Th. al.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 20

BERECHNUNG DES SCHALLDRUCKS IM INNERN EINES QUADERS

200 *

H. BABOVSKY

ZWISCHENBERICHT: UNTERSUCHUNG ÜBER DAS SCHALLFELD IN EINEM GESCHLOSSENEN QUADER

APRIL 1984

ABSCHLUSSBERICHT: JANUAR 1985

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE
6750 KAISERSLAUTERN

BERECHNUNG DES SCHALLDRUCKS IM INNERN EINES QUADERS

H. BABOVSKY

ZWISCHENBERICHT:

UNTERSUCHUNG ÜBER DAS SCHALLFELD IN EINEM GESCHLOSSENEN QUADER

APRIL 1984

1. Einleitung

Die Aufgabe dieses Projektes ist die Untersuchung des Schallfeldes, das sich in einem geschlossenen Quader bei Erregung durch eine punktförmige Schallquelle einstellt. Eine zentrale Rolle spielt hierbei die Wechselwirkung zwischen dem Schallfeld und den Quaderplatten, die zu Schwingungen angeregt werden und so dem Schallfeld Energie entziehen.
Der Zweck dieser Untersuchung ist, Erkenntnisse für die Berechnung des Innendrucks zu Fahrzeugkarosserien zu gewinnen. Dies muß bei der Dimensionierung des Quaders und bei der Wahl des Plattenmaterials berücksichtigt werden.
Numerische Berechnungen des Schalldrucks in einem Quader wurden beispielsweise in [1] durchgeführt. Das Ergebnis zeigt, daß zwei Arten von Resonanzen auftreten: Zum einen Strukturresonanzen, die durch Eigenschwingungen der Wände hervorgerufen werden und die von den Wandabmessungen und dem Plattenmaterial abhängen, zum anderen Hohlraumresonanzen, die auftreten, wenn die Luftwellenlänge in einem geeigneten Verhältnis zu den Abmessungen des Hohlraums steht.
Es ist sehr zweifelhaft, welche Rückschlüsse gezogen werden können von den numerischen Resultaten in [1] auf kompliziertere Geometrien, wie sie bei Fahrzeugkarosserien vorliegen. Eine tiefere Einsicht in die Kopplung zwischen Schallfeld und Plattenschwingungen vor allem in den Resonanzbereichen ist nur zu erwarten, wenn die Berechnung dieser Wechselwirkung weitgehend analytisch durchgeführt wird. Eine solche analytische Berechnung ist das Ziel dieses Projektes.

Der vorliegende Zwischenbericht befaßt sich mit einem Teilproblem: Untersucht wird die Wechselwirkung einer einzelnen Platte und der Luft, wenn die Platte in einem einzelnen Eigenmode angeregt wird. Als Randbedingungen für die Luft werden auf einer Seite der Platte die Abstrahlung nach außen, auf der anderen Seite ein zwischen starren Platten sich aufbauendes Schallfeld angenommen. Damit sollen die komplexeren Verhältnisse beim Quader weitgehend angenähert werden. Dieser Bericht soll Aufschluß geben über folgende Fragen bezüglich der Modellbildung des Gesamtproblems:

a) Wie müssen Parameter (z.B. Materialkonstanten) gewählt werden, um beobachtbare Phänomene einer Fahrzeugkarosserie (z.B. Eigenfrequenzen, Energieaufnahme) möglichst gut zu simulieren?

b) Welche Effekte sind für die Energiebilanz unerheblich und daher zu vernachlässigen?

c) Wie sind die Randbedingungen für das Druckfeld an den Plattenoberflächen zu wählen?

Gerade die Beantwortung der letzten Frage ist für die Beschreibung der Kopplung Wand-Hohlraum von besonderer Bedeutung. Hier kann insbesondere nicht der Ansatz gewählt werden, der üblicherweise in der Standardliteratur (vgl. z.B. [2]) oder zum größten Teil in Modellrechnungen (z.B. [3], [4], [5]) benutzt wird und der für unendlich große Platten hergeleitet wurde. Eine detaillierte Untersuchung der Randbedingungen zeigt erst die charakteristischen Merkmale der Wand-Hohlraum-Wechselbeziehung, nämlich eine Kopplung der verschiedenen Eigenmodes der Platte durch die angrenzende Luftschicht und das unterschiedliche Verhalten der einzelnen Eigenmodes im Bereich der Hohlraumrenonanzen.

In Abschnitt 2 wird das in dieser Arbeit behandelte Problem kurz geschildert. Abschnitt 3 beschreibt die zur Lösung nötigen Gleichungen. Wichtig ist hier vor allem der Teil 3c), in dem die Kopplung zwischen Platteneigenmodes und abgestrahltem Luftdruck beschrieben wird. In Abschnitt 4 wird ein gekoppeltes Gleichungssystem zur Berechnung der Plattenschwingungen aufgestellt. Fragen der Modellbildung werden in Abschnitt 5 untersucht, wo auch an zwei Beispielen einfache entkoppelte Gleichungen gelöst werden. Schlußfolgerungen - insbesondere im Hinblick auf das komplexe Ausgangsproblem sowie ein Ausblick auf einen Lösungsansatz hierzu folgen im letzten Abschnitt.

2. Die Problemstellung

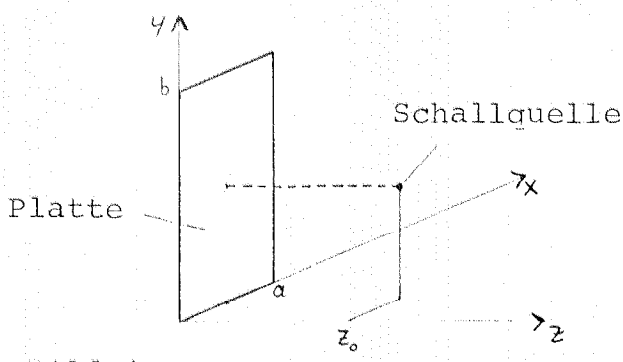


Bild 1.-

Eine rechteckige Platte mit den Kantenlängen a und b werde durch eine punktförmige Schallquelle angeregt. Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die Platte in der xy-Ebene liegt und die Kanten die Koordinaten (0,0), (a,0), (0,b), (a,b) haben. Weiterhin genügt es für die in der Einleitung formulierten Fragen anzunehmen, daß die Schallquelle auf der Symmetrieachse der Platte liegt, also die Koordinaten $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z_o)$, $z_o > 0$ hat (s. Skizze). Eine Konsequenz hiervon ist, daß nur achsensymmetrische Eigenmodes der Platte angeregt werden.

Die Kanten der Platte seien drehbar aufgestützt.

Die Schallquelle rege eine einfrequentige Kugelwelle an. Wir untersuchen den eingeschwungenen Zustand der Platte, d.h. die Zeitabhängigkeit jeder zeitlich veränderlichen Größe ist gegeben durch den Faktor $e^{i\omega t}$, wobei ω die Erregerfrequenz ist.

3. Die Gleichungen

a) Biegeschwingungen:

Die Schwingungen einer ungedämpften Platte, auf die eine (periodische) Kraft f(t) einwirkt, werden beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B \cdot \Delta\Delta w = f(t) \tag{1}$$

mit

$m = \rho \cdot d$ = Masse/Flächeneinheit

ρ = Dichte des Plattenmaterials

d = Dicke der Platte

$B = \dfrac{E \cdot d^3}{12 \cdot (1-\mu^2)}$ = Biegesteife

E = Elastizitätsmodul

μ = Poissonsche Zahl.

Zur vollständigen Beschreibung der Schwingungen genügt also die Kenntnis der Größen ρ, d, E, μ.

Mit Hilfe der Biegeeigenschwingungen

$$m_{k\ell}(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{\ell\pi y}{b} \qquad \text{(s. Skizze)}, \; k,\ell = 1,2,3,\ldots$$

(aus Symmetriegründen müssen hier nur ungerade k,ℓ berücksichtigt werden) mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_{k\ell} = \sqrt{\frac{B}{m}} \cdot \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right) \cdot \pi^2$$

kann die Gleichung (1) vereinfacht werden. Setzen wir nämlich

$$w(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} g_{k\ell}(t) \cdot m_{k\ell},$$

$$f(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} f_{k\ell}(t) \cdot m_{k\ell},$$

so reduziert sich (1) auf das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{g}_{k\ell} + \omega_{k\ell}^2 g_{k\ell} = \frac{1}{m} f_{k\ell}. \tag{2}$$

b) <u>Die einfallende Schallwelle:</u>

Von einer einfrequentigen Schallquelle mit Frequenz ω rührt an der Plattenoberfläche ein Druck $e^{i\omega t} \cdot p^{ein}(x,y)$ her. Mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten $\hat{p}^{ein}(k_x,k_y)$ können wir schreiben

$$p^{ein}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}^{ein}(k_x,k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x.$$

Aus der Wellengleichung folgt leicht für die Schallschnelle in z-Richtung (aus der Beziehung $-\nabla p = \rho_L \dot{v}$)

$$e^{i\omega t}\cdot v^{ein} = -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi^2\rho_L\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_z\cdot\hat{p}^{ein}(k_x,k_y)e^{-i(k_x x+k_y y)}\,dk_y dk_x$$

mit $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2}$.

Die Zerlegung des Drucks in Eigenmodes der Platte erfolgt nach den Formeln

$$p^{ein}(x,y) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} p_{k\ell}^{ein} m_{k\ell}(x,y)$$

mit

$$p_{k\ell}^{ein} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p^{ein}(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{\ell\pi y}{b}\,dx\,dy\,.$$

Definieren wir

$$ss_{k\ell}(k_x,k_y) = \int_{x=0}^{a} e^{-ik_x x}\sin\frac{k\pi x}{a}dx\cdot\int_{y=0}^{b} e^{-ik_y y}\sin\frac{k\pi y}{b}dy\,,$$

so ist

$$p_{k\ell}^{ein} = \frac{1}{\pi^2 ab}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ss_{k\ell}(k_x,k_y)\hat{p}(k_x,k_y)\,dk_y dk_x.$$

c) <u>Reflektierte und abgestrahlte Welle</u>:

Als schwierig, aber für den Energieaustausch Luft-Wand von großer Bedeutung erweist sich die Berechnung des Drucks an den Plattenoberflächen. Da die Plattenabmessungen in der Größenordnung von 1m und die untersuchten Frequenzen im Bereich von 50 Hz bis 200 Hz liegen sollen, können Formeln, die für große Platten hergeleitet wurden, nicht verwendet werden. Wie z.B. aus [6] hervorgeht, könnte damit insbesondere die Schallabstrahlung, die für kleine Platten nicht unerheblich sein muß, nicht beschrieben werden.

Zur Berechnung des Drucks auf der Seite $z > 0$ wenden wir ein von Heckl [4] beschriebenes Verfahren an. Hierzu nehmen wir an, daß die Platte von schallharten Wänden umgeben ist (s. Skizze).

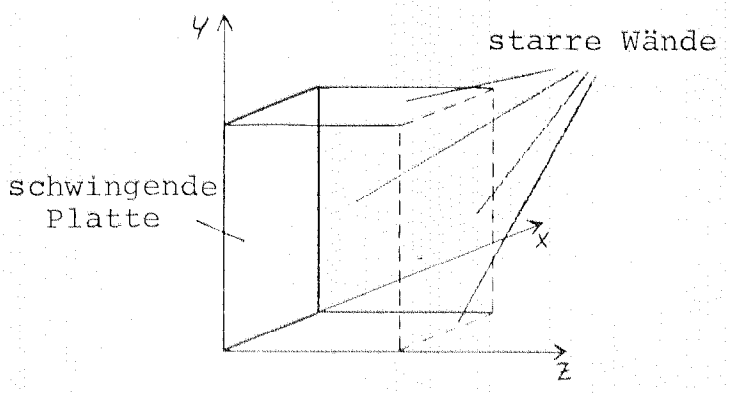


Bild 2.-

Dann können wir den Druck zerlegen in Eigenmodes, wobei zu berücksichtigen ist, daß sich an den schallharten Wänden Druckbäuche befinden. Unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie des einfallenden Schalldrucks können wir also ansetzen:

$$(3) \qquad p(x,y,z) = e^{i\omega t} \sum_{r,s=0}^{\infty} a_{rs} \cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}\, e^{\pm i k_z^{rs} z} ,$$

wobei die Summation nur über gerade r und s zu erstrecken ist und

$$k_z^{rs} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi r}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi s}{b}\right)^2} .$$

Der reflektierte Schalldruck bei einer ruhenden, schallharten Wand ist $p^{ref} = p^{ein}$.

Durch die Schwingungen der Platte wird von der Platte Schall abgestrahlt. Für die Schallabstrahlung muß einerseits der Ansatz (3) gelten, andererseits muß die Bedingung

$$(4) \qquad \left.\frac{\partial p^{ab}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\rho_L \cdot \ddot{w}$$

gelten, die besagt, daß Plattenschnelle und Schnelle der Luft gleich sein müssen.
Wir betrachten einen Mode: $w = A \cdot e^{i\omega t} \cdot m_{k\ell}$, k,ℓ ungerade.
Der Ansatz (3) ergibt mit (4) die Gleichung

$$\sum_{r,s} a_{rs} \cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b} \cdot (\pm i k_z^{rs}) = -\omega^2 A \rho_L m_{k\ell} .$$

Aus der Entwicklung

$$\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b} = \sum_{k',\ell'} \beta_{k'\ell'}^{rs} m_{k'\ell'}$$

mit

$$\beta_{k\ell}^{rs} = \frac{16k\ell}{(k^2-r^2)(\ell^2-s^2)\pi^2}$$

ergibt

$$\sum_{k',\ell'} \beta_{k',\ell'}^{rs} \cdot \Big(\sum_{r,s} a_{rs} \cdot (\pm i k_z^{rs}) \Big) m_{k'\ell'} = -\omega^2 A \rho_L m_{k\ell} .$$

Diese Gleichung ist erfüllt für

$$a_{rs} = \frac{\pm i \alpha_{rs}^{k\ell} \omega A \rho_L}{k_z^{rs}} ,$$

wobei

$$\alpha_{rs}^{k\ell} = \begin{cases} \dfrac{4}{k\ell\pi^2} & \text{für } r = s = 0, \\[2ex] \dfrac{8\,k}{\ell\pi^2(k^2-r^2)} & \text{für } r \neq 0,\ s = 0, \\[2ex] \dfrac{8\,\ell}{k\pi^2(\ell^2-s^2)} & \text{für } r = 0,\ s \neq 0, \\[2ex] \dfrac{16\,k\ell}{\pi^2(k^2-r^2)(\ell^2-s^2)} & \text{für } r \neq 0,\ s \neq 0. \end{cases}$$

Damit ist

$$(5) \qquad p^{ab} = i e^{i\omega t} \cdot \omega^2 A \rho_L \sum_{k',\ell'} \Big\{ \sum_{r,s} \frac{\pm \beta_{k',\ell'}^{rs} \alpha_{rs}^{k\ell}}{k_z^{rs}} \Big\} m_{k',\ell'} .$$

Folgendes ist an dieser Formel bemerkenswert:

1) Eine Schwingung der Platte in einem Eigenmode führt auch zur Abstrahlung der anderen Modes.

2) Zur Berücksichtigung der Dämpfung genügt es nicht, lediglich reelle Dämpfungskonstanten einzuführen. Wichtig ist auch die Phase der Summe

$$p_{k'\ell'}^{k\ell} = \sum \frac{\pm \beta_{k',\ell'}^{rs} \alpha_{rs}^{k\ell}}{k_z^{rs}} .$$

3) Für spezielle Werte von ω treten in (5) Singularitäten auf, an denen ein Umschlag von unendlich großen imaginären Werten auf unendlich große komplexe Werte stattfindet. Da ein solcher Umschlag unrealistisch ist, muß er für Berechnungen geeignet modifiziert werden.

Für den abgestrahlten Druck auf der Seite $z < 0$ ist das oben beschriebene Hohlraummodell nicht sinnvoll. Hier läßt das folgende Modell eine gute Beschreibung der Druckverhältnisse erwarten: Die Platte ist eingelagert in eine unendlich große, starre Platte in der xy-Ebene (s. Skizze).

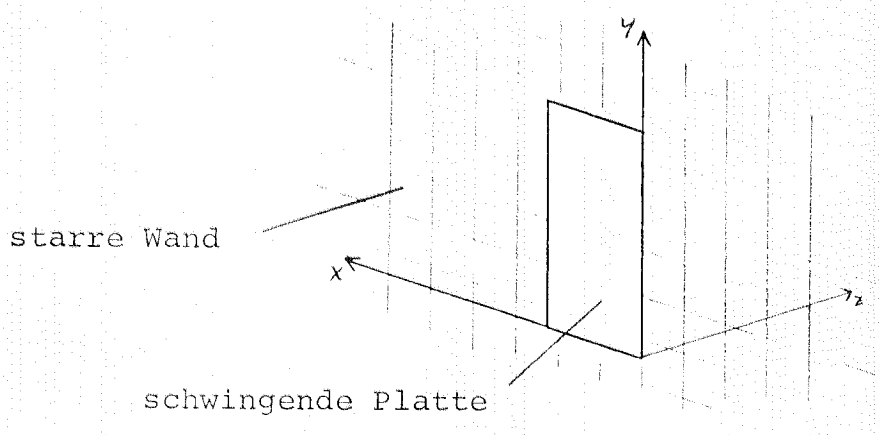


Bild 3.-

Wir nehmen an, daß die Platte in der Form

$$w(t) = Ae^{i\omega t} m_{k\ell}$$

schwingt. Die Randbedingung lautet dann

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = -A\omega^2 \rho_L e^{i\omega t} m_{k\ell}. \tag{6}$$

(Es ist zu beachten, daß $m_{k\ell}(x,y) = 0$ außerhalb der schwingenden Platte, also außerhalb des Rechtecks $[0,a] \times [0,b]$.)

Wir zerlegen den Druck in der xy-Ebene in Fourierkomponenten:

$$p^{k\ell}(x,y) = e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}^{k\ell}(k_x,k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x.$$

Ähnlich wie in Abschnitt 3.b) folgt aus der Wellengleichung

$$p^{k\ell}(x,y,z) = e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}^{k\ell}(k_x,k_y) e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)} dk_y dk_x,$$

wobei $k_z = \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ist.

