endliche Teilmenge  $\mathcal{G} \subset \langle \mathcal{F} \rangle$  heißt *Gröbnerbasis* von  $\langle \mathcal{F} \rangle$  (bezüglich einer gewählten zulässigen Ordnung), falls

$$\deg(\mathcal{G}) + \mathbf{N}^r = \deg\langle \mathcal{F} \rangle.$$

**Bem.:** In obiger Gleichung gilt immer ' $\subseteq$ ', entscheidend ist ' $\supseteq$ '.

Eine Gröbnerbasis enthält für jedes cw-minimale Element  $n$  aus  $\deg\langle \mathcal{F} \rangle$  einen Generator vom Grad  $n$ .

Da  $\mathcal{D}$  noethersch ist, besitzt jedes Ideal  $\{0\} \neq \langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \mathcal{D}$  eine Gröbnerbasis. Für die Konstruktion benötigt man eine Division mit Rest.

**Def.:** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ . Ein Ausdruck der Form

$$h = \sum_{f \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}^r} c_{nf} s^n f,$$

wobei fast alle  $c_{nf} \in F$  Null sind, heißt *zulässige Kombination* von  $\mathcal{F}$ , falls entweder  $h = 0$  oder

$$\deg(h) = \max\{\deg(s^n f), c_{nf} \neq 0\}.$$

**Bem.:** Ist  $h \neq 0$  eine zulässige Kombination von  $\mathcal{F}$ , so ist  $\deg(h) \in \deg(\mathcal{F}) + \mathbf{N}^r$ .

**Satz + Def.:** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$  und  $g \in \mathcal{D}$ . Dann gibt es eine zulässige Kombination  $h$  von  $\mathcal{F}$ , so daß entweder  $h = g$  oder  $\deg(g - h) \notin \deg(\mathcal{F}) + \mathbf{N}^r$ .

$\bar{g}^{\mathcal{F}} := \bar{g} := g - h$  heißt dann *ein Rest von  $g$  nach Division durch  $\mathcal{F}$* .

**Algorithmus:** Division mit Rest

Mit folgenden Verfahren kann  $h$  in endlich vielen Schritten berechnet werden:

1. Daten:  $g, \mathcal{F}$ . Setze  $h := 0$ .
2. Falls  $g \neq 0$  und  $\deg(g) \in \deg(\mathcal{F}) + \mathbf{N}^r$ , nächster Schritt, sonst: fertig.
3. Wähle  $n \in \mathbf{N}^r$  und  $f \in \mathcal{F}$ , so daß  $n + \deg(f) = \deg(g)$ . Setze

$$g := g - \frac{\text{lc}(g)}{\text{lc}(f)} s^n f, \quad h := h + \frac{\text{lc}(g)}{\text{lc}(f)} s^n f.$$

und gehe zum vorigen Schritt zurück.

**Bem.:** Für Polynome in einer Variable und  $\mathcal{F} = \{f\}$  (Hauptidealring!) fällt obiges Verfahren mit der üblichen Division mit Rest zusammen.

Der Rest  $\bar{g}$  ist i.a. nicht eindeutig bestimmt (auch bei fixierter zulässiger Ordnung).

**Satz:** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$  und  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{F} \rangle$ . Äquivalent:

1.  $\mathcal{F}$  ist Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$ .
2. Für alle  $g \in \mathcal{J}$  ist *jeder* Rest von  $g$  nach Division durch  $\mathcal{F}$  gleich Null.
3. Für alle  $g \in \mathcal{J}$  ist *ein* Rest von  $g$  nach Division durch  $\mathcal{F}$  gleich Null.

**Folgerung:** Ist  $\mathcal{J}$  ein Ideal in  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{G}$  eine Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$ , so ist für  $g \in \mathcal{D}$

$$g \in \mathcal{J} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{g}^{\mathcal{G}} = 0.$$

Insbesondere ist  $\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{J}$ , d.h. eine Gröbnerbasis ist insbesondere ein Erzeugendensystem des Ideals.

**Bem.:** Unter einer 'Basis' verstehen wir heute ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (EZS), Hilbert verwendete den Begriff für jedes EZS. In diesem Sinne ist auch die Bezeichnung 'Gröbnerbasen' zu verstehen.

## 2.6.2 Berechnung von Gröbnerbasen

**Def.:** Für  $n, m \in \mathbb{N}^r$  ist

$$\begin{aligned} n \vee m &:= (\max(n_i, m_i))_{i=1, \dots, r} \quad \text{und} \\ n \wedge m &:= (\min(n_i, m_i))_{i=1, \dots, r}. \end{aligned}$$

Für  $f, g \in \mathcal{D}$ ,  $\deg(f) = n$ ,  $\deg(g) = m$  heißt

$$S(f, g) := \text{lc}(g)s^{n \vee m - n}f - \text{lc}(f)s^{n \vee m - m}g$$

das *S-Polynom* von  $f$  und  $g$ .

**Bem.:** Für  $s^n, s^m \in \mathcal{D}$  ist  $s^{n \vee m} = \text{kgV}(s^n, s^m)$  und  $s^{n \wedge m} = \text{ggT}(s^n, s^m)$ . Es gilt  $S(f, g) = -S(g, f)$  und, falls  $S(f, g) \neq 0$ ,

$$\deg(S(f, g)) < n \vee m = \deg(f) \vee \deg(g).$$

OBdA seien  $f, g$  normiert (d.h.  $\text{lc}(f) = \text{lc}(g) = 1$ ). Dann ist das S-Polynom einfach

$$S(f, g) = s^{n \vee m - n}f - s^{n \vee m - m}g.$$

Insbesondere ist die rechte Seite obiger Gleichung keine zulässige Kombination von  $\{f, g\}$ , sondern sozusagen die minimale nicht zulässige Kombination.

