

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG
BERICHT NR. 19
DER KALMAN-FILTER UND SEINE FEHLERPROZESSE
UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER AUSWIRKUNG VON MODELLFEHLERN

M. STÖHR

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE
6750 KAISERSLAUTERN

AUGUST 1986

Der Kalman-Filter und seine Fehlerprozesse unter besonderer
Berücksichtigung der Auswirkung von Modellfehlern

M.Stöhr

Ich bedanke mich besonders bei Herrn Prof. Dr. H.Neunzert
für die Anregung zu dieser Arbeit

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel 1: Einleitung

- 1.1 Allgemeine Überlegungen zur Modellbildung 1
- 1.2 Modelle zur Behandlung von Zeitreihen 3
- 1.3 Lineare Zustandsraum-Modelle, Filterung und Kontrolle 5

Kapitel 2: Optimale Schätzer, bedingte Erwartung und lineare
kleinste-Quadrate Schätzer

- 2.1 Begriffsbildung und Problemformulierung 9
- 2.2 Bedingte Erwartung als optimaler Schätzer 11
- 2.3 Normalverteilung und Linearität des optimalen Schätzers 17
- 2.4 Lineare kleinste-Quadrate Schätzer 17

Kapitel 3: Kalman-Filter : Herleitung und Eigenschaften

- 3.1 Herleitung des Kalman-Filters und Bemerkungen 25
- 3.2 Fehlerprozesse beim Kalman-Filter und Tests 46
- 3.3 Stabilität des Kalman-Filters
und die Begriffe beobachtbar und kontrollierbar 56

Kapitel 4: Einfluß von Modellfehlern auf die Fehlerprozesse
des Kalman-Filters 60

- 4.1 Beschreibung der Fehlerprozesse 61
- 4.2 Erwartungswerte der Fehlerprozesse 67
- 4.3 Kovarianzmatrizen der Fehlerprozesse 81
- 4.4 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Kovarianzmatrizen 95

Anhang A: Pseudoinverse einer Matrix 97

Anhang B: Ausgeartete Normalverteilungen und Konfidenzbereiche
für mehrdimensionale Normalverteilungen 99

Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Algorithmus von Kalman zur Schätzung von gegenwärtigen und zukünftigen Zuständen in zeitdiskreten dynamischen Systemen. In der Literatur ist dieser Algorithmus allgemein als Kalman-Filter bekannt.

Im Vordergrund der Betrachtungen stehen dabei die Schätzfehler des Kalman-Filters, insbesondere für den Fall, daß das benutzte Modell nicht mit dem realen System übereinstimmt. Es wird der Frage nachgegangen, welche Einflüsse die Modellfehler auf die Schätzfehler des Kalman-Filters haben. Dies ist ein wichtiger Gesichtspunkt, den man bei der Anwendung des Kalman-Filters beachten sollte, da man im Allgemeinen nicht davon ausgehen kann, daß Modell und reales System übereinstimmen.

Um diese Fragestellung stärker zu motivieren, werden im nächsten Abschnitt ein paar allgemeine Überlegungen zur Modellbildung angestellt. Danach werden einige Modelle zur Behandlung von Zeitreihen angesprochen. Zur Hinführung auf den Kalman-Filter wird dann in Kapitel 2 das Problem des "Schätzens" etwas allgemeiner behandelt. In Kapitel 3 erfolgt dann eine Herleitung des Kalman-Filters und die Untersuchung der Fehlerprozesse für den Fall, daß Modell und reales System übereinstimmen. Da für die zeitliche Entwicklung der Fehlerprozesse die Stabilität des Kalman-Filters von Bedeutung ist, wird auch diese besprochen. In Kapitel 4 werden schließlich die Fehlerprozesse für den Fall behandelt, daß Modell und reales System nicht übereinstimmen.

Kapitel 1 : Einleitung

1.1 Allgemeine Überlegungen zur Modellbildung

Bei Problemstellungen aus Bereichen wie zum Beispiel Technik, Wirtschaft, Medizin u.s.w. interessiert man sich für gewisse Ausschnitte der "realen" Welt. Ein solcher Ausschnitt, der im folgenden als **System** bezeichnet wird, besteht aus bestimmten Objekten und deren Beziehungen untereinander. Ist auch die Zeit Bestandteil des Systems, so spricht man von einem dynamischen System, andernfalls von einem statischen System.

Um das Problem mit mathematischen Methoden zu behandeln, ist es notwendig, alle relevanten Objekte des Systems und deren Zusammenhänge mathematisch zu beschreiben, d.h. ein dem System adäquates mathematisches **Modell** zu entwickeln.

Die Objekte eines Systems kann man in Abhängigkeit von der Problemstellung in drei Gruppen einteilen, und zwar in Inputgrößen, Outputgrößen und interne Größen. Mit Inputgrößen (kurz: Input) seien dabei diejenigen Objekte bezeichnet, deren Einfluß auf das System von Interesse ist. Die Werte dieser Objekte kann man im allgemeinen von außen direkt beeinflussen. Eine besondere Einflußgröße bei dynamischen Systemen ist die Zeit.

Man interessiert sich nun im allgemeinen nicht für den Einfluß der Inputgrößen auf alle Objekte des Systems, sondern nur für deren Einfluß auf ganz bestimmte Objekte. Diese Objekte seien als Outputgrößen (kurz: Output) bezeichnet. Alle anderen Objekte, die zwar Bestandteil des Systems sind, für die man sich aber nicht direkt interessiert, seien als interne Größen bezeichnet.

Ein mathematisches Modell soll nun dazu dienen, Aussagen über das Input-Output-Verhalten des System zu machen, d.h. die Antwort auf folgende oder ähnliche Fragen zu finden:

- Welchen Output erhält man bei vorgegebenen Input?
- Welchen Input muß man wählen, um einen vorgegebenen Output zu erhalten?
- Bei welchem Input erhält man den (einen) "optimalen" Output?

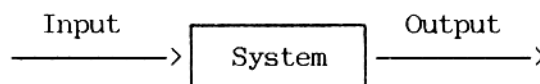
In den Problemstellungen sind zumeist die Input- und Outputgrößen charakterisiert. Um ein Modell zu konstruieren, muß man nun diese Größen analysieren, um dadurch das Gesamtsystem, d.h. alle Größen und Beziehungen, die für die Fragestellung relevant sind, zu erhalten. Zur Entwicklung eines Modells ist dabei zu untersuchen, ob allgemeine Ge-

setzmäßigkeiten der betreffenden Wissenschaft anwendbar sind. Bei einfachen Systemen (vor allem denen der elementaren Physik) gibt es meist so treffende und geläufige mathematische Beschreibungen, daß einem der Unterschied zwischen "System" und "Modell" kaum mehr bewußt wird. Je komplexer ein System ist, umso mehr muß man sich darüber im klaren sein, daß ein Modell nur eine mehr oder weniger gute Beschreibung des Systems (zur Beantwortung spezieller Fragen) sein kann.

Aufgrund der zufälligen Natur vieler Phänomene läßt sich nicht immer ein vollständiges deterministisches Modell entwickeln, d.h. ein Modell in dem der Output eindeutig durch den Input (zusammen mit gewissen Randbedingungen) bestimmt wird. Jedoch auch wenn alle Objekte und Beziehungen des Systems als deterministisch angesehen werden können, so ist es doch wegen der Komplexität des Systems und fehlender Kenntnisse über alle relevanten Objekte und Beziehungen des Systems oft unmöglich, ein entsprechendes deterministisches Modell zu konstruieren. Vielmehr hat man auch in diesem Fall das Gefühl, daß gewisse Größen zufallsbedingt sind. Die Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl./3/) und der mathematischen Statistik (vgl./19/) ermöglicht es jedoch in vielen Fällen diese Unsicherheiten und Zufälligkeiten zu quantifizieren, d.h. ein stochastisches Modell zu konstruieren.

Eine Möglichkeit zur Erstellung eines stochastischen Modells ist die Verwendung von bekannten Gesetzmäßigkeiten. Dabei muß man bei einigen Größen zugestehen, daß keine deterministischen Kenntnisse über sie vorhanden sind. Man wird deshalb versuchen diese als "zufällige Größen" zu modellieren.

Diesen Ansatz könnte man als "Systemanalyse" oder "internen Ansatz" bezeichnen. Ein anderer Ansatz, den man eher als "Datenanalyse" oder "externen Ansatz" bezeichnen könnte, ist notwendig, wenn man - wie es zum Beispiel häufig bei ökonomischen Zeitreihen der Fall ist - keinerlei Anhaltspunkte über interne Größen, sondern nur die Input-Output-Daten des Systems zur Verfügung hat. In diesem Fall den Übergang vom Input zum Output aus den Input-Daten und den entsprechenden Output-Daten zu modellieren.



Ist ein interner Ansatz möglich, so erhält man dadurch eine im allgemeinen endlich-parametrische Familie von Modellen. Aus dieser Familie wird durch Bestimmung der Parameter mit Hilfe des vorhandenen Datenmaterials ein konkretes Modell ausgewählt.

Beim externen Ansatz hat man eine solche Familie von Modellen nicht zur Verfügung. Um trotzdem aufgrund des Datenmaterials ein Modell auszuwählen (zu "identifizieren"), muß man sich eine entsprechende Familie vorgeben. Eine breite Klasse von Modellen zur Behandlung von Zeitreihen wird im nächsten Abschnitt diskutiert. Dieser Prozeß des Auswählens eines Modells aus einer Familie von Modellen wird als "Identifikation" bezeichnet.

Die beiden hier diskutierten Ansätze unterscheiden sich also dadurch, daß man beim internen Ansatz die Struktur des Systems untersuchen kann und dadurch eine Familie von Modellen erhält, während man beim externen Ansatz eine solche Familie - im gewissen Sinn willkürlich vorgeben muß. Deshalb sollte natürlich die beim externen Ansatz gewählte Modellfamilie möglichst viele Fälle beschreiben können. Bei der Modellbildung zu praktischen Problemen sind im allgemeinen beide Ansätze gemeinsam anzuwenden, wobei abhängig von der Kenntnis über die interne Struktur des Systems einer der beiden in den Vordergrund rückt.

1.2 Modelle zur Behandlung von Zeitreihen

In diesem Abschnitt sollen einige stochastische Modelle zur Beschreibung von dynamischen Systemen angesprochen werden. Es werden dabei, wie in dieser gesamten Arbeit, nur Modelle mit diskretem Zeitverhalten behandelt, d.h. Modelle, in denen der Zeitparameter eine diskrete Indexmenge durchläuft (z.B. N oder Z). In diesem Zusammenhang spricht man bei dynamischen Systemen auch von Zeitreihen. Die im folgenden auftretenden Zufallsgrößen seien jeweils auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) definiert. Für eine präzisere Begriffsbildung sei auf Kapitel 2 verwiesen.

In der Literatur gibt es eine Reihe von stochastischen Prozessen, die als Grundelemente zur Modellierung von dynamischen Systemen dienen (vgl./5/,/6/,/7/,/18/).

Ein solches Grundelement ist das Konzept des "weißen Rauschens". Darunter versteht man eine Folge von unkorrelierten Zufallsvektoren $(e(k))_{k \in Z}$ mit Erwartungswert Null, d.h.

für alle $k \in Z$ ist $e(k): \Omega \rightarrow R$ ein Zufallsvektor mit

$$E\{e(k)\} = 0 \text{ und} \\ \text{cov}\{e(k), e(i)\} = \begin{cases} R(k) & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

wobei $R(k) \in M(n, n)$ (Menge der reellen $n \times n$ -Matrizen)
und positiv semidefinit

Oft wird die Verteilung dieses weißen Rauschens, motiviert durch den zentralen Grenzwertsatz, als Normalverteilung angenommen. Man spricht dann von "Gaußschen weißem Rauschen". In diesem Fall ist die Verteilung schon durch die ersten beiden Momente eindeutig bestimmt.

Um aus einem stochastischen Prozeß (Input) einen anderen (Output) zu erzeugen, benötigt man eine Transformation. Wegen ihrer einfachen mathematischen Behandlung wird dazu häufig eine lineare Transformation benutzt, d.h. der Outputprozeß ist eine Linearkombination von Werten des Inputprozesses:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} T(i) \cdot x(k-i) , \quad k \in Z ,$$

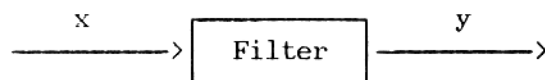
wobei die $T(i)$ Matrizen entsprechender Dimension sind.

Aus Gründen der physikalischen Realisierung wählt man sogenannte nichtvorgreifenden Transformationen, d.h. Transformationen, bei denen der Output nur von gegenwärtigen und vergangenen Inputwerten abhängt, d.h.:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} T(i) \cdot x(k-i) , \quad k \in Z$$

Zu den Voraussetzungen, unter denen diese unendlichen Reihen im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel überhaupt Sinn machen, vergleiche man Box/Jenkins (/5/) und Davis/ Vinter (/6/).

Man spricht bei dieser Darstellung auch von einem Filter.
(/5/,Abschn. 4.12)



Unter einem allgemeinen linearen Prozeß y verstehen wir eine solche lineare Transformation eines weißen Rauschens e , d.h.

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} T(i) \cdot e(k-i) , \quad k \in Z$$

Bei dieser Modellierung einer Zeitreihe durch "gefiltertes weißes Rauschen" treten unendlich viele Parameter auf. Diese müssen mit Hilfe vorhandener Daten "identifiziert" werden. Zur Reduzierung der Parameter wurde von Box/Jenkins (/5/) die - mit dem allgemeinen linearen Prozeß eng zusammenhängende - Familie der ARMA-Modelle eingeführt (vgl. auch /6/):

$$\sum_{i=0}^n A(i) \cdot y(k-i) = \sum_{j=0}^m B(j) \cdot e(k-j) , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

wobei die $A(i)$ und $B(j)$ Matrizen entsprechender Dimension sind.

Im folgenden werden wir uns mit einer dritten Familie von Modellen, den sogenannten linearen Zustandsraum-Modellen befassen. Der Zusammenhang aller drei genannten Modellfamilien ist bei Davis (/6/, Kapitel 2) erläutert.

1.3 Lineare Zustandsraum-Modelle, Filterung und Kontrolle

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Zustandsraum-Modellen und zwar nur in dem Maße, wie es für diese Arbeit erforderlich scheint. Charakteristisch für diese Modellfamilie sind die Begriffe Zustand, Beobachtung und Kontrolle (oder Input). Bei linearen Zustandsraum-Modellen geht man davon aus, daß man den (inneren) Zustand des Systems durch eine Folge von n -dimensionalen Vektoren $x(k)$ beschreiben kann, die folgender Differenzgleichung 1.Ordnung genügt:

$$(1.3.0) \quad x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + c(k) \quad \text{für } k \geq 0$$

wobei $A(k) \in M(n,n)$ (Menge der reellen $n \times n$ -Matrizen)
 $c(k) \in \mathbb{R}^n$ $n \in \mathbb{N}$

Die Matrix A wird als "Übergangsmatrix" bezeichnet.

Differenzgleichungen höherer Ordnung kann man unter Erhöhung der Dimension auf Differenzialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Auch die Diskretisierung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung führt auf die Form (1.3.0). Die Gleichung (1.3.0) ist eine deterministische Gleichung. Der Einfluß des Zufalls wird durch ein additives weißes Rauschen modelliert:

(1.3.1) **Systemgleichung** (Zustandsgleichung)

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + c(k) + G(k) \cdot w(k) \quad , \quad k \geq 0$$

wobei $x(k)$ n -dim. Zufallsvektor

$$A(k) \in M(n,n) \quad (\text{Übergangsmatrix})$$

$w(k)$ r -dim. weißes Rauschen (**Systemrauschen**)

$$\text{d.h. } E\{w(k)\} = 0$$

(Ein von Null abweichender Erwartungswert kann als deterministische Größe in $c(k)$ behandelt werden)

$$\text{cov}\{w(k), w(i)\} = \delta_{ik} \cdot Q(k)$$

wobei $Q(k) \in M(r,r)$ positiv semidefinit

und δ_{ik} das Kroneckersymbol

$c(k) \in \mathbb{R}^n$ (z.Bsp. Input in das System)

$G(k) \in M(n,r)$

Dabei sollen die folgenden Anfangsbedingungen gelten:

(1.3.2) **Anfangsbedingungen**

$$E\{x(0)\} = \mu(0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{cov}\{x(0)\} = P(0)$$

Es wird weiter davon ausgegangen, daß man keine direkten Informationen über den Systemzustand hat. Zur Verfügung hat man nur ein "lineares Meßgerät", das als Output eine lineare Transformation des Zustandes $x(k)$ liefert. Dieser Output ist aber durch additives weißes Rauschen gestört. Zum Zeitpunkt $k \geq 0$ ist also nur die Realisierung $y(k)$ eines Prozesses y bekannt, der vom bisherigen Verlauf des Prozesses x in folgender Weise abhängt:

(1.3.3) **Meßgleichung**

$$y(k) = H(k) \cdot x(k) + v(k) \quad , \quad k \geq 0$$

wobei $y(k)$ m -dim. Zufallsvektor

$$H(k) \in M(m,n) \quad (\text{Meßmatrix})$$

$v(k)$ n -dim. weißes Rauschen (**Meßrauschen**)

$$\text{d.h. } E\{v(k)\} = 0$$

(Ein von Null abweichender Erwartungswert kann direkt von y abgezogen werden)

$$\text{cov}\{v(k), v(i)\} = \delta_{ik} \cdot R(k)$$

wobei $R(k) \in M(n,n)$ positiv semidefinit

und δ_{ik} das Kroneckersymbol ist

Ferner werden folgende Annahmen über die Unkorreliertheit der Prozesse gemacht:

$$\begin{aligned}(1.3.4) \quad E\{v(k) \cdot w(i)^T\} &= 0, \quad i, k \in N_0 \\ E\{v(k) \cdot x(0)^T\} &= 0, \quad k \in N_0 \\ E\{w(k) \cdot x(0)^T\} &= 0, \quad k \in N_0\end{aligned}$$

Bei dieser Formulierung der Zustandsraum-Modelle stand das Interesse am internen Zustand x des Systems im Vordergrund. Mit Hilfe des Modells will man aufgrund der bis zu einem aktuellen Zeitpunkt k gemachten Beobachtungen $y(i)$, $0 \leq i \leq k$, den Zustand $x(l)$ des Systems zu einem Zeitpunkt $l \geq 0$ schätzen. Für $l < k$ spricht man von **Glättung**, für $l = k$ von **Filterung** und für $l > k$ von **Vorhersage**. Mit dem Problem der Filterung und der Vorhersage befaßt sich Kapitel 3. Die Glättung wird hier nicht behandelt.

Das Interesse am Zustand x kann zum einen ein direktes Interesse bedeuten, d.h. x repräsentiert eine wichtige Größe, deren Wert man kennen möchte. Es ist ferner oft möglich Einfluß auf das System zu nehmen. Um den Zustand des System zielgerichtet steuern zu können, ist ein Anhaltspunkt über den aktuellen Zustand notwendig. Im Zusammenhang mit der Kontrolltheorie will ich hier nur kurz auf das Prinzip der **Feedback-Kontrolle** eingehen.

Der Einfluß auf das System zum Zeitpunkt k geschieht über einen p -dimensionalen Vektor $u(k)$ und wirkt sich auf das System in der Form

$$c(k) = g(u(k)) \quad , \quad \text{wobei } g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

aus. Den Vektor $u(k)$ wird man nun nicht willkürlich wählen, sondern in Abhängigkeit vom bisher geschätzten Verlauf $\hat{x}(k)$ des Systemzustandes. Da dieser wiederum eine Funktion der bisher gemachten Beobachtungen $y(i)$, $0 \leq i \leq k$, ist, wird man $u(k)$ in der Form

$$u(k) = h(y(i), 0 \leq i \leq k)$$

wählen. Dies ist das Prinzip der **Feedback-Kontrolle**.

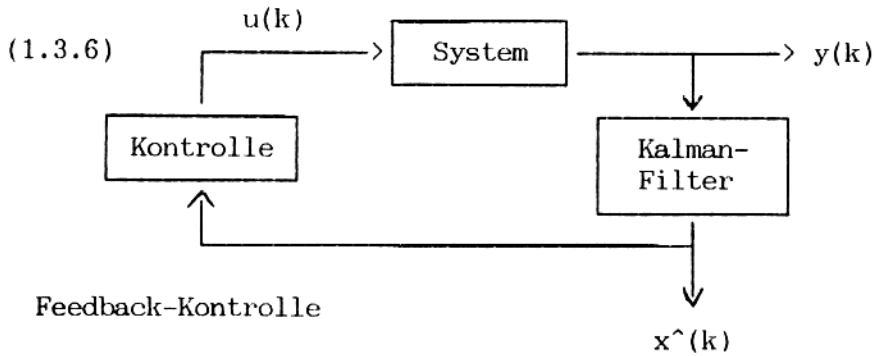
Da wir uns mit linearen Filtern beschäftigen wollen (vgl. Kap.2 und 3) lassen wir als Kontrolle auch nur lineare (bzw. affine) Funktionen in y zu:

$$\begin{aligned}(1.3.5) \quad c(k) &= L_1(u(k)) \\ u(k) &= L_2(\hat{x}(k)) \\ \text{bzw. } u(k) &= L_3(y(i), 0 \leq i \leq k)\end{aligned}$$

wobei L_1, L_2, L_3 affine Abbildungen entsprechender Dimension sind.

Da es sich in der Literatur so eingebürgert hat, wird auch in dieser Arbeit stellenweise die Bezeichnung **linear** verwendet, obwohl es korrekterweise **affin** heißen müßte.

Skizzenhaft sehen die Beziehungen nun folgendermaßen aus:



Daß man Berechnung der Kontrolle und die Filterung voneinander trennen darf, ist in der Kontroll-Literatur unter dem Namen "Separations-Prinzip" bekannt. Die Kontrolle wird dann als deterministische Kontrolle berechnet. Dabei wird so getan, als ob $\hat{x}(k)$ der wahre Systemzustand wäre. Dies ist unter dem Namen "Certainty-Equivalence-Prinzip" bekannt. Für nähere Ausführungen siehe man z.Bsp. Davis (/6/,Kap.6) und Maybeck (/15/,Band 3).

Breite Anwendung haben die Zustandsraum-Modelle in der Navigation von Flugkörpern gefunden. Bei der Modellierung geht man hier meist vom internen Ansatz (vgl.(1.1)) aus, wobei der innere Zustand x die zentrale Größe ist. Man kann aber auch für Systeme, bei denen ein externer Ansatz (vgl.(1.1)) notwendig ist, die Zustandsraum-Modelle als zugrundeliegende Familie von Modellen benutzen. Die zentrale Größe in diesem Fall ist der Output y (und evtl. eine Inputgröße u). Die Variable x hat in diesem Fall keine konkrete Bedeutung. Sie dient nur als Hilfsvariable zur Modellierung des Input-Output-Übergangs.

Sei nun ein Modell gemäß (1.3.1)-(1.3.3) gegeben und $S(k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge regulärer quadratischer Matrizen. Dann beschreibt folgendes Modell dasselbe Input-Output-Verhalten ("äquivalentes Modell"):

$$\begin{aligned}
 (1.3.7) \quad x^*(k+1) &= A^*(k) \cdot x^*(k) + c^*(k) + G^*(k) \cdot w(k) \\
 y^*(k) &= H^*(k) \cdot x^*(k) + v(k) \quad , k \geq 0 \\
 \text{mit } x^*(k) &= S(k) \cdot x(k) \\
 c^*(k) &= S(k) \cdot c(k) \\
 A^*(k) &= S(k) \cdot A(k) \cdot S^{-1}(k) \\
 G^*(k) &= S(k) \cdot G(k) \\
 H^*(k) &= H(k) \cdot S^{-1}(k)
 \end{aligned}$$

In diesem Sinn ist die Modellierung also nicht eindeutig. Dies kann man bei der Identifizierung von Modellen ausnutzen, in dem man sich auf bestimmte "kanonische" Modelle beschränkt.

Kapitel 2 : Optimale Schätzer, bedingte Erwartung und lineare kleinste-Quadrate Schätzer

2.1 Begriffsbildung und Problemformulierung

Das Problem der Filterung und Vorhersage will ich zunächst in einem allgemeineren Rahmen betrachten, da dort die wesentlichen Prinzipien klarer hervorgehen.

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein **Wahrscheinlichkeitsraum**, d.h. eine Menge Ω mit einer σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω und einem auf \mathcal{A} definierten Wahrscheinlichkeitsmaß P

Ein **n-dimensionalen Zufallsvektor** x ist eine meßbare Funktion
 $x : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, wobei \mathcal{B}_n die Borelmengen des \mathbb{R}^n sind.

Die Funktionswerte $x(\omega)$, $\omega \in \Omega$, heißen **Realisierungen** von x . Im folgenden wird häufig auch für die Realisierungen statt $x(\omega)$ einfach x geschrieben. Aus der jeweiligen Situation wird jedoch klar hervorgehen, ob es sich um den Zufallsvektor x oder um eine seiner Realisierungen handelt.

Das **allgemeine Problem** sei nun folgendermaßen beschrieben:

Eine interessierende Größe wird aufgefaßt als Realisierung eines n-dimensionalen Zufallsvektors x . Die jeweilige Realisierung ist allerdings nicht bekannt. Man kann jedoch die Realisierungen eines, mit x korrelierten m-dimensionalen Zufallsvektor y beobachten (messen). Aufgrund der Beobachtung von y will man nun die Realisierung von x "optimal schätzen".

Was heißt nun "optimal schätzen"?

Eine (n-dimensionale) **Schätzfunktion** (oder kurz **Schätzer**) θ sei eine meßbare Funktion

$$\theta : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n).$$

Diese Klasse von Schätzfunktionen ist jedoch für die obige Problemstellung zu groß. Da man als alleinige Information über das jeweils auftretende Element $\omega \in \Omega$ (d.h. über den "Ausgang des Zufallsexperimentes") die Realisierung $y(\omega)$ von y hat, ist zwischen ω_1 und ω_2 aus Ω mit $y(\omega_1) = y(\omega_2)$ nicht zu unterscheiden. Daher ist es sinnvoll nur solche Schätzfunktionen θ zu betrachten, die von $\omega \in \Omega$ nur über $y(\omega)$ abhängen, d.h. solche Funktionen θ , zu denen es eine meßbare Funktion

$$h : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) \quad \text{gibt mit } \theta = h \circ y.$$

Dies sind genau die $\sigma(y)$ -meßbaren Funktionen, wobei $\sigma(y)$ A die von y erzeugte σ -Algebra ist.

Sei $C \subseteq A$ eine beliebige σ -Unteralgebra von A, so können wir diese Definition folgendermaßen verallgemeinern:

Ein Schätzer für x gegeben C ist ein $C-B_n$ -meßbare Funktion

$$\theta : (\Omega, C) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B_n).$$

Mit $M(C) := \{ \theta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \theta \text{ ist } C-B_n\text{-meßbar} \}$ sie die Klasse aller $C-B_n$ -meßbaren Funktionen bezeichnet.

Um zu sinnvollen Schätzern zu gelangen und um einen Optimalitätsbegriff zu definieren, benötigt man ein Maß für die Güte von Schätzfunktionen. Dazu führt man eine meßbare Funktion

$$V : (\mathbb{R}^n, B_n) \rightarrow (\mathbb{R}_0^+, B_0^+)$$

die den Schätzfehler $e(w) := x(w) - \theta(w)$ bewerten soll. Diese Funktion nennt man **Verlustfunktion**. Hierbei sind B_0^+ die Borelmengen des \mathbb{R}_0^+ . Ein Beispiel für eine häufig verwendete Verlustfunktion, auch gaußsche Verlustfunktion genannt, ist die euklidische Norm $V(x) = x^t \cdot x$

Als **Gütemaß** (oder auch als **Risiko**) einer Schätzfunktion θ für x definiert man nun den erwarteten Verlust, d.h den Wert

$$R(\theta) := E\{ V(x-\theta) \} = E\{ V(e) \}.$$

Die dadurch definierte Funktion $R : M(C) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ heißt **Risikofunktion**. Eine Schätzfunktion $\hat{\theta} \in M(C)$ heißt dann **optimaler Schätzer** für x gegeben C bezüglich der Verlustfunktion V, wenn gilt:

$$R(\hat{\theta}) \leq R(\theta) \text{ für alle } \theta \in M(C)$$

Damit wären nun die Begriffe in obiger Problembeschreibung geklärt. Als weitere Bedingungen an den Schätzer könnte man noch die **Erwartungstreue**, d.h. $E(\hat{\theta}) = E(x)$, fordern. Es wird sich jedoch zeigen, daß der optimale Schätzer in den betrachteten Fällen diese Bedingung automatisch erfüllt, ohne daß sie explizit gefordert wird.

Mit dieser Begriffsbildung kann nun eine präzise Formulierung der anfangs gestellten Problems gegeben werden:

- (2.1.1) Es sei x ein n -dimensionaler Zufallsvektor, $n \in \mathbb{N}$
 y ein m -dimensionaler Zufallsvektor, $m \in \mathbb{N}$
und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Verlustfunktion.
Gesucht ist ein optimaler Schätzer für x gegeben y ,
d.h. eine meßbare Funktion $\hat{h} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit
$$E\{ V(x-\hat{h}(y)) \} \leq E\{ V(x-h(y)) \}$$
für alle meßbaren Funktionen $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

oder allgemeiner:

- (2.1.2) Es sei x ein n -dimensionaler Zufallsvektor,
 $C \subseteq A$ eine σ -Unteralgebra von A
und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Verlustfunktion.
Gesucht ist ein optimaler Schätzer für x gegeben C ,
d.h. eine Funktion $\hat{\theta} \in M(C)$ mit
$$E\{ V(x-\hat{\theta}) \} \leq E\{ V(x-\theta) \}$$
für alle Funktionen $\theta \in M(C)$

Bemerkungen:

- (2.1.3) Ein Spezialfall von (2.1.2) ist $C = \{\emptyset, \Omega\}$. Dies bedeutet, daß keinerlei Information über den Ausgang des Zufallsexperimentes vorliegt. Die Menge $M(C)$ der Schätzfunktionen besteht in diesem Fall genau aus den auf ganz Ω konstanten Funktionen.
- (2.1.3) Wegen $V(x-\theta)(\omega) = V(x(\omega)-\theta(\omega)) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ ist der Wert $R(\theta) = E\{V(x-\theta)\}$ in jedem Fall definiert, wenn auch $R(\theta) = \infty$ auftreten kann. Ist allerdings $R(\theta) = \infty$ für alle $\theta \in M(C)$, so gibt es keinen Schätzer mit endlichem Risiko. In diesem Fall wären im Sinne der Definition all Schätzer $\theta \in M(C)$ optimal. Dies wäre jedoch für konkrete Probleme nicht sinnvoll. Mit der Forderung $E\{V(x)\} < \infty$ kann man diesen Fall umgehen, da dann zumindest der Schätzer $\theta \equiv 0$ endliches Risiko besitzt.

2.2 Bedingte Erwartung als optimaler Schätzer

Im Zusammenhang mit diesem Abschnitt sei auch auf Kalman (/11/) und auf Jazwinski (/10/, S.145ff) verwiesen.

Wenn im folgenden die Rede von bedingter Erwartung ist, so ist immer eine Version der bedingten Erwartung gemeint. Zum Konzept der bedingten Erwartung sei auf Bauer (/3/,Kap. X) verwiesen.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man nun zeigen, daß die bedingte Erwartung $E\{x|C\}$ von x gegeben C eine (sogar die einzige) Lösung von (2.1.2) ist. Da $E\{x|C\}$ C -meßbar ist, ist zumindest klar, daß die bedingte Erwartung eine Schätzfunktion aus $M(C)$ ist.

Häufig wird als Verlustfunktion die gaußsche Verlustfunktion

$$V_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ ; V_S(x) = x^t \cdot S \cdot x$$

benutzt, wobei S eine positiv definite Matrix ist.

Für diese Verlustfunktion ist es sinnvoll (vgl.(2.1.4)) den Raum $L_2(n)$ aller n -dimensionalen Zufallsvektoren mit endlichen zweiten Momenten einzuführen:

$$L_2(n) := \{ x:\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : x \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_n\text{-meßbar und } E\{x^t \cdot x\} < \infty \}$$

Dabei werden zwei Elemente aus $L_2(n)$ miteinander identifiziert, wenn sie P -fast-sicher gleich sind.

Bemerkungen:

(2.2.1) Sei x ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Dann sind äquivalent:

- (1) $E\{x^t \cdot x\} < \infty$
- (2) $E\{x_i^2\} < \infty$ für $1 \leq i \leq n$
- (3) $E\{|x_i \cdot x_j|\} < \infty$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
- (4) $E\{x^t \cdot S \cdot x\} < \infty$ für jede positiv definite $n \times n$ -Matrix S
- (5) $E\{|x_i|\} < \infty$ und $\text{cov}\{x_i\} < \infty$ für $1 \leq i \leq n$
- (6) $E\{|x_i|\} < \infty$ und $|\text{cov}\{x_i \cdot x_j\}| < \infty$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

Beweis: (1) \Leftrightarrow (2) und (3) \Rightarrow (2) sind klar
(2) \Rightarrow (3) folgt aus der Hölderschen Ungleichung
(1) \Leftrightarrow (4) folgt aus der Äquivalenz der Normen auf \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 (3) \Rightarrow (6) \quad E\{|x_i|\} &= \int_{\Omega} |x_i(w)| \, dP(w) \\
 &= \int_A |x_i(w)| \, dP(w) + \int_{A^c} |x_i(w)| \, dP(w) \\
 &\quad \text{mit } A = \{w \in \Omega : |x_i(w)| \leq 1\} \\
 &\quad \in \mathcal{A}, \text{ da alle } x_i \text{ } \mathcal{A}\text{-B-meßbar} \\
 &\leq P(A) + \int_{A^c} x_i^2(w) \, dP(w) \\
 &\leq 1 + E\{x_i^2\} < \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\text{cov}\{x_i, x_j\}| &= |E\{x_i \cdot x_j\} - E\{x_i\} \cdot E\{x_j\}| \\
 &\leq |E\{x_i \cdot x_j\}| + |E\{x_i\} \cdot E\{x_j\}| \\
 &\leq E\{|x_i \cdot x_j|\} + E\{|x_i|\} \cdot E\{|x_j|\} \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

(6) \Rightarrow (5) ist klar

$$(5) \Rightarrow (2) \quad E\{x_i^2\} = \text{cov}\{x_i\} + (E\{x_i\})^2 < \infty$$



(2.2.2) V_s ist stetig, also auch B_n - B_0^+ -meßbar und erfüllt somit die Definition einer Verlustfunktion.

(2.2.3) Durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : L_2(n) \times L_2(n) \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle_s := E\{x^T \cdot S \cdot y\}$ wird ein Skalarprodukt auf $L_2(n)$ definiert. Der Raum $L_2(n)$ zusammen mit diesem Skalarprodukt ist bekanntlich ein Hilbertraum. Die Norm $\|\cdot\|_s$ auf $L_2(n)$ wird definiert durch

$$\|x\|_s := \langle x, x \rangle_s^{1/2}.$$

Sei x ein n -dimensionaler Zufallsvektor, so gilt:

$$x \in L_2(n) \Leftrightarrow \|x\|_s < \infty \Leftrightarrow \|x\|_I < \infty, \text{ wobei } I \text{ die Einheitsmatrix ist}$$

Die Risikofunktion R_s ist somit $R_s(\theta) = \|x - \theta\|_s$.

Nach Bemerkung (2.1.4) und (2.2.1) existieren zu $x \in L_2(n)$ und der Verlustfunktion V_s Schätzfunktionen aus $M(C)$ mit endlichem Risiko. Es wird sich nun zeigen, daß die bedingte Erwartung das geringste Risiko besitzt.

(2.2.4) Satz: Es sei $x \in L_2(n)$ und C eine σ -Unteralgebra von \mathcal{A} .

Ferner sei S eine positiv definite Matrix und

$$V_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ ; V_s(z) = z^T \cdot S \cdot z.$$

Dann ist $\hat{\theta} := E\{x|C\}$ ein optimaler Schätzer für x gegeben C bezüglich der Verlustfunktion V_s . Ist $\theta \in M(C)$ mit $R_s(\theta) = R_s(\hat{\theta})$, so gilt $\theta = \hat{\theta}$ P-fast-sicher

Beweis: Zuerst wird $R_s(\hat{\theta}) = \|x - \hat{\theta}\|_s < \infty$ gezeigt:

$$V_s \text{ ist konvex, } E\{|x|\} < \infty, E\{V_s(x)\} < \infty$$

Aus der Jensenschen Ungleichung folgt somit

$$V_s(E\{x|C\}) \leq E\{V_s(x)|C\} \text{ P-fast-sicher}$$

$$\text{und somit } E\{V_s(E\{x|C\})\} \leq E\{E\{V_s(x)|C\}\} = E\{V_s(x)\} < \infty$$

Also gilt $\|\hat{\theta}\|_s < \infty$, d.h. $\hat{\theta} \in L_2(n)$

Da außerdem auch $\|x\|_s < \infty$ ist, folgt aus der

Dreiecksungleichung $\|x - \hat{\theta}\|_s < \infty$

Also wurde gezeigt, daß $\hat{\theta}$ ein Schätzer mit endlichem Risiko ist.