Da die Welle in den Halbraum $z < 0$ abgestrahlt wird, ist als Vorzeichen vor $k_z z$ "+" zu wählen, falls k_z reell ist und andernfalls "-". Einsetzen in Gleichung (6) führt auf folgendes Ergebnis:

$$m_{k\ell}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pm k_z i}{A\omega^2 \rho_L} \hat{p}^{k\ell}(k_x,k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x.$$

Dies ist aber gerade die Fourier-Zerlegung von $m_{k\ell}(x,y)$. Also muß

$$\frac{k_z i}{A\omega^2 \rho_L} \hat{p}^{k\ell}(k_x,k_y)$$

gleich dem entsprechenden Fourier-Koeffizienten $\hat{m}_{k\ell}(k_x,k_y)$ von $m_{k\ell}$ sein. Die Koeffizienten $\hat{m}_{k\ell}$ lassen sich leicht berechnen: Es ist

$$\hat{m}_{k\ell}(k_x,k_y) = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} m_{k\ell}(x,y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dy dx$$

$$= \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} e^{-ik_x x} dx \cdot \int_0^b \sin \frac{\ell\pi y}{b} e^{-ik_y y} dy$$

$$= \frac{k\pi a}{(k\pi)^2 - (k_x a)^2} (1-(-1)^k e^{ik_x a}) \cdot \frac{\ell\pi b}{(\ell\pi)^2 - (k_y b)^2} (1-(-1)^\ell e^{ik_y b}).$$

Damit ist $\hat{m}_{k\ell}$ bekannt und

$$\hat{p}^{k\ell}(k_x,k_y) = \pm i \frac{A\omega^2 \rho_L}{k_z} \cdot \hat{m}_k \ (k_x,k_y).$$

Die Zerlegung von $p^{k\ell}$ in Eigenmodes der Platte erfolgt nach den Formeln von Abschnitt 3.b). Es ist

$$p^{k\ell} = e^{i\omega t} \cdot iA\omega^2 \rho_L \sum \bar{p}^{k}_{k'\ell'} m_{k'\ell'}$$

mit

$$\bar{p}^{k\ell}_{k'\ell'} = \frac{1}{\pi^2 ab} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pm 1}{k_z} \cdot \hat{m}_{k\ell}(k_x,k_y) \cdot \hat{m}_{k'\ell'}(k_x,k_y) dk_y dk_x. \tag{7}$$

Dies ist die der Formel (5) entsprechende Gleichung für den Außendruck.

d) <u>Dämpfung</u>

Die strukturelle Dämpfung in der Platte wird berücksichtigt, indem die Biegesteife B durch die komplexe Größe $(1-i\eta)B$ ersetzt wird.

4. Die Lösung

Aus dem Ansatz (1) erhalten wir für die Platte folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{w} + B \cdot (1-i\eta)\Delta\Delta w = -p^{+} + p^{-},$$

wobei p^{+} der Druck auf der Seite $z > 0$, p^{-} der Druck auf der Seite $z < 0$ ist.

Wir betrachten hier nur den stationären Fall, bei dem die Zeitabhängigkeit von $w(t)$ gegeben ist durch den Faktor $e^{i\omega t}$. Eine Zerlegung von $w(t)$ in Platteneigenmodes, d.h. der Ansatz

$$w(t) = e^{i\omega t} \cdot \sum_{k,\ell=1}^{\infty} A_{k\ell} m_{k\ell}$$

führt nach den Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts auf die gekoppelten Gleichungen

$$A_{k\ell}\left(-\omega^2 \frac{i\omega^2 \rho_L}{m}\left(p_{k\ell}^{k\ell} - p_{k\ell}^{-k\ell}\right) + (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2\right)$$

$$(8) \qquad = \frac{2}{m} p_{k\ell}^{ein} + \frac{i\omega^2 \rho_L}{m} \sum_{(k',\ell') \neq (k,\ell)} A_{k'\ell'}\left(p_{k\ell}^{-k'\ell'} - p_{k\ell}^{k'\ell'}\right).$$

Aus diesen Gleichungen können die Unbekannten $A_{k\ell}$ berechnet werden. Zu beachten ist, daß die Drucke $p_{k\ell}^{k\ell}$ und $p_{k\ell}^{-k\ell}$ komplexe Größen sind, die zur Dämpfung beitragen. Dies darf vor allem im Bereich der Strukturresonanzen nicht vernachlässigt werden.

5. Berechnung von Modellgleichungen

Dieser Abschnitt dient dazu, an Modellrechnungen qualitative Aussagen über das komplexe, in der Einleitung beschriebene Modell zu machen. Interessant ist hierbei vor allem das Verhalten der Platte im Bereich der Hohlraum- und Strukturresonanzen. Die Abmessungen der Platte und Materialkonstanten werden in einem Bereich gewählt, der für die Modellierung von Karosserien interessant ist.

a) Die Platte

Als Abmessungen der Platte wählen wir $a = 1.1$ m, $b = 1.9$ m. Bei der Bestimmung der Materialkonstanten gehen wir von einer

2 mm dicken Blechplatte aus. Wir wählen

$$\rho = 7.8 \frac{g}{cm^3}$$

$$E = 200 \cdot 10^{10} \frac{dyn}{cm^2} = 2 \cdot 10^{12} \frac{g}{cm\ sec^2}$$

$$\mu = 0.3 \ .$$

(Diese Daten sind [9] entnommen.)

Weitere Konstanten: $\eta = 10^{-3}$, $c = 340 \frac{m}{sec}$, $\rho_L = 1.2 \frac{kg}{m^3}$.

Es folgt für die Biegesteife:

$$B = \frac{E \cdot d^3}{12(1-\mu^2)} = 1.47 \cdot 10^9 \frac{g\ cm^2}{sec^2} ,$$

für die Masse pro Flächeneinheit: $m = 1.56 \frac{g}{cm^2}$

und für die Biegeeigenfrequenzen:

$$f_{k\ell} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{B}{m}} \cdot \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right) = 3.99\ k^2 + 1.34\ \ell^2 \quad [sec^{-1}].$$

Bei dieser Wahl der Konstanten liegt die tiefste Eigenfrequenz bei 5.33 Hz, und im uns interessierenden Bereich zwischen 50 Hz und 200 Hz liegen 46 Eigenfrequenzen. Dies ist für die Modellierung einer Karosserie unrealistisch. Der Grund ist, daß die Wände von Karosserien in der Regel gekrümmt (und dadurch fest eingespannt) sind, wodurch die Größe der schwingenden Fläche verringert wird. Zwei Möglichkeiten zur realistischen Modellierung bieten sich an:

1) Einführung einer effektiven Biegesteife B_{eff}, die größer ist als B.

2) Zerlegung der Platte in einen starren Rand und einen schwingenden Mittelteil. (Dieser Weg wurde z.B. in [1] gewählt.)

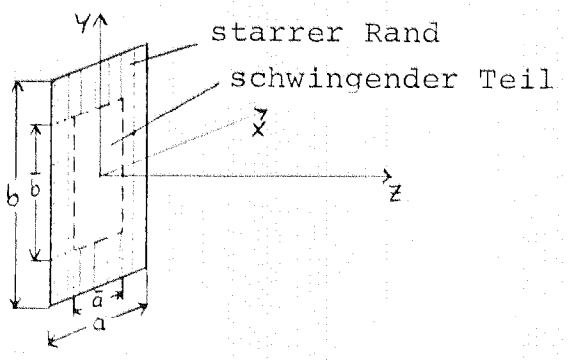


Bild 4.-

Bei der ersten Möglichkeit müßte die Biegesteife drastisch erhöht werden. Ein Faktor 25 beispielsweise ergäbe als niedrigste Frequenz 26.65 und insgesamt 8 Eigenfrequenzen im Bereich von 50 Hz bis 200 Hz. Durch einen solchen Eingriff würde aber die Wechselwirkung Luft-Platte stark verfälscht. Denselben Einfluß auf die Frequenz hat eine Verringerung der schwingenden Fläche um den Faktor 5, also $\bar{a}$ = 49.19 cm und $\bar{b}$ = 84.97 cm. Es ist zu erwarten, daß dieser Weg die realistischeren Werte liefert.

Unbeeinflußt von diesen Modellierungsfragen sind die Hohlraumeigenfrequenzen. Sie sind gegeben durch

$$\bar{f}_{k\ell} = \frac{1}{2\pi}\, c \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \ell}{b}\right)^2} \; .$$

Hier liegt die niedrigste Frequenz bei 89.47 Hz, und im Bereich zwischen 50 Hz und 200 Hz liegen 4 Eigenfrequenzen.

k= \ ℓ=	0	1	2
0	(0)	89.47	178.94
1	154.55	178.58	236.45

Aus Symmetriegründen werden in unserem Fall nur Modes mit geraden Indizes k und ℓ angeregt, es tritt also nur die Eigenfrequenz 178.94 Hz auf.

b) Die Modellgleichungen

Die Lösung des gekoppelten Gleichungssystems (7) ist nur numerisch zu bewältigen. Dies ist die Aufgabe des zweiten Teils des Projekts. Aufschluß über Fragen der Modellierung und über das qualitative Verhalten der Lösungen geben aber die folgenden Modellgleichungen, die weitgehend analytisch gelöst werden können. Hierzu entkoppeln wir das Gleichungssystem, indem wir die Koeffizienten $p_{k\ell}^{k'\ell'}$ und $\bar{p}_{k\ell}^{k'\ell'}$ für $(k',\ell') \neq (k,\ell)$ gleich Null setzen. Der hierdurch entstehende Fehler hält sich in

Grenzen, da die zugehörigen Summanden in der Regel klein gegenüber $p_{k\ell}^{ein}$ sind.
Zu lösen sind demnach die Gleichungen:

$$A_{k\ell}(-\omega^2 + \frac{i\omega^2 p_T}{m}(p_{k\ell}^{k\ell} - \bar{p}_{k\ell}^{k\ell}) + (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2) = \frac{2}{m}\, p_{k\ell}^{ein}$$

Lediglich die Größen $p_{k\ell}^{k\ell}$ und $\bar{p}_{k\ell}^{k\ell}$ sind nun noch zu bestimmen. Eine exakte Auswertung der Formeln des Abschnitts 3.c) ist ebenfalls nur numerisch möglich. Wir begnügen uns in diesem Zwischenbericht mit Näherungswerten.
Eine Abschätzung des Integrals (6) im uns interessierenden Frequenzbereich führt für $\bar{p}_{k\ell}^{k\ell}$ auf einen Wert von $+10^{-3}$ [m]. Diesen Wert legen wir unseren weiteren Rechnungen zugrunde.

c) Die Koeffizienten $p_{k\ell}^{k\ell}$

Wie aus Formel (5) hervorgeht, wachsen die Koeffizienten $p_{k\ell}^{k\ell}$ im Bereich von Hohlraumresonanzen (in unserem Fall also bei 178 Hz) stark an. Ob sich dieser Einfluß in einer größeren Umgebung der Resonanzfrequenz bemerkbar macht, ob die Resonanz also in der Praxis meßbar ist, hängt von den Indizes k und ℓ ab. Im vorgegebenen Frequenzbereich wirkt sich die Hohlraumresonanz nur auf die niedrigsten Eigenmodes der Platte aus. In Bild 5 sind p_{11}^{11} und p_{35}^{35} dargestellt. Besonderen Einfluß auf die Energieübertragung von der Luft auf die Wand hat der Realteil von $p_{k\ell}^{k\ell}$. Während die Resonanz von p_{11}^{11} stark ausgeprägt ist, ist sie im Falle p_{35}^{35} nicht mehr auflösbar.

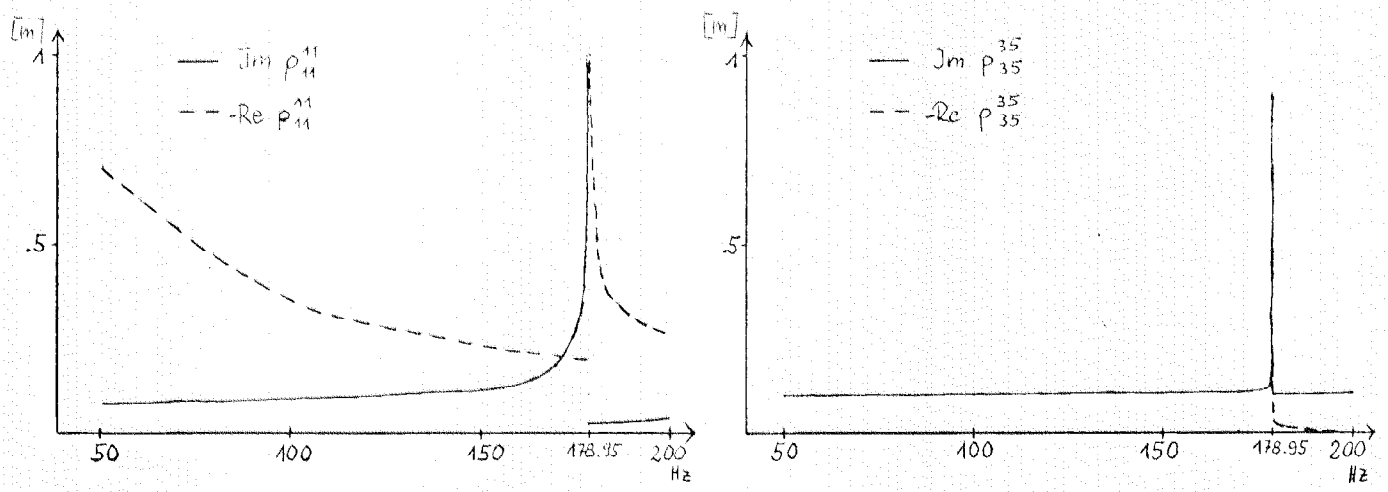


Bild 5.-

Die Kopplungsparameter hängen stark vom gewählten Modell ab. Wird ein Modell wie in Bild 4 gewählt, mit $\kappa = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{b}}{b}$, so muß $p_{k\ell}^{k\ell}$ berechnet werden aus

$$p_{k\ell}^{k\ell} = \sum_{r,s} \mp \kappa^2 \cdot \cos^2 \frac{r\pi\kappa}{2} \cdot \cos^2 \frac{s\pi\kappa}{2} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_{rs}^{k\ell} \cdot \tilde{\beta}_{k\ell}^{rs}}{k_z^{rs}}$$

mit

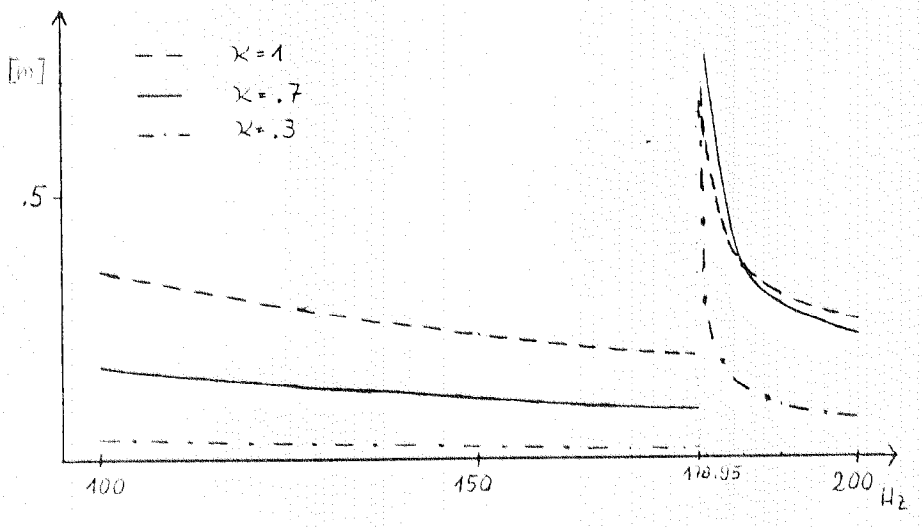
$$\tilde{\alpha}_{rs}^{k\ell} = \{4,8,16\} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{k\ell}{(k^2-(\kappa r)^2)(\ell^2-(\kappa s)^2)}$$

(wobei die Zahl 4,8 oder 16 als Faktor wie in Abschnitt 3c) zu wählen ist) und

$$\tilde{\beta}_{k\ell}^{rs} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{k\ell}{(k^2-(\kappa r)^2)(\ell^2-(\kappa s)^2)} .$$

In Bild 6 sind die Koeffizienten p_{11}^{11} für einige Werte von κ dargestellt.

Bild 6.-



Es zeigt sich, daß bis auf die Resonanzstelle p_{11}^{11} mit abnehmenden κ kleiner wird. Dies ist auch zu erwarten, da mit κ die schwingende Fläche, die den Schalldruck erzeugt, kleiner wird. Im Resonanzbereich jedoch steigt der Wert von p_{11}^{11} mit abnehmenden κ zunächst an, um erst dann abzufallen. Eine spezielle Wahl des Modells wie in Bild 4 zur Anpassung der Eigenfrequenz kann sich demnach ungünstig auf die Beschreibung der Resonanzen auswirken. Bei der vollständigen Beschreibung des Quaders wird es ratsam sein, zu überprüfen, welche Resonanzen modellbedingt verstärkt werden.

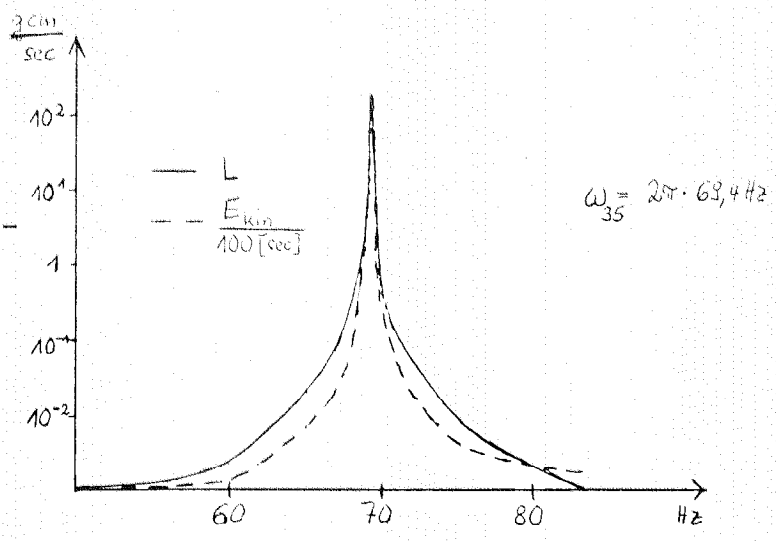
d) Energiebilanz

Die zentrale Frage ist: Wieviel Energie wird dem Schallfeld von der Platte entzogen? Wir gehen davon aus, daß an der Platte ein Druckfeld der Form $2p_{k\ell}^{ein} \cdot m_{k\ell} \cdot e^{i\omega t}$ herrscht, das die Plattenschwingung aufrecht erhält. Dabei geht Energie sowohl durch innere Dämpfung verloren als auch durch Schallabstrahlung, die in Abschnitt 3c) berechnet wurde.
(Das einfallende Druckfeld wird hier lediglich als Energiegröße betrachtet, über dessen Veränderung bei der Reflexion nichts ausgesagt wird. Das ist Thema der Nachfolgearbeit.)
Aus $A_{k\ell} = a_{k\ell} \cdot e^{i\varphi_{k\ell}}$ ergibt sich die von der Platte aufgenommene mittlere Leistung L aus der Formel

$$L = \frac{ab}{4}\, p_{k\ell}^{ein}\, \omega a_{k\ell}\, \sin\varphi_{k\ell}.$$

Exemplarisch beschreiben wir hier den Energieaustausch beim Plattenmode m_{35}. Das Ergebnis ist in Bild 7 dargestellt. Der Eingangsdruck beträgt $1\ \frac{g}{sec \cdot cm}$.

