

Zur Bemessung von Sandwichwänden aus Stahlbeton bei Berücksichtigung der Tragwirkung der Vorsatzschale

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR (Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

von

Arnaud Pavis d'Escurac

aus Straßburg, Frankreich

Dekan:	Prof. Dr.-Ing. H. Sadegh-Azar
1. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. J. Schnell
2. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Kurz

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Januar 2021

Eppstein 2020

(D 386)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Jürgen Schnell am Fachgebiet Massivbau und Baukonstruktion der Technischen Universität Kaiserslautern. Dieses Vorwort bezieht sich nicht nur auf die vorliegende Arbeit, sondern nimmt im Allgemeinen Bezug auf meine Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter. Da beides sehr eng verknüpft ist und für mich unmittelbar zusammengehört, lässt sich das eine nicht vom anderen trennen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Jürgen Schnell möchte ich für die Möglichkeit zur Promotion sowie für seine fachliche und persönliche Unterstützung danken. Die Vielfalt der mir anvertrauten Aufgaben, die Lehre, die Bearbeitung von Drittmittelprojekten und die Forschungsarbeit hat mich als Ingenieur mehr geprägt als meine Studienzeit zuvor. Die Diversität der an unserem Fachgebiet erforschten wissenschaftlichen Themen, von der Dübeltechnik, über R-Beton bis hin zu filigranen Bauteilen aus ultrahochfestem Beton, deckt eine große Bandbreite der in der Bauingenieurwelt aktuell diskutierten Forschungsthemen ab und bietet ein optimales Umfeld zur intellektuellen Horizonterweiterung und persönlichen Entwicklung. Ich habe, wie meine damaligen Kollegen auch, von diesem Reichtum sehr profitiert.

Wenn ich nur drei markante Tätigkeiten aus meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter behalten dürfte, würde ich an erster Stelle meine Tätigkeit als Übungsleiter in der Lehre von Baukonstruktion I bis zu Stahl- und Spannbetonbau V erwähnen. Der Austausch mit den Studenten war fachlich und menschlich eine große Bereicherung, deren Intensität sich mit einem Zitat von Jules Michelet erfassen lässt: „Die Lehre ist eine Freundschaft“.

An zweiter Stelle möchte ich die Forschungszeit, die mit der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit verbunden ist, erwähnen und die eine lehrreiche und einzigartige Etappe in der Laufbahn eines Bauingenieurs darstellt. Die Suche nach dem richtigen Modell, nach der richtigen Gleichung weist keinen linear aufsteigenden Verlauf auf, sondern kennt Erfolge und Rückschläge. Auf diesem unruhigen Weg konnte ich neben der Unterstützung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Jürgen Schnell auch auf diejenige von Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kurz zählen, der die Funktion eines Zweitgutachters bei weitem übertraf und beratend an meiner Seite stand. Auch bei meinem langjährigen Zimmerkollegen und Freund Herrn Dr.-Ing. Torsten Weiler möchte ich mich für den Austausch in Lehre und Forschung, für seine akribische Korrekturlesung dieser Arbeit und für alle schönen gemeinsamen Momente bedanken.

An dritter Stelle findet die Durchführung von Versuchen jeglicher Art im Labor für konstruktiven Ingenieurbau der TU Kaiserslautern ihren Platz. Die Anzahl und Komplexität der Maschinen, von denen die größten wahrhafte Stahlkolosse mit übermenschlichen Kräften sind, hat mich immer fasziniert. Nur selten stehen einem Bauingenieur so viele Werkzeuge für so viele unterschiedliche Zwecke zur Verfügung. Es ist aber jedem bewusst, dass die zahlreichen Prüfeinrichtungen, auch wenn an der Spitze der Technik, ihr Potential nur durch das Talent des technischen Laborpersonals entfalten können. An dieser Stelle sei Herrn Lars Jess für die Planung und Einstellung der Messtechnik und Prüfgeräte, Herrn Dieter Bockhorn und Herrn Oliver Mattheis für den Aufbau der unterschiedlichsten Versuchsstände und Herrn Rainer Becker für die Herstellung von Probekörpern mit oft sehr komplexen Geometrien herzlich gedankt. Auch die studentischen Hilfskräfte seien dankend begrüßt, die bei der Umsetzung der Projekte eine unabdingbare Hilfe dargestellt haben. Meinen Freund Herrn Dipl.-Ing. Michael Heckmann habe ich in diesem Zusammenhang kennengelernt. Er half mir bei der Durchführung zahlreicher Versuche und gab mit FE-Berechnungen im Rahmen seiner Masterarbeit die Bestätigung von Kernaspekten dieser analytischen Arbeit. Ich danke ihm herzlich dafür.

Meine dankende Erinnerung gilt auch Herrn Erich Kastner, Erfinder der Edelstahlwelle, die meine Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter geprägt hat. Er verließ uns viel zu früh bei einem tragischen Unfall. Ich bedanke mich auch bei Herrn Jürgen Bauer, der seitdem den Geist der Firma Kappema verkörpert.

Viel wichtiger als diese Arbeit ist meine Familie, die einmal mehr durch diese Herausforderung die Möglichkeit hatte, ihre Liebe und Unterstützung zu zeigen. An vorderster Front war meine Frau immer an meiner Seite. Weil sie mir täglich die Energie zum Aufstehen vor der langen Fahrt von Mainz nach Kaiserslautern gab, weil sie mir immer rechtzeitig eine Tasse Kaffee vor dem Einschlafen beim Programmieren brachte, weil sie meine mangelhafte Beteiligung an den Haushaltsaufgaben infolge dieser Arbeit erduldet hat, weil sie mit mir gegen Word bei der Formatierung dieser Arbeit kämpfte und natürlich für alle nicht prosaischen Gründe, die ich mich nicht traue zu schreiben, weil ich nicht literarisch begabt genug bin, um diese richtig wiederzugeben.

Eppstein, April 2020

Arnaud Pavis d'Escurac

Arnaud Pavis d'Escurac

**Zur Bemessung von Sandwichwänden aus
Stahlbeton bei Berücksichtigung der Tragwirkung
der Vorsatzschale**

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	vii
Abstract	viii
Formelzeichen, Variablen und Abkürzungen	ix
1 Einleitung	1
2 Druckglieder aus Stahlbeton	3
2.1 Physikalische Zusammenhänge	3
2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz	6
2.2.1 Allgemeines Verfahren	7
2.2.1.1 Rechenverfahren nach DIN 1045-1	7
2.2.1.2 DIN EN 1992-1-1	10
2.2.1.3 Eigener Materialansatz für die Bemessung	12
2.2.2 Verfahren mit Nennkrümmung	14
2.3 Eigener Bemessungsansatz	17
2.3.1 Linearer Zustand	17
2.3.2 Nichtlinearer Zustand	19
2.3.2.1 Bestimmung der Steifigkeit in einer materiell nichtlinearen Querschnittskonfiguration	19
2.3.2.2 Berücksichtigung unterschiedlicher Steifigkeiten über die Druckgliedhöhe	46
2.3.3 Beurteilung des Sicherheitsniveaus und der Wirtschaftlichkeit.....	50
3 Erweiterung der Sandwichtheorie	57
3.1 Stand des Wissens	57
3.1.1 Annahmen zur Verwendung der Sandwichtheorie	57
3.1.2 Berücksichtigung eines einwirkenden Biegemomentes.....	58
3.1.3 Berücksichtigung einer einwirkenden Normalkraft.....	59

3.2	Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft	61
3.2.1	Physikalischer Zusammenhang und mathematische Herleitung des Ansatzes	61
3.2.2	Analyse des entwickelten Ansatzes	67
3.3	Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften	70
3.3.1	Lösung der Differentialgleichung	70
3.3.1.1	Allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung	70
3.3.1.2	Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für unterschiedliche praxisrelevante Einwirkungen	72
3.3.1.3	Berücksichtigung der Randbedingungen und allgemeine Lösung der Differentialgleichung	74
3.3.1.4	Herleitung der Schnittgrößen und geometrischer Größen	77
3.3.2	Analyse der erweiterten Sandwichtheorie mit linearen Materialeigenschaften	81
3.3.2.1	Einfluss des Lastangriffspunkts	81
3.3.2.2	Einfluss der Kernschichtschubsteifigkeit	84
3.3.2.3	Einfluss der Kernschichtdicke	87
3.4	Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften	94
3.4.1	Bestimmung der Querschnittssteifigkeit in einem Zugglied mit nichtlinearen Querschnittskonfigurationen	94
3.4.2	Berechnungsprogramm für Sandwichwände – TiToU	109
3.4.3	Parameterstudie	113
4	Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen	121
4.1	Einleitung	121
4.2	Materialeigenschaften	121
4.2.1	Betoneigenschaften	121
4.2.2	Dämmstoffeigenschaften	123

4.2.2.1	Einleitung	123
4.2.2.2	Versuchsaufbau und Messtechnik	123
4.2.2.3	Versuchskörper.....	124
4.2.2.4	Ergebnisse.....	124
4.2.3	Verbindungsmittel.....	126
4.2.3.1	Verwendete Verbindungsmittel	126
4.2.3.2	Versuchsaufbau und Messtechnik	127
4.2.3.3	Versuchskörper.....	129
4.2.3.4	Ergebnisse.....	129
4.3	Versuchsaufbau und Messtechnik für großformatige Druckversuche.....	130
4.4	Ergebnisse und Nachrechnung von Druckversuchen an Stahlbetonwänden	132
4.4.1	Beschreibung der Versuchskörper	132
4.4.2	Ergebnisse	133
4.5	Nachrechnung von Druckversuchen an Sandwichwänden	135
4.5.1	Beschreibung und Herstellung der Versuchskörper	135
4.5.1.1	Beschreibung der Versuchskörper.....	135
4.5.1.2	Herstellung der Versuchskörper	136
4.5.2	Ergebnisse	138
5	Bemessungsbeispiel	145
5.1	Einleitung.....	145
5.2	Konstruktive Anforderungen und Materialeigenschaften	146
5.2.1	Konstruktive Anforderungen	146
5.2.2	Materialeigenschaften und Dauerhaftigkeit	148
5.2.2.1	Betonfestigkeitsklassen und Betondeckung.....	148
5.2.2.2	Kernschichteigenschaften.....	150
5.3	Einwirkungen	152
5.3.1	Ständige und veränderliche Einwirkungen	152

5.3.2	Lastfall Wind.....	153
5.3.3	Kriecheinflüsse	153
5.3.4	Zusammenfassung	154
5.4	Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit	154
5.4.1	Nachweis für Biegung und Normalkraft	154
5.4.2	Nachweis für Querkraft.....	155
5.4.3	Nachweise der Verbindungsmittel	155
5.5	Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit.....	156
5.5.1	Begrenzung der Rissbildung	156
5.5.2	Begrenzung der Verformung	156
5.5.3	Begrenzung der Verformung der Verbindungsmittel	156
5.6	Konstruktive Aspekte	157
5.6.1	Tragschale.....	157
5.6.2	Vorsatzschale.....	157
5.7	Schlussfolgerung	158
6	Zusammenfassung und Ausblick.....	159
	Literaturverzeichnis	161
	Lebenslauf	165

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der analytischen, integralen und nichtlinearen Bemessung von Sandwichwänden mit Stahlbetonschalen unter vertikaler und horizontaler Belastung nach Theorie II. Ordnung und führt zu der Entwicklung eines in der Programmiersprache VBA implementierten Bemessungsprogramms: TiToU.

Das Fundament für den Aufbau dieses Bemessungsprogramms für Sandwichwände bildet ein eigenes nichtlineares Bemessungsverfahren für Stahlbetondruckglieder, das auf einer bilinearen Approximation der Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons beruht und dessen Sicherheitsniveau den Standards der *DIN EN 1990* entspricht. Dieses Bemessungsverfahren ist in einem Subprogramm von TiToU implementiert und bestimmt für jede Schnittgrößenkonstellation in einer Stahlbetonschale den entsprechenden Dehnungszustand in ihrem Querschnitt. Die Nichtlinearitäten aufgrund der Beton- und Bewehrungseigenschaften sowie der Rissbildung werden berücksichtigt und führen zu nichtlinearen Gleichungssystemen, deren Lösung nicht geschlossen, sondern algorithmisch mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren erfolgt.

Des Weiteren erfordert die integrale Bemessung von Sandwichwänden die Herleitung eines Ansatzes zur Berücksichtigung der Wirkungslinie der Normalkraft in die Tragschale und der aufgrund ihrer Exzentrizität induzierten Biegebeanspruchung. Dieser analytisch hergeleitete Ansatz beschreibt die Aktivierung der Vorsatzschale, d. h. den Krafttransfer zwischen der Tragschale und der Vorsatzschale über die Sandwichwandhöhe.

Die Differentialgleichung, die das physikalische Verhalten einer Sandwichwand unter Normalkraft- und Biegebeanspruchung wiedergibt, wird analytisch mit Exponentialansätzen vom Programm TiToU gelöst. Zum ersten Mal wird u. a. folgende physikalische Besonderheit erkannt und nachgewiesen: Vergleicht man zwei Sandwichwände unter vertikaler Last, die sich lediglich durch ihre Kernschichtschubsteifigkeit unterscheiden, weist bei niedrigen Lastniveaus diejenige mit der niedrigeren Kernschichtschubsteifigkeit das kleinere Verformungsniveau auf, während oberhalb einer gewissen Last diejenige mit der größten Kernschichtschubsteifigkeit das kleinste Verformungsniveau erfährt. Dies bringt zwei Anschauungsweisen des gleichen physikalischen Problems in Einklang beziehungsweise ordnet diese zwei getrennten Lastbereichen zu.

Diese Arbeit beinhaltet eine theoretische Parameterstudie, in der der Einfluss der Schlankheit, der Lastexzentrizität, der Kernschichtdicke und der Kernschichtschubsteifigkeit untersucht wird, und bei der alle möglichen Versagensarten rechnerisch Berücksichtigung finden. Die Bestätigung der Modelle erfolgt durch großformatige Bauteilversuche, die im Labor für konstruktiven Ingenieurbau der TU Kaiserslautern durchgeführt wurden. Schließlich werden im Rahmen eines Bemessungsbeispiels die aktuell nach Norm gültige Bemessungsmethode, die nur die Tragschale berücksichtigt, und das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Bemessungskonzept, das den stabilisierenden Einfluss der Vorsatzschale und der Kernschicht auf das Tragverhalten der Tragschale unter kombinierter Biege- und Normalkraftbeanspruchung berücksichtigt, verglichen. Hierbei wird ersichtlich, dass ein gemäß dem Standard von *DIN EN 1992-1-1* gefordertes Sicherheitsniveau mit dem hier dargestellten Bemessungskonzept mit dünneren Querschnittsabmessungen eingehalten werden kann.

Abstract

This thesis deals with the analytical, non-linear and integral design of sandwich wall panels with concrete layers under vertical and horizontal loads considering second order theory. For the purpose of this thesis a structural design program TiToU, which is implemented in VBA, has been developed.

The basis of this structural design program for sandwich wall panels is the development of a non-linear design procedure for concrete walls, which depends on a bilinear approximation of the concrete's stress-strain curve and whose safety and economy levels satisfy the Eurocode 2 standards. This design procedure is implemented in a subprogram of TiToU and determines for every possible load configuration in a concrete layer the corresponding strain level in the cross section. The nonlinearities due to the properties of concrete, reinforcing steel and cracking are taken into consideration. This leads to nonlinear systems of equations without a closed form solution, which are algorithmically solved using the multidimensional Newton method.

Furthermore, the integral design of sandwich walls requires the development of a method to take the eccentricity of the axial load and the induced bending load into account. This analytical method describes the activation of the external concrete layer, i.e. the force flow between the internal and external concrete layer along the wall.

The differential equation describing the physical behaviour of a sandwich wall panel under axial and bending load is analytically solved with an exponential solution by the program TiToU. For the first time it is proved – among other key research points - that under low levels of vertical load, a lower shear stiffness of the insulating core layer results in a smaller deformation while above a certain vertical load, a larger deformation is observed on the wall. This conciliates two points of view of the same physical problem, respectively sorting them to two different load level areas. The following theoretical questions can now be answered: above which shear stiffness, in relation to the load capacity, is it worth considering replacing a monolithical wall with a sandwich wall? And above which loading point in the panel does the deflection direction change?

This thesis contains a theoretical parameter study in which the influence of the slenderness ratio, load eccentricity, core layer thickness and shear stiffness are analysed while every possible failure mechanism is taken into account. The confirmation of the model was carried out with large scale tests in the laboratory for structural engineering of the Kaiserslautern University. Finally, in a design case study, the current construction design code, which only takes the internal concrete layer into consideration, is compared to the author's design method, which takes advantage of the stiffening effect of the external concrete layer on the internal layer by calculations under both bending and axial loads. This case study clearly demonstrates that the safety level of the Eurocode 2 can be guaranteed with thinner cross section dimensions using the author's design method.

Formelzeichen, Variablen und Abkürzungen

Große lateinische Buchstaben

A	Fläche
A_i	ideelle Querschnittsfläche
A_s	Bewehrungsfläche
A_{s1}	Fläche der unteren Bewehrungslage
A_{s2}	Fläche der oberen Bewehrungslage
B	Biegesteifigkeit
D	Dehnsteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
I	Trägheitsmoment
I_i	ideelles Trägheitsmoment
K_r	Beiwert in Abhängigkeit der Normalkraft
K_φ	Beiwert zur Berücksichtigung des Kriechens
M	Moment
N	Normalkraft
P	Normalkraft
P_k	Knicklast
Q	Querkraft
$X_{1,2}$	Nullstellen eines charakteristischen Polynoms

Kleine lateinische Buchstaben

a	Abstand / Abmessung
b	Breite
c	Beiwert in Abhängigkeit des Krümmungsverlaufs / Betondeckung (concrete cover)
d	statische Nutzhöhe
d_1	Betondeckung der unteren Bewehrungslage bezogen auf das Achsmaß der Bewehrungsstäbe
d_2	Betondeckung der oberen Bewehrungslage bezogen auf das Achsmaß der Bewehrungsstäbe

Formelzeichen, Variablen und Abkürzungen

d'	Betondeckung der oberen Bewehrungslage bezogen auf das Achsmaß der Bewehrungsstäbe
d_K	Dicke der Kernschicht
d_{TS}	Dicke der Tragschale
d_{VS}	Dicke der Vorsatzschale
e	Exzentrizität
e_o	Exzentrizität infolge Theorie I. Ordnung
e_i	Exzentrizität infolge Imperfektionen
e_2	Exzentrizität infolge Theorie II. Ordnung
f_{cd}	Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
f_{ck}	charakteristischer Wert der Betondruckfestigkeit
f_{cm}	Mittelwert der Betondruckfestigkeit
f_{ctd}	Bemessungswert der Betonzugfestigkeit
f_{ctk}	charakteristischer Wert der Betonzugfestigkeit
f_{ctm}	Mittelwert der Betonzugfestigkeit
f_{yd}	Bemessungswert der Streckgrenze des Betonstahls
f_{yk}	charakteristischer Wert der Streckgrenze des Betonstahls
l	Bauteillänge bzw. Bauteilhöhe
n	Exponent
q	Linienlast
r	Radius
t	Bauteildicke
w	Verformung senkrecht zur Bauteillänge
w_{max}	Maximalwert der Verformung

Griechische Buchstaben

α	Winkel / Faktor / bezogener Achsabstand
β	Winkel
γ	Verzerrungswinkel, Teilsicherheitsbeiwert
γ_K	Verzerrungswinkel der Kernschicht
Δ	Diskriminante / Differenz
ε	Dehnung
x	

ϵ_c	Betondehnung
ϵ_{c1}	Betondehnung unter der Maximalspannung f_c
ϵ_{c2}	Betondehnung beim Erreichen der Maximalfestigkeit (Parabel-Rechteck-Diagramm)
ϵ_{c3}	Betondehnung beim Erreichen der Maximalfestigkeit (bilineare Spannungs-Dehnungs-Linie)
ϵ_{cu}	Rechnerische Bruchdehnung des Betons
κ	Krümmung
λ	Schlankheit / Eigenwert / Polynomwurzel
σ	Spannung
τ	Schubspannung
φ_{eff}	effektive Kriechzahl

Abkürzungen

<i>det</i>	Determinante
<i>EdStWe</i>	Edelstahlwelle
<i>EPS</i>	Expandierter Polystyrol-Hartschaum
<i>GFK</i>	Glasfaserverstärkter Kunststoff
<i>K</i>	Kernschicht
<i>S</i>	Sandwich
<i>TS</i>	Tragschale
<i>VS</i>	Vorsatzschale
<i>XPS</i>	Extrudierter Polystyrol-Hartschaum

1 Einleitung

Die Bemessung von Sandwichwänden mit Stahlbetonschalen ist nach aktuellem Stand der Technik in mehrfacher Hinsicht unzureichend.

Zum einen wird die Aufnahme der vertikalen Lasten rechnerisch allein der Innenschale (Tragschale) zugewiesen. Der stabilisierende Einfluss der Außenschale (Vorsatzschale) auf das Tragverhalten der Innenschale unter vertikaler Last wird bei statischen Berechnungen nicht berücksichtigt. De facto sind Innenschalen immer überdimensioniert.

Zum anderen werden bei der Bemessung der Verbindungsmittel zwischen beiden Schalen die aus den vertikalen Lasten resultierenden Beanspruchungen nicht berücksichtigt. Dadurch wird das Beanspruchungsniveau der Verbindungsmittel regelmäßig unterschätzt.

Diese Arbeit möchte die nichtlineare integrale Bemessung von Sandwichwänden (siehe Abb. 1.1) ermöglichen. Dazu ist es erforderlich, die aktuell bei der Berücksichtigung der Einwirkungen gehandhabte Trennung zwischen der Normalkraft, die außerdem nur der Innenschale zugeordnet wird, und der Momentenbeanspruchung zu beenden.

Der Autor erarbeitet im Rahmen dieser Arbeit die erforderlichen physikalischen Zusammenhänge zur Erweiterung der Sandwichtheorie. Diese bildet die Grundlage für die Entwicklung eines eigenen Berechnungs- und Bemessungsprogramms für Sandwichwände– TiToU (*Pavis d'Escurac 2018*), das für die Nachrechnung von im Labor für konstruktiven Ingenieurbau der TU Kaiserslautern durchgeführten großformatigen Druckversuchen und schließlich im Rahmen eines Bemessungsbeispiels verwendet wird.

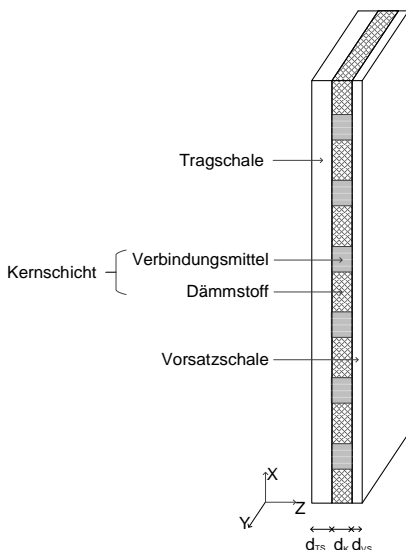


Abb. 1.1: Sandwichwand mit Trag- und Vorsatzschale aus Stahlbeton

2 Druckglieder aus Stahlbeton

Der Wunsch, den Weg zur nichtlinearen integralen Bemessung von Sandwichwänden zu ebnen, erfordert u. a. die Anpassung der Bemessung von Druckgliedern aus Stahlbeton, die in dieser Arbeit als Teil von Sandwichwänden betrachtet werden, an die Anforderungen des selbst entwickelten Bemessungsvorgangs für Sandwichwände (siehe Kapitel 3), bei dem die Berücksichtigung unterschiedlicher Steifigkeiten über die Bauteilhöhe nicht numerisch erfolgt.

In Abschnitt 2.1 werden grundlegende Betrachtungen zu physikalischen Gesetzmäßigkeiten bei Druckgliedern aus Stahlbeton angestellt, um dieser Arbeit den theoretischen und zugleich begrifflichen Rahmen zu geben.

In Abschnitt 2.2 wird zunächst das normative Umfeld für nicht in Sandwichwänden befindliche Druckglieder beschrieben und letztendlich ein eigener Vorschlag für die Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton formuliert, der gegenüber der normativ für das Material Beton vorgesehenen Spannungs-Dehnungs-Linie eine Vereinfachung darstellt.

Im Abschnitt 2.3 wird ein Bemessungsansatz für Druckglieder aus Stahlbeton in Sandwichwänden entwickelt und seine Anwendung für nicht in Sandwichwänden befindliche Druckglieder aus Stahlbeton mit den normativ geregelten existierenden Bemessungsverfahren in Hinsicht auf das erzielbare Sicherheits- und Wirtschaftlichkeitsniveau verglichen.

2.1 Physikalische Zusammenhänge

Nachfolgend wird unabhängig vom aktuellen normativen Umfeld und von den unterschiedlichen jeweiligen Nachweiskonzepten das physikalische Verhalten von Druckgliedern erläutert.

Bei einer mittigen Druckbeanspruchung erfährt ein Stab aus einem homogenen, sich linear-elastisch verhaltenden Material eine Verkürzung, jedoch keine Verformung senkrecht zu seiner Längsachse. Er bleibt in dieser stabilen Gleichgewichtslage bis zum Erreichen eines gewissen Lastniveaus, ab dem eine Verzweigung des Lastpfades erfolgt, und das mit der Eulerschen Knicklast gekennzeichnet wird. Der Pfad ohne Verformung senkrecht zur Längsachse weist nun eine labile Gleichgewichtslage auf, während die stabile Gleichgewichtslage nur mit großen Verformungen senkrecht zur Längsachse gefunden werden kann. Bei diesen großen Verformungen gilt die für kleine Verschiebungen aufgestellte Differentialgleichung (siehe ① in Tab. 2.1) nicht mehr. Beschrieben werden könnte der oberhalb der kritischen Last stabile Lastpfad nur anhand der von Euler als *Elastica* bezeichneten Kurve (*Gross u. a. 2011*). Auf die *Elastica* wird nicht näher eingegangen und der stabile Lastpfad oberhalb der Knicklast wird nachfolgend näherungsweise horizontal dargestellt (siehe ① in Abb. 2.1). Die Eulersche Knicklast hängt von der Länge des Stabes, seiner Biegesteifigkeit und seinen Lagerungsbedingungen ab. Es existieren vier Eulerfälle, die sich durch ihre Lagerungsbedingungen voneinander unterscheiden. Der Eulerfall I entspricht einem auskragenden Stab, der u. a. dem Modellstützenverfahren zugrunde liegt (*Kordina u. Quast 2001*). Der Eulerfall II korrespondiert mit einem Pendelstab. Die dazugehörigen, beidseitig gelenkigen Lagerungsbedingungen bilden eine oft verwendete, auf der si-

chere Seite liegende Vereinfachung für die praktische Bemessung von Stahlbetonstützen. Der Eulerfall III stellt einen einerseits eingespannten und andererseits gelenkig gelagerten Stab dar. Der Eulerfall IV entspricht einem beidseitig voll eingespannten Stab. Beidseitig elastisch eingespannte Stäbe mit eventuell unterschiedlichen Einspanngraden weisen Knicklasten auf, die immer größer als diejenigen eines Pendelstabes und immer kleiner als diejenigen eines beidseitig voll eingespannten Stabes sind.

Rein mittig gedrückte Stäbe existieren nur theoretisch. In der Praxis ruft eine einwirkende Normalkraft immer ein Moment hervor. Grund dafür ist, dass weder ein Druckglied perfekt geradlinig noch eine Lastenleitung perfekt zentrisch sein kann. Berücksichtigt man diese ungewollten Exzentrizitäten ohne die Theorie I. Ordnung zu verlassen, verdreht sich der Belastungsverlauf ① in Abb. 2.1 um den Koordinatenursprung. Sein linearer Verlauf ist gültig, solange das Material sich weiterhin rein linear-elastisch verhält und die Annahme kleiner Verformungen gültig bleibt (Verlauf ② in Abb. 2.1). Berücksichtigt man zusätzlich geometrische Nichtlinearitäten anhand der Theorie II. Ordnung, aber noch immer keine materialbezogenen Nichtlinearitäten, verkrümmen sich die Belastungsverläufe ② und tendieren zur Eulerschen Knicklast (Verlauf ③ in Abb. 2.1). Je größer die Exzentrizität ist, desto flacher verlaufen die Belastungskurven, die jedoch weiterhin zur Eulerschen Knicklast tendieren.

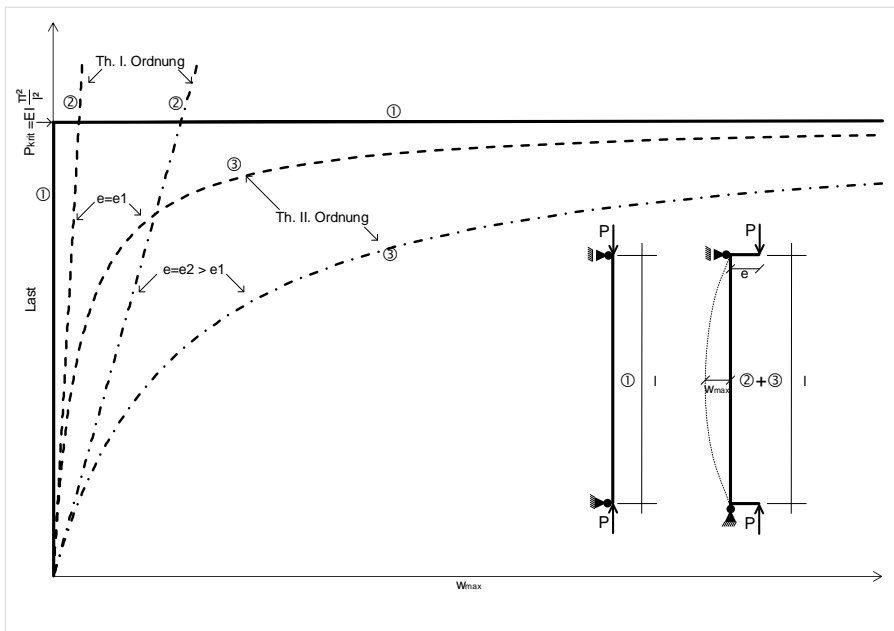


Abb. 2.1: Mittig und exzentrisch beanspruchte Druckglieder mit linear-elastischem Materialverhalten

Tab. 2.1: Mathematische Zusammenhänge für Druckglieder mit linear-elastischem Materialverhalten

Typ	Differentialgleichung	Lösung	Theorie
①	$Bw'' + Pw = 0$	$P_{krit} = B \frac{\pi^2}{l^2}$	II. Ordnung
②	$Bw'' + Pe = 0$	$w = \frac{Pe}{2B} (-x^2 + lx)$	I. Ordnung
③	$Bw'' + Pw + Pe = 0$	$w = e \left(\cos \lambda x + \frac{1 - \cos \lambda l}{\sin \lambda l} \sin \lambda x - 1 \right)$	II. Ordnung

Die Berücksichtigung von materialbezogenen Nichtlinearitäten (nicht linear-elastisches Materialverhalten) zusätzlich zu geometrischen Nichtlinearitäten wird anhand eines Wandstreifens, für den die Lastexzentrizität und seine Schlankheit variiert werden, erläutert (siehe Abb. 2.2). In diesem Beispiel bleiben die Exzentrizitäten am Kopf und am Fuß der Wand gleich groß. Je größer die Schlankheit und/oder die Exzentrizität sind, umso geringer die Traglast ist. Die Schlankheit ist folgendermaßen definiert:

$$\lambda = l_0 / \sqrt{I/A} \tag{2.1}$$

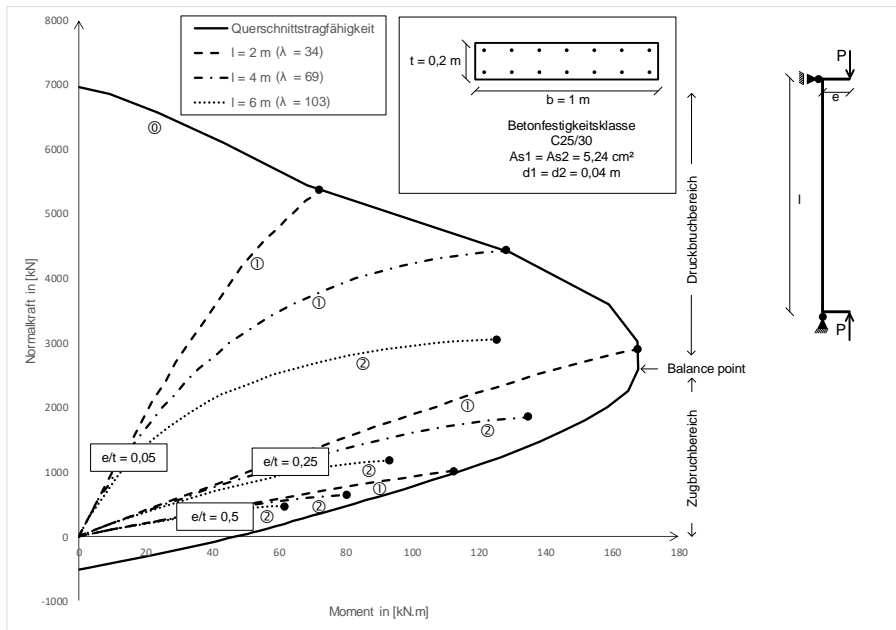


Abb. 2.2: Einfluss der Schlankheit und der Exzentrizität auf die Belastungskurve eines Wandstreifens ($b = 1 \text{ m}$, $t = 0,2 \text{ m}$) aus Beton C25/30, bewehrt mit 2 Q524 A (Die Belastungskurven und die umhüllende Kurve der Tragfähigkeit werden mit der Software Stab2D-NL (Pfeiffer 2018) ermittelt.)

Für einen bestimmten Querschnitt kann eine Kurve erstellt werden, die eine Information über seine maximale Tragfähigkeit gibt. Diese Kurve (⊙ in Abb. 2.2) gibt für alle

Werte der von diesem Querschnitt aufnehmbaren Normalkräfte das dazugehörige maximal aufnehmbare Moment an und kann insofern als Umhüllung der Belastungskurven aller Wandstreifen mit diesem Querschnitt und Bewehrungsgehalt verstanden werden. Eine größere Normalkraft hat bei einem bestimmten Moment eine größere Querschnittstragfähigkeit zur Folge. Physikalisch kann dies so verstanden werden, dass die Normalkraft für eine positiv wirkende Versteifung des Querschnitts sorgt. Dies gilt nur unterhalb des sogenannten „Balance Points“. Oberhalb des Balance Points hat eine zunehmende Normalkraft einen negativen Einfluss auf die Querschnittstragfähigkeit. Das aufnehmbare Moment ist also beim Balance Point maximal.

Druckglieder können unterschiedliche Versagensarten aufweisen. Von einem Spannungsproblem ist die Rede, wenn der Versagenspunkt mit dem Schnittpunkt der Belastungskurve und der umhüllenden Kurve, die die Querschnittstragfähigkeit darstellt, übereinstimmt (① in Abb. 2.2). Oberhalb des Balance Points, im sogenannten Druckbruchbereich, ist das Spannungsproblem gleichbedeutend mit dem Überschreiten der zulässigen Druckspannungen im Querschnitt, während unterhalb des Balance Points, im sogenannten Zugbruchbereich, das Spannungsproblem gleichbedeutend ist mit dem Fließen der Bewehrung unter Zugbeanspruchung. Von einem Stabilitätsproblem ist die Rede, wenn der Versagenspunkt sich innerhalb der umhüllenden Querschnittstragfähigkeitskurve befindet, ohne diese zu berühren (② in Abb. 2.2). Der Wandstreifen verliert sein Gleichgewicht, bevor seine Querschnittsreserven erschöpft sind. Die in Abb. 2.2 entsprechend dargestellten Kurven könnten um einen labilen absteigenden Ast ergänzt werden und das Druckglied könnte die umhüllende Kurve seines Querschnittswiderstands erreichen, wenn die Möglichkeit bestünde, dass nach dem Gleichgewichtsverlust größere Verformungen bei niedrigeren Lastniveaus aufgenommen werden. Experimentell könnte also der absteigende Ast nur beobachtet werden, sofern ein Versuch weggesteuert durchgeführt wird.

Bei größeren Schlankheiten und/oder größeren Exzentrizitäten kommen Stabilitätsversagen häufiger vor, wie aus Abb. 2.2 zu ersehen ist.

Der in der Literatur weit verbreitete Begriff „Stabilitätsproblem“ könnte nach Meinung des Verfassers durch den Begriff „Dehnungsproblem“, der dann besser als Pendant zu dem Begriff „Spannungsproblem“ zu verstehen ist, ersetzt werden. Es ließe(n) sich innerhalb der umhüllenden Kurve, die die Tragfähigkeit des Querschnitts darstellt („Spannungsproblem“), eine/mehrere umhüllende Kurve(n) zeichnen, die die Tragfähigkeit eines auf demselben Querschnitt basierenden Systems darstellt/darstellen („Dehnungsproblem“). Dehnungsprobleme resultieren aus der Präsenz des absteigenden Asts in dem für den Beton verwendeten Materialgesetz (siehe Abb. 2.3).