Sei nun $\theta \in M(C)$ mit $R_s(\theta) = \|x - \theta\|_s < \infty$

$$R_s(\theta) = \|x - \theta\|_s = \langle x - \theta, x - \theta \rangle_s = \langle x - \hat{\theta} + \hat{\theta} - \theta, x - \hat{\theta} + \hat{\theta} - \theta \rangle_s = \|x - \hat{\theta}\|_s + \|\hat{\theta} - \theta\|_s + 2 \cdot \langle x - \hat{\theta}, \hat{\theta} - \theta \rangle_s$$

$$\langle x - \hat{\theta}, \hat{\theta} - \theta \rangle_s = E\{(x - \hat{\theta})^T \cdot S \cdot (\hat{\theta} - \theta)\}$$

$$= E\{E\{(x - \hat{\theta})^T \cdot S \cdot (\hat{\theta} - \theta) | C\}\}$$

$$= E\{E\{(x - \hat{\theta}) | C\}^T \cdot S \cdot (\hat{\theta} - \theta)\}$$

da mit $\hat{\theta}$ und θ auch $S \cdot (\hat{\theta} - \theta)$ C-meßbar

$$= 0 \text{ da } E\{(x - \hat{\theta}) | C\} = 0 \text{ P-fast-sicher}$$

Folglich also:

$$(*) \quad R_s(\theta) = R_s(\hat{\theta}) + \|\hat{\theta} - \theta\|_s \geq R_s(\hat{\theta})$$

Somit ist $\hat{\theta}$ ein optimaler Schätzer für x gegeben C .

Ist nun $\theta \in M(C)$ mit $R_s(\theta) = R_s(\hat{\theta})$ so folgt aus (*):

$$\|\hat{\theta} - \theta\|_s = 0 \text{ und somit } \hat{\theta} = \theta \text{ P-fast-sicher}$$



In Satz (2.2.4) wurden keine wesentlichen Bedingungen an x bzw. an die bedingte Verteilung von x gegeben C gestellt. Um zu zeigen, daß die bedingte Erwartung ein optimaler Schätzer ist, mußte man die Klasse der zugelassenen Verlustfunktionen auf quadratische Verlustfunktionen einschränken. Dabei stellte sich sogar die Eindeutigkeit des optimalen Schätzers heraus.

Um allgemeinere Klassen von Verlustfunktionen zuzulassen ohne die Optimalität der bedingten Erwartung als Schätzer zu zerstören, muß man engere Annahmen über die bedingte Verteilung von x bezüglich C machen.

Eine größere Menge von Verlustfunktionen stellen die symmetrischen, konvexen Funktionen dar. Dazu zunächst folgende Definition:

(2.2.5) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) **konvex**, falls $\alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2) \geq f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)$
für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in (0,1)$
- (2) **strikt konvex**, falls $\alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2) > f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)$
für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in (0,1)$
- (3) **symmetrisch**, falls $f(-z) = f(z)$ für all $z \in \mathbb{R}^n$

Die zugelassene Funktion von Verlustfunktionen sei nun

$$K := \{ V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : V \text{ ist symmetrisch und konvex} \}$$

Da Konvexität Stetigkeit impliziert, sind die Funktionen aus K auch $\mathbb{B}_n - \mathbb{B}_0^+$ -meßbar, erfüllen also die Voraussetzungen für Verlustfunktionen. Die oben betrachteten quadratischen Verlustfunktionen sind in dieser Familie enthalten. Es gilt nun folgender Satz:

(2.2.6) Satz: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $V \in K$, C eine σ -Unteralgebra von \mathcal{A} und $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Zufallsvektor auf (Ω, \mathcal{A}) mit $E\{|x|\} < \infty$ und $E\{V(x - E\{x|C\})\} < \infty$.

Die bedingte Verteilungsfunktion F_C von x gegeben C sei fast sicher symmetrisch bezüglich der bedingten Erwartung $E\{x|C\}$ in dem Sinne, daß

$$F_C(E\{x|C\} - \mu) = 1 - F_C(E\{x|C\} + \mu) \quad P\text{-fast-sicher.}$$

Dann ist $\hat{\theta} := E\{x|C\}$ ein optimaler Schätzer für x gegeben C bezüglich der Verlustfunktion $V \in K$. Ist V sogar strikt konvex, so ist der optimale Schätzer eindeutig.

Beweis: Sei $\hat{\theta} := E\{x|C\}$.

Dann gilt $R_S(\hat{\theta}) := E\{V(x - \hat{\theta})\} < \infty$, d.h. endliches Risiko.

Sei $z := x - E\{x|C\}$ und

G_C die bedingte Verteilungsfunktion von z bezüglich C .

Dann gilt: (*) $E\{z|C\} = 0$ P-fast-sicher

$$G_C(-\tau) = 1 - G_C(\tau) \quad P\text{-fast-sicher}$$

Sei $N \in \mathcal{A}$ mit $P(N) = 0$ die Ausnahmemenge von (*).

Sei $\theta \in M(C)$ eine Schätzfunktion mit endlichem Risiko,

d.h. $R_S(\theta) := E\{V(x - \theta)\} < \infty$, und $\theta_d := \hat{\theta} - \theta$.

Dann gilt außerhalb von N :

$$\begin{aligned} (**) \quad E\{V(x - \theta)|C\} &= E\{V((x - \hat{\theta}) - (\hat{\theta} - \theta)) | C\} \\ &= E\{V(z - \theta_d) | C\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V(\tau - \theta_d) dG_C(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V(-\tau - \theta_d) dG_C(\tau) \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung wegen der Symmetrie von G_C ,
genauer:

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $T(\tau) = -\tau$

Dann gilt für das Bildmaß $T(G_C)$ von G_C unter T wegen der
Symmetrie von G_C : $T(G_C) = G_C$

Der Transformationssatz für Integrale besagt dann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) dG_C(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) dT(G_C(\tau)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(T(\tau)) dG_C(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-\tau) dG_C(\tau) \end{aligned}$$

Somit gilt außerhalb von N wegen (**) folgendes:

$$\begin{aligned} E\{V(x-\theta) | C\} &= E\{V(z-\theta_a) | C\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V(-\tau-\theta_a) dG_C(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V(\tau+\theta_a) dG_C(\tau) \quad \text{wegen Symmetrie von } V \\ &= E\{V(z+\theta_a) | C\} \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$E\{V(x-\theta)\} = E\{V(z+\theta_a)\} = E\{V(z-\theta_a)\}$$

Folglich:

$$\begin{aligned} R(\theta) = E\{V(x-\theta)\} &= \frac{1}{2} \cdot E\{V(z+\theta_a)\} + \frac{1}{2} \cdot E\{V(z-\theta_a)\} \\ &= E\left\{ \frac{1}{2} \cdot V(z+\theta_a) + \frac{1}{2} \cdot V(z-\theta_a) \right\} \\ &\geq E\left\{ V\left(\frac{1}{2}(z+\theta_a) + \frac{1}{2}(z-\theta_a) \right) \right\} \\ &\quad \text{da } V \text{ konvex} \\ &= E\{V(z)\} = E\{V(x-\hat{\theta})\} \\ &= R(\hat{\theta}) \end{aligned}$$

Ist V strikt konvex und θ_a fast sicher ungleich 0,
so ist $R(\theta) > R(\hat{\theta})$, woraus die Eindeutigkeit folgt.



In diesem Abschnitt wurde gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen die bedingte Erwartung $E(x|C)$ der optimale Schätzer für x gegeben C ist. Die Lösung des Problems (2.1.1) liegt somit in der Bestimmung dieser bedingten Erwartung bzw. der bedingten Verteilung. Es ist jedoch im Allgemeinen schwierig dafür explizite Formeln herzuleiten. In der Praxis ist dies oft sogar unmöglich, da man eigentlich nie eine ganze Verteilung kennt bzw. bestimmen kann, sondern nur die Momente

der Verteilung bis zu einer gewissen Ordnung. Meist schätzt man die ersten beiden Momente einer Verteilung. Der folgende Abschnitt wird zeigen, daß die ersten beiden Momente im Falle von Normalverteilungen zur Berechnung der bedingten Erwartung ausreichen

2.3. Normalverteilung und Linearität des optimalen Schätzers

Wie allgemein bekannt ist, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von normalverteilten Zufallsvektoren (Gaußsche Zufallsvektoren) durch ihre ersten beiden Momente eindeutig bestimmt.

Sind nun zwei Zufallsvektoren x und y gemeinsam normalverteilt, so ist die bedingte Verteilung von x gegeben y wieder normal. Die bedingte Verteilung ist somit durch ihre ersten beiden Momente bestimmt, die sich aus den ersten beiden Momenten der gemeinsamen Verteilung ergeben.

Dazu sei der folgende Satz zitiert (vgl./14/, Theorem 13.1 und 13.2), wobei A^+ die Pseudoinverse einer Matrix A bezeichnet (vgl. Anhang A):

(2.3.1) Satz: Seien x und y gemeinsam normalverteilte Zufallsvektoren.

Dann ist die bedingte Verteilung $P\{x \leq \mu | y\}$ wieder eine Normalverteilung, wobei die Parameter $E\{x|y\}$ und $\text{cov}\{x|y\} := E\{(x-E\{x|y\}) \cdot (x-E\{x|y\})^T | y\}$ gegeben sind durch :

$$\begin{aligned} E\{x|y\} &= E\{x\} + \text{cov}\{x,y\} \cdot \text{cov}\{y\}^+ \cdot (y-E\{y\}) \\ \text{cov}\{x|y\} &= \text{cov}\{x\} + \text{cov}\{x,y\} \cdot \text{cov}\{y\}^+ \cdot \text{cov}\{x,y\}^T \end{aligned}$$

Wenn man dies nun im Zusammenhang mit dem Schätzproblem (2.1.1) betrachtet, so besagt dieser Satz gerade, daß im Falle von Normalverteilungen der optimale Schätzer für x gegeben y bezüglich der Verlustfunktion V_{EK} (nach Satz (2.2.6) also die bedingte Erwartung) eine affine Funktion in y ist.

2.4. Lineare kleinste-Quadrate Schätzer

Wegen der am Ende von Abschnitt (2.2) erwähnten Schwierigkeiten der Bestimmung der bedingten Erwartung werden wir uns nun auf eine kleinere Klasse von Schätzfunktionen beschränken, nämlich auf lineare Schätzfunktionen.

Diese Einschränkung wird vor allem durch das Ergebnis des letzten Abschnitts (2.3) motiviert. Dort wurde gezeigt, daß unter Normalver-

teilungsannahmen der optimale Schätzer linear in y ist und die Reduzierung auf affine Funktionen in diesem Fall gar keine Einschränkung bedeutet.

Da es zu den ersten beiden Momenten eines beliebigen Zufallsvektors einen gaußschen Zufallsvektor gibt, dessen Verteilung eindeutig durch die beiden Momente bestimmt ist, so kann man auch im allgemeinen Fall mit einem nichtlinearen Schätzer nur dann ein geringeres Risiko erhalten als mit linearen Schätzern, wenn man auch Momente mindestens dritter Ordnung benutzt.

Dieser Abschnitt wird sich nun mit folgendem Problem beschäftigen:

(2.4.1) Es seien $x \in L_2(n)$, $y \in L_2(m)$, $n, m \in \mathbb{N}$

$$L(y) := \{ z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : z = \alpha + G \cdot y, \alpha \in \mathbb{R}^n, G \in M(n, m) \}$$

$$V_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+; V_s(\mu) = \mu^T \cdot S \cdot \mu \quad (S \text{ positiv definit})$$

Gesucht ist ein $\hat{x} \in L(y)$ mit

$$E\{V_s(x - \hat{x})\} \leq E\{V_s(x - z)\} \text{ für alle } z \in L(y)$$

Faßt man $1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Funktion auf, die mit Wahrscheinlichkeit 1 den konstanten Wert 1 annimmt, so kann man mit $G^* := [\alpha | G]$ und $y^* := [1, y^T]^T$ schreiben:

$$L(y) := \{ z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : z = G^* \cdot y^*, G^* \in M(n, m+1) \}$$

Das Problem (2.4.1) ist gerade das Approximationsproblem der Hilbertraumtheorie, denn der Raum $L_2(n)$ zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ ist ein Hilbertraum (vgl. (2.2.3)) und $L(y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_2(n)$. Der Satz über die Orthogonalprojektion in Hilberträumen (vgl. /20/, §9) besagt nun:

(2.4.2) Es gibt genau ein $\hat{x} \in L(y)$ mit $R_s(\hat{x}) = \inf\{R_s(z), z \in L(y)\}$ und es gilt:

$$R_s(\hat{x}) = \inf\{R_s(z), z \in L(y)\} \iff \langle x - \hat{x}, z \rangle_s = 0 \text{ für alle } z \in L(y) \\ \text{d.h. } \hat{e} := x - \hat{x} \perp L(y)$$

Der optimale lineare Schätzer ist also gerade die Orthogonalprojektion im Raum $L_2(n)$ auf den Unterraum $L(y)$. $\hat{x} \in L(y)$ bedeutet, daß es eine (nicht notwendig eindeutige) Matrix $G_0^* := [\hat{\alpha} | \hat{G}] \in M(n, m+1)$ gibt mit $\hat{x} = G_0^* \cdot y^*$. Eine solche Matrix ist nun zu bestimmen. Kriterien dazu liefert der folgende Satz:

(2.4.3) Satz: Eine Matrix G_0^* , d.h. eine Darstellung $\hat{x} = G_0^* \cdot y^*$, ist durch eine der folgenden äquivalenten Bedingungen bestimmt, wobei $\hat{e} = x - \hat{x}$. Diese Bedingungen sind sowohl hinreichend als auch notwendig.

- (1) $E\{\hat{e}^T \cdot S \cdot G^* \cdot y^*\} = 0$ für alle $G^* \in M(n, m+1)$
- (2) $E\{\hat{e} \cdot y^{*T}\} = 0$ (Nullmatrix)
- (3) $E\{x \cdot y^{*T}\} = G_0^* \cdot E\{y^* \cdot y^{*T}\}$

Beweis: Daß die Bedingung (1) hinreichend und notwendig ist besagt gerade (2.4.2). Es bleibt also nur die Äquivalenz zu zeigen.

(2) \Rightarrow (1) Wegen der Linearität des Erwartungswertes folgt aus $E\{\hat{e} \cdot y^{*T}\} = 0$, daß für eine beliebige Matrix $G \in M(n, m+1)$ gilt : $E\{S \cdot \hat{e} \cdot y^{*T} \cdot G^*T\} = 0$
 Also $E\{\hat{e}^T \cdot S \cdot G^* \cdot y^*\} = E\{(S \cdot \hat{e})^T \cdot y^* \cdot G^*\}$
 $= \text{Spur}[E\{S \cdot \hat{e} \cdot (G^* \cdot y^*)^T\}] = 0$

(1) \Rightarrow (2) Es sei $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m+1$

Wähle in (1) speziell $G^* = (g_{kl})$ mit $g_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i, l=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit: $G^* \cdot y^* = (0, \dots, 0, y_j^*, 0, \dots, 0)^T$

d.h. in der i-ten Komponente steht y_j^*

$$\begin{aligned} \text{und } \hat{e}^T \cdot S \cdot G^* \cdot y^* &= (S \cdot \hat{e})^T \cdot y^* \cdot G^* \\ &= (S \cdot \hat{e})_i \cdot y_j^* \end{aligned}$$

$$\text{Also } E\{(S \cdot \hat{e})_i \cdot y_j^*\} = E\{\hat{e}^T \cdot S \cdot G^* \cdot y^*\} = 0$$

Da i und j beliebig waren, gilt somit

$$E\{S \cdot \hat{e} \cdot y^{*T}\} = 0$$

Da S positiv definit ist, insbesondere also regulär, folgt (2) aus $S \cdot E\{\hat{e} \cdot y^{*T}\} = E\{S \cdot \hat{e} \cdot y^{*T}\} = 0$

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow (3) \quad E\{\hat{e} \cdot y^{*T}\} = 0 &\Leftrightarrow E\{(x - G_0^* \cdot y^*) \cdot y^{*T}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow E\{x \cdot y^{*T}\} = G_0^* \cdot E\{y^* \cdot y^{*T}\} \end{aligned}$$



Die Schreibweise $G^* := [\alpha | G]$ und $y^* := [1, y^T]^T$ wurde nur zur Vereinfachung eingeführt. Im folgenden werden nun die Gleichungen für $\hat{\alpha}$ und \hat{G} aus $G_0^* := [\hat{\alpha} | \hat{G}]$ hergeleitet.

$$E\{x \cdot y^{*T}\} = [E\{x\} \quad | \quad E\{x \cdot y^T\}]$$

$$E\{y^* \cdot y^{*T}\} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & E\{y\}^T \\ \hline E\{y\} & E\{y \cdot y^T\} \end{array} \right]$$

$$G_0^* \cdot E\{y^* \cdot y^{*T}\} = [\hat{\alpha} + \hat{G} \cdot E\{y\} \quad | \quad \hat{\alpha} \cdot E\{y\}^T + \hat{G} \cdot E\{y \cdot y^T\}]$$

Aus (2.4.3), Gleichung (3), folgt somit:

$$(2.4.4) \quad (1) \quad \hat{\alpha} = E\{x\} - G^{\wedge} \cdot E\{y\}$$
$$(2) \quad E\{x \cdot y^T\} - E\{x\} \cdot E\{y\}^T = G^{\wedge} \cdot [E\{y \cdot y^T\} - E\{y\} \cdot E\{y\}^T]$$
$$\Leftrightarrow \text{cov}(x, y) = G^{\wedge} \cdot \text{cov}(y)$$

Damit kann man nun die Lösung des linearen kleinste-Quadrate Schätzproblem folgendermaßen zusammenfassen:

(2.4.5) Satz: Es seien $x \in L_2(n)$, $y \in L_2(m)$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Der Raum der zulässigen Schätzfunktionen sei
 $L(y) := \{ z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : z = \alpha + G \cdot y, \alpha \in \mathbb{R}^n, G \in M(n, m) \}$,
d.h. der Raum der linearen Schätzfunktionen in y .
Als Verlustfunktion sei $V_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$; $V_s(\mu) = \mu^T \cdot S \cdot \mu$
gewählt, wobei S eine positiv definite Matrix ist.

Der optimale lineare Schätzer \hat{x} für x gegeben y
bezüglich der Verlustfunktion V_s ist dann eindeutig
bestimmt und es gilt:

$$\hat{x} = E\{x\} + G^{\wedge} \cdot [y - E\{y\}] \quad (i)$$

wobei G^{\wedge} bestimmt ist durch:

$$\text{cov}(x, y) = G^{\wedge} \cdot \text{cov}(y) \quad (ii)$$

Für den Schätzfehler $e^{\wedge} := x - \hat{x} = (x - E\{x\}) - G^{\wedge} \cdot [y - E\{y\}]$

gilt: $E\{e^{\wedge}\} = 0$

$$\text{cov}(e^{\wedge}) = \text{cov}(x) - G^{\wedge} \cdot \text{cov}(x, y)^T \quad (iii)$$

Die Bedingung ist (ii) äquivalent mit (vgl. (2.4.3)(2))

$$E\{e^{\wedge} \cdot y^T\} = \text{cov}(e^{\wedge}, y) = 0 \quad (iv)$$

Außerdem gilt:

$$E\{e^{\wedge} \cdot \hat{x}^T\} = \text{cov}(e^{\wedge}, \hat{x}) = 0$$

$$\text{und } \text{cov}(e^{\wedge}, x) = \text{cov}(e^{\wedge}) \quad (v)$$

Bemerkungen:

(2.4.6) Der optimale lineare Schätzer ist also durch die beiden
ersten Momente der gemeinsamen Verteilung von x und y
bestimmt. Außerdem ist der optimale lineare Schätzer
erwartungstreu.

(2.4.7) Bedingung (iv) des letzten Satzes besagt gerade:

Ein linearer Schätzer ist genau dann optimal, wenn
Schätzfehler und Beobachtung unkorreliert sind.

(d.h. wenn aus der Beobachtung keine weiteren
Informationen mehr gewonnen werden können)

(2.4.8) Gleichung (v) besagt, daß Schätzfehler und Schätzung unkorreliert sind.

(2.4.9) Der Schätzer \hat{x} ist unabhängig von der positiv definiten Matrix S , die die Verlustfunktion definiert.

Um eventuellen Mißverständnissen vorzubeugen, sei noch einmal klargestellt in welchem Sinn der optimale lineare Schätzer und seine Darstellung eindeutig bestimmt sind. Hierbei werden auch noch weitere neue Aspekte klar werden.

Bemerkungen zu den Eindeutigkeitsaussagen von Satz (2.4.5):

(2.4.10) Es sei $G := \{ G \in M(n,m) : \text{cov}(x,y) = G \cdot \text{cov}(y) \}$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $G \neq \emptyset$

(b) $G \in G \Leftrightarrow \hat{x} := E\{x\} + G \cdot [y - E\{y\}]$ ist optimaler Schätzer im oben genannten Sinn

(c) Ist $\hat{x} \in L(y)$ ein im obigen Sinn optimaler Schätzer, so gibt es ein $G \in G$ mit $\hat{x} = E\{x\} + G \cdot [y - E\{y\}]$.

(d) Seien $\hat{x}_1 = E\{x\} + G_1 \cdot [y - E\{y\}]$ und $\hat{x}_2 = E\{x\} + G_2 \cdot [y - E\{y\}]$ mit $G_1, G_2 \in G$, so ist $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ P-fast-sicher.

(e) Sei $\hat{G} \in G$. Dann sind für $G \in M(n,m)$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $G \in G$

(ii) $(\hat{G} - G) \cdot \text{cov}(y) = 0$

(iii) Die Zeilen von $(\hat{G} - G)$ liegen im Kern($\text{cov}(y)$)

(f) Sei $\hat{G} \in G$. Dann sind für $D \in M(n,m)$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\hat{G} + D \in G$

(ii) $D \cdot \text{cov}(y) = 0$

(iii) Die Zeilen von D liegen im Kern($\text{cov}(y)$)

Diese Aussagen sind nur eine Präzisierung der bisher gefundenen Ergebnisse. Sie resultieren im wesentlichen aus (2.4.2). Der Zusammenhang zwischen (d) und (e), bzw. (f), wird durch folgenden allgemeinen Satz deutlich. Dies ist weder in der Literatur zur Filterung noch in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden.

(2.4.11) Satz: Sei $m \in \mathbb{N}$ und y ein m -dimensionaler Zufallsvektor, dessen Kovarianzmatrix existiert. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\alpha \in \text{Kern}(\text{cov}(y)) \Leftrightarrow P\{ \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0 \} = 1$$

(b) $P\{ (y - E\{y\}) \in \text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp \} = 1$ und

(wegen $\text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp = \text{Bild}(\text{cov}(y))$ ist dann auch $P\{ (y - E\{y\}) \in \text{Bild}(\text{cov}(y)) \} = 1$)

und für jeden Unterraum H des \mathbb{R}^m , der eine echte Teilmenge von $\text{Bild}(\text{cov}(y))$ ist, gilt:

$$P\{ (y - E\{y\}) \in H \} < 1,$$

d.h. der Bildraum unter der Kovarianzmatrix von y ist der kleinste Unterraum des \mathbb{R}^m , in dem P -fast alle Realisierungen von $y - E\{y\}$ liegen.

(c) Für zwei Matrizen $G_1, G_2 \in M(n, m)$, $n \in \mathbb{N}$, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $G_1 \cdot [y - E\{y\}] = G_2 \cdot [y - E\{y\}]$ P -fast sicher

(ii) $y - E\{y\} \in \text{Kern}(G_1 - G_2)$ P -fast sicher

(iii) $G_1 \cdot \text{cov}(y) = G_2 \cdot \text{cov}(y)$

(iv) Die Zeilen von $(G_1 - G_2)$ liegen im $\text{Kern}(\text{cov}(y))$

Beweis: (a)

" \Rightarrow " Sei $\alpha \in \text{Kern}(\text{cov}(y))$

Dann ist $z := \alpha^T \cdot (y - E\{y\})$ eine skalare Zufallsvariable

mit $E\{z\} = \alpha^T \cdot E\{y - E\{y\}\} = 0$

$$\begin{aligned} \text{und } \text{var}(z) &= E\{z \cdot z^T\} = E\{\alpha^T \cdot (y - E\{y\}) \cdot (y - E\{y\})^T \cdot \alpha\} \\ &= \alpha^T \cdot \text{cov}(y) \cdot \alpha = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt $z = 0$ P -fast sicher

" \Leftarrow " Sei $\alpha \in \mathbb{R}^m$ und $z := \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0$ P -fast sicher.

$$\text{cov}(y) \cdot \alpha = E\{(y - E\{y\}) \cdot (y - E\{y\})^T \cdot \alpha\}$$

$$= E\{(y - E\{y\}) \cdot z^T\} = E\{(y - E\{y\}) \cdot z\} = 0$$

(b) $P\{ (y - E\{y\}) \in \text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp \}$

$$= P(\{ \omega \in \Omega : \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \text{Kern}(\text{cov}(y)) \})$$

$$= P(\bigcap_{\alpha \in K} \{ \omega \in \Omega : \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0 \}) \quad , \quad K := \text{Kern}(\text{cov}(y))$$

Dieser Schnitt ist überabzählbar, man kann ihn jedoch auf einen abzählbaren (sogar endlichen) Schnitt reduzieren:

Sei B eine Basis von K . Dann gilt:

$$\bigcap_{\alpha \in K} \{ \omega \in \Omega : \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0 \} = \bigcap_{\alpha \in B} \{ \omega \in \Omega : \alpha^T \cdot (y - E\{y\}) = 0 \}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} P\{(y-E\{y\}) \in \text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp\} &= P\left(\bigcap_{\alpha \in B} \{\omega \in \Omega: \alpha^T \cdot (y-E\{y\})=0\}\right) \\ &= \bigcap_{\alpha \in B} P\{\alpha^T \cdot (y-E\{y\}) = 0\} = 1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp = \text{Bild}(\text{cov}(y)^T) = \text{Bild}(\text{cov}(y)) = \text{cov}(y) \cdot \mathbb{R}^m$$

Sei nun H ein Unterraum des \mathbb{R}^m

und H echte Teilmenge von $\text{Kern}(\text{cov}(y))^\perp$

Dann ist $\text{Kern}(\text{cov}(y))$ echte Teilmenge von H^\perp und es existiert ein $\alpha_0 \in H^\perp$ mit α_0 liegt nicht in $\text{Kern}(\text{cov}(y))$

Angenommen es gelte $P\{y-E\{y\} \in H\} = 1$

Dann gilt insbesondere für α_0 , daß

$$P\{\alpha_0^T \cdot (y-E\{y\}) = 0\} = 1$$

Damit folgt aus (a): $\alpha_0 \in \text{Kern}(\text{cov}(y))$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von α_0

(c) Teil (a) angewendet auf die Zeilen von $(G_1 - G_2)$



Andere Formulierung von (2.4.11) (b) :

Die Realisierungen von y liegen P -fast sicher in $E\{y\} + \text{Bild}(\text{cov}(y))$
und dies ist der kleinste affine Unterraum für den dies gilt.

Für Normalverteilungen vergleiche man Anhang B (B.2)

Es sei noch eine Bemerkung über die "Additivität" des optimalen Schätzers gemacht:

(2.4.12) Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

Ferner seien für $i=1, \dots, k$:

T_i eine $m \times n_i$ - Matrix und $x_i \in L_2(n_i)$

Außerdem sei $v \in L_2(m)$ ein mit y unkorrelierter Zufallsvektor,

d.h. $\text{cov}(v, y) = 0$

Der optimaler linearer Schätzer für

$$z := \sum_{i=1}^k T_i \cdot x_i + v \in L_2(m)$$

gegeben die Verlustfunktion V_s ist dann:

$$z^{\wedge} := \sum_{i=1}^k T_i \cdot x_i^{\wedge} + E\{v\}, \text{ wobei } x_i^{\wedge} \text{ der Schätzer für } x_i \text{ gemäß Satz (2.4.5) ist.}$$

Beweis: Wegen $x_i \in L_2(n_i)$ und $v \in L_2(m)$ ist $z \in L_2(m)$.

Somit ist gemäß Satz (2.4.5)

$$\begin{aligned} z^{\wedge} &= E\left\{ \sum_{i=1}^k T_i x_i + v \right\} + \text{cov}\left(\sum_{i=1}^k T_i x_i + v, y \right) \cdot \text{cov}(y)^{\dagger} \cdot [y - E\{y\}] \\ &= \sum_{i=1}^k T_i \cdot E\{x_i\} + E\{v\} + \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^k T_i \cdot \text{cov}(x_i, y) + \text{cov}(v, y) \right] \cdot \text{cov}(y)^{\dagger} \cdot [y - E\{y\}] \\ &= \sum_{i=1}^k T_i \cdot \left[E\{x_i\} + \text{cov}(x_i, y) \cdot \text{cov}(y)^{\dagger} \cdot [y - E\{y\}] \right] + E\{v\} \\ &= \sum_{i=1}^k T_i \cdot x_i^{\wedge} + E\{v\} \end{aligned}$$

der optimale lineare Schätzer für z gegeben y .



Symbolisch: $\left[\sum_{i=1}^k T_i \cdot x_i + v \right]^{\wedge} = \sum_{i=1}^k T_i \cdot x_i^{\wedge} + E\{v\}$

speziell für $k=1$ und $E\{v\}=0$: $(T \cdot x + v)^{\wedge} = T \cdot x^{\wedge}$

Kapitel 3 : Kalman-Filter : Herleitung und Eigenschaften

3.1 Herleitung des Kalman-Filters und Bemerkungen

Nach den Vorüberlegungen von Kapitel 1 und 2 soll nun der Kalman-Filter zu dem Zustandsraummodell, wie es in (1.3.1)-(1.3.5) angegeben wurde, formuliert werden. Das zugrundeliegende Modell soll dazu zunächst noch einmal wiederholt werden:

(3.1.1) Systemgleichung

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + c(k) + G(k) \cdot w(k) \quad , \quad k \geq 0$$

$$\text{mit } E\{w(k)\} = 0$$

$$\text{cov}\{w(k), w(i)\} = \delta_{i k} \cdot Q(k)$$

$$c(k) \text{ affine Funktion in } y(i), \quad 0 \leq i \leq k$$

(vgl. (1.3.5))

Diese Annahme bezüglich $c(k)$ ist allgemeiner als die Annahme, daß $c(k)$ ein rein deterministischer (Input-) Vektor ist. Diese allgemeinere Behandlung ist wichtig im Hinblick auf die im Abschnitt 1.3. angesprochene Feedback-Kontrolle und das "Separations-Prinzip". In den üblichen Herleitungen des Kalman-Filters wird stets $c(k)$ als deterministisch angenommen. Dabei ist die hier gemachte Verallgemeinerung kaum schwieriger zu behandeln.

(3.1.2) Anfangsbedingungen

$$E\{x(0)\} = \mu(0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{cov}\{x(0)\} = P(0)$$

(3.1.3) Meßgleichung

$$y(k) = H(k) \cdot x(k) + v(k) \quad , \quad k \geq 0$$

$$\text{mit } E\{v(k)\} = 0$$

$$\text{cov}\{v(k), v(i)\} = \delta_{i k} \cdot R(k)$$

(3.1.4) Korrelationen

$$\text{cov}\{v(k), w(i)\} = 0 \quad , \quad i, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{cov}\{v(k), x(0)\} = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{cov}\{w(k), x(0)\} = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Zu einem aktuellen Zeitpunkt $k \geq 0$ hat man nun zusätzlich zu den Kenntnissen über die Prozesse x und y , die man aus den obigen Modellannahmen folgern kann (vgl. (3.1.6)-(3.1.10)), noch die Realisierungen von $y(i)$, $0 \leq i \leq k$, zur Verfügung. Diese Zufallsvektoren werden zusammengefaßt zu:

$$(3.1.5) \quad Y[0, k] := (y^T(0), y^T(1), \dots, y^T(k))^T$$

Aufgrund dieser Beobachtungen soll der Wert von $x(l)$, $l \geq k$, geschätzt werden. Dies ist genau die Situation des Kapitels 2 mit

$$y = Y[0,k] \quad \text{und} \quad x = x(l)$$

Aus den dort erwähnten Gründen werden wir uns auch hier auf Schätzer der Form $L(Y[0,k])$ beschränken, wobei L eine affine Funktion ist.

Vor der Herleitung der Filtergleichungen werden zunächst noch einige Beziehungen angegeben, die direkt aus dem vorgegebenen Modellgleichungen folgen.

Der Übergang von $x(k)$ zu $x(l)$, $l \geq k$ ergibt sich aus

$$(3.1.6) \quad x(l) = \Phi(l,k) \cdot x(k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot [c(i) + G(i) \cdot w(i)]$$

$$\text{wobei } \Phi(j,i) := \begin{cases} A(j-1) \cdot \dots \cdot A(i) & \text{für } j > i \\ I & \text{für } j = i \end{cases}$$

Insbesondere gilt also

$$(3.1.7) \quad x(l) = \Phi(l,0) \cdot x(0) + \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot [c(i) + G(i) \cdot w(i)]$$

und für den Erwartungswert $\mu(l) := E\{x(l)\}$

$$(3.1.8) \quad \begin{aligned} \mu(l) &= \Phi(l,k) \cdot \mu(k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot E\{c(i)\} \\ &= \Phi(l,0) \cdot \mu(0) + \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot E\{c(i)\} \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert $\tau(l) := E\{y(l)\}$ von y erhält man

$$(3.1.9) \quad \tau(l) = H(l) \cdot \mu(l)$$

Die Startzufallsvariable $x(0)$ und die Rauschprozesse v, w haben - gemäß Modellannahme - endliche 2. Momente. Da alle Übergänge im Modell linear sind, haben folglich auch die Prozesse x, y und c endliche 2. Momente. Für die Korrelationen dieser Prozesse mit den Rauschprozessen gilt nun:

(3.1.10) **Korrelationen** der Prozesse x, y, c mit den Rauschprozessen:

- a) Der Systemprozeß x , der Beobachtungsprozeß y und der Inputprozeß c sind mit gegenwärtigem und zukünftigen Systemrauschen unkorreliert, d.h.

$$\begin{aligned} \text{cov}\{x(k), w(j)\} &= 0 \\ \text{cov}\{y(k), w(j)\} &= 0 \quad \text{für } j \geq k \geq 0 \\ \text{cov}\{c(k), w(j)\} &= 0 \end{aligned}$$

b) Der Systemprozeß x ist mit gegenwärtigem und zukünftigen Meßrauschen unkorreliert, d.h.

$$\text{cov}\{x(k), v(j)\} = 0 \quad \text{für } j \geq k \geq 0$$

und der Beobachtungsprozeß y und der Inputprozeß c sind mit zukünftigen Meßrauschen unkorreliert, d.h.

$$\text{cov}\{y(k), v(j)\} = 0$$

$$\text{cov}\{c(k), v(j)\} = 0 \quad \text{für } j > k \geq 0$$

Beweis: Folgt aus den Modellannahmen mit Induktion über k .

Es sei $k \in \mathbb{N}$ der aktuelle Zeitpunkt.

Aufgrund der Beobachtungen von $Y^T[0, k] = (y^T(0), \dots, y^T(k))$ soll man die Realisierung von $x(l)$ für $l \geq k$ schätzen. Der Raum der zulässigen Schätzfunktionen sei dabei - wie in (2.4) - der Raum der affinen Schätzfunktionen:

$$L(k) := \{ z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid z = \alpha + C \cdot Y[0, k], \alpha \in \mathbb{R}^n, C \in M(n, (k+1) \cdot m) \}$$

Als Verlustfunktion sei wieder $V_S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$; $V_S(\epsilon) = \epsilon^T \cdot S \cdot \epsilon$ mit einer positiv definiten Matrix S gewählt.