**Satz:** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$  endlich und  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{F} \rangle$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $\mathcal{F}$  ist Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$ .
2. Für alle  $f, g \in \mathcal{F}$  ist ein Rest von  $S(f, g)$  nach Division durch  $\mathcal{F}$  gleich Null.

**Bem.:** Es kann also in endlich vielen Schritten überprüft werden, ob  $\mathcal{F}$  eine Gröbnerbasis ist. Sei etwa  $|\mathcal{F}| = k$ , dann gibt es  $\binom{k}{2}$  S-Polynome, die zu überprüfen sind.

**Folgerung:** Der folgende Algorithmus berechnet in endlich vielen Schritten eine Gröbnerbasis von  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{F} \rangle$ .

**Algorithmus:** Setze  $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$  und

$$\mathcal{F}_{i+1} := \mathcal{F}_i \cup \{ \overline{S(f, g)}^{\mathcal{F}_i}, f, g \in \mathcal{F}_i \setminus \{0\} \}$$

Das aktuelle  $\mathcal{F}_i$  wird also in jedem Schritt um die Reste der S-Polynome nach Division durch  $\mathcal{F}_i$  erweitert. Ist  $\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_j \cup \{0\}$ , sind also im  $j$ ten Schritt alle Reste der S-Polynome gleich Null, so soll der Algorithmus abbrechen und  $\mathcal{F}_j$  ist dann die gesuchte Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$ .

**Bem.:** Obiger Algorithmus kann noch erheblich verbessert werden, indem man in jedem Zeitschritt zusätzliche Vereinfachungen durchführt (überflüssige Polynome wegläßt etc.).

### 2.6.3 Reduzierte Gröbnerbasen

**Def.:** Eine Gröbnerbasis  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{J}$  heißt *minimal*, falls keine echte Teilmenge von  $\mathcal{G}$  ebenfalls Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$  ist.

**Def.:** Eine Gröbnerbasis  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{J}$  heißt *reduziert*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\mathcal{G}$  ist minimal.
2. Alle  $g \in \mathcal{G}$  sind normiert.
3. Für alle  $g \in \mathcal{G}$  ist  $\text{supp}(g) \cap \text{deg}(\mathcal{J}) = \{\text{deg}(g)\}$ .

**Bem.:** Entscheidend ist die dritte Bedingung. Sie besagt, daß der Grad von  $g$  das einzige Element des Trägers von  $g$  ist, das in  $\text{deg}(\mathcal{G}) + \mathbf{N}^r = \text{deg}(\langle \mathcal{G} \rangle) = \text{deg}(\mathcal{J})$  enthalten ist; alle weiteren Terme, die in  $g$  vorkommen, sind von der Form  $s^n$  mit  $n \in \mathbf{N}^r \setminus \text{deg}(\mathcal{J})$ .

**Satz:** Jedes Ideal  $\mathcal{J} \neq \{0\}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt eine eindeutig bestimmte reduzierte Gröbnerbasis (allerdings abhängig von der gewählten zulässigen Ordnung). Diese kann in endlich vielen Schritten berechnet werden.

**Bem.:** Die in Computeralgebrasystemen implementierten Algorithmen liefern automatisch reduzierte Gröbnerbasen, z.B. mit maple:

```
with(grobner); F:={poly1,...,polyk}; G:=gbasis(F,[...],tdeg);
```

Dabei ist [...] eine Liste der in F vorkommenden Unbestimmten. Maple verwendet als default die graduiert-lexikographische Ordnung (tdeg für 'total degree', mit der Option plex für 'pure lexicographic' kann man die übliche lexikographische Ordnung einstellen).

**Folgerung:** Sind  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  zwei Ideale in  $\mathcal{D}$  ungleich Null, so gilt  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$  genau dann, wenn  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  dieselbe reduzierte Gröbnerbasis besitzen (bezüglich einer fixen zulässigen Ordnung).

## 2.6.4 Verallgemeinerung auf Moduln

Anstelle von Idealen  $\mathcal{J}$  im Polynomring  $\mathcal{D}$  betrachtet man jetzt polynomiale Moduln  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{D}^{1 \times l}$ . Da Moduln über noetherschen Ringen immer endliche Erzeugendensysteme besitzen, kann man oBdA annehmen, daß es sich um den Zeilenmodul einer polynomialen Matrix  $R \in \mathcal{D}^{k \times l}$  handelt:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1 \times k} R \subseteq \mathcal{D}^{1 \times l}.$$

Eine  $F$ -Basis von  $\mathcal{D}^{1 \times l}$  ist  $\{s^n e_i, n \in \mathbf{N}^r, i = 1, \dots, l\}$ , wobei  $e_i$  den  $i$ -ten Standardbasisvektor bezeichnet. Jeder polynomiale Zeilenvektor  $\eta \in \mathcal{D}^{1 \times l}$  läßt sich in eindeutiger Weise als

$$\eta = \sum_{i=1}^l \sum_{n \in \mathbf{N}^r} \eta(i, n) s^n e_i$$

schreiben, wobei  $\eta(i, n)$  die Koeffizienten sind, und

$$\text{supp}(\eta) = \{(i, n), \eta(i, n) \neq 0\} \subset [l] \times \mathbf{N}^r$$

mit  $[l] = \{1, \dots, l\}$ . Um einem solchen Vektor  $\eta$  einen Grad zuzuordnen zu können, braucht man eine weitere Verallgemeinerung des Begriffes ‘zulässige Ordnung’.