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

In *DIN EN 1992-1-1* sind drei Verfahren zur Bemessung von Bauteilen unter Normalkraftbeanspruchung nach Theorie II. Ordnung dargestellt: das allgemeine Verfahren, das Verfahren mit Nennsteifigkeiten und das Verfahren mit Nennkrümmungen. In *DIN EN 1992-1-1/NA* heißt es: „Das Verfahren mit Nenn Steifigkeiten nach 5.8.7 kann in Deutschland entfallen“. In *Fingerloos u. a. 2012* wird empfohlen, auf dieses aufgrund

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

seiner teilweisen Unwirtschaftlichkeit zu verzichten. Es stehen also praktisch zwei Verfahren zur Auswahl: das allgemeine Verfahren, ein genaues Verfahren, das sich für computergestützte Bemessungsaufgaben eignet und das Verfahren mit Nennkrümmungen, ein vereinfachtes Verfahren, das die Möglichkeit einer Handbemessung bietet. Die Ergebnisse aus dem genauen und dem vereinfachten Verfahren können zum Teil große Abweichungen aufweisen. Beide Verfahren werden nachfolgend vorgestellt und der Ansatz des Verfassers auf der Materialseite wird erläutert. Erläuterungen zum Rechenverfahren des Ansatzes vom Verfasser sind in Abschnitt 2.3 zu finden.

2.2.1 Allgemeines Verfahren

Allgemeine Verfahren sind genaue Rechenverfahren, die auf Berechnungen nach Theorie II. Ordnung zurückgreifen und dabei materielle Nichtlinearitäten berücksichtigen. Diese Verfahren sind in der Bewertungsskala des *MC 2010* in der höchsten Präzisionsstufe (Level IV) einzuordnen. Um das allgemeine Verfahren, wie es in *DIN EN 1992-1-1/NA* vorgeschlagen wird, besser verstehen zu können, muss man sich zunächst seinen Vorläufer in *DIN 1045-1* näher ansehen.

2.2.1.1 Rechenverfahren nach DIN 1045-1

Es gibt in *DIN 1045-1* zwei nichtlineare Rechenverfahren.

Das erste nichtlineare Rechenverfahren wird in den Abschnitten 8.5.1 und 5.2 (2) b geregelt und ermöglicht, die Formänderung des Bauteils zu berechnen und die daraus nach Theorie II. Ordnung resultierenden Schnittgrößen zu ermitteln. Mit steigender Last führt das Verfahren bis zum Erreichen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit. Der Systemwiderstand ist erschöpft, sobald eine kritische Spannung im Stahl oder im Beton erreicht wird oder wenn kein stabiles Gleichgewicht für eine höhere Last mehr existiert. Der erreichte Systemwiderstand wird mit einem einheitlichen Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_R = 1,3$ beaufschlagt (γ_R ist namensgebend für das Konzept), um einen Bemessungswert des Tragwiderstands zu bilden, der ein zu *DIN 1045-1* konformes Sicherheitsniveau einhält. Grundlegend für die nichtlineare Berechnung der Formänderung ist die Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung mit nichtlinearem Verfahren und für Verformungsberechnungen (vgl. Bild 22 in *DIN 1045-1*). Genutzt werden rechnerische Mittelwerte der Baustoffeigenschaften. Die Definition von rechnerischen Mittelwerten weicht von derjenigen von arithmetischen Mittelwerten ab (vgl. Tab. 2.2). Beispielsweise befindet sich für den Beton der rechnerische Mittelwert unterhalb seines arithmetischen Mittelwertes und sogar unterhalb seines charakteristischen Wertes. Dieses Verfahren bietet den Vorteil einer integrierten Schnittgrößenermittlung und Querschnittsbemessung auf der Basis desselben Stoffgesetzes und den Nachteil einer gewissen Unwirtschaftlichkeit aufgrund der z. T. sehr konservativen rechnerischen Mittelwerte (*Kleinschmitt 2005*).

Das zweite nichtlineare Rechenverfahren wird im Abschnitt 8.6.1 (7) geregelt. Dieses Verfahren unterscheidet sich wesentlich durch die Verwendung von unterschiedlichen Werkstoffgesetzen. Auf der einen Seite wird die Ermittlung der Formänderung aufgrund von auf Mittelwerten basierenden Bemessungswerten durchgeführt. Praktisch werden die Mittelwerte der Baustoffkennwerte mit einem Sicherheitskoeffizient $\gamma_C = 1,5$

beaufschlagt. Auf der anderen Seite sind für die Ermittlung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit Bemessungswerte, die auf charakteristischen Werten basieren, zu verwenden. Rechtfertigen kann man dieses Verfahren damit, dass eine Schwachstelle im Querschnitt für die Berechnung der Verformung nicht entscheidend ist, während diese für die Tragfähigkeit maßgebend ist (Quast 2004). Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der letztendlich wirtschaftlicheren Bemessung dank der Abbildung eines steiferen Materialverhaltens für den Beton bei der Ermittlung der Formänderung (Kleinschmitt 2005). Der Nachteil dieses Verfahrens ist die Diskrepanz zwischen der Ermittlung der Formänderung, ausgehend von Mittelwerten der Baustoffeigenschaften, und der Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit, ausgehend von Quantilwerten der Baustoffeigenschaften. So kann ein Stabilitätsversagen erst bei einem Spannungszustand auftreten, der den mit Bemessungswerten der Materialkenngrößen berechneten Querschnittswiderstand übertrifft.

Sowohl für das nichtlineare Rechenverfahren nach Absatz 8.5.1 als auch für die Berechnung der Formänderung nach Absatz 8.6.1 (7) ist die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erlaubt.

In Tab. 2.2 werden die bei den zwei allgemeinen Bemessungsverfahren der DIN 1045-1 jeweils angesetzten Materialkennwerte am Beispiel eines Betons der Festigkeitsklasse C25/30 verglichen, während in Abb. 2.3 die entsprechenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen dargestellt werden.

Tab. 2.2: Materialkennwerte (Festigkeiten [MN/m²]) eines Betons der Festigkeitsklasse C25/30 und eines Betonstahls B500A für die Verwendung des allgemeinen Verfahrens nach DIN 1045-1:2008-08, Abschnitt 8.5.1 und 8.6.1 (7)

		Formänderung und Bemessung	
		Beton	Betonstahl
		8.5.1 u. 9.1.5 u. Tabelle 9	8.5.1 u. 9.2.3 u. Tabelle 11
γ _R – Konzept		$\frac{\sigma_c}{f_{cR}} = - \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right)$ $\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$ $\epsilon_{c1} = -2,2\text{‰}$ $f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}$ $f_{cR} = 0,85 \cdot 0,85 \cdot 25 = 18,06$ $f_{ctR} = 0,85 \cdot f_{ctk;0,05}$ $f_{ctR} = 0,85 \cdot 1,8 = 1,53$ $E_{cR} = \frac{0,85 \cdot E_{c0m}}{1,1}$ <p>nach Kleinschmitt 2005</p> $E_{cR} = \frac{0,85 \cdot 30500}{1,1} = 23568,2$	$f_{yR} = 1,1 \cdot f_{yk}$ $f_{yR} = 1,1 \cdot 500 = 550$ $f_{tR} = 1,05 \cdot f_{yR}$ $f_{tR} = 1,05 \cdot 550$ $f_{tR} = 577,5$

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

Tab. 2.2 Fortsetzung

γ _R – Konzept	Formänderung und Bemessung			
	Beton		Betonstahl	
	8.5.1 u. 9.1.5 u. Tabelle 9		8.5.1 u. 9.2.3 u. Tabelle 11	
	$k = \frac{-1,1 \cdot E_{cR} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cR}}$ $= \frac{-1,1 \cdot 23568,2 \cdot (-2,2 \cdot 0,001)}{18,06} = 3,158$			
$R_d = \frac{1}{\gamma_R} R(f_{cR}; f_{yR}; f_{tR}) \text{ mit } \gamma_R = 1,3$				
8.6.1 (7)	Formänderung		Bemessung	
	Beton	Betonstahl	Beton	Betonstahl
	8.6.1 (7) u. 9.1.5 u. Tabelle 9	8.6.1 (7) u. 9.2.4 u. Tabelle 11	8.6.1 (7) u. 9.1.6 u. Tabelle 9	8.6.1 (7) u. 9.2.4 u. Tabelle 11
	$\frac{\sigma_c}{f_{cmd}} =$ $- \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right)$ $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$ $\varepsilon_{c1} = -2,2\text{‰}$ $f_{cmd} = \frac{f_{cm}}{\gamma_c} = \frac{33}{1,5}$ $= 22$ $f_{ctmd} = \frac{f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{2,6}{1,5}$ $= 1,73$ $E_{cmd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_c} = \frac{E_{c0m}}{1,1 \cdot \gamma_c}$ $= 18484$ $k = \frac{-1,1 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$ $k = \frac{-E_{c0m} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$ $k =$ $\frac{-30500 \cdot (-2,2 \cdot 0,001)}{33}$ $k = 2,03$	$f_{ymd} = \frac{f_{ym}}{\gamma_s}$ $f_{ymd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{ymd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{ymd} = 435$	<p>Für $0 \geq \varepsilon_c > \varepsilon_{c2}$</p> $\frac{\sigma_c}{f_{cd}} =$ $- \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right)$ <p>Für $\varepsilon_{c2} \geq \varepsilon_c > \varepsilon_{c2u}$</p> $\sigma_c = -f_{cd}$ $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ $= 0,85 \frac{25}{1,5} = 14,16$ $\varepsilon_{c2} = -2\text{‰}$ $n = 2$	$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{yd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{yd} = 435$

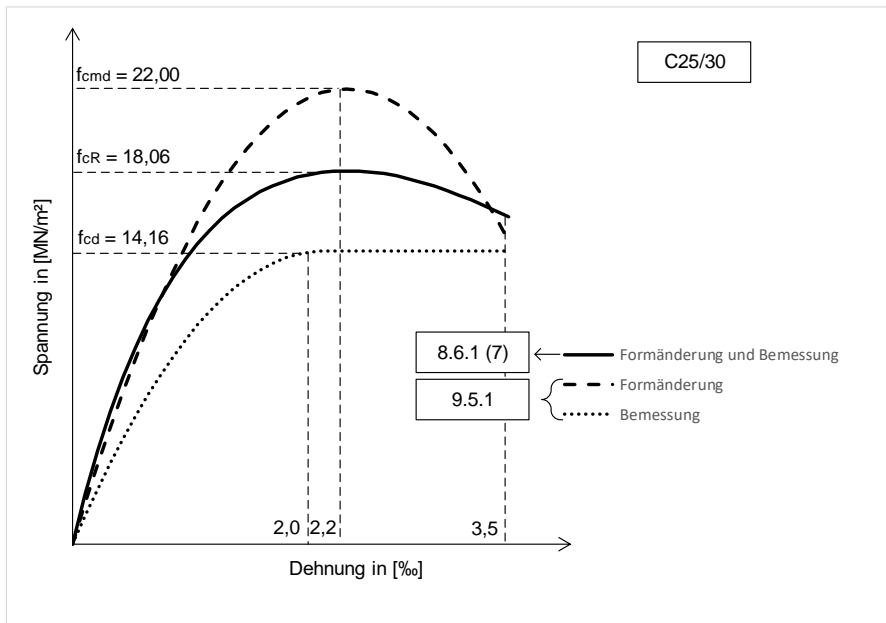


Abb. 2.3: Darstellung der unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen im Druckbereich für einen Beton der Festigkeitsklasse C25/30 für die Anwendung des allgemeinen Verfahrens nach DIN 1045-1:2008-08, Abschnitt 8.5.1 und 8.6.1 (7)

2.2.1.2 DIN EN 1992-1-1

Nichtlineare Rechenverfahren werden in *DIN EN 1992-1-1* sowie in *DIN 1045-1* an zwei unterschiedlichen Stellen geregelt. Der Abschnitt 5.7 der *DIN EN 1992-1-1* entspricht dem Abschnitt 8.5.1 der *DIN 1045-1* und der Abschnitt 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1* dem Abschnitt 8.6.1 der *DIN 1045-1*. Es gibt im Abschnitt 5.7 einen Verweis auf den Abschnitt 5.8.6, so dass nur letzterer nachfolgend betrachtet wird.

In Abschnitt 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1* wird der Bemessungswert der Tragfähigkeit anhand der gleichen Spannungs-Dehnungs-Linie für die Formänderungsberechnung und die Bemessung bestimmt. Diese Spannungs-Dehnungs-Linie basiert auf Bemessungswerten der Materialeigenschaften. Die *DIN EN 1992-1-1/NA* führt in Absatz 5.8.6 (3) die Möglichkeit der „doppelten Buchführung“ wieder ein, indem für die Schnittgrößenermittlung Spannungs-Dehnungs-Linien verwendet werden dürfen, die auf durch Teilsicherheitsbeiwerte reduzierten mittleren Baustoffwerten basieren, während die Querschnittsbemessung auf Bemessungswerten der Baustoffeigenschaften basierenden Spannungs-Dehnungs-Linien beruhen muss.

Laut Absatz 5.8.6 (5) dürfen die positiven Auswirkungen der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen berücksichtigt werden.

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

Tab. 2.3: Materialkennwerte (Festigkeiten in [MN/m²]) eines Betons der Festigkeitsklasse C25/30 und eines Betonstahls B500A für die Verwendung des allgemeinen Verfahrens nach Abschnitt 5.8.6 der DIN EN 1992-1-1 und ihres nationalen Anhangs

		Formänderung und Bemessung			
		Beton		Betonstahl	
		5.8.6 u. 3.1.5 u. Tabelle 3.1		5.8.6 u. 3.2.7	
DIN EN 1992-1-1		$\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right)$ $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$ $\varepsilon_{c1} = 2,1\text{‰}$ $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ $f_{cd} = 0,85 \times \frac{25}{1,5} = 14,16$ $f_{ctd} = \frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_c}$ $f_{ctd} = \frac{1,8}{1,5} = 1,2$ $E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}}$ $E_{cd} = \frac{31000}{1,5} = 20666$ <p>$\gamma_{ce} = 1,5$ laut dem nationalen Anhang</p> $k = \frac{1,05 \cdot E_{cd} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cd}}$ $k = \frac{1,05 \cdot 20666 \cdot 2,1}{14,16} = 3,218$		$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{yd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{yd} = 435$	
	DIN EN 1992-1-1/NA	Formänderung		Bemessung	
		Beton	Betonstahl	Beton	Betonstahl
		5.8.6 u. 3.1.5 u. Tabelle 3.1	5.8.6 u. 3.2.7	5.8.6 u. 3.1.7 u. Tabelle 3.1	5.8.6 u. 3.2.7
		$\frac{\sigma_c}{f_{cmd}} = \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right)$ $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$ $\varepsilon_{c1} = 2,1\text{‰}$ $f_{cmd} = \frac{f_{cm}}{\gamma_c}$ $f_{cmd} = \frac{33}{1,5} = 22$ $f_{ctmd} = \frac{f_{ctm}}{\gamma_c}$	$f_{ymd} = \frac{f_{ym}}{\gamma_s}$ $f_{ymd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{ymd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{ymd} = 435$	<p>Für $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$</p> $\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right)$ <p>Für $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2u}$</p> $\sigma_c = f_{cd}$ $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ $= 0,85 \frac{25}{1,5} = 14,16$ $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$ $n = 2$	$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{yd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{yd} = 435$

Tab. 2.3 Fortsetzung

	Formänderung		Bemessung	
	Beton	Betonstahl	Beton	Betonstahl
	5.8.6 u. 3.1.5 u. Tabelle 3.1	5.8.6 u. 3.2.7	5.8.6 u. 3.1.7 u. Tabelle 3.1	5.8.6 u. 3.2.7
DIN EN 1992-1-1/NA	$f_{ctmd} = \frac{2,6}{1,5} = 1,73$ $E_{cmd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}}$ $E_{cmd} = \frac{31000}{1,5}$ $= 20666$ $k = \frac{1,05 \cdot E_{cmd} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cmd}}$ $k = \frac{1,05 \cdot 20666 \cdot 2,1}{14,16}$ $= 3,218$			

2.2.1.3 Eigener Materialansatz für die Bemessung

Der Verfasser schlägt die Bestimmung der Traglast mit einem nichtlinearen Rechenverfahren, basierend auf einem einzigen Werkstoffgesetz für den Beton, vor. Das gewählte Materialgesetz ist eine bilineare Approximation des in Abschnitt 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1* vorgesehenen Werkstoffgesetzes (siehe Tab. 2.4). In der grafischen Darstellung befindet sich diese bilineare Approximation unterhalb beider Materialgesetze, die im Rahmen eines Nachweises basierend auf Spannungs-Dehnungs-Linien laut Absatz 5.8.6 (3) in der *DIN EN 1992-1-1/NA* verwendet werden, und liegt somit auf der sicheren Seite, selbst wenn sie in ihrem linearen Bereich die Parabel, die in der *DIN EN 1992-1-1* vorgeschlagen wird, schneidet (siehe Abb. 2.4). Das Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird auf der sicheren Seite liegend und vereinfachend nicht berücksichtigt.

Tab. 2.4: Materialkennwerte (Festigkeiten in [MN/m²]) eines Betons der Festigkeitsklasse C25/30 und eines Betonstahls B500A für die Verwendung des Ansatzes des Autors

Formänderung und Bemessung	
Beton	Betonstahl
<p>Für $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3}$</p> $\sigma_c = \frac{\sigma_c(\varepsilon_{c3})}{\varepsilon_{c3}} \varepsilon_c$	$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$
<p>Für $\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3}$</p> $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_{c3}) = 13,96$ $\varepsilon_{c3} = 1,75\text{‰}$ $\varepsilon_{cu3} = 3,5\text{‰}$	$f_{yd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{yd} = 435$

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

Tab. 2.4 Fortsetzung

Formänderung und Bemessung	
Beton	Betonstahl
$\sigma_c(\epsilon_{c3})$ wird nach dem Absatz 5.8.6 der <i>DIN EN 1992-1-1</i> (siehe Tab. 2.3) berechnet.	
$f_{ctd} = \frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_c}$	
$f_{ctd} = \frac{1,8}{1,5} = 1,2$	

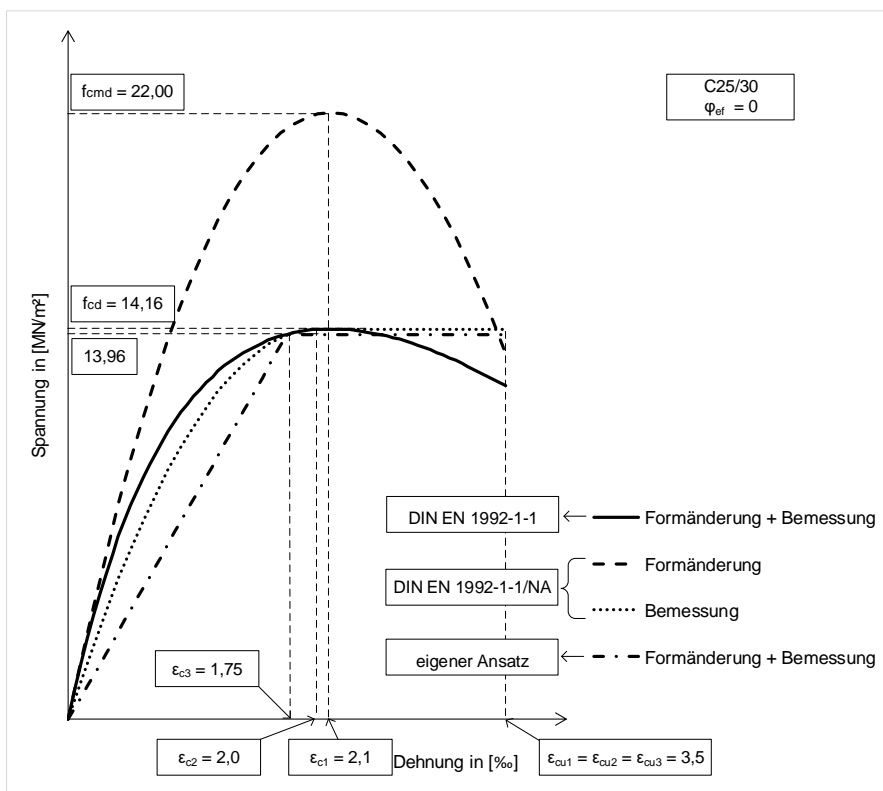


Abb. 2.4: Darstellung der unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen im Druckbereich für einen Beton der Festigkeitsklasse C25/30 für die Verwendung des allgemeinen Verfahrens nach Abschnitt 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1* und ihres nationalen Anhangs und des Ansatzes des Autors

Es sei darauf hingewiesen, dass das Kriechen des Betons durch das Strecken seiner Spannungs-Dehnungs-Linie berücksichtigt werden kann (siehe Abb. 2.5). Praktisch werden alle Dehnungswerte inklusive der Dehnungsgrenzwerten mit dem Faktor $(1 + \varphi_{eff})$ beaufschlagt, wie in *Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein E.V. 2015* vorgeschlagen.

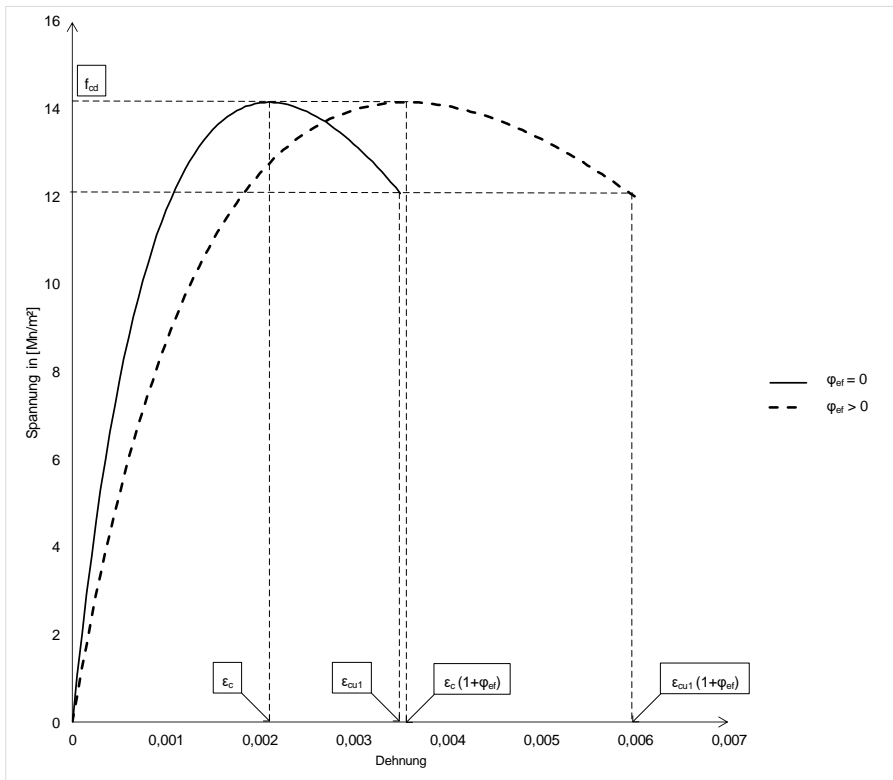


Abb. 2.5: Berücksichtigung von Kriechverformungen durch einen abgeminderten E-Modul

2.2.2 Verfahren mit Nennkrümmung

Das Verfahren mit Nennkrümmung nach der *DIN EN 1992-1-1* wird im nationalen Anhang dieser Norm, der *DIN EN 1992-1-1/NA*, kaum verändert. Es wird lediglich ein Faktor K_1 im Absatz 5.8.8.8 (3) hinzugefügt, um einen progressiven Übergang zwischen Querschnittstragfähigkeiten nach Theorie I. und II. Ordnung für Schlankheiten zwischen 25 und 35 zu ermöglichen (*Fingerloos u. a. 2012*). Um das geringe Maß an vorgeschriebenen Anpassungen im nationalen Anhang zu verstehen, reicht ein Vergleich mit der *DIN 1045-1*. So wird festgestellt, dass die europäische Norm an dieser Stelle der alten deutschen Norm fast genau entspricht. Die europäische Norm bringt als einzige Verbesserung die Möglichkeit, den Krümmungsverlauf des Druckglieds besser zu berücksichtigen, indem der Beiwert c (von 8 bis 16) eingefügt und nicht mehr systematisch von einem parabolischen Verlauf ($c = 10$) ausgegangen wird (siehe Abb. 2.6).

2.2 Normative Regelungen für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung im Stahlbetonbau und eigener Bemessungsansatz

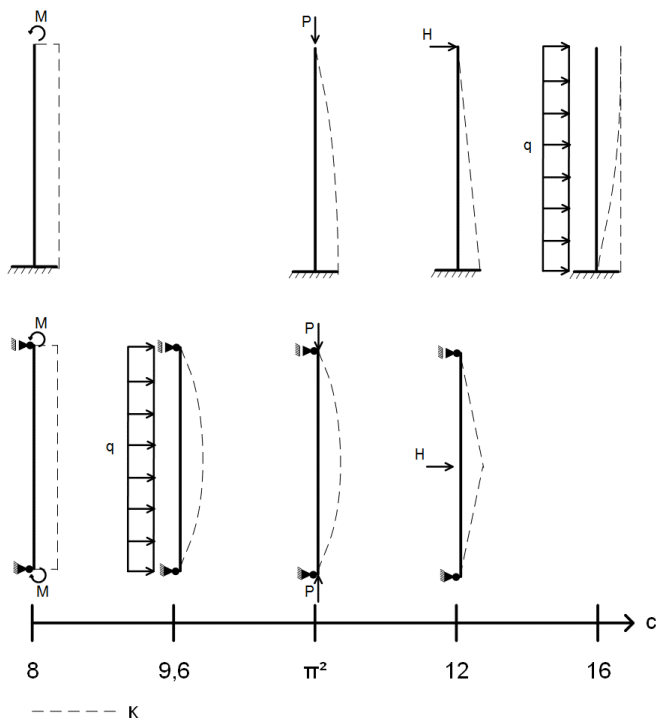


Abb. 2.6: Beiwert c in Abhängigkeit des Krümmungsverlaufs k

Die Urheberschaft des Verfahrens mit Nennkrümmung, früher Modellstützenverfahren genannt, ist nämlich deutschen Bauingenieuren wie Karl Kordina und Ulrich Quast zuzuschreiben. Das Modellstützenverfahren ist ein Näherungsverfahren, das aus dem Δm -Verfahren hervorgegangen ist. Das Δm -Verfahren erfasst die mit zunehmender Schlankheit einhergehende Reduzierung der Traglast durch ein in der Bemessung vorhandenes Zusatzmoment Δm . Das Modellstützenverfahren berücksichtigt die Verformung nach Theorie II. Ordnung, indem die daraus resultierende zusätzliche Ausmitte abgeschätzt wird (Quast 2004).

Das Verfahren mit Nennkrümmung sieht die Bemessung des Druckglieds in seinem kritischen Querschnitt vor. Dabei entspricht das einwirkende Moment dem Produkt aus der einwirkenden Normalkraft und der Gesamtexzentrizität. Die Gesamtexzentrizität besteht aus e_i (Imperfektionen), e_0 (Exzentrizität nach Theorie I. Ordnung) und e_2 (Exzentrizität nach Theorie II. Ordnung). Der entscheidende Punkt bei der Bestimmung von e_2 , die unabhängig von e_i und e_0 erfolgt, ist die Abschätzung der Krümmung ($1/r$). Die erste Präzisionsstufe, die im Model Code (MC 2010) vorgegeben ist, sieht sehr auf der sicheren Seite liegend vor, die Krümmung als diejenige eines ausgeschöpften Querschnitts zu bestimmen, bei dem also beide Bewehrungslagen fließen. Demnach lässt sich die Krümmung mathematisch wie folgt beschreiben:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2\varepsilon_{yd}}{d - 2c} \quad (2.2)$$

Gleichung (2.2) steht auch als Grundlage zur Bestimmung der Krümmung in der *DIN EN 1992-1-1*. Der einzige Unterschied ist, dass der innere Hebelarm z in der *DIN EN 1992-1-1* pauschal mit $0,9 \cdot d$ berechnet wird, während *MC 2010* in der ersten Präzisionsstufe die Betondeckung (c) der Bewehrungslagen in die Definition des inneren Hebelarms miteinbezieht: $z = d - 2c$. Die Krümmung des ausgeschöpften Querschnitts wird in *DIN EN 1992-1-1* wie in der zweiten (Level II) Präzisionsstufe von *MC 2010* mit einem Faktor K_r multipliziert, um eine wirtschaftlichere Bemessung zu ermöglichen. Der infolge einer maximalen Krümmung erschöpfte Querschnitt entspricht dem Punkt ② (Balance Point) in Abb. 2.7. Bei Punkt ① in Abb. 2.7 ist wiederum das Moment und also die Krümmung gleich 0. Zwischen beiden Punkten (beispielsweise Punkt ③ in Abb. 2.7) wird vereinfachend angenommen, dass die Krümmung linear wächst. *DIN EN 1992-1-1* lässt eine Interpolation ihres Betrages zu, wie aus Gleichung (2.3) zu ersehen ist.

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45d} \quad (2.3)$$

Die Schwäche des Verfahrens nach *DIN EN 1992-1-1* ist, dass keine Möglichkeit zur Interpolation unterhalb des Balance Points (beispielsweise Punkt ④ in Abb. 2.7) existiert. Dort muss K_r gleich 1 angenommen werden, was zu unwirtschaftlichen Ergebnissen führt. Mit $K_r = 1$ besteht dann bei der Bemessung von schlanken Druckgliedern nach dem Verfahren mit Nennkrümmungen nach *DIN EN 1992-1-1* der einzige Unterschied zu einem Verfahren nach der ungenauesten Präzisionsstufe des *MC 2010* darin, dass unterschiedliche Krümmungsverläufe berücksichtigt werden können. Allerdings muss erwähnt werden, dass schlanke Druckglieder bei der Berücksichtigung der Kriechzahl in *DIN EN 1992-1-1* günstiger behandelt werden. Für Druckglieder mit einer Schlankheit größer als 70 nimmt K_φ den Wert 1 an (*Heft 600*).

Das Verfahren mit Nennkrümmung, das die Möglichkeit gibt, die kritische Krümmung per Interpolation zu berechnen und andere Krümmungsverläufe als den parabolischen ($c = \pi^2$) zu berücksichtigen, ohne jedoch eine gewichtete Bestimmung des Krümmungsverlaufs in Abhängigkeit der jeweiligen Einwirkungen zu erfordern, liegt zwischen der zweiten (Level II) und der dritten (Level III) Präzisionsstufe der Bewertungsskala des *MC 2010*. Wie schon erläutert, gilt diese Aussage nur mit Ausnahme von sehr schlanken ($\lambda > 120$) Druckgliedern.

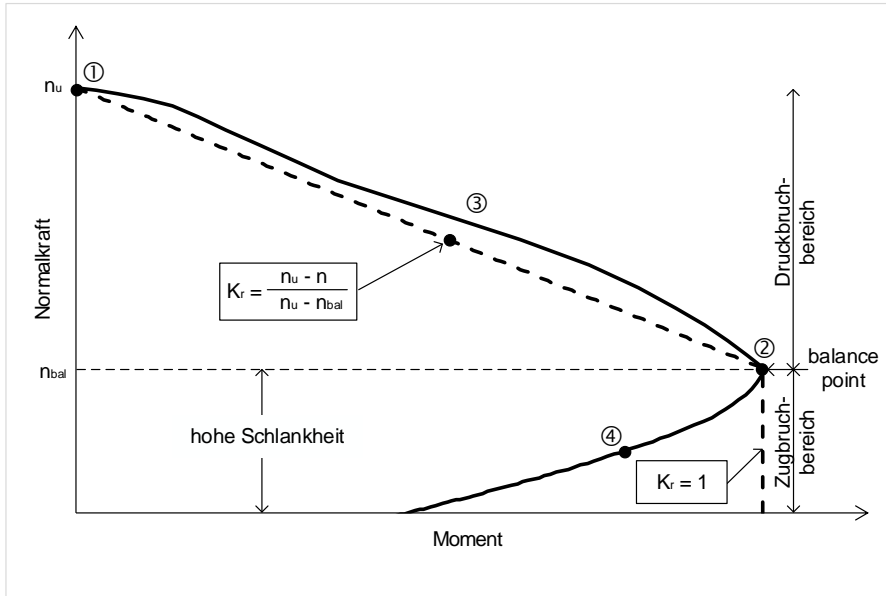


Abb. 2.7: Abminderung der maximalen Krümmung laut *DIN EN 1992-1-1*

2.3 Eigener Bemessungsansatz

In Abschnitt 2.2.1 wird bei der Beschreibung des allgemeinen Verfahrens der Fokus auf die zu verwendenden Materialgesetze gelegt. In Abschnitt 2.2.1.3 fügt der Autor eine bilineare Approximation der in *DIN EN 1992-1-1* vorgesehenen komplexen quadratischen Spannungs-Dehnungs-Linie für den Beton hinzu. In den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 wird die Kombination von dieser bilinearen Approximation und dem verwendeten Rechenverfahren bei der Bemessung von Druckgliedern aus Stahlbeton erläutert. In Abschnitt 2.3.3 wird das Zuverlässigkeits- und Wirtschaftlichkeitsniveau der gelieferten Ergebnisse mit den Standards vom allgemeinen Verfahren und vom Verfahren mit Nennkrümmung verglichen.

2.3.1 Linearer Zustand

Solange der Beton und die eingebauten Bewehrungslagen sich alle konform zum Hookeschen Gesetz verhalten oder solange es wenigstens den jeweiligen Materialmodellen nach so ist, können für das Druckglied ideale Querschnittswerte ermittelt und seine Verformungsfigur für ein bestimmtes Lastniveau anhand der dazugehörigen Differentialgleichung (2.4) bestimmt werden (siehe auch ③ in Tab. 2.1).

$$Bw'' + Pw = -M \quad (2.4)$$

Der Bedarf an ideellen Querschnittswerten besteht aufgrund der durch die eingebauten Bewehrungslagen in z-Richtung entstehenden Material-Inhomogenität (Zilch u. Zehetmaier 2010). Die im Querschnitt aus einer Normalkraftbeanspruchung resultierende Spannungsverteilung weicht bei der Berücksichtigung des Betonstahls von derjenigen

eines homogenen Querschnitts aus Beton ab. Dies wird rechnerisch durch die Verwendung einer ideellen Querschnittsfläche berücksichtigt (Gleichung (2.5)).

$$A_i = A_c + (\alpha_s - 1)A_s \quad (2.5)$$

mit $\alpha_s = \frac{E_s}{E_c}$

Der gleiche Zusammenhang tritt bei einer Momentenbeanspruchung auf. Dies wird rechnerisch durch die Verwendung eines ideellen Flächenträgheitsmoments berücksichtigt (Gleichung (2.6)).

$$I_i = I_c + A_c \Delta z_i^2 + (\alpha_s - 1) \sum_j A_s^j (z_{is}^j)^2 \quad (2.6)$$

mit $\Delta z_i = \frac{(\alpha_s - 1) \sum_j A_s^j z_{cs}^j}{A_i}$

Mit M ist in Gleichung (2.4) jedwede Momentenbeanspruchung gemeint, trete sie infolge einer Linienlast, einer Einzellast, einer Temperaturbeanspruchung oder anderem auf. In diesem Abschnitt wird ausschließlich eine Momentenbeanspruchung infolge einer exzentrisch wirkenden Normalkraft $M = P e_i$ betrachtet. Bw'' ist das Glied, das laut der Bernoullischen Theorie die Verformung eines Balkens abbildet. Mit Pw wird die Theorie II. Ordnung berücksichtigt. So lässt sich Gleichung (2.4) in Gleichung (2.7) umschreiben:

$$Bw'' + Pw = -P e_i \quad (2.7)$$

Die partikuläre Lösung der Differentialgleichung (2.7) ist $-e_i$. Die assoziierte homogene Differentialgleichung wird üblicherweise wie in Gleichung (2.8) geschrieben (*Voltaire u. Bamberger 2008*):

$$w'' + \lambda^2 w = 0 \quad (2.8)$$

Hierbei sind $\lambda = \sqrt{P/B}$ der Eigenwert des assoziierten Knickproblems und X_1 (Gleichung (2.10)) und X_2 (Gleichung (2.11)) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Gleichung (2.9)).

$$X^2 + \lambda^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$X_1 = -i\lambda \quad (2.10)$$

$$X_2 = i\lambda \quad (2.11)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung soll real sein und keine komplexen Zahlen beinhalten. An dieser Stelle kann ausgenutzt werden, dass der reale oder der imaginäre Teil der Lösung einer Differentialgleichung allein selbst auch Lösung dieser Differentialgleichung ist. Die Lösung kann dann wie folgt (Gleichung (2.12)) real dargestellt werden (*Deschamps u. a. 2003*):

$$w(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x - e_i \quad (2.12)$$

Nun müssen noch die Integrationskonstanten A und B (Gleichungen (2.15) und (2.16)) anhand der Randbedingungen (Gleichungen (2.13) und (2.14)) bestimmt werden:

$$w(0) = 0 \quad (2.13)$$

$$w(l) = 0 \quad (2.14)$$

$$A = e_i \quad (2.15)$$

$$B = \frac{e_i(1 - \cos \lambda l)}{\sin \lambda l} \quad (2.16)$$

Die Verformung über die Druckgliedhöhe ist gemäß Gleichung (2.17):

$$w(x) = e_i \cos \lambda x + \frac{e_i(1 - \cos \lambda l)}{\sin \lambda l} \sin \lambda x - e_i \quad (2.17)$$

2.3.2 Nichtlinearer Zustand

Es gibt zwei unterschiedliche physikalische Probleme, die durch einen materiell nicht-linearen Zustand entstehen und die mathematisch einen gewissen Komplexitätsgrad hervorrufen: die Bestimmung der Steifigkeit in einer materiell nichtlinearen Querschnittskonfiguration und die Berücksichtigung unterschiedlicher Steifigkeiten über die Druckgliedhöhe.

2.3.2.1 Bestimmung der Steifigkeit in einer materiell nichtlinearen Querschnittskonfiguration

In einem Stahlbetonquerschnitt können die Rissbildung oder das Überschreiten einer bestimmten Druckspannung der Grund dafür sein, dass kein lineares Materialmodell mehr für eine physikalische Erfassung des Problems geeignet ist.