Soll aufgrund von $Y[0, k]$ die Realisierung zukünftiger Beobachtungen $y(l)$, $l > k$, geschätzt werden, so sind dafür folgende Schätzfunktionen zulässig:

$$L^*(k) := \{ z^*: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \mid z^* = \alpha^* + C^* \cdot Y[0, k], \alpha^* \in \mathbb{R}^m, C^* \in M(m, (k+1) \cdot m) \}$$

Als Verlustfunktion sei in diesem Fall $V_{S^*}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$; $V_{S^*}(\delta) = \delta^T \cdot S^* \cdot \delta$ gewählt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} (3.1.11) \quad x(l|k) &:= \text{lineare kleinste-Quadrate Schätzer für } x(l) \\ &\quad \text{gegeben } y(0), \dots, y(k) \\ e(l|k) &:= x(l) - x(l|k) \quad \text{"Schätzfehler"} \\ y(l|k) &:= \text{lineare kleinste-Quadrate Schätzer für } y(l) \\ &\quad \text{gegeben } y(0), \dots, y(k) \end{aligned}$$

Hat man nun den Schätzer $x(k|k)$, so kann man die Schätzer $x(l|k)$ und $y(l|k)$ für $l > k$ leicht daraus berechnen:

(3.1.12) **Zusammenhang zwischen Filterung und Vorhersage**

Sei $x(k|k)$ optimaler linearer Schätzer für $x(k)$ gegeben $Y[0,k]$. Ferner sei $l > k$ und $c(i)$ für $k < i < l$ eine affine Funktion in $Y[0,k]$ (statt in $Y[0,i]$). Dann gilt:

$$x(l|k) = \Phi(l,k) \cdot x(k|k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot c(i)$$

$$e(l|k) = \Phi(l,k) \cdot e(k|k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot G(i) \cdot w(i)$$

$$E\{e(l|k)\} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{e(l|k)\} &= \Phi(l,k) \cdot \text{cov}\{e(k|k)\} \cdot \Phi(l,k)^T \\ &\quad + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot G(i) \cdot Q(i) \cdot G(i)^T \cdot \Phi(l,i+1)^T \end{aligned}$$

$$y(l|k) = H(l) \cdot x(l|k)$$

Insbesondere gilt für die Einschnitt-Vorhersage ($l=k+1$) :

$$x(k+1|k) = A(k) \cdot x(k|k) + c(k)$$

Beweis: Sei $l > k$

$$\text{Sei } z := \Phi(l,k) \cdot x(k|k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot c(i) \text{ gewählt.}$$

Da $c(i)$ für $k \leq i < l$ und $x(k|k)$ affine Funktionen in $Y[0,k]$ sind, ist auch z affin in $Y[0,k]$. z ist also eine zulässige Schätzfunktion für $x(l)$ gegeben $Y[0,k]$. Zu zeigen bleibt noch die Optimalität.

$$\text{Sei } e := x(l) - z$$

Nach Satz (2.4.5)(iv) genügt es zu zeigen, daß

$$E\{e\} = 0 \quad \text{und} \quad \text{cov}\{e, Y[0,k]\} = 0$$

Gemäß (3.1.6) und Bezeichnung (3.1.11) gilt

$$\begin{aligned} e &= x(l) - z \\ &= \Phi(l,k) \cdot e(k|k) + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(l,i+1) \cdot G(i) \cdot w(i) \end{aligned}$$

Aus $E\{e(k|k)\} = 0$ und $E\{w(i)\} = 0$ folgt hieraus

$$E\{e\} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \text{cov}\{e, Y[0, k]\} &= \Phi(1, k) \cdot \text{cov}\{e(k|k), Y[0, k]\} \\ &\quad + \sum_{i=k}^{l-1} \Phi(1, i+1) \cdot G(i) \cdot \text{cov}\{w(i), Y[0, k]\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn $\text{cov}\{e(k|k), Y[0, k]\} = 0$ wegen (2.4.5)(iv) und der Optimalität von $x(k|k)$ und $\text{cov}\{w(i), Y[0, k]\} = 0$ wegen (3.1.10)(a)

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Da man die Vorhersagen leicht aufgrund von (3.1.12) erhält, wird sich dieser abschnitt im folgenden mit der Filterung beschäftigen, d.h. mit der Bestimmung von $x(k|k)$.

Aus Satz (2.4.5) folgt

$$(3.1.13) \quad x(k|k) = E\{x(k)\} + D(k) \cdot [Y[0, k] - E\{Y[0, k]\}] ,$$

wobei die Matrix $D(k) \in M(n, (k+1) \cdot m)$ bestimmt wird durch:

$$(3.1.14) \quad \text{cov}\{x(k), Y[0, k]\} = D(k) \cdot \text{cov}\{Y[0, k]\}$$

Theoretisch könnte man nun $D(k)$ aus dieser Gleichung (3.1.4) berechnen. Praktisch wäre dies jedoch aufgrund der mit wachsendem k immer größer werdenden Matrizen kaum durchführbar. Man kann jedoch den optimalen Schätzer auch rekursiv berechnen. Diese Rekursionsgleichungen wurden 1960 von Kalman (vgl./11/) veröffentlicht und werden daher in der Literatur als Kalman-Filter-Algorithmus bezeichnet.

Im folgenden sollen, ausgehend von Satz (2.4.5), diese Filtergleichungen hergeleitet werden. Dazu seien zunächst noch folgende Bezeichnungen eingeführt, bzw. wiederholt:

(3.1.15) **Schätzfehler**

$$e(k|k-1) := x(k) - x(k|k-1)$$

$$e(k|k) := x(k) - x(k|k)$$

$$d(k|k-1) := y(k) - y(k|k-1)$$

(3.1.16) Fehlerkovarianzmatrizen

$$\begin{aligned}
P(k|k) &:= \text{cov}\{e(k|k)\} \\
P(k|k-1) &:= \text{cov}\{e(k|k-1)\} \\
P_d(k|k-1) &:= \text{cov}\{d(k|k-1)\}
\end{aligned}$$

Es sei nun k der aktuelle Zeitpunkt.

Der Schätzer $x(k-1|k-1)$ für $x(k-1)$ gegeben $Y[0,k]$ und die zugehörige Fehlerkovarianzmatrix $P(k-1|k-1)$ seien bekannt.

Nach (3.1.12) gelten dann für die Einschrittvorhersagen:

$$\begin{aligned}
(3.1.17) \quad x(k|k-1) &= A(k-1) \cdot x(k-1|k-1) + c(k-1) \\
P(k|k-1) &= A(k-1) \cdot P(k-1|k-1) \cdot A(k-1)^T + G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G(k-1)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.1.18) \quad y(k|k-1) &= H(k) \cdot x(k|k-1) \\
P_d(k|k-1) &= H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H(k)^T + R(k)
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt k erhält man dann neue Informationen über das System, nämlich die Realisierung von $y(k)$. Damit wird nun $x(k|k)$ bestimmt.

Zur Trennung der bisherigen Beobachtungen $Y[0,k-1]$ und der neuen Beobachtung $y(k)$ wird die Bestimmungsgleichung (3.1.14) in die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
(3.1.19) \quad a) \quad \text{cov}\{ x(k) - D(k) \cdot Y[0,k] , Y[0,k-1] \} &= 0 \\
b) \quad \text{cov}\{ x(k) - D(k) \cdot Y[0,k] , y(k) \} &= 0
\end{aligned}$$

aufgespalten und die Matrix $D(k)$ wird in

$$\begin{aligned}
(3.1.20) \quad D(k) &= [D^*(k), K(k)] \quad \text{mit } D^*(k) \in M(n, k \cdot m) \\
&\quad K(k) \in M(n, m)
\end{aligned}$$

aufgeteilt. Mit dieser Aufteilung gilt dann:

$$\begin{aligned}
(3.1.21) \quad x(k) - D(k) \cdot Y[0,k] & \\
&= x(k) - D^*(k) \cdot Y[0,k-1] - K(k) \cdot y(k) \\
&= x(k) - D^*(k) \cdot Y[0,k-1] - K(k) \cdot H(k) \cdot x(k) - K(k) \cdot v(k) \\
&\quad \text{nach (3.1.3)} \\
&= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k) - D^*(k) \cdot Y[0,k-1] - K(k) \cdot v(k)
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (3.1.19)(a) ein, so erhält man wegen (3.1.10)(b) :

$$\begin{aligned}
(3.1.22) \quad \text{cov}\{ x(k) - D(k) \cdot Y[0,k] , Y[0,k-1] \} & \\
&\quad \text{cov}\{ [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k) - D^*(k) \cdot Y[0,k-1] , Y[0,k-1] \}
\end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung (3.1.19)(a) äquivalent zu

$$(3.1.23) \quad [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot \text{cov}\{x(k), Y[0,k-1]\} = D^*(k) \cdot \text{cov}\{Y[0,k-1]\}$$

Wegen Satz (2.4.5) hat die optimale lineare Einschrittvorhersage die Form:

$$(3.1.24) \quad x(k|k-1) = E\{x(k)\} + D^{\wedge}(k) \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] ,$$

wobei für $D^{\wedge}(k)$ gilt:

$$\text{cov}\{x(k), Y[0,k-1]\} = D^{\wedge}(k) \cdot \text{cov}\{Y[0,k-1]\}$$

Damit gilt:

$$(3.1.25) \quad D_0^*(k) = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot D^{\wedge}(k)$$

ist eine spezielle Lösung von (3.1.23).

Die weiteren Lösungen von (3.1.23) sind genau die Matrizen $D^*(k)$ für die gilt:

$$D^*(k) \cdot \text{cov}\{Y[0,k-1]\} = D_0^*(k) \cdot \text{cov}\{Y[0,k-1]\}$$

Dies sind nach (2.4.11)(c) genau die Matrizen $D^*(k)$, für die es ein $(k) \in M(n, k \cdot m)$ gibt mit

$$(3.1.26) \quad (a) \quad D^*(k) = D_0^*(k) + (k) \quad \text{und}$$

$$(b) \quad (k) \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] = 0 \quad \text{P-fast sicher}$$

$$\text{bzw. } (k) \cdot \text{cov}\{Y[0,k-1]\} = 0$$

Die folgende Gleichung stellt den eigentlichen Übergang von Gleichung (3.1.14) zu einer rekursiven Gleichung dar. Die Gleichung besagt, daß die gesamte für $x(k|k)$ benötigte Information über die Beobachtungen $Y[0,k]$ bereits in $x(k|k-1)$ enthalten ist.

(3.1.27) Für die Lösungen $D^*(k)$ von (3.1.23) gilt:

$$\begin{aligned} D^*(k) \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] &= [D_0^*(k) + (k)] \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] \\ &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot D^{\wedge}(k) \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] \\ &\quad \text{P-fast sicher nach (3.1.26)(b)} \\ &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot [x(k|k-1) - E\{x(k)\}] \\ &\quad \text{nach (3.1.24)} \end{aligned}$$

Setzt man (3.1.20) und (3.1.27) in (3.1.13) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} (3.1.28) \quad x(k|k) &= E\{x(k)\} + D^*(k) \cdot [Y[0,k-1] - E\{Y[0,k-1]\}] \\ &\quad + K(k) \cdot (y(k) - E\{y(k)\}) \\ &= E\{x(k)\} + [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot [x(k|k-1) - E\{x(k)\}] \\ &\quad + K(k) \cdot (y(k) - E\{y(k)\}) \quad \text{P-fast sicher} \\ &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k|k-1) \\ &\quad + K(k) \cdot (y(k) - E\{y(k)\}) + H(k) \cdot E\{x(k)\} \\ &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k|k-1) + K(k) \cdot y(k) \quad \text{nach (3.1.9)} \\ &= x(k|k-1) + K(k) \cdot [y(k) - H(k) \cdot x(k|k-1)] \\ &= x(k|k-1) + K(k) \cdot [y(k) - y(k|k-1)] \quad \text{nach (3.1.18)} \\ &= x(k|k-1) + K(k) \cdot d(k|k-1) \quad \text{nach (3.1.15)} \end{aligned}$$

Diese Form läßt sich sehr schön veranschaulichen:

Bevor man die Beobachtung $y(k)$ zur Verfügung hat, also unter alleiniger Benutzung von $Y[0,k]$, werden vorläufige Schätzungen $x(k|k-1)$ für $x(k)$ und $y(k|k-1)$ für $y(k)$ gemacht. Tritt nun die Beobachtung $y(k)$ auf, so vergleicht man diese mit der vorläufigen Schätzung und stellt den Fehler $d(k|k-1)=y(k)-y(k|k-1)$ fest. Daraufhin wird die vorläufige Schätzung für $x(k)$ korrigiert und zwar proportional zum festgestellten Fehler mit einer Verstärkungsmatrix $K(k)$. Diese einfache und suggestive Prediktor-Korrektor-Form des Algorithmus hat wohl in hohem Maße mit zur Popularität des Kalman-Filters beigetragen.

In der bisherigen Herleitung fehlt nun noch die Bestimmung der Verstärkungsmatrix $K(k)$. Diese Matrix wird in der englisch-sprachigen Literatur auch als "Kalman gain" bezeichnet. Zur Herleitung der obigen Form (3.1.26) des optimalen Schätzers wurde nur die Bedingung (3.1.19)(a) herangezogen. Zur Bestimmung von $K(k)$ wird nun (3.1.19)(b) betrachtet.

Bestimmung der Verstärkungsmatrix $K(k)$:

Aus (3.1.21) und (3.1.27) folgt

$$\begin{aligned} (3.1.29) \quad & [x(k)-E\{x(k)\}] - D(k) \cdot [Y[0,k]-E\{Y[0,k]\}] \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot (x(k)-x(k|k-1)) - K(k) \cdot v(k) \quad \text{P-fast sicher} \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot e(k|k-1) - K(k) \cdot v(k) \end{aligned}$$

Dies in (3.1.19)(b) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} 0 & = \text{cov}\{x(k) - D(k) \cdot Y[0,k], y(k)\} \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot \text{cov}\{e(k|k-1), y(k)\} - K(k) \cdot \text{cov}\{v(k), y(k)\} \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot [\text{cov}\{e(k|k-1), x(k)\} \cdot H^T(k) + \text{cov}\{e(k|k-1), v(k)\}] \\ & \quad - K(k) \cdot \text{cov}\{v(k), x(k)\} \cdot H^T(k) - K(k) \cdot \text{cov}\{v(k), v(k)\} \quad \text{nach (3.1.3)} \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot [\text{cov}\{e(k|k-1), x(k)\} \cdot H^T(k) - K(k) \cdot \text{cov}\{v(k), v(k)\}] \\ & \quad \text{nach (3.1.10)(b)} \\ & = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) - K(k) \cdot R(k) \\ & \quad \text{denn aus (2.4.5)(v) folgt: } \text{cov}\{e(k|k-1), x(k)\} = \text{cov}\{e(k|k-1)\} \\ & \quad = P(k|k-1) \end{aligned}$$

Damit ist (3.1.19)(b) unter Berücksichtigung von (3.1.19)(a) äquivalent zu:

$$(3.1.30) \quad K(k) \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)] = P(k|k-1) \cdot H^T(k)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die Verstärkungsmatrix $K(k)$. Mit Hilfe von (3.1.18) kann man sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} (3.1.31) \quad & K(k) \cdot P_d(k|k-1) = P(k|k-1) \cdot H^T(k) \\ \text{d.h.} \quad & K(k) \cdot \text{cov}\{y(k)-y(k|k-1)\} = \text{cov}\{x(k)-x(k|k-1)\} \cdot H^T(k) \end{aligned}$$

Für den Schätzfehler $e(k|k) = x(k) - x(k|k-1)$ erhält man aus (3.1.29):

$$(3.1.32) \quad e(k|k) = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e(k|k-1) - K(k) \cdot v(k)$$

Für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers gilt folglich:

$$(3.1.33) \quad P(k|k) = \text{cov}\{e(k|k)\} \\ = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T + K(k) \cdot R(k) \cdot K^T(k) \\ \text{wegen (3.1.10)(b)}$$

beziehungsweise:

$$(3.1.34) \quad P(k|k) = \text{cov}\{e(k|k)\} = \text{cov}\{e(k|k), x(k)\} \quad \text{nach (2.4.5)(v)} \\ = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \\ \text{nach (2.4.5)(v) und (3.1.10)(b)}$$

Zusammenfassend bekommt man somit folgende **Rekursionsgleichungen**, mit denen man eine Version, d.h. bis auf P-fast-Gleichheit, des optimalen Schätzers erhält:

bekannt : $x(k-1|k-1)$ und $P(k-1|k-1)$
 vorläufige Schätzung : $x(k|k-1) = A(k-1) \cdot x(k-1|k-1) + c(k-1)$
 korrigierte Schätzung : $x(k|k) = x(k|k-1) + K(k) \cdot [y(k) - H(k) \cdot x(k|k-1)]$
 Kovarianzmatrizen und Verstärkungsmatrix:

$$P(k|k-1) = A(k-1) \cdot P(k-1|k-1) \cdot A^T(k-1) + G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G^T(k-1) \\ K(k) \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)] = P(k|k-1) \cdot H^T(k) \\ P(k|k) = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1)$$

Das mit wachsendem k immer größer werdende Gleichungssystem (3.1.14) wurde auf das Gleichungssystem (3.1.30) fester Größe ($m \times m$) reduziert. Anstatt die gesamte Matrix $D(k) = [D^*(k), K(k)]$ zu berechnen, benötigt man wegen der Beziehung (3.1.27) nur die $n \times m$ -Matrix $K(k)$.

Bisher wurde gezeigt, wie man aus dem Schätzer $x(k-1|k-1)$ und seiner Fehlerkovarianzmatrix $P(k-1|k-1)$ den Schätzer $x(k|k)$ und dessen Fehlerkovarianzmatrix $P(k|k)$ erhält. Um die Rekursion in Gang zu setzen benötigt man noch eine Anfangsschätzung $x(0|0)$ und $P(0|0)$. Diese werden direkt aus (3.1.14) bestimmt:

$$(3.1.35) \quad \text{cov}\{x(0), y(0)\} = D(0) \cdot \text{cov}\{y(0)\}$$

$$\text{Dabei ist } \text{cov}\{x(0), y(0)\} = \text{cov}\{x(0), x(0)\} \cdot H^T(0) + \text{cov}\{x(0), v(0)\} \\ = P(0) \cdot H^T(0) \quad \text{wegen (3.1.2) und (3.1.4)} \\ \text{cov}\{y(0)\} = \text{cov}\{H(0) \cdot x(0) + v(0)\} \\ = H(0) \cdot P(0) \cdot H^T(0) + R(0) \\ \text{wegen (3.1.2) und (3.1.4)}$$

Somit gilt:

$$(3.1.36) \quad D(0) \cdot [H(0) \cdot P(0) \cdot H^T(0) + R(0)] = P(0) \cdot H^T(0)$$

und wegen (3.1.13)

$$(3.1.37) \quad x(0|0) = \mu(0) + D(0) \cdot [y(0) - H(0) \cdot \mu(0)]$$

Dies paßt mit $P(0|-1) := P(0)$

$$x(0|-1) := \mu(0)$$

und $K(0) := D(0)$ in das obige Schema.

Damit kann nun der Kalman-Filter-Algorithmus formuliert werden:

(3.1.38) Kalman-Filter

$$\text{Modell: } x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + c(k) + G(k) \cdot w(k)$$

$$y(k) = H(k) \cdot x(k) + v(k) \quad , \quad k \geq 0$$

mit $c(k)$ affine Funktion in $Y[0,k]$

$$E\{w(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{w(k), w(i)\} = \delta_{i k} \cdot Q(k)$$

$$E\{v(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{v(k), v(i)\} = \delta_{i k} \cdot R(k)$$

$$\text{cov}\{w(k), v(i)\} = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$E\{x(0)\} = \mu(0) \quad \text{cov}\{x(0)\} = P(0)$$

$$\text{und} \quad \text{cov}\{v(k), x(0)\} = 0$$

$$\text{cov}\{w(k), x(0)\} = 0$$

Der optimale lineare Schätzer $x(k|k)$ für $x(k)$ gegeben $Y[0,k] := (y^T(0), \dots, y^T(k))^T$ bezüglich quadratischer Verlustfunktionen läßt sich rekursiv wie folgt berechnen:

Für $k \geq 0$ gilt:

(i) Filter

vorläufige Schätzung :

$$x(0|-1) = \mu(0) \quad \text{und}$$

$$x(k|k-1) = A(k-1) \cdot x(k-1|k-1) + c(k-1) \quad \text{für } k \geq 1$$

korrigierte Schätzung :

$$x(k|k) = x(k|k-1) + K(k) \cdot [y(k) - H(k) \cdot x(k|k-1)]$$

(ii) Kovarianzmatrizen und Verstärkungsmatrix:

$$P(0|-1) = P(0) \quad \text{und}$$

$$P(k|k-1) = A(k-1) \cdot P(k-1|k-1) \cdot A^T(k-1)$$

$$+ G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G^T(k-1) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$K(k) \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)] = P(k|k-1) \cdot H^T(k)$$

$$P(k|k) = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1)$$

Bemerkungen:

(3.1.39) Es sei nochmals betont, daß die Modelparameter für die Anwendung des Kalman-Filters bekannt sein müssen. Der Einfluß von Fehlern in den Parametern auf die Schätzfehler des Filters wird im Kapitel 4 diskutiert.

(3.1.40) Der Kalman-Filter berechnet zusätzlich zum optimalen Schätzer auch noch die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers.

Für den Schätzfehler $e(k|k)$ gilt $E\{e(k|k)\} = 0$

und $\text{cov}\{e(k|k)\} = P(k|k)$

Damit erhält man Aussagen über die "Güte" des Schätzers.

Im Falle von Normalverteilungen kennt man dadurch sogar die gesamte Verteilung:

1) Verteilung des Schätzfehlers $e(k|k)$:

$e(k|k)$ und $y[0,k]$ sind unkorreliert und wegen der Normalverteilungsannahme somit auch unabhängig. Daher ist die bedingte Verteilung von $e(k|k)$ bezüglich $Y[0,k]$ gleich der bedingten Verteilung von $e(k|k)$ und zwar $N(0, P(k|k))$

2) Die bedingte Verteilung von $x(k)$ bezüglich $Y[0,k]$ ist $N(x(k|k), P(k|k))$

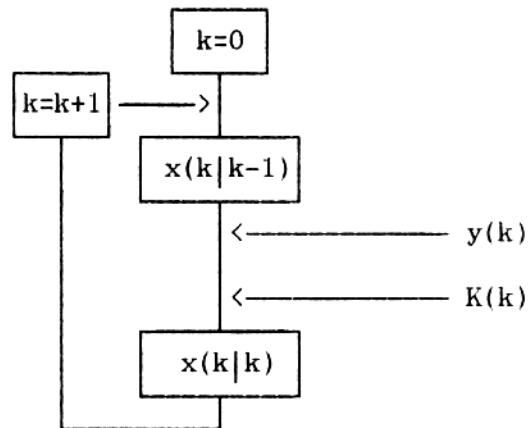
Damit ließen sich auch Konfidenzintervalle im Sinne der klassischen Statistik von Normalverteilungen konstruieren (vgl. Anhang B). Will man dies für mehrere Zeitpunkte gleichzeitig tun, so muß man allerdings auch die zeitliche Korrelation betrachten. Mehr dazu wird in Abschnitt 3.2. behandelt.

(3.1.41) Die Berechnungen der Fehlerkovarianzmatrizen und der Verstärkungsmatrix gemäß (3.1.38)(ii) lassen sich für ein konkretes Modell schon vor der Verfügbarkeit der Beobachtungen y durchführen. Daraus resultieren im wesentlichen zwei Vorteile:

1) Man kann das Fehlerverhalten des Schätzers (vgl. 3.1.32) schon vor der physischen Realisation beurteilen. Dies ist eine Hilfe zur Konstruktion "guter" Modelle.

2) Bei Anwendungen, die eine möglichst kurze Rechenzeit erfordern (z.Bsp. Navigation von Flugobjekten), kann man die Verstärkungsmatrix schon vorher berechnen und abspeichern. Dies bedeutet jedoch einen höheren Speicherbedarf. Im Abschnitt 3 dieses Kapitels wird gezeigt, daß bei zeitinvarianten Modellen, d.h. die Modellparameter sind unabhängig von der Zeit, unter bestimmten Voraussetzungen die Verstärkungsmatrix $K(k)$ gegen einen stationären Wert konvergiert ("steady state"). Ist diese Konvergenz schnell genug, so kann man diesen stationären Wert von Anfang an als Approximation der Verstärkungsmatrix benutzen und somit Speicherplatz und Rechenzeit sparen.

Die Berechnung des Schätzers sieht dann skizzenhaft noch folgendermaßen aus:



- (3.1.42) (a) Gilt zu den Modellvoraussetzungen zusätzlich, daß $R(k)$ für alle $k \geq 0$ regulär ist, so ist auch die Fehlerkovarianzmatrix $P_d(k|k-1)$ für alle $k \geq 0$ regulär.
- (b) Gilt zu den Modellvoraussetzungen zusätzlich, daß $P(0)$, $R(k)$ und $A(k)$ für alle $k \geq 0$ regulär sind, so sind auch die Fehlerkovarianzmatrizen $P(k|k-1)$ und $P(k|k)$ für alle $k \geq 0$ regulär.
- (c) Gilt zu den Modellvoraussetzungen zusätzlich, daß $R(k)$ und $G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k)$ für alle $k \geq 0$ regulär sind, so sind auch die Fehlerkovarianzmatrizen $P(k|k-1)$ und $P(k|k)$ für alle $k \geq 1$ regulär.

Beweis:

- (a) $P_d(k|k-1) = H(k) \cdot P(k) \cdot H^T(k) + R(k)$ ist als Summe einer positiv semidefiniten und einer positiv definiten Matrix wieder positiv definit.

(b) Induktion über k:

$k=0$: $P(0|-1) = P(0)$ ist regulär

Dann ist auch $P^{-1}(0|-1) + H^T(0) \cdot R^{-1}(0) \cdot H(0)$ regulär.

Wegen

$$\begin{aligned}
& P(0|0) \cdot [P^{-1}(0|-1) + H^T(0) \cdot R^{-1}(0) \cdot H(0)] \\
&= [I - K(0) \cdot H(0)] + [I - K(0) \cdot H(0)] \cdot P^{-1}(0|-1) \cdot H^T(0) \cdot R^{-1}(0) \cdot H(0) \\
&= [I - K(0) \cdot H(0)] + K(0) \cdot R(0) \cdot R^{-1}(0) \cdot H(0) = I
\end{aligned}$$

ist somit auch $P(0|0)$ regulär.

$k \rightarrow k+1$: $P(k+1|k) = A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G^T(k-1)$

ist regulär und somit auch

$$P^{-1}(k+1|k) + H^T(k+1) \cdot R^{-1}(k+1) \cdot H(k+1) .$$

Wegen

$$P(k+1|k+1) \cdot [P^{-1}(k+1|k) + H^T(k+1) \cdot R^{-1}(k+1) \cdot H(k+1)] = I$$

ist somit auch $P(k+1|k+1)$ regulär.

(c) Für $k \geq 1$ ist

$P(k+1|k) = A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G^T(k-1)$ regulär
und somit ist analog zu Beweis von (b) auch $P(k|k)$ regulär. ■

(3.1.43) Die Modellannahmen seien wie in (3.1.38). Allerdings sei die Beobachtung $y(0)$ zum Zeitpunkt 0 nicht gegeben, d.h. gesucht ist ein Schätzer für $x(k)$ gegeben $y(1), \dots, y(k)$.

Daraus resultiert eine andere Behandlung der Anfangswerte.

Man bekommt diese aus dem Ansatz

$$\text{cov}\{x(1), y(1)\} = D(1) \cdot \text{cov}\{y(1)\} \quad \text{anstelle von (3.1.35).}$$

Es ergibt sich folgender Algorithmus:

(i) Filter:

Anfangsschätzung : $x(0|0) = \mu(0)$

Für $k \geq 1$: vorläufige Schätzung : $x(k|k-1)$

korrigierte Schätzung : $x(k|k)$

mit den Formeln von (3.1.38)(i))

(ii) Matrizen:

Anfangswert : $P(0|0) = P(0)$

Für $k \geq 1$: Berechnung von $P(k|k-1)$

" " $K(k)$

" " $P(k|k)$

mit den Formeln von (3.1.38)(ii)

Dies sollte hier nur erwähnt werden, um keine unnötigen Schwierigkeiten beim Vergleich dieser Darstellung mit der Darstellung in (3.1.38) aufkommen zu lassen, da beide in der verbreitet sind.

(3.1.44) Auflösung der Rekursion der Filtergleichungen (3.1.38)(i)

Für $k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k|k-1) \\ &\quad + A(k) \cdot K(k) \cdot y(k) + c(k) \\ x(k+1|k+1) &= [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot x(k|k) \\ &\quad + K(k+1) \cdot y(k+1) + [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot c(k) \end{aligned}$$

Die Matrizen $\pi(k+1, k) := [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k)$

$$\theta(k+1, k) := A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]$$

sind die Übertragungsmatrizen des Filters und analog zu (3.1.6) werden folgende Matrizen definiert:

$$\begin{aligned} \pi(i, i) &:= I \quad \text{und} \quad \theta(i, i) := I \quad \text{und für } k > i \text{ definiere} \\ \pi(k, i) &:= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot A(k-1) \cdot \dots \cdot [I - K(i+1) \cdot H(i+1)] \cdot A(i) \\ \theta(k, i) &:= A(k-1) \cdot [I - K(k-1) \cdot H(k-1)] \cdot \dots \cdot A(i) \cdot [I - K(i) \cdot H(i)] \end{aligned}$$

Mit diesen Matrizen gilt für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} x(k|k-1) &= E\{x(k)\} + \sum_{i=0}^{k-1} \theta(k, i+1) \cdot A(i) \cdot K(i) \cdot [y(i) - E\{y(i)\}] \\ y(k|k-1) &= E\{y(k)\} + \sum_{i=0}^{k-1} H(k) \cdot \theta(k, i+1) \cdot A(i) \cdot K(i) \cdot [y(i) - E\{y(i)\}] \\ x(k|k) &= E\{x(k)\} + \sum_{i=0}^k \pi(k, i) \cdot K(i) \cdot [y(i) - E\{y(i)\}] \end{aligned}$$

Beweis durch Induktion über k .

(3.1.45) Auflösung der Rekursion der Kovarianzgleichungen (3.1.38)(ii)

Formuliert man die Rekursionsgleichungen in (3.1.38)(ii) für die Kovarianzmatrizen etwas um, so erhält man sogenannte Riccati-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 P(k+1|k) &= A(k) \cdot [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \cdot A^T(k) \\
 &\quad + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \\
 &= A(k) \cdot P(k|k-1) \cdot A^T(k) \\
 &\quad - A(k) \cdot K(k) \cdot H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \\
 &= A(k) \cdot P(k|k-1) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \\
 &\quad - A(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) \cdot \\
 &\quad \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)]^+ \cdot \\
 &\quad \cdot H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot A^T(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(k+1|k+1) &= [I-K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot P(k+1|k) \\
 &= P(k+1|k) \\
 &\quad - P(k+1|k) \cdot H^T(k+1) \cdot \\
 &\quad \cdot [H(k+1) \cdot P(k+1|k) \cdot H^T(k+1) + R(k+1)]^+ \cdot H(k+1) \cdot P(k+1|k) \\
 &= A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \\
 &\quad - ([A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k)] \cdot H^T(k+1) \cdot \\
 &\quad \cdot [H(k+1) \cdot A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) \cdot H^T(k+1) \\
 &\quad + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \cdot H^T(k+1) + R(k+1)]^+ \cdot \\
 &\quad \cdot H(k+1) \cdot [A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k)])
 \end{aligned}$$

(3.1.46) **Zur Numerik des Filters**

Numerische Probleme treten vor allem in Teil (3.1.38)(ii) auf. Zunächst ist dort ein Gleichungssystem für $K(k)$ zu lösen. Dabei ist $P_d(k|k-1) = H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)$ eine positiv semidefinite ($m \times m$)-Matrix, wobei m die Dimension der Beobachtung y ist.

Die Form zur Berechnung von $P(k|k)$ in (3.1.38)(ii) bringt bedingt durch die Differenz von Matrizen die Gefahr empfindlicher Rundungsfehler und die Gefahr der Zerstörung der Positiv-Semidefinitheit von $P(k|k)$ mit sich. Eine in dieser Hinsicht günstigere Form ist die in (3.1.33) aufgeführte sogenannte "Josephform". Hier ist $P(k|k)$ als die Summe zweier positiv semidefiniter Matrizen dargestellt. Diese Form benötigt jedoch mehr Rechenoperationen.

Weitere Algorithmen zur Berechnung des Kalman-Filters, die numerisch wesentlich stabiler sind als die hier dargestellte "Kovarianz-Form", sind die sogenannten "Square-Root-Algorithmen". Sie beruhen darauf, daß sich eine positiv semidefinite Matrix M zerlegen läßt in $M=S \cdot S^T$. Die Idee ist es anstatt von $P(k|k)$ und $P(k|k-1)$ deren "Wurzeln" zu aktualisieren und diese zu verwenden. Für eine ausführliche Darstellung der Numerik des Filters und der "Square-Root-Algorithmen" sei auf Maybeck (/15/,Bd.1) und Bierman (/4/) verwiesen.

(3.1.47) In dem hier benutzten Modell (3.1.1)-(3.1.4) wurden die zufälligen Einflüsse als "weißes Rauschen" modelliert. Es wurde ferner angenommen, daß die beiden Rauschprozesse unkorreliert sind. Diese Voraussetzungen können abgeschwächt werden. Eine verbreitete Methode ist dabei durch Zustandsraumvergrößerung, d.h. durch Erhöhen der Dimensionen, allgemeinere Prozesse, in denen Korrelationen auftreten, auf die hier behandelte Form zu transformieren (vgl./10/,S.209ff).

Zum Schluß dieses Abschnitts soll noch als Beispiel des Kalman-Filters die Schätzung des Zustandes einer eindimensionalen Irrfahrt mit überlagertem Beobachtungsfehler diskutiert werden. Das Besondere an diesem Beispiel ist, daß das zur Filterung benutzte Modell exakt ist, die alleinige Betrachtung von linearen Schätzern jedoch eine wirkliche Einschränkung bedeutet.

Der allgemein optimale Schätzer, d.h. die bedingte Erwartung, ist nämlich nicht linear. Dies liegt daran, daß die Rauschprozesse nicht normalverteilt sind.

(3.1.48) Beispiel: Eindimensionale Irrfahrt mit Beobachtungsfehlern

Der Zustand des Systems sei eine eindimensionale Irrfahrt, d.h.

$$\begin{aligned} (*) \quad & x(k+1) = x(k) + w(k) \quad \text{für } k \geq 0 \\ & \text{mit } P\{w(k)=i\} = 1/3 \quad \text{für } i \in \{-1,0,+1\} \\ & \text{d.h. } E\{w(k)\} = 0, \quad \text{var}\{w(k)\} = 2/3 \\ & \text{außerdem seien } w(k), w(l) \text{ unabhängig für } l \neq k. \end{aligned}$$

Der Anfangszustand ist $x(0)=0$, d.h. $E\{x(0)\}=0$, $\text{var}\{x(0)\}=0$

Den aktuellen Zustand $x(k)$ der Irrfahrt kann man allerdings nicht beobachten. Man erhält als Beobachtung den Zustand $x(k)$ oder einen seiner Nachbarzustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit, d.h.

$$\begin{aligned} (**) \quad & y(k) = x(k) + v(k) \quad \text{für } k \geq 1 \quad \text{und } y(0)=0 \\ & \text{mit } P\{v(k)=i\} = 1/3 \quad \text{für } i \in \{-1,0,+1\} \\ & \text{d.h. } E\{v(k)\} = 0, \quad \text{var}\{v(k)\} = 2/3 \\ & \text{außerdem seien } v(k), v(l) \text{ unabhängig für } l \neq k \\ & \text{und } v(l) \text{ und } w(k) \text{ unabhängig für alle } l, k. \end{aligned}$$

Der bezüglich quadratischer Verlustfunktion optimale Schätzer ist die bedingte Erwartung

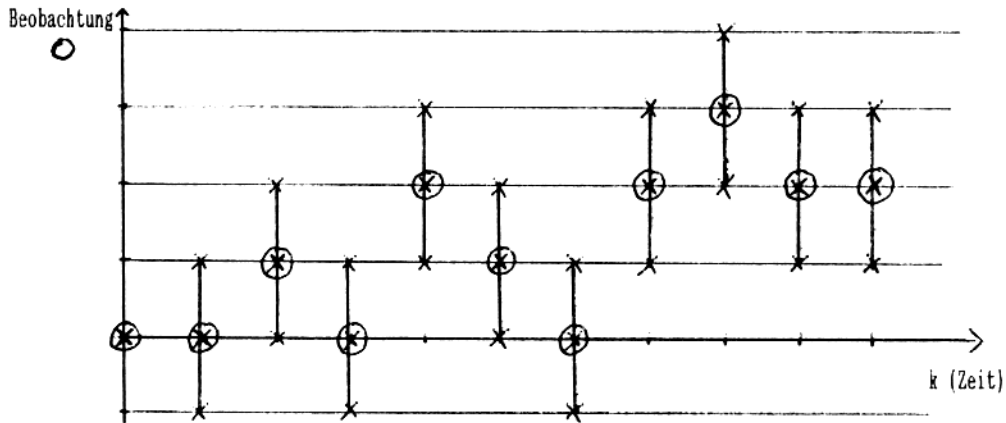
$$\hat{x}(k) = E\{x(k) | Y[0,k]\}$$

Dieser in diesem Beispiel nichtlineare Schätzer wird im folgenden berechnet. Man wird dabei sehen, daß man in diesem Fall die (nichtlineare) bedingte Erwartung auch leicht rekursiv berechnen kann.

Anschließend wird der allgemein optimale Schätzer mit dem aus dem Kalman-Filter resultierendem optimalen linearen Schätzer verglichen.