Bild 7.-



Es ist zu erkennen, daß eine nennenswerte Energieaufnahme nur im Bereich der Strukturresonanz stattfindet. Der Einfluß der Hohlraumresonanz, die eine Energieaufnahme verhindert, ist hier nur gering. Das ändert sich, wenn beide Resonanzen eng beieinanderliegen. Das ist in Bild 8 zu sehen, wo die Materialkonstanten so angenommen wurden, daß die Eigenfrequenz der Platte bei 176 Hz liegt.

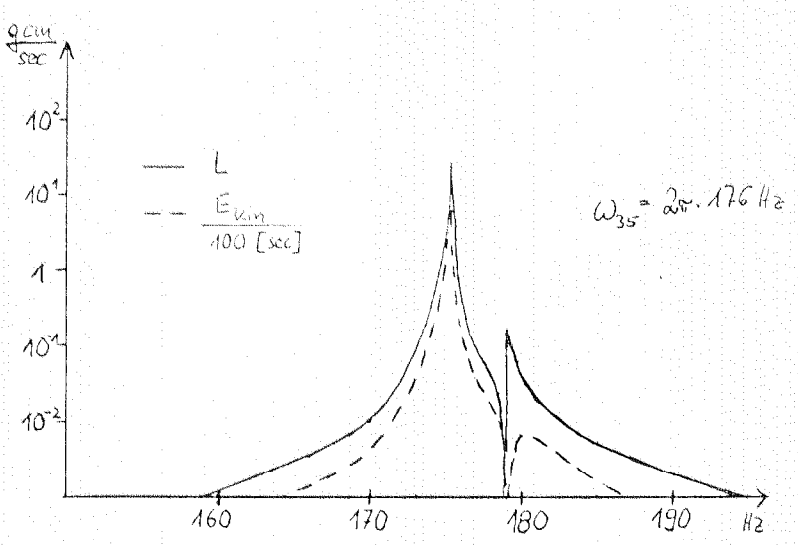


Bild 8.-

Aus den Bildern 7 und 8 ist zum Vergleich außerdem die maximale kinetische Energie der Platte abzulesen. Es zeigt sich, daß die während der Einschwingphase aufgenommene Energie wesentlich größer ist als die aufgenommene Energie im stationären Zustand. Es stellt sich hier die Frage wieweit ein mathematisch exakter stationärer Zustand praxisrelevant ist. Die Beschreibung des Modells wird möglicherweise realistischer, wenn angenommen wird, daß ein Teil der Schwingungsenergie ständig abgegeben wird (z.B. in die Schwingung des Rahmens, der in unserem Fall als starr angenommen wurde).

6. Schlußbemerkungen

a) Diskussion der Ergebnisse

Die Rechnungen ergeben eine komplizierte Wechselbeziehung zwischen Schallwelle und schwingender Platte. Von Einfluß von der Luft auf die Platte sind vor allem die Struktur- und Hohlraumresonanzen, insbesondere das Zusammenwirken dieser beiden.

Es zeigt sich, daß diese komplexen Beziehungen nicht von vornherein durch Einführung von Dämpfungskonstanten beschrieben werden können. Inwieweit eine solche Beschreibung mit geeigneten Modifikationen dennoch zu realistischen Ergebnissen führt, wird sich erst bei der Untersuchung am vollständigen

Quader zeigen, bei dem noch wesentlich weitreichendere Strukturen zu erwarten sind.

Dennoch sind die hier durchgeführten Rechnungen für eine Betrachtung des Gesamtproblems unerläßlich. Wie z.B. aus [7] hervorgeht, spielt der wechselseitige Einfluß zwischen Luft und Platte eine entscheidende Rolle auf das Entstehen von Hohlraumresonanzen im Quader. Welche rechnerischen Vereinfachungen vertretbar sind, wird erst durch eine Diskussion des Gesamtergebnisses gerechtfertigt werden können.

b) Ausblick

Folgende Vorgehensweise bei der vollständigen Behandlung des Quaders ist sinnvoll:

- Aufstellen eines Gleichungssystems zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischem dem gesamten Schallfeld und dem Quader. (Bis jetzt wurde das Schallfeld weitgehend lediglich als Erregergröße für die Platte betrachtet.) Zu erwarten ist ein gekoppeltes Gleichungssystem, das sich in seiner Struktur nicht wesentlich vom System (8) unterscheidet.
- Beschreibung eines Algorithmus zur Lösung des vollständigen Gleichungssystems.
- Diskussion diverser Modellierungsfragen, wie sie insbesondere in Abschnitt 5 dieses Berichtes angesprochen werden.
- Berechnung und Diskussion der Lösungen, insbesondere Entscheidung, welche Effekte rein modellbedingt und welche praxisrelevant sind.
- Ausführliche Überlegungen, welche praktischen Konsequenzen für die Berechnung - auch komplizierter Strukturen, wie z.B. Karosserien - gezogen werden können.

Literatur:

[1] H. BURFEINDT: "Innengeräuschberechnung unter Berücksichtigung der Hohlraum/ Strukturkopplung und Dämpfung durch poröse Absorber mit NASTRAN" (1983)

[2] L. CREMER/H. MÜLLER: "Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik", Band II, S. Hirzel Verlag, Stuttgart (1976)

[3] K. GÖSELE: "Schallabstrahlung von Platten, die zu Biegeschwingungen angeregt sind", Acustica 3 (1953)

[4] M. HECKL: "Schallabstrahlung von Platten bei punktförmiger Anregung", Acustica 9 (1959)

[5] M. HECKL: "Schallabstrahlung von Platten, die durch hydrodynamische Wechseldruckfelder angeregt werden", Müller-BBN GmbH, München, Bericht Nr. 1636 (1967)

[6] W. WESTPHAL: "Zur Schallabstrahlung einer zu Biegeschwingungen angeregten Wand", Acustica 4 (1954)

[7] K. GÖSELE: "Abstrahlungsverhalten von Wänden", Acustica 6 (1956)

[8] J. MUHEIM: "Verfahren zur Berechnung der akustischen Eigenfrequenzen und Stehwellenfelder komplizierter Hohlräume", Dissertation, Eidgenössische TH, Zürich (1972)

[9] L. CREMER/M. HECKL: "Körperschall", Springer-Verlag, Berlin (1967)

BERECHNUNG DES SCHALLDRUCKS IM INNERN EINES QUADERS

H. BABOVSKY

ABSCHLUSSBERICHT

JANUAR 1985

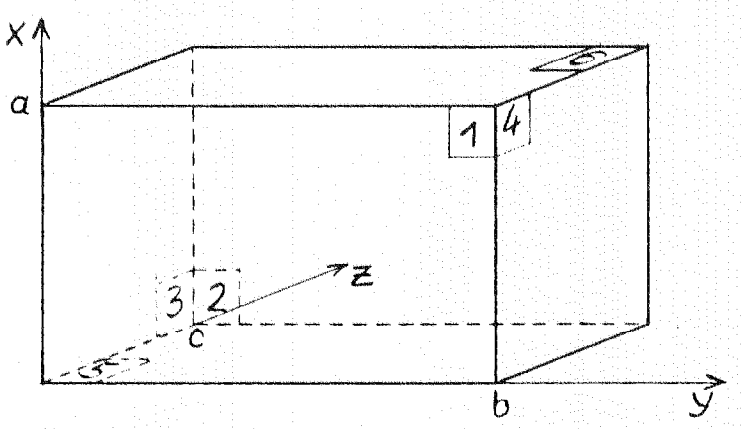
Einleitung: Der vorliegende Bericht enthält die numerischen Ergebnisse der Berechnung des Schalldrucks im Innern eines Quaders. Der Schalldruck wird übermittelt durch die Biegeschwingung einer Wand des Quaders, welche wiederum durch eine punktförmige äußere Kraft induziert wird.

Wie aus dem Zwischenbericht "Untersuchung über das Schallfeld in einem geschlossenen Quader" vom Autor dieses Berichts bereits hervorgeht, entsteht durch den Schalldruck eine Kopplung sowohl auf die nichtangeregten Platten, als auch eine Rückkopplung auf die erregte Platte. Das Ziel dieses Berichtes ist es, zu klären, wieweit diese (Rück-)kopplung für die Berechnung des Schalldrucks vernachlässigbar ist. Zu diesem Zweck werden vier Modelle gegenübergestellt: Im ersten ist eine Erregung der Platten durch den Schalldruck im Innern ausgeschaltet. In den weiteren drei Modellen wird die Wechselwirkung mit einer bzw. mehreren Platten mit berücksichtigt, während die restlichen Platten als starr angenommen werden.

Um zu klären, ob durch den Schalldruck die Schwingung der erregten Platte gedämpft wird, wurde für zwei Modelle auch das Schwingungsverhalten berechnet.

Die Ergebnisse sämtlicher Berechnungen sind am Ende dieses Berichtes graphisch dargestellt. Davor befinden sich eine Beschreibung des zugrundeliegenden Modells (Abschnitt 1), der verwendeten Gleichungen (Abschnitt 2), einige Anmerkungen zum Berechnungsverfahren (Abschnitt 3) sowie eine Auswertung der numerischen Ergebnisse.

1) Der Quader



Die Kantenlängen sind a = 190 cm, b = 110 cm und c = 220 cm (bzw. a = 190 cm, b = 220 cm, c = 110 cm). Die Platten sind schallhart und je nach Modell entweder starr oder zu Biegeschwingungen fähig. In letzterem Fall wird als Biegesteife der Wert $B = 5{,}474 \cdot 10^{11} \frac{g \cdot cm^2}{sec^2}$ angenommen sowie als Plattendichte für die Platten 1,3 und 5 $m = 1{,}56 \frac{g}{cm^2}$ und für 2, 4 und 6 $m = 3{,}51 \frac{g}{cm^2}$. Die relative Dämpfung η beträgt 0,06.

An der Platte 1 greift im Punkt $(\frac{2}{3} \cdot a, \frac{1}{2} \cdot b, 0)$ eine punktförmige einfrequentige Kraft an. Die Amplitude des stationären Schallfeldes, das hierdurch erzeugt wird, wird im Punkt (x_o, y_o, z_o) = (80 cm, 50 cm, 100 cm) (bzw. (x_o, y_o, z_o) = (80 cm, 100 cm, 50 cm)) berechnet.

2) Die Gleichungen

Den Berechnungen liegen folgende Gleichungen zugrunde:

Schwingungsgleichung für die Platten:

$$m w_q + B \cdot (1 - i\eta) \Delta\Delta w_q = \begin{cases} f - p_1 & \text{für } q = 1 \\ -p_q & \text{für } q = 3,5 \\ +p_q & \text{für } q = 2,4,6 \end{cases} , \qquad (1)$$

wobei w_q die Auslenkung der q-ten Platte, p_q den Innendruck an der q-ten Platte und f die Erregung der ersten Platte beschreibt.

Randbedingung für den Innendruck:

$$\frac{\partial p_q}{\partial n_q} = \begin{cases} -\omega^2 \rho_L w_q & \text{für } q = 1,3,5 \\ +\omega^2 \rho_L w_q & \text{für } q = 2,4,6 \end{cases} , \qquad (2)$$

wobei ω die Erregerfrequenz und n_q der innere Normalenvektor an der q-ten Platte ist.

Zur Berechnung werden die Plattenschwingungen zerlegt in Eigenmodes:

$$w_q = e^{i\omega t} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} A_{k\ell}^{(q)} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} ,$$

und ebenso

$$f = e^{i\omega t} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} f_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} .$$

Berechnet werden folgende Modelle:

<u>Modell 1:</u>

Plattenschwingung und Schalldruck sind entkoppelt. Hierzu wird in den Gleichungen (1) $p_q = 0$ gesetzt. Daraus folgt $w_q = 0$ für $q \neq 1$, d.h. nur die Platte 1 schwingt.

Für die Koeffizienten $A_{k\ell}^{(1)}$ folgt aus Gleichung (1)

$$A_{k\ell}^{(1)} = \frac{f_{k\ell}}{m \cdot (-\omega^2 + (1-i\eta)\omega_k^2)} , \text{ mit } \omega_{k\ell} = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{B}{m}} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right).$$

Der Schalldruck im Punkt (x_o, y_o, z_o) wird ermittelt mit Hilfe des Ansatzes

$$p = e^{i\pi t} \sum_{r,s} \left(C_{rs}^{(1)} e^{-ik^{rs} z_o} + C_{rs}^{(2)} e^{ik^{rs} z_o}\right) \cos \frac{r\pi x_o}{a} \cos \frac{r\pi y_o}{b} \qquad (3)$$

mit $$k^{rs} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_L^2} - \frac{r^2\pi^2}{a^2} - \frac{s^2\pi^2}{b^2}} .$$

Aus den Randbedingungen (2) folgt

$$C_{rs}^{(1)} - C_{rs}^{(2)} = \frac{i\omega^2 \rho_L}{k^{rs}} \sum_{k,\ell} \alpha_{rs}^{k\ell} A_{k\ell}^{(1)}$$

und

$$C_{rs}^{(1)} e^{-ik^{rs}c} - C_{rs}^{(2)} e^{ik^{rs}c} = 0.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{rs}^{k\ell}$ ergeben sich aus der Beziehung

$$\sin \frac{k\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\ell\pi y}{b} = \sum_{r,s} \alpha_{rs}^{k\ell} \cos \frac{r\pi x}{a} \cdot \cos \frac{s\pi y}{b} .$$

Modell 2:

Die Platten 2-6 sind starr. Es ist $w_q = 0$ für $q = 2,\ldots,6$. Für den Schalldruck gilt der Ansatz (3). Die Gleichungen (1) und (2) führen auf das Gleichungssystem

$$C_{rs}^{(2)} = C_{rs}^{(1)} \cdot e^{-2ik^{rs}c}$$

und

$$C_{rs}^{(1)} = \frac{i\omega^2 \rho_L}{(1-e^{-2ik^{rs}c}) \cdot k^{rs} \cdot m} \{ \sum_{r',s'} C_{r's'}^{(1)} (1+e^{-2ik^{r's'}c}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k,\ell} \frac{\alpha_{rs}^{k\ell} \beta_{k\ell}^{r's'}}{\omega^2 - (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2} + \sum_{k,\ell} \frac{\alpha_{rs}^{k\ell} f_{k\ell}}{\omega^2 - (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2} \},$$

wobei die Koeffizienten $\beta_{k\ell}^{rs}$ sich aus folgender Beziehung ergeben:

$$\cos \frac{r\pi x}{a} \cdot \cos \frac{s\pi y}{b} = \sum_{k,\ell} \beta_{k\ell}^{rs} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} .$$

Modell 3:

Die Platten 3-6 sind starr.

Wieder gilt der Ansatz (3) für den Schalldruck. Aus den Gleichungen (1) und (2) folgen die gekoppelten Gleichungssysteme:

a) $A_{k\ell}^{(1)} \cdot (-\omega^2 + (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2) = \frac{1}{m} \cdot f_{k\ell} - \frac{1}{m} \sum_{r,s} \beta_{k\ell}^{rs} (C_{rs}^{(1)} + C_{rs}^{(2)})$

b) $A_{k\ell}^{(2)} \cdot (-\frac{9}{4}\omega^2 + (1-i\eta)\omega_{k\ell}^2) = \frac{1}{m} \sum_{r,s} \beta_{k\ell}^{rs} (C_{rs}^{(1)} e^{-ik^{rs}c} + C_{rs}^{(2)} e^{ik^{rs}c})$

c) $C_{rs}^{(1)} - C_{rs}^{(2)} = -\frac{i\omega^2 \rho_L}{k^{rs}} \sum_{k,\ell} \alpha_{rs}^{k} A_{k\ell}^{(1)}$

d) $C_{rs}^{(1)} e^{-ik^{rs}c} - C_{rs}^{(2)} e^{ik^{rs}c} = -\frac{i\omega^2 \rho_L}{k^{rs}} \sum_{k,\ell} \alpha_{rs}^{k\ell} A_{k\ell}^{(2)}$.

Modell 4:

Alle Platten schwingen.

Der Ansatz für p ist nun

$$p = e^{i\omega t} \sum_{r,s} (C_{rs}^{(1)} e^{-ik^{rs}z_o} + C_{rs}^{(2)} e^{ik^{rs}z_o}) \cos \frac{r\pi x_o}{a} \cos \frac{s\pi y_o}{b}$$

$$+ e^{i\omega t} \sum_{r,s} (C_{rs}^{(3)} e^{-ik'^{rs}x_o} + C_{rs}^{(4)} e^{ik'^{rs}x_o}) \cos \frac{r\pi y_o}{b} \cos \frac{s\pi z_o}{c}$$

$$+ e^{i\omega t} \sum_{r,s} (C_{rs}^{(5)} e^{-ik''^{rs}y_o} + C_{rs}^{(6)} e^{ik''^{rs}y_o}) \cos \frac{r\pi x_o}{a} \cos \frac{s\pi z_o}{c}$$

$$= p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} ,$$

wobei $k'^{rs} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_L^2} - \frac{r^2\pi^2}{b^2} - \frac{s^2\pi^2}{c^2}}$ und $k''^{rs} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_L^2} - \frac{r^2\pi^2}{a^2} - \frac{s^2\pi^2}{c^2}}$ ist.

Da die Größen $A_{k\ell}^{(3)} - A_{k\ell}^{(6)}$ klein im Vergleich zu $A_{k\ell}^{(1)}$ sind, werden die aus (1) und (2) abgeleiteten Gleichungssysteme auf folgende Weise entkoppelt:

a) $p^{(1)}$ wird wie in Modell 3 berechnet.

b) $w_3 - w_6$ werden aus den Gleichungen (1) berechnet, wobei p_q durch $p_q^{(1)}$ ersetzt wird.

c) $p^{(2)}$ und $p^{(3)}$ werden aus den Gleichungen (2) berechnet.

3) Angaben zum Programm und den numerischen Berechnungen

Berechnet werden die Amplitude des stationären Schalldrucks im Punkt (x_o, y_o, z_o) einerseits und die Schwingungsenergie der angeregten Platte andererseits. Die Seiten des Quaders sind so benannt, daß die angeregte Platte jeweils die Maße a×b hat.
Bei den Modellen 1 und 2 werden jeweils 100 Plattenmodes, den Modellen 3 und 4 24 Plattenmodes pro schwingender Platte berücksichtigt, sowie 18 (Modelle 1, 2 und 3) bzw. 54 Koeffizienten (Modell 4) für den Schalldruck. Schalldruck und Plattenschwingung werden ausgewertet für Anregefrequenzen im Bereich von 50 bis 200 Hz. Einzelheiten zum Programm können der beiliegenden Programmbeschreibung entnommen werden (Anlage 2).