Im gerissenen Zustand bestimmt *Horstmann 2010* iterativ die Dehnungsverteilung im Querschnitt. Für die Modellierung des Betons greift er auf den in Absatz 3.1.7 (3) der *DIN EN 1992-1-1* ausgeführten Spannungsbloc zurück. Dieser Ansatz ist aber für die Erfassung eines Druckglieds nicht mit den normativen Anforderungen in Einklang zu bringen (siehe Abschnitt 2.2.1.2). *Müller 2015* berücksichtigt das nichtlineare Verhalten des Werkstoffs Beton nicht. Die Deckschichten der von ihm untersuchten Sandwichbauteile bestehen aus hochfestem Beton, der sich bis zu einem Spannungsniveau von ungefähr 80% der Druckfestigkeit linear verhält. Somit ist seine Entscheidung, das Verhalten des Betons ausschließlich linear wiederzugeben, berechtigt. Wenn ein breiteres Spektrum der Betonfestigkeitsklassen berücksichtigt werden soll, u. a. auch normalfeste Betone, wie dies im Rahmen dieser Arbeit geschehen soll, ist eine solche Vereinfachung aber nicht akzeptabel.

Die Dehnungsverteilung und somit die Steifigkeit des Querschnitts in einer nichtlinearen Querschnittskonfiguration wird anhand der im Absatz 3.2.7 der *DIN EN 1992-1-1* angegebenen bilinearen Spannungs-Dehnungs-Linie für den Betonstahl und anhand der in Abschnitt 2.2.1.3 vom Verfasser vorgeschlagenen bilinearen Spannungs-Dehnungs-Linie für den Beton bestimmt. Auf der sicheren Seite liegend wird die Zugversteifung durch den Beton nach der Rissbildung („Tension-Stiffening“) nicht berücksichtigt. Dies stellt bei den betrachteten Sandwichwänden unter Druckbeanspruchung eine vertretbare Vereinfachung dar (siehe Abschnitt 2.3.3).

Die Aufstellung der inneren Schnittgrößen geht in jeder Konfiguration auf der unsicheren Seite liegend vereinfachend von Bruttoquerschnittswerten für den Beton aus. Im linearen Zustand aber wird die Querschnittssteifigkeit anhand von ideellen Querschnittswerten für den Beton bestimmt (siehe Abschnitt 2.3.1). So entsteht eine Diskrepanz zwischen dem linearen und dem nichtlinearen Bereich, die dazu führt, dass die Biegesteifigkeit rechnerisch paradoxerweise direkt nach der Rissbildung zunächst höher als vor der Rissbildung ist. Dieses Problem vermindert sich aber schnell, so dass die Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand dann, wie zu erwarten, kleiner als die Biegesteifigkeit im Zustand I wird (siehe Abb. 2.8). Die ungenaueren und günstigeren Bruttoquerschnittswerte verlieren gegenüber dem Rissbildungsprozess schnell an Wirkung. Die Verwendung von Bruttoquerschnittswerten statt ideellen Querschnittswerten ist für die Bemessung von Wänden oder gering bewehrten Stützen vertretbar.

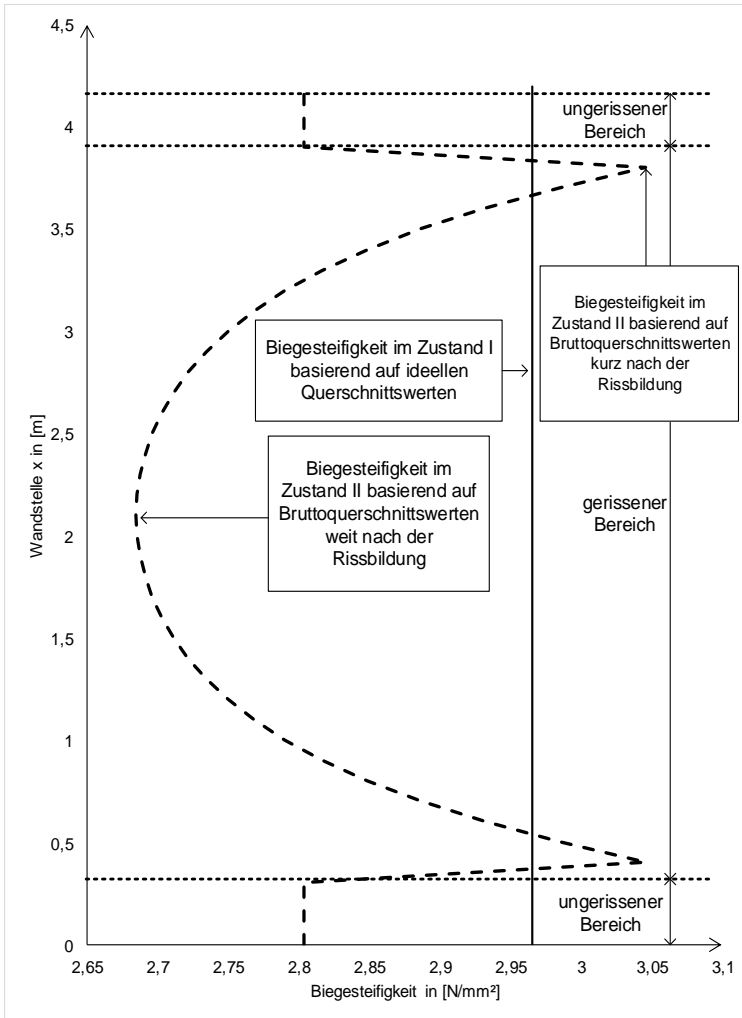


Abb. 2.8: Biegesteifigkeit über die Höhe einer gerissenen Wand

Nachfolgend werden alle acht relevanten Querschnittskonfigurationen für den Fall erläutert, dass die einwirkende Normalkraft eine Druckkraft ist. Neben den acht relevanten Querschnittskonfigurationen existieren andere Konfigurationen, die nicht berücksichtigt werden, weil sie entweder keine Erhöhung des Moments oder keine Erhöhung der Normalkraft ermöglichen. Die aufgeführten Konfigurationen ermöglichen es also nicht, bei einem Dehnungsproblem den absteigenden Ast zu berechnen, was für praktische Stahlbetonberechnungen keine Einschränkung darstellt. Die Druckkraft wird positiv definiert. Das innere Moment wird in Bezug auf die Längsachse des Betonquerschnitts aufgestellt. Nachfolgend werden nur positive Biegemomente berücksichtigt. Diese Annahme stellt keine Einschränkung dar. Negative Momente können nämlich bei der Programmierung mit einer Art Spiegelung des Querschnitts an seiner Längsachse berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 3.4.2).

Konfiguration 1

Die Konfiguration 1 beschreibt den Querschnitt nach dem Überschreiten von ε_{c3} auf seiner Druckseite, während der ganze Querschnitt überdrückt ist. Vereinfachend wird für das Aufstellen der dem Beton zuzuordnenden inneren Schnittgrößen der Querschnitt in drei Bereiche a, b und c aufgeteilt (siehe Abb. 2.9 und Gleichungen (2.18) bis (2.23)).

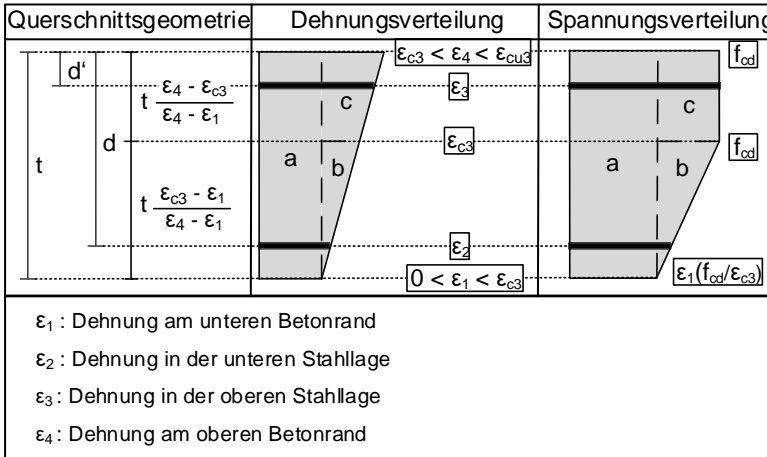


Abb. 2.9: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 1

Normalkraft:

$$P_a = \varepsilon_1 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb \quad (2.18)$$

$$P_b = \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \quad (2.19)$$

$$P_c = f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \quad (2.20)$$

Moment:

$$M_a = 0 \quad (2.21)$$

$$M_b = \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{2}{3} t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \frac{t}{2} \right) \quad (2.22)$$

$$M_c = f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \right) \quad (2.23)$$

Je nach Dehnungszustand der jeweiligen Bewehrungslagen ergeben sich drei unterschiedliche Konfigurationen.

Konfiguration 1.1

In der Konfiguration 1.1 befindet sich die Bewehrung in beiden Lagen unterhalb der Fließgrenze (siehe Abb. 2.10).

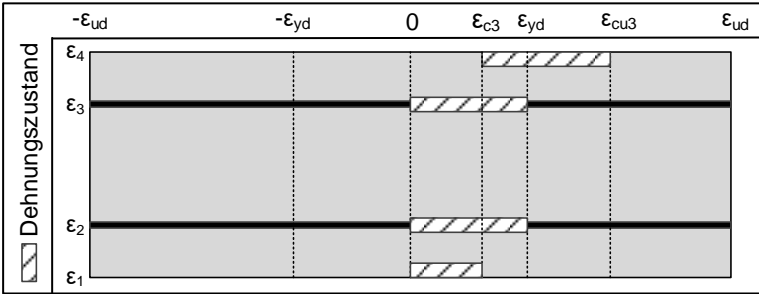


Abb. 2.10: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 1.1

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den Gleichungen (2.24) bis (2.27) ausgedrückt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (2.24)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.25)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.26)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.27)$$

Insgesamt bestimmt sich die innere Normalkraft zu:

$$P = \varepsilon_1 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.28)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 M = & \frac{1}{2}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{2}{3} t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \frac{t}{2} \right) \\
 & + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \right) \\
 & - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 & + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Um die Dehnungsverteilung im Querschnitt und also seine Krümmung mit der Gleichung (2.30) sowie letztendlich seine Biegesteifigkeit mit der Gleichung (2.31) zu bestimmen, ist es ausreichend das Wertepaar $(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$ zu kennen.

$$\kappa = \frac{-\varepsilon_4 + \varepsilon_1}{t} \tag{2.30}$$

$$EI = -\frac{M}{\kappa} \tag{2.31}$$

Mit den Gleichungen (2.30) und (2.31) ist es möglich, für ein bestimmtes Wertepaar $(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$, solange dieses sowie die dazugehörigen Dehnungen ε_2 und ε_3 die für diese Konfiguration bestimmten jeweiligen Grenzdehnungen einhalten (siehe Abb. 2.9 und Abb. 2.10), die Normalkraft und das Moment zu bestimmen. Jedoch ist die vorliegende Aufgabe umgekehrt: Man möchte für ein Wertepaar (M, P) das dazugehörige Wertepaar $(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$ bestimmen. Die Gleichungen (2.30) und (2.31) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem, wofür keine geschlossene Lösung gefunden werden kann. Statt einer analytischen Lösung ist eine numerische Lösung algorithmisch zu bestimmen.

Eine Alternative zu dieser Vorgehensweise ist es, für jede Querschnittskonfiguration ε_1 und ε_4 zu variieren und für jedes Wertepaar die entsprechenden inneren Schnittgrößen M und N in einer Datenbank zu archivieren. Um dann für eine bestimmte Beanspruchung (M, N) den Dehnungszustand herauszufinden, muss man in der Datenbank nach dem Wertepaar (M, N) suchen, das am nächsten zu der Beanspruchung liegt, und das entsprechende Wertepaar $(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$ auslesen. So geht zum Beispiel *Pfrang 1961* dieses Problem an. Das Umgehen des eigentlichen Problems hat aber, was die Rechenzeit betrifft, einen hohen Preis. Das vom Verfasser erstellte Rechenprogramm, welches auf dem Prinzip der virtuellen Kräfte basiert, benötigt 55 Minuten, um eine Traglaststeigerung zu simulieren, wenn es eine Datenbank nutzt, während es nur 0,6 Minuten benötigt, wenn es die Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme integriert. Dabei liefert es auch eine viel höhere Genauigkeit.

Die numerische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren, welches das Pendant für nichtlineare Gleichungssysteme zum eindimensionalen Newton-Verfahren ist und es ermöglicht, nicht geschlossenen lösbare, nichtlineare Gleichungen iterativ zu lösen (*Arens u. a. 2015*). Die Lösung

eines nichtlinearen Gleichungssystems mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren wird für die Konfiguration 1.1 einmalig erläutert. Die Gleichungen (2.28) und (2.29) werden in Funktionen von ε_1 und ε_4 umformuliert, deren Nullstellen gesucht werden.

$$\begin{aligned}
 f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= (P)\varepsilon_1 + (f_{cd}tb - P)\varepsilon_4 \\
 &+ \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb - A_{s2}E_s \frac{d}{t} - A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) \varepsilon_1^2 \\
 &+ \left(A_{s2}E_s - A_{s2}E_s \frac{d}{t} + A_{s3}E_s - A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) \varepsilon_4^2 \\
 &+ \left(-A_{s2}E_s + 2A_{s2}E_s \frac{d}{t} - A_{s3}E_s + 2A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_{c3} f_{cd} tb
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) & \\
 &= (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) \frac{t^2 b}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ f_{cd} \frac{t^2 b}{2 \varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \\
 &- \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 M
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1n+1} \\ \varepsilon_{4n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{4n} \end{pmatrix} - J(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})^{-1} \begin{pmatrix} f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \\ g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1n+1} \\ \varepsilon_{4n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{4n} \end{pmatrix} - J(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})^{-1} \begin{pmatrix} f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \\ g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

J ist die Jacobi-Matrix (Gleichung (2.36)):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \\ \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Die Jacobi-Matrix beinhaltet die partiellen Ableitungen von f und g nach ε_1 und ε_4 , die in den Gleichungen (2.37) bis (2.40) aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & \\
 &= (P) + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb - A_{s2}E_s \frac{d}{t} - A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) 2\varepsilon_1 \\
 &+ \left(-A_{s2}E_s + 2A_{s2}E_s \frac{d}{t} - A_{s3}E_s + 2A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) \varepsilon_4
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} &= (f_{cd}tb - P) \\ &+ \left(A_{s2}E_s - A_{s2}E_s \frac{d}{t} + A_{s3}E_s - A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) 2\varepsilon_4 \\ &+ \left(-A_{s2}E_s + 2A_{s2}E_s \frac{d}{t} - A_{s3}E_s + 2A_{s3}E_s \frac{d'}{t} \right) \varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= -3(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) \frac{t^2 b}{3} \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (2(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2) \\ &- f_{cd} \frac{t^2 b}{\varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \\ &- \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\ &+ 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)M \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 + f_{cd} \frac{t^2 b}{2\varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 \\ &- \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\ &- 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)M \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix muss bei jedem Iterationsschritt invertiert werden (siehe Gleichung (2.41)):

$$J^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} & -\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \\ -\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Die Iterationsvorschrift kann in Gleichung (2.42) umgewandelt werden:

$$\varepsilon_{1n+1} = \varepsilon_{1n} \quad (2.42)$$

$$\frac{f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} \frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}$$

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n} \quad (2.43)$$

$$\frac{-\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1} f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) + g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4} \frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}$$

Das Invertieren einer Jacobi-Matrix ist im allgemeinen Fall ein aufwendiger Rechenprozess. Eine Alternative dazu stellt das vereinfachte Newton-Verfahren dar, bei dem die Jacobi-Matrix nur einmal bei dem ersten Iterationsschritt invertiert wird (siehe Gleichungen (2.44) und (2.45)).

$$\varepsilon_{1n+1} = \varepsilon_{1n} \quad (2.44)$$

$$\frac{f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} \frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1}}$$

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n} \quad (2.45)$$

$$\frac{-\frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1} f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) + g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} - \frac{\partial f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_4} \frac{\partial g(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{40})}{\partial \varepsilon_1}}$$

Der Preis für diese Vereinfachung ist allerdings eine deutlich langsamere Konvergenz. In dem dargestellten Beispiel wird das Ergebnis schon nach sieben Iterationen für das mehrdimensionale Newton-Verfahren und erst nach 135 Iterationen für das vereinfachte, mehrdimensionale Newton-Verfahren gefunden (siehe Abb. 2.11 und Abb. 2.12). Da das Invertieren der Jacobi-Matrix bei diesem nur zweidimensionalen Problem absolut akzeptabel ist, wird auf die Vereinfachung verzichtet.

2 Druckglieder aus Stahlbeton

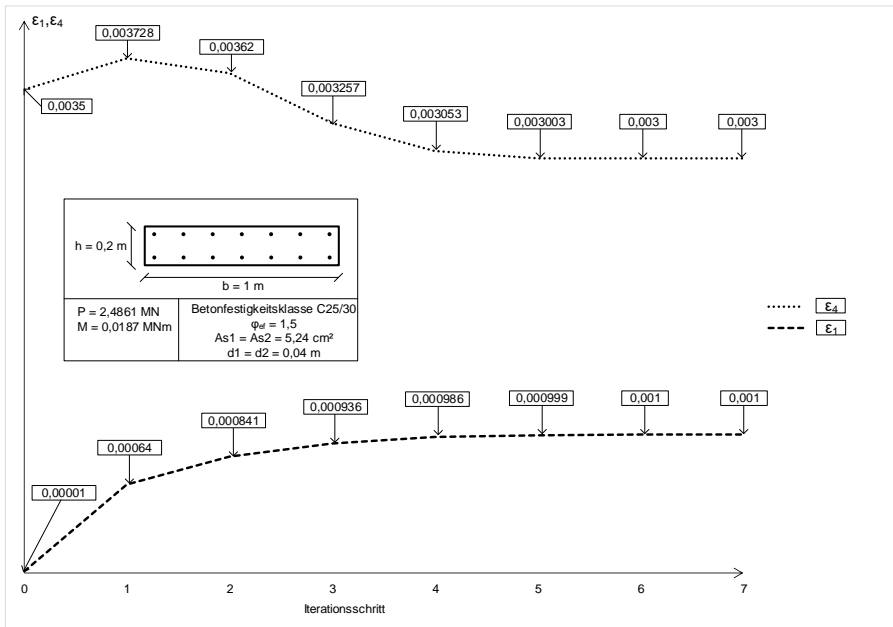


Abb. 2.11: Erforderliche Iterationsschritte bei der Verwendung des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens (Konfiguration 1.2)

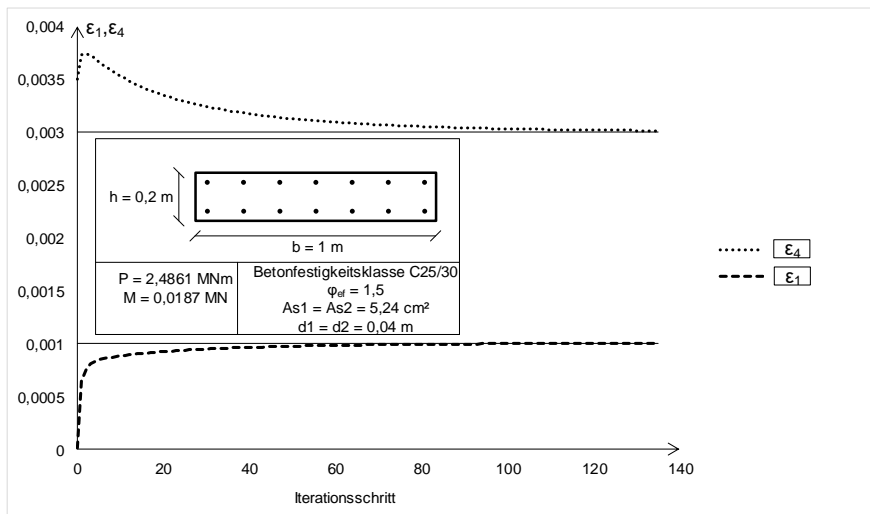


Abb. 2.12: Erforderliche Iterationsschritte bei der Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens (Konfiguration 1.2)

Die Struktur des dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren entsprechenden Subprogramms wird nach der *DIN 66261* in einem sogenannten Nassi-Shneiderman Struktogramm (siehe Abb. 2.13) dargestellt. Die Darstellung mag einen weniger übersichtlichen Eindruck erwecken als bei der Verwendung der *DIN 66001*. Jedoch erweist sich

die Darstellung nach *DIN 66261* als kompakter und wird aus diesem Grund in der vorliegenden Arbeit bevorzugt.

$\varepsilon_1 = \text{Startwert für } \varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_4 = \text{Startwert für } \varepsilon_4$	
$\varepsilon_{1n+1} = \varepsilon_{1n} -$	$\frac{f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}} \frac{\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4}}{\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4}} - \frac{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4}}{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_4}} \frac{g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}$
$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n} -$	$\frac{\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}} f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) + g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n}) \frac{\frac{\partial f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial g(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{4n})}{\partial \varepsilon_1}}$
$0,9999 < \varepsilon_{1n+1} / \varepsilon_{1n} < 1,0001 \text{ und } 0,9999 < \varepsilon_{4n+1} / \varepsilon_{4n} < 1,0001$	

Abb. 2.13: Struktogramm des Subprogramms zur numerischen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems nach der *DIN 66261* für jede Konfiguration.

Die Startwerte für ε_1 und ε_4 werden willkürlich innerhalb der für die betroffene Konfiguration jeweils gültigen Dehnungsbereiche gewählt.

Konfiguration 1.2

Die Konfiguration 1.2 unterscheidet sich von der Konfiguration 1.1 durch das Fließen der Bewehrung in der oberen Lage (siehe Abb. 2.14).

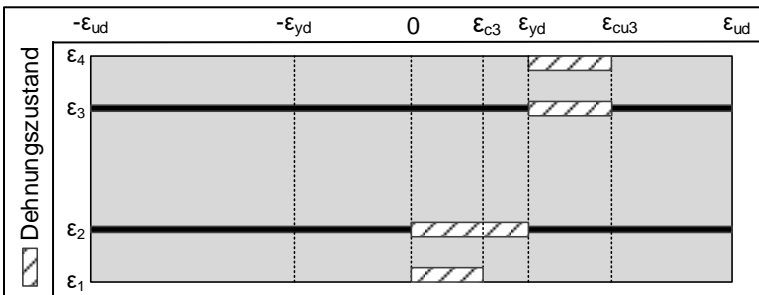


Abb. 2.14: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 1.2

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist nachfolgend aufgeführt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (2.46)$$

$$P_{s3} = A_{s3} f_{yk} \quad (2.47)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.48)$$

$$M_{s3} = A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.49)$$

Insgesamt ergibt sich die innere Normalkraft zu:

$$\begin{aligned} P = & \varepsilon_1 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \\ & + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\ & + A_{s3} f_{yk} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Und das innere Moment berechnet sich nach Gleichung (2.51) zu:

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{2}{3} t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \frac{t}{2} \right) \\ & + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \right) \\ & - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (2.52) bis (2.57) aufgelistet:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) & = (P - f_{yk} A_{s3}) \varepsilon_1 + (f_{cd} t b - P + f_{yk} A_{s3}) \varepsilon_4 \\ & + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b - A_{s2} E_s \frac{d}{t} \right) \varepsilon_1^2 + \left(A_{s2} E_s - A_{s2} E_s \frac{d}{t} \right) \varepsilon_4^2 \\ & + \left(-A_{s2} E_s + 2 A_{s2} E_s \frac{d}{t} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_{c3} f_{cd} t b \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) & = (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) \frac{t^2 b}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\ & + f_{cd} \frac{t^2 b}{2 \varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \\ & - \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ & + f_{yk} A_{s3} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 M \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \quad (2.54)$$

$$= (P - f_{yk}A_{s3}) + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}}\right)tb - A_{s2}E_s\frac{d}{t}\right)2\varepsilon_1 + \left(-A_{s2}E_s + 2A_{s2}E_s\frac{d}{t}\right)\varepsilon_4$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \quad (2.55)$$

$$= (f_{cd}tb - P + f_{yk}A_{s3}) + \left(A_{s2}E_s - A_{s2}E_s\frac{d}{t}\right)2\varepsilon_4 + \left(-A_{s2}E_s + 2A_{s2}E_s\frac{d}{t}\right)\varepsilon_1$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \quad (2.56)$$

$$= -3(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}}\right) \frac{t^2b}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}}\right)t^2b(2(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2) - f_{cd}\frac{t^2b}{\varepsilon_{c3}}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) - \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2\right]A_{s2}E_s\left(d - \frac{t}{2}\right) - 2f_{yk}A_{s3}\left(\frac{t}{2} - d'\right)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)M$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \quad (2.57)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}}\right)t^2b(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 + f_{cd}\frac{t^2b}{2\varepsilon_{c3}}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 - \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2\right]A_{s2}E_s \cdot \left(d - \frac{t}{2}\right) + 2f_{yk}A_{s3}\left(\frac{t}{2} - d'\right)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)M$$

Konfiguration 1.3

In der Konfiguration 1.3 fließt die Bewehrung in beiden Lagen (siehe Abb. 2.15).

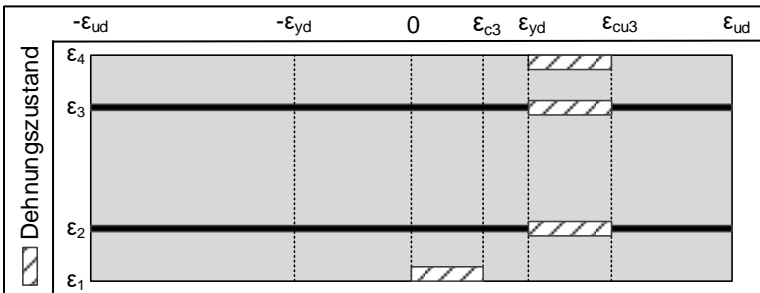


Abb. 2.15: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 1.3

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist nachfolgend angegeben.

Normalkraft:

$$P_{s2} = A_{s2}f_{yk} \quad (2.58)$$

$$P_{s3} = A_{s3}f_{yk} \quad (2.59)$$

Moment:

$$M_{s2} = -A_{s2}f_{yk} \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.60)$$

$$M_{s3} = A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.61)$$

Insgesamt ergibt sich die innere Normalkraft zu:

$$P = \varepsilon_1 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb + \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b + A_{s2}f_{yk} + A_{s3}f_{yk} \quad (2.62)$$

Und das innere Moment berechnet sich nach Gleichung (2.63) zu:

$$M = \frac{1}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{2}{3} t \left(\frac{\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \frac{t}{2} \right) + f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c3}} \right) t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} t \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \right) - A_{s2}f_{yk} \left(d - \frac{t}{2} \right) + A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.63)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (2.64) bis (2.69) gelistet:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = (P - f_{yk}A_{s3} - f_{yk}A_{s2})\varepsilon_1 + (f_{cd}tb - P + f_{yk}A_{s3} + f_{yk}A_{s2})\varepsilon_4 + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb \right) \varepsilon_1^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_{c3} f_{cd} tb \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) & & (2.65) \\
 &= (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) \frac{t^2 b}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ f_{cd} \frac{t^2 b}{2 \varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) - A_{s2} f_{yk} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \\
 &+ f_{yk} A_{s3} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 M
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = (P - f_{yk} A_{s3} - f_{yk} A_{s2}) + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b \right) 2 \varepsilon_1 \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = (f_{cd} t b - P + f_{yk} A_{s3} + f_{yk} A_{s2}) \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
 &= -3(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) \frac{t^2 b}{3} \\
 &+ \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (2(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2) \\
 &- f_{cd} \frac{t^2 b}{\varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) + 2f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &- 2f_{yk} A_{s3} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) M
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 + f_{cd} \frac{t^2 b}{2 \varepsilon_{c3}} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1)^2 \\
 &- 2f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2f_{yk} A_{s3} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &- 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) M
 \end{aligned}$$

Konfiguration 2

In der Konfiguration 2 überschreitet der Beton den Dehngrenzwert ε_{c3} über die ganze Querschnittshöhe (siehe Abb. 2.16). Der Betonstahl beider Bewehrungslagen verhält sich aber linear-elastisch (siehe Abb. 2.17). Diese Konfiguration wird der Vollständigkeit halber aufgeführt. Physikalisch stellt sie aber einen unwahrscheinlichen Fall dar. Der Beitrag des Betons zu den inneren Schnittgrößen ist den Gleichungen (2.70) und (2.71) zu entnehmen.

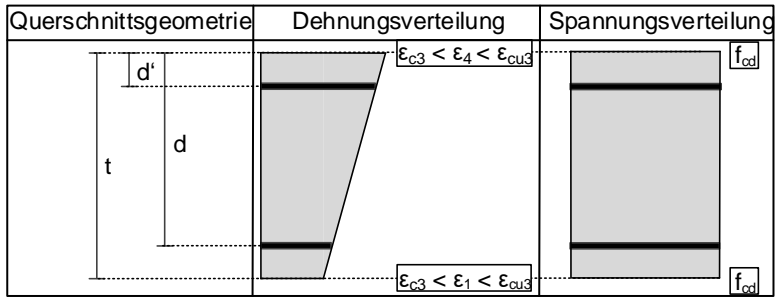


Abb. 2.16: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 2

Normalkraft:

$$P = f_{cd}tb \quad (2.70)$$

Moment:

$$M = 0 \quad (2.71)$$

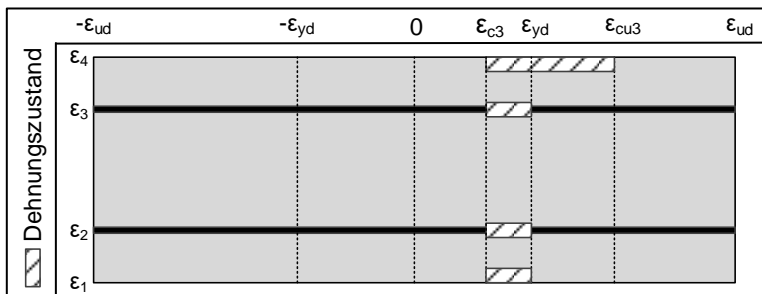


Abb. 2.17: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 2

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den folgenden Gleichungen ausgedrückt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s \quad (2.72)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s \quad (2.73)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.74)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.75)$$

Insgesamt ergibt sich die innere Normalkraft zu:

$$P = f_{cd} t b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.76)$$

Und das innere Moment berechnet sich nach Gleichung (2.77) zu:

$$M = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.77)$$

Das Gleichungssystem ist linear und lässt sich analytisch lösen.

$$\varepsilon_1 = \frac{(P_{I12} - f_{cd} t b) \left[A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \left(\frac{d}{t} - 1 \right) + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right] - M_{I12} \left[A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]}{\left(A_{s2} E_s \frac{d}{t} + A_{s3} E_s \frac{d'}{t} \right) \left[A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \left(\frac{d}{t} - 1 \right) + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right] - \left[-\frac{d}{t} A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \frac{d'}{t} A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \right] \left[A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]} \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{M_{I12} - \varepsilon_1 \left[-\frac{d}{t} A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \frac{d'}{t} A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \right]}{\left[A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \left(\frac{d}{t} - 1 \right) + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]} \quad (2.79)$$

Konfiguration 3

In der Konfiguration 3 ist der Querschnitt gerissen. Sowohl der Beton als auch die Bewehrung in beiden Lagen verhalten sich linear-elastisch (siehe Abb. 2.18 und Abb. 2.20).

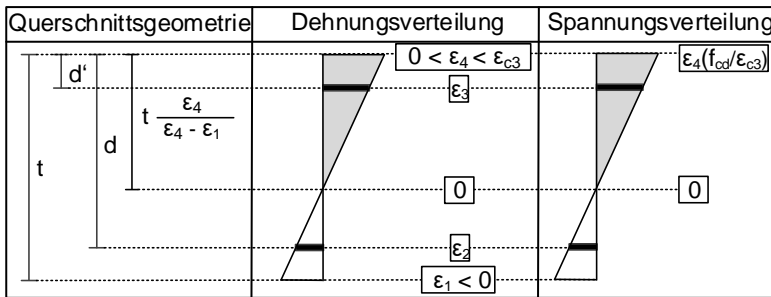


Abb. 2.18: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 3

Mathematisch umfasst die Konfiguration 3 auch die in Abb. 2.19 dargestellte Konfiguration.

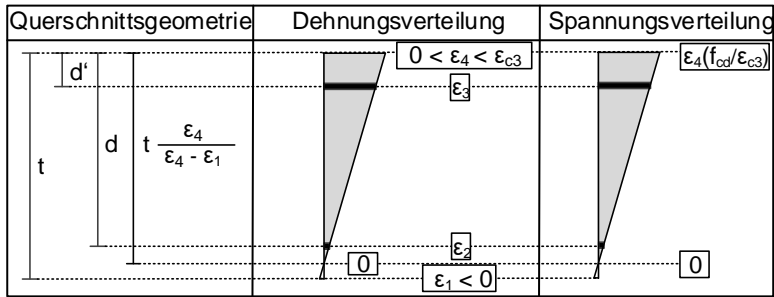


Abb. 2.19: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in einer zur Konfiguration 3 mathematisch äquivalenten Konfiguration

Der Beitrag des Betons zu den inneren Schnittgrößen ist in den Gleichungen (2.80) und (2.81) ausgedrückt.

Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \quad (2.80)$$

Moment:

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \quad (2.81)$$

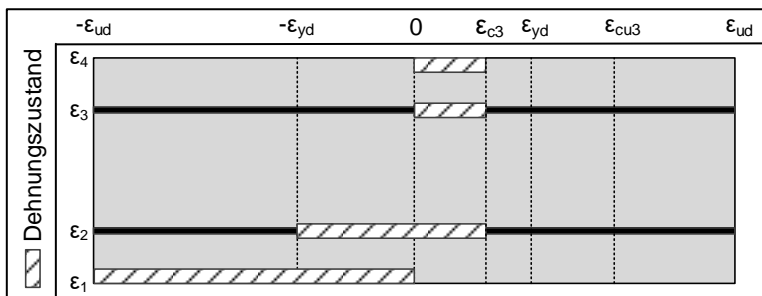


Abb. 2.20: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 3

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den nachfolgenden Gleichungen aufgeführt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (2.82)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.83)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.84)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.85)$$

Insgesamt ergibt sich die innere Normalkraft zu:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.86)$$

Und das innere Moment berechnet sich gemäß Gleichung (2.87) zu:

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.87)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (2.88) bis (2.93) aufgelistet:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \frac{1}{2} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3} E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (2.88)$$

$$g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \frac{1}{12} \varepsilon_4^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 \varepsilon_1 - \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s + P \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\ &+ \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s - P \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 - \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= \frac{1}{4} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4 \varepsilon_1 \\ &- \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\ &- 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Konfiguration 4

In der Konfiguration 4 ist der Betonquerschnitt gerissen und der Grenzdehnwert ε_{c3} wird auf der Druckseite überschritten. Vereinfachend wird für das Aufstellen des Betonbeitrags zu den inneren Schnittgrößen der Betonquerschnitt in die Bereiche a und b aufgeteilt, wie aus Abb. 2.21 ersichtlich ist. Die innere Normalkraft und das innere Moment infolge des Betons sind in den Gleichungen (2.94) bis (2.97) ausgedrückt.

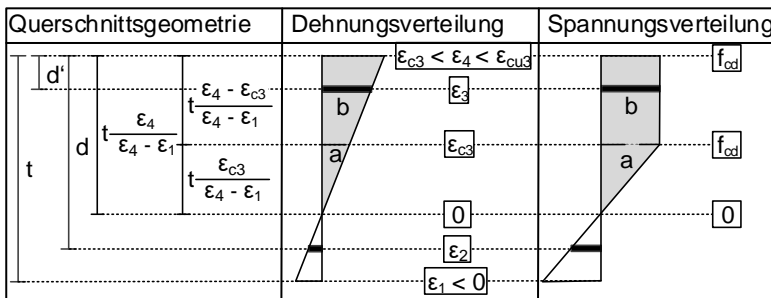


Abb. 2.21: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 4

Mathematisch umfasst die Konfiguration 4 auch die in Abb. 2.22 beschriebene Konfiguration.

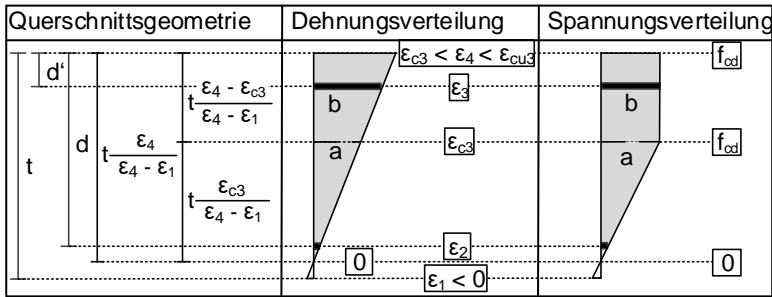


Abb. 2.22: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in einer zur Konfiguration 4 mathematisch äquivalenten Konfiguration

Normalkraft:

$$P_a = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \quad (2.94)$$

$$P_b = f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \quad (2.95)$$

Moment:

$$M_a = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \quad (2.96)$$

$$M_b = f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) \quad (2.97)$$

Konfiguration 4.1

In der Konfiguration 4.1 befindet sich die Bewehrung in beiden Lagen unterhalb der Fließgrenze (siehe Abb. 2.23).