**Def.:** Eine Ordnung  $\leq$  auf  $[l] \times \mathbf{N}^r$  heißt *zulässig*, falls

1.  $\leq$  totale Ordnung
2.  $(i, 0) \leq (i, n)$  für alle  $i \in [l], n \in \mathbf{N}^r$
3.  $(i, m) \leq (i, n) \Rightarrow (i, m+k) \leq (i, n+k)$  für alle  $i \in [l], k \in \mathbf{N}^r$ .

**Beispiel:**  $s^n e_i < s^m e_j \Leftrightarrow i < j$  oder  $(i = j \text{ und } n < m \text{ bzgl. einer zulässigen Ordnung auf } \mathbf{N}^r)$ .

**Def.:** Mit einer zulässigen Ordnung auf  $[l] \times \mathbf{N}^r$  kann man für ein  $0 \neq \eta \in \mathcal{D}^{1 \times l}$  wie üblich Grad, Leitkoeffizient und Leiterterm definieren, also

$$\text{deg}(\eta) = \max \text{supp}(\eta) \quad \text{usw.}$$

Analog zur Definition in Abschnitt 2.6.1 werden Gradmengen von endlichen Teilmengen und Moduln in  $\mathcal{D}^{1 \times l}$  definiert.

**Def.:** Eine endliche Teilmenge  $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$  eines Moduls  $\mathcal{M}$  wie oben heißt *Gröbnerbasis* von  $\mathcal{M}$ , falls

$$\deg(\mathcal{G}) + \mathbf{N}^r = \deg(\mathcal{M}).$$

Mit der Addition in obiger Gleichung ist

$$(i, n) + m := (i, n + m) \quad \text{für } i \in [l] \text{ und } n, m \in \mathbf{N}^r$$

gemeint. Ist  $\mathcal{M}$  der Zeilenmodul einer Matrix  $R$ , so ergeben die Elemente von  $\mathcal{G}$  als Matrix geschrieben die sogenannte (*Zeilen-*) *Gröbnermatrix*  $R^g$  von  $R$ .  $R^g$  ist also eine Matrix, deren Zeilen eine Gröbnerbasis des Zeilenmoduls von  $R^g$  (und somit auch von  $R$ ) sind. Interessiert man sich für den *Spalten*modul von  $R$ , so transponiert man  $R$ , berechnet die Zeilen-Gröbnermatrix von  $R^T$  und erhält dann durch nochmaliges Transponieren eine *Spalten-Gröbnermatrix*.

**Def.:** Das S-Polynom zweier polynomialer Zeilenvektoren  $f, g$  mit  $\deg(f) = (i, n)$ ,  $\deg(g) = (j, m)$  ist

$$S(f, g) = \begin{cases} \text{lc}(g)s^{n \vee m - n}f - \text{lc}(f)s^{n \vee m - m}g & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

**Bem.:** Man muß also bei der Berechnung von Gröbnermatrizen nur die S-Polynome jener Paare von Vektoren  $f, g$  betrachten, die ihren Leitern in derselben Komponente haben.

Die Division mit Rest sowie alle im vorigen Abschnitt angeführten Ergebnisse über Gröbnerbasen von Idealen lassen sich leicht auf Moduln übertragen.

Der *erweiterte* Gröbnerbasialgorithmus liefert (durch Speichern aller Divisionschritte im Übergang von  $R$  zu  $R^g$ ) auch die Transformationsmatrix  $X$  mit

$$XR = R^g.$$

Ebenso kann man  $R$  wieder durch  $R^g$  dividieren und erhält dann auch die 'Rücktransformation'

$$YR^g = R.$$

Die Matrizen  $X$  und  $Y$  sind i.a. nicht quadratisch. Es gilt zwar

$$(YX - I)R = 0 \quad \text{und} \quad (XY - I)R^g = 0,$$

aber da i.a. weder  $R$  noch  $R^g$  maximalen Zeilenrang besitzen, kann man nicht schließen, daß  $XY = I$  oder  $YX = I$ .

Warum man auch Matrizen ohne vollen Zeilenrang zulassen muß, zeigt folgendes Beispiel: Betrachte 3d behavior

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^3, \text{ es gibt ein } x \in \mathcal{A} \text{ mit } w = Mx := \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} x\}.$$

Zur Elimination der latenten Variable  $x$  berechnet man einen minimalen Annihilator von  $M$ ,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist laut Abschnitt 2.3.2  $\mathcal{B} = \text{ke}(R)$ . Der Rang von  $R$  ist zwei, andererseits kann  $\mathcal{B}$  nicht als Lösungsraum von weniger als drei Gleichungen geschrieben werden, wie man am kontinuierliches Analogon dieses Beispiels sieht:  $w$  ist genau dann Gradient einer Funktion, wenn  $\text{rot}(w) = 0$ .

**Bem.:** Phänomene dieser Art treten erst ab  $r \geq 3$  auf. Für 1d und 2d Systeme kann man hingegen oBdA annehmen, daß die repräsentierenden Matrizen maximalen Zeilenrang besitzen.