Die Idee zur Berechnung der bedingten Erwartung ist folgende:

Gegeben seien folgende Beobachtungen $y(0), \dots, y(10)$



Bei einer Beobachtung $y(i)$ sind die 3 Zustände $y(i)-1, y(i), y(i)+1$ für $x(i)$ möglich. Gegeben die Beobachtungen $y(0), \dots, y(10)$ sind nur diejenigen Pfade möglich, die in dem oben gezeichneten Band liegen.

Aus den Modellannahmen (*) und (**) erhält man für alle $i \in \mathbb{N}$:

- (1) $x(i)$ ist ganzzahlig
- (2) $x(i) - y(i) = w(i) \in \{-1, 0, +1\}$
- (3) $x(i) - x(i-1) = w(i-1) \in \{-1, 0, +1\}$

Die möglichen Zustände zum Zeitpunkt i gegeben die Beobachtungen $y(i)$ sind wegen (2) :

$$Z(i) := \{y(i)-1, y(i), y(i)+1\}$$

Anders ausgedrückt : $P\{ x(i) \in Z(i) \mid y(i) \} = 1$

Sei k der aktuelle Zeitpunkt.

Definiere $X[0, k] := (x(0), \dots, x(k))^T$ und $Y[0, k] := (y(0), \dots, y(k))^T$.

Für eine mögliche Realisierung $X[0, k](w)$ der Irrfahrt gegeben die Beobachtung $Y[0, k]$ muß gelten:

$$x(i)(w) \in Z(i) \quad \text{für } 0 \leq i \leq k \quad (Z(0) = \{0\})$$

d.h. $P\{ x(i) \in Z(i) , 0 \leq i \leq k \mid Y[0, k] \} = 1$

Für die bedingte Verteilung von $x(k)$ gegeben $Y[0, k]$ müssen folglich nur die 3 bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{ x(k) = l \mid Y[0, k] \} \quad \text{für } l \in Z(k)$$

bestimmt zu werden.

Es sei

$R(i,n) :=$ Menge der verschiedenen möglichen Realisierungen von $X[0,i]$, die sich, gegeben die Realisierung $Y[0,i]$, zum Zeitpunkt i im Zustand n befinden

$N(i,n) :=$ Kardinalität von $R(i,n)$.

Aus obiger Diskussion ergibt sich:

(***) $N(0,0) = 1$, $N(0,n) = 0$ für $n \neq 0$
 $N(i,n) = 0$ für alle $n \notin Z(i)$, $i \geq 0$

Es sei $N(i) := \sum_{n \in Z} N(i,n) = \sum_{n \in Z(i)} N(i,n)$ die Gesamtanzahl der möglichen Realisierungen von $X[0,i]$ gegeben die Realisierung $Y[0,i]$

Da nach Modellannahme $w(k) \in \{-1,0,+1\}$ ist, folgt

$(\tau_1, \dots, \tau_k, n) \in R(k+1,n) \Leftrightarrow (\tau_1, \dots, \tau_k) \in R(k,n-1) \cup R(k,n) \cup R(k,n+1)$

und wegen der Unabhängigkeitsannahmen bezüglich der $v(i)$ und $w(i)$ gilt:

$$N(k+1,n) = N(k,n-1) + N(k,n) + N(k,n+1)$$

Diese Häufigkeitszahlen lassen sich unter Berücksichtigung von (***) leicht rekursiv berechnen. Dabei sind zu jedem Zeitpunkt i nur die 3 Zahlen $N(i,y(i)-1)$, $N(i,y(i))$, $N(i,y(i)+1)$ interessant, da die restlichen sowieso alle gleich Null sind.

Wegen der Unabhängigkeit der $v(i)$ und der $w(i)$ sind alle möglichen Realisierungen auch gleichwahrscheinlich. Folglich gilt für $k \geq 0$:

$$P\{x(k) = n \mid Y[0,k]\} = N(k,n)/N(k) \quad \text{für } n \in Z(k)$$

Damit ist nun die bedingte Verteilung gegeben.

Für die bedingte Erwartung gilt:

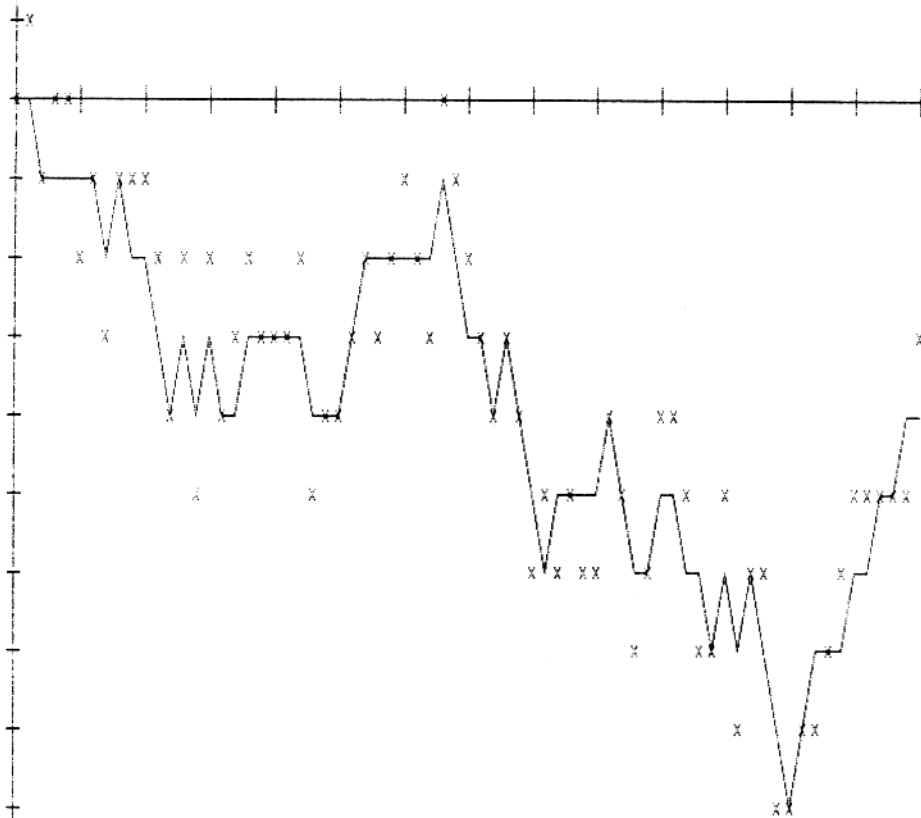
$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= E\{x(k) \mid Y[0,k]\} \\ &= [1/N(k)] \cdot [(y(k)-1) \cdot N(k,y(k)-1) + y(k) \cdot N(k,y(k)) \\ &\quad + (y(k)+1) \cdot N(k,y(k)+1)] \\ &= y(k) + [N(k,y(k)+1) - N(k,y(k)-1)]/N(k) \\ &= y(k) + [P_k(1) - P_k(-1)] \quad \text{mit } P_k(i) = N(k,y(k)+i)/N(k) \end{aligned}$$

Für die bedingte Varianz gilt:

$$\begin{aligned} \text{var}\{x(k)|Y[0,k]\} &= [1/N(k)] \cdot [((y(k)-1) - \hat{x}(k))^2 \cdot N(k,y(k)-1) \\ &\quad + (y(k) - \hat{x}(k))^2 \cdot N(k,y(k)) \\ &\quad + ((y(k)+1) - \hat{x}(k))^2 \cdot N(k,y(k)+1)] \\ &= \sum_{k=-1}^1 P_k(i) \cdot [(P_k(1)-P_k(-1)) - i]^2 \end{aligned}$$

Aus einer Simulation bis zum Zeitpunkt $k=70$ resultierte folgender Zustands-, bzw Beobachtungsprozeß. Dabei wurden die wirklichen Zustände mit Linien verbunden und die Beobachtungen mit Kreuzen markiert.

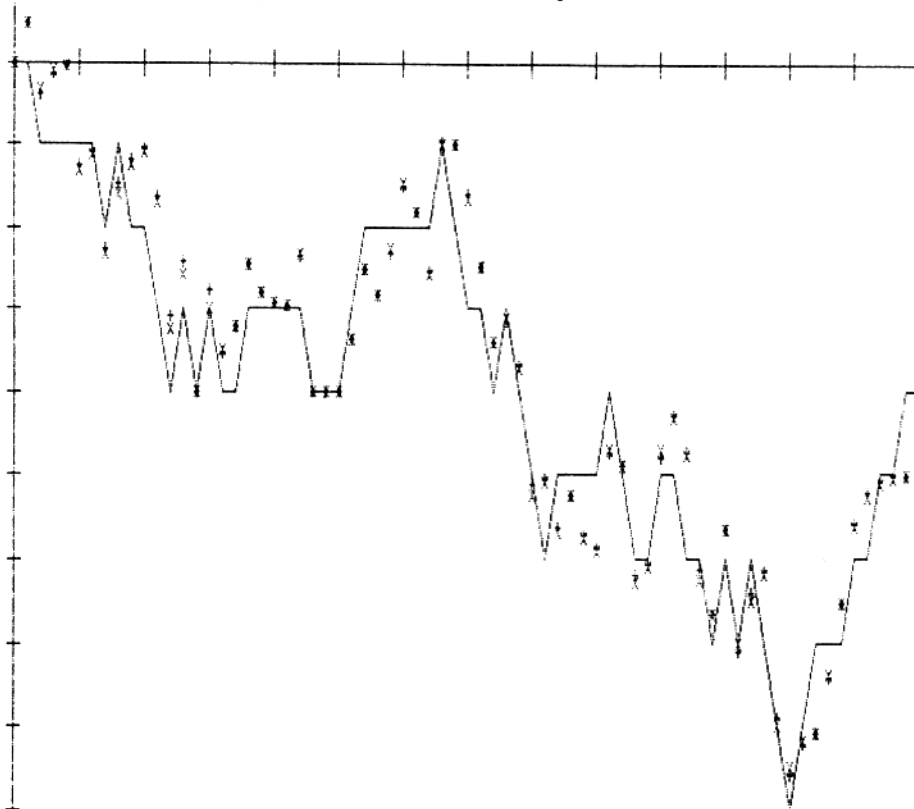
Zustands - und Beobachtungsprozeß



Einheiten: X-Achse 5.000E+00 Y-Achse 1.000E+00

Das folgende Bild zeigt den Zustandsprozeß x (durch Linien verbunden)
zusammen mit der bedingten Erwartung (durch x markiert)
und dem optimalen linearen Schätzer (durch $+$ markiert)

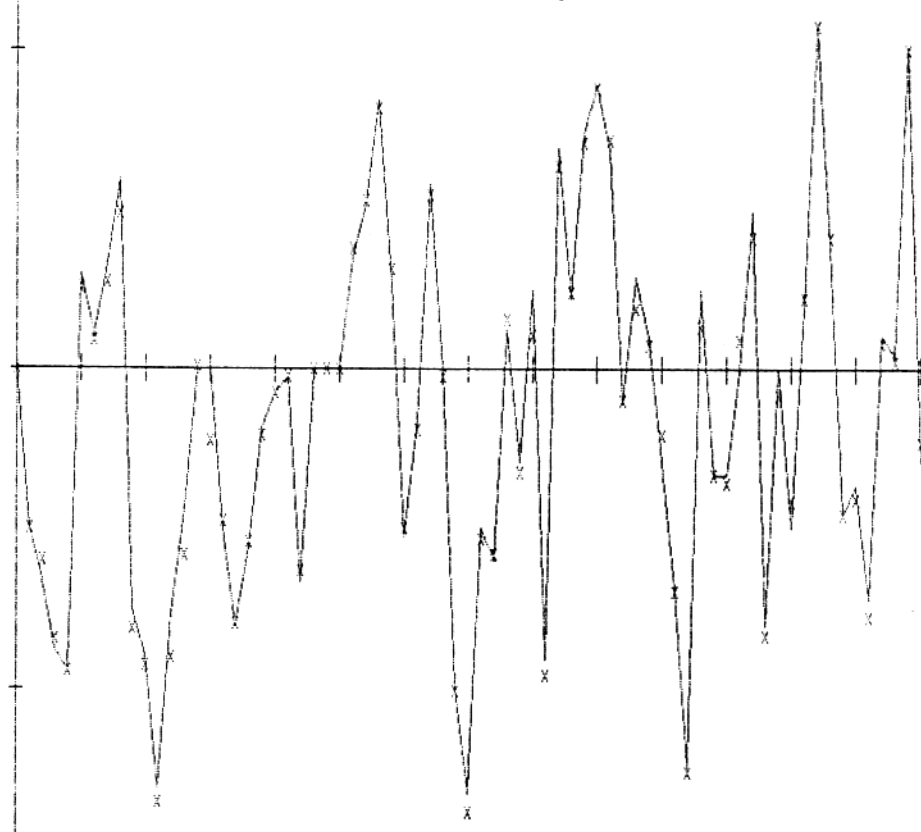
Wahrer Prozeß, bedingte Erwartung und Filterung



Einheiten: X-Achse $5.000E+00$ Y-Achse $1.000E+00$

Der Vergleich der beiden Schätzfehler zeigt, wie gut in diesem Beispiel der lineare Schätzer im Vergleich zur nichtlinearen bedingten Erwartung ist. Die Linien zeigen dabei den Fehler bei der bedingten Erwartung und die Kreuze den Fehler bei der Filterung:

Fehler bei bedingter Erwartung und bei Filterung



Einheiten: X-Achse 5.000E+00 Y-Achse 1.000E+00

3.2 Fehlerprozesse beim Kalman-Filter und Tests

Der Kalman-Filter besitzt eine Reihe von praktisch bedeutenden Eigenschaften. Einige wurden in den Bemerkungen am Schluß des vorigen Abschnitts (3.1) kurz angesprochen, weitere sollen in diesem und im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutiert werden. Zunächst werden die beim Kalman-Filter auftretenden Fehlerprozesse betrachtet.

Bei der Herleitung spielten die beiden Fehlerprozesse

$$e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) \text{ und } e(k|k) = x(k) - \hat{x}(k|k)$$

eine wesentliche Rolle, denn auf sie bezog sich die Verlustfunktion und folglich die Optimierung. Zusammen mit den Filtergleichungen wurden auch Rekursionsformeln für die Kovarianzmatrizen $P(k|k-1)$ und $P(k|k)$ dieser Fehlerprozesse hergeleitet (vgl. (3.1.40)). Um die zeitliche Korrelation dieser Fehlerprozesse zu beschreiben, werden zunächst einige Symbole zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt.

Die Filtergleichungen in (3.1.38)(ii) kann man folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} (3.2.1) \quad x(k+1|k+1) &= [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot x(k|k) + c(k) \\ &\quad + K(k+1) \cdot [y(k+1) - H(k+1) \cdot c(k)] \\ x(k+1|k) &= A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k|k-1) + A(k) \cdot K(k) \cdot y(k) + c(k) \end{aligned}$$

Die Matrizen $\pi(k+1, k) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k)$ und

$\theta(k+1, k) = A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]$ stellen somit die Übergangsmatrizen des Kalman-Filters dar. In (3.1.44) wurden in diesem Zusammenhang folgende Definitionen gegeben:

$$\begin{aligned} (3.2.2) \quad \pi(k, k) &= I \quad \text{und für } l > k \\ \pi(l, k) &= [I - K(l) \cdot H(l)] \cdot A(l-1) \cdot \dots \cdot [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \\ \theta(k, k) &= I \quad \text{und für } l > k \\ \theta(l, k) &= A(l-1) \cdot [I - K(l-1) \cdot H(l-1)] \cdot \dots \cdot A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \end{aligned}$$

Die zeitlichen Kovarianzmatrizen seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (3.2.3) \quad P^*(l, k) &:= \text{cov}\{e(l|l-1), e(k|k-1)\} \\ P^{\wedge}(l, k) &:= \text{cov}\{e(l|l), e(k|k)\} \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann folgender Satz:

(3.2.4) Zeitliche Entwicklung der Fehlerprozesse $e(k|k)$ und $e(k|k-1)$

Für $l \geq k$ gilt:

(a) $e(l|l) =$

$$\pi(l,k) \cdot e(k|k) + \sum_{i=k}^{l-1} \pi(l,i+1) \cdot [(I-K(i+1)) \cdot H(i+1)] \cdot G(i) \cdot w(i) - K(i+1) \cdot v(i+1)]$$

$e(l|l-1) =$

$$\theta(l,k) \cdot e(k|k-1) + \sum_{i=k}^{l-1} \theta(l,i+1) \cdot [G(i) \cdot w(i) - A(i) \cdot K(i) \cdot v(i)]$$

(b) $P^\wedge(l,k) = \pi(l,k) \cdot P^\wedge(k|k)$

$P^*(l,k) = \theta(l,k) \cdot P^*(k|k)$

Dabei gilt mit den Bezeichnungen von Kapitel (3.1)

$P^\wedge(k|k) = P(k|k)$ und $P^*(k|k) = P(k|k-1)$

Beweis:

(a) Aus den Filtergleichungen folgt:

$$\begin{aligned} e(l|l) &= x(l) - x(l|l) \\ &= x(l) - [I-K(l) \cdot H(l)] \cdot x(l|l-1) - K(l) \cdot [H(l) \cdot x(l) + v(l)] \\ &= [I-K(l) \cdot H(l)] \cdot e(l|l-1) - K(l) \cdot v(l) \end{aligned}$$

und nach (3.1.12) gilt:

$$e(l|l-1) = A(l-1) \cdot e(l-1|l-1) + G(l-1) \cdot w(l-1)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} e(l|l) &= \pi(l|l-1) \cdot e(l-1|l-1) + [I-K(l) \cdot H(l)] \cdot G(l-1) \cdot w(l-1) - K(l) \cdot v(l) \\ e(l|l-1) &= \theta(l|l-1) \cdot e(l-1|l-2) + G(l-1) \cdot w(l-1) - A(l-1) \cdot K(l-1) \cdot v(l-1) \end{aligned}$$

Daraus folgt nu sofort Teil (a) des Satzes.

(b) Da $e(k|k) = x(k) - x(k|k)$ und $x(k|k)$ eine affine Funktion in $Y[0,k]$

ist, gilt nach (3.1.10) für $i \geq k$:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{w(i), e(k|k)\} &= 0 \\ \text{cov}\{v(i+1), e(k|k)\} &= 0 \end{aligned}$$

Da $e(k|k-1) = x(k) - x(k|k-1)$ und $x(k|k-1)$ eine affine Funktion in

$Y[0,k]$ ist, gilt nach (3.1.10) für $i \geq k$:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{w(i), e(k|k-1)\} &= 0 \\ \text{cov}\{v(i), e(k|k-1)\} &= 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen und Teil (a) folgt nun Teil (b). ■

Dies soll im Moment an Bemerkungen über diese Fehlerprozesse genügen. In (3.3.26) wird gezeigt, daß die Übergangsmatrizen unter bestimmten Voraussetzungen für festes k mit $l \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null konvergieren und somit die zeitliche Korrelation dieser Fehlerprozesse zumindest für größere Zeitabstände $l-k$ nahezu Null ist. Auf der anderen Seite wird dann in Kapitel 4 die Auswirkungen falscher Modelle auf diese Fehlerprozesse untersucht.

Ein weiterer Fehlerprozeß, der beim Kalman-Filter auftritt, ist der Fehler bei der Einschnitt-Vorhersage von $y(k)$, nämlich :

$$(3.2.5) \quad d(k|k-1) := y(k) - y(k|k-1) = y(k) - H(k) \cdot x(k|k-1)$$

Diesen Prozeß kann man, im Gegensatz zu den vorher betrachteten Prozessen $e(k|k)$ und $e(k|k-1)$, beobachten, denn sobald die neue Beobachtung $y(k)$ verfügbar ist, kann man auch den Wert von $d(k|k-1)$ bestimmen. Dies kann man sich in der Praxis zunutze machen. Der Prozeß $d(k|k-1)$ hat, wie weiter unten gezeigt wird, einfache statistische Eigenschaften. Durch Vergleich der aus den Realisierungen von $d(k|k-1)$ geschätzten mit den theoretischen Eigenschaften, kann man Rückschlüsse auf die "Korrektheit" des Filters gewinnen. Analog zu $d(k|k-1)$ kann man noch folgenden Prozeß definieren:

$$(3.2.6) \quad d(k|k) := y(k) - H(k) \cdot x(k|k)$$

Man sollte hier beachten, daß $H(k) \cdot x(k|k)$ nicht dasselbe ist, wie $y(k|k)$, denn $y(k|k) = y(k)$.

Mit diesen Bezeichnungen kann man die Gleichung für die korrigierte Schätzung in (3.1.38)(i) folgendermaßen schreiben:

$$(3.2.7) \quad x(k|k) = x(k|k-1) + K(k) \cdot d(k|k-1)$$

Der Prozeß $d(k|k-1)$ stellt also die Information dar, die durch die neue Beobachtung $y(k)$ zu der bisherigen Information, dargestellt durch $x(k|k-1)$, hinzukommt. Der Prozeß $d(k|k-1)$ wird daher auch als Erneuerungsprozeß bezeichnet.

Der Kalman-Filter kombiniert die Information aus dem Modell mit den aus der Beobachtung gewonnenen Information mit Hilfe der Verstärkungsmatrix $K(k)$.

Zur Charakterisierung der gerade definierten Prozesse soll der folgende Satz dienen:

(3.2.8) (a) Die Fehlerprozesse hängen wie folgt zusammen:

$$d(k|k-1) = H(k) \cdot e(k|k-1) + v(k)$$

$$d(k|k) = H(k) \cdot e(k|k) + v(k)$$

$$d(k|k) = [I - H(k) \cdot K(k)] \cdot d(k|k-1)$$

(b) Der Prozeß $d(k|k-1)$ ist ein weißes Rauschen, genauer:

$$E\{d(k|k-1)\} = 0$$

$$\text{cov}\{d(1|1), d(k|k-1)\} = \delta_{1k} \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)]$$

(c) Der Prozeß $d(k|k)$ ist ein weißes Rauschen, genauer:

$$E\{d(k|k)\} = 0$$

$$\text{cov}\{d(1|1), d(k|k)\} = \delta_{1k} \cdot [I - H(k) \cdot K(k)] \cdot R(k)$$

(d) Der Prozeß $d(k|k-1)$ ist unkorreliert mit $x(k|k-1)$ und

$$e(k|k), \text{ d.h. } \text{cov}\{d(k|k-1), x(k|k-1)\} = 0$$

$$\text{cov}\{d(k|k-1), e(k|k-1)\} = 0$$

und für $i \leq k-1$ gilt: $\text{cov}\{d(k|k-1), y(i)\} = 0$

Definiert man $a(k) := K(k) \cdot d(k|k-1)$, so gilt:

$$a(k) = x(k|k) - x(k|k-1) = e(k|k-1) - e(k|k)$$

Der Prozeß $a(k)$ ist ein weißes Rauschen, genauer:

$$E\{a(k)\} = 0$$

$$\text{cov}\{a(1), a(k)\} = \delta_{1k} \cdot [K(k) \cdot H(k) \cdot P(k|k-1)]$$

$$= \delta_{1k} \cdot [P(k|k-1) - P(k|k)]$$

Außerdem ist der Prozeß im Sinn der Hilbertraum-Interpretation des $L_2(n)$ orthogonal zu $x(k|k-1)$ und $e(k|k)$, d.h.

$$E\{a^T(k) \cdot x(k|k-1)\} = \text{spur}(E\{a(k) \cdot x^T(k|k-1)\})$$

$$= \text{spur}(\text{cov}\{a(k), x(k|k-1)\}) = 0$$

$$E\{a^T(k) \cdot e(k|k)\} = \text{spur}(E\{a(k) \cdot e^T(k|k)\})$$

$$= \text{spur}(\text{cov}\{a(k), e(k|k)\}) = 0$$

und somit sind $x(k|k) = x(k|k-1) + a(k)$

und $e(k|k-1) = e(k|k) + a(k)$

Summen paarweiser orthogonaler Elemente aus $L_2(n)$.

Beweis:

$$(a) \quad d(k|k-1) = y(k) - H(k) \cdot x(k|k-1) \quad \text{nach (3.1.18)}$$

$$= H(k) \cdot [x(k) - x(k|k-1)] + v(k) \quad \text{nach (3.1.3)}$$

$$= H(k) \cdot e(k|k-1) + v(k)$$

Analog dazu :

$$d(k|k) = H(k) \cdot e(k|k) + v(k)$$

Es gilt: $e(k|k) = x(k) - x(k|k)$

$$= x(k) - [x(k|k-1) + K(k) \cdot d(k|k-1)]$$

$$= e(k|k-1) - K(k) \cdot d(k|k-1)$$

Dies in obiger Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} d(k|k) &= H(k) \cdot [e(k|k-1) - K(k) \cdot d(k|k-1)] + v(k) \\ &= [I - H(k) \cdot K(k)] \cdot d(k|k-1) \end{aligned}$$

(b) Es wurde bereits gezeigt: (vgl. z.Bsp. (3.1.18))

$$\begin{aligned} E\{d(k|k-1)\} &= 0 \text{ und} \\ \text{cov}\{d(k|k-1)\} &= H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k) \end{aligned}$$

Es sei nun $l > k$. Aus Teil (a) folgt

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d(l|l-1), d(k|k-1)\} &= H(l) \cdot \text{cov}\{e(l|l-1), e(k|k-1)\} \cdot H^T(k) \\ &\quad + H(l) \cdot \text{cov}\{e(l|l-1), v(k)\} \\ (*) &\quad + \text{cov}\{v(l), e(k|k-1)\} \cdot H^T(k) \\ &\quad + \text{cov}\{v(l), v(k)\} \end{aligned}$$

Für $e(k|k-1) = x(k) - x(k|k-1)$ gilt nach (3.1.10)

$$\text{cov}\{v(l), e(k|k-1)\} = 0$$

und wegen (3.1.3) ist auch $\text{cov}\{v(l), v(k)\} = 0$

Nach (3.2.4)(a) gilt zusammen mit (3.1.2) und (3.1.3)

$$\begin{aligned} \text{cov}\{e(l|l-1), v(k)\} &= \theta(1, k) \cdot \text{cov}\{e(k|k-1), v(k)\} - \theta(1, k+1) \cdot A(k) \cdot K(k) \cdot R(k) \\ &= -\theta(1, k+1) \cdot A(k) \cdot K(k) \cdot R(k) \end{aligned}$$

Dies in (*) eingesetzt ergibt mit (3.2.4)(b)

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d(l|l-1), d(k|k-1)\} &= H(l) \cdot \theta(1, k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) - H(l) \cdot \theta(1, k+1) \cdot A(k) \cdot K(k) \cdot R(k) \\ &= H(l) \cdot \theta(1, k+1) \cdot A(k) \cdot [(I - K(k) \cdot H(k)) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) - K(k) \cdot R(k)] \\ &= 0 \text{ wegen (3.1.30)} \end{aligned}$$

(c) Aus (a) folgt $E\{d(k|k)\} = 0$

und zusammen mit (b) auch $\text{cov}\{d(l|l), d(k|k)\} = 0$ für $l \neq k$ und

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d(k|k)\} &= [I - H(k) \cdot K(k)] \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)] \cdot [I - H(k) \cdot K(k)]^T \\ &= R(k) \cdot [I - H(k) \cdot K(k)]^T \text{ wegen (3.1.30)} \\ &= [I - H(k) \cdot K(k)] \cdot R(k) \text{ da cov}\{d(k|k)\} \text{ symmetrisch} \end{aligned}$$

(d) Aus (2.4.5)(v) folgt $\text{cov}\{d(k|k-1), Y[0, k-1]\} = 0$

Aus Teil (a) folgt:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d(k|k-1), x(k|k-1)\} &= H(k) \cdot \text{cov}\{e(k|k-1), x(k|k-1)\} + \text{cov}\{v(k), x(k|k-1)\} \\ &= 0 \text{ wegen (2.4.5)(v) und (3.1.10)} \end{aligned}$$

Aus (3.1.32) folgt:

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{d(k|k-1), e(k|k)\} \\ &= \text{cov}\{d(k|k-1), e(k|k-1)\} \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T - \text{cov}\{d(k|k-1), v(k)\} \cdot K^T(k) \\ &= H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T - R(k) \cdot K^T(k) = 0 \end{aligned}$$

Für $a(k) = K(k) \cdot d(k|k-1)$ gilt wegen (3.2.7) :

$$\begin{aligned} a(k) &= x(k|k) - x(k|k-1) \\ &= (x(k) - x(k|k-1)) - (x(k) - x(k|k)) = e(k|k-1) - e(k|k) \end{aligned}$$

Aus der Definition von $a(k)$ folgt ferner wegen Teil (b)

$$\begin{aligned} E\{a(k)\} &= 0 \quad \text{und} \quad \text{cov}\{a(l), a(k)\} = 0 \quad \text{für } l \neq k, \text{ sowie} \\ \text{cov}\{a(k)\} &= K(k) \cdot \text{cov}\{d(k|k-1)\} \cdot K^T(k) \\ &= K(k) \cdot [H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)] \cdot K^T(k) \\ &= P(k|k-1) \cdot H^T(k) \cdot K^T(k) \\ &= K(k) \cdot H(k) \cdot P(k|k-1) \quad \text{da } \text{cov}\{a(k)\} \text{ symmetrisch} \\ &= P(k|k-1) - P(k|k) \quad \text{wegen (3.1.34)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt } \text{cov}\{a(k), x(k|k-1)\} &= K(k) \cdot \text{cov}\{d(k|k-1), x(k|k-1)\} = 0 \\ \text{cov}\{a(k), e(k|k)\} &= K(k) \cdot \text{cov}\{d(k|k-1), e(k|k)\} = 0 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(3.2.9) Für den Erneuerungsprozeß $d(k|k-1)$ hat der letzte Satz gezeigt :

$$\begin{aligned} E\{d(k|k-1)\} &= 0 \\ \text{cov}\{d(k|k-1)\} &= P_d(k|k-1) = H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k) \\ \text{cov}\{d(k|k-1), d(l|l-1)\} &= 0 \quad \text{für } l \neq k \end{aligned}$$

Wird die Kovarianzform (vgl. (3.1.46)) zur Bestimmung des Filters verwendet, so muß $P_d(k|k-1) = H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k)$ sowieso berechnet werden.

Sind die Rauschprozesse v und w und der Startprozeß $x(0)$ normalverteilt, so ist der Prozeß $(d(k|k-1))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge $N(0, P_d(k|k-1))$ -verteilter, unabhängiger Zufallsvektoren.

(3.2.10) In Teil (d) wurde nochmal die zuvor gemachte Aussage präzisiert, daß $d(k|k-1)$ die zusätzliche Information darstellt, die durch die neue Beobachtung gewonnen wird.

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\begin{aligned} (3.2.11) \quad d(k) &:= d(k|k-1) \\ P_d(k) &:= P_d(k|k-1) \end{aligned}$$

Unter den Modellannahmen ist der Prozeß $d(k)$, $k \in \mathbb{N}$, ein weißes Rauschen mit $E\{d(k)\} = 0$ und $\text{cov}\{d(k)\} = P_d(k)$. Diese Eigenschaften kann man zur Erkennung von Fehlern bei der Durchführung des Filter-Algorithmus ausnutzen.

Mögliche Fehler sind zum Beispiel: - nicht adäquates Modell
 - Rundungsfehler (vgl.(3.1.46))

Die Auswirkungen von einigen solcher Fehler auf die Güte des Filters werden im Kapitel 4 betrachtet. In diesem Abschnitt sollen noch einige Möglichkeiten diskutiert werden, wie man mit Hilfe statistischer Testtheorie auf ein fehlerhaftes Verhalten des Erneuerungsprozesses $d(k)$ schließen kann.

Dazu sei zusätzlich zum Modell (3.1.1)-(3.1.4) noch angenommen, daß die Rauschprozesse v und w und der Startprozeß $x(0)$ normalverteilt sind. Dann ist auch $d(k)$ normalverteilt, genauer $N(0, P_d(k))$ -verteilt. Die im folgenden betrachteten Tests auf Normalverteilung sind Spezialfälle der Ergebnisse von Anhang B. Für eine Erklärung der Sprechweise "Test zum Niveau α " sei auf Anhang B, (B6), verwiesen.

Zunächst sollen die einzelnen Komponenten d_i , $i=1, \dots, m$, des m -dimensionalen Fehlerprozesses d betrachtet werden. Dazu sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\sigma_i^2(k) := \text{var}\{d_i(k)\} = (P_d(k))_{ii}$ das i -te Diagonalelement von $P_d(k)$.

Test der Hypothese $H = "d_i(k)$ ist $N(0, \sigma_i^2(k))$ -verteilt" zum Niveau α

(3.2.12) $\sigma_i(k) = 0$: Verwerfungsbereich $V_\alpha := \{d_i(k) \neq 0\}$

$\sigma_i(k) \neq 0$: Verwerfungsbereich $V_\alpha := \{(d_i(k)/\sigma_i(k))^2 > \tau_\alpha\}$

wobei τ_α das α -Fraktil der χ_1^2 -Verteilung ist.

(bzw. $\sqrt{\tau_\alpha}$ das $(\alpha/2)$ -Fraktil der $N(0,1)$ -Verteilung)

z.Bsp.	α	0.318	0.046	0.003
$\sqrt{\tau_\alpha}$		1	2	3
$1-\alpha$		$\approx 68\%$	$\approx 95\%$	$\approx 99\%$

Die $d_i(l)$, $l=0, \dots, k$ sind unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen. Im obigen Test wurde nur $d_i(k)$ benutzt. Der andere Extremfall wäre, wenn man alle $d_i(l)$, $l=0, \dots, k$, benutzt. Als Kompromiß sollen im folgenden die N letzten, nämlich $d_i(k-N+1), \dots, d_i(k)$, benutzt werden, wobei $N \in \mathbb{N}$.

Der Grundgedanke bei der Benutzung der N letzten Beobachtungen ist folgender (vgl./15/,/16/): Ist N klein (z.Bsp. $N=1$), so ist der Test empfindlich gegen einmalige Ausreißer. Wird N vergrößert, so müssen mehrere Beobachtungen zu groß sein, damit der Test anspricht. Wird N zu groß, so wird ein ab einem bestimmten Zeitpunkt "unnormales" Verhalten der $d_i(k)$ erst zu spät durch den Test entdeckt.

Maybeck (/15/,/16/) führt eine sogenannte Likelihood-Funktion ein. Diese soll nun betrachtet werden, wobei man feststellen wird, daß dieser Ansatz wieder auf einen Spezialfall von Anhang B führt :

$d_i(1)$ ist $N(0, \sigma_i^2(k))$ -verteilt und es sei $\sigma_i(1) \neq 0$.

Sei f_i die zugehörige Dichtefunktion

d.h. $f_i(z) = [1/(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i(1))] \cdot \exp[(-1/2) \cdot (z^2/\sigma_i^2(1))]$

Aufgrund der Unabhängigkeit ist die Dichtefunktion der gemeinsamen verteilung der $(d_i(k-N+1), \dots, d_i(k))$ gerade

$$f(z_1, \dots, z_k) = \prod_{l=k-N+1}^k f_l(z_l)$$

Da es einfacher ist, den Logarithmus dieser Funktion zu betrachten, wird folgende Likelihoodfunktion eingeführt:

$$L_{kN}(z) := -\ln[f(z)] = -\sum_{l=k-N+1}^k \ln[f_l(z_l)]$$

$$= \sum_{l=k-N+1}^k \ln[\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i(1)] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=k-N+1}^k [z^2/\sigma_i^2(1)]$$

Die Idee ist nun folgende:

Die Hypothese, daß die $d_i(k-N+1), \dots, d_i(k)$ wie oben beschrieben verteilt sind, ist zu verwerfen, wenn $f(z_i(k-N+1), \dots, z_i(k))$ "zu klein", bzw $L_{kN}(z_i(k-N+1), \dots, z_i(k))$ "zu groß" wird, wobei $z_i(1)$ die Realisierung von $d_i(1)$ ist.

Da der erste Summand jedoch nicht von den Beobachtungen z_i abhängt, ist nur der zweite Summand von $L_{kN}(z)$ die eigentliche Test-Statistik. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Testes, den man aus Anhang B erhält:

Test der Hypothese $H = "d_i(1)$ ist $N(0, \sigma_i^2(1))$ -verteilt, $l=k-N+1, \dots, k$ und die $d_i(1)$ sind paarweise unabhängig"

Führt man den N -dimensionalen Zufallsvektor $z = (d_i(k-N+1), \dots, d_i(k))^T$ ein, so ist $z \sim N(0, \Gamma)$ -verteilt mit $\Gamma := \text{diag}(\sigma_i^2(k-N+1), \dots, \sigma_i^2(k))$.