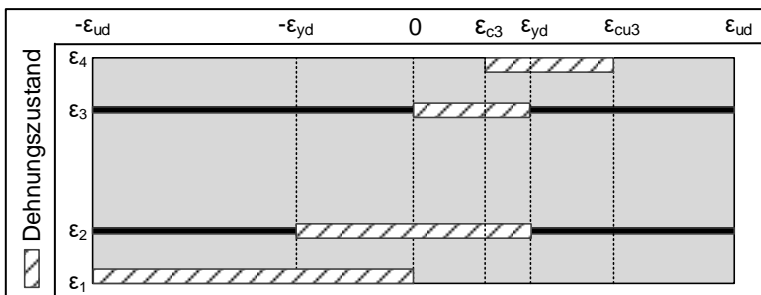


Abb. 2.23: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 4.1

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den folgenden Gleichungen angegeben.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (2.98)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.99)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.100)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.101)$$

Insgesamt ergibt sich die innere Normalkraft zu:

$$P = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (2.102)$$

Und das innere Moment berechnet sich gemäß Gleichung (2.103) zu:

$$M = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.103)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (2.104) bis (2.109) aufgelistet:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = - \frac{1}{2} f_{cd} \varepsilon_{c3} t b + f_{cd} \varepsilon_4 t b + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3} E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) & & (2.105) \\
 &= \frac{1}{2} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_{c3} \right) + f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &\quad - \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &\quad + \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & & (2.106) \\
 &= \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \\
 &\quad + P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} & & (2.107) \\
 &= f_{cd} t b + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\
 &\quad + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s - P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} & & (2.108) \\
 &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b - f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} \\
 &\quad - \left[-2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &\quad + \left[-2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} & & (2.109) \\
 &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b \\
 &\quad + f_{cd} \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} \\
 &\quad - \varepsilon_1) - \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &\quad + \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\
 &\quad - 2M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned}$$

Konfiguration 4.2

Die Konfiguration 4.2 unterscheidet sich von der Konfiguration 4.1 durch das Fließen der oberen Lage der Bewehrung (siehe Abb. 2.24).

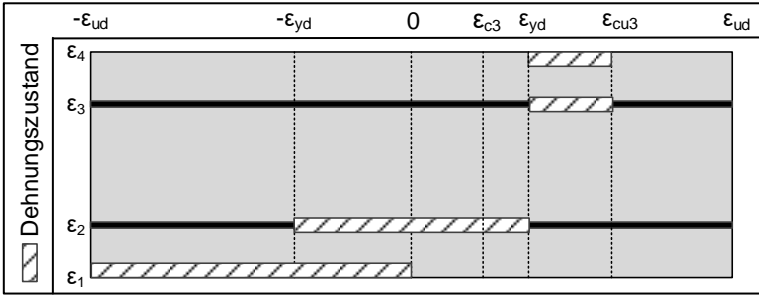


Abb. 2.24: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 4.2

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den Gleichungen (2.110) bis (2.113) ausgedrückt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (2.110)$$

$$P_{s3} = A_{s3} f_{yk} \quad (2.111)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.112)$$

$$M_{s3} = A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.113)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + A_{s3} f_{yk} \quad (2.114)$$

Und das innere Moment beträgt:

$$M = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.115)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (2.116) bis (2.121) aufgelistet:

$$\begin{aligned}
 f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= -\frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}tb + f_{cd}\varepsilon_4tb \\
 &+ \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2}E_s \\
 &+ A_{s3}f_{yk}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_{c3} \right) \\
 &+ f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &- \left[\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s - A_{s3}f_{yk} + P \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= f_{cd}tb + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t}(2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s + A_{s3}f_{yk} - P
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b - f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} \\
 &- \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &- 2A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b \\
 &+ f_{cd} \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} \\
 &- \varepsilon_1) - \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right. \\
 &- \left. 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ 2A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

Konfiguration 4.3

In der Konfiguration 4.3 fließt die Bewehrung in beiden Lagen (siehe Abb. 2.25).

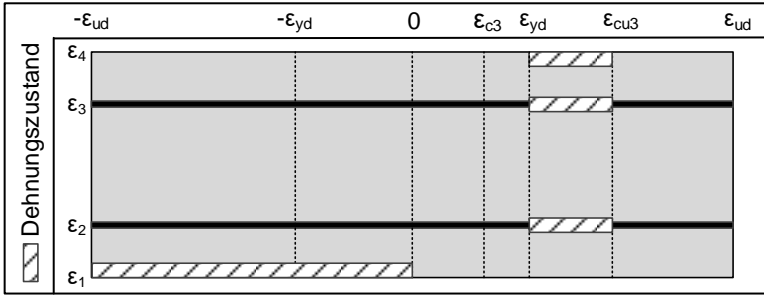


Abb. 2.25: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 4.3

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ergibt sich nach den Gleichungen (2.122) bis (2.125).

Normalkraft:

$$P_{s2} = A_{s2}f_{yk} \quad (2.122)$$

$$P_{s3} = A_{s3}f_{yk} \quad (2.123)$$

Moment:

$$M_{s2} = -f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (2.124)$$

$$M_{s3} = A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (2.125)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2}f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb + A_{s2}f_{yk} + A_{s3}f_{yk} \quad (2.126)$$

Und das innere Moment beträgt:

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2}f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \\ & + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) \\ & - f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) + A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \end{aligned} \quad (2.127)$$

Die für das Programm erforderliche Funktionen sind in den Gleichungen (2.128) bis (2.133) aufgelistet:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = & -\frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}tb + f_{cd}\varepsilon_4tb \\ & + A_{s2}f_{yk}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + A_{s3}f_{yk}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_{c3} \right) \\
 &+ f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &- f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \\
 &- M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = -A_{s2} f_{yk} - A_{s3} f_{yk} + P \tag{2.130}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = f_{cd} t b + A_{s2} f_{yk} + A_{s3} f_{yk} - P \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b - f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} \\
 &+ 2 f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 2 A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ 2 M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b + f_{cd} \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &- 2 f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2 A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &- 2 M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

Es wird davon ausgegangen, dass ein Querschnitt im nichtlinearen Zustand einer der acht erläuterten Querschnittskonfigurationen entspricht. So wird algorithmisch eine Konfiguration nach der anderen durchlaufen, bis eine das Wertepaar (M, P) liefern kann und dabei die Randbedingungen bezüglich der Dehnungen ε_1 , ε_2 , ε_3 und ε_4 einhält. Wenn keine passende Querschnittskonfiguration gefunden werden kann, bedeutet dies, dass der Querschnittswiderstand überschritten ist. Die wesentliche Struktur des verwendeten Algorithmus ist Abb. 2.26 zu entnehmen.

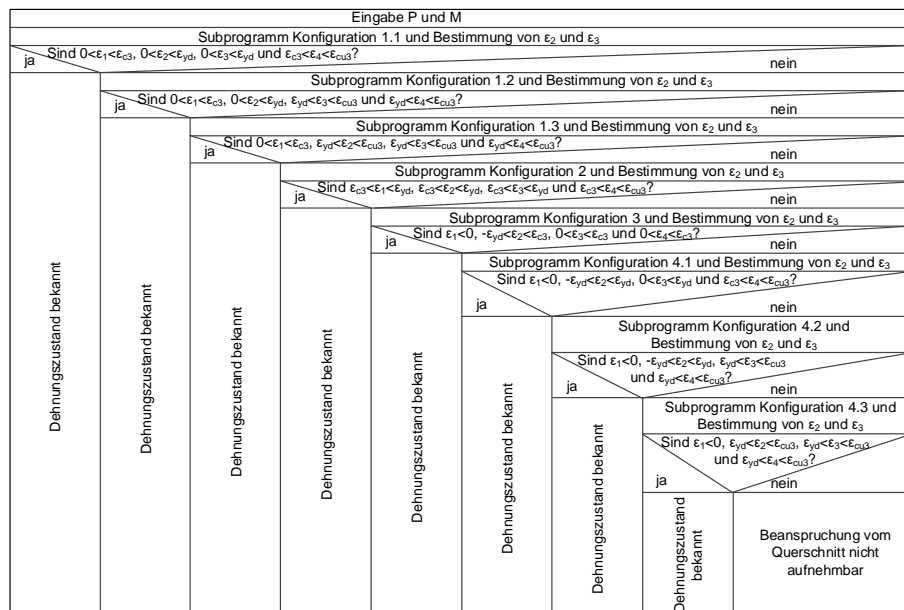


Abb. 2.26: Struktogramm des Subprogramms nach DIN 66261 zur Bestimmung der Biegesteifigkeit im nichtlinearen Bereich

2.3.2.2 Berücksichtigung unterschiedlicher Steifigkeiten über die Druckgliedhöhe

Um unterschiedliche Steifigkeiten über die Druckgliedhöhe zu berücksichtigen, würden üblicherweise analytische Methoden numerischen Methoden den Platz überlassen und geschlossene Lösungen würden durch angenäherte Lösungen ersetzt werden. Stahlbetondruckglieder werden aber in dieser Arbeit als Teil von Sandwichwänden untersucht, bei denen die Verformungsberechnung analytisch erfolgen soll (siehe Kapitel 3). Dies setzt eine analytische Herangehensweise für die Berücksichtigung einer in einer Betonschale lokal abweichenden Steifigkeit voraus.

In diesem Abschnitt wird eine numerische Methode, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Kräfte, mit einer analytischen Alternative verglichen.

Numerische Methode, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Kräfte

Sobald der gemeinsame lineare Bereich der Materialgesetze des Stahls und des Betons lokal verlassen wird, ändert sich die Steifigkeit des Querschnitts an der betroffenen Stelle des Druckglieds. Die grundlegende Annahme einer über die Druckgliedhöhe konstanten Biegesteifigkeit gilt dann nicht mehr, so dass die Differentialgleichung (2.7) mit ihrer analytischen Lösung nicht mehr verwendet werden darf. Traditionell wird im Stahlbetonbau das Prinzip der virtuellen Kräfte erfolgreich verwendet, um die Verformung des Druckglieds an jeder Stelle zu bestimmen. Dieses beruht auf dem Integrieren des Produkts aus dem Momentenverlauf, welches aus den äußeren Einwirkungen resultiert, und dem aus einer virtuellen Kraft resultierenden Momentenverlauf über die Druckgliedhöhe, wie aus Gleichung (2.134) ersichtlich wird.

$$f = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx \quad (2.134)$$

Die Struktur des Programms, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Kräfte, ist vereinfacht in Abb. 2.27 dargestellt.

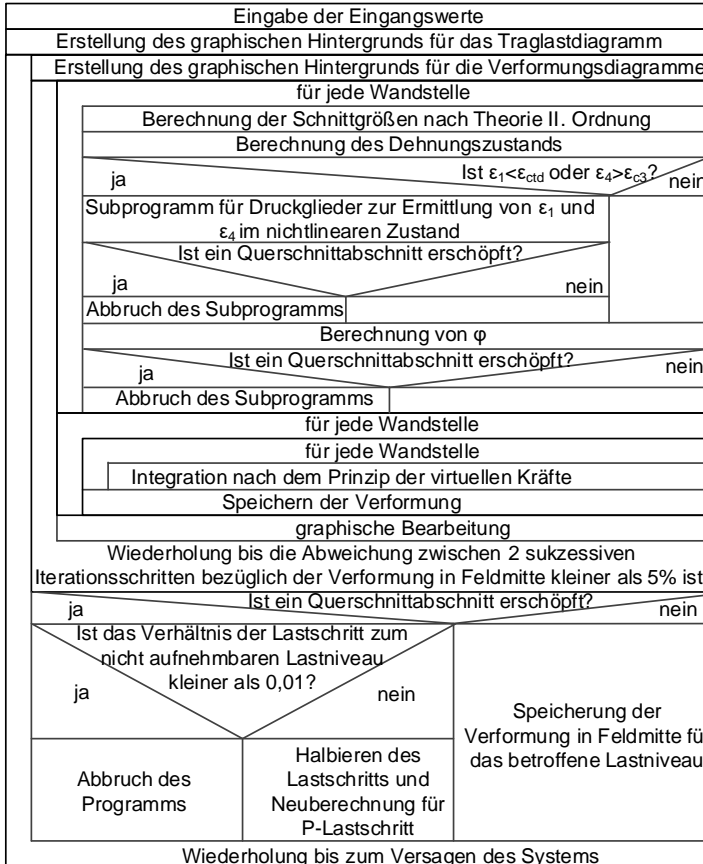


Abb. 2.27: Struktogramm des Programms nach DIN 66261 zur Tragfähigkeitsberechnung von Druckgliedern, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Kräfte

Methode nach Horstmann 2010

Als Alternative zu dem Prinzip der virtuellen Kräfte wird die Methode nach *Horstmann 2010* gewählt, um auf die Verwendung der Differentialgleichung (2.7) wegen lokaler materialbezogener Nichtlinearitäten nicht verzichten zu müssen. Dieser berechnet die Biegesteifigkeit an den nichtlinearen Stellen der Betonschale (siehe Abschnitt 2.3.2.1) und bildet einen Mittelwert der unterschiedlichen Biegesteifigkeiten für die ganze Betonschale, den er bei der nächsten Laststufe für alle Abschnitte der Betonschale im linearen Zustand verwendet. Anders formuliert verschmiert *Horstmann 2010* eine lokal auftretende materialbezogene Nichtlinearität über das ganze Bauteil. So kann er die Differentialgleichung (2.7) weiterverwenden. Die Genauigkeit dieser Methode hängt

2 Druckglieder aus Stahlbeton

von dem für die Laststeigerung verwendeten Lastschritt ab und auch von der Art der Mittelwertbildung. Dafür schlägt *Horstmann 2010* drei mögliche Ansätze vor, die in Tab. 2.5 dargestellt werden.

Tab. 2.5: Mittelwertbildung nach *Horstmann 2010* zur Verschmierung lokal auftretender materialbezogener Nichtlinearitäten über das ganze Bauteil

Art der Mittelwertbildung	Biegesteifigkeit	Dehnsteifigkeit
A: arithmetisch	$EI_{m,A} = \frac{1}{n_L} \sum_{j=1}^{n_L} EI_{i,j}$	$EA_{m,A} = \frac{1}{n_L} \sum_{j=1}^{n_L} EA_{i,j}$
B: mit der Durchbiegungslinie gewichtet	$EI_{m,B} = \frac{\sum_{j=1}^{n_L} EI_{i,j} w_{i-1,j}}{\sum_{j=1}^{n_L} w_{i-1,j}}$	$EA_{m,B} = \frac{\sum_{j=1}^{n_L} EA_{i,j} w_{i-1,j}}{\sum_{j=1}^{n_L} w_{i-1,j}}$
C: mit den Schnittkraftverläufen gewichtet	$EI_{m,C} = \frac{\sum_{j=1}^{n_L} EI_{i,j} M_{i-1,j}}{\sum_{j=1}^{n_L} M_{i-1,j}}$	$EA_{m,C} = \frac{\sum_{j=1}^{n_L} EA_{i,j} N_{i-1,j}}{\sum_{j=1}^{n_L} N_{i-1,j}}$

Der Verfasser entscheidet sich für die arithmetische Mittelwertbildung, die wie in Abb. 2.29 und Abb. 2.30 dargestellt, gute Ergebnisse liefert. Die Struktur des Programms zur Traglastbestimmung ist vereinfacht in Abb. 2.28 wiedergegeben.

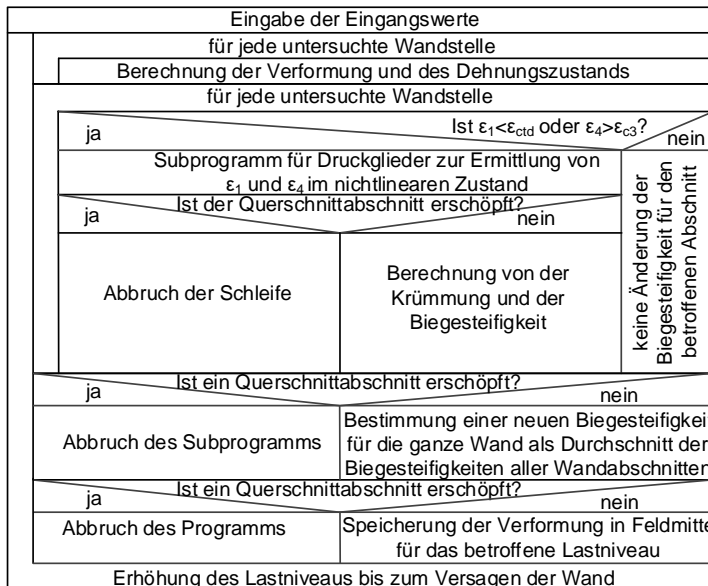


Abb. 2.28: Struktogramm des Programms nach *DIN 66261* zur Tragfähigkeitsberechnung von Druckgliedern, basierend auf einer analytischen Methode

Vergleich zwischen der numerischen und der analytischen Vorgehensweise

Die durchgeführte Parameterstudie ist bezüglich der Randbedingungen und der variierten Parameter identisch zu der in Abschnitt 2.3.3 durchgeführten Parameterstudie.

Sowohl beim Variieren der Schlankheit (siehe Abb. 2.29) als auch beim Variieren der Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft (siehe Abb. 2.30) ist eine quasi-völlige Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der analytischen und der numerischen Methode zu beobachten. Somit wird für die analytische Methode die Wahl der arithmetischen Mittelwertbildung bestätigt (Ansatz A von Horstmann 2010). Die Ansätze B und C müssen deshalb nicht untersucht werden.

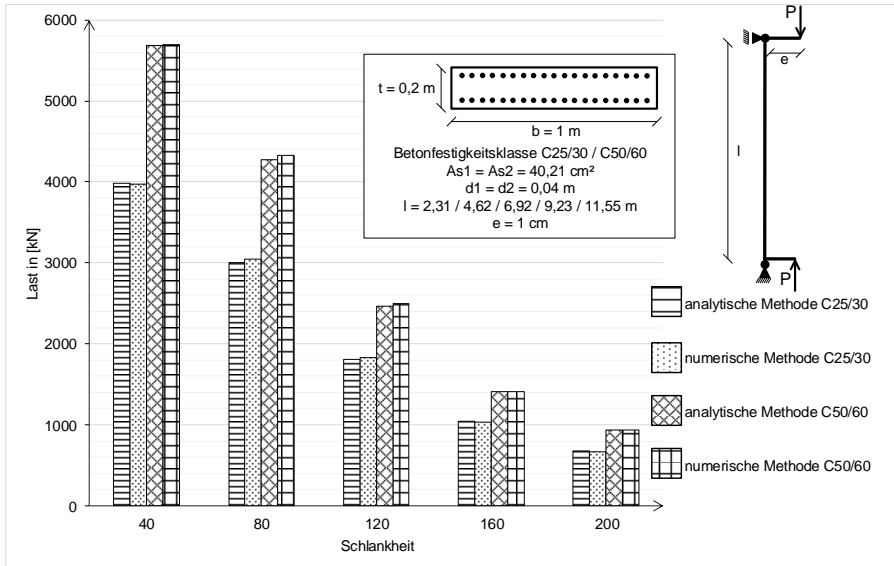


Abb. 2.29: Vergleich der numerischen und der analytischen Methode bei unterschiedlichen Schlankheiten für die Betonfestigkeitsklassen C25/30 und C50/60

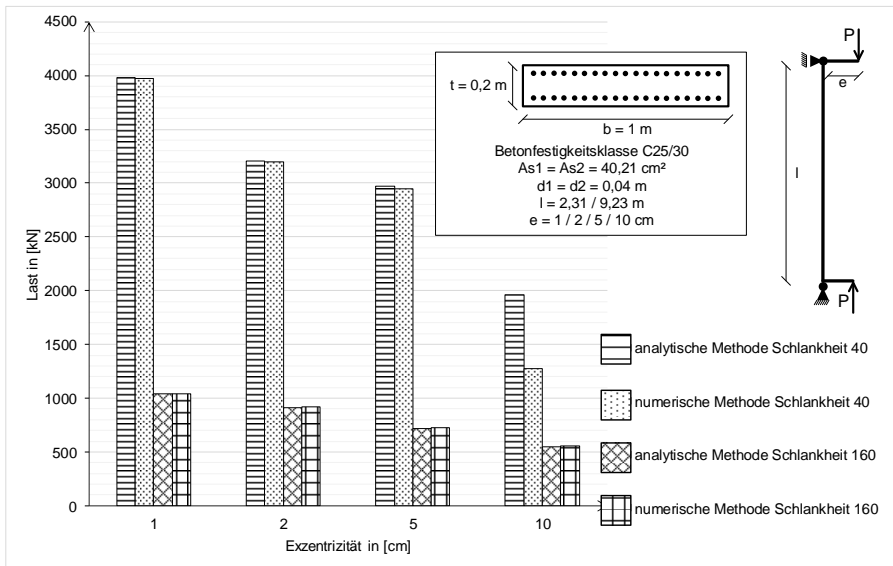


Abb. 2.30: Vergleich der numerischen und der analytischen Methode bei unterschiedlichen Exzentrizitäten für die Betonfestigkeitsklasse C25/30

2.3.3 Beurteilung des Sicherheitsniveaus und der Wirtschaftlichkeit

Für jede Konfiguration der vorliegenden Parameterstudie wird das eigene Bemessungsprogramm mit zwei Bemessungsverfahren (Verfahren mit Nennkrümmung und allgemeines Verfahren nach Absatz 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1*) und einer Traglastberechnung verglichen. Die Parameterstudie erfolgt mit dem maximal zugelassenen Bewehrungsgrad (siehe Kapitel 5), um einen so großen Tragwiderstandzuwachs wie möglich oberhalb der Rissbildung zu erhalten. Somit kann das eigene Bemessungsprogramm am besten im gerissenen Zustand evaluiert werden.

Die Berechnung (Mittelwert des Tragwiderstandes) erfolgt mit der Software *Stab2D-NL* (*Pfeiffer 2018*). Das zugrundeliegende Materialgesetz ist sowohl für die Formänderung als auch für die Bemessung die parabelförmige Spannungs-Dehnungs-Linie, wie sie im Absatz 5.8.6 der *DIN EN 1992-1-1* vorgestellt wird. Allerdings basiert diese hier zweckmäßigerweise auf Mittelwerten der Materialkennwerte ohne Sicherheitskoeffizienten. Die Bemessung (Bemessungswert des Tragwiderstandes) erfolgt ebenfalls mit der Software *Stab2D-NL* nach dem allgemeinen Verfahren gemäß *DIN EN 1992-1-1*. Sie beruht auf der im Absatz 5.8.6 vorgesehenen Spannungs-Dehnungs-Linie, die sowohl für die Formänderung als auch für die Bemessung gültig ist, und folgt dem dort vorgesehenen Sicherheitskonzept (siehe Tab. 2.3). Die Traglasten werden sowohl für die Bemessung als auch für die Berechnung mit *Stab2D-NL* ermittelt.

Sowohl die Berechnung als auch die Bemessung mit der Software *Stab2D-NL* berücksichtigt die Zugversteifung durch den Beton nach der Rissbildung („Tension-Stiffening“). Die Rissbildung wird über die Druckgliedhöhe verschmiert. Der Betonzugzone wird selbst nach Überschreitung der maximal aufnehmbaren Zugspannung an ihrem

Rand ein Spannungsniveau zugeordnet, das mit fortschreitender Dehnung der Zugbewehrung sinkt. Wenn die Bewehrung anfängt zu fließen, wird diese Spannung zu null (Pfeiffer 2018). Der absteigende Abschnitt der Spannungslinie auf Zug wurde linear für die Parameterstudie eingegeben.

In Abb. 2.31 werden die für die Parameterstudie verwendeten Spannungs-Dehnungs-Linien zusammengefasst.

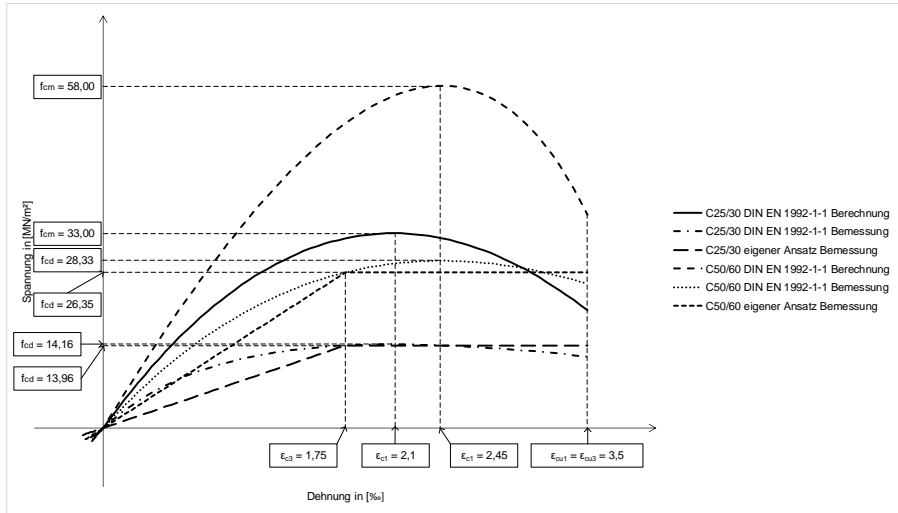


Abb. 2.31: Im Rahmen der Parameterstudie für den Beton verwendete Spannungs-Dehnungs-Linien (siehe Abb. 2.32 bis Abb. 2.35)

Bei einer konstanten Exzentrizität von 1 cm und der Betonfestigkeitsklasse C25/30 wird die Schlankheit über die Druckgliedhöhe variiert. Die Ergebnisse sind Abb. 2.32 zu entnehmen. Der eigene Ansatz weist bei jeder Schlankheit ein Sicherheitsniveau auf, das dem europäischen normativen Regelwerk entspricht. Seine Wirtschaftlichkeit wird mit zunehmender Schlankheit immer besser. Bei einer geringen Schlankheit von 40 ist das Wirtschaftlichkeitsniveau am schlechtesten. Dies lässt sich dadurch erklären, dass ein Betonversagen für das Erreichen der Traglast maßgebend wird und dass der Bemessungsansatz aufgrund seiner auf der sicheren Seite liegenden bilinearen Approximation der Spannungs-Dehnungs-Linie für den Beton benachteiligt wird. Bei größeren Schlankheiten und einem Versagen der Zugzone kommt dieser Nachteil weniger und nur indirekt zum Ausdruck.

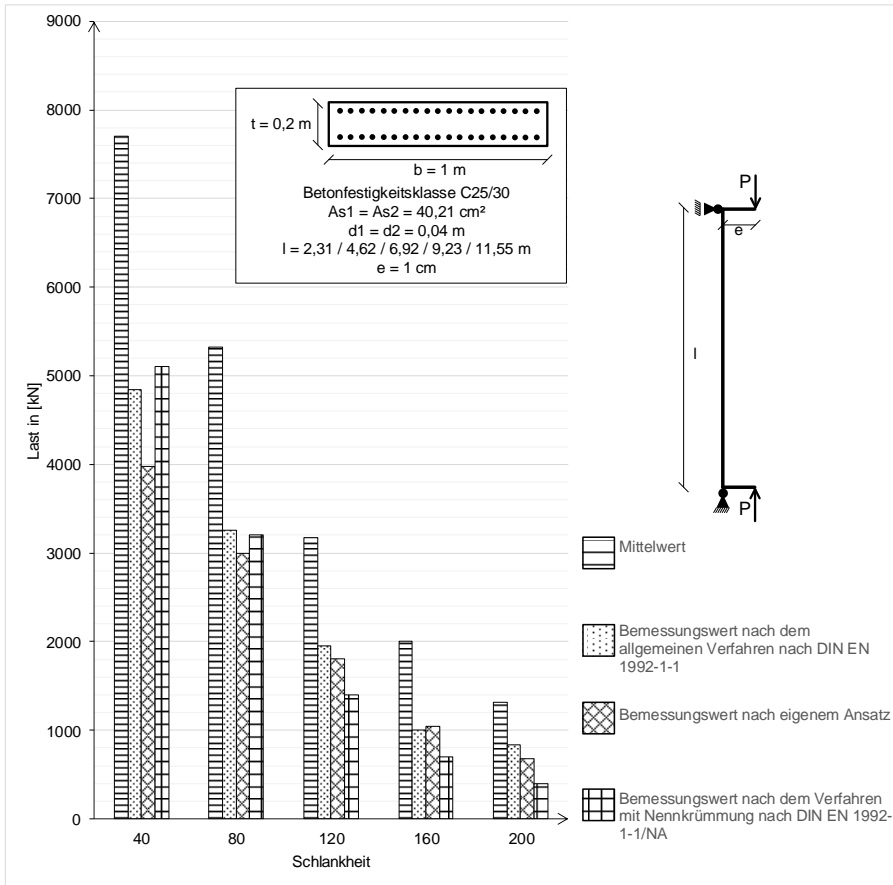


Abb. 2.32: Tragwiderstand bei der Betonfestigkeitsklasse C25/30 in Abhängigkeit der Schlankheit

Im zweiten Schritt der Parameterstudie wird bei einer konstanten Exzentrizität von 1 cm und diesmal der Betonfestigkeitsklasse C50/60 die Schlankheit variiert. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.33 dargestellt. Es lässt sich das Gleiche wie für die Betonfestigkeitsklasse C25/30 beobachten.

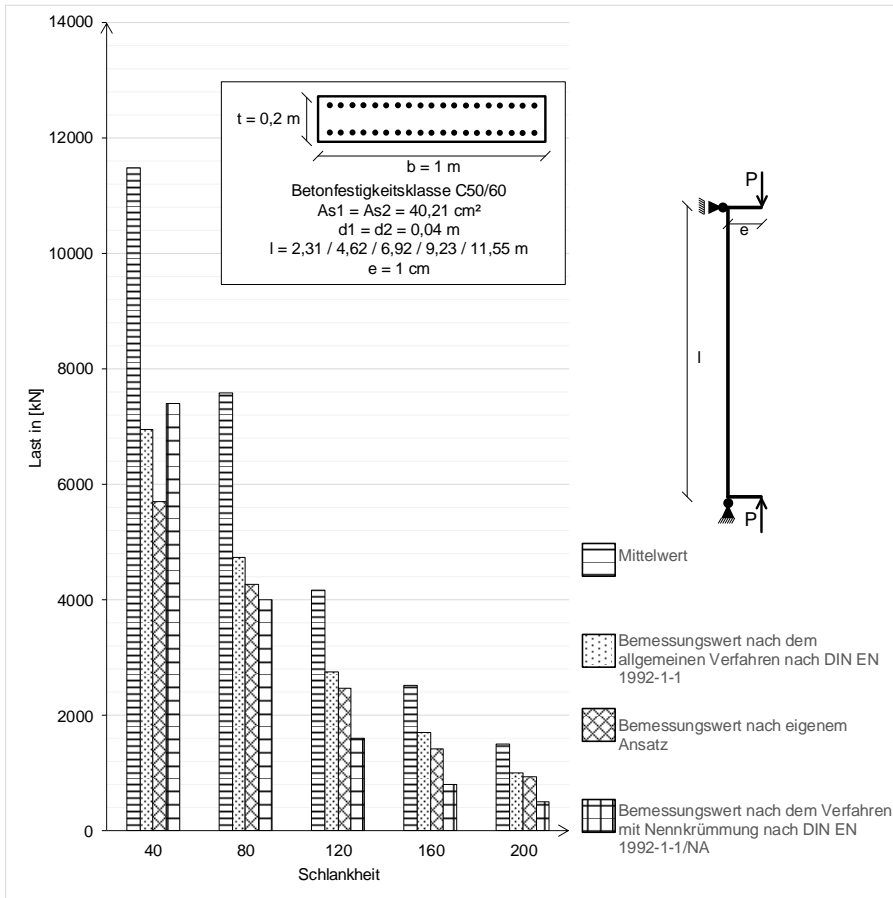


Abb. 2.33: Tragwiderstand bei der Betonfestigkeitsklasse C50/60 in Abhängigkeit der Schlankheit

Als letztes wird für eine Schlankheit von 40 (siehe Abb. 2.34) und eine Schlankheit von 160 (siehe Abb. 2.35) bei der Betonfestigkeitsklasse C25/30 die Exzentrizität, mit der die Normalkraft einwirkt, zwischen 1 cm und 10 cm variiert. Während bei der Schlankheit von 40 der eigene Ansatz erst bei großen Exzentrizitäten (und somit großen Momenten) eine gute Wirtschaftlichkeit zeigt, ist er bei einer Schlankheit von 160 schon bei geringeren Exzentrizitäten sehr wirtschaftlich. Die Ursache liegt, wie oben für den Einfluss der Schlankheit erläutert, in der Versagensart und in dem verwendeten Betonmodell begründet. Das Sicherheitsniveau des eigenen Bemessungsverfahrens erreicht in den untersuchten Konfigurationen den Standard von *DIN EN 1992-1-1*.

2 Druckglieder aus Stahlbeton

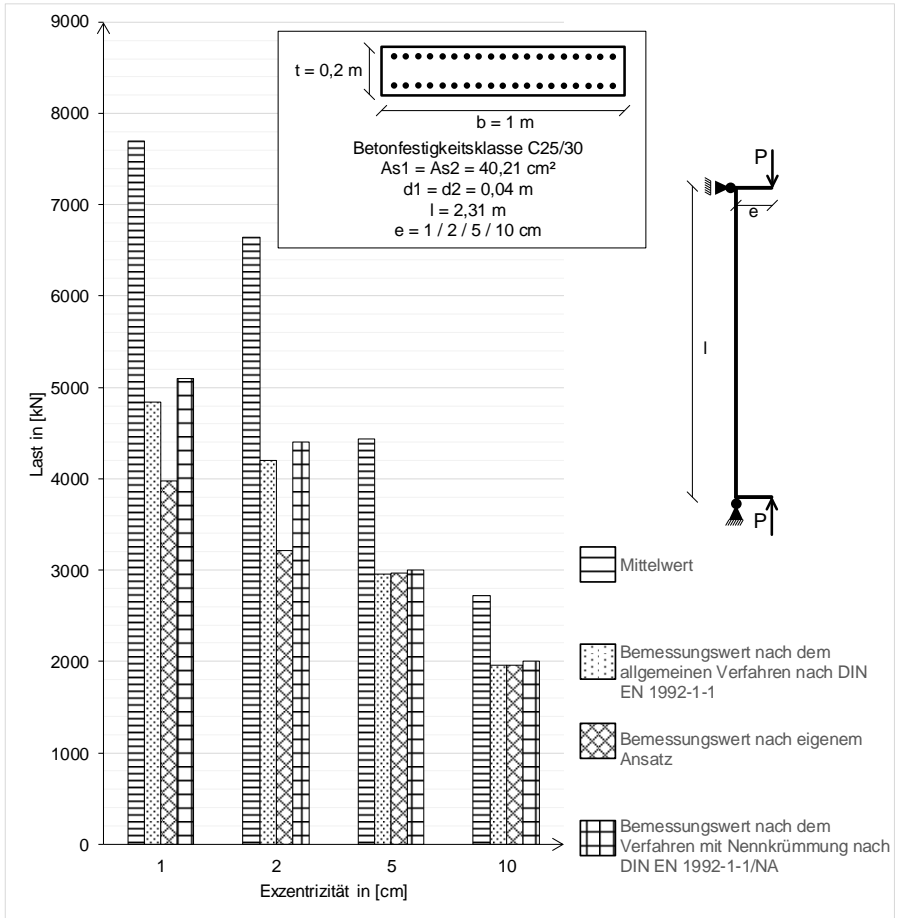


Abb. 2.34: Tragwiderstand bei der Schlankheit 40 in Abhängigkeit der Exzentrizität

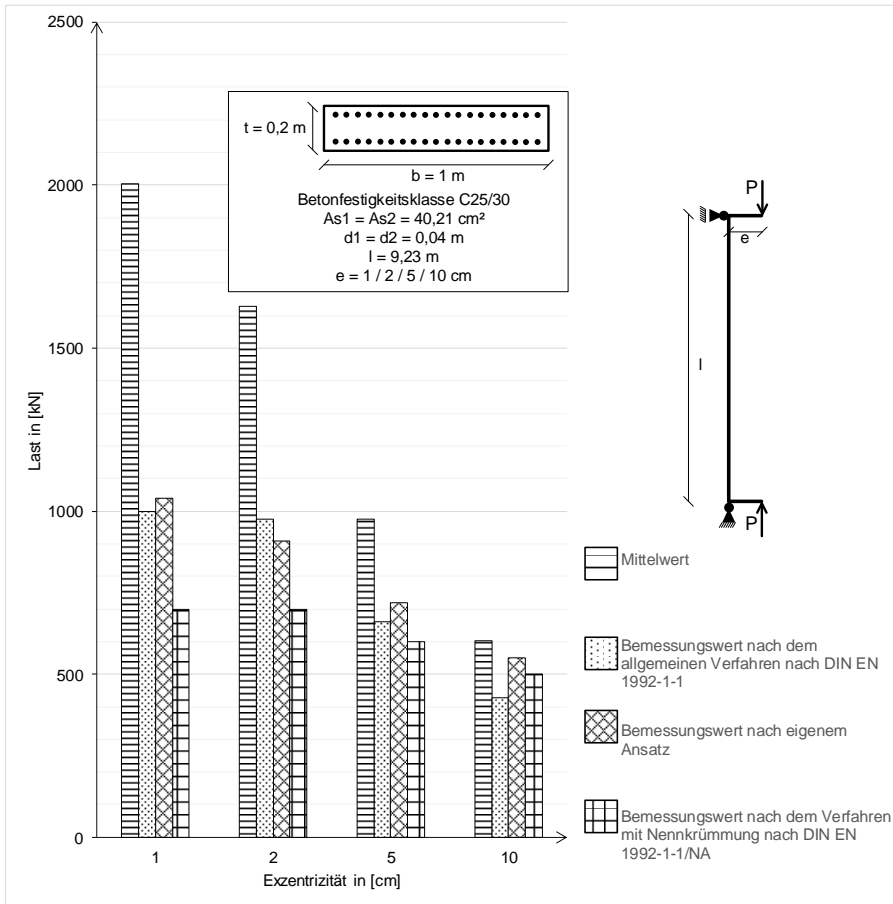


Abb. 2.35: Tragwiderstand bei der Schlankheit 160 in Abhängigkeit der Exzentrizität

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der selbst entwickelte Bemessungsansatz sich sowohl als sicher als auch als wirtschaftlich erweist. Dies gilt für eine große Bandbreite von Schlankheiten, Betonfestigkeitsklassen und auftretende Exzentrizitäten.