## 2.6.5 Lösen linearer Gleichungssysteme mit polynomialen Koeffizienten

Betrachtet werde Gleichungssysteme  $xR = \xi$  mit einer Matrix  $R \in \mathcal{D}^{k \times l}$  und einer vorgegebenen ‘rechten Seite’  $\xi \in \mathcal{D}^{1 \times l}$ . Gesucht ist die ‘Lösung’  $x \in \mathcal{D}^{1 \times k}$ , also das Urbild von  $\xi$  unter der  $\mathcal{D}$ -linearen Abbildung

$$R: \mathcal{D}^{1 \times k} \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times l}, \quad x \mapsto xR.$$

Dazu muß zuerst überprüft werden, ob  $\xi$  überhaupt im Bild dieser Abbildung enthalten ist. Falls nein, ist das Gleichungssystem unlösbar. Falls ja, braucht man ein Urbild  $x_0$  von  $\xi$  (partikuläre Lösung) und ein EZS des Kerns von  $R$  (allgemeine Lösung der homogenen Gleichung; bei Hilbert: *Syzygienmodul*). Ist  $\mathcal{F}$  so ein EZS, dann läßt sich jede Lösung von  $xR = \xi$  als

$$x = x_0 + \sum_{f \in \mathcal{F}} c_f f$$

mit Polynomen  $c_f \in \mathcal{D}$  schreiben.

### Lösbarkeit und partikuläre Lösung

Man berechnet eine Gröbnermatrix  $R^g$  von  $R$  und die Transformationsmatrix  $X$  mit  $R^g = XR$ . Dann wird  $\xi$  durch  $R^g$  dividiert. Ist der Rest  $\bar{\xi}^{R^g}$  ungleich Null, so ist  $\xi$  nicht im Zeilenmodul von  $R$  enthalten, und das Gleichungssystem ist unlösbar. Ist der Rest gleich Null, so ist  $\xi$  eine zulässige Kombination der Zeilen von  $R^g$ , d.h. es gibt ein  $\eta$ , so daß

$$\xi = \eta R^g = \eta X R.$$

Somit ist  $\eta X =: x_0$  eine partikuläre Lösung von  $xR = \xi$ .

## Syzygienmoduln/Minimale Annihilatoren

Gesucht ist die allgemeine Lösung von  $xR = 0$ , also ein EZS des Kerns von  $R$ , mit anderen Worten, ein minimaler Annihilator von  $R$  (Abschnitt 2.3.2). Dazu betrachtet man zunächst das Gleichungssystem  $yR^g = 0$ . OBdA seien die Zeilen von  $R^g$  normiert. Dann ist das S-Polynom für zwei Zeilen  $f, g$  von  $R^g$  mit  $\deg(f) = (i, n)$  und  $\deg(g) = (i, m)$  (Leitterm in derselben Komponente)

$$S(f, g) = s^{n \vee m - n} f - s^{n \vee m - m} g.$$

Andrerseits ist der Rest von  $S(f, g)$  nach Division durch  $R^g$  gleich Null (da  $R^g$  Gröbnermatrix ist), also ist  $S(f, g)$  zulässige Kombination von  $R^g$ , d.h. es gibt einen Zeilenvektor  $\eta_{fg}$  mit

$$S(f, g) = \eta_{fg} R^g$$

mit  $\deg((\eta_{fg})_j (R^g)_{j-}) < (i, n \vee m)$  für alle  $j$ . Definiere

$$u_{fg} = \eta_{fg} - s^{n \vee m - n} e_f + s^{n \vee m - m} e_g,$$

wobei  $e_f$  den zu  $f$  gehörenden Standardbasisvektor bezeichnet (ist  $f$  etwa die  $j$ -te Zeile von  $R^g$ , so ist  $e_f = e_j$ , analog für  $e_g$ ). Dann gilt

$$u_{fg} R^g = \eta_{fg} R^g - s^{n \vee m - n} f + s^{n \vee m - m} g = S(f, g) - S(f, g) = 0.$$

Die  $u_{fg}$  sind also sicher im Kern von  $R^g$  enthalten.

**Satz:** Die oben konstruierten polynomialen Zeilenvektoren  $u_{fg}$  bilden ein EZS des Kerns von  $R^g$ .

**Folgerung:** Ist  $U$  eine Matrix, die die  $u_{fg}$  als Zeilen enthält, dann ist laut vorigem Satz  $U$  ein minimaler Annihilator von  $R^g$ .

**Satz:** Ist  $U$  wie oben konstruiert und sind  $X, Y$  die Transformationsmatrizen aus dem erweiterten Gröbnerbasialgorithmus, so ist

$$\begin{pmatrix} UX \\ YX - I \end{pmatrix}$$

ein minimaler Annihilator von  $R$ . Mit anderen Worten: Die Zeilen dieser Matrix sind ein EZS des Kerns von  $R$ .

**Bem.:** Insbesondere gibt obiger Satz an, wie man zu einer beliebigen polynomialen Matrix  $R$  einen minimalen Annihilator konstruiert.

## Algorithmus

Die allgemeine Lösung von  $xR = \xi$  erhält man folgenderweise:

1. Berechne eine Gröbnermatrix  $R^g$  und Transformationsmatrizen  $X, Y$  mit  $XR = R^g$  und  $YR^g = R$ .
2. Teste, ob  $\bar{\xi}^{R^g} = 0$ .  
Falls nein: Gleichungssystem unlösbar.  
Falls ja: Die Division mit Rest durch  $R^g$  liefert ein  $\eta$  mit  $\xi = \eta R^g$  und  $x_0 = \eta X$  ist dann eine partikuläre Lösung von  $xR = 0$ .
3. Berechne eine Matrix  $U$  wie oben beschrieben. Ein EZS des Lösungsmoduls der homogenen Gleichung sind die Zeilen der Matrizen  $UX$  und  $YX - I$ , d.h. die allgemeine Lösung von  $xR = \xi$  hat die Gestalt

$$x = x_0 + c \begin{pmatrix} UX \\ YX - I \end{pmatrix},$$

wobei der polynomiale Zeilenvektor  $c$  frei wählbar ist.