Es gilt $\text{Kern}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid z_l = 0 \text{ falls } \sigma_i(1) \neq 0\}$

$\text{Bild}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid z_l = 0 \text{ falls } \sigma_i(1) = 0\}$

$$\Gamma^+ = \text{diag}(\tau_1^+, \dots, \tau_N^+),$$

$$\text{wobei } \tau_1^+ = \begin{cases} 1/\sigma_i^2(k-N+1) & \text{falls } \sigma_i(k-N+1) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \sigma_i(k-N+1) = 0 \end{cases}$$

Dann ist $z^T \cdot \Gamma^+ \cdot z = \sum_{l=1}^N \tau_l^+ \cdot z_l^2 = \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ \sigma_i(k-N+1) \neq 0}} (z_l/\sigma_i(k-N+1))^2$

Sei $\tau_N(k) = \text{rang}(\Gamma) = \#\{l \in \{1, \dots, N\} \mid \sigma_l(k-N+1) \neq 0\}$
 und $\tau_N^\alpha(k)$ das α -Fraktile der $\chi_{\tau_N(k)}^2$ -Verteilung

Damit erhält man folgenden Test der Hypothese H:

(3.2.13) Ein Verwerfungsbereich zum Niveau α des Testes der Hypothese H ist:

$$V_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^N \mid (z^T \cdot \Gamma^{-1} \cdot z > \tau_N^\alpha(k)) \text{ und } (z_l = 0 \text{ für } \sigma_l(k-N+1) = 0)\}$$

Alle in diesem Test benutzten Größen, mit Ausnahme von $\tau_N^\alpha(k)$, kann man leicht rekursiv berechnen.

Bisher wurden die einzelnen Komponenten d_i von d getrennt betrachtet. Man kann einen entsprechenden Test jedoch auch auf allen Komponenten gemeinsam durchführen:

Test der Hypothese H="d(l) ist N(0, P_d(l))-verteilt, l=k-N+1, ..., k und die d(l) sind paarweise unabhängig"

Dazu wird folgender (N·m)-dimensionalen Zufallsvektor

$$z_N(k) = (d^T(k-N+1), \dots, d^T(k))^T$$

eingeführt.

Dieser Zufallsvektor $z_N(k)$ ist N(0, $\Gamma_N(k)$)-verteilt

$$\text{mit } \Gamma_N(k) := \begin{bmatrix} P_d(k-N+1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_d(k) \end{bmatrix}$$

d.h. $\Gamma_N(k)$ ist eine (N·m)*(N·m)-Matrix mit den Matrizen $P_d(k-N+1), \dots, P_d(k)$, in der Diagonalen.

Entsprechend dieser Aufteilung werden im folgenden Vektoren $z \in \mathbb{R}^{N \cdot m}$ zerlegt in $z = (z_1^T, \dots, z_N^T)^T$, wobei $z_i \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt :

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\Gamma_N(k)) &= (\text{Kern}(\Gamma_N(k)))^\perp \\ &= \{z \in \mathbb{R}^{N \cdot m} \mid z_i \in \text{Bild}(P_d(k-N+i)) = (\text{Kern}(P_d(k-N+i)))^\perp, i=1..N\} \end{aligned}$$

Weiter läßt sich leicht nachrechnen, daß

$$\Gamma_N(k)^\perp := \begin{bmatrix} P_d(k-N+1)^\perp & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_d(k)^\perp \end{bmatrix}$$

$$\text{Somit ist } T_{Nk}(z) := z^T \cdot \Gamma_N(k)^+ \cdot z = \sum_{i=1}^N z_i^T \cdot P_d(k-N+i)^+ \cdot z_i$$

$$r_N(z) := \text{rang}(\Gamma_N(k)) = \sum_{i=1}^N \text{rang}(P_d(k-N+i))$$

Damit erhält man folgenden Test der Hypothese H :

(3.2.14) Es seien $T_{Nk}(z)$ und $r_N(z)$ wie oben definiert, $\alpha \in (0,1)$ und $\tau_N^\alpha(k)$ das α -Fraktile der χ^2 -Verteilung. Dann ist ein Verwerfungsbereich zum Niveau α des Testes der Hypothese H gegeben durch :

$$V_\alpha = \{ z \in \mathbb{R}^{N \cdot m} \mid T_{Nk}(z) > \tau_N^\alpha(k) \}$$

$$\{ z \in \mathbb{R}^{N \cdot m} \mid i \in \{1..N\} : z_i \text{ Bild } P_d(k-N+i) \}$$

Mit $z(k)$ sei die Realisierung von $d(k)$ bezeichnet. Damit lassen sich die Größen aus (3.2.14) folgendermaßen berechnen :

$$T_{Nk}(z(k-n+1), \dots, z(k)) = T_{N, k-1}(z(k-n), \dots, z(k-1))$$

$$- z^T(k-N) \cdot P_d(k-N)^+ \cdot z(k-N)$$

$$+ z^T(k) \cdot P_d(k)^+ \cdot z(k)$$

$$r_N(k) = r_N(k-1) - \text{rang}(P_d(k-N)) + \text{rang}(P_d(k))$$

Bemerkungen:

(3.2.25) Die numerische Schwierigkeit im obigen Test liegt in der Bestimmung des Ranges von $P_d(k)$ und von der Pseudoinversen von $P_d(k)$, d.h. in der Singulärwertzerlegung von $P_d(k)$.

(3.2.26) Die statistische Schwierigkeit aller obigen Test liegt zum einen in der Normalverteilungsannahme und zum andern daran, daß man keine Aussagen über den sogenannten Fehler 2. Art hat. (vgl. Anhang B)

(3.2.27) Für weitere Tests im Zusammenhang mit mehrdimensionalen Normalverteilungen, insbesondere für Tests auf Unkorreliertheit, sei auf Anderson (/1/) verwiesen.

3.3 Stabilität des Kalman-Filters und die Begriffe beobachtbar und kontrollierbar

In diesem Abschnitt werden einige Sätze angegeben, die Aussagen über das asymptotische Verhalten der Fehlerkovarianzmatrizen und der Übergangsmatrizen des Kalman-Filters machen. Dazu werden zunächst die in diesem Zusammenhang wesentlichen Begriffe der Beobachtbarkeit und der Kontrollierbarkeit definiert. Die angegebenen Definitionen und Sätze stammen aus McGarty (/17/, Kapitel 2.4 und Anhang C) und Jazwinski (/10/, Kapitel 7.6).

In diesem Abschnitt wird mit $\|x\|$, für $x \in \mathbb{R}^n$, eine Norm auf dem \mathbb{R}^n und für eine $(m \times n)$ -Matrix M mit $\|M\|$ die von diesen Vektornormen induzierte Matrizenorm bezeichnet. Ansonsten gelten die Bezeichnungen von (3.1.38) mit der zusätzlichen Voraussetzung, daß $A(k)$ und $R(k)$ für $k \geq 0$ regulär sind.

Die Definition der Übergangsmatrix $\Phi(j,i)$ des Systems wird auf den Fall $j < i$ ausgedehnt:

$$(3.3.1) \quad \Phi(j,i) := \begin{cases} A(j-1) \cdot \dots \cdot A(i) & \text{falls } j > i \\ I & \text{falls } j = i \\ \Phi(i,j)^{-1} & \text{falls } j < i \end{cases}$$

Damit ist für beliebige $i, j, k \geq 0$: $\Phi(i,k) = \Phi(i,j) \cdot \Phi(j,k)$

Sei $k > l \geq 0$. Die positiv semidefinite Matrix

$$(3.3.2) \quad B(k,l) := \sum_{i=l}^k \Phi^T(i,k) \cdot H^T(i) \cdot R(i)^{-1} \cdot H(i) \cdot \Phi(i,k)$$

wird als **Beobachtbarkeitsmatrix** und die positiv semidefinite Matrix

$$(3.3.3) \quad C(k,l) := \sum_{i=l}^{k-1} \Phi(k,i+1) \cdot G(i) \cdot Q(i) \cdot G^T(i) \cdot \Phi^T(k,i+1)$$

als **Kontrollierbarkeitsmatrix** bezeichnet.

Sei $r \in \mathbb{N}$. Für zwei $r \times r$ -Matrizen A_1, A_2 seien folgende Schreibweisen eingeführt:

$$A_1 > A_2 \quad : \Leftrightarrow \quad (A_1 - A_2) \text{ ist positiv definit}$$

$$A_1 \geq A_2 \quad : \Leftrightarrow \quad (A_1 - A_2) \text{ ist positiv semidefinit}$$

Das Zustandsraum-Modell aus (3.1.38) heißt

$$(3.3.4) \quad \text{vollständig beobachtbar,} \\ \text{falls es ein } k \geq 0 \text{ gibt mit } B(k,0) > 0 .$$

$$(3.3.5) \quad \text{gleichmäßig vollständig beobachtbar,} \\ \text{falls es ein } N \in \mathbb{N}, N \neq 0, \text{ und positive Konstanten } \alpha \text{ und } \beta \text{ gibt} \\ \text{mit } 0 < \alpha \cdot I \leq B(k,k-N) \leq \beta \cdot I \text{ für alle } k \geq N .$$

- (3.3.6) **vollständig kontrollierbar**,
falls es ein $k > 0$ gibt mit $C(k,0) > 0$.
- (3.3.7) **gleichmäßig vollständig kontrollierbar**,
falls es ein $N \in \mathbb{N}$, $N \neq 0$, und positive Konstanten α und β gibt
mit $0 < \alpha \cdot I \leq C(k, k-N) \leq \beta \cdot I$ für alle $k \geq N$.

Für zeitinvariante Modelle, d.h. für solche, deren Modellparameter für alle Zeiten k konstant sind, lassen sich die Bedingungen in den obigen Definitionen einfacher charakterisieren:

- (3.3.8) Es seien alle Modellparameter im Zustandsraum-Modell von (3.1.38) zeitlich konstant,
d.h. $A(k)=A$, $G(k)=G$, $H(k)=H$, $Q(k)=Q$, $R(k)=R$
- (a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
- (1) Das Modell ist gleichmäßig vollständig beobachtbar
 - (2) Das Modell ist vollständig beobachtbar
 - (3) Es gibt ein $k \geq 0$ mit $\text{Rang}[H^T, A^T \cdot H^T, \dots, (A^k)^T \cdot H^T] = n$
 - (4) $\text{Rang}[H^T, A^T \cdot H^T, \dots, (A^{n-1})^T \cdot H^T] = n$
- (b) Ist Q regulär, so sind folgende Aussagen äquivalent:
- (1) Das Modell ist gleichmäßig vollständig kontrollierbar
 - (2) Das Modell ist vollständig kontrollierbar
 - (3) Es gibt ein $k \geq 0$ mit $\text{Rang}[G, A \cdot G, \dots, A^k \cdot G] = n$
 - (4) $\text{Rang}[G, A \cdot G, \dots, A^{n-1} \cdot G] = n$

Für das asymptotische Verhalten des Kalman-Filters gelten die folgenden Aussagen:

- (3.3.9) Gegeben seien das Zustandsraum-Modell aus (3.1.38) und die zugehörigen Kalman-Filtergleichungen.
Ferner gebe es ein $N > 0$ und positive Konstanten $\alpha, \beta, \tau, \delta$, sodaß für alle $k \geq N$ gilt:
- $$\alpha \cdot I \leq B(k, k-N) \leq \beta \cdot I$$
- $$\text{und } \tau \cdot I \leq C(k, k-N) \leq \delta \cdot I,$$

d.h. das Modell ist gleichmäßig vollständig beobachtbar und gleichmäßig vollständig kontrollierbar.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Der Kalman-Filter ist gleichmäßig asymptotisch stabil im Großen, genauer gesagt: Die Differenzgleichung
- $$z(k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot z(k) = \pi(k+1, k) \cdot z(k)$$
- ist gleichmäßig asymptotisch stabil im Großen.
(für eine Definition dieses Begriffs sei auf McGarty (/10/, Kapitel 2.4, Definition 4.8) verwiesen.)

- (b) Es gibt positive Konstanten α_1, α_2 , so daß für alle $k \geq i \geq 0$ gilt : $\|\pi(k, i)\| \leq \alpha_1 \cdot \exp[-\alpha_2 \cdot (k-i)]$
 Existieren weiter positive Konstanten β_1, β_2 mit $\beta_1 \leq \|A(k)\| \leq \beta_2$ für alle $k \geq 0$, so gibt es eine positive Konstante β_3 , so daß für alle $k \geq i \geq 0$ gilt : $\|\theta(k, i)\| \leq \beta_3 \cdot \exp[-\alpha_2 \cdot (k-i)]$
 Dabei sind π und θ wie in (3.2.2) definiert.
- (c) Es seien $P_1(k|k)$ und $P_2(k|k)$ für $k \geq 0$ die Lösungen der Kovarianzgleichungen (3.1.38)(ii) des Filters zu den Anfangswerten $P_1(0)$ und $P_2(0)$. Dann gibt es positive Konstanten τ_1, τ_2 , so daß für alle $k \geq i \geq 0$ gilt :
 $\|P_1(k|k) - P_2(k|k)\| \leq \tau_1 \cdot \exp[-\tau_2 \cdot (k-i)] \cdot \|P_1(i|i) - P_2(i|i)\|$
- (d) Gibt es außerdem positive Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ mit
 $0 < \beta_1 \leq \|A(k)\| \leq \beta_2$ für alle $k \geq 0$ und
 $\|G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k)\| \leq \beta_3$ für alle $k \geq 0$,
 dann gibt es Konstanten α_1 und α_2 mit
 $0 < \alpha_1 \leq \|P(k|k-1)\| \leq \alpha_2$.
 Existiert ferner eine positive Konstante β_4 mit
 $0 < \beta_4 \leq \|R(k)\|$ für alle $k \geq 0$,
 dann gibt es eine positive Konstante α_3 mit
 $\|K(k)\| \leq \alpha_3$.

Für den Fall zeitinvarianter Modelle kann man noch weitere Aussagen machen:

- (3.3.10) Es seien alle Modellparameter im Modell (3.3.11) zeitlich konstant, d.h. $A(k)=A$, $G(k)=G$, $H(k)=H$, $Q(k)=Q$, $R(k)=R$.
 Ferner gelten die Voraussetzungen von (3.3.9). Dann gilt:
 Die algebraische Riccati-Gleichung (vgl.(3.1.45))

$$P = A \cdot P \cdot A^T - A \cdot P \cdot H^T \cdot [H \cdot P \cdot H^T + R]^{-1} \cdot H \cdot P \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T$$
 besitzt genau eine positiv semidefinite Lösung $P=P^*$.

Ferner gelten folgenden Grenzwertaussagen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k-1) = P^*$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) = K := P^* \cdot H^T \cdot [H \cdot P \cdot H^T + R]^{-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k) = P^{\wedge} := [I - K \cdot H] \cdot P^*$$

P^{\wedge} ist dabei die eindeutig positiv-semidefinite Lösung der Riccati-Gleichung

$$P = (A \cdot P \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T) - (A \cdot P \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T) \cdot H^T \cdot [H \cdot (A \cdot P \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T) \cdot H^T + R]^{-1} \cdot H \cdot (A \cdot P \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T)$$

Es gibt positive Konstanten τ_1, τ_2 , so daß für alle $k \geq i \geq 0$

$$\|P(k|k) - P^{\wedge}\| \leq \tau_1 \cdot \exp[-\tau_2 \cdot (k-i)] \cdot \|P(i|i) - P^{\wedge}\|$$

Damit konvergieren auch die Übergangsmatrizen

$$\lim \pi(k+1, k) = \pi := [I - K \cdot H] \cdot A$$

$$\lim \theta(k+1, k) = \theta := A \cdot [I - K \cdot H]$$

Die Matrizen π und θ sind stabil, d.h. ihre Eigenwerte sind vom Betrage kleiner 1.

Beweis : vgl. Davis (/6/, Theorem 3.3.3)

Kapitel 4 : Einfluß von Modellfehlern auf die Fehlerprozesse des Kalman-Filters

In diesem Kapitel werden sowohl die unbedingten als auch die nach dem bisherigen Verlauf des Beobachtungsprozesses y bedingten Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen der Schätzfehler des Kalman-Filters für den Fall betrachtet, daß das System nicht korrekt modelliert wurde. Dabei werden neben Rekursionsgleichungen für diese Größen auch für bestimmte Fälle Grenzwertaussagen und Normabschätzungen hergeleitet. Desweiteren werden Ableitungen der oben genannten Größen nach den Modellparametern untersucht.

Ähnliche Rekursionsgleichungen, wie die hier entwickelten, sind auch in Jazwinski (/10/) und Griffin,Sage (/8/) zu finden. Griffin und Sage nehmen jedoch an, daß die Erwartungswerte des wahren Systemprozesses Null sind, und Jazwinski betrachtet nicht die Kovarianzmatrix sondern eine damit verwandte Größe (mehr dazu in (4.1.)). Über die bedingten Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen wird in den beiden genannten Arbeiten in diesem Zusammenhang überhaupt nicht geredet.

Die im Kapitel 3 gemachten Aussagen gingen von dem Idealfall aus, daß das betrachtete System durch das in (3.1.1)-(3.1.4) angegebene Modell exakt beschrieben wird. Diese Übereinstimmung von System und Modell wird jedoch in den seltensten Fällen gegeben sein. Vielmehr wird das Modell das Systemverhalten nur angenähert beschreiben.

In Kapitel 3, vor allem in (3.2), wurden die Fehlerprozesse, die beim Kalman-Filter auftreten, für den Idealfall eines exakten Modells diskutiert. Für diesen Fall berechnet der Kalman-Filter zum Schätzer auch noch die Statistik der Schätzfehler, d.h. Erwartungswert ($=0$) und Kovarianzmatrix. Es stellt sich nun unwillkürlich die Frage, wie sich diese statistischen Werte für die (wahren) Schätzfehler verhalten, wenn das System vom Modell "abweicht".

Man hat also zwei Modelle: Ein "wahres" Modell W , das das System exakt beschreibt, und ein anderes Modell M , das man zur Filterung benutzt. Bei dem Modell M wird angenommen, daß es sich um ein Zustandsraum-Modell der Form (3.1.1)-(3.1.4) handelt. Um das Problem überhaupt behandeln zu können, müssen auch Annahmen über das System, d.h. über das wahre Modell W gemacht werden. In diesem Kapitel wird, natürlich wiederum als Idealfall, angenommen, daß das System exakt durch ein Zustandsraum-Modell W beschrieben werden kann.

Die Frage ist nun, wie die Schätzfehler aussehen, wenn man zur Filterung das Modell M benutzt, während das "wahre" Modell das Modell W ist. Es wird also gefragt, wie sich Fehler in den einzelnen Modellparametern auf die Statistik des Schätzfehlers auswirken. Auswirkungen von Fehlern in der eigentlichen Struktur des Systems werden somit nicht behandelt. Eine sicherlich ebenfalls interessante und wichtige Frage wäre, wie sich nicht berücksichtigte Korrelationen der Rauschprozesse auf die Fehlerprozesse auswirken.

4.1 Beschreibung der Fehlerprozesse

In diesem Kapitel werden die wahren Fehlerprozesse die bei der Schätzung mit Hilfe des Kalman-Filters auftreten, beschrieben. Wie bereits erwähnt wurde, wird angenommen, daß das betrachtete System durch folgendes "wahre" Modell (gekennzeichnet durch den Index w) exakt beschrieben wird:

$$(4.1.1) \quad x_w(k+1) = A_w(k) \cdot x_w(k) + c_w(k) + G_w(k) \cdot w_w(k)$$

$$y_w(k) = H_w(k) \cdot x_w(k) + v_w(k) \quad , \quad k \geq 0$$

$$\text{mit } E\{x_w(0)\} = \mu_w(0) \quad \text{cov}\{x_w(0)\} = P_w(0)$$

$$E\{w_w(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{w_w(k), w_w(i)\} = \delta_{i-k} \cdot Q_w(k)$$

$$E\{v_w(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{v_w(k), v_w(i)\} = \delta_{i-k} \cdot R_w(k)$$

$$\text{cov}\{v_w(k), x_w(0)\} = 0 \quad \text{cov}\{w_w(k), x_w(0)\} = 0$$

$$\text{cov}\{w_w(k), v_w(i)\} = 0 \quad \text{für alle } k, i \in \mathbb{N}_0$$

$$x_w(k), c_w(k) \in \mathbb{R}^n \quad w_w(k) \in \mathbb{R}^r$$

$$y_w(k), v_w(k) \in \mathbb{R}^m$$

$$A_w(k), G_w(k), H_w(k) \text{ Matrizen entsprechender Dimension}$$

$c_w(k)$ wird hierbei, im Gegensatz zu Kapitel 3, als deterministisch angenommen. Die Verallgemeinerung auf $\sigma(Y_w[0,k])$ -meßbare Funktionen $c_w(k)$ bereitete im Kapitel 3 aufgrund der Unkorreliertheit von Schätzfehler und Beobachtungsprozeß keine weiteren Schwierigkeiten. Die Behandlung solcher allgemeineren Funktionen $c_w(k)$ wäre auch in diesem Kapitel möglich. Da die Unkorreliertheit von Schätzfehler und Beobachtung im Falle fehlerhafter Modelle nicht mehr notwendigerweise gegeben ist, würden sich kompliziertere Gleichungen ergeben.

Würde man das "wahre" Modell (4.1.1) auch zur Filterung benutzen, so würden die (optimalen) Filtergleichungen folgendermaßen aussehen :
(vgl. (3.1.38))

$$(4.1.2) \quad x^o(k|k-1) = \begin{cases} \mu_w(0) & \text{für } k=0 \\ A_w(k-1) \cdot x^o(k-1|k-1) + c_w(k-1) & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

$$y^o(k|k-1) = H_w(k) \cdot x^o(k|k-1)$$

$$x^o(k|k) = x^o(k|k-1) + K^o(k) \cdot [y_w(k) - y^o(k|k-1)]$$

mit

$$P^o(k|k-1) = \begin{cases} P_w(0) & \text{für } k=0 \\ A_w(k-1) \cdot P^o(k-1|k-1) \cdot A_w^T(k-1) \\ \quad + G_w(k-1) \cdot Q_w(k-1) \cdot G_w^T(k-1) & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

$$P_d^o(k|k-1) = H_w(k) \cdot P^o(k|k-1) \cdot H_w^T(k) + R_w(k)$$

$$K^o(k) \cdot = P^o(k|k-1) \cdot H_w^T(k) \cdot P_d^o(k|k-1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} P^o(k|k) &= [I - K^o(k) \cdot H_w(k)] \cdot P^o(k|k-1) \\ &= [I - K^o(k) \cdot H_w(k)] \cdot P^o(k|k-1) \cdot [I - K^o(k) \cdot H_w(k)]^T \\ &\quad + K^o(k) \cdot R_w(k) \cdot K^o(k)^T \end{aligned}$$

In diesem Fall erhält man folgende Aussagen für die Schätzfehler :
(vgl. (3.2.4), (3.2.8))

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} \text{Mit den Bezeichnungen} \quad e^o(k|k-1) &:= x_w(k) - x^o(k|k-1) \\ e^o(k|k) &:= x_w(k) - x^o(k|k) \\ d^o(k|k-1) &:= y_w(k) - y^o(k|k-1) \end{aligned}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \geq k$:

$$\begin{aligned} E\{e^o(k|k-1)\} &= 0 \\ \text{cov}\{e^o(k|k-1)\} &= P^o(k|k-1) \\ \text{cov}\{e^o(l|l-1), e^o(k|k-1)\} &= \theta^o(l, k) \cdot P^o(k|k-1) \\ E\{e^o(k|k)\} &= 0 \\ \text{cov}\{e^o(k|k)\} &= P^o(k|k) \\ \text{cov}\{e^o(l|l), e^o(k|k)\} &= \pi^o(l, k) \cdot P^o(k|k) \\ E\{d^o(k|k-1)\} &= 0 \\ \text{cov}\{d^o(k|k-1)\} &= P_d^o(k|k-1) \\ \text{cov}\{d^o(l|l-1), d^o(k|k-1)\} &= 0 \quad \text{für } l \neq k \end{aligned}$$

wobei π^o und θ^o analog zu Kapitel 3.2 die Übergangsmatrizen des Filters (4.1.2) sind.

Ferner sind die Fehlerprozesse mit den vergangenen und gegenwärtigen Beobachtungen unkorreliert, d.h. :

Mit $Y_w[0, l] := [y_w(0)^T, \dots, y_w(l)^T]^T$ gilt :

$$\begin{aligned} \text{cov}\{e^o(k|k-1), Y_w[0, k-1]\} &= 0 \\ \text{cov}\{d^o(k|k-1), Y_w[0, k-1]\} &= 0 \\ \text{cov}\{e^o(k|k), Y_w[0, k]\} &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Rauschprozesse v_w und w_w und der Anfangsprozess $x_w(0)$ gemeinsam normalverteilt, so gilt dies auch für die Fehlerprozesse und den Beobachtungsprozeß. In diesem Fall ist die obige Unkorreliertheit gleichbedeutend mit Unabhängigkeit und die nach $Y_w[0,k-1]$, bzw. $Y_w[0,k]$ bedingte Verteilung der Fehlerprozesse ist gleich der unbedingten Verteilung, nämlich eine Normalverteilung mit den oben genannten ersten beiden Momenten.

Im folgenden werden die Fehlerprozesse diskutiert, die auftreten, wenn man statt des "wahren" Modells (4.1.1) das folgende Modell (ohne Index w) zur Filterung benutzt:

$$\begin{aligned}
 (4.1.4) \quad & x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + c(k) + G(k) \cdot w(k) \\
 & y(k) = H(k) \cdot x(k) + v(k) \quad , \quad k \geq 0 \\
 & \text{mit } E\{x(0)\} = \mu(0) \quad \text{cov}\{x(0)\} = P(0) \\
 & E\{w(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{w(k), w(i)\} = \delta_{ik} \cdot Q(k) \\
 & E\{v(k)\} = 0 \quad \text{cov}\{v(k), v(i)\} = \delta_{ik} \cdot R(k) \\
 & \text{cov}\{v(k), x(0)\} = 0 \quad \text{cov}\{w(k), x(0)\} = 0 \\
 & \text{cov}\{w(k), v(i)\} = 0 \quad \text{für alle } k, i \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Die Dimensionen der Prozesse seien dieselben wie im wahren Modell und auch hier sei $c(k)$ aus den oben erwähnten Gründen als deterministisch angenommen

Der Kalman-Filter berechnet dann folgende Schätzer, wobei man beachten sollte, daß die Modellparameter vom Modell (4.1.2) stammen, während die Daten $y_w(k)$ vom System (gegeben durch (4.1.1)) geliefert werden:

$$(4.1.5) \quad x(k|k-1) = \begin{cases} \mu(0) & \text{für } k=0 \\ A(k-1) \cdot x(k-1|k-1) + c(k-1) & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y(k|k-1) &= H(k) \cdot x(k|k-1) \\
 x(k|k) &= x(k|k-1) + K(k) \cdot [y_w(k) - y(k|k-1)]
 \end{aligned}$$

mit

$$P(k|k-1) = \begin{cases} P(0) & \text{für } k=0 \\ A(k-1) \cdot P(k-1|k-1) \cdot A^T(k-1) \\ \quad + G(k-1) \cdot Q(k-1) \cdot G^T(k-1) & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 P_d(k|k-1) &= H(k) \cdot P(k|k-1) \cdot H^T(k) + R(k) \\
 K(k) \cdot &= P(k|k-1) \cdot H^T(k) \cdot P_d(k|k-1)^{-1} \\
 P(k|k) &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \\
 &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T \\
 &\quad + K(k) \cdot R(k) \cdot K(k)^T
 \end{aligned}$$

Der restliche Teil dieser Arbeit wird sich mit den wirklichen Schätzfehlern

$$\begin{aligned}
 (4.1.6) \quad e(k|k-1) &:= x_w(k) - x(k|k-1) \\
 e(k|k) &:= x_w(k) - x(k|k) \\
 d(k) &:= y_w(k) - y(k|k-1)
 \end{aligned}$$

befassen.

Die vom Filter (4.1.5) berechneten Matrizen $P(k|k-1)$, $P(k|k)$, $P_d(k|k-1)$ stellen nun nicht mehr notwendigerweise die Kovarianzmatrizen dieser Schätzfehler dar. Außerdem sind die Erwartungswerte der Schätzfehler in allgemeinen nicht gleich Null. Deshalb werden im folgenden Aussagen über die Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen der wahren Schätzfehler entwickelt. Dazu werden zunächst Rekursionsgleichungen für diese Größen hergeleitet. In Abschnitt 4.2 werden die unbedingten Erwartungswerte, in Abschnitt 4.3 die unbedingten Kovarianzmatrizen und in Abschnitt 4.4 dann noch die bedingten Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen behandelt.

Ähnliche Rekursionsgleichungen, wie die in Abschnitt 4.3 für die Kovarianzmatrizen entwickelten, sind auch in Jazwinski (/10/) und Griffin, Sage (/8/) zu finden. Griffin und Sage gehen jedoch von der Voraussetzung $\mu(0) = \mu_w(0) = 0$ aus und umgehen damit die Berücksichtigung der Erwartungswerte der Schätzfehler. Diese Einschränkung soll hier nicht gemacht werden. Auch Jazwinski fordert diese Bedingung nicht. Er betrachtet aber weder die Erwartungswerte noch die Kovarianzmatrizen der Schätzfehler, sondern die Matrix $E\{e(k|k) \cdot e^T(k|k)\}$, die mit diesen beiden Größen folgendermaßen zusammenhängt:

$$E\{e(k|k) \cdot e^T(k|k)\} = \text{cov}\{e(k|k)\} + E\{e(k|k)\} \cdot E\{e(k|k)\}^T$$

In Abschnitt 4.2 und 4.3 sollen jedoch getrennte Gleichungen für die Erwartungswerte und die Kovarianzmatrizen der Schätzfehler entwickelt werden. Denn der Erwartungswert drückt einen systematischen (deterministischen) Fehler aus, während die Kovarianzmatrix ein Maß für die Größe der (stochastischen) Schwankung um diesen Erwartungswert angibt.

Vorher werden nun noch Gleichungen für die Schätzfehler direkt angegeben. Dazu seien zunächst die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 (4.1.7) \quad A_d(k) &:= A_w(k) - A(k) \\
 c_d(k) &:= c_w(k) - c(k) \\
 Q_d(k) &:= G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) - G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \\
 H_d(k) &:= H_w(k) - H(k) \\
 R_d(k) &:= R_w(k) - R(k) \\
 \mu_d(k) &:= \mu_w(k) - \mu(k) := E\{x_w(k)\} - E\{x(k)\} \\
 \tau_d(k) &:= \tau_w(k) - \tau(k) := E\{y_w(k)\} - E\{y(k)\} \\
 &= H_w(k) \cdot \mu_w(k) - H(k) \cdot \mu(k)
 \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gelten folgende Gleichungen für die Schätzfehler :

(4.1.8) Rekursionsgleichungen für die Schätzfehler

(a) $e(0|-1) = x_w(0) - \mu(0)$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 e(k|k) &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e(k|k-1) - K(k) \cdot H_d(k) \cdot x_w(k) - K(k) \cdot v_w(k) \\
 e(k+1|k) &= A(k) \cdot e(k|k) + A_d(k) \cdot x_w(k) + c_d(k) + G_w(k) \cdot w_w(k)
 \end{aligned}$$

(b) $e(0|0) = [I - K(0) \cdot H_w(0)] \cdot x_w(0) - [I - K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu(0) - K(0) \cdot v_w(0)$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 e(k+1|k+1) &= [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot e(k|k) \\
 &\quad + [A_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot A_w(k) - H(k+1) \cdot A(k)\}] \cdot x_w(k) \\
 &\quad + [c_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot c_w(k) - H(k+1) \cdot c(k)\}] \\
 &\quad + [I - K(k+1) \cdot H_w(k+1)] \cdot G_w(k) \cdot w_w(k) - K(k+1) \cdot v_w(k+1)
 \end{aligned}$$

(c) $e(0|-1) = x_w(0) - \mu(0)$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 e(k+1|k) &= A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e(k|k-1) \\
 &\quad + [A_d(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot H_d(k)] \cdot x_w(k) + c_d(k) \\
 &\quad + G_w(k) \cdot w_w(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot v_w(k)
 \end{aligned}$$

(d) Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 d(k) &= H(k) \cdot e(k|k-1) + H_d(k) \cdot x_w(k) + v_w(k) \\
 &= H(k) \cdot A(k-1) \cdot e(k-1|k-1) + [H_w(k) \cdot A_w(k-1) - H(k) \cdot A(k-1)] \cdot x_w(k-1) \\
 &\quad + [H_w(k) \cdot c_w(k-1) - H(k) \cdot c(k-1)] + H_w(k) \cdot G_w(k-1) \cdot w_w(k-1)
 \end{aligned}$$

Beweis:

(a) $e(0|-1) = x_w(0) - x(0|-1) = x_w(0) - \mu(0)$ nach (4.1.5)

Sei $k \geq 0$. Dann gilt nach (4.1.5)

$$\begin{aligned}
 e(k|k) &= x_w(k) - x(k|k) \\
 &= x_w(k) - [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot x(k|k-1) - K(k) \cdot y_w(k) \\
 &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e(k|k-1) - K(k) \cdot H_d(k) \cdot x_w(k) - K(k) \cdot v_w(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(k+1|k) &= x_w(k+1) - x(k+1|k) \\ &= A_w(k) \cdot x_w(k) + c_w(k) + G_w(k) \cdot w_w(k) - A(k) \cdot x(k|k) - c(k) \\ &= A(k) \cdot e(k|k) + A_d(k) \cdot x_w(k) + c_d(k) + G_w(k) \cdot w_w(k) \end{aligned}$$

Die Gleichungen für (b), (c), (d) erhält man durch Einsetzen der Gleichungen aus (a).

$$\begin{aligned} \text{Die Matrizen } \pi(k+1, k) &= [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \\ \text{und } \theta(k+1, k) &= A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \end{aligned}$$

sind die Übergangsmatrizen des Filters (4.1.5) und hängen somit nur vom Modell (4.1.4), nicht aber vom wahren System (4.1.1) ab. Dies ist im Hinblick auf die Schätzfehler deshalb besonders wichtig, da diese Matrizen π und θ auch die Übergangsmatrizen der Schätzfehler sind. Man erkennt dies an den Gleichungen (4.1.8)(b) und (c), besonders, wenn man folgende Bezeichnung einführt :

$$\begin{aligned} s(k) &:= [A_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot A_w(k) - H(k+1) \cdot A(k)\}] \cdot x_w(k) \\ &\quad + [c_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot c_w(k) - H(k+1) \cdot c(k)\}] \\ &\quad + [I - K(k+1) \cdot H_w(k+1)] \cdot G_w(k) \cdot w_w(k) - K(k+1) \cdot v_w(k+1) \\ r(k) &:= [A_d(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot H_d(k)] \cdot x_w(k) \\ &\quad + c_d(k) + G_w(k) \cdot w_w(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot v_w(k) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Schätzfehler :

$$\begin{aligned} (4.1.9) \quad e(k+1|k+1) &= \pi(k+1|k) \cdot e(k|k) + s(k) \\ e(k+1|k) &= \theta(k+1|k) \cdot e(k|k-1) + r(k) \quad \text{für } k \geq 0 \end{aligned}$$

Da die Matrizen π und θ nur vom Modell abhängen, sind sie bei der Benutzung eines bestimmten Modells bekannt. Auch wenn man natürlich im allgemeinen die Werte der von $x_w(k)$, $w_w(k)$ und $v_w(k)$ abhängenden Größen $s(k)$ und $r(k)$ nicht kennt, so kennt doch somit zumindest, ohne Kenntnisse über das wahre System, wie sich die früheren Schätzfehler auf spätere auswirken, d.h. wie sich die Schätzfehler fortpflanzen. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf die asymptotischen Eigenschaften der Übergangsmatrizen π und θ hingewiesen, falls das Modell gleichmäßig vollständig beobachtbar und kontrollierbar ist.

(vgl. (3.3.8), (3.3.9))

4.2 Erwartungswerte der Fehlerprozesse

Für die unbedingten Erwartungswerte der Fehlerprozesse werden folgende Bezeichnungen eingeführt :

$$\begin{aligned}
 (4.2.1) \quad \epsilon(k|k-1) &:= E\{e(k|k-1)\} = E\{x_w(k) - x(k|k-1)\} \\
 \epsilon(k|k) &:= E\{e(k|k)\} = E\{x_w(k) - x(k|k)\} \\
 \delta(k) &:= E\{d(k)\} = E\{y_w(k) - y(k|k-1)\}
 \end{aligned}$$

Für diese Größen gelten nun folgende Rekursionsgleichungen, welche sofort aus (4.1.8) folgen :

(4.2.2) Rekursionsgleichungen für die Erwartungswerte

$$(a) \quad \epsilon(0|-1) = \mu_d(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(k|k) &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot \epsilon(k|k-1) - K(k) \cdot H_d(k) \cdot \mu_w(k) \\
 \epsilon(k+1|k) &= A(k) \cdot \epsilon(k|k) + A_d(k) \cdot \mu_w(k) + c_d(k)
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \epsilon(0|0) = \mu_d(0) - K(0) \cdot [H_w(0) \cdot \mu_w(0) - H(0) \cdot \mu(0)]$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(k|k) &= \pi(k, k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-1) + f(k-1) \\
 \text{mit } f(i) &:= [A_d(i) - K(i+1) \cdot \{H_w(i+1) \cdot A_w(i) - H(i+1) \cdot A(i)\}] \cdot \mu_w(i) \\
 &\quad + [c_d(i) - K(i+1) \cdot \{H_w(i+1) \cdot c_w(i) - H(i+1) \cdot c(i)\}]
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \epsilon(0|-1) = \mu_d(0)$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(k|k-1) &= \theta(k, k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-2) + g(k-1) \\
 \text{mit } g(i) &:= [A_d(i) - A(i) \cdot K(i) \cdot H_d(i)] \cdot \mu_w(i) + c_d(i)
 \end{aligned}$$

$$(d) \quad \delta(0) = H(0) \cdot \mu_d(0) + H_d(0) \cdot \mu_w(0) = H_w(0) \cdot \mu_w(0) - H(0) \cdot \mu(0)$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 \delta(k) &= H(k) \cdot \epsilon(k|k-1) + H_d(k) \cdot \mu_w(k) \\
 &= H(k) \cdot A(k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-1) + [H_w(k) \cdot A_w(k-1) - H(k) \cdot A(k-1)] \cdot \mu_w(k-1) \\
 &\quad + [H_w(k) \cdot c_w(k-1) - H(k) \cdot c(k-1)]
 \end{aligned}$$

Hierbei sind π und θ , analog zu Kapitel 3, die Übergangsmatrizen des Filters (4.1.5).