3 Erweiterung der Sandwichtheorie

3.1 Stand des Wissens

In *Stamm u. Witte 1974* wird eine Erläuterung der analytischen Sandwichtheorie in deutscher Sprache gegeben.

3.1.1 Annahmen zur Verwendung der Sandwichtheorie

Die Sandwichtheorie ist nur gültig, solange Grundannahmen in Form von geometrischen oder materialbezogenen Annäherungen eingehalten werden. Diese werden in Hinsicht auf die für diese Arbeit spezifischen Randbedingungen diskutiert.

Die erste Annahme sieht ein linear-elastisches Materialverhalten für alle Schichten vor. Sowohl das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons als auch das eines Dämmmaterials deuten auf ein nichtlineares Verhalten hin, das mit höher werdendem Spannungsniveau immer ausgeprägter wird und dessen Linearisierung mit einem immer größer werdenden Fehler einhergeht. Wie dieses Problem für das Material Beton angegangen wird, wurde in Abschnitt 2.3.2 erläutert. Auf die Nichtlinearität des Dämmstoffmaterials wird durch die Wahl einer angepassten rechnerischen Schubsteifigkeit geachtet.

Eine zweite Annahme betrifft die Homogenität der Schichten. Weder die Stahlbetonschalen noch die Kernschicht sind jeweils aufgrund der Bewehrungslagen und der Verbindungsmittel homogen. Die Art der Inhomogenität ist aber in beiden Fällen unterschiedlich. Bei einer Schale aus Stahlbeton tritt die Inhomogenität in Richtung ihrer Dicke (in z-Richtung) auf, während bei der Kernschicht die Inhomogenität in x-Richtung (siehe Abb. 1.1) auftritt. Es ist üblich, die Eigenschaften der diskreten Verbindungsmittel über die Länge des Sandwichelements (in x-Richtung) zu verschmieren, um eine rechnerisch homogene Kernschicht modellieren zu können (*Horstmann 2010*).

Die dritte Annahme ist, dass die Kernschicht im Vergleich zu den Deckschichten dehnweich ist und dass diese nur vernachlässigbar kleine Normalspannungen aufnimmt. Bei Schalen aus Stahlbeton und einer Kernschicht aus Dämmmaterial lässt sich diese Annahme erfüllen.

Eine vierte Annahme besteht darin, für die Trag- und die Vorsatzschale von der Gültigkeit der Bernoullischen Annahmen, wie dem Ebenbleiben der Querschnitte und ihrer Schubstarrheit, auszugehen. Diese Annahme wird im Stahlbetonbau stets getroffen und stellt auch bei Sandwichbauteilen eine wirklichkeitsnahe Annahme dar.

Die fünfte Annahme betrifft die Position der Schichten zueinander. Diese müssen parallel zueinander bleiben. Somit darf die Kernschicht nicht zusammendrückbar sein. *Weiler 2018* überprüft für die in seiner Arbeit betrachteten Randbedingungen die Gültigkeit dieser Annahme mit einem photogrammetrischen Messsystem. Darüber hinaus muss jedoch u. a. beachtet werden, dass die Einhaltung dieser Annahme stark von der Art der Belastung abhängt und dass die Rissbildung in den Schalen eine Einschränkung zur lokalen Gültigkeit der Annahme darstellen kann.

Die sechste Annahme ist die kleiner Verformungen. Diese in der technischen Mechanik klassische Annahme ermöglicht die Vereinfachung der die Verformung beschreibenden Differentialgleichungen. Der Sinus des Winkels ist gleich dem Winkel. Die Gültigkeit der Annahme kleiner Verformungen kann bei Sandwichelementen, deren Kernschicht eine kleine Schubsteifigkeit aufweist und bei denen große Schubverformungen zu den Biegeverformungen hinzukommen, gefährdet sein.

Zusammenfassend lassen die in dieser Arbeit vorhandenen Randbedingungen eine Anwendung der Sandwichtheorie zu.

3.1.2 Berücksichtigung eines einwirkenden Biegemomentes

Stamm u. Witte 1974 untersuchen sowohl einachsig als auch zweiachsig spannende Sandwichelemente. Für die vorliegende Arbeit ist lediglich der Teil über einachsig spannende Sandwichelemente relevant. Die Autoren unterscheiden immer zwischen dünnen Deckschichten und dicken oder profilierten Deckschichten. Die ersten gelten als biegeweich und das Widerstandsmoment besteht in diesem Fall lediglich aus einem Sandwichanteil, d. h. aus einem Normalkräftepaar in den Schalen. Der Fall mit dicken oder profilierten Deckschichten ist für Sandwichelemente mit Schalen aus Stahlbeton relevant. In diesem Fall setzt sich das Widerstandsmoment aus dem Sandwichanteil und aus den Eigenanteilen der jeweiligen Schalen zusammen. Die Autoren entwickeln aus der physikalischen und geometrischen Analyse eines Sandwichelementes im verformten Zustand mathematische Beziehungen, die zur Aufstellung einer Differentialgleichung sechsten Grades führen:

$$-\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right) \frac{d^6 w}{d^6 x} + \left(\frac{N}{A} + \frac{B}{B_s}\right) \frac{d^4 w}{d^4 x} - \frac{N}{B_s} \frac{d^2 w}{d^2 x} = \frac{q}{B_s} - \frac{1}{A} \frac{d^2 q}{d^2 x} \quad (3.1)$$

Analytische Lösungen dieser Differentialgleichung werden für unterschiedliche Lagerungsbedingungen und Beanspruchungen des Sandwichelementes in *Stamm u. Witte 1974* angegeben.

Wissenschaftliche Arbeiten in den letzten Jahrzehnten über Sandwichelemente aus Stahlbeton in Deutschland nehmen fast immer Bezug auf die Arbeit von *Stamm u. Witte 1974* und versuchen den Kenntnisstand darüber hinaus zu erweitern, indem die Spezifika der Kernschicht oder der Stahlbetonschalen berücksichtigt werden. Außer *Shams 2015* betrachten nach Kenntnis des Verfassers alle diese Arbeiten als äußere Einwirkung lediglich ein Biegemoment, dessen Ursache unterschiedlich sein kann (Querlasten, Temperaturbeanspruchung etc.). Nachfolgend werden Arbeiten zitiert, die für aus Stahlbeton ausgeführte Sandwichelemente neue Erkenntnisse liefern konnten. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, vielmehr fasst sie den Stand zusammen, den der Verfasser als Grundlage für seine Arbeit verwendet hat.

Gastmeyer 2003 liefert einen entscheidenden Beitrag zur Modellierung der Kernschicht, indem er ein Ingenieurmodell für das Zusammenwirken von Verbindungsmitteln und Dämmmaterial entwickelt. In Anlehnung an im Verbundbau für die Fuge zwischen Baustahl und Beton geltende Normen entwickelt *Weiler 2018* eine neue Definition der rechnerischen Schubsteifigkeit der Kernschicht.

Pahn 2011 liefert einen Beitrag zur Berechnung der Schnittgrößen bei Einfeldträgern mit Sandwichquerschnitten. *Horstmann 2010* berücksichtigt über einen analytischen Weg die Rissbildung eines Sandwichelementes mit Stahlbetonschalen. Er verschmiert die bereichsweise auftretende Rissbildung über die ganze Elementlänge (siehe Abschnitt 2.3.2.2). *Müller 2015* berücksichtigt die Rissbildung in den Stahlbetonschalen über einen numerischen Weg. Dafür verwendet er den Ansatz von *Schwarze 1984*.

3.1.3 Berücksichtigung einer einwirkenden Normalkraft

Die Sandwichtheorie wurde von *Stamm u. Witte 1974* so aufgestellt, dass eine einwirkende Normalkraft und die Theorie II. Ordnung berücksichtigt werden können (siehe Gleichung (3.1)). *Stamm u. Witte 1974* setzen allerdings die Normalkraft in allen ihren Rechenbeispielen immer gleich null. Nur im rein theoretischen Fall – dem Knickfall – berücksichtigen sie eine einwirkende Normalkraft. Für diesen Fall bestimmen sie eine kritische Last, die das Pendant für Sandwichelemente zu der Eulerschen Knicklast für homogene Druckstäbe darstellt. Dafür setzen sie in Gleichung (3.1) die Linienlast q gleich null. Somit erhalten sie die folgende homogene Differentialgleichung:

$$-\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right) \frac{d^6 w}{dx^6} + \left(\frac{N}{A} + \frac{B}{B_s}\right) \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N}{B_s} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.2)$$

Stamm u. Witte 1974 setzen $N = -P$ ein und lösen diese Differentialgleichung. Es wird an dieser Stelle nicht im Detail auf den aufwendigen Lösungsvorgang, sofern er analytisch ist, eingegangen. Setzt man einen Exponentialansatz in diese Gleichung ein, nimmt das Problem die Form der Suche nach den Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms (hier vierten Grades) an. Die Bestimmung der vier Integrationskonstanten nimmt vier Randbedingungen in Anspruch und erfolgt mit der Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems. Dieses lässt sich mit seiner Koeffizientenmatrix zusammenfassen. Sucht man eine andere Lösung als die triviale Nulllösung, muss die Koeffizientendeterminante und somit die Sinusfunktion gleich null sein. Damit ergibt sich:

$$\sin \lambda = 0 \quad (3.3)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{v^4 + 4\mu^4} - v^2)} = \pi \quad (3.4)$$

Nach längerer Umformung kommen *Stamm u. Witte 1974* auf die folgende kritische Last:

$$P_k = \frac{\pi^2(1 + \alpha + \pi^2\alpha\beta) B_s}{1 + \pi^2\beta} \frac{1}{l^2} \quad (3.5)$$

Ist die Schubsteifigkeit der Kernschicht gleich null, entspricht die Knicklast der Summe der jeweiligen Eulerschen Knicklasten der Schalen:

$$P_k = \pi^2 \frac{B_u + B_o}{l^2} \tag{3.6}$$

Ist die Schubsteifigkeit der Kernschicht unendlich groß, entspricht die Knicklast des Sandwichelementes der Eulerschen Knicklast eines Druckstabes mit der Biegesteifigkeit $B = B_u + B_o + B_s$:

$$P_k = \pi^2 \frac{B}{l^2} \tag{3.7}$$

Genau wie die Eulersche Knicklast eines Druckstabes ist die von *Stamm u. Witte 1974* für Sandwichelemente definierte Knicklast eine rein theoretische Größe. Unberücksichtigt bleibt bei *Stamm u. Witte 1974* jedoch der bei Sandwichwänden vorliegende Fall einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft.

Shams 2015 erkennt dieses Problem, das eine praktische Anwendung der Sandwichtheorie für Sandwichwände unter vertikaler Last nicht zulässt, und versucht es zu lösen. Er geht davon aus, dass eine exzentrische Normalkraft ein Moment verursacht, das gleich dem Produkt der Normalkraft und ihrer Exzentrizität ist. Kern des Problems ist es, die Exzentrizität zu definieren. Für *Shams 2015* ist sie gleich dem Abstand zwischen dem Lastangriffspunkt und dem Schwerpunkt des Sandwichelementes. Er verwendet die Definition des ideellen Schwerpunkts für starre Körper. Ein Sandwichelement ist aber aufgrund seiner Kernschicht kein starrer Körper. Diese Definition berücksichtigt u. a. die Kernschichteigenschaften nicht und führt schnell zu falschen Ergebnissen. Klar wird dies, wenn man zum Beispiel eine Normalkraft betrachtet, die mittig auf die Tragschale einer Sandwichwand mit einer komplett schubweichen Kernschicht einwirkt (siehe Abb. 3.1 links). In diesem Fall verhält sich die Tragschale, als ob sie allein stehen würde. Sie verbiegt sich nicht, weil die nicht aktivierte Vorsatzschale die Lage des Schwerpunkts nicht zu sich verschieben kann und somit kein Moment induziert wird. Dies widerspricht der Definition der Exzentrizität nach *Shams 2015*. Nur für den Fall, dass die Kernschicht schubstarr ist, trifft seine Definition der Exzentrizität zu (siehe Abb. 3.1 rechts).

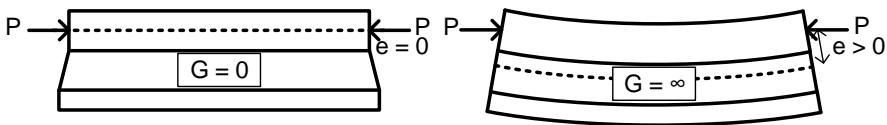


Abb. 3.1: Auswirkung einer auf die Tragschale eines Sandwichelementes zentrisch einwirkenden Normalkraft bei einem Schubmodul G der Kernschicht gleich 0 und gleich unendlich

3.2 Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft

3.2.1 Physikalischer Zusammenhang und mathematische Herleitung des Ansatzes

Die Schwierigkeit eine bei Sandwichwänden exzentrisch einwirkende Normalkraft berücksichtigen zu können, beruht auf der Schwierigkeit der Bestimmung ihrer Exzentrizität. Die von der klassischen technischen Mechanik vorgesehene Herangehensweise beruht auf der Bestimmung des Schwerpunkts des Querschnitts, von dem aus der Abstand zum Lastangriffspunkt gemessen wird.

Der Schwerpunkt eines homogenen starren Körpers liegt in seiner Symmetrieachse (Abb. 3.2, links). Besteht der starre Körper aus zwei Körpern mit unterschiedlichen Werkstoffgesetzen, deren Verbundfuge als starr angesehen werden kann (Abb. 3.2, Mitte), lässt sich für ihn ein ideeller Schwerpunkt definieren. Ist die Fuge zwischen beiden Körpern verschieblich, ist der Körper nicht starr und die Definition des Schwerpunkts muss angepasst werden (Abb. 3.2, rechts). Ein Sandwichelement mit einer nicht schubstarrten Kernschicht ähnelt diesem Fall.

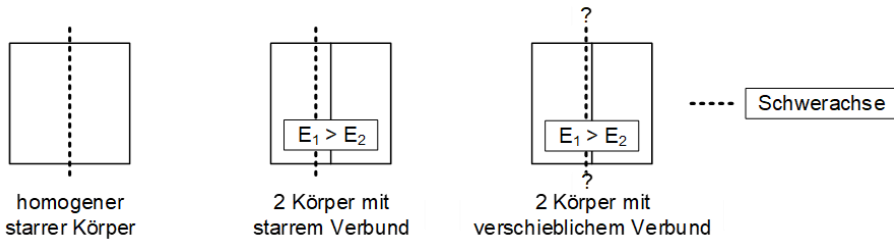


Abb. 3.2: Lage der Schwerachse bei homogenen und bei nicht homogenen Körpern

Wenn eine Normalkraft an der Tragschale eines Sandwichelements zentrisch angreift, verteilt sich diese Einwirkung zwischen der Tragschale und der Vorsatzschale. Die Resultierende der inneren Normalkräfte liegt nicht zentrisch in der Tragschale, sondern ihre Lage verschiebt sich umso mehr in Richtung der Vorsatzschale, je stärker letztere aktiviert wird. Die Position der Resultierenden der inneren Normalkräfte wird hier als *Schwerpunkt des aktivierten Querschnitts* bezeichnet und wird nachfolgend ermittelt.

Dafür gilt es, die Verteilung der Normalkraft zwischen der Trag- und der Vorsatzschale zu untersuchen. Allerdings induziert die Normalkraft aufgrund ihrer Exzentrizität ein Moment. Wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert, wird das einwirkende Moment u. a. von einem Sandwichmoment aufgenommen, das einem Kräftepaar zwischen beiden Schalen entspricht. Es soll hier aber lediglich die Verteilung der Normalkraft zwischen den Schalen untersucht werden und nicht ihre Auswirkungen. Um die Reaktionskette in geeigneter Form zu unterbrechen, wird das in Abb. 3.3 dargestellte System untersucht, das die induzierte Krümmung verhindert. Dies gilt nur in Abschnitt 3.2. Verformungen des Sandwichelementes senkrecht zu seiner Längsachse werden nämlich unterbunden, während Stauchungen beider Schalen frei eintreten können. Die Symmetrieeigenschaften des Systems werden ausgenutzt, um auf das in Abb. 3.3 beschriebene System zu kommen.

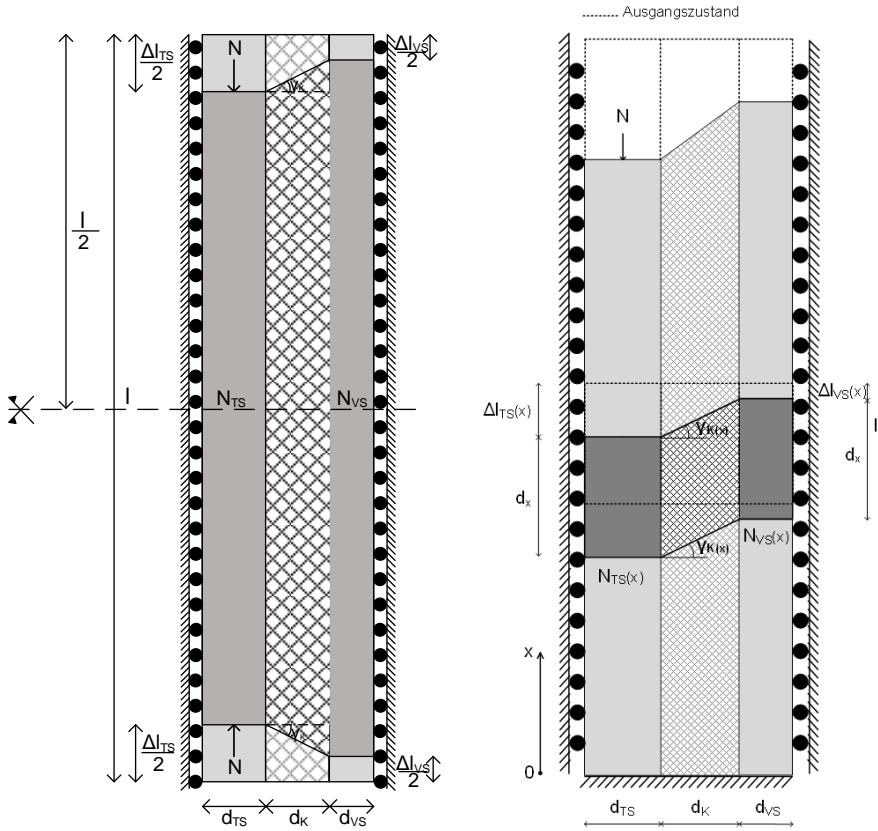


Abb. 3.3: Statisches System zur Untersuchung der Aufnahme einer einwirkenden Normalkraft durch die Trag- und die Vorsatzschale und aufgrund der Symmetrieeigenschaften entsprechend vereinfachtes System

Zu Vereinfachung der Berechnung wird dem System in Abb. 3.3 die Länge l gegeben und nicht $l/2$. An der Stelle $x = l$ wird die Kraft N komplett von der Tragschale übernommen. Die Vorsatzschale wird progressiv über die Verzerrung der Kernschicht aktiviert. An der Stelle $x = 0$ ist die Vorsatzschale am meisten aktiviert. Das Gleichgewicht der Kräfte führt für jedes $x \in [0; l]$ zu:

$$N = N_{TS}(x) + N_{VS}(x) \tag{3.8}$$

Betrachtet wird nun die Verschiebung eines Punktes der Tragschale zwischen dem Ausgangszustand und dem verformten Zustand. Diese lässt sich mit dem Hookeschen Gesetz wie folgt ausdrücken:

$$\Delta l_{TS}(x) = \frac{\int_0^x N_{TS}(t) dt}{E_{TS} \cdot d_{TS} \cdot b} \tag{3.9}$$

Auf ähnliche Weise kann die Verschiebung eines Punktes der Vorsatzschale zwischen dem Ausgangszustand und dem verformten Zustand ausgedrückt werden:

3.2 Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft

$$\Delta l_{VS}(x) = \frac{\int_0^x N_{VS}(t) dt}{E_{VS} \cdot d_{VS} \cdot b} \quad (3.10)$$

Geometrisch lässt sich die Verzerrung der Kernschicht an der Stelle x wie folgt beschreiben:

$$\tan \gamma_K(x) = \frac{\Delta l_{TS}(x) - \Delta l_{VS}(x)}{d_K} \quad (3.11)$$

Nutzt man die Annäherung für kleine Winkel aus, wird aus Gleichung (3.11) Gleichung (3.12):

$$\gamma_K(x) = \frac{\Delta l_{TS}(x) - \Delta l_{VS}(x)}{d_K} \quad (3.12)$$

Nutzt man noch einmal das Hookesche Gesetz, kann man die Schubspannung an der Stelle x bestimmen:

$$\tau_k(x) = G \cdot \gamma_K(x) \quad (3.13)$$

Wenn man Gleichung (3.12) in Gleichung (3.13) einsetzt, ergibt sich:

$$\tau_k(x) = G \cdot \frac{\Delta l_{TS}(x) - \Delta l_{VS}(x)}{d_K} \quad (3.14)$$

Schreibt man die Gleichgewichtsbedingung für ein infinitesimales Element der Tragschale mit der Länge dx auf (siehe Abb. 3.3) und betrachtet dabei die Übertragung eines Kraftanteils per Schubkräfte über die Kernschicht in die Vorsatzschale, dann gilt:

$$N_{TS}(x) + \tau_k(x) \cdot dx \cdot b = N_{TS}(x) + d_{N_{TS}(x)} \quad (3.15)$$

$$\tau_k(x) \cdot b = \frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} \quad (3.16)$$

Setzt man Gleichung (3.14) in Gleichung (3.16) ein, ergibt sich:

$$\frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} = G \cdot b \cdot \frac{\Delta l_{TS}(x) - \Delta l_{VS}(x)}{d_K} \quad (3.17)$$

Werden die Gleichungen (3.9) und (3.10) in Gleichung (3.17) eingesetzt, erhält man:

$$\frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} = \frac{G \cdot b}{d_K} \cdot \left(\frac{\int_0^x N_{TS}(t) dt}{E_{TS} \cdot d_{TS} \cdot b} - \frac{\int_0^x N_{VS}(t) dt}{E_{VS} \cdot d_{VS} \cdot b} \right) \quad (3.18)$$

Gleichung (3.8) eingesetzt in Gleichung (3.18) ergibt:

$$\frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} = \frac{G \cdot b}{d_K} \cdot \left(\frac{\int_0^x N_{TS}(t) dt}{E_{TS} \cdot d_{TS} \cdot b} - \frac{\int_0^x (N_{ges} - N_{TS}(t)) dt}{E_{VS} \cdot d_{VS} \cdot b} \right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} &= \frac{G \cdot b}{d_K} \\ &\times \left(\int_0^x N_{TS}(t) dt \left(\frac{1}{E_{TS} \cdot d_{TS} \cdot b} + \frac{1}{E_{VS} \cdot d_{VS} \cdot b} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\int_0^x N_{ges} dt}{E_{VS} \cdot d_{VS} \cdot b} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Leitet man Gleichung (3.20) einmal ab, kommt man auf folgende Differentialgleichung 2. Grades:

$$\frac{d^2 N_{TS}(x)}{d^2 x} = \frac{G}{d_K} \cdot \left(N_{TS}(x) \left(\frac{1}{E_{TS} \cdot d_{TS}} + \frac{1}{E_{VS} \cdot d_{VS}} \right) - \frac{N_{ges}}{E_{VS} \cdot d_{VS}} \right) \quad (3.21)$$

Gleichung (3.21) lässt sich umformulieren in:

$$\frac{d_K}{G} \frac{d^2 N_{TS}(x)}{d^2 x} - N_{TS}(x) \left(\frac{1}{E_{TS} \cdot d_{TS}} + \frac{1}{E_{VS} \cdot d_{VS}} \right) = - \frac{N_{ges}}{E_{VS} \cdot d_{VS}} \quad (3.22)$$

Die assoziierte homogene Differentialgleichung hat folgendes charakteristisches Polynom:

$$\frac{d_K}{G} \lambda^2 - \left(\frac{1}{E_{TS} \cdot d_{TS}} + \frac{1}{E_{VS} \cdot d_{VS}} \right) = 0 \quad (3.23)$$

mit folgenden Wurzeln:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{E_{TS} \cdot d_{TS}} + \frac{1}{E_{VS} \cdot d_{VS}}}{\frac{d_K}{G}}} \quad (3.24)$$

Als partikuläre Lösung funktioniert:

$$N_{ges} \frac{E_{TS} \cdot d_{TS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \quad (3.25)$$

Somit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$N_{TS}(x) = A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} + N_{ges} \frac{E_{TS} \cdot d_{TS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \quad (3.26)$$

3.2 Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft

Deren Integrationskonstanten A und B können mit folgenden Randbedingungen bestimmt werden:

$$N_{TS}(l) = N_{ges} \quad (3.27)$$

$$\frac{dN_{TS}(0)}{dx} = 0 \quad (3.28)$$

Nach trivialer Rechnung kommt man auf:

$$A = B = \frac{N_{ges} \left(\frac{E_{VS} \cdot d_{VS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \right)}{(e^{\lambda_1 l} + e^{-\lambda_1 l})} \quad (3.29)$$

$$N_{TS}(x) = A \cdot (e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_1 x}) + N_{ges} \frac{E_{TS} \cdot d_{TS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \quad (3.30)$$

Setzt man Gleichung (3.30) in Gleichung (3.8) ein, kommt man für die Kraft in der Vorsatzschale auf:

$$N_{VS}(x) = -A \cdot (e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_1 x}) + N_{ges} \frac{E_{VS} \cdot d_{VS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \quad (3.31)$$

In Abb. 3.4 werden die Verläufe der Normalkraftanteile der Trag- und der Vorsatzschale aus Symmetriegründen über die Hälfte einer Sandwichwand dargestellt.

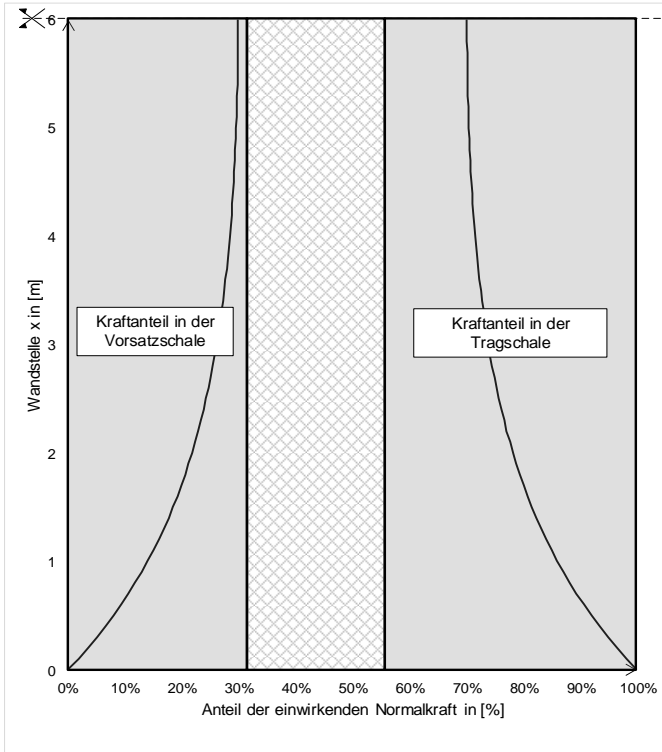


Abb. 3.4: Verlauf der jeweiligen Normalkraftanteile der Trag- und der Vorsatzschale über die Hälfte der Wandhöhe

Der Verlauf des Verzerrungswinkels lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\gamma_K(x) = \frac{1}{b \cdot G} \frac{d_{N_{TS}(x)}}{dx} = \frac{1}{b \cdot G} A \lambda_1 \cdot (e^{\lambda_1 x} - e^{-\lambda_1 x}) \quad (3.32)$$

Letztendlich soll die Lage des *Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts* bestimmt werden (siehe Abb. 3.5):

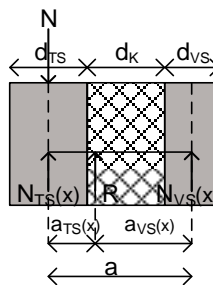


Abb. 3.5: Lage des Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts

3.2 Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft

$$a_{TS}(x) + a_{VS}(x) = a \quad (3.33)$$

Dafür schreibt man das Gleichgewicht der Momente um den Wirkungspunkt der Resultierenden:

$$a_{TS}(x) \cdot N_{TS}(x) - a_{VS}(x) \cdot N_{VS}(x) = 0 \quad (3.34)$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich:

$$a_{TS}(x) = \frac{N_{ges} - N_{TS}(x)}{N_{ges}} a \quad (3.35)$$

und letztlich:

$$a_{TS}(x) = a \left(\frac{E_{VS} \cdot d_{VS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \left(1 - \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1 l} + e^{-\lambda_1 l}} \right) \right) \quad (3.36)$$

Die Analyse dieser Formel erfolgt in Abschnitt 3.2.2.

3.2.2 Analyse des entwickelten Ansatzes

Der Ansatz wird in Bezug auf das Normalkraftniveau in der Vorsatzschale analysiert. Die Normalkraft in der Vorsatzschale ist am größten in halber Höhe der Sandwichwand ($x = 0$):

$$N_{VS}(0) = N_{ges} \frac{E_{VS} \cdot d_{VS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \left(1 - \frac{2}{e^{\lambda_1 l} + e^{-\lambda_1 l}} \right) \quad (3.37)$$

Der Normalkraftanteil in der Vorsatzschale hängt für lineare Zustände des Systems von seinen Eigenschaften und nicht von dem Lastniveau ab.

Mit zunehmender Höhe der Sandwichwand tendiert die Normalkraft in der Mitte der Vorsatzschale zu:

$$N_{ges} \frac{E_{VS} \cdot d_{VS}}{E_{VS} \cdot d_{VS} + E_{TS} \cdot d_{TS}} \quad (3.38)$$

Zu diesem maximalen Wert tendiert sie auch, wenn die Schubsteifigkeit der Kernschicht sehr groß wird. Bei herkömmlichen Wandlängen und Kernschichtschubsteifigkeiten kann dieser Wert aber kaum erreicht werden (siehe Abb. 3.6). Aus Abb. 3.6 ist darüber hinaus zu entnehmen, dass je größer die Schubsteifigkeit der Kernschicht oder je höher die Sandwichwand ist, desto größer der Normalkraftanteil der Vorsatzschale ist.

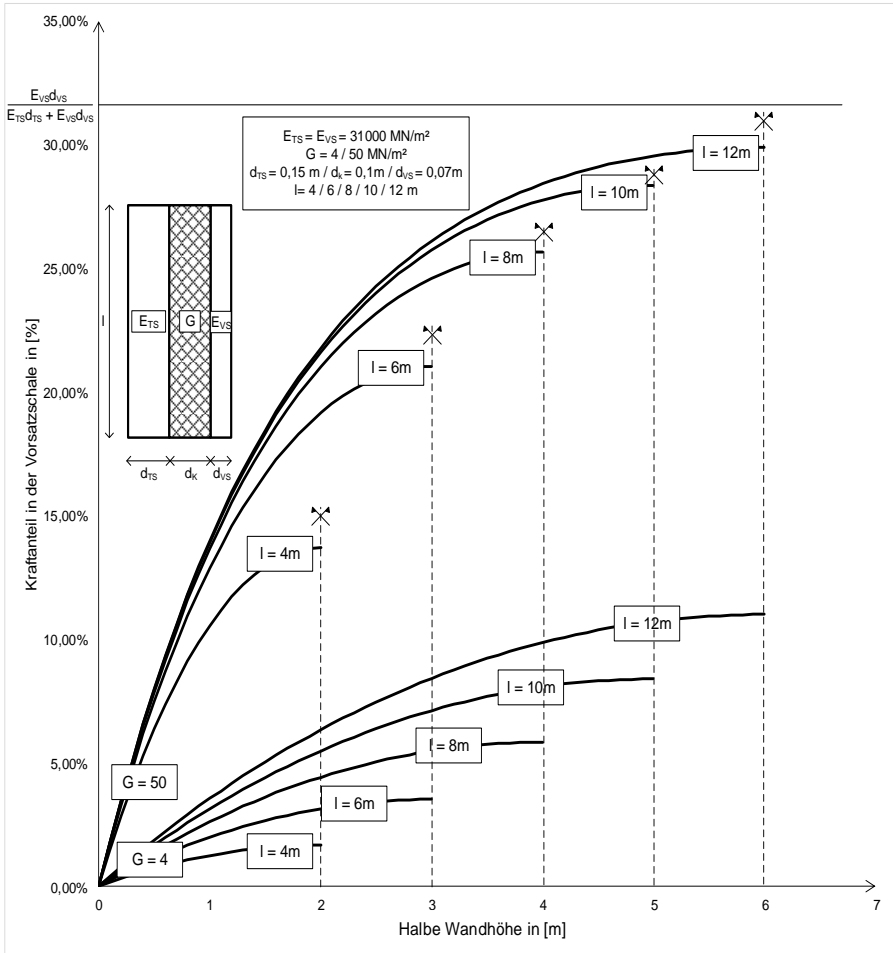


Abb. 3.6: Einfluss der Wandhöhe und der Schubsteifigkeit der Kernschicht auf den Normalkraftanteil in der Mitte der Vorsatzschale

Wenn die Kernschichtdicke d_k gegen ∞ tendiert, tendieren λ_1 und N_{VS} gegen 0. Tendiert jedoch d_k gegen 0, geht der Normalkraftanteil der Vorsatzschale gegen den Wert nach Gleichung (3.38).

Außerdem gilt: Je größer die Kernschichtdicke ist, desto kleiner der Normalkraftanteil der Vorsatzschale (siehe Abb. 3.7) wird. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit geometrischen Betrachtungen sowie der technischen Mechanik. Betrachtet man einen beidseitig eingespannten Balken, stellt man fest, dass die Auswirkung auf die Schnittgrößen der Verschiebung eines Balkenendes mit wachsender Balkenlänge kleiner wird.

3.2 Eigener Ansatz zur Berücksichtigung einer exzentrisch einwirkenden Normalkraft

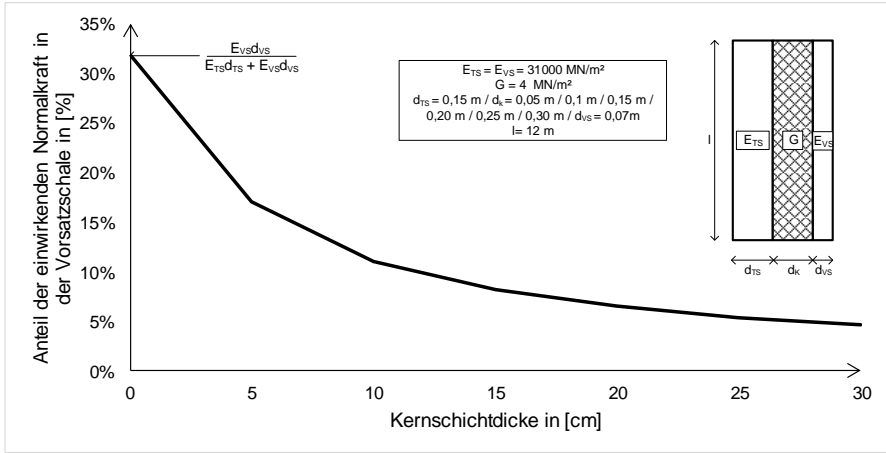


Abb. 3.7: Einfluss der Kernschichtdicke auf den Normkraftanteil in der Vorsatzschale

Letztlich soll der Fokus auf den Einfluss beider Schalendicken und ihrer jeweiligen E-Moduli gelegt werden. Beide Größen können mit ihrem Produkt zusammengefasst werden. Der prozentuale Normkraftanteil der Vorsatzschale wird in Abb. 3.8 räumlich dargestellt. Der Definitionsbereich der zweidimensionalen Funktion orientiert sich an den maximalen und minimalen Abmessungen der Trag- und der Vorsatzschale sowie an ihren jeweiligen minimalen und maximalen E-Moduli. Erwartungsgemäß ist der Normkraftanteil der Vorsatzschale maximal, wenn ihre Dehnsteifigkeit maximal und diejenige der Tragschale minimal ist. Minimal ist wiederum der Normkraftanteil der Vorsatzschale dann, wenn ihre Dehnsteifigkeit minimal und diejenige der Tragschale maximal ist. Je steifer und/oder je dicker die Vorsatzschale im Vergleich zur Tragschale ist, desto größer ist ihr Normkraftanteil.

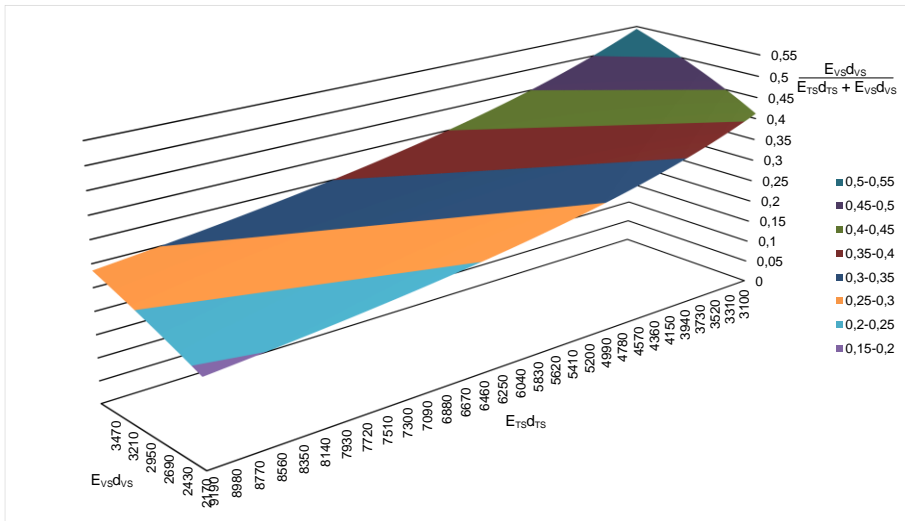


Abb. 3.8: Räumliche Darstellung des Anteils der Normkraft in der Vorsatzschale an der einwirkenden Normkraft

Dem Ansatz des Verfassers nach ist die Lage des *Schwerpunkts des aktivierten Querschnitts* nicht konstant über die Wandhöhe, sondern folgt einem Verlauf, der dem Verlauf des Normalkraftanteils der Vorsatzschale entspricht. Die Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft ist also über die Wandhöhe nicht konstant.