4) Die Ergebnisse

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen sind im Anhang graphisch dargestellt. Die Seiten E1-E4 entsprechen der Anregung der Platte mit den Maßen 190 cm × 110 cm, die Seiten E5-E9 der Anregung der Platte 190 cm × 220 cm. Auf den Seiten E1-E3 und E5-E7 sind die Modelle 2, 3 und 4 dem entkoppelten Modell 1 gegenübergestellt. Die Schwingungsenergien der angeregten Platte für Modell 1 und Modell 3 (was gleichzeitig dem Modell 4 entspricht) sind auf E4 und E9 dargestellt.
Ein Vergleich des entkoppelten Modells mit dem vollständig gerechneten Modell für eine schwingungsfähige Platte (s. E1 und E5) zeigt, daß bis auf geringfügige Verschiebungen der Resonanzen keine nennenswerten Abweichungen der beiden Modelle festzustellen sind. Hiervon gibt es eine Ausnahme: den Frequenzbereich um 175 Hz im Fall der Anregung der kleinen Platte (s. E1). Sowohl Breite als auch Höhe des Resonanzpeaks sind im gekoppelten Modell stark reduziert. Ein Blick auf die Resonanzverteilungen (s. S. 8) zeigt

den Grund hierfür: In diesem Bereich werden drei eng beieinander liegende Hohlraumresonanzen durch eine Plattenresonanz überlagert. Aus Untersuchungen im Zwischenbericht (vgl. Abschnitt 5) folgt, daß in diesem Fall die Energieübertragung zwischen Platten und Luft gegenüber dem entkoppelten Modell stark gedämpft ist. Im Falle der Anregung der großen Platte (s. E5) tritt eine solche Überlagerung nicht auf, da die zur Resonanz gehörende Plattenschwingung nicht angeregt wird. Um auch hier den Einfluß der Rückkopplung des Schalldrucks auf die Plattenbewegung zu sehen, wurde der Angriffspunkt der erregenden Kraft auf den Punkt $(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}b)$ gelegt. Das Ergebnis ist in E8 dargestellt.

Im Vergleich zu Modell 2 sind die Resonanzen im Modell 3 (s. E2 und E6) geringfügig abgeflacht. Die Eigenresonanzen der Platte 2 spielen keine große Rolle. Lediglich im Bereich von Hohlraumresonanzen machen sie sich verstärkt bemerkbar.

Bemerkenswert an Modell 4 (E3 und E7) ist die Verstärkung der Hohlraumresonanzen auch gegenüber dem entkoppelten Modell. Dieser Effekt dürfte aber nur im Fall eines idealen Hohlraumresonators, wie ihn ein Quader darstellt, relevant sein und wird in komplizierteren Gebilden (wie Karosserien) nicht in dieser Stärke auftreten.

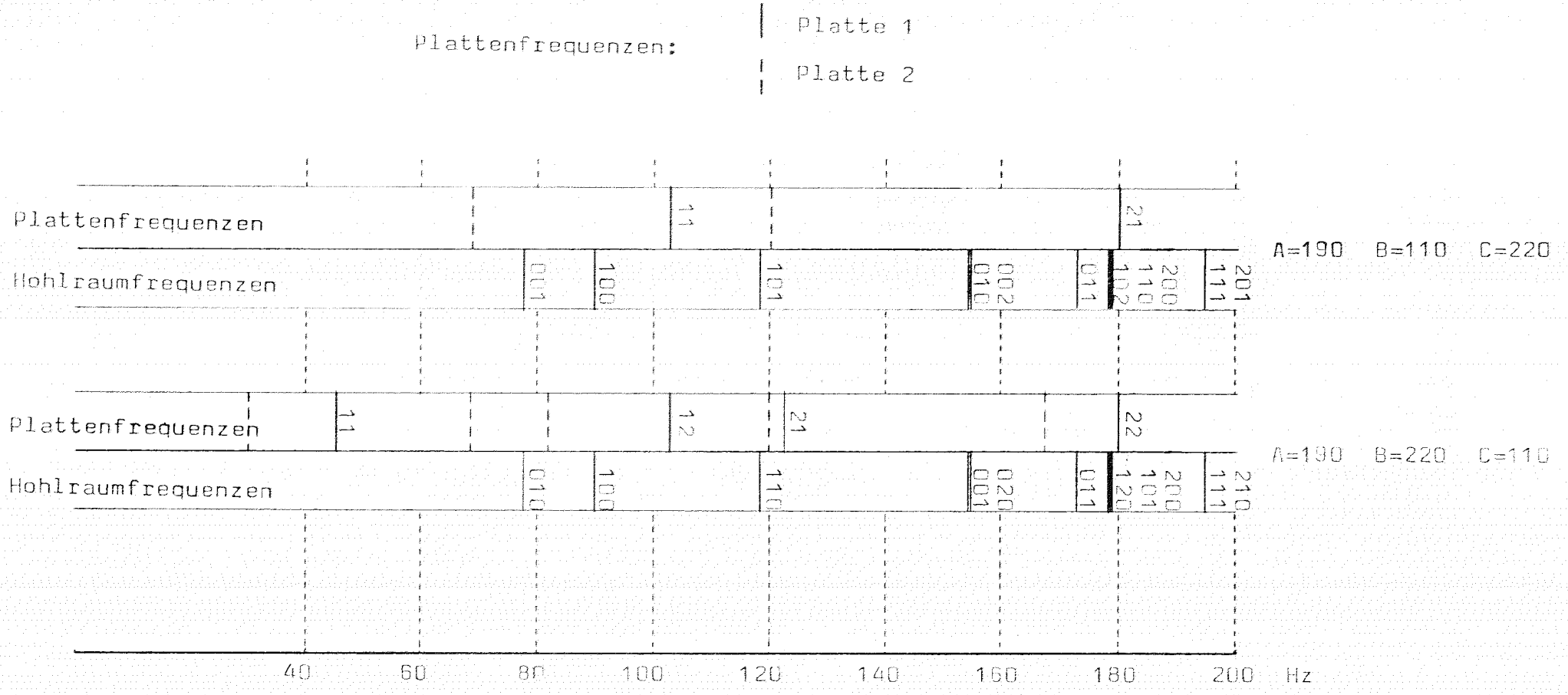
5) Schlußbemerkungen

Die numerischen Ergebnisse bestätigen im wesentlichen die Ergebnisse des Zwischenberichtes: Das entkoppelte Modell beschreibt das Schallfeld gut im Bereich außerhalb der Resonanzen und auch in isolierten Resonanzen (zumindest im Fall höchstens zweier schwingender Platten). Einer Modifikation bedarf dieses Verfahren in

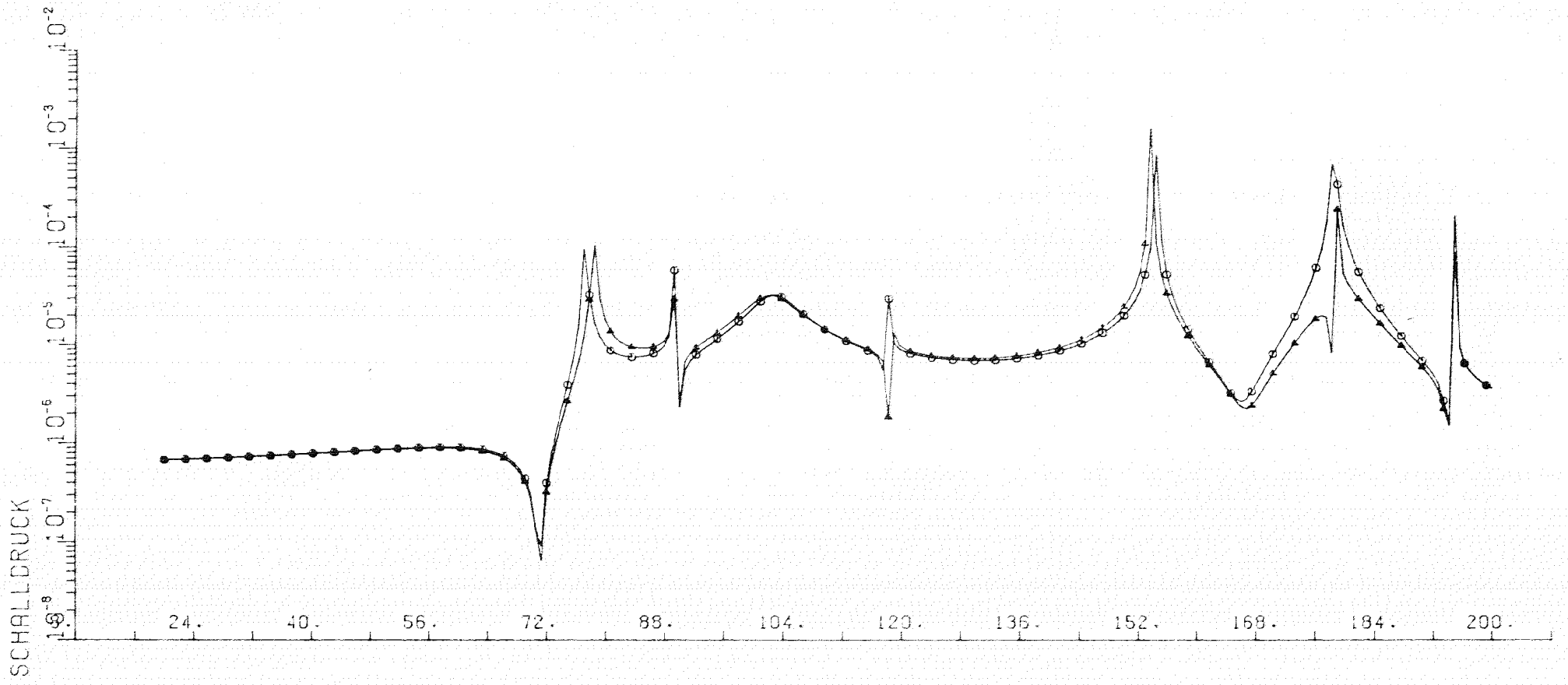
Bereichen, in denen sich Hohlraum- und Plattenresonanzen überlagern.

In diesem Zusammenhang ist ein Vergleich mit einem Verfahren bemerkenswert, das in Voruntersuchungen zu den endgültigen Berechnungen durchgeführt wurde. Dieses Verfahren, dessen Ergebnisse in Anlage 1 dargestellt sind, approximiert gut die Ergebnisse des Modells 2. Dies ist deshalb interessant, da sich dieses Modell von Modell 1 lediglich durch die Addition eines geeigneten Dämpfungsterns unterscheidet. Insbesondere muß kein Gleichungssystem gelöst werden. Damit könnte dieses Verfahren einen geeigneten Kompromiß bieten zwischen dem entkoppelten Modell und dem rechenzeitintensiven Modell 2.

Resonanzfrequenzen



SCHALLDRUCK (80,50,100)

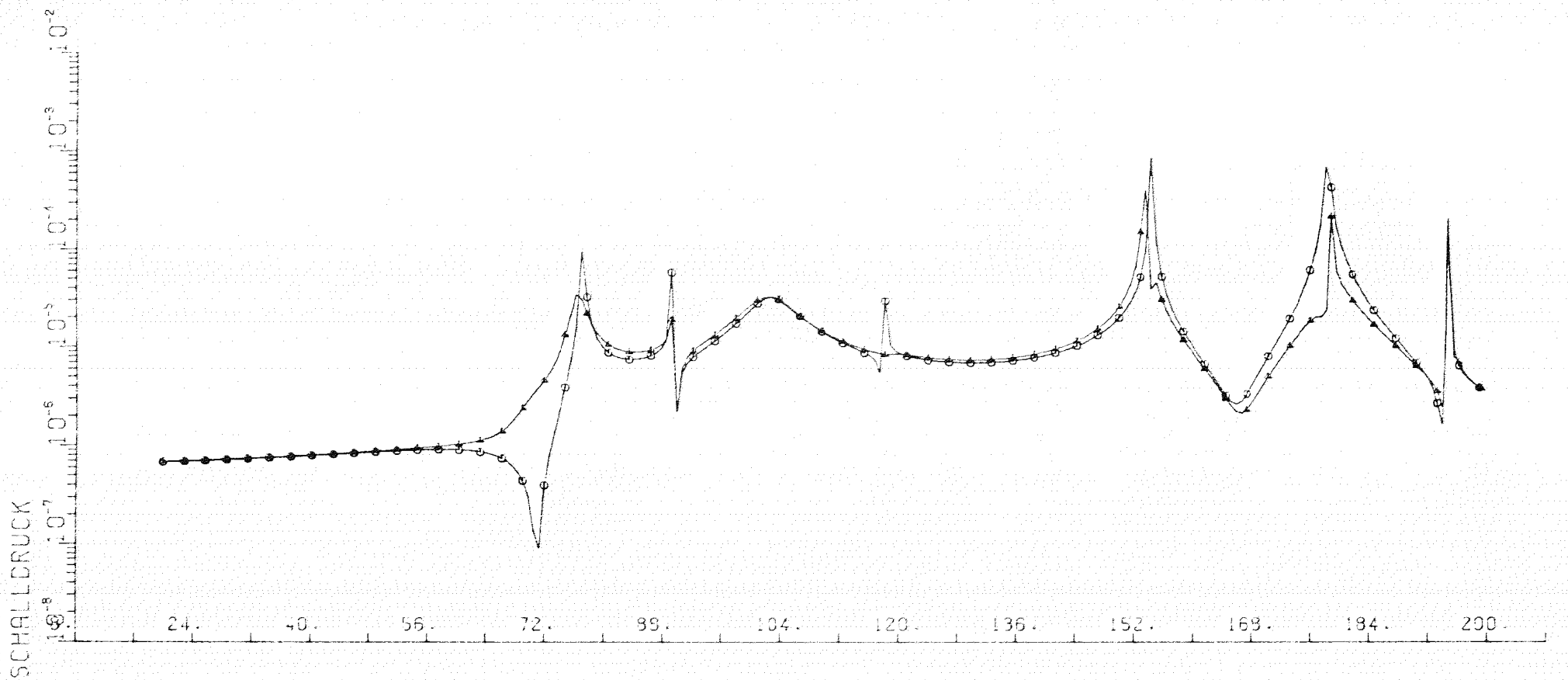


E 1

⊙ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

△ SCHALLDRUCK NACH MODELL 2

SCHALLDRUCK (80,50,100)

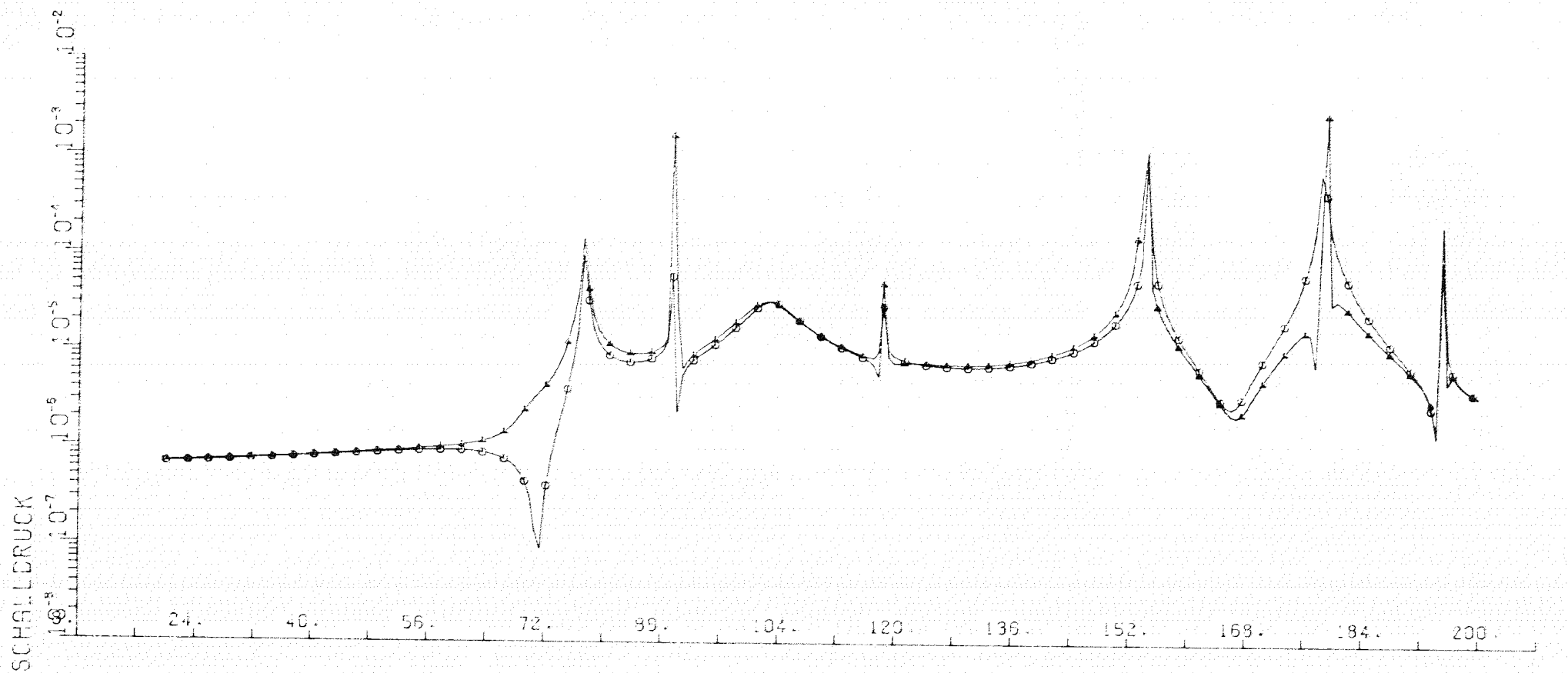


E 2

⊖ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

▲ SCHALLDRUCK NACH MODELL 3

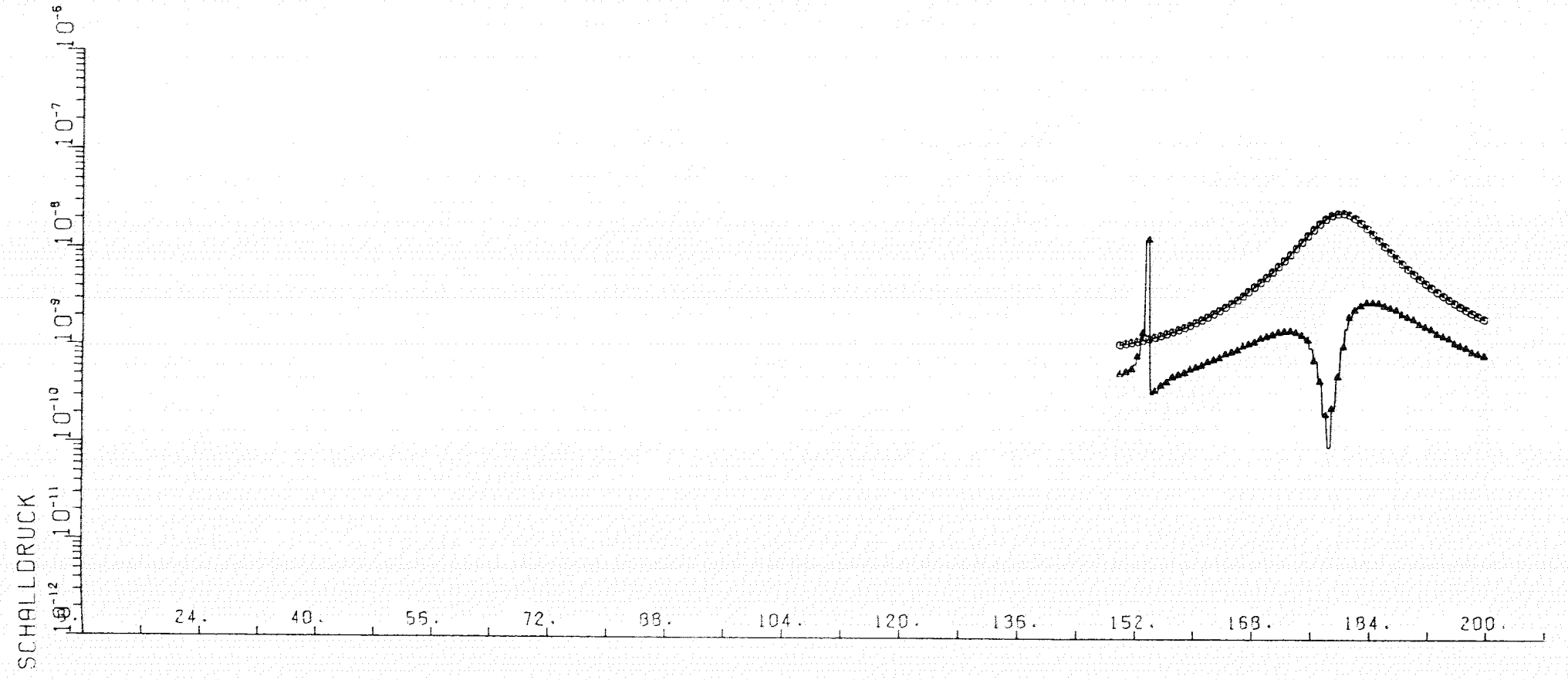
SCHALLDRUCK (80,50,100)