**Bem.:** Beim Lösen des homogenen Problems  $xR = 0$  (bzw. bei der Berechnung minimaler Annihilatoren) könnte man vermuten, daß es ausreicht, das Gleichungssystem als System über dem Quotientenkörper der rationalen Funktionen zu betrachten, dort mit der üblichen Elimination nach Gauß zu lösen und sich ergebende rationale Lösungen durch Multiplikation mit einem gemeinsamen Nenner wieder polynomial zu machen. Ein Gegenbeispiel dazu ist das schon erwähnte ' $w = \nabla x \Leftrightarrow \text{rot}(w) = 0$ '. Die Matrix  $M = (s_1, s_2, s_3)^T$  hat drei Komponenten und Rang eins, der Lösungsraum (über dem Quotientenkörper) hat demnach Dimension zwei und kann auch immer durch eine Basis mit zwei Elementen erzeugt werden. Der Witz ist, daß man zum Erzeugen des Lösungsmoduls über dem Polynomring immer mindestens drei Erzeugende braucht. Diese Information geht verloren, wenn man das System über den rationalen Funktionen löst.

### 2.6.6 Dimension von Idealen

**Def.:** Sei  $\mathcal{J} \subset \mathcal{D} = F[s_1, \dots, s_r]$  ein echtes Ideal (d.h.  $\mathcal{J} \neq \mathcal{D}$ ) und sei  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  eine Teilmenge von  $\{s_1, \dots, s_r\}$ . Dann heißt  $\{u_1, \dots, u_n\}$  *unabhängig bezüglich  $\mathcal{J}$* , falls

$$\mathcal{J} \cap F[u_1, \dots, u_n] = \{0\}.$$

Die *Dimension* von  $\mathcal{J}$  ist

$$\dim(\mathcal{J}) = \max\{|U|, U \subseteq \{s_1, \dots, s_r\} \text{ unabhängig bezüglich } \mathcal{J}\}.$$

**Bem.:** Dabei ist  $\emptyset$  immer unabhängig bezüglich eines echten Ideals  $\mathcal{J}$ , da

$$\mathcal{J} \cap F[\emptyset] := \mathcal{J} \cap F = \{0\}$$

einfach bedeutet, daß  $\mathcal{J}$  keine Konstanten ungleich Null enthält, was äquivalent zu  $\mathcal{J} \neq \mathcal{D}$  ist. Im Polynomring mit  $r$  Unbestimmten gilt für die Dimension eines echten Ideals  $\mathcal{J}$  also:

- $0 \leq \dim(\mathcal{J}) \leq r$
- $\dim(\mathcal{J}) = r \Leftrightarrow \mathcal{J} = \{0\}$
- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \dim(\mathcal{I}) \geq \dim(\mathcal{J})$ .

Als Konvention setzt man die Dimension von  $\mathcal{D}$  gleich  $-1$ .

**Bem.:** Der Dimensionsbegriff ist eng verknüpft mit der Dimension von algebraischen Varietäten, das sind die Nullstellenmengen von polynomialen Idealen im algebraischen Abschluß des Körpers  $F$ . Ist also z.B.  $F = \mathbf{R}$  und  $\mathcal{J} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  das von den  $f_i \in \mathbf{R}[s_1, \dots, s_r]$  erzeugte Ideal, so ist die dazugehörige Varietät

$$\mathcal{V}(\mathcal{J}) = \{\xi \in \mathbf{C}^r, f_1(\xi) = \dots = f_k(\xi) = 0\}$$

die gemeinsame Nullstellenmenge der Polynome  $f_i$  in  $\mathbf{C}^r$ . Die oben eingeführte Dimension des Ideals  $\mathcal{J}$  stimmt dann mit dem intuitiven Dimensionsbegriff ('dim(Punkt)=0, dim(Kurve)=1, dim(Fläche)=2' usw.) überein.

Im Spezialfall  $r = 2$  gibt es folgende Fälle:

1.  $\dim(\mathcal{J}) = 2$ , dann ist  $\mathcal{J} = \{0\}$  und  $\mathcal{V}(\mathcal{J}) = \mathbf{C}^2$ .
2.  $\dim(\mathcal{J}) = 1$ , dann gibt es folgende Unterfälle:
  - (a)  $\mathcal{J}$  enthält nur Polynome, die sowohl von  $s_1$  als auch von  $s_2$  abhängen, dann gibt es eine irreduzible Komponente von  $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ , die eine Kurve in  $\mathbf{C}^2$  ist
  - (b)  $\mathcal{J}$  enthält Polynome, die nur von  $s_1$  abhängen, aber keine, die nur von  $s_2$  abhängen, dann gibt es nur endlich viele Werte von  $\xi_1$ , die in  $\mathcal{V}(\mathcal{J})$  auftreten können und  $\mathcal{V}(\mathcal{J})$  ist eine endliche Schar von Geraden
  - (c) wie (b) mit vertauschten Rollen von  $s_1$  und  $s_2$
3.  $\dim(\mathcal{J}) = 0$ , dann enthält  $\mathcal{J}$  sowohl Polynome, die nur von  $s_1$  abhängen als auch Polynome, die nur von  $s_2$  abhängen,  $\mathcal{V}(\mathcal{J})$  ist dann eine endliche Menge von Punkten in  $\mathbf{C}^2$ .
4.  $\dim(\mathcal{J}) = -1$ , dann ist  $\mathcal{J} = \mathbf{R}[s_1, s_2]$ , insbesondere  $1 \in \mathcal{J}$ , und somit  $\mathcal{V}(\mathcal{J}) = \emptyset$ .