Indem man die Rekursionsgleichungen auflöst, gelangt man zu folgenden direkten (nicht-rekursiven) Darstellungen:

(4.2.3) direkte Darstellungen für die Erwartungswerte

(a) Mit f und g aus (4.2.2)(b) und (c) gilt für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \epsilon(k|k) &= \pi(k,0) \cdot \epsilon(0|0) + \sum_{i=0}^{k-1} \pi(k,i+1) \cdot f(i) \\ \epsilon(k|k-1) &= \theta(k,0) \cdot \epsilon(0|-1) + \sum_{i=0}^{k-1} \theta(k,i+1) \cdot g(i) \end{aligned}$$

(b) Für $k \geq 0$ gilt :

$$\begin{aligned} \epsilon(k|k) &= \mu_d(k) - \sum_{i=0}^k \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i) \\ \epsilon(k|k-1) &= \mu_d(k) - A(k-1) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i) \end{aligned}$$

Beweis:

(a) folgt induktiv aus (4.2.2)(b) und (c)

(b) Induktion über k :

$k=0$: folgt aus (4.2.2)(b) und (c), wobei $\sum_{i=0}^{-1} (\dots) = 0$

$k \rightarrow k+1$:

$$\begin{aligned} \epsilon(k+1|k) &= A(k) \cdot \epsilon(k|k) + A_d(k) \cdot \mu_w(k) + c_d(k) && \text{nach (4.2.2)(a)} \\ &= A(k) \cdot \mu_d(k) + A_d(k) \cdot \mu_w(k) + c_d(k) \\ &\quad - A(k) \cdot \sum_{i=0}^k \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i) && \text{nach Ind.vor.} \\ &= \mu_d(k+1) - A(k) \cdot \sum_{i=0}^k \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon(k+1|k+1) &= [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot \epsilon(k+1|k) - K(k+1) \cdot H_d(k+1) \cdot \mu_w(k+1) \\ &= \mu_d(k+1) - K(k+1) \cdot H(k+1) \cdot \mu_d(k+1) - K(k+1) \cdot H_d(k+1) \cdot \mu_w(k+1) \\ &\quad - [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot \sum_{i=0}^k \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i) \end{aligned}$$

aufgrund des ersten Teils

$$= \mu_d(k+1) - \sum_{i=0}^{k+1} \pi(k+1,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i)$$



Aus den Gleichungen (4.2.2) und (4.2.3) kann man erkennen, daß die Erwartungswerte der Schätzfehler nicht direkt von den Fehlern $R_d(k)$, $Q_d(k)$ und $P_d(0)$ in den Kovarianzmatrizen abhängen. Dies bedeutet jedoch nicht, daß die Kovarianzmatrizen für diese Erwartungswerte keine Rolle spielen.

Zwar haben die Kovarianzmatrizen $R_w(k)$, $Q_w(k)$ und $P_w(0)$ des Systems (4.1.1) keinen Einfluß auf die Erwartungswerte, aber die Abhängigkeit von den Kovarianzmatrizen $R(k)$, $Q(k)$ und $P(0)$ des Modells (4.1.4) steckt in der Verstärkungsmatrix $K(k)$ und somit auch in den Übergangsmatrizen π und θ .

Diese Übergangsmatrizen π und θ des Filters sind auch, wie in (4.2.2) (b) und (c) zu sehen ist, die Übergangsmatrizen für die Erwartungswerte der wahren Schätzfehler. Entsprechend den Bemerkungen am Ende des Abschnitts 4.1 kennt man somit bei der Benutzung eines bestimmten Modells, ohne Kenntnis über das wahre System, die Auswirkungen der Erwartungswerte früherer Schätzfehler auf die Erwartungswerte der darauf folgenden Schätzfehler.

Im Hinblick auf die Fortpflanzung der Schätzfehler erscheint es daher nach den Ergebnissen von Abschnitt (3.3) sinnvoll, ein gleichmäßig vollständig beobachtbares und kontrollierbares Modell zu entwickeln. Dadurch würde der Filter frühere Fehler mit der Zeit "vergessen" und nur die neueren Fehler, d.h. $s(k)$ und $r(k)$ bzw. deren Erwartungswerte $f(k)$ und $g(k)$, wären von Bedeutung. Dies verhindert ein Aufsummieren der Fehler. Allerdings kann man sich dadurch eine Vergrößerung der "neuen" Fehler einhandeln.

Über den Zusammenhang der Erwartungswerte $\epsilon(k|k)$ und $\epsilon(k|k-1)$ mit den Folgen f und g aus (4.2.2) kann man folgendes sagen :

(4.2.4) (a) Es gilt genau dann $\epsilon(k|k) = 0$ für alle $k \geq 0$, wenn für alle $k \geq 0$: $[I-K(0) \cdot H_w(0)] \cdot \mu_w(0) = [I-K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu(0)$ und $f(k)=0$

(b) Es gilt genau dann $\epsilon(k|k-1) = 0$ für alle $k \geq 0$, wenn $\mu_d(0) = 0$ und $g(k)=0$ für alle $k \geq 0$.

(c) Es gelten die Voraussetzungen von (3.3.9), d.h. das Modell ist gleichmäßig vollständig beobachtbar und kontrollierbar. Dann existiert

eine Konstante $c > 0$ mit $\sum_{i=0}^k \|\pi(k,i)\| \leq c$ für alle $k \geq 0$ und es gelten die folgenden Aussagen:

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\epsilon(k|k)\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(k)\| = 0$$

(2) Falls eine Konstante $c_1 > 0$ existiert, sodaß $\|f(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq 0$, dann ist $\|\epsilon(k|k)\| \leq c \cdot c_1$ für alle $k \geq 0$.

(3) Falls es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, sodaß $\|f(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq k_1$ gilt, dann gibt es für jedes $\sigma > 0$ ein $k(\sigma)$, sodaß $\|\epsilon(k|k)\| \leq c \cdot c_1 + \sigma$ für alle $k \geq k(\sigma)$.

(d) Es gelten die Voraussetzungen von (3.3.9)(b), d.h. das Modell ist gleichmäßig vollständig beobachtbar und kontrollierbar. Dann existiert

eine Konstante $c > 0$ mit $\sum_{i=0}^k \|\theta(k,i)\| \leq c$ für alle $k \geq 0$ und es gelten die folgenden Aussagen:

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\epsilon(k|k-1)\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|g(k)\| = 0$$

(2) Falls eine Konstante $c_1 > 0$ existiert, sodaß $\|g(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq 0$, dann ist $\|\epsilon(k|k-1)\| \leq c \cdot c_1$ für alle $k \geq 0$.

(3) Falls es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, sodaß $\|g(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq k_1$ gilt, dann gibt es für jedes $\sigma > 0$ ein $k(\sigma)$, sodaß

$$\|\epsilon(k|k-1)\| \leq c \cdot c_1 + \sigma \text{ für alle } k \geq k(\sigma).$$

Beweis:

(a) Nach (4.2.2)(b) ist

$$\epsilon(0|0) = [I - K(0) \cdot H_w(0)] \cdot \mu_w(0) - [I - K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu(0)$$

$$\epsilon(k+1|k+1) = \pi(k+1,k) \cdot \epsilon(k|k) + f(k)$$

Daraus folgt sofort Teil (a)

(b) Analog zu (a) aus (4.2.2)(c)

(c) Unter den zusätzlichen Voraussetzungen gilt (vgl. (3.3.9))

(*) es gibt ein $c > 0$ mit $\sum_{i=0}^k \|\pi(k,i)\| \leq c$ für alle $k \geq 0$

(**) für alle $i \geq 0$ ist $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\pi(i+j,i)\| = 0$

(1) "=>" Sei nun $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\epsilon(k|k)\| = 0$ und c nach (*)

Sei $\sigma > 0$

Dann gibt es ein $k(\sigma)$, so daß für alle $k \geq k(\sigma)$ gilt :

$$\|\epsilon(k|k)\| \leq \sigma/c$$

Nach (4.2.2)(b) gilt dann für alle $k \geq k(\sigma)$

$$\begin{aligned} \|f(k)\| &= \|\epsilon(k+1|k+1) - \pi(k+1|k) \cdot \epsilon(k|k)\| \\ &\leq \|\epsilon(k+1|k+1)\| + \|\pi(k+1|k)\| \cdot \|\epsilon(k|k)\| \\ &\leq (\sigma/c) \cdot (1 + \|\pi(k+1|k)\|) \\ &\leq (\sigma/c) \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \|\pi(k+1|i)\| \leq \sigma \quad \text{nach (*)} \end{aligned}$$

"<=" Sei nun $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(k)\| = 0$ und c nach (*)

Dann gibt es ein $c_1 > 0$ mit $\|f(k)\| \leq c_1 < \infty$ für alle $k \geq 0$
und $\|e(0|0)\| \leq c_1$

Sei $\sigma > 0$

Dann gibt es ein $k(\sigma)$, sodaß für alle $k \geq k(\sigma)$

$$\|f(k)\| \leq \sigma/(2 \cdot c)$$

Ferner existiert nach (**) ein $k_0 > k(\sigma)$, sodaß

$$\|\pi(k, i)\| \leq \sigma/[2 \cdot (k(\sigma)+1) \cdot c_1] \quad \text{für alle } i \leq k(\sigma) \leq k_0 \leq k$$

Damit gilt für alle $k \geq k_0$ nach (4.2.3)(a)

$$\begin{aligned} (***) \quad \epsilon(k|k) &\leq \|\pi(k, 0)\| \cdot \|\epsilon(0|0)\| + \sum_{i=1}^k \|\pi(k, i)\| \cdot f(i-1) \\ &\leq c_1 \cdot \sum_{i=0}^{k(\sigma)} \|\pi(k, i)\| + \sigma/(2 \cdot c) \cdot \sum_{i=k(\sigma)+1}^k \|\pi(k, i)\| \\ &\leq c_1 \cdot (k(\sigma)+1) \cdot \sigma/[2 \cdot (k(\sigma)+1) \cdot c_1] + (\sigma/(2 \cdot c)) \cdot c \\ &= \sigma \end{aligned}$$

(2) folgt sofort aus (*), (**) und der Voraussetzung

(3) analog zu "<=" in (i) (vgl. (***))

(d) Analog zu Teil (c)



Ist $f(k)$ (bzw. $g(k)$) ab einem $k_1 \in \mathbb{N}$ beschränkt, so gibt es natürlich auch eine obere Schranke für $\|f(k)\|$ (bzw. $\|g(k)\|$) für alle k . Der Sinn der Aussage in (c)(3) (bzw. (d)(3)) ist jedoch folgender:

Existiert eine kleine Schranke für $\|f(k)\|$ ($\|g(k)\|$) für $k \geq k_1$, so gilt auch eine entsprechend kleine Schranke für $\|\epsilon(k|k)\|$ ($\|\epsilon(k|k-1)\|$) für hinreichend großes k , egal wie groß die $\|f(k)\|$ ($\|g(k)\|$) für $k < k_1$ waren.

Dies drückt wiederum die mit der Stabilität des Filters verbundene "Vergeßlichkeit" des Filters aus.

Die Auswirkungen von Modellfehlern auf die Erwartungswerte der Schätzfehler drücken sich also unter den Voraussetzungen von (3.3.9) im wesentlichen in den jeweils neuen Fehlererwartungswerten $f(k)$ und $g(k)$ aus. Ist jedoch der Erwartungswert $\mu_w(k)$ des wahren Zustandes unbeschränkt (wahres System instabil), so sind auch $f(k)$ und $g(k)$ unbeschränkt, solange Fehler $A_d(k)$ oder $H_d(k)$ existieren. In dieser Situation wäre es sinnvoll einen relativen Fehler zu untersuchen, d.h. den Schätzfehler in eine Beziehung zum Wert des aktuellen Zustandes zu setzen.

In der folgenden Bemerkung werden noch zwei Spezialfälle von (4.2.2) angegeben:

(4.2.5) (a) Ist $H_d(k) = 0$ für alle $k \geq 0$, so gilt:

$$\epsilon(0|-1) = \mu_d(0) \quad , \quad \epsilon(0|0) = [I-K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu_d(0)$$

Für $k \geq 1$:

$$\epsilon(k|k-1) = A(k-1) \cdot [I-K(k-1) \cdot H(k-1)] \cdot \epsilon(k-1|k-2) + g(k-1)$$

$$\epsilon(k|k-1) = \theta(k,0) \cdot \epsilon(0|-1) + \sum_{i=0}^{k-1} \theta(k,i+1) \cdot g(i)$$

$$\text{wobei } g(i) = A_d(i) \cdot \mu_w(i) + c_d(i)$$

$$\epsilon(k|k) = [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot [A(k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-1) + g(k-1)]$$

$$\epsilon(k|k) = \pi(k,0) \cdot \epsilon(0|0) + \sum_{i=0}^{k-1} \pi(k,i+1) \cdot f(i)$$

$$\text{wobei } f(i) = [I-K(i+1) \cdot H(i+1)] \cdot g(i)$$

Dabei kann man $g(i)$ schreiben als :

$$g(i) = \mu_w(i+1) - \mu_w^e(i+1)$$

$$\text{mit } \mu_w^e(i+1) = A(i) \cdot \mu_w(i) + c(i)$$

= Extrapolation des "wahren" Erwartungswertes zur Zeit i mit Hilfe des Modells in die Zeit $i+1$

(b) Ist $H_d(k)=0$, $A_d(k)=0$ und $c_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$, so gilt:

$$\epsilon(0|-1) = \mu_d(0) \quad , \quad \epsilon(0|0) = [I-K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu_d(0)$$

Für $k \geq 1$:

$$\epsilon(k|k-1) = \theta(k,k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-2) = \theta(k,0) \cdot \mu_d(0)$$

$$\epsilon(k|k) = \pi(k,k-1) \cdot \epsilon(k-1|k-1)$$

$$= \pi(k,0) \cdot [I-K(0) \cdot H(0)] \cdot \mu_d(0)$$

Ist $\mu_d(0) = 0$, so ist $\epsilon(k|k) = \epsilon(k|k-1) = 0$ für alle $k \geq 0$.

Ist $\mu_d(0) \neq 0$, so gilt unter den Voraussetzungen von

(3.3.9), daß $\|\epsilon(k|k)\|$ exponentiell gegen Null konvergiert für k gegen unendlich.

Existiert ein $c > 0$ mit $\|A(k)\| \leq c < \infty$ für alle $k \geq 0$, so konvergiert auch $\|\epsilon(k|k-1)\|$ exponentiell gegen Null.

(4.2.6) Beispiel

Betrachtet werde das folgende System:

$$x_w(k+1) = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot x_w(k) + w_w(k) \quad ; \quad Q_w(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E\{x_w(0)\} = (1,1)^T \quad ; \quad \text{cov}\{x_w(0)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_w(k) = (1,1) \cdot x_w(k) + v_w(k) \quad ; \quad R_w(k) = 1$$

Das zur Filterung dieses instabilen Systems benutzte Modell stimmt bis auf die Systemmatrix A mit dem System überein:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Wegen (3.3.8) und (3.3.9) ist dann der zum Modell gehörige Filter stabil.

Trotz der damit verbundenen asymptotischen Eigenschaften der Übergangsmatrizen divergieren die Schätzfehler, wie auf den folgenden Bildern zu sehen ist. Dies liegt an der Instabilität des Systems.

Interessant ist es auch, die Einschrittvorhersage von $y_w(k)$ und deren Fehler zu betrachten. Aufgrund der Tatsache, daß

$$H_w(k) \cdot A_w(k) = (1.1, 1.2) = H(k) \cdot A(k)$$

unterscheidet sich der Fehler bei der Benutzung des falschen Modells nicht so sehr vom Fehler bei der Benutzung des richtigen Modells. Es ist jedoch eine leicht Drift zu erkennen, während der "optimale" Fehler unkorreliert ist.

Bild 1 : Wahrer Prozeß (markiert durch Linie) und die aufgrund des falschen Modells gefilterten Werte (markiert durch x)

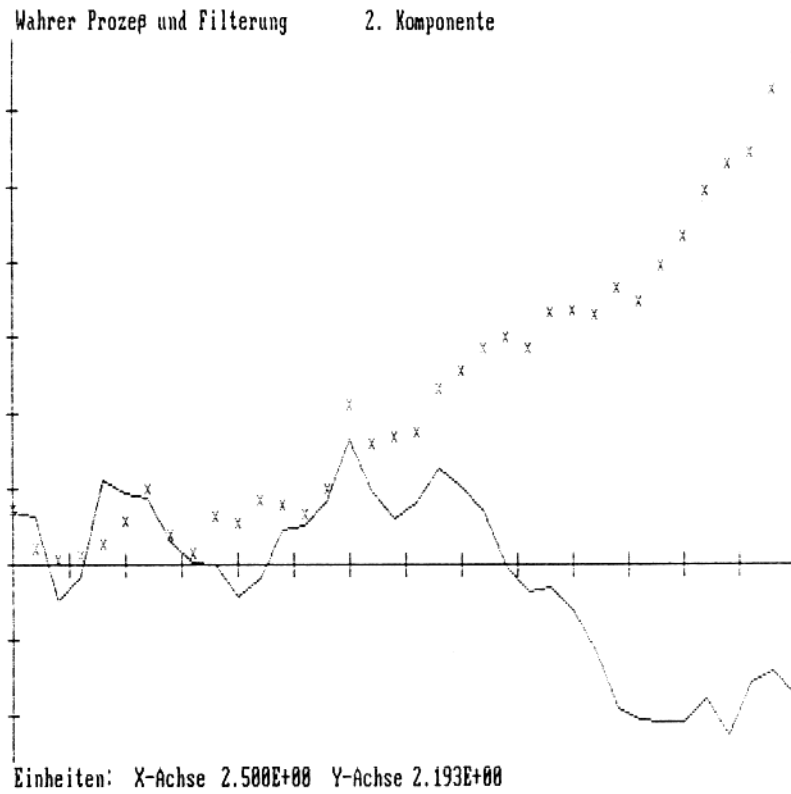
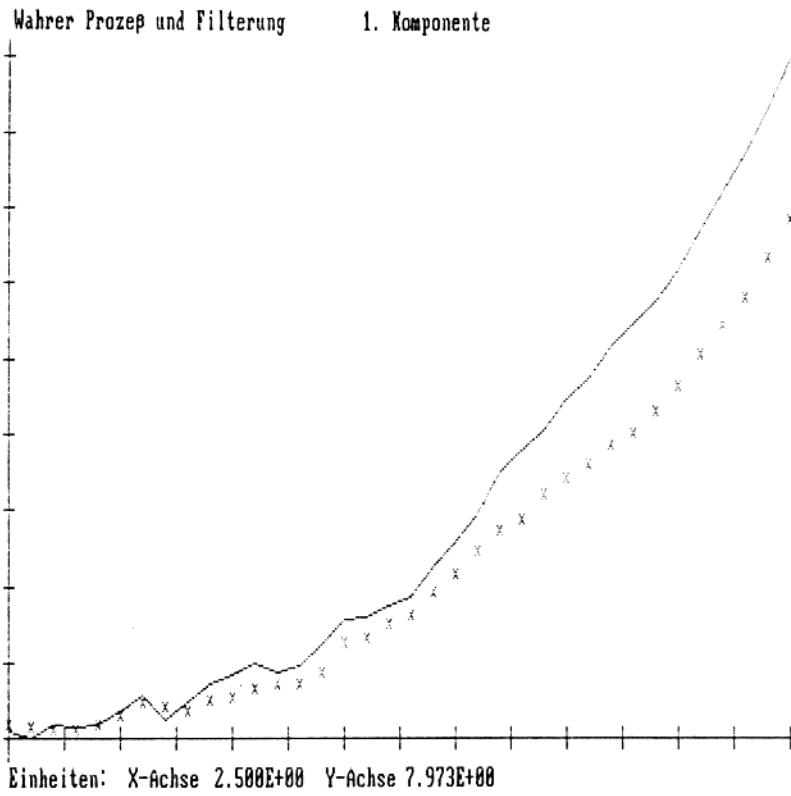


Bild 2: Fehler $x_w(k) - x(k|k)$ bei der Benutzung des falschen Modells (markiert durch Linie) und Fehler $x_w(k) - x^o(k|k)$ bei der Benutzung des richtigen Modells (markiert durch x)

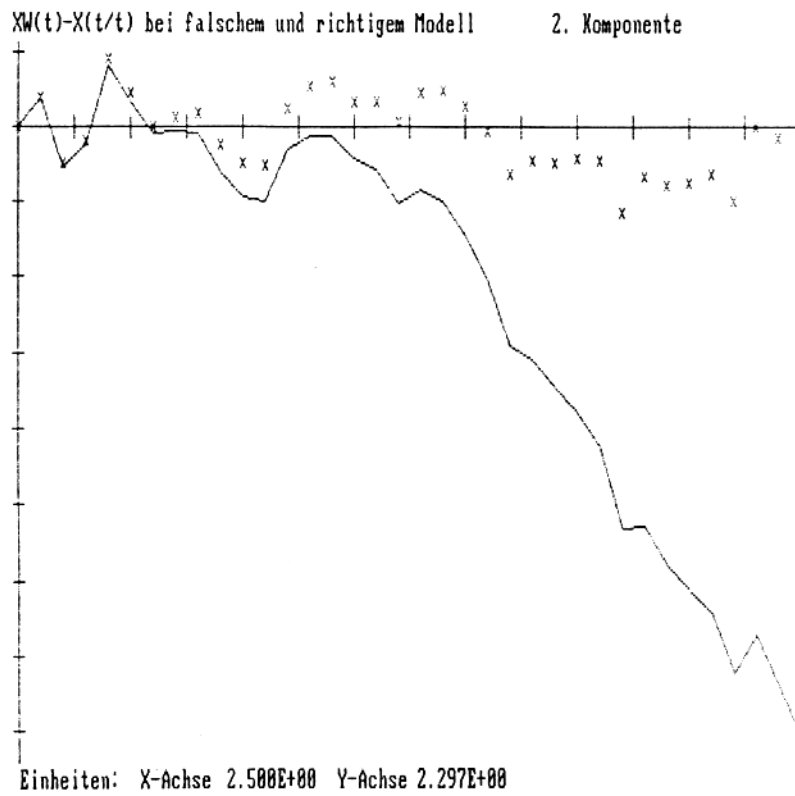
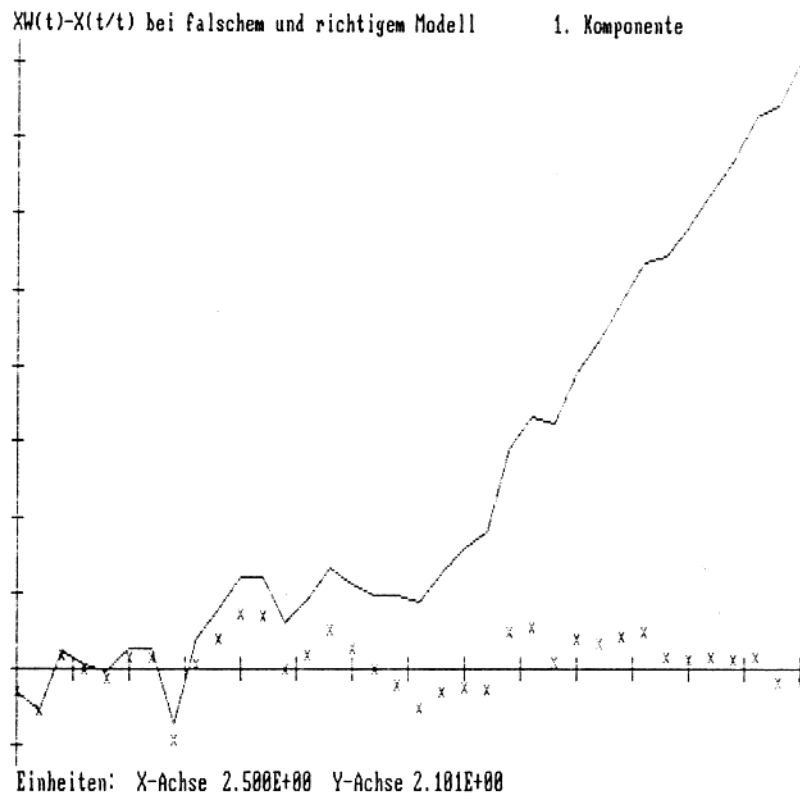


Bild 3: Fehler $x_w(k) - x(k|k)$ bei der Benutzung des falschen Modells (markiert durch x) und dessen Erwartungswert $E\{x_w(k) - x(k|k)\}$ (markiert durch Linie)

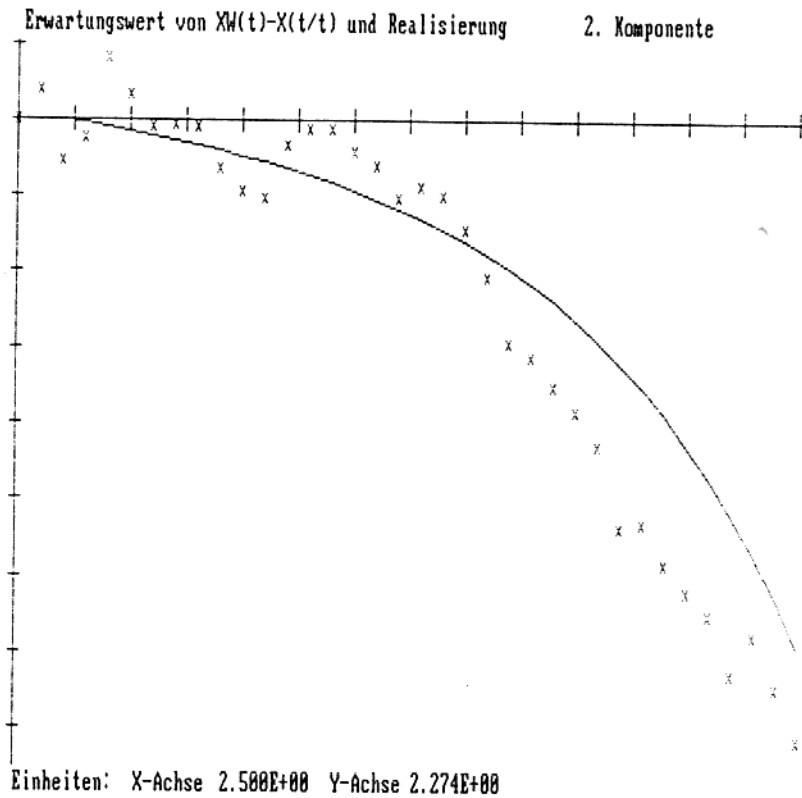
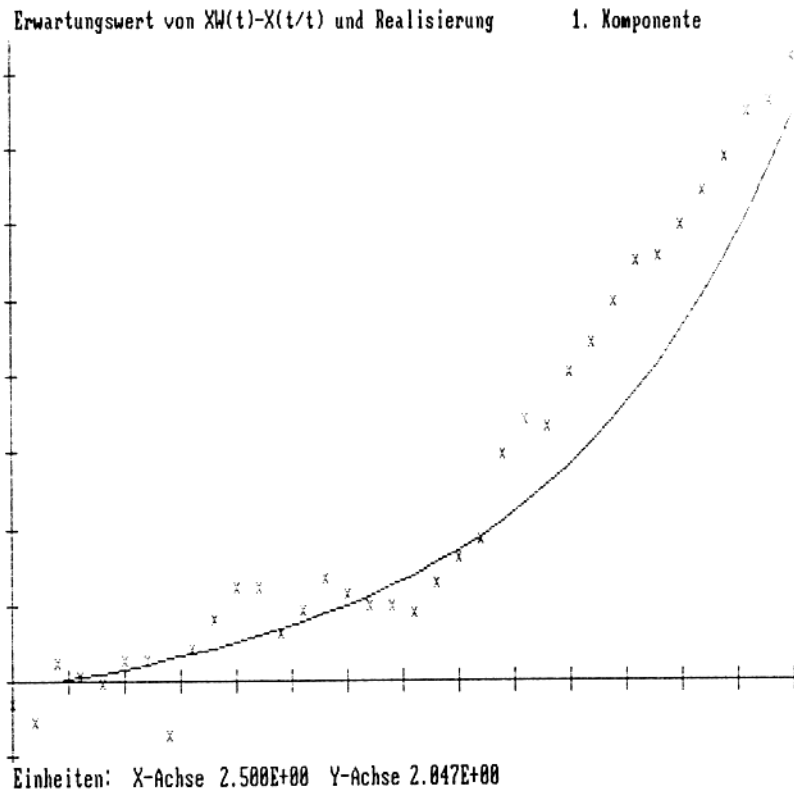


Bild 4: Beobachtung $y_w(k)$ (markiert durch Linie) und die zugehörige Einschrittvorhersage $y(k|k-1)$ bei der Benutzung des falschen Modells (markiert durch x)

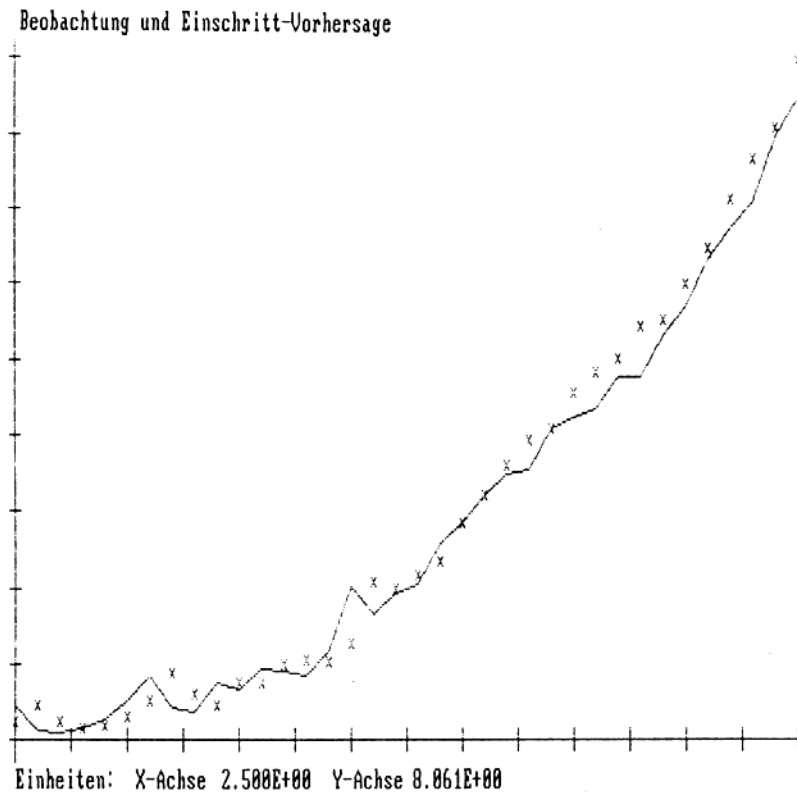
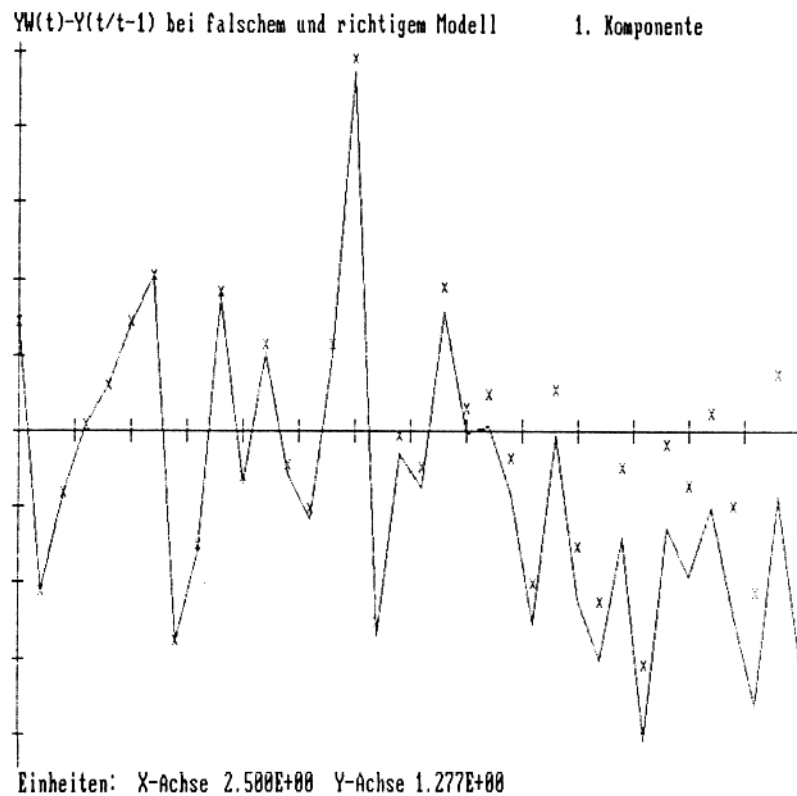


Bild 5: Fehler $y_w(k) - y(k|k-1)$ bei der Benutzung des falschen Modells (markiert durch Linie) und Fehler $y_w(k) - y^o(k|k-1)$ bei der Benutzung des richtigen Modells (markiert durch x)



Für den Erwartungswert $\delta(k)$ kann man analoge Aussagen zu (4.2.4) herleiten :

(4.2.7) (a) Ist $H(0) \cdot \mu_d(0) = 0$ und sowohl $g(k) = 0$ für alle $k \geq 0$ als auch $H_d(k) \cdot \mu_w(k) = 0$ für alle $k \geq 0$, so ist auch $\delta(k) = 0$ für alle $k \geq 0$

(b) Es gelten die Voraussetzungen von (3.3.9)(b), d.h. das Modell ist gleichmäßig vollständig beobachtbar und kontrollierbar. Dann existiert

eine Konstante $c > 0$ mit $\sum_{i=0}^k \|\pi(k,i)\| \leq c$ für alle $k \geq 0$.

Gibt es ferner eine Konstante $c_1 > 0$ mit $\|H(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq 0$, dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Konvergieren sowohl $\|g(k)\|$ als auch $\|H_d(k) \cdot \mu_w(k)\|$ gegen 0, so konvergiert auch $\delta(k)$ gegen Null.
- (2) Existieren $c_2 \geq \|\mu_d(0)\|$ mit $\|g(k)\| \leq c_2$ für alle $k \geq 0$ und c_3 mit $\|H_d(k) \cdot \mu_w(k)\| \leq c_3$ für alle $k \geq 0$, so ist $\|\delta(k)\| \leq c_1 \cdot c_2 \cdot c + c_3$ für alle $k \geq 0$
- (3) Existieren $k_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, so daß für alle $k \geq k_1$ gilt:

$$\|H(k)\| \leq c_1, \quad \|g(k)\| \leq c_2 \quad \text{und} \quad \|H_d(k) \cdot \mu_w(k)\| \leq c_3,$$

so gibt es zu jedem $\alpha > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\|\delta(k)\| \leq (c_1 \cdot c_2 \cdot c + c_3) + \alpha$$

Beweis: Folgt mit (4.2.2)(d) aus (4.2.4), beziehungsweise durch analoge Beweisführung zum Beweis von (4.2.4)

Mit Hilfe von (4.2.3)(b) kann man $\delta(k)$ umschreiben:

(4.2.8) (a) Es gilt für $k \geq 0$:

$$\delta(k+1) = \tau_d(k+1) - H(k+1) \cdot A(k) \cdot \sum_{i=0}^k \pi(k,i) \cdot K(i) \cdot \tau_d(i)$$

(b) $\delta(k) = 0$ für alle $k \geq 0 \iff \tau_d(k) = 0$ für alle $k \geq 0$

(c) Gelten die Voraussetzungen von (3.3.9)(d), so gilt:

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tau_d(k)\| = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta(k)\| = 0$$

(2) Existiert ein $c_1 > 0$ mit $\|\tau_d(k)\| \leq c_1$ für alle $k \geq 0$, so gibt es ein $c > 0$ mit $\|\delta(k)\| \leq c$ für alle $k \geq 0$.