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

3.3.1 Lösung der Differentialgleichung

3.3.1.1 Allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung

Die Differentialgleichung (3.39) bietet nicht die Möglichkeit, ein einwirkendes Moment direkt zu berücksichtigen, sondern nur indirekt, wenn es von einer Streckenlast verursacht wird, und zwar über die 2. Ableitung ebendieser Streckenlast.

$$-\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right) \frac{d^6 w}{d^6 x} + \left(\frac{N}{A} + \frac{B}{B_s}\right) \frac{d^4 w}{d^4 x} - \frac{N}{B_s} \frac{d^2 w}{d^2 x} = \frac{q}{B_s} - \frac{1}{A} \frac{d^2 q}{d^2 x} \quad (3.39)$$

Die Differentialgleichung (3.39) erlaubt es also nicht, alle Einwirkungen zu berücksichtigen, zum Beispiel nicht ein Moment, das aus einer exzentrischen Normalkraft resultiert oder ein Moment, das aus einem Temperaturgradienten resultiert. Deswegen wird die Differentialgleichung sechsten Grades zweimal integriert, so dass sie sich als Differentialgleichung vierten Grades schreiben lässt, in der das einwirkende Moment nun erscheint. Zusätzlich wird $N = -P$ gesetzt:

$$\frac{-(B_u + B_o)}{A} \frac{d^4 w}{d^4 x} + \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right) \frac{d^2 w}{d^2 x} + \frac{P}{B_s} w = -\frac{M}{B_s} - \frac{q}{A} \quad (3.40)$$

Diese Differentialgleichung verfügt über konstante Koeffizienten und es wird nach einer Lösung von der assoziierten homogenen Differentialgleichung gesucht:

$$\frac{-(B_u + B_o)}{A} \frac{d^4 w}{d^4 x} + \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right) \frac{d^2 w}{d^2 x} + \frac{P}{B_s} w = 0 \quad (3.41)$$

Als Lösung einer solchen Differentialgleichung eignet sich der Exponentialansatz $w(x) = e^{\lambda x}$.

Wird der Exponentialansatz in die Differentialgleichung eingesetzt, kommt man nach einfacher Rechnung auf die Gleichung (3.42), deren Lösung die Suche nach den Nullstellen des umklammerten charakteristischen Polynoms erfordert, da die Exponentialfunktion selbst immer positiv bleibt:

$$e^{\lambda x} \left(-\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right) \lambda^4 + \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right) \lambda^2 + \frac{P}{B_s} \right) = 0 \quad (3.42)$$

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

Setzt man $\lambda^2 = X$, wird aus dem Polynom vierter Ordnung ein Polynom zweiter Ordnung:

$$-\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right)X^2 + \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right)X + \frac{P}{B_s} = 0 \tag{3.43}$$

mit der in diesem Fall immer positiven Diskriminante:

$$\Delta = \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{B_u + B_o}{A}\right)\left(\frac{P}{B_s}\right) \tag{3.44}$$

und den zwei Wurzeln:

$$X_1 = \frac{-\left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right) - \sqrt{\Delta}}{-2 \times \left(\frac{B_u + B_o}{A}\right)} \tag{3.45}$$

$$X_2 = \frac{-\left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A}\right) + \sqrt{\Delta}}{-2 \times \left(\frac{B_u + B_o}{A}\right)} \tag{3.46}$$

Über die jeweiligen Vorzeichen der Wurzeln lässt sich keine Aussage treffen ohne eine umfassende und mühselige Betrachtung der unterschiedlichen Parameter, die an dieser Stelle nicht angestellt wird. Um auf die Wurzeln des ursprünglichen Polynoms 4. Grades im allgemeinen Fall zurückzukommen, werden vier Fälle unterschieden, je nachdem, ob X_1 und X_2 positiv oder negativ sind. Die Wurzeln des der assoziierten homogenen Differentialgleichung (3.41) entsprechenden charakteristischen Polynoms sind in Tab. 3.1 angegeben. Es ist ersichtlich, dass

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \text{ und } \lambda_4 = -\lambda_3.$$

Tab. 3.1: Wurzeln des der assoziierten homogenen Differentialgleichung (3.41) entsprechenden charakteristischen Polynoms

	1. Fall		2. Fall		3. Fall		4. Fall	
	$X_1 > 0$	$X_2 > 0$	$X_1 > 0$	$X_2 < 0$	$X_1 < 0$	$X_2 > 0$	$X_1 < 0$	$X_2 < 0$
λ_1	$-\sqrt{X_1}$		$-\sqrt{X_1}$		$-i\sqrt{-X_1}$		$-i\sqrt{-X_1}$	
λ_2	$\sqrt{X_1}$		$\sqrt{X_1}$		$i\sqrt{-X_1}$		$i\sqrt{-X_1}$	
λ_3	$-\sqrt{X_2}$		$-i\sqrt{-X_2}$		$-\sqrt{X_2}$		$-i\sqrt{-X_2}$	
λ_4	$\sqrt{X_2}$		$i\sqrt{-X_2}$		$\sqrt{X_2}$		$i\sqrt{-X_2}$	

In Tab. 3.2 ist für jeden der zuvor erläuterten vier Fälle die Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung angegeben.

Tab. 3.2: Lösungen der assoziierten homogenen Differentialgleichung

1. Fall:	$w(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_1 x} + a_3 e^{\lambda_3 x} + a_4 e^{-\lambda_3 x}$
2. Fall	$w(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_1 x} + a_3 \cos \lambda_3 x + a_4 \sin \lambda_3 x$
3. Fall	$w(x) = a_1 \cos \lambda_1 x + a_2 \sin \lambda_1 x + a_3 e^{\lambda_3 x} + a_4 e^{-\lambda_3 x}$
4. Fall	$w(x) = a_1 \cos \lambda_1 x + a_2 \sin \lambda_1 x + a_3 \cos \lambda_3 x + a_4 \sin \lambda_3 x$

Bevor die Integrationskonstanten a_1 bis a_4 anhand der Randbedingungen bestimmt werden, muss die partikuläre Lösung der Differentialgleichung (3.40) gefunden werden. Diese hängt von den Einwirkungen ab, die in Abschnitt 3.3.1.2 aufgelistet werden.

3.3.1.2 Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für unterschiedliche praxisrelevante Einwirkungen

Es wird nun für die inhomogene Differentialgleichung (3.40) für unterschiedliche Einwirkungen nach einer partikulären Lösung gesucht. Es wird darauf hingewiesen, dass aufgrund der Nichtlinearität der Differentialgleichung die mit dieser Gleichung für unterschiedliche Einwirkungen getrennt berechneten Schnittgrößen im Nachhinein nicht linear superponiert werden dürfen. Bei gleichzeitig wirkenden Einwirkungen müssen diese zusammen in der Differentialgleichung berücksichtigt werden.

Moment infolge der Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft in Bezug auf die Lage des Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts

Multipliziert man in Gleichung (3.36) den Nenner und den Zähler des linken Quotienten mit der Breite der Sandwichwand, kommt man auf Gleichung (3.47), die die jeweiligen Dehnsteifigkeiten der Schalen berücksichtigt:

$$a_{TS}(x) = a \left(\frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(1 - \frac{e^{\lambda_p x} + e^{-\lambda_p x}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}} \right) \right) \tag{3.47}$$

Allerdings ist Gleichung (3.47) nur richtig, wenn der Koordinatenursprung in der Mitte der Sandwichwand liegt. Nachfolgend befindet sich aber der Koordinatenursprung am Fußpunkt der Sandwichwand, was eine Variablentransformation erfordert ($x = l/2 - x$):

$$a_{TS}(x) = K_K a \left(\frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(1 - \frac{e^{\lambda_p |l/2 - x|} + e^{-\lambda_p |l/2 - x|}}{e^{\lambda_p l/2} + e^{-\lambda_p l/2}} \right) \right) \tag{3.48}$$

Die eigentliche Einwirkung ist das Moment, das dem Produkt aus a_{TS} und der Normalkraft entspricht. Dieses wird mit einem Koeffizienten K_K multipliziert. Dieser Koeffizient soll mindestens gleich 1 sein. Sollte er größer als 1 gewählt werden, würde er wie eine

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

Art Teilsicherheitsbeiwert bezogen auf die entsprechende Einwirkung $M = P a_{TS}(x)$ wirken. In der vorliegenden Arbeit ist K_K immer gleich 1. Nach einiger Rechnung erscheint für (3.49) (3.50) als partikuläre Lösung:

$$-\frac{P}{B_s} K_K a \left(\frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(1 - \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2} - x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2} - x|}}}{e^{\lambda_p \frac{l}{2}} + e^{-\lambda_p \frac{l}{2}}} \right) \right) \quad (3.49)$$

$$K_K a \frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(\frac{\frac{P}{B_s} \frac{1}{e^{\lambda_p \frac{l}{2}} + e^{-\lambda_p \frac{l}{2}}} \left(e^{\lambda_p |\frac{l}{2} - x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2} - x|} \right)}{\lambda_p^4 \left(-\frac{(B_u + B_o)}{A} \right) + \lambda_p^2 \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A} \right) + \frac{P}{B_s}} - 1 \right) \quad (3.50)$$

Moment infolge einer in Bezug auf die Schwerachse der Tragschale exzentrisch einwirkenden Normalkraft (planmäßige und/oder unplanmäßige Exzentrizitäten)

Es wird berücksichtigt, dass die Kraft am Kopf- und am Fußpunkt der Sandwichwand mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in die Tragschale eingeleitet werden kann. Daraus resultiert über die Höhe der Sandwichwand folgendes Moment:

$$P \left(\frac{e_{Fu} - e_{Ko}}{l} x + e_{Ko} \right) \quad (3.51)$$

wofür folgende partikuläre Lösung zutreffend ist:

$$-\left(\frac{e_{Fu} - e_{Ko}}{l} x + e_{Ko} \right) \quad (3.52)$$

Moment infolge einer Linienlast (Windsog- oder Winddruckkraft)

Eine Linienlast verursacht folgendes Moment über die Höhe der Sandwichwand:

$$\frac{q}{2} (lx - x^2) \quad (3.53)$$

Es wird nach einer partikulären Lösung für (3.53) gesucht:

$$-\frac{\frac{q}{2} (lx - x^2)}{B_s} - \frac{q}{A} \quad (3.54)$$

Diese nimmt folgende Form an:

$$\frac{q}{2P} x^2 - \frac{q}{2P} lx + \frac{-\frac{q}{A} - \frac{q}{P} \left(\frac{B}{B_s} - \frac{P}{A} \right)}{\frac{P}{B_s}} \quad (3.55)$$

Die einwirkenden Momente infolge Temperatur- und Schwindeinwirkungen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Das Kriechen der Betonschalen soll mit der Verwendung

eines effektiven Elastizitätsmoduls bei Bemessungsaufgaben berücksichtigt werden. Somit wird aber die gegenseitige Beeinflussung beider Schalen bei Kriechverformungen nicht erfasst.

3.3.1.3 Berücksichtigung der Randbedingungen und allgemeine Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe ihrer allgemeinen und ihrer partikulären Lösung. In der allgemeinen Lösung sind vier Integrationskonstanten vorhanden, die anhand von vier Randbedingungen bestimmt werden müssen. Als Randbedingungen gelten folgende physikalischen Gegebenheiten. Bei $x = 0$ und $x = l$ ist die Verformung der Wand gleich null.

$$w(0) = 0 \quad (3.56)$$

$$w(l) = 0 \quad (3.57)$$

Zusätzlich gilt:

$$w''(0) = -\frac{M_{Ko}}{B_{VS} + B_{TS}} \quad (3.58)$$

$$w''(l) = -\frac{M_{Fu}}{B_{VS} + B_{TS}} \quad (3.59)$$

Anzumerken ist, dass am Fuß- und am Kopfpunkt der Sandwichwand nicht die Gesamtbiegesteifigkeit des Sandwichquerschnitts angesetzt wird, sondern lediglich die Eigenanteile der Vorsatz- und der Tragschale B_{VS} und B_{TS} berücksichtigt werden. Grund dafür ist, dass die Existenz des Sandwichanteils für die Biegesteifigkeit der Aktivierung der Vorsatzschale bedarf, die progressiv ab den Enden der Wand bis zu ihrer Mitte hin erfolgt, wie aus Abb. 3.4 zu ersehen ist. Die Konsequenz dessen kann am Beispiel eines Sandwichbalkens (ohne einwirkende Normalkraft), der nah zu den Auflagern durch Einzellasten beansprucht wird, veranschaulicht werden. Mit der Aktivierung der Vorsatzschale wächst prozentual der Sandwichanteil, während die Anteile der Trag- und der Vorsatzschale kleiner werden (siehe Abb. 3.9).

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

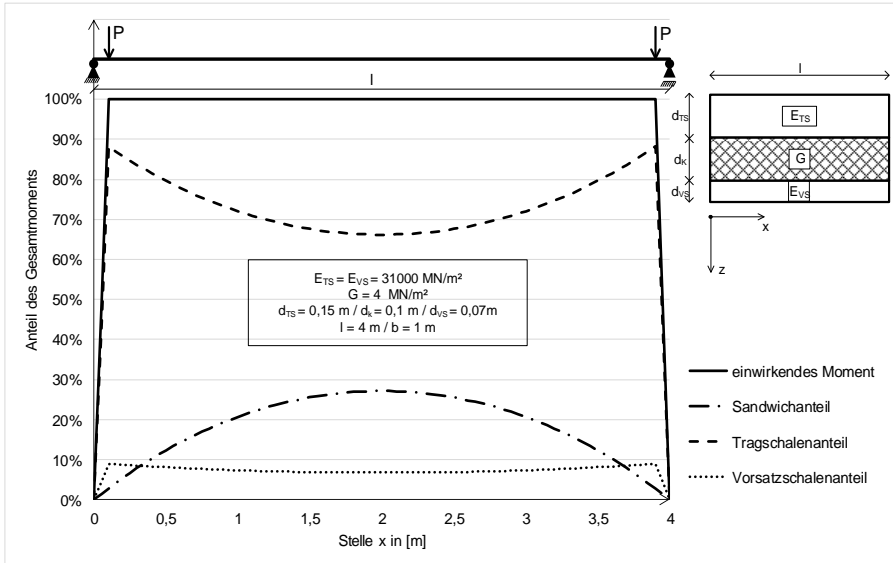


Abb. 3.9: Entwicklung der Verteilung der Biegetragfähigkeit zwischen den Eigenanteilen der Trag- und der Vorsatzschale und des Sandwichanteils über die Länge eines Sandwichbalkens

Eigentlich steht selbst der Steifigkeitsanteil der Vorsatzschale am Fuß- und am Kopfpunkt der Wand nicht zur Verfügung, weil die Annahme von in diesem Bereich zueinander parallelen Betonschalen nicht zwangsläufig erfüllt ist. Sie bedarf der Aufnahme von Zugkräften in z-Richtung, die nur bei sehr steifen Kernschichten möglich ist.

Außerdem kann schon in Hinblick auf baupraktische Empfehlungen (siehe Kapitel 5) angemerkt werden, dass keine Einschränkung bezüglich der Beweglichkeit der Fuß- und Kopfpunkte der Vorsatzschale durch die Randbedingungen erfolgt.

Die Bestimmung der vier Integrationskonstanten a_1 bis a_4 anhand der vier Randbedingungen (Gleichung (3.56) bis (3.59)) erfordert die Lösung eines linearen Gleichungssystems, das sich in matrizieller Form folgendermaßen schreiben lässt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

Um die Gleichung (3.60) zu lösen, wird auf die Cramersche Regel zurückgegriffen.

Es sei:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn:

$$\det A \neq 0 \tag{3.62}$$

Sie besagt, dass:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\det A} \tag{3.63}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\det A} \tag{3.64}$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\det A} \tag{3.65}$$

$$a_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\det A} \tag{3.66}$$

Nachfolgend werden die Koeffizienten der Matrix A für jeden der vier in Abschnitt 3.3.1.1 erläuterten Fälle angegeben:

Fall 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1 l} & e^{-\lambda_1 l} & e^{\lambda_3 l} & e^{-\lambda_3 l} \\ \lambda_1^2 & \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 l} & \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 l} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 l} & \lambda_3^2 e^{-\lambda_3 l} \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

Fall 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\lambda_1 l} & e^{-\lambda_1 l} & \cos \lambda_3 l & \sin \lambda_3 l \\ \lambda_1^2 & \lambda_1^2 & -\lambda_3^2 & 0 \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 l} & \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 l} & -\lambda_3^2 \cos \lambda_3 l & -\lambda_3^2 \sin \lambda_3 l \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

Fall 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \cos \lambda_3 l & \sin \lambda_1 l & e^{\lambda_3 l} & e^{-\lambda_3 l} \\ -\lambda_1^2 & 0 & \lambda_3^2 & \lambda_3^2 \\ -\lambda_1^2 \cos \lambda_1 l & -\lambda_1^2 \sin \lambda_1 l & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 l} & \lambda_3^2 e^{-\lambda_3 l} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Fall 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \lambda_1 l & \sin \lambda_1 l & \cos \lambda_3 l & \sin \lambda_3 l \\ -\lambda_1^2 & 0 & -\lambda_3^2 & 0 \\ -\lambda_1^2 \cos \lambda_1 l & -\lambda_1^2 \sin \lambda_1 l & -\lambda_3^2 \cos \lambda_3 l & -\lambda_3^2 \sin \lambda_3 l \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Der Vektor der Randbedingungen ist nicht fallabhängig und ist in (3.71) gegeben.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_K a \frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(1 - \frac{\frac{P}{B_S}}{\lambda_p^4 \left(-\frac{(B_u + B_o)}{A} \right) + \lambda_p^2 \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right) + \frac{P}{B_S}} \right) + e_{K_o} - \frac{-\frac{q}{A} - \frac{q}{P} \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right)}{\frac{P}{B_S}} \\ K_K a \frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \left(1 - \frac{\frac{P}{B_S}}{\lambda_p^4 \left(-\frac{(B_u + B_o)}{A} \right) + \lambda_p^2 \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right) + \frac{P}{B_S}} \right) + e_{F_u} - \frac{-\frac{q}{A} - \frac{q}{P} \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right)}{\frac{P}{B_S}} \\ -\lambda_p^2 K_K a \frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \frac{\frac{P}{B_S}}{\lambda_p^4 \left(-\frac{(B_u + B_o)}{A} \right) + \lambda_p^2 \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right) + \frac{P}{B_S}} - \frac{q}{P} - \frac{P \cdot e_{K_o}}{B_u + B_o} \\ -\lambda_p^2 K_K a \frac{D_{VS}}{D_{VS} + D_{TS}} \frac{\frac{P}{B_S}}{\lambda_p^4 \left(-\frac{(B_u + B_o)}{A} \right) + \lambda_p^2 \left(\frac{B}{B_S} - \frac{P}{A} \right) + \frac{P}{B_S}} - \frac{q}{P} - \frac{P \cdot e_{F_u}}{B_u + B_o} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

3.3.1.4 Herleitung der Schnittgrößen und geometrischer Größen

Gesamtmoment im Querschnitt:

$$\begin{cases} (\gamma'' - w''') B_S - A\gamma = 0 \\ A\gamma' - (B_u + B_o)w^{IV} - Pw'' + q = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\gamma' = \frac{(B_u + B_o)}{A} w^{IV} + \frac{P}{A} w'' - \frac{q}{A} \quad (3.73)$$

$$M = B_S \gamma' - B w'' \quad (3.74)$$

$$M = \frac{(B_u + B_o) B_S}{A} w^{IV} + w'' \left(\frac{P B_S}{A} - B \right) - \frac{q B_S}{A} \quad (3.75)$$

Eigenanteil des Momentenabtrags in den Schalen:

$$M_u = -B_u w'' \quad (3.76)$$

$$M_o = -B_o w'' \quad (3.77)$$

Sandwichanteil:

$$M_s = B_s(\gamma' - w'') \quad (3.78)$$

Verzerrungswinkel γ :

$$\gamma' = \frac{(B_u + B_o)}{A} w^{IV} + \frac{P}{A} w'' - \frac{q}{A} \quad (3.79)$$

$$\gamma'' = \frac{(B_u + B_o)}{A} w^V + \frac{P}{A} w''' - \frac{q'}{A} \quad (3.80)$$

$$(\gamma'' - w''')B_s - A\gamma = 0 \quad (3.81)$$

$$\gamma = (\gamma'' - w''') \frac{B_s}{A} \quad (3.82)$$

$$\gamma = \frac{B_s}{A^2} ((B_u + B_o)w^V + w'''(P - A) - q') \quad (3.83)$$

Verschiebung zwischen beiden Schalen:

$$\Delta_u = a\gamma \quad (3.84)$$

Querkraft:

Sandwichanteil:

$$Q_s = A\gamma \quad (3.85)$$

Schalenanteile:

$$Q_u = -B_u w''' \quad (3.86)$$

$$Q_o = -B_o w''' \quad (3.87)$$

Gesamtquerkraft:

$$Q = Q_s + Q_u + Q_o = A\gamma - (B_u + B_o)w''' \quad (3.88)$$

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

Normalspannungen in den Schalen:

Normalkraftanteil in der Tragschale:

$$N_{TS}(x) = N_{ges}(1 - K_K) + K_K N_{ges} \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p x} + e^{-\lambda_p x}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}}}{D_{VS} + D_{TS}} \quad (3.89)$$

Variablentransformation:

$$N_{TS}(x) = N_{ges}(1 - K_K) + K_K N_{ges} \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}}}{D_{VS} + D_{TS}} \quad (3.90)$$

$$\sigma_{n,o}(x) = \frac{N_{TS}(x)}{A_{TS}} \quad (3.91)$$

$$\sigma_{n,o}(x) = \frac{N_{ges}(1 - K_K)}{A_{TS}} + \frac{K_K N_{ges}}{A_{TS}} \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}}}{D_{VS} + D_{TS}} \quad (3.92)$$

Normalkraftanteil in der Vorsatzschale:

$$N_{VS}(x) = N_{ges} - N_{TS}(x) \quad (3.93)$$

$$N_{VS}(x) = K_K N_{ges} \left(1 - \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p x} + e^{-\lambda_p x}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}}}{D_{VS} + D_{TS}} \right) \quad (3.94)$$

Variablentransformation:

$$N_{VS}(x) = K_K N_{ges} \left(1 - \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p \frac{l}{2}} + e^{-\lambda_p \frac{l}{2}}}}{D_{VS} + D_{TS}} \right) \quad (3.95)$$

$$\sigma_{n,u}(x) = \frac{K_K N_{ges}}{A_{VS}} \left(1 - \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p \frac{l}{2}} + e^{-\lambda_p \frac{l}{2}}}}{D_{VS} + D_{TS}} \right) \quad (3.96)$$

Eigenanteile:

$$\sigma_{b,o}(z_o) = \frac{z_o}{I_o} M_o \quad (3.97)$$

$$\sigma_{b,u}(z_u) = \frac{z_u}{I_u} M_u \quad (3.98)$$

Sandwichanteil:

$$\sigma_{s,o} = -\frac{M_s}{a \cdot A_{TS}} \quad (3.99)$$

$$\sigma_{s,u} = \frac{M_s}{a \cdot A_{VS}} \quad (3.100)$$

Gesamt:

$$\begin{aligned} \sigma_o(x, z_o) &= -\frac{M_s}{a \cdot A_{TS}} + \frac{z_o}{I_o} M_o + \frac{N_{ges}(1 - K_K)}{A_{TS}} \\ &+ \frac{K_K N_{ges}}{A_{TS}} \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p l} + e^{-\lambda_p l}}}{D_{VS} + D_{TS}} \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \sigma_u(x, z_u) &= \frac{M_s}{a \cdot A_{VS}} + \frac{z_u}{I_u} M_u + \frac{K_K N_{ges}}{A_{VS}} \left(1 - \frac{D_{TS} + D_{VS} \frac{e^{\lambda_p |\frac{l}{2}-x|} + e^{-\lambda_p |\frac{l}{2}-x|}}{e^{\lambda_p \frac{l}{2}} + e^{-\lambda_p \frac{l}{2}}}}{D_{VS} + D_{TS}} \right) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Schubspannungen:

Sandwichanteil:

$$Q_s = A\gamma \quad (3.103)$$

$$\gamma = \frac{Q_s}{A} \quad (3.104)$$

$$\tau_s = \frac{a}{h} G\gamma \quad (3.105)$$

$$\tau_s = \frac{a}{h} G \frac{Q_s}{A} \quad (3.106)$$

$$A = G \frac{ba^2}{h} \quad (3.107)$$

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

$$\tau_s = \frac{a}{h} G \frac{Q_s}{A} \quad (3.108)$$

$$\tau_s = \frac{Q_s}{ba} \quad (3.109)$$

Gesamt:

$$\tau_u(x, z_u) = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z_u}{t_u} \right) \tau_s + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{z_u^2}{t_u^2} \right) \frac{Q_u}{bt_u} \quad (3.110)$$

$$\tau_o(x, z_o) = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z_o}{t_o} \right) \tau_s + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{z_o^2}{t_o^2} \right) \frac{Q_o}{bt_o} \quad (3.111)$$

3.3.2 Analyse der erweiterten Sandwichtheorie mit linearen Materialeigenschaften

Nun soll die physikalische Konsistenz der entwickelten erweiterten Sandwichtheorie untersucht werden.

3.3.2.1 Einfluss des Lastangriffspunkts

Bei linear-elastischen Materialeigenschaften und einem exzentrischen Lastangriffspunkt tendiert die Last-Verformungs-Kurve eines homogenen Druckglieds zu seiner Eulerschen Knicklast (siehe Abschnitt 2.1). Je größer die Exzentrizität ist, desto flacher wird der Verlauf. Gleiches lässt sich beobachten, wenn das Druckglied aus einem Sandwichquerschnitt besteht. Das Pendant zu der Eulerschen Knicklast ist die von *Stamm u. Witte 1974* für Sandwichelemente definierte Knicklast. Während die Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft bei einem homogenen Druckglied in Bezug auf seine Schwerachse definiert werden kann, existiert eine solche Definition für eine Sandwichwand nicht (siehe Abschnitt 3.2.1). In Abb. 3.10 wird für aus Sandwichquerschnitten bestehende Druckglieder der Lastangriffspunkt in Bezug auf die Mitte der Tragschale definiert. Der Begriff „Exzentrizität“ darf aber nicht verwendet werden. Des Weiteren ist aus Abb. 3.10 zu ersehen, dass eine Sandwichwand eine höhere Knicklast aufweist als ihre allein stehende Tragschale.

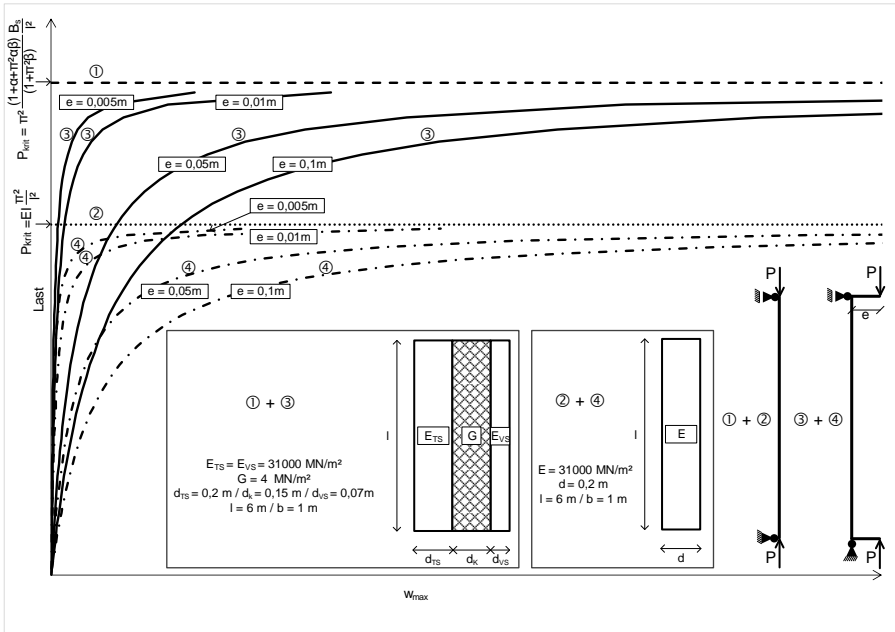


Abb. 3.10: Last-Verformungs-Kurven von an unterschiedlichen Lastangriffspunkten beanspruchten Sandwichwänden und allein stehenden Tragschalen mit linear-elastischem Materialverhalten

In Abschnitt 3.2.1 wurde auf analytische Weise nachgewiesen, dass die Lage des *Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts* nicht konstant über die Höhe einer Sandwichwand ist. Somit stellt sich auch keine konstante Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft über die Höhe der Sandwichwand ein. Jedoch kann man sich folgende praktische Frage stellen: An welcher Lasteinleitungsstelle der Sandwichwand kehrt sich die Verformungsrichtung um? Dieser „neutrale Punkt“ kennzeichnet den Wechsel der Verformungsrichtung: Je nachdem, ob der Lastangriffspunkt von dieser „neutralen Stelle“ aus gesehen in Richtung der Vorsatzschale oder in die entgegengesetzte Richtung wandert, verformt sich die Wand in die eine oder in die andere Richtung. Um diese Frage zu beantworten kann das Programm TiToU (*Pavis d'Escurac 2018*) des Verfassers verwendet werden. Der Lastangriffspunkt wird variiert, bis die Verformungsrichtung der Sandwichwand sich ändert. In Abb. 3.11 wird beispielsweise ersichtlich, dass sich die neutrale Lage des Lastangriffspunkts für die dort erläuterte Sandwichwandkonfiguration zwischen 1 mm und 2 mm Abstand vom Schwerpunkt der Tragschale in Richtung der Vorsatzschale befindet.

Die Richtigkeit der von dem Programm gelieferten Ergebnisse kann an einem Grenzfall überprüft werden. Betrachte man den theoretischen Fall einer Sandwichwand mit einer schubstarreren Kernschicht: In diesem Fall darf ein ideeller Schwerpunkt definiert werden (siehe Abschnitt 3.2.1). Dieser befindet sich in 4,79 cm Abstand zur Schwerachse der Tragschale in Richtung der Vorsatzschale. Wie aus Abb. 3.12 zu ersehen ist, stimmt erwartungsgemäß die neutrale Lage des Lastangriffspunkts mit der Lage des ideellen Schwerpunkts überein.

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

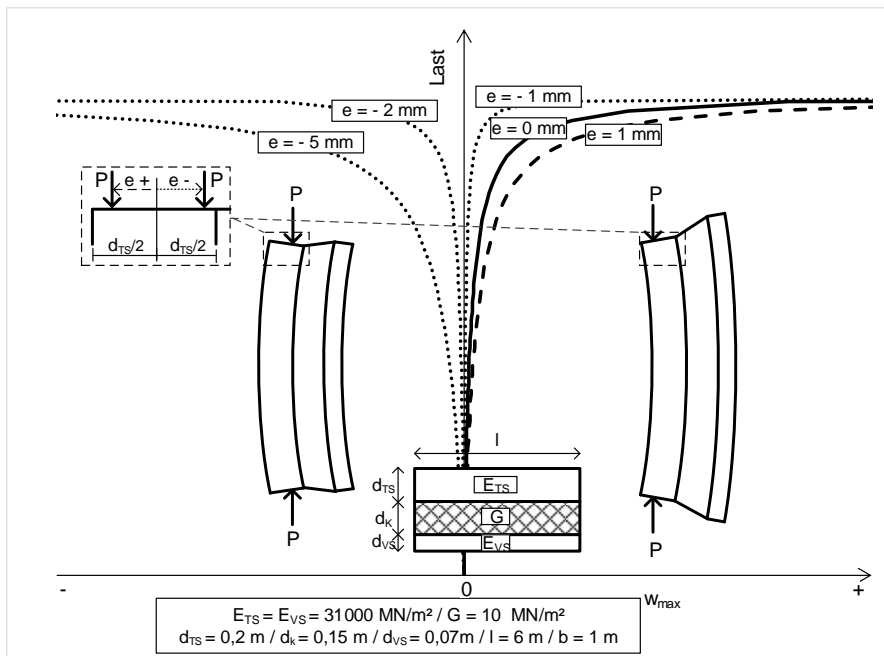


Abb. 3.11: Iterative Bestimmung der neutralen Lage des Lastangriffspunktes

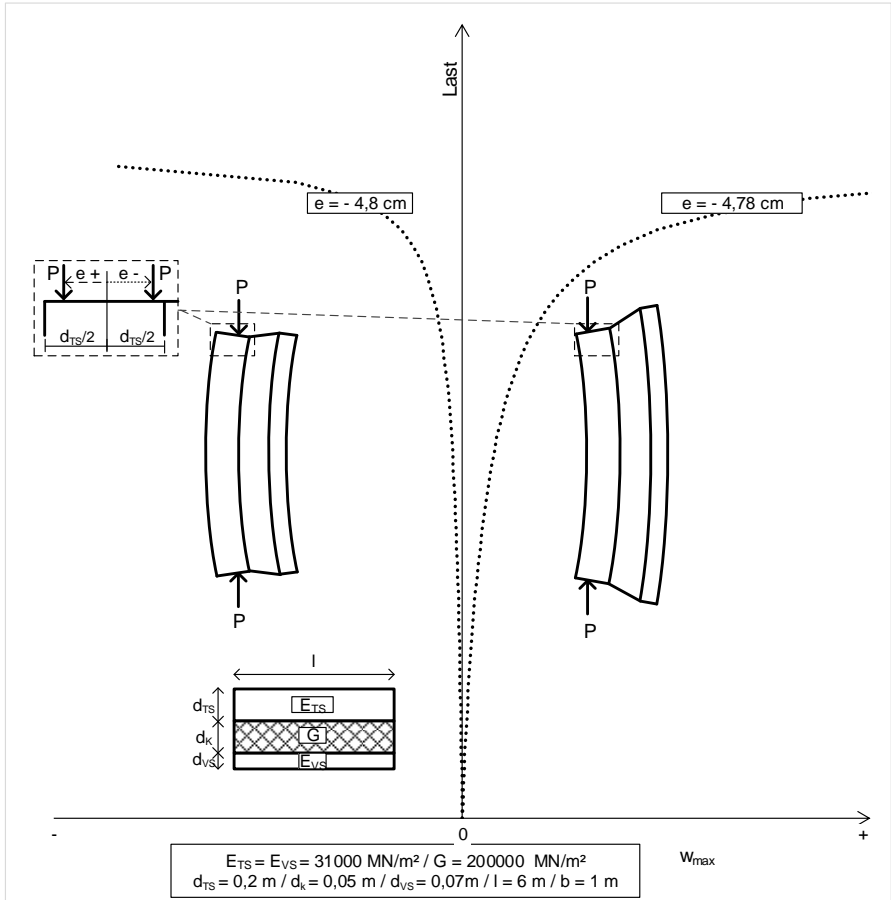


Abb. 3.12: Iterative Bestimmung der neutralen Lage des Lastangriffspunktes im theoretischen Fall einer Sandwichwand mit einer schubstarren Kernschicht

3.3.2.2 Einfluss der Kernschichtschubsteifigkeit

Zunächst werden eine qualitative Analyse in Bezug auf die Rolle der Schubsteifigkeit der Kernschicht durchgeführt und physikalische Aspekte betrachtet, ohne ihre quantitative Beschreibung durch mathematische Werkzeuge miteinzubeziehen. Nachfolgend werden zwei Sandwichwände verglichen, die sich lediglich durch die Schubsteifigkeit ihrer jeweiligen Kernschicht unterscheiden.

Auf der einen Seite lässt sich argumentieren, dass eine Kernschicht mit einer geringeren Schubsteifigkeit für eine Sandwichwand die Konsequenz hat, dass die Lage des *Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts* sich näher zu der Tragschale hin befindet. Grund dafür ist die bei einer geringeren Schubsteifigkeit geringere Aktivierung der Vorsatzschale. Daraus resultieren über die Sandwichwandhöhe unterschiedliche, aber in jedem Fall immer kleinere Exzentrizitäten der einwirkenden Normalkraft als bei einer größeren Schubsteifigkeit der Kernschicht (siehe Abb. 3.13 oben). Das induzierte Bie-

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

gemoment ist also bei einer geringeren Schubsteifigkeit kleiner. Auf der Einwirkungsseite verschafft also eine kleinere Schubsteifigkeit einen Vorteil, indem die einwirkende Normalkraft ein kleineres Moment induziert.

Auf der Widerstandsseite ist aber eine kleinere Schubsteifigkeit nachteilig. Diese verursacht eine weniger ausgeprägte Sandwichtragwirkung und somit eine geringere globale Biegesteifigkeit. Die Schubsteifigkeit hat also einen zweiseitigen Einfluss auf das Verhalten einer Sandwichwand. Nachfolgend wird untersucht, wie diese entgegengesetzten Einflüsse zusammenwirken.