**Satz:** Ist  $\mathcal{G}$  eine Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}$  bezüglich der lexikographischen Ordnung, so ist

$$\mathcal{G}_j := \mathcal{G} \cap F[s_j, \dots, s_r]$$

eine Gröbnerbasis von  $\mathcal{J}_j := \mathcal{J} \cap F[s_j, \dots, s_r]$  für  $j = 1, \dots, r$ .

**Bem.:** Mit diesem Satz kann man testen, ob eine bestimmte Teilmenge  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  von  $\{s_1, \dots, s_r\}$  unabhängig bezüglich  $\mathcal{J}$  ist:

Man permutiert  $\{s_1, \dots, s_r\}$  so, daß  $\{u_1, \dots, u_n\}$  'hinten' stehen, wählt die lexikographische Ordnung und berechnet eine Gröbnerbasis  $0 \notin \mathcal{G}$  von  $\mathcal{J}$ . Man betrachtet dann

$$\mathcal{G} \cap F[u_1, \dots, u_n].$$

Falls diese Menge leer ist, ist  $U$  unabhängig. Auf diese Weise kann man die Dimension von  $\mathcal{J}$  bestimmen.

## 2.7 Anwendungen in der Systemtheorie

### 2.7.1 Anfangswertgebiete

Ist  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^p, Py = Qu \right\}$  behavior mit I-O-Struktur, so findet man ein Anfangswertgebiet  $G$ , das das Cauchy-Problem  $Py = Qu, y|_G = x$  für alle Inputs  $u$  und alle Anfangswerte  $x$  eindeutig lösbar macht (Abschnitt 2.5), indem man eine Gröbnermatrix  $P^g$  von  $P$  berechnet. Insbesondere konstruiert man dabei die Gradmenge  $\deg(P^g) \subset [p] \times \mathbf{N}^r$ , das sind die Grade der Zeilen von  $P^g$ . Die Gradmenge des Zeilenmoduls von  $P$  ist dann

$$G' := \deg(P^g) + \mathbf{N}^r.$$

Das Komplement  $G := [p] \times \mathbf{N}^r \setminus G'$  ist dann analog zur SISO-Situation ein geeignetes Anfangswertgebiet.

### 2.7.2 Elimination latenter Variablen

Dazu braucht man (Abschnitt 2.3.2) minimale Annihilatoren, diese werden mithilfe der Gröbnerbasistheorie (Abschnitt 2.6.5) konstruiert.

## 2.7.3 Beobacht- und Kontrollierbarkeit von 2d Behaviors

### Kontrollierbarkeit

1d Situation: Sei  $\mathcal{B} = \{w \in (F^N)^l, Rw = 0\}$  der Lösungsraum eines Systems gewöhnlicher Differenzgleichungen,  $R$  also eine  $k \times l$  Matrix von Polynomen in einer Variable. OBdA habe  $R$  maximalen Zeilenrang, also  $\text{Rang}(R) = k$ . Außerdem sei  $k < l$ .

**Def.:**  $\mathcal{B}$  heißt *kontrollierbar*, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\text{Rang}(R(\xi)) = \text{Rang}(R) = k$  für alle  $\xi \in \mathbf{C}$ .
2. Die  $k \times k$  Minoren von  $R$  besitzen keine gemeinsame Nullstelle in  $\mathbf{C}$ .
3. Die  $k \times k$  Minoren von  $R$  sind teilerfremd.
4.  $R$  ist links prim, d.h. in jeder Faktorisierung  $R = DR_1$  mit einer quadratischen Matrix  $D$  ist  $D$  unimodular.

**Bem.:** Zusammenhang mit dem üblichen Kontrollierbarkeitsbegriff: Sei  $sx = Ax + Bu$  die Steuergleichung in einer Zustandsraumrealisierung, dann ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}, sx = Ax + Bu \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}, (-B, sI - A) \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Kontrollierbarkeit von  $\mathcal{B}$  bedeutet dann Linksprimheit von  $R = (-B, sI - A)$  bzw. Linkskoprimheit von  $B$  und  $sI - A$ , also die übliche Kontrollierbarkeitsbedingung nach Rosenbrock.

**Bem.:** Der Fall  $k = l$  wurde ausgeschlossen, da  $\mathcal{B} = \text{ke}(R)$  mit einer quadratischen Matrix  $R$  genau dann kontrollierbar ist, wenn  $R$  unimodular ist, dann ist aber  $\mathcal{B} = \{0\}$ , also trivial.

Verallgemeinert man obige Definition auf 2d behaviors, so geht die Äquivalenz der vier Aussagen verloren und man erhält zwei verschiedene Kontrollierbarkeitskonzepte. Sei  $\mathcal{B} = \{w \in (F^{N^2})^l, Rw = 0\}$  mit  $R \in F[s_1, s_2]^{k \times l}$  von maximalem Zeilenrang und  $k < l$ .