Beweis: analog zu (4.2.4)

Interessant wären auch Umkehrungen derart, daß man von einem "gutartigem" Verhalten der $\delta(k)$ auf ein entsprechendes Verhalten der $\tau_d(k)$ bzw. der Modellfehler schließen könnte.

Daß man aus $\delta(k)$ noch nicht einmal alle Modellfehler in $A_w(k)$ erkennen kann, zeigt der folgende Satz :

(4.2.9) Alle Parameter des wahren Systems außer $A_w(k)$ seien bekannt, d.h. $c_d(k)=0$, $Q_d(k)=0$, $H_d(k)=0$, $R_d(k)=0$, $P_d(0)=0$ und $\mu_d(0)=0$. Gilt außerdem $H(k) \cdot [\Phi_w(k,0) - \Phi(k,0)] = 0$ für alle $k \geq 0$, d.h. die Spalten von $\Phi_w(k,0) - \Phi(k,0)$ liegen im Kern von $H(k)$, so ist $\tau_d(k) = 0$ für alle $k \geq 0$ und $\delta(k) = 0$ für alle $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \tau_d(k) &= H(k) \cdot \mu_d(k) = H(k) \cdot (\mu_w(k) - \mu(k)) \\ &= H(k) \cdot (\Phi_w(k,0) \cdot \mu_w(0) - \Phi(k,0) \cdot \mu(0)) \quad (\text{vgl. (3.1.8)}) \\ &= H(k) \cdot (\Phi_w(k,0) - \Phi(k,0)) \cdot \mu(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist auch nach (4.2.8)(b) $\delta(k) = 0$

(4.2.10) Beispiel

$n=2$, $m=1$

$$\begin{aligned} \text{System : } x_w(k+1) &= x_w(k) + w_w(k) \quad ; \quad Q_w(k) = I \\ y_w(k) &= (1,1) \cdot x_w(k) + v_w(k) \quad ; \quad R_w(k) = 1 \\ \text{außerdem: } \mu_w(0) &= (1,1)^T \quad ; \quad P_w(0) = I \end{aligned}$$

Modell : Alle Parameter wie im System bis auf die Matrix A

$$A(k) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

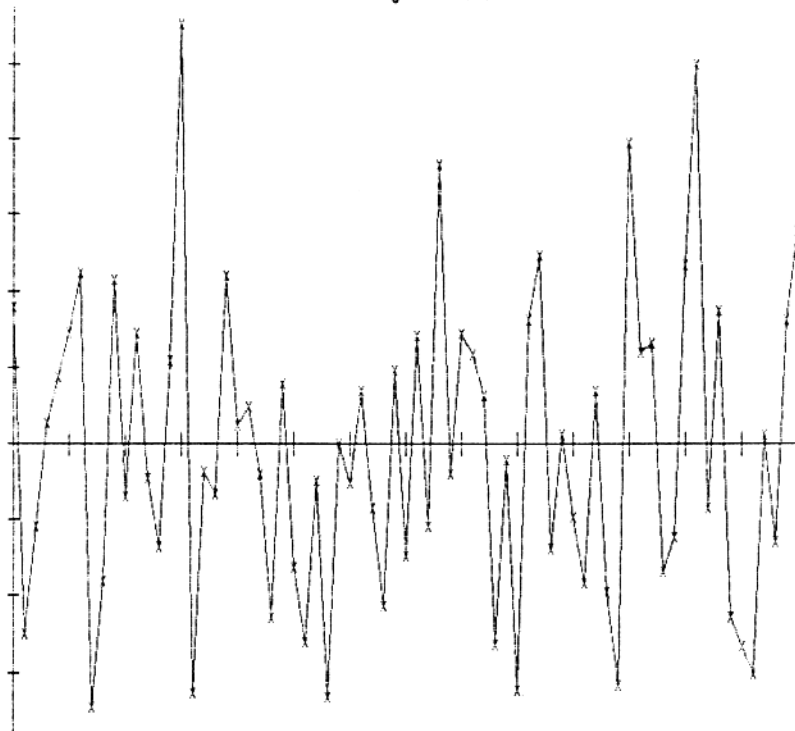
$$\begin{aligned} \text{Wegen } \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot \alpha - \alpha^2 \\ 0 & 1 - 2 \cdot \alpha + \alpha^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1-\beta \end{bmatrix} \quad \text{mit } \beta = 2 \cdot \alpha - \alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ist } H \cdot \Phi(k,0) &= H \cdot A^{k+1} \\ &= (1,1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta_k \\ 0 & 1-\beta_k \end{bmatrix} = (1,1) \end{aligned}$$

Außerdem ist $H \cdot \Phi_w(k,0) = H \cdot I = (1,1)$ und somit sind die Voraussetzungen von (4.2.9) erfüllt.

Sieht man sich eine Simulation dieses Beispiels an, so stimmen die Fehlerprozesse $d_0(k)$ (bei Benutzung des wahren Modells) und $d(k)$ (bei Benutzung des falschen Modells) überein, so daß offensichtlich noch mehr gilt, als in (4.2.9) behauptet wurde.

YW(t)-Y(t/t-1) bei falschem und richtigem Modell



Einheiten: X-Achse 5.000E+00 Y-Achse 1.045E+00

4.3 Kovarianzmatrizen der Fehlerprozesse

Bisher wurden die "wahren" Schätzfehler und deren Erwartungswerte diskutiert. Nun sollen als weitere statistische Charakterisierung der Schätzfehler deren Kovarianzmatrizen betrachtet werden. Dazu werden zunächst die zentrierten Schätzfehler charakterisiert. Diese werden bezeichnet mit:

$$\begin{aligned}
 (4.3.1) \quad e^z(k|k-1) &:= e(k|k-1) - \epsilon(k|k-1) \\
 e^z(k|k) &:= e(k|k) - \epsilon(k|k) \\
 d^z(k) &:= d(k) - \delta(k)
 \end{aligned}$$

Ferner sei noch folgende Bezeichnung für den zentrierten "wahren" Zustand des Systems eingeführt:

$$(4.3.2) \quad x_w^z(k) := x_w(k) - \mu_w(k)$$

Mit diesen Bezeichnungen gelten folgende Rekursionsgleichungen:

(4.3.3) Rekursionsgleichungen für die zentrierten Schätzfehler

$$(a) \quad e^z(0|-1) = x_w^z(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$e^z(k|k) = [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e^z(k|k-1) - K(k) \cdot H_d(k) \cdot x_w^z(k) - K(k) \cdot v_w(k)$$

$$e^z(k+1|k) = A(k) \cdot e^z(k|k) + A_d(k) \cdot x_w^z(k) + G_w(k) \cdot w_w(k)$$

$$(b) \quad e^z(0|0) = [I - K(0) \cdot H_w(0)] \cdot x_w^z(0) - K(0) \cdot v_w(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$e^z(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot A(k) \cdot e^z(k|k)$$

$$+ [A_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot A_w(k) - H(k+1) \cdot A(k)\}] \cdot x_w^z(k)$$

$$+ [I - K(k+1) \cdot H_w(k+1)] \cdot G_w(k) \cdot w_w(k) - K(k+1) \cdot v_w(k+1)$$

$$(c) \quad e^z(0|-1) = x_w^z(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$e^z(k+1|k) = A(k) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot e^z(k|k-1)$$

$$+ [A_d(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot H_d(k)] \cdot x_w^z(k)$$

$$+ G_w(k) \cdot w_w(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot v_w(k)$$

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus (4.1.8) und (4.2.2)

Die zentrierten Gleichungen des "wahren" Modells (4.1.1) lauten:

$$(4.3.4) \quad x_w^z(k+1) = A_w(k) \cdot x_w^z(k) + G_w(k) \cdot w_w(k)$$

$$y_w^z(k) = H_w(k) \cdot x_w^z(k) + v_w(k)$$

Für die Kovarianzmatrizen seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 (4.3.5) \quad P_w(k|k-1) &:= \text{cov}\{e(k|k-1)\} &= E\{ e^z(k|k-1) \cdot e^z(k|k-1)^T \} \\
 P_w(k|k) &:= \text{cov}\{e(k|k)\} &= E\{ e^z(k|k) \cdot e^z(k|k)^T \} \\
 P_{x_e}(k|k-1) &:= \text{cov}\{x_w(k), e(k|k-1)\} &= E\{ x_w^z(k) \cdot e^z(k|k-1)^T \} \\
 P_{x_e}(k|k) &:= \text{cov}\{x_w(k), e(k|k)\} &= E\{ x_w^z(k) \cdot e^z(k|k)^T \} \\
 P_x(k) &:= \text{cov}\{x_w(k)\} &= E\{ x_w^z(k) \cdot x_w^z(k)^T \}
 \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar aus (4.3.3)(a) und (4.3.4):

(4.3.6) Indirekte Rekursionsgleichungen
für die Fehlerkovarianzmatrizen

$$P_w(0|-1) = P_x(0) (=P_w(0))$$

$$P_{x_e}(0|-1) = P_x(0)$$

Für $k \geq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 P_w(k|k) &= [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot P_w(k|k-1) \cdot [I-K(k) \cdot H(k)]^T \\
 &\quad + K(k) \cdot H_d(k) \cdot P_x(k) \cdot H_d^T(k) \cdot K^T(k) + K(k) \cdot R_w(k) \cdot K^T(k) \\
 &\quad - [I-K(k) \cdot H(k)] \cdot P_{x_e}(k|k-1)^T \cdot H_d^T(k) \cdot K^T(k) \\
 &\quad - K(k) \cdot H_d(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot [I-K(k) \cdot H(k)]^T
 \end{aligned}$$

$$P_{x_e}(k|k) = P_{x_e}(k|k-1) \cdot [I-K(k) \cdot H(k)]^T - P_x(k) \cdot H_d^T(k) \cdot K^T(k)$$

$$\begin{aligned}
 P_w(k+1|k) &= A(k) \cdot P_w(k|k) \cdot A^T(k) + A_d(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) \\
 &\quad + A(k) \cdot P_{x_e}^T(k|k) \cdot A_d^T(k) + A_d(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot A^T(k) \\
 &\quad + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{x_e}(k|k-1) &= A_w(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot A^T(k) + A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) \\
 &\quad + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)
 \end{aligned}$$

$$P_x(k+1) = A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_w^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

Aus (4.3.3)(b), (c) und (4.3.4) resultieren die folgenden Gleichungen:

(4.3.7) Direkte Rekursionsgleichungen für die Fehlerkovarianzmatrizen

(a) Mit $\Gamma(k) := A_d(k) - K(k+1) \cdot \{H_w(k+1) \cdot A_w(k) - H(k+1) \cdot A(k)\}$

(vgl. mit f aus (4.2.2))

und $D_w(k) := I - K(k) \cdot H_w(k)$ gilt:

$$P_w(0|0) = D_w(0) \cdot P_x(0) \cdot D_w^T(0) + K(0) \cdot R_w(0) \cdot K^T(0)$$

$$P_{x_e}(0|0) = P_x(0) \cdot D_w^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 P_w(k+1|k+1) &= \pi(k+1, k) \cdot P_w(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) \\
 &\quad + \Gamma(k) \cdot P_x(k) \cdot \Gamma^T(k) + K(k+1) \cdot R_w(k+1) \cdot K^T(k+1) \\
 &\quad + D_w(k+1) \cdot G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) \cdot D_w^T(k+1) \\
 &\quad + \Gamma(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) + \pi(k+1, k) \cdot P_{x_e}^T(k|k) \cdot \Gamma^T(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{x_e}(k+1|k+1) &= A_w(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) \\
 &\quad + A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot \Gamma^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) \cdot D_w^T(k+1)
 \end{aligned}$$

$$P_x(k+1) = A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_w^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

(b) Mit $\Omega(k) := A_d(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot H_d(k)$ (vgl. mit $g(k)$ aus (4.2.2)) gilt:

$$P_w(0|-1) = P_x(0)$$

$$P_{x_e}(0|-1) = P_x(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_w(k+1|k) &= \theta(k+1, k) \cdot P_w(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1, k) \\ &\quad + \Omega(k) \cdot P_x(k) \cdot \Omega^T(k) \\ &\quad + \Omega(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1, k) + \theta(k+1, k) \cdot P_{x_e}^T(k|k-1) \cdot \Omega^T(k) \\ &\quad + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) + A(k) \cdot K(k) \cdot R_w(k) \cdot K^T(k) \cdot A^T(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{x_e}(k+1|k) &= A_w(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1, k) \\ &\quad + A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot \Omega^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) \end{aligned}$$

$$P_x(k+1) = A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_w^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

Der Algorithmus berechnet folgende Matrizen (vgl. (4.1.5))

$$(4.3.8) \quad P(0|-1) = P(0)$$

$$\begin{aligned} \text{Für } k \geq 0: \quad P(k|k) &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T \\ &\quad + K(k) \cdot R(k) \cdot K^T(k) \end{aligned}$$

$$P(k+1|k) = A(k) \cdot P(k|k) \cdot A^T(k) + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k)$$

Führt man folgende Differenzen für die Kovarianzmatrizen ein:

$$(4.3.9) \quad P_d(k|k) := P_w(k|k) - P(k|k)$$

$$P_d(k|k-1) := P_w(k|k-1) - P(k|k-1) ,$$

so gilt:

(4.3.10) Indirekte Rekursionsgleichungen für die Matrizendifferenzen

$$P_d(0|-1) = P_d(0) := P_x(0) - P(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_d(k|k) &= [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P_d(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T \\ &\quad + K(k) \cdot H_d(k) \cdot P_x(k) \cdot H_d^T(k) \cdot K^T(k) + K(k) \cdot R_d(k) \cdot K^T(k) \\ &\quad - [I - K(k) \cdot H(k)] \cdot P_{x_e}(k|k-1)^T \cdot H_d^T(k) \cdot K^T(k) \\ &\quad - K(k) \cdot H_d(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot [I - K(k) \cdot H(k)]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_d(k+1|k) &= A(k) \cdot P_d(k|k) \cdot A^T(k) + A_d(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) + Q_d(k) \\ &\quad + A(k) \cdot P_{x_e}^T(k|k) \cdot A_d^T(k) + A_d(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot A^T(k) \end{aligned}$$

mit P_{x_e} und P_x aus (4.3.6)

Aus (4.3.8) erhält man folgende Gleichungen für die vom Algorithmus berechneten Matrizen:

$$(4.3.11) \quad P(0|-1) = P(0)$$

$$P(0|0) = [I-K(0) \cdot H(0)] \cdot P(0) \cdot [I-K(0) \cdot H(0)]^T + K(0) \cdot R(0) \cdot K^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P(k+1|k+1) = \pi(k+1|k) \cdot P(k|k) \cdot \pi^T(k+1|k) + K(k+1) \cdot R(k+1) \cdot K^T(k+1) \\ + [I-K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \cdot [I-K(k+1) \cdot H(k+1)]^T$$

$$P(k+1|k) = \theta(k+1|k) \cdot P(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1|k) \\ + G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) + A(k) \cdot K(k) \cdot R(k) \cdot K^T(k) \cdot A^T(k)$$

Damit und mit (4.3.7) erhält man folgende Gleichungen:

(4.3.12) Direkte Rekursionsgleichungen für die Matrizendifferenzen

(a) Mit $\Gamma(k) := A_d(k) - K(k+1) \cdot [H_w(k+1) \cdot A_w(k) - H(k+1) \cdot A(k)]$

$$D(k) := I - K(k) \cdot H(k)$$

$$D_w(k) := I - K(k) \cdot H_w(k) \quad \text{gilt:}$$

$$P_d(0|0) = D_w(0) \cdot P_x(0) \cdot D_w^T(0) - D(0) \cdot P(0) \cdot D^T(0) + K(0) \cdot R_d(0) \cdot K^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k+1) = \pi(k+1,k) \cdot P_d(k|k) \cdot \pi^T(k+1,k) \\ + \Gamma(k) \cdot P_x(k) \cdot \Gamma^T(k) + K(k+1) \cdot R_d(k+1) \cdot K^T(k+1) \\ + D_w(k+1) \cdot G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) \cdot D_w^T(k+1) \\ - D(k+1) \cdot G(k) \cdot Q(k) \cdot G^T(k) \cdot D^T(k+1) \\ + \Gamma(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot \pi^T(k+1,k) + \pi(k+1,k) \cdot P_{x_e}^T(k|k) \cdot \Gamma^T(k)$$

wobei P_x und P_{x_e} wie in (4.3.7)(a)

(b) Mit $\Omega(k) := A_d(k) - A(k) \cdot K(k) \cdot H_d(k)$ gilt:

$$P_d(0|-1) = P_d(0) := P_x(0) - P(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k) = \theta(k+1,k) \cdot P_d(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1,k) \\ + \Omega(k) \cdot P_x(k) \cdot \Omega^T(k) \\ + \Omega(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1,k) + \theta(k+1,k) \cdot P_{x_e}^T(k|k-1) \cdot \Omega^T(k) \\ + Q_d(k) + A(k) \cdot K(k) \cdot R_d(k) \cdot K^T(k) \cdot A^T(k)$$

wobei P_x und P_{x_e} wie in (4.3.7)(b)

Bisher wurden lediglich Rekursionsgleichungen für die "wahren" Fehlerkovarianzen bzw. für deren Differenzen zu den berechneten Kovarianzmatrizen hergeleitet. Diese bilden im konkreten Fall ein Basis für eine Fehleranalyse. Bevor allgemeine qualitative Aussagen gemacht werden, soll die Reihe der Gleichungen noch für den Fall $H_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$, d.h. keine Fehler in der Meßmatrix, fortgesetzt werden, da sich die Gleichungen in diesem Fall sehr vereinfachen.

(4.3.13) Rekursionsgleichungen für die Differenzen der Fehlerkovarianzmatrizen für den Fall $H_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$

Es sei $D(k) := I - K(k) \cdot H(k)$ für $k \geq 0$

$$(a) P_d(0|-1) = P_d(0)$$

$$P_{x_e}(0|0) = P_x(0) \cdot D^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k|k) = D(k) \cdot P_d(k|k-1) \cdot D^T(k) + K(k) \cdot R_d(k) \cdot K^T(k)$$

$$P_d(k+1|k) = A(k) \cdot P_d(k|k) \cdot A^T(k) + A_d(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) + Q_d(k) \\ + A(k) \cdot P_{x_e}^T(k|k) \cdot A_d^T(k) + A_d(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot A^T(k)$$

$$P_{x_e}(k+1|k+1) = A_w(k) \cdot P_{x_e}(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ + A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) \cdot D^T(k+1) \\ + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k) \cdot D^T(k+1)$$

$$P_x(k+1) = A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_w^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

$$(b) \text{ Sei } C(i) := K(i+1) \cdot R_d(i+1) \cdot K^T(i+1) + D(i+1) \cdot Q_d(i) \cdot D^T(i+1) \\ + D(i+1) \cdot A_d(i) \cdot P_{x_e}(i|i) \cdot \pi^T(i+1, i) \\ + \pi(i+1, i) \cdot P_{x_e}^T(i|i) \cdot A_d^T(i) \cdot D^T(i+1) \\ + D(i+1) \cdot A_d(i) \cdot P_x(i) \cdot A_d^T(i) \cdot D^T(i+1)$$

$$P_d(0|0) = D(0) \cdot P_d(0) \cdot D^T(0) + K(0) \cdot R_d(0) \cdot K^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k+1) = \pi(k+1, k) \cdot P_d(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) + C(k) \\ = \pi(k+1, 0) \cdot P_d(0|0) \cdot \pi^T(k+1, 0) + \sum_{i=0}^k \pi(k+1, i+1) \cdot C(i) \cdot \pi^T(k+1, i+1)$$

wobei P_x und P_{x_e} wie in Teil (a)

(c) Sei

$$F(i) := Q_d(i) + A(i) \cdot K(i) \cdot R_d(i) \cdot K^T(i) \cdot A^T(i) + A_d(i) \cdot P_x(i) \cdot A_d^T(i) \\ + A_d(i) \cdot P_{x_e}(i|i-1) \cdot \theta^T(i+1, i) + \theta(i+1, i) \cdot P_{x_e}^T(i|i-1) \cdot A_d^T(i)$$

$$P_d(0|-1) = P_d(0)$$

$$P_{x_e}(0|-1) = P_x(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k) = \theta(k+1, k) \cdot P_d(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1, k) + F(k) \\ = \theta(k+1, 0) \cdot P_d(0) \cdot \theta^T(k+1, 0) + \sum_{i=0}^k \theta(k+1, i+1) \cdot F(i) \cdot \theta^T(k+1, i+1)$$

$$P_{x_e}(k+1|k) = A_w(k) \cdot P_{x_e}(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1, k) \\ + A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_d^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

$$P_x(k+1) = A_w(k) \cdot P_x(k) \cdot A_w^T(k) + G_w(k) \cdot Q_w(k) \cdot G_w^T(k)$$

Ist zusätzlich $A_d(k)=0$ für $k \geq 0$, d.h. es werden nur Fehler in den Kovarianzmatrizen $P_d(0)$, $Q_d(k)$ und $P_d(k)$ betrachtet ($c_d(k)$ spielt, wie aus (4.3.3)-(4.3.12) zu sehen ist, bei den Fehlerkovarianzmatrizen keine Rolle. $c_d(k)$ wirkt sich nur als deterministische Größe auf den

Erwartungswert des Fehlers aus), so vereinfachen sich die Gleichungen aus (4.3.13) weiter:

(4.3.14) Rekursionsgleichungen für die Differenzen der Fehlerkovarianzmatrizen für den Fall $A_d(k)=0$, $H_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$

Es sei $D(k) := I - K(k) \cdot H(k)$ für $k \geq 0$

(a) $P_d(0|-1) = P_d(0)$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k|k) = D(k) \cdot P_d(k|k-1) \cdot D^T(k) + K(k) \cdot R_d(k) \cdot K^T(k)$$

$$P_d(k+1|k) = A(k) \cdot P_d(k|k) \cdot A^T(k) + Q_d(k)$$

(b) Sei $C(i) := K(i+1) \cdot R_d(i+1) \cdot K^T(i+1) + D(i+1) \cdot Q_d(i) \cdot D^T(i+1)$

$$P_d(0|0) = D(0) \cdot P_d(0) \cdot D^T(0) + K(0) \cdot R_d(0) \cdot K^T(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k+1) = \pi(k+1,k) \cdot P_d(k|k) \cdot \pi^T(k+1,k) + C(k)$$

$$= \pi(k+1,0) \cdot P_d(0|0) \cdot \pi^T(k+1,0) + \sum_{i=0}^k \pi(k+1,i+1) \cdot C(i) \cdot \pi^T(k+1,i+1)$$

(c) Sei

$$F(i) := Q_d(i) + A(i) \cdot K(i) \cdot R_d(i) \cdot K^T(i) \cdot A^T(i)$$

$$P_d(0|-1) = P_d(0)$$

Für $k \geq 0$:

$$P_d(k+1|k) = \theta(k+1,k) \cdot P_d(k|k-1) \cdot \theta^T(k+1,k) + F(k)$$

$$= \theta(k+1,0) \cdot P_d(0) \cdot \theta^T(k+1,0) + \sum_{i=0}^k \theta(k+1,i+1) \cdot F(i) \cdot \theta^T(k+1,i+1)$$

Während es schwierig ist aus den vorigen Gleichungen allgemeine qualitative Schlüsse zu ziehen, kann man aus den Gleichungen (4.3.14) sofort folgendes erkennen:

Für symmetrische Matrizen sei die Halbordnung

$$A \leq B \quad : \Leftrightarrow \quad B - A \text{ positiv semidefinit}$$

eingeführt. Damit gilt (vgl. dazu auch Jazwinski (/10/, Kap.7.8) :

(4.3.15) Es sei $H_d(k)=0$ und $A_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$.

Gilt ferner $P_d(0) \leq 0$, $Q_d(k) \leq 0$ und $P_d(k) \leq 0$ für $k \geq 0$,

so gilt für alle $k \geq 0$:

$$P_d(k|k-1) \leq 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad P_w(k|k-1) \leq P(k|k-1)$$

$$P_d(k|k) \leq 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad P_w(k|k) \leq P(k|k)$$

Insbesondere gilt auch für alle $k \geq 0$:

$$\text{Spur}(P_w(k|k-1)) \leq \text{Spur}(P(k|k-1))$$

$$\text{Spur}(P_w(k|k)) \leq \text{Spur}(P(k|k))$$

und für die Diagonalelemente, d.h. die Varianzen der einzelnen Fehlerkomponenten:

$$\begin{aligned} (P_w(k|k-1))_{ii} &\leq (P(k|k-1))_{ii} \\ (P_w(k|k))_{ii} &\leq (P(k|k))_{ii} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Beweis: Direkte Folgerung aus (4.3.14)

Die Bemerkung (4.3.15) besagt, daß die wahren Fehlerkovarianzmatrizen nicht größer sind als die vom Filter-Algorithmus berechneten Matrizen, falls man die Kovarianzmatrizen $P(0)$, $Q(k)$ und $P(k)$ des Modells "groß genug" wählt und keine Fehler in den Matrizen H und A auftreten.

Weiter kann man aus (4.3.1.4) folgende Abschätzungen ableiten:

(4.3.16) Es sei $H_d(k)=0$ und $A_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$.

Sei ferner $\|\cdot\|$ irgendeine Matrixnorm. Dann gilt:

$$(a) \quad \|P_d(0|0)\| \leq \|D(0)\| \cdot \|D^T(0)\| \cdot \|P_d(0)\| + \|K(0)\| \cdot \|K^T(0)\| \cdot \|R_d(0)\|$$

Für $k \geq 1$ ist:

$$\| \|P_w(k|k)\| - \|P(k|k)\| \| \leq \| P_w(k|k) - P(k|k) \| \leq \delta_1(k)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \delta_1(k) := & \| \pi(k,0) \| \cdot \| \pi^T(k,0) \| \cdot \| P_d(0|0) \| \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \| \pi(k,i+1) \| \cdot \| \pi^T(k,i+1) \| \cdot \| C(i) \| \end{aligned}$$

$$\text{mit } C(i) := K(i+1) \cdot R_d(i+1) \cdot K^T(i+1) + D(i+1) \cdot Q_d(i) \cdot D^T(i+1)$$

(b) Für $k \geq 0$ ist:

$$\| \|P_w(k|k-1)\| - \|P(k|k-1)\| \| \leq \| P_w(k|k-1) - P(k|k-1) \| \leq \delta_2(k)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \delta_2(k) := & \| \theta(k,0) \| \cdot \| \theta^T(k,0) \| \cdot \| P_d(0) \| \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \| \theta(k,i+1) \| \cdot \| \theta^T(k,i+1) \| \cdot \| F(i) \| \end{aligned}$$

$$\text{mit } F(i) := Q_d(i) + A(i) \cdot K(i) \cdot R_d(i) \cdot K^T(i) \cdot A^T(i)$$

Beweis: (a) Mit $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

folgt $\|P_d(k|k)\| \leq \delta_1(k)$ für $k \geq 1$ und die Abschätzung für $\|P_d(0|0)\|$ sofort aus (4.3.14)(b).

Wegen $\| \|A\| - \|B\| \| \leq \|A-B\|$ folgt damit auch die Ungleichung für $\| \|P_w(k|k)\| - \|P(k|k)\| \|$.

(b) analog

Damit hat man Abschätzungen für die wahren Fehlerkovarianzmatrizen, bei denen man außer den Modellparametern nur Abschätzungen für $\|P_d(0)\|$, $\|Q_d(k)\|$ und $\|R_d(k)\|$ benötigt. Auch wenn man die wirklichen Werte $P_w(0)$, $Q_w(k)$ und $R_w(k)$ nicht kennt, so hat man jedoch eher eine Abschätzung für die Abweichungen dieser Matrizen von den benutzten Modellparametern $P(0)$, $Q(k)$ und $R(k)$ zur Verfügung.

Bei der Herleitung des Kalman-Filters wurde $\text{Spur}(P(k|k))$ als Gütekriterium herangezogen. Deshalb soll nun noch eine entsprechende Abschätzung für $\text{Spur}(P_w(k|k))$ angegeben werden:

(4.3.17) Es sei $H_d(k)=0$ und $A_d(k)=0$ für alle $k \geq 0$.

Ferner sei für eine $n \times n$ -Matrix M

$$\|M\|_e := \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dann gilt:

(a) $\|P_d(0|0)\|_e \leq \|D(0)\|_e \cdot \|P_d(0)\|_e + \|K(0)\|_e \cdot \|R_d(0)\|_e$

Für $k \geq 1$ ist:

$$|\text{Spur}(P_w(k|k)) - \text{Spur}(P(k|k))| \leq \delta_1(k)$$

wobei $\delta_1(k)$ wie in (4.3.16) mit $\|\cdot\|_e$

(b) Für $k \geq 0$ ist:

$$|\text{Spur}(P_w(k|k-1)) - \text{Spur}(P(k|k-1))| \leq \delta_2(k)$$

wobei $\delta_2(k)$ wie in (4.3.16) mit $\|\cdot\|_e$

Beweis: Es gilt für $n \times m$ -Matrix A und $m \times m$ -Matrix B :

$$\begin{aligned} \text{Spur}(A \cdot B \cdot A^T) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot a_{il} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot a_{il} \right) \cdot b_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m (A^T \cdot A)_{kl} \cdot b_{kl} \\ &= V(A^T \cdot A)^T \cdot V(B) \end{aligned}$$

wobei $V(C) = (m \times m)$ -Matrix C aufgefaßt als Vektor aus dem $R^{m \times m}$, wobei die Spalten von C untereinandergereiht werden.

Damit $|\text{Spur}(A \cdot B \cdot A^T)| \leq \|V(A^T \cdot A)\|_e \cdot \|V(B)\|_e = \|A^T \cdot A\|_e \cdot \|B\|_e$

Da ferner $\text{Spur}(A+B) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$ für $n \times n$ -Matrizen A, B gilt, folgen (a) und (b) aus (4.3.14)(b) und (c).

z.B.: $|\text{Spur}(P_d(k|k))| \leq |\text{Spur}(\pi(k,0) \cdot P_d(0|0) \cdot \pi^T(k,0))|$
 $+ \sum_{i=0}^{k-1} |\text{Spur}(\pi(k,i+1) \cdot C(i) \cdot \pi^T(k,i+1))|$

In dieser Richtung könnte man noch viele weitere Überlegungen anstellen, wie zum Beispiel analoge Aussagen zu (4.2.4) oder analoge Aussagen zu (4.3.13)-(4.3.17) für den Fall, daß keine Fehler in den Kovarianzmatrizen des Modells vorhanden sind. Darauf soll jedoch hier verzichtet werden.

Zum Schluß dieses Abschnitts und im nächsten Abschnitt werden noch zwei andere Ansätze im Hinblick auf die Untersuchung der Auswirkung von Modellfehlern gezeigt.

Statt der bisher betriebenen Differenzenbetrachtung kann man auch die Ableitungen der Fehlererwartungswerte und Fehlerkovarianzmatrizen nach den Modellparametern untersuchen. Im folgenden werden nur die Ableitungen der Fehlerkovarianzmatrizen betrachtet, die Betrachtung für die Erwartungswerte läuft analog.

Die hier hergeleitete Gleichung ist auch bei Griffin,Sage (/8/) zu finden, wird dort allerdings ohne Herleitung angegeben. Jazwinski vermutet, daß die von Griffin,Sage gegebene Gleichung fehlerhaft sei (vgl./10/,S.247).

Ableitungen der Fehlerkovarianzen nach den Modellparametern für den zeitinvarianten Fall

Sowohl die Modellparameter als auch die Systemparameter seien zeitinvariant. In den Gleichungen (4.3.7) treten die Parameter A_w , H_w , $P_x(0)$, R_w , Q_w auf ($G_w=I$ angenommen).

Diese werden zusammengefaßt zu $T = (A_w, H_w, P_x(0), R_w, Q_w)$.

$T_0 = (A, H, P_x(0), R, Q)$ sind die entsprechenden Parameter des Modells.

$P_w(k|k)$ wird nun in Abhängigkeit von T betrachtet. Dazu sei folgende Definition getroffen:

$$P(T, k) := P_w(k|k)$$

Aus der bisherigen Diskussion folgt:

$$P(T_0, k) = P(k|k) = \text{vom Filter berechnete Fehlerkovarianzmatrix}$$

Die Frage ist nun, wie (infinitesimal) kleine Abweichungen des Systems vom Modell auf die Fehlerkovarianzmatrix wirken, d.h. gesucht ist:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k) \Big|_{T=T_0} \quad \text{wobei } \tau \text{ ein Parameter aus } T \text{ ist}$$

T wird dabei aufgefaßt als eine 1-dimensionale Variable, wobei l von den Dimensionen der Matrizen $A_w, H_w, P_x(0), R_w, Q_w$ abhängt.

Man könnte sich natürlich auch fragen, wie sich kleine Abweichungen des Modells vom Systems auswirken. Dies würde in den obigen Bezeichnungen eine Rollenvertauschung von T und T_0 bedeuten, d.h.:

- T_0 = Systemparameter (=fest)
- T = Modellparameter (=variabel)

Die Schwierigkeit in dieser Betrachtungsweise liegt allerdings darin, das man in dieser Situation die festen Werte T_0 nicht kennt und somit auch die auftretenden Funktionen nicht an der Stelle T_0 auswerten kann.

Im folgenden werden also die obigen Ableitungen für

- T_0 = Modellparameter (=fest)
- T = Systemparameter (=variabel)

berechnet. Dazu benötigt man folgende allgemeine Bemerkung:

(4.3.18) Sei $T_0 = (\tau_1^0, \dots, \tau_N^0) \in \mathbb{R}^N$

Es seien $A : \mathbb{R}^N \rightarrow M(n,k)$ (Menge der $n \times k$ -Matrizen)

$B : \mathbb{R}^N \rightarrow M(k,l)$

(komponentenweise) differenzierbare Funktionen.

Dann gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} [A(T) \cdot B(T)]|_{T=T_0} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} A(T)|_{T=T_0} \right) \cdot B(T_0) + A(T_0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} B(T)|_{T=T_0} \right)$$

Die Größen in (4.3.7)(a) werden nun in Abhängigkeit von T betrachtet:

$$\Gamma(T,k) := \Gamma(k) = (I-K(k+1) \cdot H_w) \cdot A_w - (I-K(k+1) \cdot H) \cdot A$$

$$D(T,k) := D_w(k) = I-K(k) \cdot H_w$$

$$P_{xe}(T,k) := P_{xe}(k|k)$$

$$P_x(T,k) := P_x(k)$$

Beachtet man nun, daß

$$\Gamma(T_0, k) = 0 \text{ für alle } k$$

$$P_{xe}(T_0, k) = P(T_0, k) = P(k|k)$$

so folgt aus (4.3.7)(a) und (4.3.18)

(4.3.19) Es sei τ ein Parameter aus T . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} &= \pi(k+1, k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ &+ K(k+1) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} R_w(k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot K^T(k+1) \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} D(T, k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot Q(k) \cdot D^T(T_0, k+1) \\ &+ D(T_0, k+1) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} Q_w(k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot D^T(T_0, k+1) \\ &+ D(T_0, k+1) \cdot Q(k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} D(T, k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right)^T \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot P(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ &+ \pi(k+1, k) \cdot P(k|k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right)^T \end{aligned}$$

Dies sind dieselben Gleichungen wie in (/8/).

Als Beispiel sei die Ableitung für $\tau=(A_w)_{i,j}$ berechnet.

Für diesen Fall gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} R_w(k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} D(T, k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} Q_w(k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) &= (I-K(k+1) \cdot H) \cdot E_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{mit } E_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{i-te Zeile} \\ \uparrow \\ \text{j-te Zeile} \end{array}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k+1) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) &= \pi(k+1, k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ &+ (I-K(k+1) \cdot H) \cdot E_{i,j} \cdot P(k|k) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ &+ \pi(k+1, k) \cdot P(k|k) \cdot \left((I-K(k+1) \cdot H) \cdot E_{i,j} \right)^T \\ &= \pi(k+1, k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P(T, k) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \cdot \pi^T(k+1, k) \\ &+ (I-K(k+1) \cdot H) \cdot M(k) \cdot (I-K(k+1) \cdot H)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } M(k) &= E_{i,j} \cdot P(k|k) \cdot A^T + A \cdot P(k|k) \cdot E_{i,j}^T \\ &= E_{i,j} \cdot (A \cdot P(k|k)) + (A \cdot P(k|k)) \cdot E_{i,j} \\ &= (0, \dots, 0, \underbrace{(A \cdot P(k|k))_j}_{\text{i-te Zeile}}, 0, \dots, 0)^T + (0, \dots, 0, \underbrace{(A \cdot P(k|k))_j}_{\text{i-te Spalte}}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } (A \cdot P(k|k))_j &= \text{j-te Spalte von } A \cdot P(k|k) \\ &= A \cdot (P(k|k))_j \end{aligned}$$

$$\text{wobei } (P(k|k))_j = \text{j-te Spalte von } P(k|k)$$

Dies kann man analog für alle anderen $\tau \in T$ herleiten. Damit kann man berechnen, wie stark sich kleine Abweichungen des Systems vom Modell auf die Fehlerkovarianzmatrizen auswirken. Der Aufwand dafür ist jedoch hoch:

Zu jedem Parameter $\tau \in T$ muß die aktuelle Fassung ($P(T, k) |_{\tau = \tau_0}$) gespeichert werden. Dies sind jeweils $(n \times n)$ -Matrizen. Das heißt, daß allein für alle $\tau = (A_w)_{i,j}$ n^2 solcher $(n \times n)$ -Matrizen gespeichert werden müssen (Man kann allerdings zur Speicherung die Symmetrie der Matrizen ausnutzen). Auch der Zeitbedarf der einzelnen Aktualisierungen ist entsprechend hoch.