⊕ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

△ SCHALLDRUCK NACH MODELL 4

SCHWINGUNGSENERGIE (80,50,100)

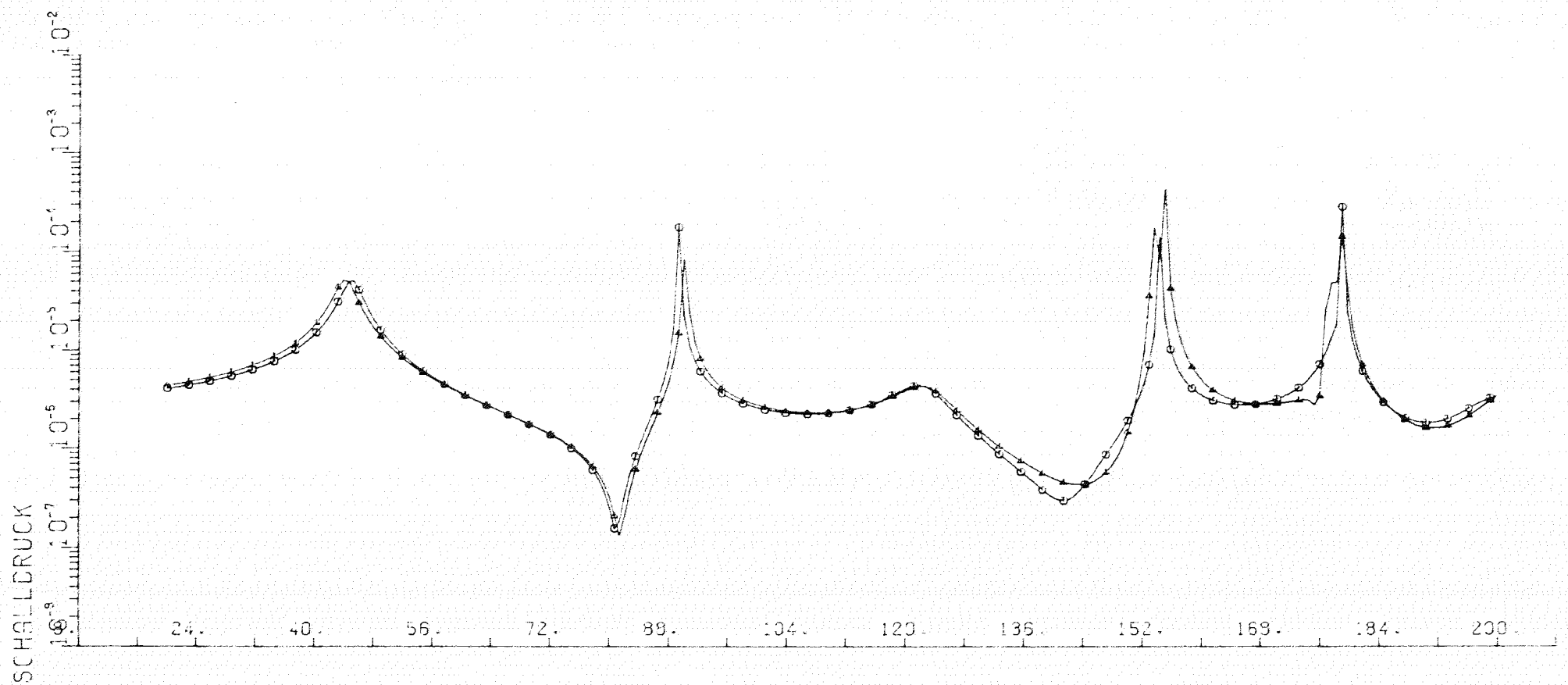


○ MODELL 1

△ MODELL 3

E 4

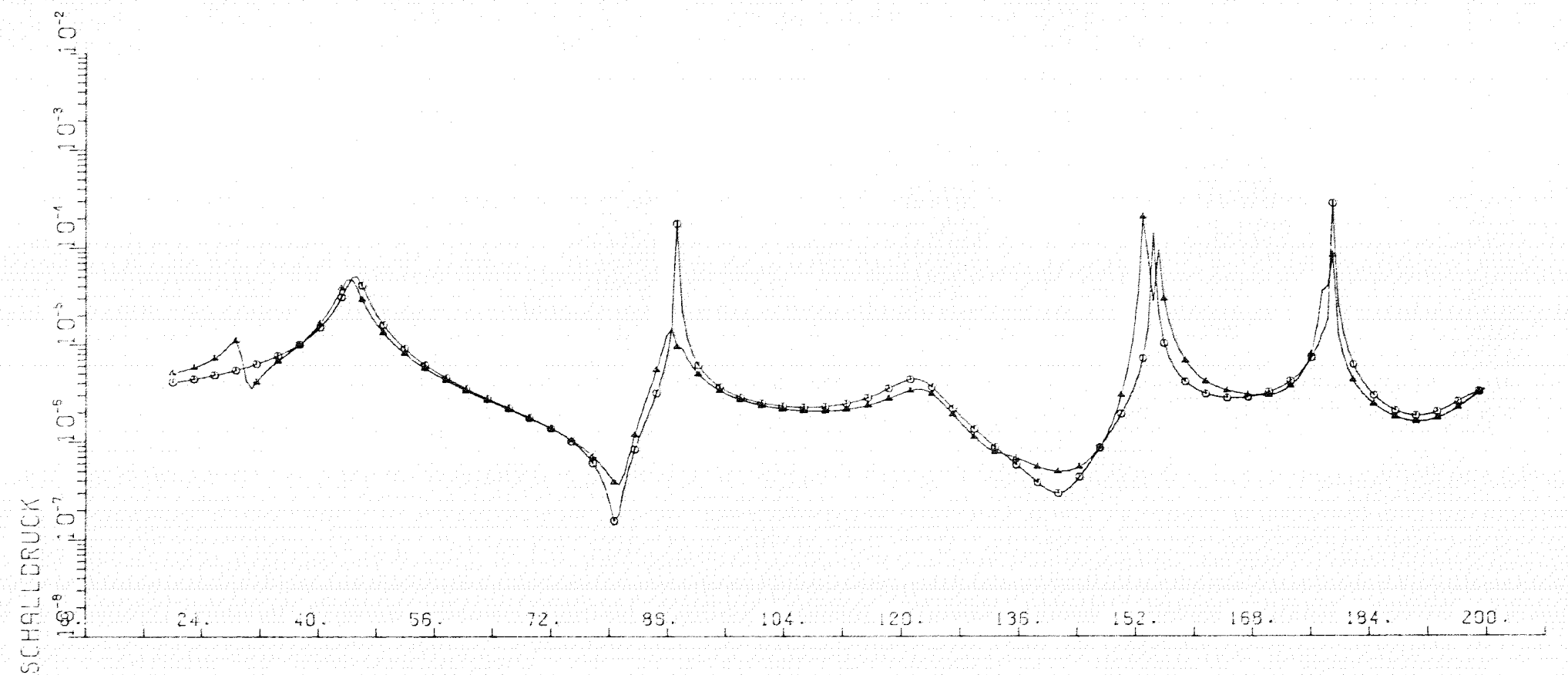
SCHALLDRUCK (80,100,50)



⊖ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

⊥ SCHALLDRUCK NACH MODELL 2

SCHALLDRUCK (80,100,50)

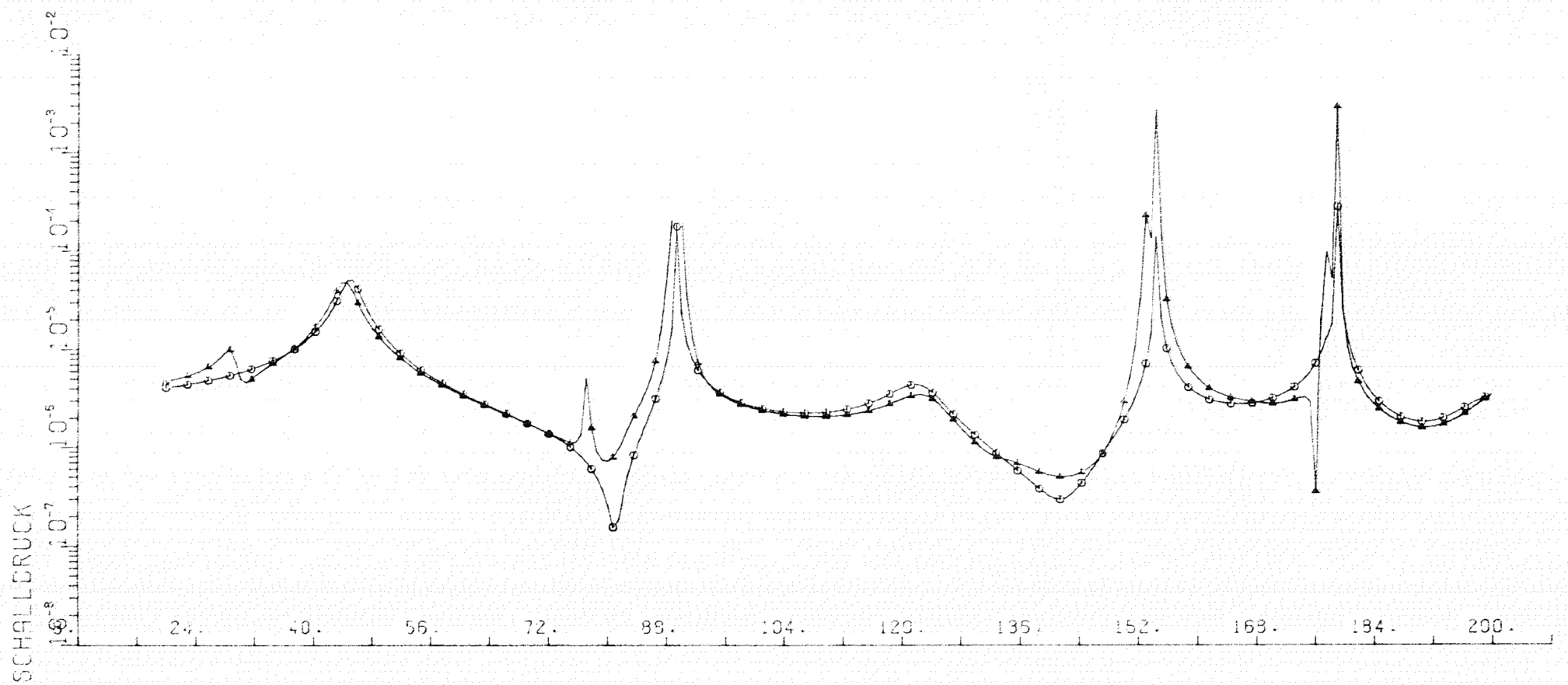


E 6

⊙ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

△ SCHALLDRUCK NACH MODELL 3

SCHALLDRUCK (80,100,50)

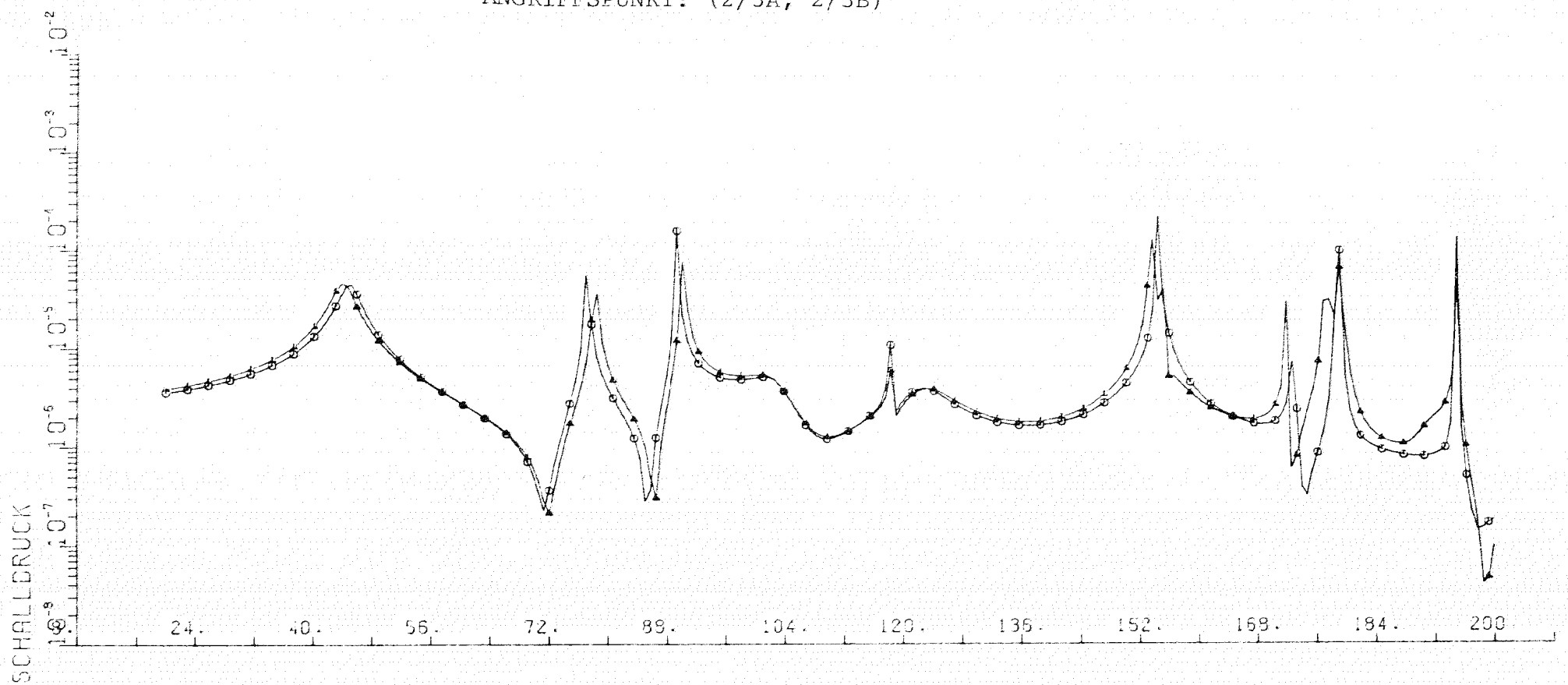


⊕ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

▲ SCHALLDRUCK NACH MODELL 4

SCHALLDRUCK (80,100,50)

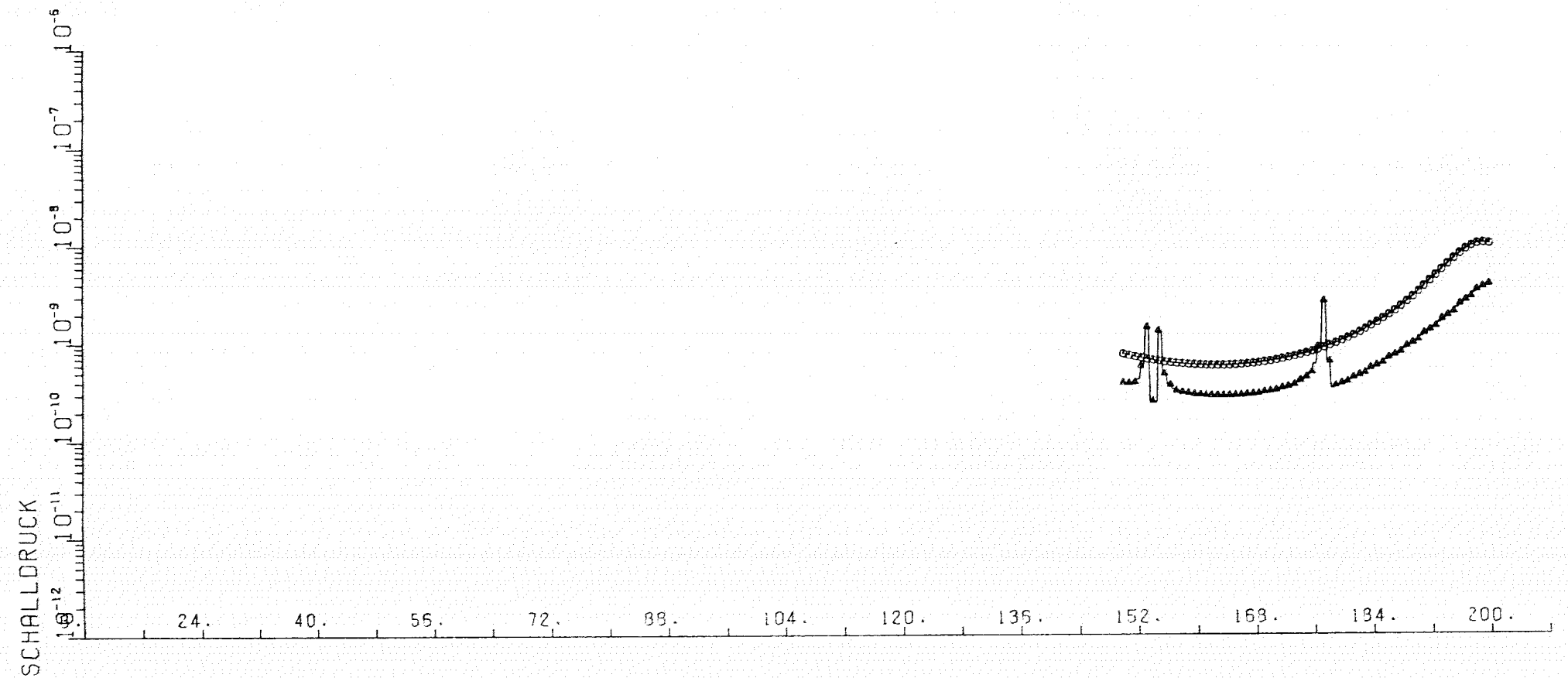
ANGRIFFSPUNKT: (2/3A, 2/3B)