**Def.:**  $\mathcal{B}$  heißt *stark kontrollierbar*, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\text{Rang}(R(\xi_1, \xi_2)) = \text{Rang}(R) = k$  für alle  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{C}^2$ .

2. Die  $k \times k$  Minoren von  $R$  besitzen keine gemeinsame Nullstelle in  $\mathbf{C}^2$ .  
( $R$  heißt dann *links nullprim*.)

$\mathcal{B}$  heißt *schwach kontrollierbar*, falls die äquivalenten Bedingungen

1. Die  $k \times k$  Minoren von  $R$  sind teilerfremd,
2.  $R$  ist *links faktorprim*, d.h. in jeder Faktorisierung  $R = DR_1$  mit quadratischem  $D$  ist  $D$  unimodular,

erfüllt sind.

**Folgerung:** Man kann testen, ob eine gegebene Matrix  $R$  links null- oder faktorprim ist, indem man die Dimension des Ideals  $\mathcal{J}$ , das von den  $k \times k$  Minoren erzeugt wird, betrachtet. Es gilt:

$$\begin{aligned} R \text{ nullprim} &\Leftrightarrow \dim(\mathcal{J}) = -1 \\ R \text{ faktorprim} &\Leftrightarrow \dim(\mathcal{J}) = 0. \end{aligned}$$

**Bem.:** Interpretation der Kontrollierbarkeitsbegriffe: Kontrollierbarkeit ist im wesentlichen die Verknüpfbarkeit von Trajektorien, d.h. im 1d Fall: Sind  $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$  zwei Systemtrajektorien, so gibt es  $N \in \mathbf{N}$  und eine ‘verbindende’ Systemtrajektorie  $w \in \mathcal{B}$ , so daß

$$w(n) = \begin{cases} w_1(n) & \text{für } n \leq M \\ w_2(n) & \text{für } n \geq M + N. \end{cases}$$

Aus einer beliebigen ‘Vergangenheit’  $w_1$  kann also durch Steuerung  $w$  ab einem beliebigen Zeitpunkt  $M$  in endlicher Zeit  $N$  jede beliebige ‘Zukunft’  $w_2$  angesteuert werden.

Bei 2d Systemen fehlen die Konzepte ‘Vergangenheit–Zukunft’. Schwache Kontrollierbarkeit bedeutet hier, daß für zwei beliebige Teilmengen  $G_1, G_2 \subset \mathbf{N}^2$  mit  $d(G_1, G_2) \geq N$  ( $d$  bezeichnet hier die euklidische Distanz zweier Mengen, das ist der minimale euklidische Abstand zwischen einem Element aus  $G_1$  und einem Element aus  $G_2$ ) und zwei Trajektorien  $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$  eine verbindende Trajektorie  $w \in \mathcal{B}$  existiert mit

$$w|_{G_1} = w_1|_{G_1} \quad \text{und} \quad w|_{G_2} = w_2|_{G_2}.$$

Bei starker Kontrollierbarkeit kann man die Voraussetzung  $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$  abschwächen zu  $w_i|_{G_i} \in \mathcal{B}|_{G_i}$  für  $i = 1, 2$ , d.h.  $w_1$  und  $w_2$  müssen keine Systemtrajektorien sein, sondern nur lokal, also auf  $G_1$  bzw.  $G_2$ , die Systemgleichungen erfüllen.

## Beobachtbarkeit

1d Situation: Sei  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, R_1 w_1 = R_2 w_2 \right\}$  1d behavior mit einer beliebigen Partition  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ,  $R = (R_1, -R_2)$  mit einer Matrix  $R_1$  von vollem Spaltenrang (nicht unbedingt eine I-O-Struktur, d.h.  $\text{Rang}(R_1) =: q$  muß nicht gleich  $\text{Rang}(R)$  sein).

**Def.:**  $w_1$  heißt *beobachtbar aus*  $w_2$ , falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\text{Rang}(R_1(\xi)) = \text{Rang}(R_1) = q$  für alle  $\xi \in \mathbf{C}$ .
2. Die  $q \times q$  Minoren von  $R_1$  besitzen keine gemeinsame Nullstelle in  $\mathbf{C}$ .
3. Die  $q \times q$  Minoren von  $R_1$  sind teilerfremd.
4.  $R_1$  ist rechts prim, d.h. in jeder Faktorisierung  $R_1 = R'_1 D$  mit einer quadratischen Matrix  $D$  ist  $D$  unimodular.

**Bem.:** Zusammenhang mit dem üblichen Beobachtbarkeitsbegriff: Sei  $sx = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  eine Zustandsraumrealisierung, dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ (u, x, y)^T, sx = Ax + Bu, y = Cx + Du \right\} \\ &= \left\{ (u, x, y)^T, \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} B & 0 \\ -D & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Beobachtbarkeit von  $x$  aus  $\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$  bedeutet dann Rechtsprimheit von

$$\begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix}$$

bzw. Rechtskoprimheit von  $sI - A$  und  $C$ , also wieder die bekannte Beobachtbarkeitsbedingung nach Rosenbrock.

**Bem.:** Hier sind auch quadratische Matrizen  $R_1$  zugelassen, wobei Beobachtbarkeit dann Unimodularität von  $R_1$  bedeutet. Es gibt dann nur einen  $q \times q$  Minor von  $R_1$ , nämlich  $\det(R_1)$ , und obige Bedingungen 2 und 3 sind als 'det( $R_1$ ) besitzt keine Nullstelle in  $\mathbf{C}$ ' bzw. 'det( $R_1$ ) ist eine Konstante ungleich Null' zu interpretieren.