Aus diesem Grund wären qualitative Aussagen interessant, die man mit Hilfe von (4.3.19) erhalten könnte.

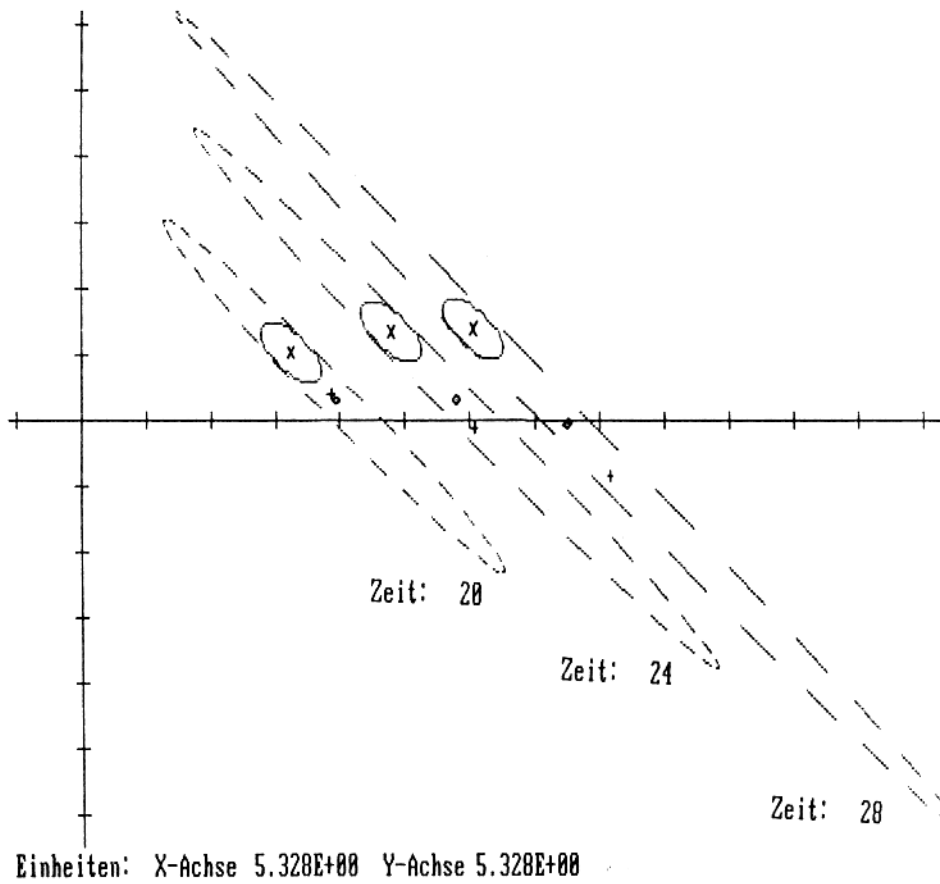
In diesem Abschnitt wurde die Kovarianzmatrix des wahren Schätzfehlers behandelt. Sie wurde hauptsächlich mit der berechneten Kovarianzmatrix verglichen und zwar unter dem Aspekt, inwieweit man sich auf die Aussagen des Filters über die "Größe" des Fehlers verlassen kann. Dabei wurden nur unbedingte Kovarianzmatrizen und Erwartungswerte betrachtet. Zum Schluß dieses Abschnitts seien diese Größen (Erwartungswert und Kovarianzmatrizen) noch für das Beispiel (4.2.6) in einem Bild dargestellt und zwar in Form von Konfidenzellipsoiden.

Im Falle von Normalverteilungen ist der Fehler $e(k|k)$ normalverteilt mit Verteilung $N(\epsilon(k|k), P_w(k|k))$.

Das folgende Bild zeigt:

- + den wahren Zustand $x_w(k)$
- x den gefilterten Wert $x(k|k)$
- die zu $P(k|k)$ gehörige 95%-Ellipse um $x(k|k)$
- ◊ den Wert $x(k|k)$ korrigiert um $\epsilon(k|k)$
- ⊖ die zu $P_w(k|k)$ gehörige 95%-Ellipse um $x(k|k)+\epsilon(k|k)$

Dabei kann man sehr gut erkennen, wie stark die wahre Ellipse von der berechneten abweicht:



Weiteres Beispiel:

$n=2, m=2$

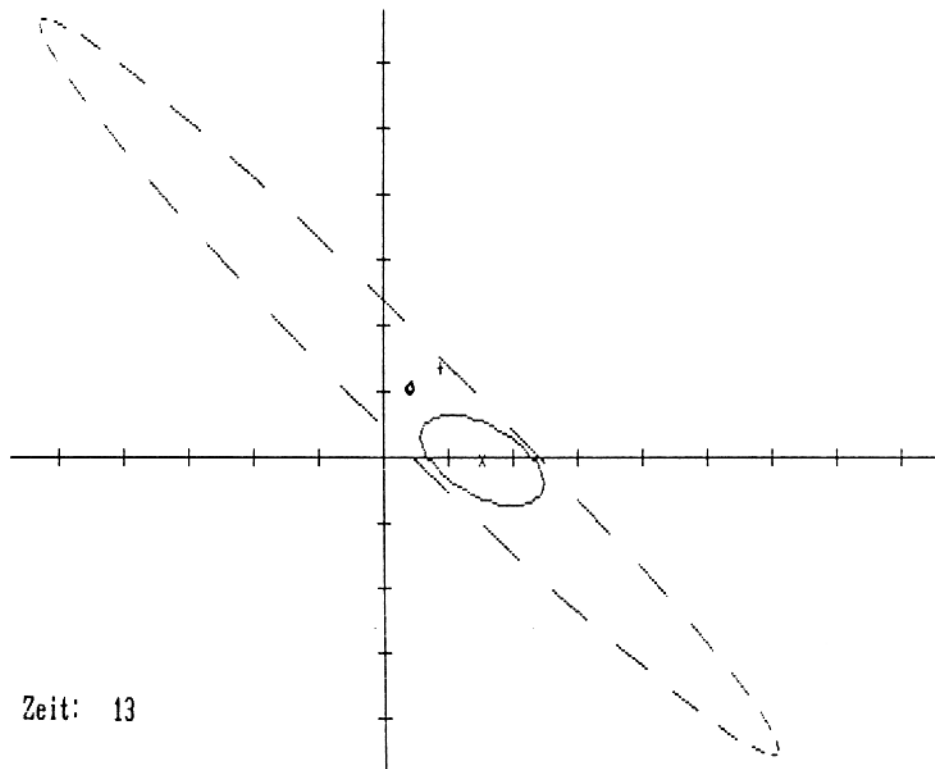
$$\text{System : } x_w(k+1) = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} x_w(k) + w_w(k) \quad , \quad Q_w(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_w(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_w(k) + v_w(k) \quad , \quad R_w(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E\{x_w(0)\} = (1,1)^T \quad , \quad \text{cov}\{x_w(0)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Modell : wie System außer } H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das folgende Bild zeigt wieder die entsprechenden Ellipsen. Die Symbole sind wie im letzten Beispiel zu verstehen. In diesem Beispiel ist auch eine leichte Drehung die Hauptachsen der Ellipsen zu erkennen.



Zeit: 13

Einheiten: X-Achse 2.460E+00 Y-Achse 2.460E+00

4.4 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Kovarianzmatrizen

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die unbedingten statistischen Größen der wahren Fehlerprozesse betrachtet. Vor allem, wenn man sich die Bilder zum Ende des letzten Abschnitts anschaut, stellt sich die Frage, ob dies auch die richtigen charakteristischen Größen sind. Daher soll hier noch auf die bedingten Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen eingegangen werden.

(4.4.1) Die dem System (4.1.1) zugrunde liegenden Prozesse $w_w(k)$, $v_w(k)$ und $x_w(0)$ seien normalverteilt. Mit den Bezeichnungen der vorhergehenden Abschnitte 4.1-4.3 gilt dann:

(a) Die bedingte Verteilung von $e(k|k-1)$ gegeben $Y_w[0,k-1]$ ist $N((x^0(k|k-1)-x(k|k-1)), P^0(k|k-1))$, d.h.

$$E\{e(k|k-1)|Y_w[0,k-1]\} = x^0(k|k-1)-x(k|k-1)$$

$$\text{cov}\{e(k|k-1)|Y_w[0,k-1]\} = P^0(k|k-1)$$

(b) Die bedingte Verteilung von $e(k|k)$ gegeben $Y_w[0,k]$ ist $N((x^0(k|k)-x(k|k)), P^0(k|k))$, d.h.

$$E\{e(k|k)|Y_w[0,k]\} = x^0(k|k)-x(k|k)$$

$$\text{cov}\{e(k|k)|Y_w[0,k]\} = P^0(k|k)$$

(c) Die bedingte Verteilung von $d(k)$ gegeben $Y_w[0,k-1]$ ist $N((y^0(k|k-1)-y(k|k-1)), P_d^0(k|k-1))$, d.h.

$$E\{d(k)|Y_w[0,k-1]\} = y^0(k|k-1)-y(k|k-1)$$

$$\text{cov}\{d(k)|Y_w[0,k-1]\} = P_d^0(k|k-1)$$

Beweis: (b) $e(k|k) = x_w(k) - x(k|k)$ und $Y_w[0,k]$ sind gemeinsam normalverteilt, da $x(k|k)$ affin in $Y_w[0,k]$ ist. Damit ist auch (vgl. (2.3.1)) die bedingte Verteilung von $e(k|k)$ gegeben $Y_w[0,k]$ eine Normalverteilung.

$$\begin{aligned} E\{e(k|k)|Y_w[0,k]\} &= E\{x_w(k)-x(k|k)|Y_w[0,k]\} \\ &= E\{x_w(k)|Y_w[0,k]\}-E\{x(k|k)|Y_w[0,k]\} \\ &= x^0(k|k)-x(k|k) \end{aligned}$$

wegen (3.1.40) und

wegen der $\sigma(Y_w[0,k])$ -Meßbarkeit von $x(k|k)$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{e(k|k)|Y_w[0,k]\} &= E\{ (e(k|k)-E\{e(k|k)|Y_w[0,k]\})^2 |Y_w[0,k]\} \\ &= E\{ (x_w(k)-x^0(k|k))^2 |Y_w[0,k]\} \\ &= \text{cov}\{ e^0(k|k) |Y_w[0,k]\} \\ &= \text{cov}\{ e^0(k|k) \} \quad \text{wegen (3.1.40)} \\ &= P^0(k|k) \end{aligned}$$

Analog (a) und (b)

Bemerkungen:

- (a) Die bedingten Kovarianzmatrizen sind somit unabhängig vom benutzten Modell. Sie hängen nur vom betrachteten System ab. Die vom Filter berechneten Kovarianzmatrizen sind unabhängig vom System, sie hängen nur vom benutzten Modell ab. Für den Fall Modell = System besteht natürlich auch bei den Kovarianzmatrizen Gleichheit.

So ist zum Beispiel $P^0(k|k)$ die Lösung der zum System gehörenden Riccati-Gleichung (vgl. (3.1.45)), während $P(k|k)$ die Lösung der Riccati-Gleichung mit den Modellparametern ist. Ein Vergleich von $P^0(k|k)$ und $P(k|k)$ führt somit auf die Untersuchung der Empfindlichkeit der Riccati-Gleichung gegenüber Parameteränderungen.

- (b) Die einzige Größe, die bei der bedingten Verteilung der wahren Schätzfehler vom Modell abhängt, ist der bedingte Erwartungswert. Dieser ist gerade die Differenz zwischen optimalen Schätzer und errechnetem Schätzer. Diese Differenz kann man natürlich nicht ohne Kenntnis des Systems nicht berechnen, was aber nicht bedeutet, daß man keine (qualitativen) Aussagen über diesen Erwartungswert herleiten kann. Dies wäre ein Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen.

Anhang A: Pseudoinverse einer Matrix

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Inversen einer Matrix auf nicht quadratische bzw. singuläre Matrizen verallgemeinert werden. Die Eigenschaften der sogenannten Pseudoinversen werden jedoch nur zitiert, nicht bewiesen. Für die Beweise und eine ausführliche Darstellung sei auf Albert (/2/) verwiesen.

(A1) Für eine n*m-Matrix A existiert stets

$$\begin{aligned}
A^+ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (A^T \cdot A + \delta^2 \cdot I)^{-1} \cdot A^T \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} A^T \cdot (A \cdot A^T + \delta^2 \cdot I)^{-1}
\end{aligned}$$

(A2) Die Matrix A⁺ aus (A1) heißt **Pseudoinverse (verallgemeinerte Inverse** oder auch **Moore-Penrose-Inverse**) der Matrix A. A⁺ ist eine m*n-Matrix.

Eine äquivalente Definition ist durch folgenden Satz gegeben:

(A3) Für eine n*m-Matrix A und eine m*n-Matrix B gilt B=A⁺ genau dann, wenn: (1) A·B und B·A sind symmetrisch (2) A·B·A = A (3) B·A·B = B

Dadurch ist eine einfache Charakterisierung der Pseudoinversen einer Matrix gegeben. Durch Nachprüfen dieser drei Bedingungen kann man leicht zeigen, ob eine vorgegebene Matrix B die Pseudoinverse von A ist.

Beispiele:

(A4) Sei A = [A1 0 ; A2 ; . ; Ar] , wobei Ai eine ni * mi -Matrix ist.

A ist somit eine n*m-Matrix mit n = Σ ni , m = Σ mi

$$\text{Es gilt: } A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ & & & 0 \\ & A_2^+ & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r^+ \end{bmatrix}$$

(A5) Sei A = a ∈ R, d.h. n=m=1.

$$\text{Dann gilt: } a^+ = \begin{cases} 1/a & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

$$(A6) \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon \neq 0$$

Dann gilt nach (A4), (A5):

$$D_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon \neq 0$$

An den beiden letzten Beispielen erkennt man die leider sehr starke Unstetigkeit der Abbildung $A \rightarrow A^+$. Dies führt zu großen Problemen bei Rundungsfehlern. Für Verfahren zur Berechnung der Pseudoinversen sei auf Albert (/2/, Kap.V) verwiesen.

Zum Schluß wird noch eine Liste von Eigenschaften der Pseudoinversen aufgeführt:

(A4) Eigenschaften der Pseudoinversen

- (1) Sei $b \in \mathbb{R}^n$, A eine $n \times m$ -Matrix und $\|\cdot\|_k$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^k .

Dann gilt für $x_0 := A^+ \cdot b \in \mathbb{R}^m$

- (i) $\|b - A \cdot x_0\|_m \leq \|b - A \cdot x\|_m$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$
 (ii) Sei $x_1 \in \mathbb{R}^m$ mit $\|b - A \cdot x_1\|_m = \|b - A \cdot x_0\|_m$, so gilt $\|x_0\|_m \leq \|x_1\|_m$

- (2) Sei A eine $n \times m$ -Matrix mit

$$\text{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } y = A \cdot x \}$$

$$\text{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot x = 0 \}$$

Weiter sei $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- (a) $A \cdot A^+ \cdot y$ ist Orthogonalprojektion von y auf $\text{Bild}(A)$
 (b) $(I - A \cdot A^+) \cdot y$ ist Orthogonalprojektion von y auf $\text{Kern}(A^T)$
 (c) $A^+ \cdot A \cdot x$ ist Orthogonalprojektion von x auf $\text{Bild}(A^T)$
 (d) $(I - A^+ \cdot A) \cdot x$ ist Orthogonalprojektion von x auf $\text{Kern}(A)$

- (3) (a) Ist A quadratisch und regulär, so ist $A^+ = A^{-1}$.
 (b) Hat A maximalen Zeilenrang, so ist $A^+ = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$
 (c) Hat A maximalen Spaltenrang, so ist $A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$
 (d) Allgemein gilt: $A^+ = (A^T \cdot A)^+ \cdot A^T$
 $= A^T \cdot (A \cdot A^T)^+$

- (4) (a) $(A^+)^+ = A$
 (b) $(A^T)^+ = (A^+)^T$
 (c) $(A^T \cdot A)^+ = A^+ \cdot (A^T)^+$, $(A \cdot A^T)^+ = (A^T)^+ \cdot A^+$
 (d) $\text{Bild}(A^+) = \text{Bild}(A^+ \cdot A) = \text{Bild}(A^T)$
 $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(A^+ \cdot A) = \text{Kern}((A^T \cdot A)^+)$
 (e) Ist A symmetrisch, so gilt $A \cdot A^+ = A^+ \cdot A$

Anhang B: Ausgeartete Normalverteilungen und Konfidenzbereiche für mehrdimensionale Normalverteilungen

Sei x ein n -dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) mit:

$$E\{x\} = \mu \in \mathbb{R}^n$$

$cov\{x\} = \Gamma$, wobei Γ eine positiv semidefinite $n \times n$ -Matrix mit $\text{Rang}(\Gamma) = r \leq n$ ist.

Der Zufallsvektor x ist also $N(\mu, \Gamma)$ -verteilt.

$N(\mu, \Gamma)$ heißt **ausgeartete** Normalverteilung, falls $\text{rang}(\Gamma) = r < n$. Andernfalls, d.h. $\text{rang}(\Gamma) = n$, heißt $N(\mu, \Gamma)$ nicht ausgeartete, bzw. **reguläre** Normalverteilung.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden $z := x - \mu$ betrachtet. Der Zufallsvektor z ist dann $N(0, \Gamma)$ -verteilt.

Ist $\text{rang}(\Gamma) = r$, so besitzt z , wie die folgenden Sätze zeigen werden, auf einem r -dimensionalen Teilraum U des \mathbb{R}^n eine reguläre Normalverteilung. Man kann z transformieren in eine r -dimensionalen stochastischen Anteil und einen $(n-r)$ -dimensionalen deterministischen Anteil (repräsentiert durch die Projektion auf den Teilraum U).

(B1) Satz: Sei Γ eine positiv semidefinite $n \times n$ -Matrix mit Rang r und $D = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ eine $n \times n$ -Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von Γ in der Diagonalen, wobei $\tau_1 > 0, \dots, \tau_r > 0$. Weiter sei $D_P = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_r)$ die linke obere $r \times r$ -Teilmatrix von D .

(a) Dann gibt es eine orthogonale $n \times n$ -Matrix $S = (S_P | S_N)$, wobei S_P eine $n \times r$ -Matrix mit $\text{rang}(S_P) = r$ und S_N eine $n \times (n-r)$ -Matrix mit $\text{rang}(S_N) = n-r$ ist, sodaß

- (1) $\Gamma = S \cdot D \cdot S^T = S_P \cdot D_P \cdot S_P^T$
- (2) $D = S^T \cdot \Gamma \cdot S$, $D_P = S_P^T \cdot \Gamma \cdot S_P$
- (3) Die Pseudoinverse von Γ ist

$$\Gamma^+ = S \cdot D^+ \cdot S^T = S_P \cdot D_P^{-1} \cdot S_P^T$$

(b) Eine $n \times n$ -Matrix $S = (S_P | S_N)$ erfüllt genau dann die Bedingungen von Teil (a), wenn gilt:

- (1) Die Spalten von S_P bilden eine Orthonormalbasis von $(\text{Kern}(\Gamma))^\perp$, bestehend aus Eigenvektoren zu den positiven Eigenwerten τ_1, \dots, τ_r von Γ .
- (2) Die Spalten von S_N bilden eine Orthonormalbasis von $\text{Kern}(\Gamma)$, bestehend aus Eigenvektoren zum Eigenwert 0 von Γ .

(wegen (1) und (2) bilden dann die Spalten von S eine ONB des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von Γ)

$$(c) \text{ Kern}(\Gamma) = \text{Kern}(S_P^T) = \text{Kern}(\Gamma^+)$$

Beweis:

(a) Ein Satz aus der linearen Algebra über die Diagonalisierung symmetrischer Matrizen besagt gerade:

Es gibt eine orthogonale $n \times n$ -Matrix S mit

$$\Gamma = S \cdot D \cdot S^T \quad \text{und} \quad D = S^T \cdot \Gamma \cdot S$$

Wegen $D = \begin{bmatrix} D_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt somit $\Gamma = S_P \cdot D_P \cdot S_P^T$

Aus der Orthogonalität von S folgt

$$I_n = S^T \cdot S = \begin{bmatrix} S_P^T \cdot S_P & S_P^T \cdot S_N \\ S_N^T \cdot S_P & S_N^T \cdot S_N \end{bmatrix} \quad \text{und somit} \quad S_P^T \cdot S_P = I_r$$

(I_n = n-dimensionale Einheitsmatrix)

Damit erhält man

$$S_P^T \cdot \Gamma \cdot S_P = S_P^T \cdot S_P \cdot D_P \cdot S_P^T \cdot S_P = D_P$$

Somit sind nun (1) und (2) bewiesen.

Daß $\Gamma^+ := S \cdot D^+ \cdot S^T$ die Pseudoinverse von Γ ist, beweist man durch Nachrechnen von $\Gamma \cdot \Gamma^+ \cdot \Gamma = \Gamma$, $\Gamma^+ \cdot \Gamma \cdot \Gamma^+ = \Gamma^+$

$$\text{und} \quad \Gamma^+ \cdot \Gamma = (\Gamma^+ \cdot \Gamma)^T, \quad \Gamma \cdot \Gamma^+ = (\Gamma \cdot \Gamma^+)^T \quad (\text{vgl. (A3)})$$

Dabei nutzt man aus, daß S orthogonal ist und D^+ die Pseudoinverse von D ist.

Wegen $D = \begin{bmatrix} D_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt $D^+ = \begin{bmatrix} D_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (vgl. (A4), (A5))

Somit ist $\Gamma^+ = S \cdot D^+ \cdot S^T = S_P \cdot D_P^{-1} \cdot S_P^T$ und Teil (a) bewiesen.

(b) " \Rightarrow " Sei S aus Teil (a).

$$\text{Dann gilt: } \Gamma \cdot S = S \cdot D$$

$$\text{und somit } \Gamma \cdot S_P = S_P \cdot D_P \quad \text{und} \quad \Gamma \cdot S_N = 0.$$

Die Spalten von S_P sind also Eigenvektoren zu den positiven Eigenwerten τ_1, \dots, τ_r von Γ und die Spalten von S_N sind Eigenvektoren zum Eigenwert 0 von Γ . Wegen $S^T \cdot S = I_n$ sind die n Spalten von S normiert und paarweise orthogonal. Daher gelten (b)(1) und (b)(2).

" \Leftarrow " Es gelten b(1) und b(2) mit $S = (S_P | S_N)$.

Es folgt sofort, daß $S^T \cdot S = I_n$ und $\text{rang } S = n$.

Somit ist $S^{-1} = S^T$ und S eine orthogonale Matrix.

Außerdem $\text{rang}(S_P) = r$ und $\text{rang}(S_N) = n-r$.

Wegen der Eigenvektor-Eigenschaft der Spalten von S gilt:

$$\Gamma \cdot S = S \cdot D \quad \text{und somit} \quad S^T \cdot \Gamma \cdot S = S^T \cdot S \cdot D = D$$

$$\text{und} \quad S \cdot D \cdot S^T = \Gamma \cdot S \cdot S^T = \Gamma$$

Die Aufspaltung der Matrizen ergibt $\Gamma = S_P \cdot D_P \cdot S_P^T$

$$\text{und} \quad D_P = S_P^T \cdot \Gamma \cdot S_P$$

$$(c) \quad \Gamma \cdot X = 0 \Leftrightarrow S_P \cdot D_P \cdot S_P^T \cdot X = 0$$

$$\Leftrightarrow D_P \cdot S_P^T \cdot X = 0$$

$$\Leftrightarrow S_P^T \cdot X = 0$$

$$\text{Analog} \quad \Gamma^+ \cdot X = 0 \Leftrightarrow S_P^T \cdot X = 0$$

Mit Hilfe der im letzten Satz charakterisierten Matrix S soll nun der Zufallsvektor z in einen Zufallsvektor mit einfacherer Struktur transformiert werden. Es gilt der folgende Satz:

(B2) Satz: Sei z ein n -dimensionaler, $N(0, \Gamma)$ -verteilter Zufallsvektor

$$\text{und } \Gamma, S=(S_P | S_N), D = \begin{bmatrix} D_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{wie im Satz (B1), insbe-}$$

sondere $\text{rang}(\Gamma)=r \leq n$.

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $y := S^T \cdot z$ ist ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilung $N(0, D)$.

Insbesondere sind die Komponenten y_i , $i=1, \dots, n$, von y paarweise unabhängige Zufallsvariablen.

(2) $y_P := S_P^T \cdot z$ ist ein r -dimensionaler Zufallsvektor mit einer regulären Normalverteilung $N(0, D_P)$.

$y_N := S_N^T \cdot z$ ist ein $(n-r)$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilung $N(0, 0)$, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} P\{z \in [\text{Kern}(\Gamma)]^\perp\} &= P\{z \in \text{Bild}(\Gamma)\} \\ &= P\{S_N^T \cdot z = 0\} \\ &= P\{z = S_P \cdot y_P\} = 1 \end{aligned}$$

(3) $z^T \cdot \Gamma^+ \cdot z$ und $y_P^T \cdot D_P^{-1} \cdot y_P$ sind χ_r^2 -verteilte Zufallsvariable mit $y_P^T \cdot D_P^{-1} \cdot y_P = z^T \cdot \Gamma^+ \cdot z$.

Sei $\alpha \in (0, 1)$ und τ_α das α -Fraktile der χ_r^2 -Verteilung (d.h. sei χ_r^2 -verteilt, so gilt $P\{\leq \tau_\alpha\} = 1 - \alpha$)

$$\text{Dann gilt: } P\{z^T \cdot \Gamma^+ \cdot z \leq \tau_\alpha\} = P\{y_P^T \cdot D_P^{-1} \cdot y_P \leq \tau_\alpha\} = 1 - \alpha$$

Beweis: (1) $y=S^T \cdot z$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0, da dies auch für z gilt.

$$E\{y \cdot y^T\} = S^T \cdot E\{z \cdot z^T\} \cdot S = S^T \cdot \Gamma \cdot S = D$$

Damit folgen die weitere Behauptung von (1) und auch die Aussagen von (2).

$$z = S \cdot y = S_P \cdot y_P + S_N \cdot y_N = S_P \cdot y_P \quad \text{P-fast sicher.}$$

(3) Aus Satz (B1) folgt $\Gamma^+ = S \cdot D^+ \cdot S^T = S_P \cdot D_P^{-1} \cdot S_P^T$

$$\begin{aligned} \text{Somit gilt: } z^T \cdot \Gamma^+ \cdot z &= y^T \cdot S^T \cdot S \cdot D^+ \cdot S^T \cdot S \cdot y \\ &= y^T \cdot D^+ \cdot y \\ &= y_P^T \cdot D_P^{-1} \cdot y_P \\ &= v^T \cdot v \end{aligned}$$

$$\text{mit } v = D_P^{-\frac{1}{2}} \cdot y_P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\tau_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\tau_r} \end{bmatrix} \cdot y_P$$

Da $v \sim N(0, I_r)$ -verteilt ist, sind die Komponenten $v_i, i=1, \dots, r$, unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvektoren.

$$v^T \cdot v = \sum_{i=1}^r v_i^2 \text{ ist somit } \chi_r^2\text{-verteilt.}$$

Damit ist auch Teil (3) bewiesen. █

Beispiel (1):

Sei $n=2$ und $\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x=(x_1, x_2)$ sei $N(0, \Gamma)$ -verteilt.

$$\det \begin{bmatrix} 4-\tau & 2 \\ 2 & 1-\tau \end{bmatrix} = \tau^2 - 5 \cdot \tau = \tau \cdot (\tau - 5)$$

Somit ist $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $r=1$

Der normierte Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist $S_P=(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$

Der normierte Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist $S_N=(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$

$$\text{Somit ist } S = (1/\sqrt{5}) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma^+ = (1/25) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\text{Kern}(\Gamma))^{\perp} &= \{\delta \in \mathbb{R}^2 \mid S_N^T \cdot \delta = 0\} = \{\delta \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_1 - 2 \cdot \delta_2 = 0\} \\ &= \{\delta \in \mathbb{R}^2 \mid \delta = \alpha \cdot S_P, \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

d.h. $x_1 = 2 \cdot x_2$ P-fast sicher

$y_P = S_P^T \cdot x = (1/\sqrt{5}) \cdot (2 \cdot x_1 + x_2)$ ist $N(0, 5)$ -verteilt.

Mit den Ergebnissen von Satz (B2) können nun Konfidenzbereiche für z konstruiert werden.

Dabei heißt eine Teilmenge C von \mathbb{R}^n Konfidenzbereich zum Niveau α für ein $\alpha \in (0,1)$, falls gilt: $P\{z \in C\} \geq 1 - \alpha$.

Sinnvolle Konfidenzbereiche sind in den meisten Fällen solche Bereiche, die symmetrisch zum Ursprung sind und deren Rand einen Abstand zum Ursprung hat, der proportional zur "Unsicherheit" (d.h. Varianz) in der jeweiligen Richtung ist.

Ist der Rang(Γ)= n , so kann man C in der Form

$$C = \{ \delta \in \mathbb{R}^n \mid \delta^T \cdot \Gamma^{-1} \cdot \delta \leq \tau \} \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}^+$$

ansetzen. C beschreibt dann ein n -dimensionales Ellipsoid.

Ist Rang $\Gamma = r \leq n$, so kann man allgemeiner ansetzen:

$$C = \{ \delta \in \mathbb{R}^n \mid \delta^T \cdot \Gamma^+ \cdot \delta \leq \tau \} \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}^+$$

C beschreibt dann ein ausgeartetes Ellipsoid, das in "Richtung des Kernes von Γ " nicht beschränkt ist, d.h.

$$\text{Sei } \beta \in \text{Kern}(\Gamma) \Rightarrow \beta \in \text{Kern}(\Gamma^+)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\delta + s \cdot \beta)^T \cdot \Gamma^+ \cdot (\delta + s \cdot \beta) &= \delta^T \cdot \Gamma^+ \cdot \delta \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta + s \cdot \beta \in C \quad \text{für beliebiges } s \in \mathbb{R}^n$$

Damit lassen sich nun Konfidenzellipsoide konstruieren:

(B3) Sei $\alpha \in (0,1)$ und τ_α das α -Fraktile der χ_r^2 -Verteilung.

$$\begin{aligned} \text{Sei } C_\alpha &= \{ \delta \in \mathbb{R}^n \mid \delta^T \cdot \Gamma^+ \cdot \delta \leq \tau_\alpha \} \\ &= \{ \delta \in \mathbb{R}^n \mid (S^T \cdot \delta)^T \cdot D^+ \cdot (S^T \cdot \delta) \leq \tau_\alpha \} \\ &= \{ \delta \in \mathbb{R}^n \mid (S_P^T \cdot \delta)^T \cdot D_P^{-1} \cdot (S_P^T \cdot \delta) \leq \tau_\alpha \} \end{aligned}$$

Dann ist

$$B_\alpha := C_\alpha \cap (\text{Kern}(\Gamma))^\perp$$

ein Konfidenzbereich für z zum Niveau α , d.h.

$$P\{z \in B_\alpha\} \geq 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } P\{z \in B_\alpha\} &= P\{z \in C_\alpha \cap (\text{Kern}(\Gamma))^\perp\} \\ &= P\{z \in C_\alpha\} \quad \text{da } P\{z \in (\text{Kern}(\Gamma))^\perp\} = 1 \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Bemerkung:

(B4) Zur Bestimmung des Konfidenzellipsoiden muß also bestimmt werden:

- (1) $r = \text{rang}(\Gamma)$
- (2) Γ^+ bzw. S_P und D_P
- (3) $(\text{Kern } \Gamma)^\perp$ bzw. $\text{Bild}(\Gamma)$

(B5) C_α ist natürlich auch ein Konfidenzbereich zum Niveau α . Da man jedoch bestrebt ist, zu gegebenen Niveau α den Konfidenzbereich möglichst klein zu machen, um schärfere Aussagen zu bekommen, wird man eher B_α wählen.

(B6) Aus Satz (B3) erhält man einen Test der Hypothese

$H = \text{"z ist } N(0, \Gamma)\text{-verteilt.}"$ zum Niveau α :

Als Verwerfungsbereich V_α wähle man

$$V_\alpha := \{ z \notin B_\alpha \} \text{ mit } B_\alpha \text{ aus Satz (B3)}$$

Dann gilt: $P\{V_\alpha|H\} = P\{z \notin B_\alpha |H\} \leq \alpha$ nach (B3).

Der sogenannte Fehler 1. Art, nämlich $P\{V_\alpha|H\}$ ist also nicht größer als α .

Die Alternative $H^* = \text{"z ist nicht } N(0, \Gamma)\text{-verteilt.}"$ ist dermaßen allgemein, daß man über den Fehler 2. Art $P\{V_\alpha^c|H^*\} = 1 - P\{V_\alpha|H^*\}$ nichts aussagen kann. Deshalb sollte der Fall, daß die Hypothese nicht verworfen wird, nicht in Richtung "z ist wirklich $N(0, \Gamma)$ -verteilt" überinterpretiert werden.

Man ist hier, analog zu (B5), bestrebt, bei gegebenen Niveau α den Verwerfungsbereich möglichst groß zu wählen. Hätte man statt V_α den Verwerfungsbereich $V_\alpha' := \{ z \notin C_\alpha \}$ gewählt, so hätte man $P\{V_\alpha'|H\} = P\{V_\alpha|H\}$, aber $P\{V_\alpha'^c|H^*\} \geq P\{V_\alpha^c|H^*\}$.

Somit kann die Güte des Testes mit Verwerfungsbereich V_α' höchstens genauso gut sein, wie die mit Verwerfungsbereich V_α .

Literaturverzeichnis

- /1/ Anderson, T.W. : An Introduction to Multivariate Statistical Analysis , Wiley, New York, 1958
- /2/ Albert, A. : Regression and the Moore-Penrose-Pseudoinverse Academic Press, New York, 1972
- /3/ Bauer, H. : Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie , DeGruyter, Berlin, 1974
- /4/ Bierman, G.J. : Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation , Academic Press, New York, 1977
- /5/ Box, G.E.P. : Time Series Analysis, Forecasting and Control
Jenkins, G.M. Holden-Day, San Francisco, 1970
- /6/ Davis, M.H.A. : Stochastic Modelling and Control
Vinter, R.B. Chapman and Hall, London, 1985
- /7/ Doob, J. : Stochastic Processes
Wiley, New York, 1960
- /8/ Griffin, R.E. : Sensitivity Analysis of Discrete Filtering and Smoothing Algorithms
AIAA Guidance, Control and Flight Dynamics Conference, Pasadena, California, Aug.1968
- /9/ Hahn, W. : Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzgleichungen
Mathematische Annalen, Bd.136, S.430-441, 1958
- /10/ Jazwinski, A.H. : Stochastic Processes and Filtering Theory
Academic Press, New York, 1970
- /11/ Kalman, R.E. : A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems
Trans. ASME, Ser.D: J.Basic.Eng.82,35-45, 1960
- /12/ Kalman, R.E. : New Methods in Wiener Filtering Theory
Proc.Symp.Eng.Appl.Random Function Theory and Probability (J.L.Bogdanoff and F.Kozin, eds.)
Wiley, New York, S.270-388, 1963

- /13/ Kalman, R.E. : Control Systems Analysis and Design Via the
"Second Method" of Lyapunov
Trans. ASME, Ser.D: J.Basic.Eng.82,371-400,1960
- /14/ Liptser, R.S. : Statistics of Random Processes, Vol.2
Shiryayev, A.N. Springer-Verlag, New York, 1978
- /15/ Maybeck, P.S. : Stochastic Modells, Estimation and Control
Academic Press, New York, 1979 vol.1-3
- /16/ Maybeck, P.S. : Failure Detection Without Exhaustive Hardware
Redundancy
Proc.IEEE, Nat. Aerospace and Electr. Conf.,
Dayton, Ohio, May 1976
- /17/ McGarty, T.P. : Stochastic Systems and State Estimation
Wiley, New York, 1974
- /18/ Priestley, M.B. : Spectral Analysis and Time Series , vol 1,2
Academic Press, New York, 1981
- /19/ Witting, H. : Mathematische Statistik
Teubner, Stuttgart, 1978
- /20/ Wloka, J. : Funktionalanalysis und Anwendungen
DeGruyter, Berlin, 1971