⊙ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

▲ SCHALLDRUCK NACH MODELL 2

SCHWINGUNGSENERGIE (80,100,50)



⊙ MODELL 1
△ MODELL 3

ANLAGE 1: Ein vereinfachtes Modell

Zur Berechnung des Schalldrucks bei einer schwingungsfähigen Platte (Modell 2) muß folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten des Schalldrucks gelöst werden:

$$(1-e^{-2ik^{rs}c})\cdot C_{rs} = \frac{i\omega^2\rho_L}{k^{rs}\cdot m}\cdot$$

$$\cdot\{\sum_{r',s'} C_{r's'}(1+e^{-2ik^{r's'}c})\cdot\sum_{k,\ell}\frac{\alpha_{rs}^{k\ell}\beta_{k\ell}^{r's'}}{\omega^2-(1-i\eta)\omega_{k\ell}^2}+\sum_{k,\ell}\frac{\alpha_{rs}^{k\ell}f_{k\ell}}{\omega^2-(1-i\eta)\omega_{k\ell}^2}\}\ .$$

Die Beobachtung, daß außerhalb der Resonanzfrequenzen der Schalldruck gut durch ein entkoppeltes Modell approximiert wird, sowie heuristische Überlegungen, nach denen im Resonanzbereich der Einfluß nicht resonanter Eigenschwingungen auf Resonanzschwingungen klein ist, führen zu folgendem Ansatz:

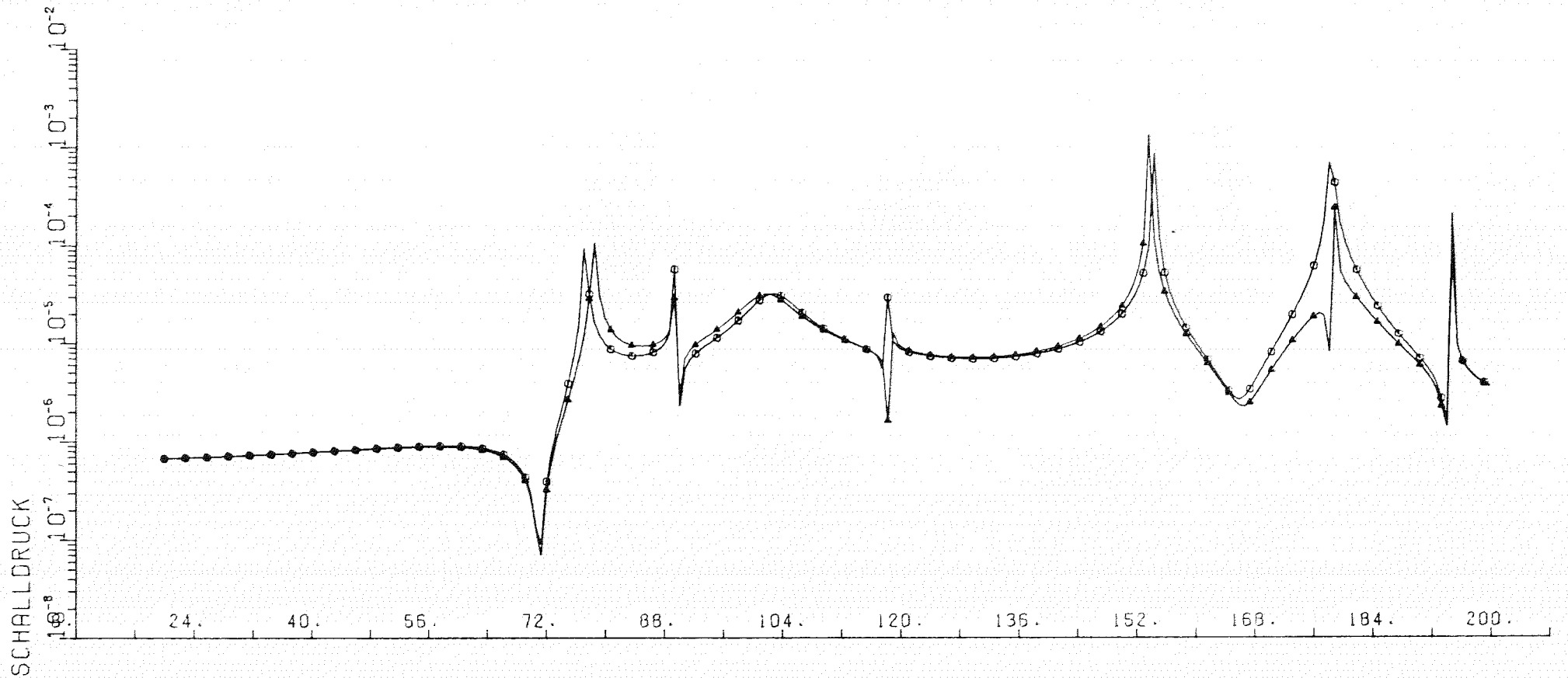
$$C_{rs}\cdot\{1-e^{-2ik^{rs}c}-\frac{i\omega^2\rho_L}{k^{rs}\cdot m}\cdot(1+e^{-2ik^{rs}c})\cdot\sum_{k,\ell}\frac{\alpha_{rs}^{k\ell}\beta^{rs}}{\omega^2-(1-i\eta)\omega_{k\ell}^2}\}$$

$$=\frac{i\omega^2\rho_L}{(1-e^{-2ik^{rs}c})\cdot k^{rs}\cdot m}\cdot\sum_{k,\ell}\frac{\alpha_{rs}^{k\ell}f_{k\ell}}{\omega^2-(1-i\eta)\omega_{k\ell}^2}\ .$$

Dieses Modell, das sich vom entkoppelten Modell nur durch die Einführung eines zusätzlichen Dämpfungsterms für C_{rs} unterscheidet, kann ohne Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet werden.

Die Ergebnisse der Berechnung dieses Modells sind auf den beiden folgenden Seiten dargestellt.

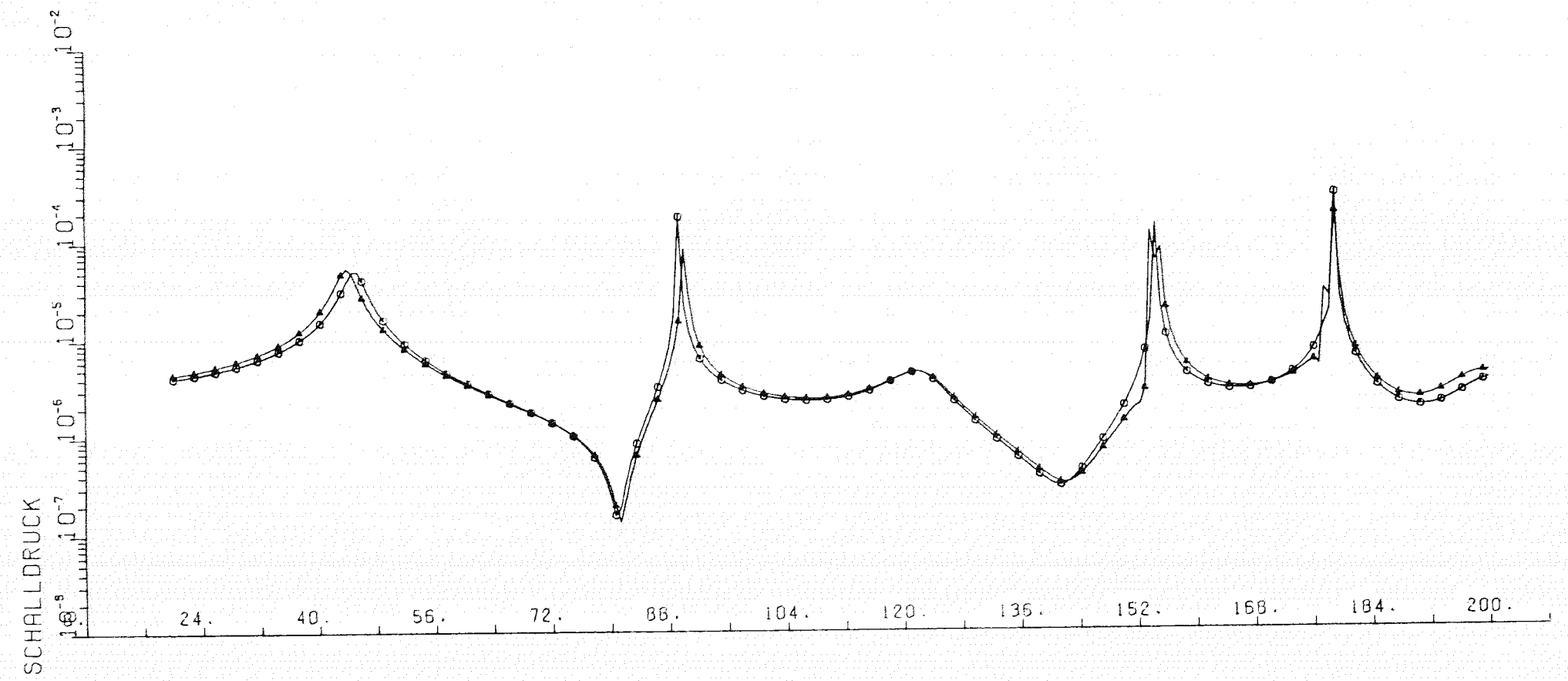
SCHALLDRUCK (80,50,100)



⊙ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

▲ SCHALLDRUCK NACH MODELL 2A

SCHALLDRUCK (80,100,50)



⊙ SCHALLDRUCK NACH MODELL 1

▲ SCHALLDRUCK NACH MODELL 2A

ANLAGE 2: Das Programm

Programmerläuterung:

Der Hauptteil ("Hauptprogramm") des vorliegenden Programmes veranlaßt das Plotten des Schalldrucks ("LUFT") in Abhängigkeit des gewählten Modells ("MODELL") und der Frequenz ("X"). Dies geschieht durch Aufruf einer externen Plotroutine.
Die Berechnung des Schalldrucks sowie der dazu nötigen Größen erfolgt in Unterprogrammen.

Erläuterung der wichtigsten Konstanten (soweit ihre Bezeichnung nicht mit denen der Formeln im Bericht übereinstimmen):

RHOLUFT: ρ

RHOQUADER: m

ETA: η

BCONST: B

PI: π

Die Größe "DIFF" steuert die Auflösung des Plotters.
Durch die Variablen K, L (KI, LI, ...) werden die Platteneigenschwingungen, durch R, S (RI, SI, ...) die Hohlraumschwingungen numeriert. Durch KL (...) bzw. RS (...) werden die Zahlenpaare (K,L) (...) bzw. (R,S) (...) linear angeordnet (dies ist nötig zur Lösung der linearen Gleichungssysteme).

Unterprogramme:

REAL FUNCTION LUFT K(X): Berechnung des Schalldrucks in Abhängigkeit des Modells K und der Frequenz X.

OMEGA (K,L): Berechnung der Platteneigenfrequenz

$$\text{OMEGA} = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{B}{m}} \cdot \left(\frac{K^2}{A^2} + \frac{L^2}{B^2}\right)$$

ALPHA (RS,K,L): Berechnung von $\alpha_{rs}^{k\ell}$

BETA (K,L,RS): Berechnung von $\beta_{k\ell}^{rs}$

FF (K,L): Anregung des Modes $\sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{\ell\pi y}{b}$ durch eine äußere Kraft im Punkt (EPS1·A,EPS2·B).

COMPLEX FUNCTION KF (RS,X): Berechnung von K^{rs}

(Zur Berechnung von LUFT4 werden entsprechende Unterprogramme OMEGA1, ALPHA1, ... definiert.)

Die Gleichungssystme für $C_{rs}^{(1)}$ (= C2B(RS)) in Modell 2 und für $A_{k\ell}^{(1)}$ (= ALSG) und $A_{k\ell}^{(2)}$ (= BLSG) für Modell 3 werden in den Subroutinen GLGS2B und GLGS3 gelöst. Hierin wird extern das Programm FO4ADF zur Lösung eines linearen Gleichungssystems aufgerufen.

Die Berechnung der "rechten Seiten" der Gleichungssysteme, in denen die Größen $f_{k\ell}$ enthalten sind, erfolgen in den Aufrufen C1 und R2B.

Eine Beschreibung der extern aufgerufenen Unterprogramme findet sich in dieser Anlage.

```
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
-------------------------------------------------------------------
   SPEZIFIKATION DER VERWENDETEN BIBLIOTHEKSUNTERPROGRAMME
-------------------------------------------------------------------


*******************************************************************
 PLOTS
*******************************************************************

 AUFRUF IM PROGRAMM:

    CALL PLOTS(1,1,1)


 ZWECK:

    INITIALISIERUNG DES PLOTTERS


*******************************************************************
 PFRAME
*******************************************************************

 AUFRUF IM PROGRAMM:

    CALL PFRAME(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,LAYOUT,TITEL,TEXT1,TEXT2)


 ZWECK:

    - AUFBAU DES RAHMENS (DIN A4 QUER)
    - ZEICHNEN DES KOORDINATENKREUZES


 PARAMETER:

    - XMIN (BZW. XMAX)    : MINIMUM (BZW. MAXIMUM) DER
                            HORIZONTALEN KOORDINATENACHSE
    - YMIN (BZW. YMAX)    : MINIMUM (BZW. MAXIMUM) DER
                            VERTIKALEN KOORDINATENACHSE
    - LAYOUT              : BESTIMMT DIE ACHSENTEILUNG (LIN/LOG)
                            UND DIE LAGE DES ACHSENKREUZES
                            (SIEHE PROGRAMMLISTING)
    - TITEL               : GESAMTUEBERSCHRIFT DER ZEICHNUNG
    - TEXT1 (BZW. TEXT2)  : BESCHRIFTUNG DER HORIZONTALEN
                            (BZW. VERTIKALEN) ACHSE


*******************************************************************
 PFUNC
*******************************************************************

 AUFRUF IM PROGRAMM:

    CALL PFUNC(LUFT,XMIN,XMAX,0,FTITEL,TEXT1,TEXT2)


 ZWECK:

    ZEICHNEN DER FUNKTION "LUFT" IN DEN MIT DEM UNTERPROGRAMM
    PFRAME GEZEICHNETEN RAHMEN


 PARAMETER
```

```
- LUFT        : NAME DER ZU ZEICHNENDEN FUNKTION
- XMIN,XMAX   : WERTEBEREICH DER FUNKTION
- FTITEL      : BESCHRIFTUNG DER FUNKTION IN DER ZEICHNUNG
- TEXT1,TEXT2: KEINE BEDEUTUNG IN DIESEM ZUSAMMENHANG

DER WERTEPARAMETER 0 HAT EBENSO KEINE BEDEUTUNG
```

****
PLOT
****

AUFRUF IM PROGRAMM:

```
CALL PLOT(0.0,0.0,999)
```

ZWECK:

SCHLUSSAUFRUF PLOTTER

****
F04ADF
****

AUFRUF (ALLGEMEIN):

```
CALL F04ADF(MATRIX,IA,INHOM,IB,IN,IM,LSG,IC,WKSPCE,IFAIL)
```

ZWECK:

LOESUNG EINES DOPPELTGENAUEN KOMPLEXEN LINEAREN
GLEICHUNGSSYSTEMS MIT NACHITERATION

PARAMETER:

```
- MATRIX: KOEFFIZIENTENMATRIX DES GLEICHUNGSSYSTEMS
- IA    : ANZAHL DER ZEILEN VON "MATRIX"
- INHOM : MATRIX, DIE SPALTENWEISE DIE (MEHREREN) RECHTEN SEITEN
-         SEITEN DES GLEICHUNGSSYSTEMS ENTHAELT
- IB    : ANZAHL DER ZEILEN VON "INHOM"
- IN    : ORDNUNG VON "MATRIX"
- IM    : ANZAHL DER RECHTEN SEITEN
- LSG   : MATRIX, DIE SPALTENWEISE DIE ( EVENTUELL MEHREREN ,S.O.)
          LOESUNGEN ENTHAELT
- IC    : ANZAHL DER ZEILEN VON "LSG"
- WKSPCE: ARBEITSARRAY VOM TYP REAL*8, DER MINDESTENS
-         DIE LAENGE "IN" HAT
- IFAIL : FEHLERANZEIGE (SINGULAERE MATRIX)
```

```
C*****************************************************************
C PROGRAMM HS.LUFT          (C) HERBERT SCHLAEFER 1984
C
C STAND 31.01.85
C ALLE GROESSEN IN CGS-EINHEITEN
C*****************************************************************
C
C ENTERJOB ?
C
      LOGICAL ENTER
      ENTER=.TRUE.
C
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
C
C KONST
C
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      VL=34000
      RHOLUFT=1.2E-03
      RHOQUADER=1.56
      ETA=0.06
      BCONST=5.474E11
      PI=4*ATAN(1.)
C
C PARAMETER
C
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER RMAX,SMAX,RSMAX,RI,SI,MODELL
      REAL X0,Y0,Z0,HOHLNYS(0:9,0:9)
C
      IF (ENTER) THEN
        KOORD=1
      ELSE
        WRITE(2,*) 'KOORDINATEN ?'
        WRITE(2,*) 'A=190,B=110,C=220,X0=80,Y0=50,Z0=100    --> 1'
        WRITE(2,*) 'A=190,B=220,C=110,X0=80,Y0=100,Z0=50    --> 2'
        READ(5,*) KOORD
      ENDIF
C
      IF (KOORD.EQ.1) THEN
      TITEL='SCHALLDRUCK   (80,50,100)                    '
        A=190
        B=110
        C=220
        X0=80
        Y0=50
        Z0=100
      ELSE
      TITEL='SCHALLDRUCK   (80,100,50)                    '
        A=190
        B=220
        C=110
        X0=80
        Y0=100
        Z0=50
      ENDIF
```

```
C
C INITIALISIERUNG VON "HOHLNYS"
      DO 10001 RI=0,9
      DO 10002 SI=0,9
        HOHLNYS(RI,SI)=SQRT( VL*VL/4. * (RI*PI/A/A + SI*SI/B/B) )
10002 CONTINUE
10001 CONTINUE
C
C VEREINBARUNGEN
C
      REAL LUFT1,LUFT2A,LUFT2B,LUFT3,LUFT4
      EXTERNAL PFUNC,PLOT,PFRAME,F04ADF
      EXTERNAL LUFT1,LUFT2A,LUFT2B,LUFT3,LUFT4
      CHARACTER *40 TEXT1,TEXT2,TITEL,FTITEL
      INTEGER LAYOUT,EINGABE
      REAL XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
      LOGICAL AUFTRAG(1:5)
C
C*********************************************************************
C HAUPTPROGRAMM
C*********************************************************************
C INITIALISIERUNG PLOTTER
      CALL PLOTS(1,1,1)
C FORMAT DER ZEICHNUNG FESTLEGEN
C DIN A4 QUER
      LAYOUT=2
C WERTEBEREICH X/Y-ACHSE
      XMIN=20
      XMAX=200
      YMIN=5E-08
      YMAX=0.5E-02
C BESCHRI TUNG DER ACHSEN
      TEXT1='                                                  '
      TEXT2='SCHALLDRUCK                                       '
C X-ACHSE LINEAR, Y-ACHSE LOGARITHMISCH
      EINGABE=3
      LAYOUT=LAYOUT+100*(EINGABE-1)
C KOORDINATENACHSEN AM RAND
      EINGABE=2
C LAYOUT BERECHNEN
      EINGABE=EINGABE*EINGABE-2
      LAYOUT=ISIGN(LAYOUT,EINGABE)
C
      CALL PFRAME(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,LAYOUT,TITEL,TEXT1,TEXT2)
C
C
C MODELL 1          -->1
C MODELL 2B         -->2
C MODELL 3          -->3
C MODELL 4          -->4
C
      XMIN=60
      XMAX=80
C
C AUFLOESUNG
C
      COMMON /AUFL/XALT,DIFF,ALTLUFT
      DIFF=0.5
```

```
      XALT=0
C
      IF (ENTER) THEN
        AUFTRAG(4)=.TRUE.
      ELSE
        WRITE(2,*) 'MODELL ?'
10015   READ(5,*) MODELL
        IF (MODELL.EQ.0) GOTO 10016
        AUFTRAG(MODELL)=.TRUE.
        GOTO 10015
      ENDIF
C
10016 DO 10017 MODELL=1,5
      IF (.NOT.AUFTRAG(MODELL)) GOTO 10017
      WRITE(2,10050) MODELL
10050 FORMAT('  NR.',I1,' WIRD GERADE BEARBEITET')
C
      IF (MODELL.EQ.1) THEN
        FTITEL='SCHALLDRUCK NACH MODELL 1                    '
        RMAX=2
        SMAX=2
        RSMAX=(RMAX+1)*(SMAX+1)-1
        KMAX=10
        LMAX=10
        KLMAX=KMAX*LMAX
        CALL PFUNC(LUFT1,XMIN,XMAX,0,FTITEL,TEXT1,TEXT2)
      ENDIF
C
      IF (MODELL.EQ.2) THEN
        FTITEL='SCHALLDRUCK NACH MODELL 2B                   '
        RMAX=2
        SMAX=2
        RSMAX=(RMAX+1)*(SMAX+1)-1
        KMAX=10
        LMAX=10
        KLMAX=KMAX*LMAX
        CALL PFUNC(LUFT2B,XMIN,XMAX,0,FTITEL,TEXT1,TEXT2)
      ENDIF
C
      IF (MODELL.EQ.3) THEN
        FTITEL='SCHALLDRUCK NACH MODELL 3                    '
        RMAX=3
        SMAX=3
        RSMAX=(RMAX+1)*(SMAX+1)-1
        KMAX=6
        LMAX=4
        KLMAX=KMAX*LMAX
        C LL PFUNC(LUFT3,XMIN,XMAX,0,FTITEL,TEXT1,TEXT2)
      ENDIF
C
      IF (MODELL.EQ.4) THEN
        FTITEL='SCHALLDRUCK NACH MODELL 4                    '
        RMAX=3
        SMAX=3
        RSMAX=(RMAX+1)*(SMAX+1)-1
        KMAX=6
        LMAX=4
        KLMAX=KMAX*LMAX
```

```
          CALL PFUNC(LUFT4,XMIN,XMAX,0,FTITEL,TEXT1,TEXT2)
        ENDIF
10017 CONTINUE
C SCHLUSSAUFRUF PLOTTER
        CALL PLOT(0.0,0.0,999)
        STOP
        END
C*****************************************************************
C UNTERPROGRAMME
C*****************************************************************
        REAL FUNCTION OMEGA(K,L)
        COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
        COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
        COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
        REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
        INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,K,L
        OMEGA=PI*PI*SQRT(BCONST/RHOQUADER)*( K*K/(A*A) + L*L/(B*B) )
        RETURN
        END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
        REAL FUNCTION ALPHA(RS,K,L)
        COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
        COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
        COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
        REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
        INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
        INTEGER R,S,K,L,RS
        II=SMAX+1
        R=INT(RS/FLOAT(II))
        S=MOD(RS,II)
        IF ((MOD( ((K-R)*(L-S)) ,2 )) .EQ. 0) THEN
          ALPHA=0
        ELSE
          IF ((R .EQ. 0) .OR. (S .EQ. 0)) FAKTOR=8
          IF ((R .EQ. 0) .AND. (S .EQ. 0)) FAKTOR=4
          IF ((R .NE. 0) .AND. (S .NE. 0)) FAKTOR=16
          ALPHA=FAKTOR*(K*L)/PI/PI/FLOAT(K*K-R*R)/FLOAT(L*L-S*S)
        ENDIF
        RETURN
        END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
        COMPLEX FUNCTION KF(RS,X)
        COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
        COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
        COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
        REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
        INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
        INTEGER R,S,RS
        REAL X,HELP
        II=SMAX+1
        R=INT(RS/FLOAT(II))
        S=MOD(RS,II)
        HELP= 4*PI*PI*X*X/VL/VL - R*R*PI*PI/A/A - S*S*PI*PI/B/B
        IF (HELP .GT. 0) THEN
```

```
        KF= CMPLX( SQRT(HELP),0 )
      ELSE
        KF= CMPLX( 0,SQRT(-HELP))
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION FF(K,L)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L
      REAL EPS1,EPS2
      EPS1=2/3.
      EPS2=1/2.
      FF= 4/A/B * SIN(K*PI*EPS1) * SIN(L*PI*EPS2)
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION BETA(K,L,RS)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L,R,S,RS
      II=SMAX+1
      R=INT(RS/FLOAT(II))
      S=MOD(RS,II)
      IF (MOD( ((K+R)*(L+S)) ,2) .EQ. 0 ) THEN
        BETA=0
      ELSE
        BETA= 16*K*L / ( PI*PI * (K*K-R*R) * (L*L-S*S) )
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION LUFT1(X)
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X
      INTEGER RI,SI,RSI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,C1,KF
      CSUM=0
      DO 11001 RSI=0,RSMAX
      CFAKTOR=CEXP(-KF(RSI,X)*CMPLX(0,Z0))
     1        +CEXP(KF(RSI,X)*CMPLX(0,(Z0-2*C)))
      II=SMAX+1
      RI= INT(RSI/FLOAT(II))
```

```
      SI=MOD(RSI,II)
      CSUM= CSUM + CFAKTOR*COS(RI*PI*XO/A)*COS(SI*PI*YO/B)*C1(X,RSI)
11001 CONTINUE
      LUFT1= SQRT( CSUM * CONJG(CSUM) )
      WRITE(2,*) X,LUFT1
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION LUFT2A(X)
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X
      INTEGER RI,SI,RSI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,C2A,KF
      CSUM=0
      DO 12001 RSI=0,RSMAX
      CFAKTOR=CEXP(-KF(RSI,X)*CMPLX(0,ZO))
     1        +CEXP(KF(RSI,X)*CMPLX(0,(ZO-2*C)))
      II=SMAX+1
      RI= INT(RSI/FLOAT(II))
      SI=MOD(RSI,II)
      CSUM= CSUM + CFAKTOR*COS(RI*PI*XO/A)*COS(SI*PI*YO/B)*C2A(X,RSI)
12001 CONTINUE
      LUFT2A= SQRT( CSUM * CONJG(CSUM) )
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION LUFT2B(X)
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X
      INTEGER RI,SI,RSI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,C2B(0:100),KF
C
      CALL GLGS2B(X,C2B)
C
      CSUM=0
      DO 13001 RSI=0,RSMAX
      CFAKTOR=CEXP(-KF(RSI,X)*CMPLX(0,ZO))
     1        +CEXP(KF(RSI,X)*CMPLX(0,(ZO-2*C)))
      II=SMAX+1
      RI= INT(RSI/FLOAT(II))
      SI=MOD(RSI,II)
      CSUM= CSUM + CFAKTOR*COS(RI*PI*XO/A)*COS(SI*PI*YO/B)*C2B(RSI)
13001 CONTINUE
      LUFT2B= SQRT( CSUM * CONJG(CSUM) )
      WRITE(2,*) X,LUFT2B
      RETURN
```

```
      END
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION LUFT3(X)
      COMMON /AUFL/XALT,DIFF,ALTLUFT
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X
      INTEGER RI,SI,RSI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,C1,KF,EPLUS,EMINUS,CRS,DRS
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      COMPLEX*16 ALSG(1:24),BLSG(1:24)
C
C AUFLOESUNG VON "DIFF" HERTZ
C
      IF (X.LT.(XALT+DIFF)) THEN
        LUFT3=ALTLUFT
        RETURN
      ENDIF
      XALT=X
C
      CSUM=0
C
      CALL GLGS3(X,ALSG,BLSG)
C
      DO 14001 RSI=0,RSMAX
      CRS=0
      DRS=0
      EPLUS=CEXP(CMPLX(0,C)*KF(RSI,X))
      EMINUS=CEXP(-CMPLX(0,C)*KF(RSI,X))
      DO 14002 JJ=1,KLMAX
      CRS=CRS+ALPHA1(RSI,JJ)*(-EPLUS*CSNGL(ALSG(JJ))+CSNGL(BLSG(JJ)))
      DRS=DRS+ALPHA1(RSI,JJ)*(-EMINUS*CSNGL(ALSG(JJ))+CSNGL(BLSG(JJ)))
14002 CONTINUE
      CRS=CRS*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/KF(RSI,X)/(EPLUS-EMINUS)
      DRS=DRS*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/KF(RSI,X)/(EPLUS-EMINUS)
C
      II=SMAX+1
      RI= INT(RSI/FLOAT(II))
      SI=MOD(RSI,II)
      CSUM= CSUM + COS(RI*PI*X0/A)*COS(SI*PI*Y0/B)
     1             *(CRS*CEXP(-KF(RSI,X)*CMPLX(0,Z0))
     2              +DRS*CEXP(KF(RSI,X)*CMPLX(0,Z0)))
      CRSA(RSI)=CRS
      DRSA(RSI)=DRS
14001 CONTINUE
C
      LUFT3= SQRT( CSUM * CONJG(CSUM) )
      WRITE(2,*) X,LUFT3
      ALTLUFT= LUFT3
      RETURN
      END
C
```

```
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION C1(X,RS)
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X,ALPHA,FF,OMEGA
      INTEGER RS,KI,LI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,CNENNER,CZAEHLER,CHELP,KF
      CSUM=0
      DO 15001 KI=0,KMAX
      DO 15002 LI=0,LMAX
      CZAEHLER= ALPHA(RS,KI,LI) * FF(KI,LI)
      CNENNER=CMPLX(1,-ETA)*OMEGA(KI,LI)**2-4*PI*PI*X*X
      CSUM= CSUM + CZAEHLER/CNENNER
15002 CONTINUE
15001 CONTINUE
      CZAEHLER=CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT
      CHELP=KF(RS,X)
      CNENNER=CHELP*(CMPLX(1,0)-CEXP( CHELP*CMPLX(0,(-2*C))))
      C1=CSUM*CZAEHLER/CNENNER/RHOQUADER
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION C2A(X,RS)
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X,ALPHA,FF,OMEGA
      INTEGER RS,KI,LI
      COMPLEX CSUM1,CSUM2,CFAKTOR,CNENNER,CZAEHLER,CHELP,KF
      CSUM1=0
      CSUM2=0
      DO 16001 KI=0,KMAX
      DO 16002 LI=0,LMAX
      CNENNER=CMPLX(1,-ETA)*OMEGA(KI,LI)**2-4*PI*PI*X*X
      CZAEHLER= ALPHA(RS,KI,LI) * FF(KI,LI)
      CSUM1= CSUM1 + CZAEHLER/CNENNER
      CZAEHLER= ALPHA(RS,KI,LI) * BETA(KI,LI,RS)
      CSUM2= CSUM2 + CZAEHLER/CNENNER
16002 CONTINUE
16001 CONTINUE
C
      CZAEHLER= - CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT*CSUM1
      CNENNER= CSUM2 * (1+CEXP( KF(RS,X) * CMPLX(0,-2*C) ))
      CNENNER= CNENNER * CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT
      CNENNER= CNENNER / KF(RS,X) / RHOQUADER
      CNENNER= 1 - CEXP( KF(RS,X) * CMPLX(0,-2*C) ) - CNENNER
      CNENNER= CNENNER * KF(RS,X) * RHOQUADER
      C2A=CZAEHLER/CNENNER
      RETURN
      END
```

```
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE GLGS2B(X,C2B)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /FLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMPLEX CSUM,CZAEHLER,CNENNER,C2B(0:100),CMATRIX(0:20,0:20),KF
      COMPLEX IN2B(0:100),R2B
      INTEGER M,N,I,KI,LI,K,L,II,JJ,RI,SI,RSI
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      DO 17002 M=0,RSMAX
      DO 17003 N=0,RSMAX
        CSUM=0
        DO 17004 KI=0,KMAX
        DO 17005 LI=0,LMAX
          CZAEHLER=ALPHA(M,KI,LI)*BETA(KI,LI,N)
          CNENNER =-4*PI*PI*X*X + CMPLX(1,-ETA) * (OMEGA(KI,LI)**2)
          CSUM=CSUM+CZAEHLER/CNENNER
17005   CONTINUE
17004   CONTINUE
        CSUM=CSUM * ( 1 + CEXP( KF(N,X) * CMPLX(0,-2*C) ) )
        CSUM=CSUM*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/KF(M,X)/RHOQUADER
        CMATRIX(M,N)= - CSUM
17003 CONTINUE
      CMATRIX(M,M)=CMATRIX(M,M)+1-CEXP(KF(M,X)*CMPLX(0,-2*C))
17002 CONTINUE
C
C LSG DES GLEICHUNGSSYSTEMS:  CMATRIX * C2B = IN2B
C
C UMSORTIEREN
C
      COMPLEX*16 MATRIX(1:9,1:9),INHOM(1:9,1:1),LSG(1:9,1:1)
      DO 17006 RI=0,RSMAX
      DO 17007 SI=0,RSMAX
         MATRIX(RI+1,SI+1)= CDBLE(CMATRIX(RI,SI))
17007 CONTINUE
17006 CONTINUE
C
C
      DO 17008 RSI=0,RSMAX
      INHOM(RSI+1,1)= CDBLE(R2B(X,RSI))
17008 CONTINUE
C
      IA=RSMAX+1
      IB=RSMAX+1
      IC=RSMAX+1
      IM=1
      IN=RSMAX+1
      REAL*8 WKSPCE(100)
      INTEGER IFAIL
C
C
      IFAIL=1
      CALL F04ADF(MATRIX,IA,INHOM,IB,IN,IM,LSG,IC,WKSPCE,IFAIL)
C
      IF (IFAIL .EQ. 0) GOTO 17010
      WRITE(2,*) ' --- SINGULAERES GLEICHUNGSSYSTEM ---'
```

```
      STOP
C
17010 DO 17011 RI=1,RSMAX+1
        C2B(RI-1)= CSNGL(LSG(RI,1))
17011 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION R2B(X,RS)
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X,ALPHA,FF,OMEGA
      INTEGER RS,KI,LI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,CNENNER,CZAEHLER,CHELP,KF
      CSUM=0
      DO 18001 KI=0,KMAX
      DO 18002 LI=0,LMAX
      CZAEHLER= ALPHA(RS,KI,LI) * FF(KI,LI)
      CNENNER=CMPLX(1,-ETA)*OMEGA(KI,LI)**2-4*PI*PI*X*X
      CSUM= CSUM + CZAEHLER/CNENNER
18002 CONTINUE
18001 CONTINUE
      CZAEHLER=CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT
      CNENNER=KF(RS,X)*RHOQUADER
      R2B=CSUM*CZAEHLER/CNENNER
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE GLGS3(X,ALSG,BLSG)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMPLEX KF,CSUMM,CSUMN,EPLUS,EMINUS,CFAK,HELP1