Bei der Verallgemeinerung auf 2d behaviors zerfallen die vier Bedingungen wieder in zwei Gruppen. Sei  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in (F^{\mathbf{N}^2})^{q+(l-q)}, R_1 w_1 = R_2 w_2 \right\}$  mit  $R_1 \in F[s_1, s_2]^{k \times q}$  von maximalem Spaltenrang.

**Def.:**  $w_1$  heißt *stark beobachtbar* aus  $w_2$ , falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\text{Rang}(R_1(\xi_1, \xi_2)) = \text{Rang}(R_1) = q$  für alle  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{C}^2$ .
2. Die  $q \times q$  Minoren von  $R_1$  haben keine gemeinsame Nullstelle in  $\mathbf{C}^2$ .  
( $R_1$  *rechts nullprim.*)

$w_1$  heißt *schwach beobachtbar* aus  $w_2$ , falls die äquivalenten Bedingungen

1. Die  $q \times q$  Minoren von  $R_1$  sind teilerfremd,
2.  $R_1$  ist *rechts faktorprim*, d.h. in jeder Faktorisierung  $R_1 = R'_1 D$  mit quadratischem  $D$  ist  $D$  unimodular,

erfüllt sind.

Wie oben kann man eine Matrix  $R_1$  auf Null- und Faktorprimheit überprüfen, indem man die Dimension des Ideals, das von den  $q \times q$  Minoren erzeugt wird, untersucht.

**Bem.:** Interpretation der Beobachtbarkeitsbegriffe:  $w_1$  ist stark beobachtbar aus  $w_2$ , wenn  $w_2$   $w_1$  eindeutig bestimmt, d.h.

$$w_2 = w'_2 \Rightarrow w_1 = w'_1 \quad \text{für } R_1 w_1 = R_2 w_2 \text{ und } R_1 w'_1 = R_2 w'_2.$$

Wegen der Linearität bedeutet das:  $w_2 = 0$  soll  $w_1 = 0$  implizieren bzw.

$$\{w_1, R_1 w_1 = 0\} = \{0\}.$$

Via Dualität bedeutet dies für den Zeilenraum von  $R_1$

$$F[s_1, s_2]^{1 \times k} R_1 = F[s_1, s_2]^{1 \times q}.$$

Dazu muß die reduzierte Gröbnermatrix von  $R_1$  bis auf eine Vertauschung von Zeilen gleich der Einheitsmatrix sein, also eine Matrix  $X$  mit  $X R_1 = I_q$  existieren und somit ist

$$\text{Rang}(R_1(\xi)) \geq \text{Rang}(X(\xi)R_1(\xi)) = \text{Rang}(I_q) = q$$

für alle  $\xi \in \mathbf{C}^2$  konstant gleich  $q$ .

$w_1$  ist schwach beobachtbar aus  $w_2$ , wenn  $w_2$   $w_1$  bis auf endlich viele Anfangswerte determiniert, d.h. legt man  $w_2$  fest, so gibt es nur noch endlich viele Wahlmöglichkeiten, um  $w_1$  festzulegen. Dazu muß gelten:

$$\{w_1, R_1 w_1 = 0\} \text{ ist endlichdimensional als } F\text{-Vektorraum,}$$

also zwar nicht unbedingt  $\{0\}$ , aber zumindest 'klein' in obigem Sinne. Man kann zeigen, daß diese Forderung äquivalent zur Rechtsfaktorprimheit von  $R_1$  ist.

# Literatur

## 2D Signalverarbeitung

- Dudgeon D.E., R.M. Mersereau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1983
- Lim J.S., *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice Hall, 1990

## Zustandsraummodelle (historisch)

- Roesser R.P., A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing, *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. AC-20, No. 1, pp. 1–10, Feb. 1975
- Eising R., *2-D Systems, An Algebraic Approach*, Mathematical Centre Tracts 125, 1980
- Fornasini E., G. Marchesini
  - State-Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters, *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. AC-21, No. 4, pp. 484–492, Aug. 1976
  - Doubly-Indexed Dynamical Systems: State-Space Models and Structural Properties, *Math. Systems Theory* 12, pp. 59–72, 1978

## Mehrdimensionale Systeme

- Bose N.K., *Applied Multidimensional Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold, 1982
- Bose N.K. (Ed.), *Multidimensional Systems Theory*, Mathematics and Its Applications, Reidel, 1985
- Kaczorek T., *Two-Dimensional Linear Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 68, Springer, 1985
- Morf M., B.C. Lévy, S.Y. Kung, T. Kailath, New Results in 2-D Systems Theory
  - Part I: 2-D Polynomial Matrices, Factorization, and Coprimeness, *Proc. of the IEEE*, Vol. 65, No. 6, pp. 861–872, June 1977
  - Part II: 2-D State-Space Models—Realization and the Notions of Controllability, Observability, and Minimality, *Proc. of the IEEE*, Vol.65, No. 6, pp. 945–961, June 1977

## Gröbnerbasen

- Becker T., V. Weispfenning, *Gröbner Bases, A Computational Approach to Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 141, Springer, 1993
- Buchberger B., Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, in N.K. Bose (Ed.), *Multidimensional Systems Theory*, Reidel, 1985
- Pauer F., Gröbner Basen und ihre Anwendungen, in S. Chatterji et al. (Ed.), *Jahrbuch Überblicke Mathematik* 1991, Vieweg, 1991