Aus Abb. 3.13 wird deutlich, dass der Vergleich zwischen Sandwichwänden, die sich lediglich durch die Schubsteifigkeit ihrer Kernschicht unterscheiden ($G = 4 \text{ MN/m}^2$ und $G = 8 \text{ MN/m}^2$), zu einer Unterteilung des Last-Verformungs-Diagramms in die Bereiche A und B führt.

In dem Bereich A erfährt die Sandwichwand, deren Kernschicht die geringste Schubsteifigkeit aufweist ($G = 4 \text{ MN/m}^2$), die kleinste Verformung. In diesem Bereich kommt der auf der Einwirkungsseite durch die niedrigere Kernschichtschubsteifigkeit geschaffene Vorteil zum Ausdruck. Dieser ist im Vergleich zu der benachteiligenden kleineren Biegesteifigkeit maßgebend. In dem Bereich B ist es genau umgekehrt. Die kleinere Biegesteifigkeit der Sandwichwand mit der schubweicheren Kernschicht hat den größeren Einfluss, so dass die Sandwichwand mit der kleineren Kernschichtschubsteifigkeit ($G = 4 \text{ MN/m}^2$) größere Verformungen aufweist. Der auf der Einwirkungsseite geschaffene Vorteil ist nicht mehr maßgebend. Außerdem weist die Sandwichwand mit der kleineren Kernschichtschubsteifigkeit eine geringere Knicklast auf.

Diese Ergebnisse wurden unter Anleitung des Autors in *Heckmann 2018* anhand einer FE-Analyse überprüft.

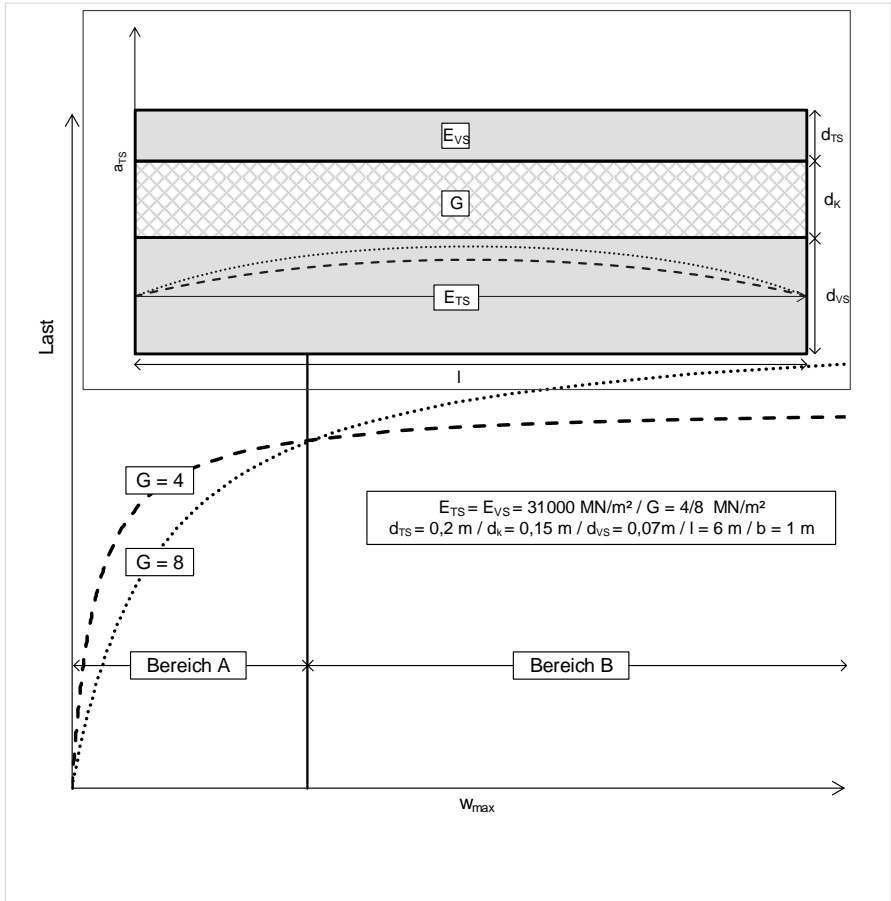


Abb. 3.13: Einfluss der Schubsteifigkeit der Kernschicht auf die Lage des *Schwerpunkts des aktivierten Querschnitts* (nicht maßstäblich dargestellt) und das Last-Verformungs-Diagramm der Sandwichwand

In Abb. 3.14 wird der Einfluss der Kernschichtschubsteifigkeit an einem Beispiel dargestellt. Mit zunehmender Kernschichtsteifigkeit wächst die Knicklast der Sandwichwand. Ist $G = 0 \text{ MN/m}^2$, entspricht die Knicklast der Sandwichwand der Summe der Knicklasten der Trag- und der Vorsatzschale. Wird G unendlich groß, tendiert die Knicklast der Sandwichwand zu derjenigen einer Sandwichwand mit einer schubstarken Kernschicht. Es sei an dieser Stelle schon angemerkt, dass der praxisrelevante Bereich sich nur auf den Anfang des Diagramms (G von 0 bis 50 MN/m^2) beschränkt.

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

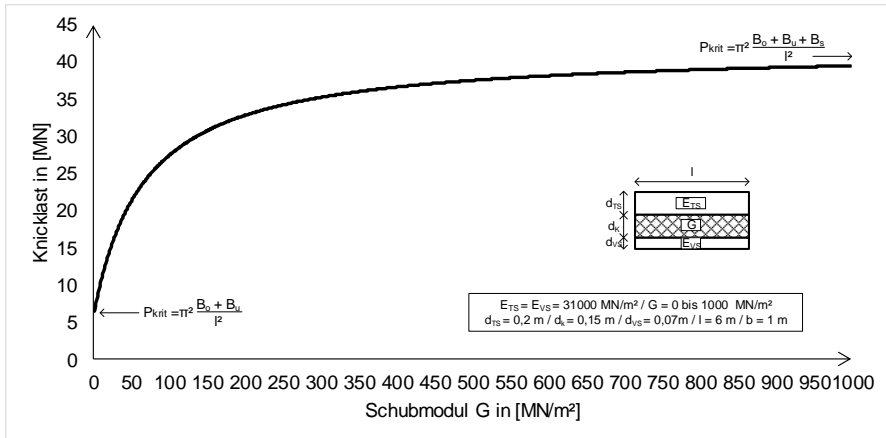


Abb. 3.14: Einfluss des Schubmoduls der Kernschicht auf die Knicklast

3.3.2.3 Einfluss der Kernschichtdicke

Der Einfluss der Kernschichtdicke wird zunächst qualitativ analysiert.

Auf der Einwirkungsseite lässt sich argumentieren, dass eine geringere Kernschichtdicke für eine Sandwichwand dazu führt, dass die Lage des *Schwerpunktes des aktivierten Querschnitts* sich näher zu der Vorsatzschale befindet (siehe Abschnitt 3.2.2). Grund dafür ist die bei einer geringeren Kernschichtdicke bessere Aktivierung der Vorsatzschale. Daraus resultieren über die Sandwichwandhöhe unterschiedliche aber in jedem Fall immer größere Exzentrizitäten der einwirkenden Normalkraft als bei einer größeren Kernschichtdicke (siehe Abschnitt 3.2.2). Das induzierte Biegemoment ist also größer bei einer geringeren Kernschichtdicke. Auf der Einwirkungsseite verschafft somit eine kleinere Kernschichtdicke einen Nachteil, indem die einwirkende Normalkraft ein größeres induziertes Moment verursacht.

Auf der Widerstandsseite ist der Einfluss der Kernschichtdicke nicht eindeutig. Einerseits kann man behaupten, dass die Aktivierung der Vorsatzschale umso besser ausfällt, je dünner die Kernschicht ist. Eine besser aktivierte Vorsatzschale sollte einen Vorteil bezüglich des Querschnittswiderstands mit sich bringen. Andererseits wird mit einer kleineren Kernschichtdicke der innere Hebelarm kleiner, was eine weniger ausgeprägte Sandwichtragwirkung verursacht und also eine geringere Biegesteifigkeit.

Wie sich alle diese Aspekte miteinander in Einklang bringen lassen, wird nachfolgend anhand eines Beispiels untersucht.

Aus Abb. 3.15 ist zu ersehen, dass sich die Variation der Kernschichtdicke für einen Schubmodul von 4 MN/m^2 unterschiedlich auf die Knicklast auswirken kann. Im Bereich 1 führt eine größere Kernschichtdicke zu einer niedrigeren Knicklast, während sich im Bereich 2 für eine größere Kernschichtdicke eine größere Knicklast ergibt. Am Übergang zwischen den Bereichen 1 und 2 erreicht die Knicklast ein Minimum. Bemerkenswert ist die Knicklast bei der theoretischen Kernschichtdicke von 0. In diesem

Fall entspricht sie der Knicklast eines monolithischen Druckstabs mit einer Dicke, die der Summe aus Trag- und Vorsatzschalendicke entspricht.

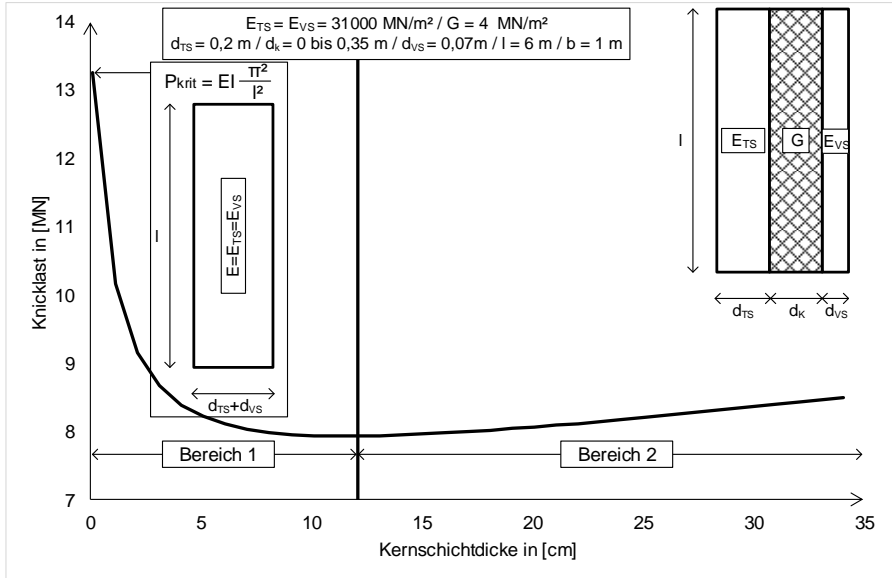


Abb. 3.15: Einfluss der Kernschichtdicke auf die Knicklast ($G = 4 \text{ MN/m}^2$)

Nun wird das Verformungsverhalten von Sandwichwänden in den Bereichen 1 und 2 verglichen. Die willkürlich zum exemplarischem Zweck gewählten Kernschichtdicken 2 cm und 5 cm sind nach Abb. 3.15 dem Bereich 1 zuzuordnen und die Last-Verformungs-Kurven der entsprechenden Sandwichwände werden in Abb. 3.16 miteinander verglichen. Aus Abb. 3.16 wird ersichtlich, dass zwei unterschiedliche Bereiche A und B definiert werden können. Im Bereich A erfährt die Sandwichwand mit der größeren Kernschichtdicke ($d_k = 5 \text{ cm}$) die geringste Verformung. Im Bereich B wiederum erfährt die Sandwichwand mit der kleineren Kernschichtdicke ($d_k = 2 \text{ cm}$) die geringste Verformung und erreicht letztendlich auch eine höhere Knicklast.

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

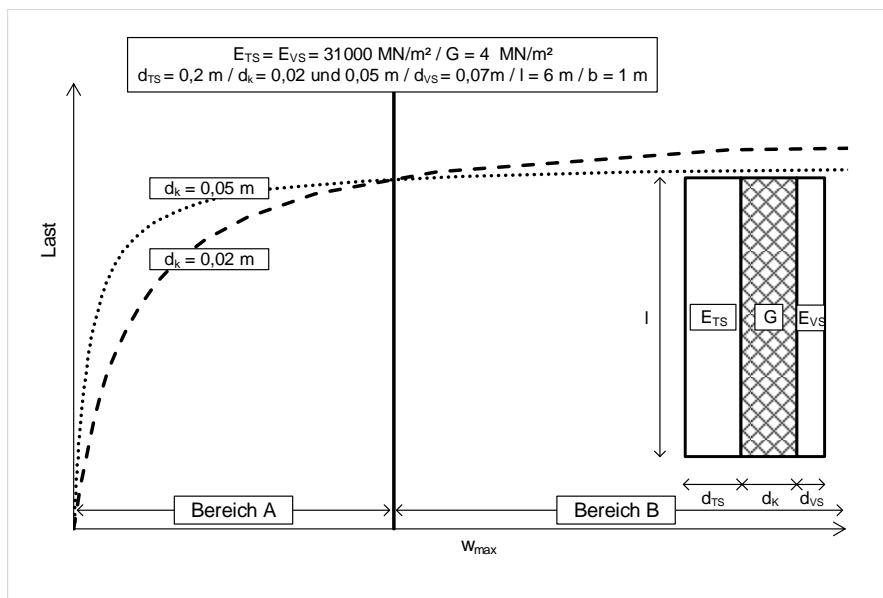


Abb. 3.16: Einfluss der Kernschichtdicke auf das Last-Verformungs-Verhalten der Sandwichwand im Bereich 1 ($G = 4 \text{ MN/m}^2$)

Die Kernschichtdicken 15 cm und 25 cm werden willkürlich zum exemplarischen Zweck gewählt. Beide sind nach Abb. 3.15 dem Bereich 2 zuzuordnen und werden in Abb. 3.17 miteinander verglichen. Im Bereich 2 ist im Gegensatz zum Bereich 1 der Einfluss der Kernschichtdicke eindeutig. Bei jedem Lastniveau ist die Verformung der Sandwichwand mit kleinerer Kernschichtdicke ($d_k = 15 \text{ cm}$) größer, so dass letztendlich die Last-Verformungs-Kurve der Sandwichwand mit der größeren Kernschichtdicke ($d_k = 25 \text{ cm}$) zu der größeren Knicklast tendiert.

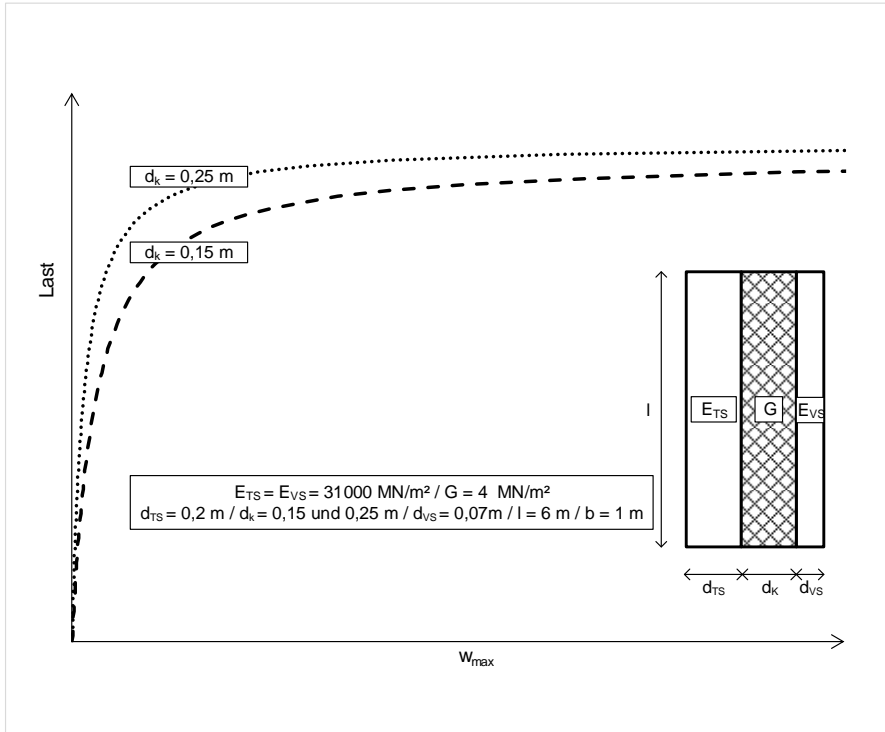


Abb. 3.17: Einfluss der Kernschichtdicke auf das Last-Verformungs-Verhalten der Sandwichwand im Bereich 2 ($G = 4 \text{ MN/m}^2$)

Als nächstes wird der Einfluss der Kernschichtdicke auf die Knicklast für die gleiche Sandwichwandkonfiguration mit einem höheren Schubmodul ($G = 50 \text{ MN/m}^2$ statt 4 MN/m^2) als einzigem Unterschied untersucht. Das Ergebnis ist in Abb. 3.18 dargestellt. Je größer die Kernschichtdicke wird, desto höher wird die Knicklast. Bezüglich des Last-Verformungsverhaltens der Sandwichwand (siehe Abb. 3.19) gilt auch, dass bei jedem Lastniveau die Verformung der Sandwichwand mit der kleineren Kernschichtdicke ($d_k = 10 \text{ cm}$) größer ist, so dass letztendlich die Last-Verformungs-Kurve der Sandwichwand mit der größeren Kernschichtdicke ($d_k = 20 \text{ cm}$) zu der größeren Knicklast tendiert.

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

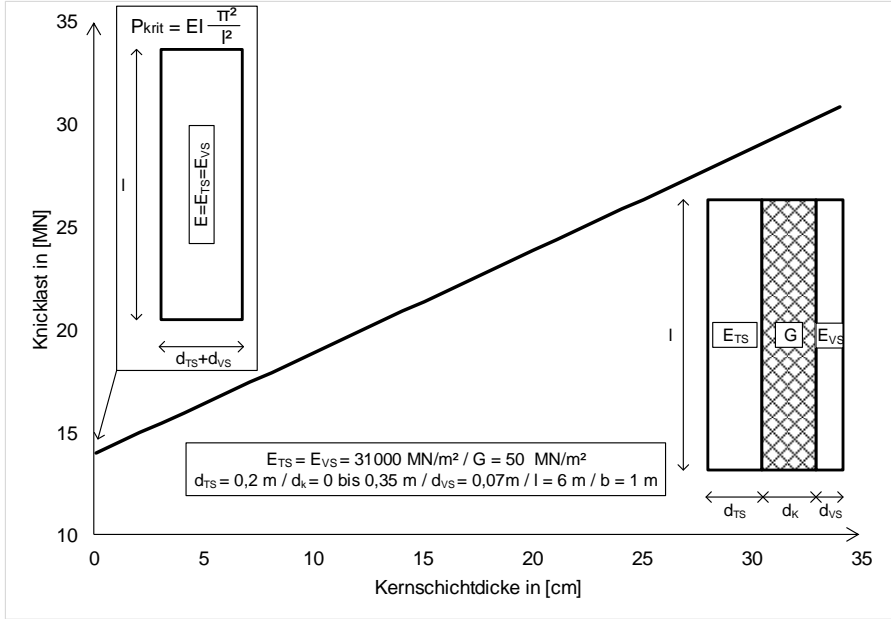


Abb. 3.18: Einfluss der Kernschichtdicke auf die Knicklast (G = 50 MN/m²)

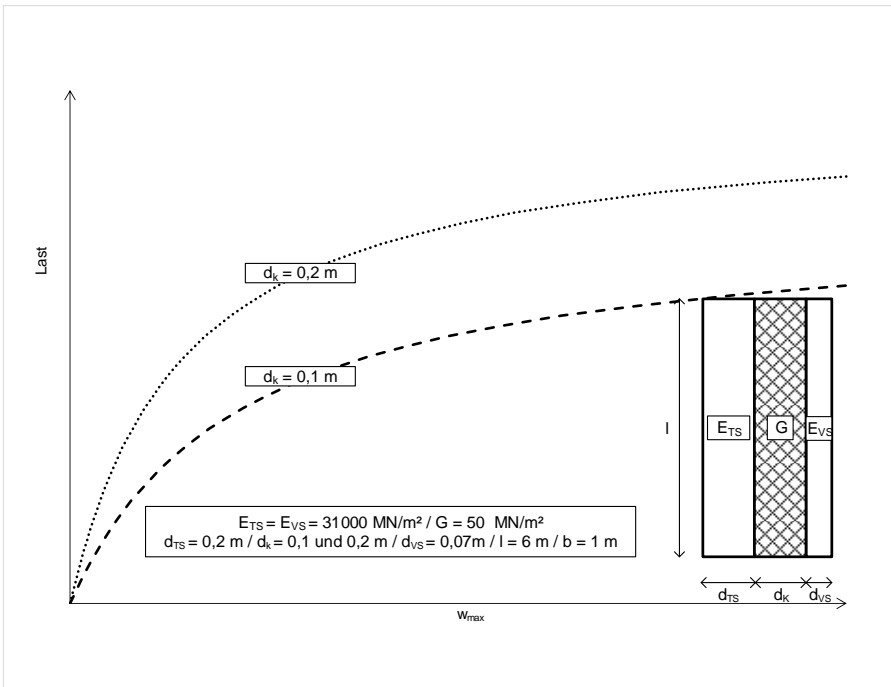


Abb. 3.19: Einfluss der Kernschichtdicke auf das Last-Verformungs-Verhalten der Sandwichwand (G = 50 MN/m²)

Je nach Schubmodul können unterschiedliche Muster des Einflusses der Kernschichtdicke auf die Knicklast und das Last-Verformungs-Verhalten der Sandwichwand erkannt werden. In Abb. 3.20 ist die Knicklast in Abhängigkeit von der Kernschichtdicke und dem Schubmodul dreidimensional dargestellt.

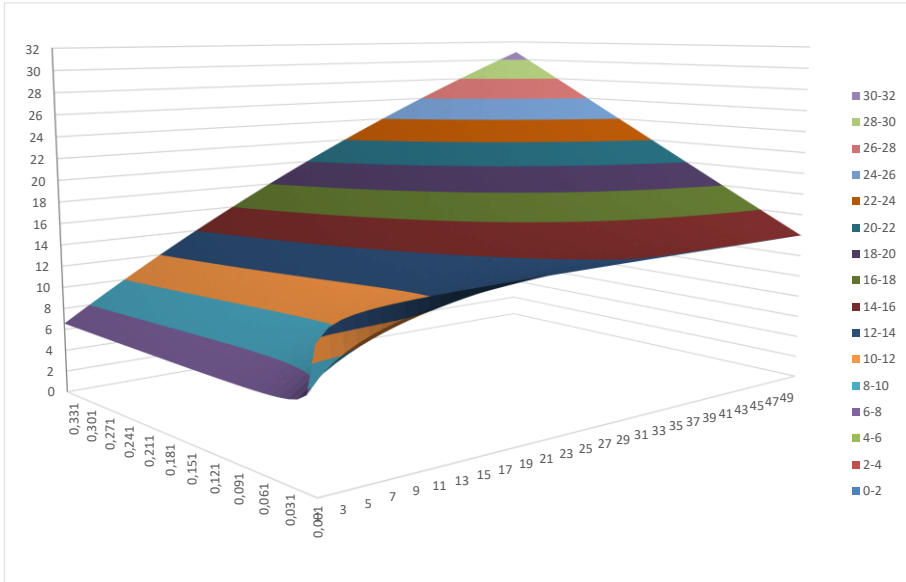


Abb. 3.20: Einfluss des Schubmoduls und der Kernschichtdicke auf die Knicklast

Es können zwei Bereiche identifiziert werden. In dem ersten Bereich sinkt und wächst die Knicklast mit zunehmender Kernschichtdicke (siehe Beispiel mit $G = 4 \text{ MN/m}^2$), während in dem anderen Bereich die Knicklast mit zunehmender Kernschichtdicke lediglich wächst (siehe Beispiel $G = 50 \text{ MN/m}^2$). Interessant ist es herauszufinden, bei welcher Kernschichtschubsteifigkeit der Übergang zwischen beiden Bereichen stattfindet. Um diese Frage zu beantworten, wird die Ableitung der Knicklast nach der Kernschichtdicke betrachtet. Dafür muss die Knicklast, wie sie in (3.112) erscheint, abgeleitet werden.

$$P_k = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\frac{D_u D_o a^2}{D} + (B_u + B_o) + \pi^2 \frac{(B_u + B_o) h D_u D_o}{D G b l^2}}{1 + \pi^2 \frac{D_u D_o h}{D G b l^2}} \quad (3.112)$$

Setzt man:

$$u = \frac{D_u D_o a^2}{D} + (B_u + B_o) + \pi^2 \frac{(B_u + B_o) h D_u D_o}{D G b l^2} \quad (3.113)$$

$$v = 1 + \pi^2 \frac{D_u D_o h}{D G b l^2} \quad (3.114)$$

und

3.3 Erweiterung der Sandwichtheorie für Biegebeanspruchung und exzentrische Normalkraft mit linearen Materialeigenschaften

$$a = h + \frac{t_o + t_u}{2} \tag{3.115}$$

dann ist die Ableitung der Knicklast nach der Kernschichtdicke:

$$(P_k)' = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{3.116}$$

mit:

$$u' = \frac{D_u D_o (2h + t_o + t_u)}{D} + \pi^2 \frac{(B_u + B_o) D_u D_o}{D G b l^2} \tag{3.117}$$

$$v' = \frac{\pi^2 D_u D_o}{D G b l^2} \tag{3.118}$$

In dem ersten Bereich ist die Ableitung der Knicklast zunächst negativ (abnehmende Knicklast) und dann positiv (zunehmende Knicklast). In dem zweiten Bereich ist die Ableitung der Knicklast von null an positiv (zunehmende Knicklast). Um die Grenze zwischen beiden Bereichen herauszufinden, muss also der Betrag der Ableitung der Knicklast für eine Kernschichtdicke gleich null gesetzt und für das ganze Spektrum der Kernschichtschubsteifigkeiten untersucht werden. Die Grenze zwischen beiden Bereichen wird durch die Nullstelle der Ableitung gekennzeichnet. Aus Abb. 3.21 ist zu entnehmen, dass die Grenze zwischen den erwähnten Bereichen zwischen $G = 29$ MN/m² und 30 MN/m² liegt.

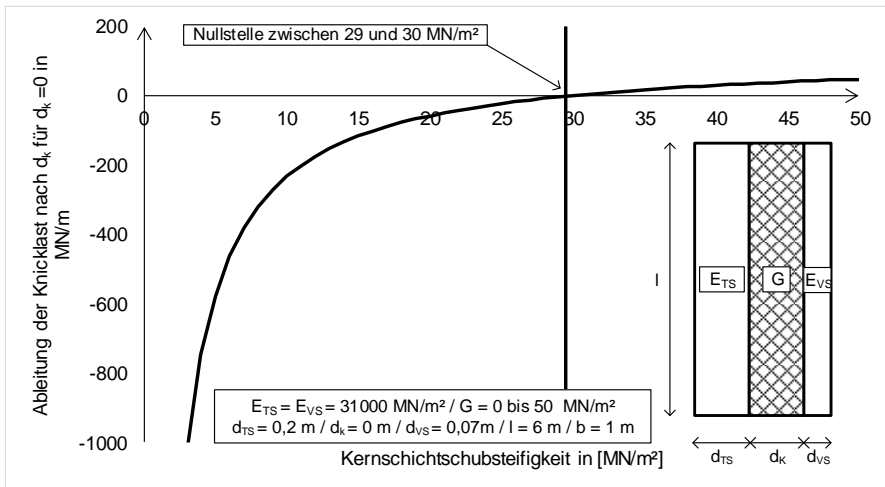


Abb. 3.21: Verlauf der Ableitung der Knicklast nach d_k für $d_k = 0$ in Abhängigkeit vom Schubmodul

In der betrachteten Sandwichwandkonfiguration ist es bezüglich der mit linear elastischen Materialeigenschaften berechneten Knicklast ab einem Schubmodul von

30 MN/m² für jede Kernschichtdicke vorteilhafter, eine Sandwichwand statt einer monolithischen Wand auszuführen, deren Dicke der Summe der Vorsatz- und der Tragchalendicke entsprechen würde. Anders formuliert wird in diesem Beispiel ab $G > 30 \text{ MN/m}^2$ die Knicklast immer größer, wenn statt einer monolithischen Wand die beschriebene Sandwichwand ausgeführt wird.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

3.4.1 Bestimmung der Querschnittssteifigkeit in einem Zugglied mit nichtlinearen Querschnittskonfigurationen

In Abschnitt 2.3.2.1 wird die Querschnittssteifigkeit für materiell nichtlineare Querschnittskonfigurationen bestimmt. Allerdings decken alle erläuterten Konfigurationen lediglich den Fall eines Querschnitts unter Druckbeanspruchung ab. Dies reicht für eine Sandwichwand nicht aus. Je nach Lastangriffspunkt und Verformungsrichtung kann die Vorsatzschale als Normalkraftbeanspruchung Druck- aber auch Zugkräfte erfahren. Nachfolgend werden alle sechs für Zugglieder relevanten Querschnittskonfigurationen untersucht. Nach dem Aufstellen der inneren Schnittgrößen P und M für jede Konfiguration werden die Dehnungen ϵ_1 und ϵ_4 für die ausschließlich numerisch lösbaren Fälle anhand des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens bestimmt (siehe Abschnitt 2.3.2.1).

Konfiguration 5

Die Konfiguration 5 beschreibt den Querschnitt im gerissenen Zustand. Der Beton verhält sich linear-elastisch (siehe Abb. 3.22). Die innere Normalkraft und das innere Moment infolge des Betons sind in den Gleichungen (3.119) und (3.120) ausgedrückt.

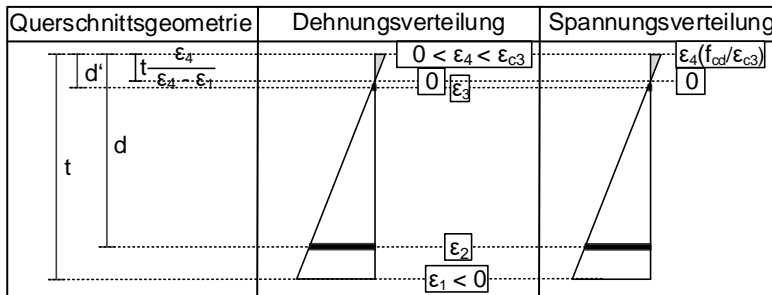


Abb. 3.22: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 5

Mathematisch umfasst die Konfiguration 5 auch die in Abb. 3.23 beschriebene Konfiguration.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

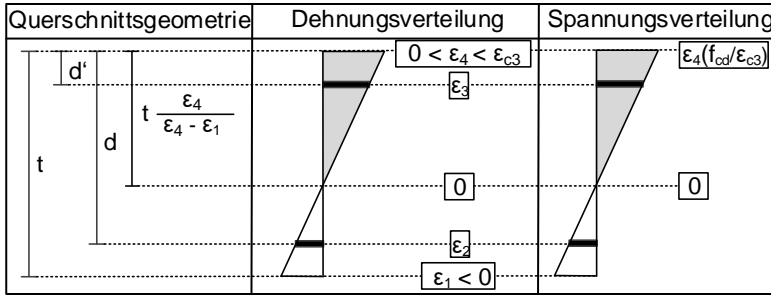


Abb. 3.23: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in einer zur Konfiguration 5 mathematisch äquivalenten Konfiguration

Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \quad (3.119)$$

Moment:

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) \quad (3.120)$$

Konfiguration 5.1

In der Konfiguration 5.1 befindet sich die Bewehrung in beiden Lagen unterhalb der Fließgrenze (siehe Abb. 3.24).

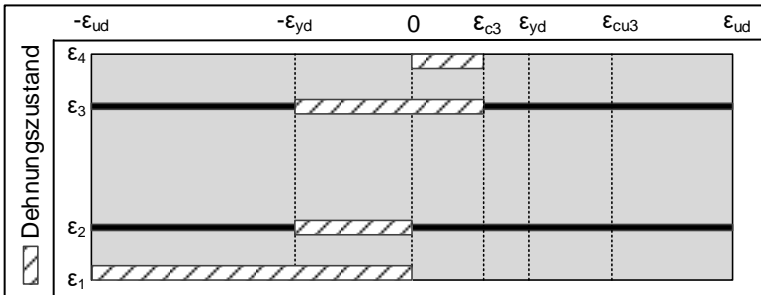


Abb. 3.24: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 5.1

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den Gleichungen (2.121) bis (3.124) ausgedrückt.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (3.121)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.122)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.123)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.124)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.125)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.126)$$

Die für das Programm erforderliche Funktionen sind in den Gleichungen (3.127) bis (3.132) aufgelistet:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \frac{1}{2} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3} E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (3.127)$$

$$g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \frac{1}{12} \varepsilon_4^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 \varepsilon_1 - \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \quad (3.128)$$

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\ &+ \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s + P \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t}(2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\ &+ \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t}(2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s - P \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 \\ &- \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= \frac{1}{4} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4 \varepsilon_1 \\ &- \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\ &+ \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\ &- 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Konfiguration 5.2

In der Konfiguration 5.2 fließt die Bewehrung in der unteren Lage (siehe Abb. 3.25).

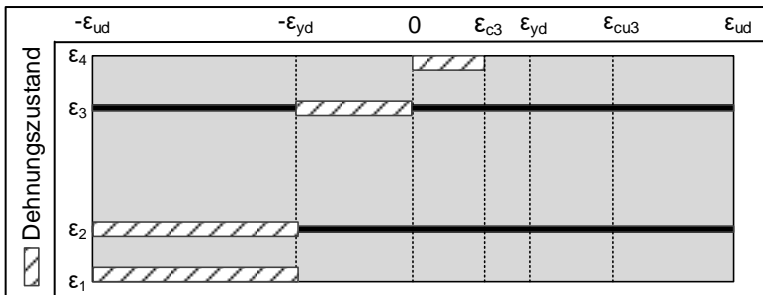


Abb. 3.25: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 5.2

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist in den folgenden Gleichungen angegeben.

Normalkraft:

$$P_{s2} = -A_{s2}f_{yk} \quad (3.133)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.134)$$

Moment:

$$M_{s2} = f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.135)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.136)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b - A_{s2} f_{yk} + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.137)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} t \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) + f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.138)$$

Die für das Programm erforderlichen Funktionen sind in den Gleichungen (3.139) bis (3.144) aufgeführt:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t b - A_{s2} f_{yk} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\ &+ \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3} E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{12} \varepsilon_4^3 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 \varepsilon_1 + f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \\ &+ \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = A_{s2} f_{yk} + \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s + P \quad (3.141)$$

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = \varepsilon_4 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) tb - A_{s2} f_{yk} + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s - P \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4^2 - 2f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + \left[-2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = \frac{1}{4} \varepsilon_4^2 \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \right) t^2 b \varepsilon_4 \varepsilon_1 + 2f_{yk} A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (3.144)$$

Konfiguration 6

Die Konfiguration 6 beschreibt den Querschnitt im gerissenen Zustand. Der Beton überschreitet den Grenzdehnwert ε_{c3} auf der Druckseite. Vereinfachend wird für das Aufstellen des Betonbeitrags zu den inneren Schnittgrößen der Betonquerschnitt in die Bereiche a und b aufgeteilt, wie aus Abb. 3.26 zu ersehen ist. Die innere Normalkraft und das innere Moment infolge des Betons sind in den Gleichungen (3.145) bis (3.148) ausgedrückt.

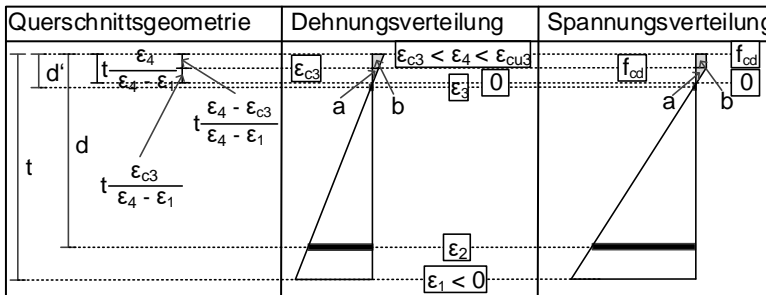


Abb. 3.26: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 6

Mathematisch umfasst die Konfiguration 6 auch die in Abb. 3.27 beschriebene Konfiguration.

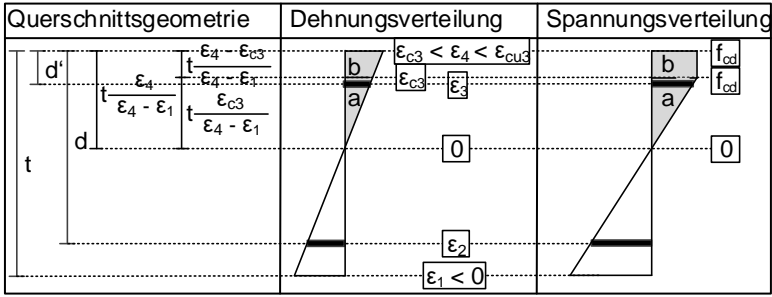


Abb. 3.27: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in einer zur Konfiguration 6 mathematisch äquivalenten Konfiguration

Normalkraft:

$$P_a = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t b \quad (3.145)$$

$$P_b = f_{cd} \left(\frac{\epsilon_4 - \epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t b \quad (3.146)$$

Moment:

$$M_a = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\epsilon_4 - \epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t \right) \quad (3.147)$$

$$M_b = f_{cd} \left(\frac{\epsilon_4 - \epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_4 - \epsilon_{c3}}{\epsilon_4 - \epsilon_1} \right) t \right) \quad (3.148)$$

Konfiguration 6.1

In der Konfiguration 6.1 befindet sich die Bewehrung in beiden Lagen unterhalb der Fließgrenze (siehe Abb. 3.28).