      COMPLEX*16 AMINUSN(1:24,1:24),BMINUSN(1:24,1:24)
      COMPLEX*16 KOEFFM(1:24,1:24),MMATRIX(1:24,1:24)
      COMPLEX*16 PROD1(1:24,1:24),PROD2(1:24,1:24),CSUM
      COMPLEX*16 EMATRIX(1:24,1:24),ALSG(1:24),BLSG(1:24)
      COMPLEX*16 INHOM1(1:24,1:1),INHOM2(1:24,1:1),INV(1:24,1:24)
      COMPLEX*16 LSG(1:24,1:1)
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,RSI
C
C BERECHNUNG DER MATRIZEN
C
      DO 19001 J=1,KLMAX
      DO 19002 JSTR=1,KLMAX
      CSUMM=CMPLX(0,0)
      CSUMN=CMPLX(0,0)
      DO 19003 RSI=0,RSMAX
      HELP1=CMPLX(0,C)*KF(RSI,X)
      EPLUS= CEXP(HELP1)
```

```
      EMINUS= CEXP(-HELP1)
      CFAK=ALPHA1(RSI,JSTR)*BETA1(J,RSI)/KF(RSI,X)/(EPLUS-EMINUS)
      CSUMM=CSUMM + 2*CFAK
      CSUMN=CSUMN + (EPLUS+EMINUS)*CFAK
19003 CONTINUE
      AMINUSN(J,JSTR)= -CDBLE(
     1                CSUMN*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/RHOQUADER)
      BMINUSN(J,JSTR)= -CDBLE(
     1                CSUMN*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/RHOQUADER)
      MMATRIX(J,JSTR)=CDBLE(
     1                CSUMN*RHOLUFT*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X/RHOQUADER)
19002 CONTINUE
      AMINUSN(J,J)=AMINUSN(J,J)
     1             +CDBLE(-9*PI*PI*X*X + CMPLX(1,-ETA)*OMEGA1(J)**2)
      BMINUSN(J,J)=BMINUSN(J,J)
     1             +CDBLE(-4*PI*PI*X*X + CMPLX(1,-ETA)*OMEGA1(J)**2)
19001 CONTINUE
C.....................................................................
C HILFGROESSEN ZUM LOESEN DER GLEICHUNGSSYSTEME
C.....................................................................
      REAL*8 WKSPCE(100)
      INTEGER IFAIL
C
C EINHEITSMATRIX
C
      DO 19110 II=1,KLMAX
      DO 19111 JJ=1,KLMAX
      EMATRIX(II,JJ)=CDBLE(CMPLX(0,0))
19111 CONTINUE
      EMATRIX(II,II)=CDBLE(CMPLX(1,0))
19110 CONTINUE
C
      IA=KLMAX
      IB=KLMAX
      IC=KLMAX
      IM=KLMAX
      IN=KLMAX
C---------------------------------------------------------------------
C BERECHNUNG DES 1. GLEICHUNGSSYSTEMS
C---------------------------------------------------------------------
C
C INVERSE VON AMINUSN BERECHNEN
C
      IFAIL=1
      CALL F04ADF(AMINUSN,IA,EMATRIX,IB,IN,IM,INV,IC,WKSPCE,IFAIL)
      IF (IFAIL .NE. 0) GOTO 19999
C
C MMATRIX * INVERSE AUSRECHNEN
C
      DO 19500 KI=1,KLMAX
      DO 19510 LI=1,KLMAX
        CSUM=CDBLE(CMPLX(0,0))
        DO 19520 II=1,KLMAX
          CSUM=CSUM+ MMATRIX(KI,II)*INV(II,LI)
19520   CONTINUE
        PROD1(KI,LI)= CSUM
19510 CONTINUE
19500 CONTINUE
```

```
C
C (MMATRIX * INVERSE) * MMATRIX AUSRECHNEN
C
      DO 19600 KI=1,KLMAX
      DO 19610 LI=1,KLMAX
        CSUM=CDBLE(CMPLX(0,0))
        DO 19620 II=1,KLMAX
          CSUM=CSUM+ PROD1(KI,II)*MMATRIX(II,LI)
19620   CONTINUE
        PROD2(KI,LI)=CSUM
19610 CONTINUE
19600 CONTINUE
C
C BMINUSN - MMATRIX * INVERSE * MMATRIX
C
      DO 19710 KI=1,KLMAX
      DO 19720 LI=1,KLMAX
        KOEFFM(KI,LI)= BMINUSN(KI,LI) - PROD2(KI,LI)
19720 CONTINUE
19710 CONTINUE
C
C INHOMOGENITAET = FF1 / RHOQUADER
C
      DO 19730 II=1,KLMAX
        INHOM1(II,1)= CDBLE(CMPLX((FF1(II)/RHOQUADER),0))
19730 CONTINUE
C
C LSG DES 1. GLEICHUNGSSYSTEMS
C
      IFAIL=1
      IM=1
      CALL F04ADF(KOEFFM,IA,INHOM1,IB,IN,IM,LSG,IC,WKSPCE,IFAIL)
      IF (IFAIL .NE. 0) GOTO 19999
C
      DO 19410 II=1,KLMAX
        ALSG(II)=LSG(II,1)
19410 CONTINUE
C-----------------------------------------------------------------
C LSG DES 2. GLEICHUNGSSYSTEMS
C-----------------------------------------------------------------
C
C INHOMOGENITAET =  - MMATRIX * ALSG
C
      DO 19810 KI=1,KLMAX
        CSUM=CDBLE(CMPLX(0,0))
        DO 19820 II=1,KLMAX
          CSUM=CSUM + MMATRIX(KI,II) * ALSG(II)
19820   CONTINUE
        INHOM2(KI,1)=-CSUM
19810 CONTINUE
C
      IFAIL=1
      CALL F04ADF(AMINUSN,IA,INHOM2,IB,IN,IM,LSG,IC,WKSPCE,IFAIL)
      IF (IFAIL .NE. 0) GOTO 19999
C
      DO 19300 II=1,KLMAX
        BLSG(II)=LSG(II,1)
19300 CONTINUE
```

```
C
      RETURN
19999 WRITE(2,*) ' --- SINGULAERES GLEICHUNGSSYSTEM ---'
      STOP
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION OMEGA1(KL)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L,KL
      K=INT((KL-1)/FLOAT(LMAX))+1
      L=MOD(KL,LMAX)
      OMEGA1=PI*PI*SQRT(BCONST/RHOQUADER)*( K*K/(A*A) + L*L/(B*B) )
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION ALPHA1(RS,KL)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L,KL,R,S,RS
      II=SMAX+1
      R=INT(RS/FLOAT(II))
      S=MOD(RS,II)
      K=INT((KL-1)/FLOAT(LMAX))+1
      L=MOD(KL,LMAX)
      IF ((MOD( ((K-R)*(L-S)) ,2 )) .EQ. 0) THEN
        ALPHA1=0
      ELSE
        IF ((R .EQ. 0) .OR. (S .EQ. 0)) FAKTOR=8
        IF ((R .EQ. 0) .AND. (S .EQ. 0)) FAKTOR=4
        IF ((R .NE. 0) .AND. (S .NE. 0)) FAKTOR=16
        ALPHA1=FAKTOR*(K*L)/PI/PI/FLOAT(K*K-R*R)/FLOAT(L*L-S*S)
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION FF1(KL)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L,KL
      REAL EPS1,EPS2
      EPS1=2/3.
      EPS2=1/2.
      K=INT((KL-1)/FLOAT(LMAX))+1
```

```
      L=MOD(KL,LMAX)
      FF1= 4/A/B * SIN(K*PI*EPS1) * SIN(L*PI*EPS2)
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION BETA1(KL,RS)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER K,L,R,S,RS,KL
      II=SMAX+1
      R=INT(RS/FLOAT(II))
      S=MOD(RS,II)
      K=INT((KL-1)/FLOAT(LMAX))+1
      L=MOD(KL,LMAX)
      IF (MOD( ((K+R)*(L+S)) ,2) .EQ. 0 ) THEN
        BETA1=0
      ELSE
        BETA1= 16*K*L / ( PI*PI * (K*K-R*R) * (L*L-S*S) )
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION LUFT4(X)
      COMMON /AUFL/XALT,DIFF,ALTLUFT
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,RI,SI,RSI
      REAL X
      COMPLEX CSUM,CFAK,KF1,KF1AC,KF1BC,W3,W4,W5,W6,P3,P4,P5,P6
      COMPLEX LUCO3,CHELP
C
C AUFLOESUNG VON "DIFF" HERTZ
C
      IF (X.LT.(XALT+DIFF)) THEN
        LUFT4=ALTLUFT
        RETURN
      ENDIF
      XALT=X
C
      CHELP=LUCO3(X)
C
      CSUM=0
      DO 20010 RI=0,RMAX
      DO 20020 SI=0,SMAX
      RSI=RI*(SMAX+1)+SI
      KF1BC= KF1(RSI,X,B,C)
      KF1AC= KF1(RSI,X,A,C)
C
      CFAK=CCOS(KF1BC*XO)*W4(RI,SI,X)
```

```
     1     -CMPLX(0,1)*CSIN(KF1BC*X0)*W3(RI,SI,X)
      CFAK=CFAK*COS(RI*PI*Y0/B)*COS(SI*PI*Z0/C)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT
      CSUM= CSUM+CFAK/KF1BC/CSIN(KF1BC*A)
C
C
      CFAK=CCOS(KF1AC*Y0)*W6(RI,SI,X)
     1     -CMPLX(0,1)*CSIN(KF1AC*Y0)*W5(RI,SI,X)
      CFAK=CFAK*COS(RI*PI*Y0/A)*COS(SI*PI*Z0/C)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT
      CSUM=CSUM+CFAK/KF1AC/CSIN(KF1AC*B)
20020 CONTINUE
20010 CONTINUE
      CSUM=CSUM+CHELP
      LUFT4=SQRT(CSUM*CONJG(CSUM))
      ALTLUFT=LUFT4
      WRITE(2,*) X,LUFT4
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      REAL FUNCTION OMEGA2(K,L,AA,BB)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0,AA,BB
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,K,L
      OMEGA2=PI*PI*SQRT(BCONST/RHOQUADER)*( K*K/(AA*AA)+L*L/(BB*BB))
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION KF1(RS,X,AA,BB)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /PARAM/X0,Y0,Z0,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0,AA,BB
      INTEGER RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER R,S,RS
      REAL X,HELP
      II=SMAX+1
      R=INT(RS/FLOAT(II))
      S=MOD(RS,II)
      HELP= 4*PI*PI*X*X/VL/VL - R*R*PI*PI/AA/AA - S*S*PI*PI/BB/BB
      IF (HELP .GT. 0) THEN
        KF1= CMPLX( SQRT(HELP),0 )
      ELSE
        KF1= CMPLX( 0,SQRT(-HELP))
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION P3(R,S,X)
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
```

```
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      INTEGER TS,T
      COMPLEX KF1,CSUM,CFAK,CTERM
      REAL X
      DO 99663 II=0,30
99663 CONTINUE
C
      CSUM=0
      DO 21010 T=0,RMAX
        TS=T*(SMAX+1)+S
        CTERM=KF1(TS,X,A,B)*C-R*PI
        CFAK=CRSA(TS)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(TS)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM=CSUM+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CTERM=KF1(TS,X,A,B)*C+R*PI
        CFAK=CRSA(TS)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(TS)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM=CSUM+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
21010 CONTINUE
C
      IF (R.EQ.0) THEN
        P3=CSUM/2.
      ELSE
        P3=CSUM
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION P4(R,S,X)
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      INTEGER TS,T
      COMPLEX KF1,CSUM,CSUM1,CFAK,CTERM
      REAL X
C
      CSUM=0
      DO 21020 T=0,RMAX
        TS=T*(SMAX+1)+S
        CTERM=KF1(TS,X,A,B)*C-R*PI
        CFAK=CRSA(TS)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(TS)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM1=CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CTERM=KF1(TS,X,A,B)*C+R*PI
        CFAK=CRSA(TS)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(TS)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM1=CSUM1+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CSUM= CSUM + (-1)**T*CSUM1
21020 CONTINUE
C
      IF (R.EQ.0) THEN
        P4=CSUM/2.
```

```
      ELSE
        P4=CSUM
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION P5(R,S,X)
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      INTEGER RT,T
      COMPLEX KF1,CSUM,CFAK,CTERM
      REAL X
C
      CSUM=0
      DO 21030 T=0,SMAX
        RT=R*(SMAX+1)+T
        CTERM=KF1(RT,X,A,B)*C-S*PI
        CFAK=CRSA(RT)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(RT)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM=CSUM+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CTERM=KF1(RT,X,A,B)*C+S*PI
        CFAK=CRSA(RT)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1       -DRSA(RT)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM=CSUM+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
21030 CONTINUE
C
      IF (R.EQ.0) THEN
        P5=CSUM/2.
      ELSE
        P5=CSUM
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION P6(R,S,X)
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      INTEGER RT,T
      COMPLEX KF1,CSUM,CSUM1,CFAK,CTERM
      REAL X
C
      CSUM=0
      DO 21040 T=0,SMAX
        RT=R*(SMAX+1)+T
        CTERM=KF1(RT,X,A,B)*C-S*PI
        CFAK=CRSA(RT)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
```

```
     1        -DRSA(RT)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM1=CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CTERM=KF1(RT,X,A,B)*C+S*PI
        CFAK=CRSA(RT)*CEXP(-CMPLX(0,1)*CTERM)
     1        -DRSA(RT)*CEXP(+CMPLX(0,1)*CTERM)
        CSUM1=CSUM1+ CMPLX(0,1)/CTERM*CFAK
        CSUM= CSUM + (-1)**T*CSUM1
21040 CONTINUE
C
      IF (R.EQ.0) THEN
        P6=CSUM/2.
      ELSE
        P6=CSUM
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION W3(R,S,X)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      COMPLEX P3,CSUM1,CSUM2,CNENN,CZAEHL
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      REAL X
      CSUM1=0
      DO 23010 R=0,RMAX
      DO 23020 S=0,SMAX
        CSUM2=0
        DO 23030 K=0,KMAX
        DO 23040 L=0,LMAX
          RS=R*(SMAX+1)+S
          CZAEHL=ALPHA(RS,K,L)*BETA(K,L,RS)*CMPLX(1,0)
          CNENN=-4*PI*PI*X*X+CMPLX(1,-ETA)*OMEGA2(K,L,B,C)
          CSUM2=CSUM2 + CZAEHL/CNENN
23040   CONTINUE
23030   CONTINUE
        CSUM1=CSUM1 + P3(R,S,X) * CSUM2
23020 CONTINUE
23010 CONTINUE
      W3= - CSUM1
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION W4(R,S,X)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMPLEX P4,CSUM1,CSUM2,CNENN,CZAEHL
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      REAL X
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      CSUM1=0
      DO  4010 R=0,RMAX
      DO 24020 S=0,SMAX
        CSUM2=0
```

```
        DO 24030 K=0,KMAX
        DO 24040 L=0,LMAX
          RS=R*(SMAX+1)+S
          CZAEHL=ALPHA(RS,K,L)*BETA(K,L,RS)*CMPLX(1,0)
          CNENN=-4*PI*PI*X*X+CMPLX(1,-ETA)*OMEGA2(K,L,B,C)*2/3.
          CSUM2=CSUM2 + CZAEHL/CNENN
24040   CONTINUE
24030   CONTINUE
        CSUM1=CSUM1 + P4(R,S,X) * CSUM2
24020 CONTINUE
24010 CONTINUE
      W4= + CSUM1
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION W5(R,S,X)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMPLEX P5,CSUM1,CSUM2,CNENN,CZAEHL
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      REAL X
      CSUM1=0
      DO 25010 R=0,RMAX
      DO 25020 S=0,SMAX
        CSUM2=0
        DO 25030 K=0,KMAX
        DO 25040 L=0,LMAX
          RS=R*(SMAX+1)+S
          CZAEHL=ALPHA(RS,K,L)*BETA(K,L,RS)*CMPLX(1,0)
          CNENN=-4*PI*PI*X*X+CMPLX(1,-ETA)*OMEGA2(K,L,A,C)
          CSUM2=CSUM2 + CZAEHL/CNENN
25040   CONTINUE
25030   CONTINUE
        CSUM1=CSUM1 + P5(R,S,X) * CSUM2
25020 CONTINUE
25010 CONTINUE
      W5= - CSUM1
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION W6(R,S,X)
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMPLEX P6,CSUM1,CSUM2,CNENN,CZAEHL
      INTEGER R,S,RS,K,L,KMAX,LMAX,RMAX,SMAX,RSMAX,KLMAX
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,X0,Y0,Z0
      REAL X
      CSUM1=0
      DO 26010 R=0,RMAX
      DO 26020 S=0,SMAX
        CSUM2=0
        DO 26030 K=0,KMAX
        DO 26040 L=0,LMAX
```

```
          RS=R*(SMAX+1)+S
          CZAEHL=ALPHA(RS,K,L)*BETA(K,L,RS)*CMPLX(1,0)
          CNENN=-4*PI*PI*X*X+CMPLX(1,-ETA)*OMEGA2(R,L,B,C)*2/3.
          CSUM2=CSUM2 + CZAEHL/CNENN
26040   CONTINUE
26030   CONTINUE
        CSUM1=CSUM1 + P6(R,S,X) * CSUM2
26020 CONTINUE
26010 CONTINUE
      W6= + CSUM1
      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      COMPLEX FUNCTION LUCO3(X)
      COMMON /AUFL/XALT,DIFF,ALTLUFT
      COMMON /PARAM/XO,YO,ZO,MODELL
      COMMON /KLRS/KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      COMMON /KONST/A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST
      COMMON /CRSDRS/CRSA,DRSA
      REAL A,B,C,PI,VL,RHOLUFT,RHOQUADER,ETA,BCONST,XO,YO,ZO
      INTEGER KMAX,LMAX,KLMAX,RMAX,SMAX,RSMAX
      REAL X
      INTEGER RI,SI,RSI
      COMPLEX CSUM,CFAKTOR,C1,KF,EPLUS,EMINUS,CRS,DRS
      COMPLEX CRSA(0:100),DRSA(0:100)
      COMPLEX*16 ALSG(1:24),BLSG(1:24)
C
      CSUM=0
C
      CALL GLGS3(X,ALSG,BLSG)
C
      DO 29001 RSI=0,RSMAX
      CRS=0
      DRS=0
      EPLUS=CEXP(CMPLX(0,C)*KF(RSI,X))
      EMINUS=CEXP(-CMPLX(0,C)*KF(RSI,X))
      DO 29002 JJ=1,KLMAX
      CRS=CRS+ALPHA1(RSI,JJ)*(-EPLUS*CSNGL(ALSG(JJ))+CSNGL(BLSG(JJ)))
      DRS=DRS+ALPHA1(RSI,JJ)*(-EMINUS*CSNGL(ALSG(JJ))+CSNGL(BLSG(JJ)))
29002 CONTINUE
      CRS=CRS*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/KF(RSI,X)/(EPLUS-EMINUS)
      DRS=DRS*CMPLX(0,1)*4*PI*PI*X*X*RHOLUFT/KF(RSI,X)/(EPLUS-EMINUS)
C
      II=SMAX+1
      RI= INT(RSI/FLOAT(II))
      SI=MOD(RSI,II)
      CSUM= CSUM + COS(RI*PI*XO/A)*COS(SI*PI*YO/B)
     1             *(CRS*CEXP(-KF(RSI,X)*CMPLX(0,ZO))
     2              +DRS*CEXP(KF(RSI,X)*CMPLX(0,ZO)))
      CRSA(RSI)=CRS
      DRSA(RSI)=DRS
29001 CONTINUE
C
      LUCO3=CSUM
      RETURN
      END
```