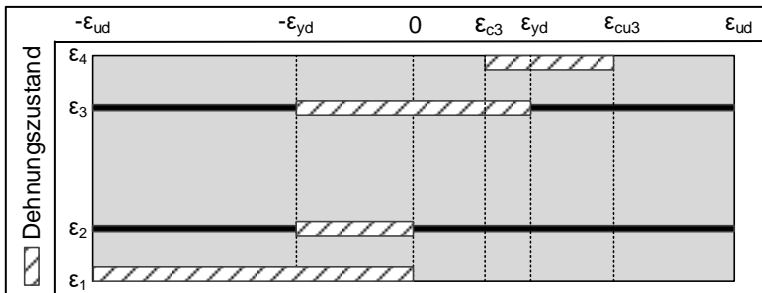


Abb. 3.28: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 6.1

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ergibt sich nach den Gleichungen (3.149) bis (3.152).

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (3.149)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.150)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.151)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.152)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.153)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t b \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.154)$$

Die für das Programm erforderliche Funktionen sind in den Gleichungen (3.155) bis (3.160) aufgelistet:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = - \frac{1}{2} f_{cd} \varepsilon_{c3} t b + f_{cd} \varepsilon_4 t b + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3} E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \quad (3.155)$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_{c3} \right) \\
 &+ f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &- \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ \left[\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned} \tag{3.156}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\
 &+ \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s + P
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= f_{cd} t b + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \\
 &+ \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t} (2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s - P
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b - f_{cd} (\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2 b}{2} \\
 &- \left[-2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ \left[-2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= -\frac{1}{4} f_{cd} \varepsilon_{c3} t^2 b \\
 &+ f_{cd} \frac{t^2 b}{2} (\varepsilon_{c3} \\
 &- \varepsilon_1) - \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4 (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3 \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\
 &- 2M (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

Konfiguration 6.2

In der Konfiguration 6.2 fließt die Bewehrung in der unteren Lage, während sich diejenige in der oberen Lage linear-elastisch verhält (siehe Abb. 3.29).

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

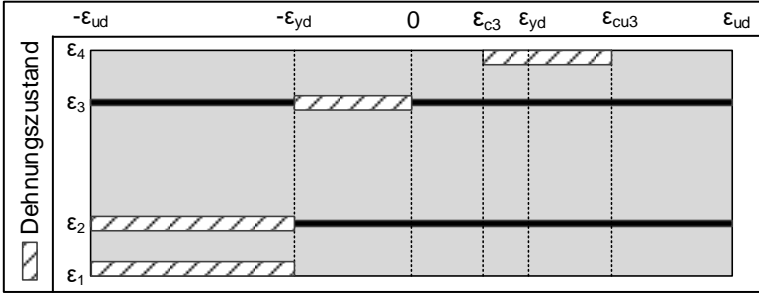


Abb. 3.29: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 6.2

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ergibt sich nach den folgenden Gleichungen.

Normalkraft:

$$P_{s2} = -A_{s2}f_{yk} \quad (3.161)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s \quad (3.162)$$

Moment:

$$M_{s2} = f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.163)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.164)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2}f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb - A_{s2}f_{yk} + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s \quad (3.165)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = \frac{1}{2}f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) + f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.166)$$

Die für das Programm erforderliche Funktionen sind in den Gleichungen (3.167) bis (3.172) gelistet:

$$\begin{aligned}
 f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= -\frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}tb + f_{cd}\varepsilon_4tb - A_{s2}f_{yk}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s3}E_s - P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_{c3} \right) \\
 &+ f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) + f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \\
 &+ \left[\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned} \tag{3.168}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = A_{s2}f_{yk} + \left[-\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s + P \tag{3.169}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = f_{cd}tb - A_{s2}f_{yk} + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d'}{t}(2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s3}E_s - P \tag{3.170}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b - f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} - 2f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3\frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.171}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b + f_{cd} \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) + 2f_{yk}A_{s2} \left(d - \frac{t}{2} \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &+ \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3\frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s3}E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \\
 &- 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

Konfiguration 6.3

In der Konfiguration 6.3 fließt die Bewehrung in der oberen Lage, während sich diejenige in der unteren Lage linear-elastisch verhält (siehe Abb. 3.30).

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

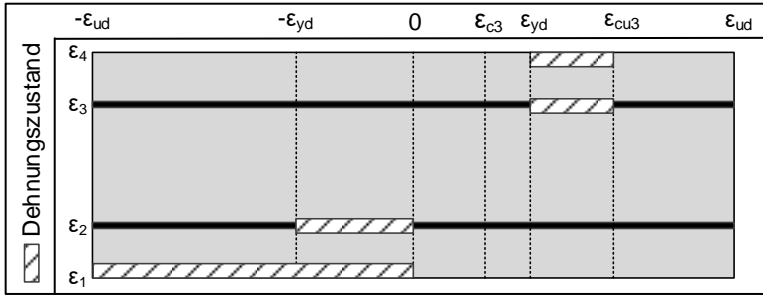


Abb. 3.30: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 6.3

Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ergibt sich nach den Gleichungen (3.173) bis (3.176).

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (3.173)$$

$$P_{s3} = A_{s3} f_{yk} \quad (3.174)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.175)$$

$$M_{s3} = A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.176)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb + \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + A_{s3} f_{yk} \quad (3.177)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = \frac{1}{2} f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) + f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) tb \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_1} \right) t \right) - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + A_{s3} f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.178)$$

Die für das Programm erforderliche Funktionen sind in den Gleichungen (3.179) bis (3.184) gelistet:

$$\begin{aligned}
 f(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= -\frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}tb + f_{cd}\varepsilon_4tb \\
 &+ \left[\varepsilon_4^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varepsilon_1^2) \right] A_{s2}E_s + A_{s3}f_{yk}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \\
 &- P(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon_1, \varepsilon_4) &= \frac{1}{2}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_{c3} \right) \\
 &+ f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_1) \\
 &- \left[\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^3 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 - M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2
 \end{aligned} \tag{3.180}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} = \left[-\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(-2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s - A_{s3}f_{yk} + P \tag{3.181}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} = f_{cd}tb + \left[2\varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \frac{d}{t}(2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_1) \right] A_{s2}E_s + A_{s3}f_{yk} - P \tag{3.182}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_1} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b - f_{cd}(\varepsilon_4 - \varepsilon_{c3}) \frac{t^2b}{2} \\
 &- \left[-2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &- 2A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) + 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g(\varepsilon_1, \varepsilon_4)}{\partial \varepsilon_4} &= -\frac{1}{4}f_{cd}\varepsilon_{c3}t^2b \\
 &+ f_{cd} \frac{t^2b}{2} (\varepsilon_{c3} \\
 &- \varepsilon_1) - \left[(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 3\frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)^2 \right] A_{s2}E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \\
 &+ 2A_{s3}f_{yk} \left(\frac{t}{2} - d' \right) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - 2M(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{3.184}$$

Konfiguration 7

In der Konfiguration 7 geht ein Trennriss durch den Querschnitt (siehe Abb. 3.31). Der Beton leistet keinen Beitrag zu den inneren Schnittgrößen.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

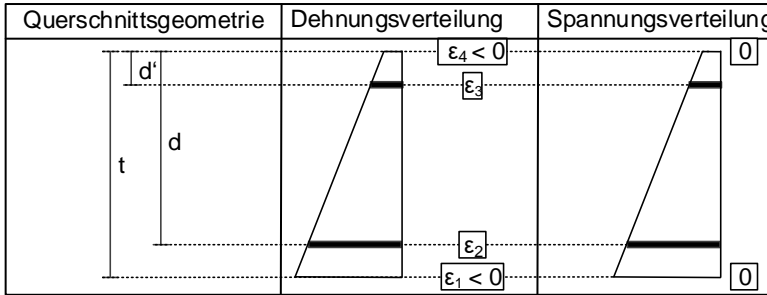


Abb. 3.31: Querschnittsgeometrie, Dehnungsverteilung und Spannungsverteilung des Querschnitts in der Konfiguration 7

In der Konfiguration 7 befindet sich die Bewehrung in beiden Lagen unterhalb der Fließgrenze (siehe Abb. 3.32).

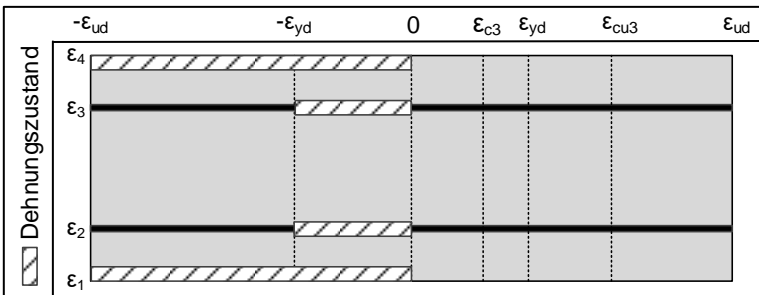


Abb. 3.32: Dehnungszustände im Querschnitt in der Konfiguration 7

Die äußeren Schnittgrößen werden lediglich durch die beiden Bewehrungslagen aufgenommen. Der Anteil der Bewehrungslagen an den inneren Schnittgrößen ist nachfolgend angegeben.

Normalkraft:

$$P_{s2} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \quad (3.185)$$

$$P_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.186)$$

Moment:

$$M_{s2} = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \quad (3.187)$$

$$M_{s3} = \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t} (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.188)$$

Insgesamt beträgt die innere Normalkraft:

$$P = \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \quad (3.189)$$

Und das innere Moment ergibt sich zu:

$$M = - \left[\varepsilon_4 - \frac{d}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) + \left[\varepsilon_4 - \frac{d'}{t}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1) \right] A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \quad (3.190)$$

Das Gleichungssystem ist linear und lässt sich analytisch nach einiger Rechnung lösen.

$$\varepsilon_1 = \frac{M \left[A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right] - P \left[-A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]}{\left[-A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \frac{d}{t} + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \frac{d'}{t} \right] \left[A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right] - \left[A_{s2} E_s \frac{d}{t} + A_{s3} E_s \frac{d'}{t} \right] \left[-A_{s2} E_s \left(d - \frac{t}{2} \right) \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(\frac{t}{2} - d' \right) \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]} \quad (3.191)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{P - \varepsilon_1 \left[A_{s2} E_s \frac{d}{t} + A_{s3} E_s \frac{d'}{t} \right]}{\left[A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d}{t} \right) + A_{s3} E_s \left(1 - \frac{d'}{t} \right) \right]} \quad (3.192)$$

Um ausgehend von einem Momenten-Normalkraft-Paar (M, P) den nichtlinearen Dehnungszustand im Querschnitt, der durch ε_1 und ε_4 zusammengefasst werden kann, zu bestimmen, wird davon ausgegangen, dass eine der sechs definierten Querschnittskonfigurationen dem angegebenen Wertepaar (M, P) entsprechen kann. Es wird also algorithmisch unter den sechs Konfigurationen gesucht, bis eine die Schnittgrößen M und P aufnehmen kann und dabei die Randbedingungen bezüglich der Dehnungen ε_1 , ε_2 , ε_3 und ε_4 nicht verletzt. Sollte das Wertepaar (M, P) bei keiner Konfiguration gefunden werden, ist davon auszugehen, dass die Beanspruchung von dem Querschnitt nicht aufgenommen werden kann. Die grobe Struktur des genutzten Algorithmus ist in Abb. 3.33 gegeben.

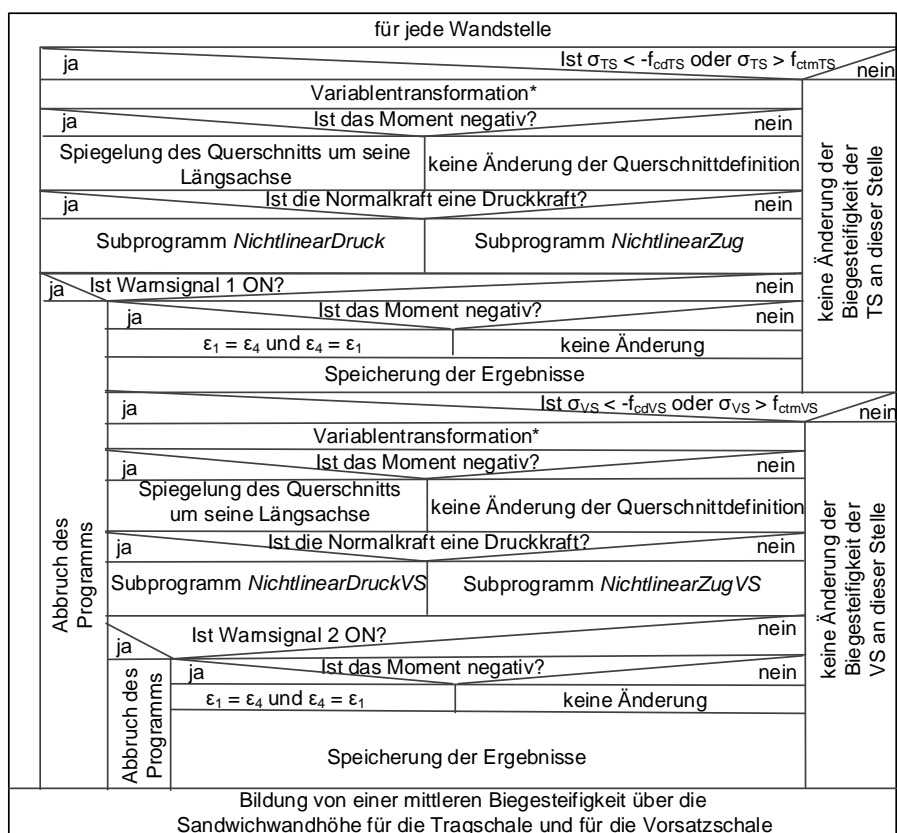
3 Erweiterung der Sandwichtheorie

Eingabe der Systemeigenschaften und der Recheneinstellungen			
Berechnung abgeleiteter Querschnittskenngößen u.a. ideeller Querschnittswerten			
Berechnung der Diskriminante Δ des Polynoms 2. Ordnung und seiner beiden Wurzeln X_1 und X_2			
ja		nein	
X ₁ >0		X ₁ >0	
ja	X ₂ >0	nein	ja
ja	X ₂ >0	nein	ja
Berechnung der 4 Wurzeln des Polynoms 4. Ordnung und der Koeffizienten der Matrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten im Fall 1	Berechnung der 4 Wurzeln des Polynoms 4. Ordnung und der Koeffizienten der Matrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten im Fall 2	Berechnung der 4 Wurzeln des Polynoms 4. Ordnung und der Koeffizienten der Matrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten im Fall 3	Berechnung der 4 Wurzeln des Polynoms 4. Ordnung und der Koeffizienten der Matrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten im Fall 4
Berechnung der Determinante der Koeffizientenmatrix			
Aufstellen der Matrix zur Berechnung der 1. Integrationskonstante			
Berechnung ihrer Determinante und Berechnung der 1. Integrationskonstante nach der Cramer'schen Regel			
-			
Aufstellen der Matrix zur Berechnung der 4. Integrationskonstante			
Berechnung ihrer Determinante und Berechnung der 4. Integrationskonstante nach der Cramer'schen Regel			
für jede Wandstelle			
ja		nein	
X ₁ >0		X ₁ >0	
ja	X ₂ >0	nein	ja
ja	X ₂ >0	nein	ja
Bestimmung der Verformung, der Schnittgrößen und der Spannungen im Fall 1	Bestimmung der Verformung, der Schnittgrößen und der Spannungen im Fall 2	Bestimmung der Verformung, der Schnittgrößen und der Spannungen im Fall 3	Bestimmung der Verformung, der Schnittgrößen und der Spannungen im Fall 4
für jede Wandstelle			
ja		nein	
Ist $\Delta_u < \Delta_{ulim}$?		Ist $\Delta_u < \Delta_{ulim}$?	
Wamsignal 3 OFF		Wamsignal 3 ON	
Subprogramm <i>Nichtlinear</i>			
ja		nein	
Ist Wamsignal 1 ON oder Wamsignal 2 ON oder Wamsignal 3 ON ?		Ist Wamsignal 1 ON oder Wamsignal 2 ON oder Wamsignal 3 ON ?	
Abbruch des Programms		Speicherung ausgewählter Daten für das betroffene Lastniveau	
Erhöhung des Lastniveaus bis zum Versagen der Sandwichwand			

Abb. 3.34: Struktur des Programms zur nichtlinearen Berechnung von Sandwichwänden TiToU

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

Die Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten erfolgt durch das Subprogramm *Nichtlinear*, dessen Struktur in Abb. 3.35 gegeben ist. Das Subprogramm *Nichtlinear* greift für die Bestimmung von Querschnittsbiegesteifigkeiten im nichtlinearen Zustand auf vier unterschiedliche Subprogramme zu. Für die Tragschale werden die Subprogramme *NichtlinearDRUCK* (siehe Abb. 2.26) und *NichtlinearZUG* (siehe Abb. 3.33) herangezogen. Für die Vorsatzschale werden die Subprogramme *NichtlinearDRUCKVS* (siehe Abb. 3.36) und *NichtlinearZUGVS* (siehe Abb. 3.37) verwendet. Letztere sind vereinfachte Versionen der Subprogramme *NichtlinearDRUCK* und *NichtlinearZUG*, die sich durch eine geringere Anzahl an Konfigurationen von den Stammsubprogrammen unterscheiden. Der physikalische Grund dafür ist das Vorhandensein einer einzigen Bewehrungslage in der Vorsatzschale, während eine Tragschale zwei Bewehrungslagen beinhaltet. Dadurch ist die Anzahl der möglichen Konfigurationen für eine Vorsatzschale geringer als für eine Tragschale.



* aus Kompatibilitätsgründen mit den Subprogrammen

Abb. 3.35: Struktur des Subprogramms *Nichtlinear*

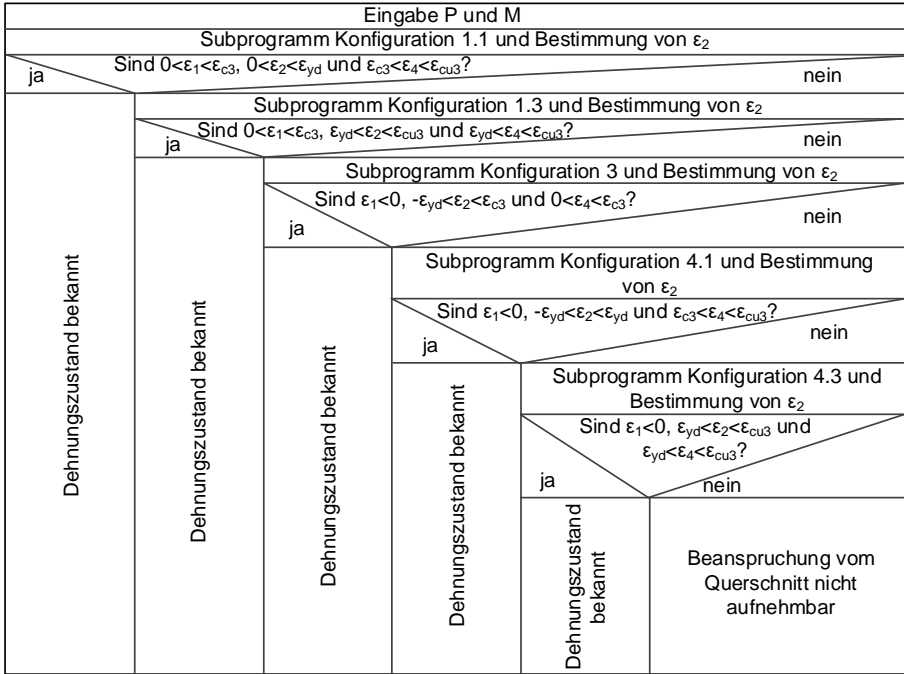


Abb. 3.36: Struktogramm nach DIN 66261 des Subprogramms *NichtlinearDRUCKVS* zur Bestimmung der Biegesteifigkeit im nichtlinearen Bereich für die Vorsatzschale unter Druckbeanspruchung

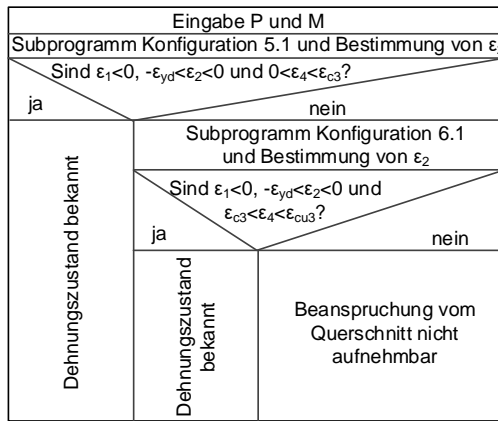


Abb. 3.37: Struktogramm nach DIN 66261 des Subprogramms *NichtlinearZUGVS* zur Bestimmung der Biegesteifigkeit im nichtlinearen Bereich für die Vorsatzschale unter Zugbeanspruchung

Das Subprogramm *Nichtlinear* muss berücksichtigen, dass eine Tragschale und eine Vorsatzschale je nach Krümmungsrichtung der Sandwichwand ein positives oder ein negatives Moment erfahren können. Für beide Situationen werden die gleichen Algo-

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

rithmen verwendet. Ein positives Moment verursacht eine Dehnung ε_1 und eine Stauchung ε_4 . Im Fall eines negativen Momentes tritt das Gegenteil ein und der Querschnitt wird für die nichtlineare Berechnung als Referenzquerschnitt gespiegelt angegeben. In Abb. 3.38 sind die jeweiligen Referenzquerschnitte einer Sandwichwand und einer Stahlbetonwand dargestellt.

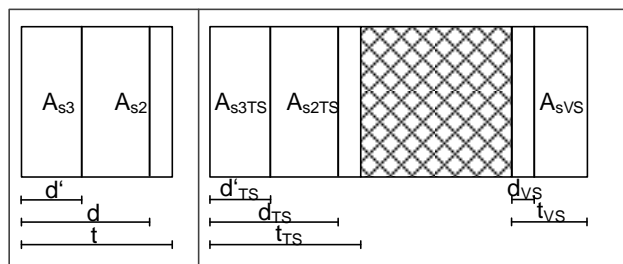


Abb. 3.38: Referenzstahlbetonquerschnitt für nichtlineare Berechnungen (links) und Referenzsandwichquerschnitt (rechts)

In Abb. 3.39 werden die für den Referenzquerschnitt für die nichtlineare Berechnung angegebenen Größen, je nachdem, ob es sich um die Trag- oder die Vorsatzschale handelt und ob das einwirkende Moment positiv oder negativ ist, aufgeführt.

		positives Moment	negatives Moment
Tragschale			
	Vorsatzschale		

Abb. 3.39: Variablentransformation zur Nutzung des Referenzstahlbetonquerschnitts für nichtlineare Berechnungen für die Tragschale und die Vorsatzschale bei positiven und negativen Momenten

3.4.3 Parameterstudie

Nun soll der Einfluss einiger Parameter auf die Versagenslast einer Sandwichwand mit dem Programm TiToU untersucht werden. Variiert werden die Wandhöhe (von 1 m bis 16 m) und somit die Schlankheit (von 17 bis 277) sowie die Lastexzentrizität (0 m,

0,01 m und 0,02 m), die Kernschichtdicke (0,06 m, 0,1 m, 0,14 m und 0,20 m) und der Schubmodul ($G = 2 \text{ MN/m}^2$ und $G = 6 \text{ MN/m}^2$).

In Abb. 3.40 wird der Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei einer in die Tragschale mittigen Lasteinleitung dargestellt. Abmessungen und Eigenschaften der Sandwichwände in dieser Grundkonfiguration können Abb. 3.40 entnommen werden.

Beobachtet wird, dass mit größer werdender Kernschichtdicke die Versagenslast höher wird. Dies gilt allerdings zunächst einmal nur für die verglichenen praxisrelevanten Kernschichtdicken und nicht für sehr geringe Wandhöhen, die von einem Versagen der Tragschale gekennzeichnet werden und bei denen die Kernschichtdicke keinen Einfluss auf die Versagenslast hat.

Die Versagenslast wird mit größer werdender Schlankheit kleiner. Unterhalb einer gewissen Schlankheit steigt aber die Versagenslast nicht mehr. Es bildet sich ein Plateau, in dem das Erreichen der Traglast durch das Versagen der Tragschale gekennzeichnet wird.

Zwei unterschiedliche Versagensarten können identifiziert werden: Bei gedungenen Sandwichwänden versagt wie oben beschrieben die Tragschale (Druckversagen), während bei schlankeren Sandwichwänden die Kernschicht versagt, indem ihre Scherfestigkeit überschritten wird. Bei sehr schlanken Sandwichwänden befindet sich die Vorsatzschale vor dem Versagen im gerissenen Zustand.

Bei den unterschiedlichen Kernschichtdicken wird von dem gleichen G-Modul von 2 MN/m^2 ausgegangen. Die maximale Verzerrung der Kernschicht, die das Erreichen ihrer Scherfestigkeit kennzeichnet, wird für eine der Kernschichtdicken experimentell bestimmt und dann für die anderen geometrisch extrapoliert. Somit unterliegt die vorliegende Parameterstudie nicht der Streuung, die mit experimentell gewonnenen Werten immer einhergeht und die das Verhältnis zwischen den unterschiedlichen Kernschichtdicken verfälschen würde, sondern basiert auf einem logischen Zusammenhang zwischen den jeweiligen maximal aufnehmbaren Verzerrungen der unterschiedlichen Kernschichtdicken.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

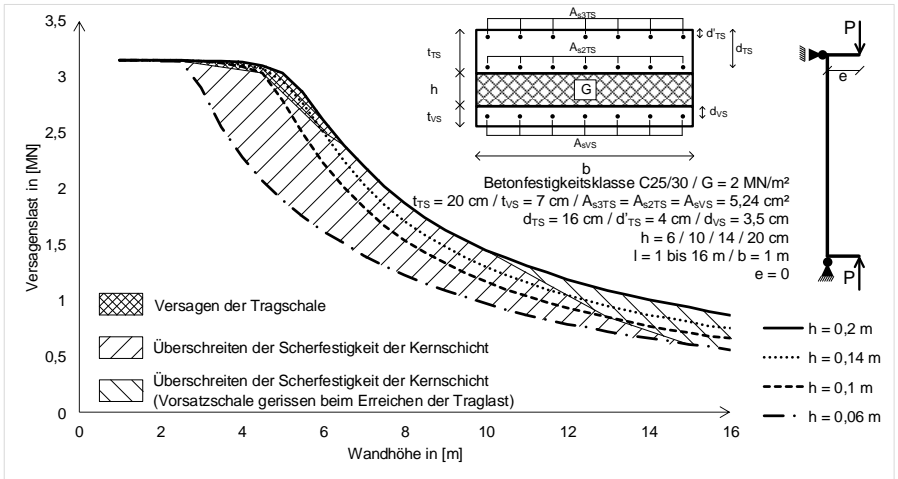


Abb. 3.40: Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei einer in die Tragschale mittigen Lasteinleitung

In Abb. 3.41 wird der Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei unterschiedlichen Lastexzentrizitäten der Lasteinleitung dargestellt. Die Exzentrizität der Lasteinleitung bezieht sich auf die Mitte der Tragschale und ist positiv, wenn die Lasteinleitung sich zwischen dem äußeren Rand der Tragschale und ihrer Mitte befindet. Wie zu erwarten ist, verursacht eine höhere Exzentrizität der Lasteinleitung eine geringere Traglast und auch eventuell eine andere Versagensart (Überschreiten der Kernschichtscherfestigkeit statt Druckversagen der Tragschale). Mit höher werdender Schlankheit wird der Einfluss der Exzentrizität auf die Versagenslast kleiner. Dies wird auch bei Stahlbetonwänden beobachtet.

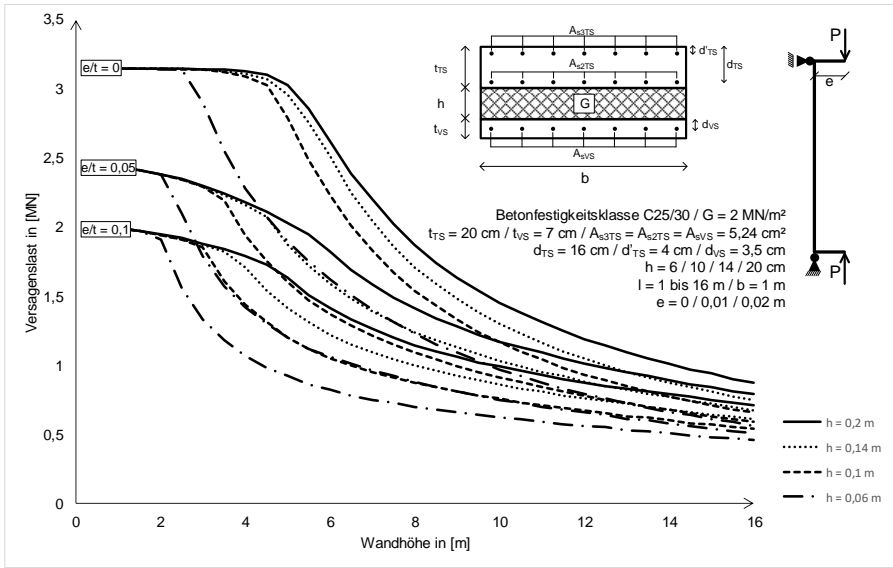


Abb. 3.41: Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei unterschiedlichen Lastexzentrizitäten

Weiterhin soll der Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei einer in die Tragschale mittigen Lasteinleitung und einem G-Modul von 6 MN/m² untersucht werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 3.42 dargestellt. Bei geringen Schlankheiten ist ein Druckversagen der Tragschale maßgebend. Bei größeren Schlankheiten ist ein Versagen der Kernschicht infolge des Überschreitens ihrer Scherfestigkeit maßgebend. Bei sehr hohen Schlankheiten tritt im Vergleich zu einem G-Modul von 2 MN/m² eine zusätzliche Versagensart auf. Das Versagen der Vorsatzschale unter Zugbeanspruchung wird für das Erreichen der Versagenslast der Sandwichwand maßgebend. Bei einem Versagen der Kernschicht ist die Vorsatzschale lediglich bei den höheren Schlankheiten gerissen.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

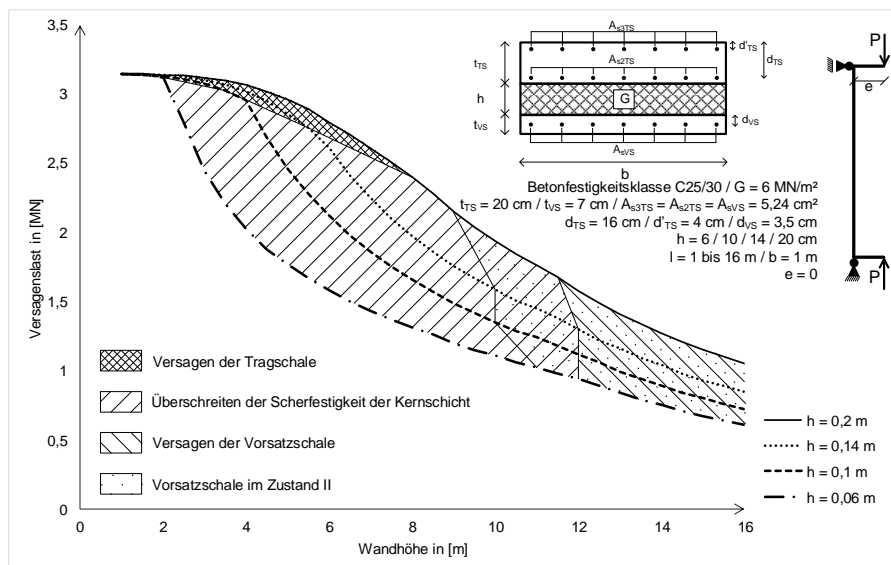


Abb. 3.42: Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei einer in die Tragschale mittigen Lasteinleitung und einem G-Modul von 6 MN/m^2

Vergleicht man den Einfluss der Lastexzentrizität und der Kernschichtdicke bei unterschiedlichen Wandhöhen auf die Versagenslast zwischen einem G-Modul von 2 MN/m^2 und von 6 MN/m^2 (siehe Abb. 3.43), stellt man fest, dass bei $G = 6 \text{ MN/m}^2$ die Kernschichtdicke einen größeren Einfluss und die Lastexzentrizität einen geringeren Einfluss als bei $G = 2 \text{ MN/m}^2$ hat.

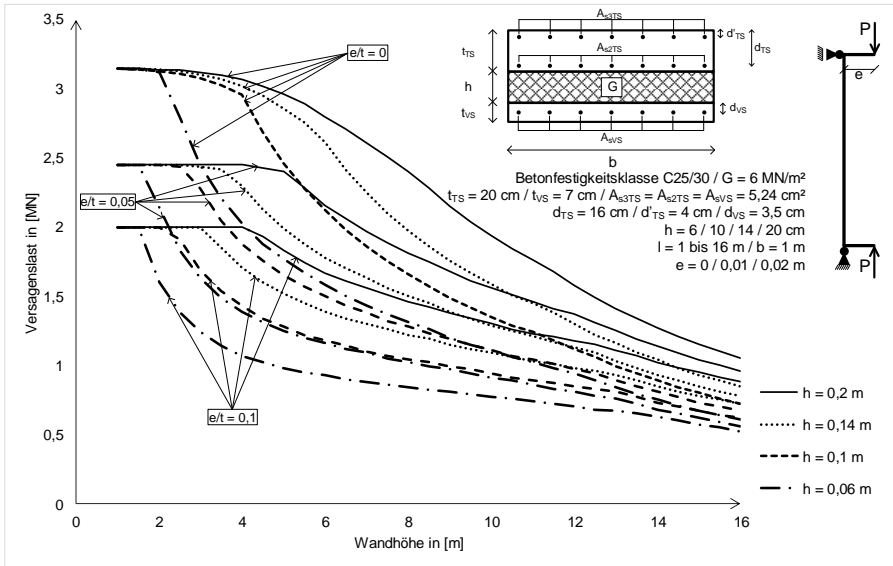


Abb. 3.43: Einfluss der Wandhöhe und der Kernschichtdicke auf die Versagenslast bei unterschiedlichen Lastexzentrizitäten und einem G-Modul von 6 MN/m^2

In Abb. 3.44 wird für zwei unterschiedliche Lastexzentrizitäten ($e = 0 \text{ m}$ und $e = 0,02 \text{ m}$) der Einfluss des G-Moduls auf die Versagenslast bei unterschiedlichen Kernschichtdicken analysiert. In sechs der acht betrachteten Fälle existiert ein Punkt, der einer bestimmten Wandhöhe entspricht (Abb. 3.44), bei der die Versagenslast für die gleiche Lastexzentrizität identisch ist für die Sandwichwand mit der Kernschicht mit einem Schubmodul von 2 MN/m^2 und für diejenige mit der Kernschicht mit dem Schubmodul von 6 MN/m^2 . Links von diesem Punkt erfährt die Sandwichwand mit dem kleineren Schubmodul die höhere Traglast, rechts davon erfährt die Sandwichwand mit dem größeren Schubmodul die höhere Traglast. An dieser Stelle sei auf die in Abb. 3.13 vom Verfasser definierten Bereiche A und B hingewiesen. Links von dem erwähnten Kreuzungspunkt versagen die Sandwichwände bei kleineren Verformungen als rechts von dem Kreuzungspunkt. Links von dem Kreuzungspunkt ist das Verformungsniveau dem Bereich A zuzuordnen, rechts dem Bereich B.

3.4 Sandwichtheorie für Biegung und exzentrische Normalkraft mit nichtlinearen Materialeigenschaften

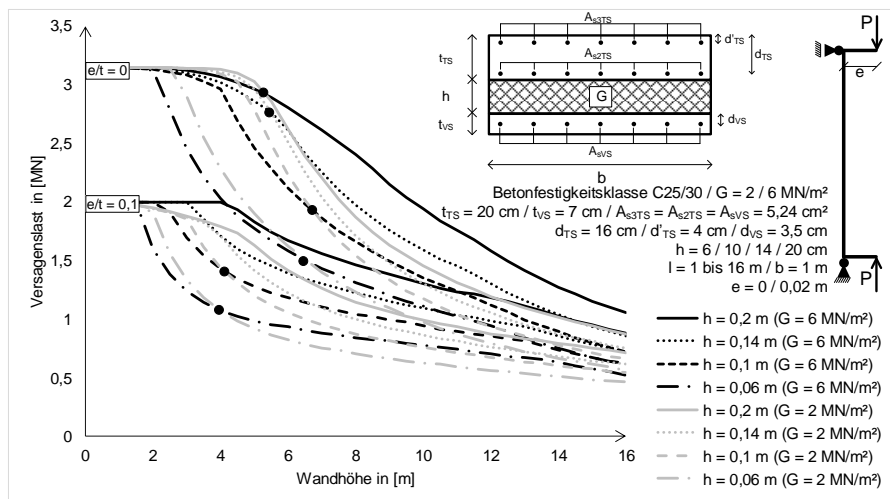


Abb. 3.44: Einfluss des G-Moduls der Kernschicht auf die Versagenslast bei unterschiedlichen Lastexzentrizitäten und unterschiedlichen Kernschichtdicken

4 Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen

4.1 Einleitung

In Kapitel 4 werden großformatige Druckversuche an Stahlbeton- und an Sandwichwänden vorgestellt, die jeweils mit den in den Abschnitten 2.3 und 3.4 entwickelten Programmen nachgerechnet werden. Des Weiteren wird über kleinformative Versuche berichtet, die dazu dienen, die Eigenschaften des verwendeten Dämmstoffs, einem expandierten Polystyrol (EPS), und der eingesetzten Verbindungsmittel, entweder stiftförmigen aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK_A) oder wellenförmigen aus Edelstahl (EdStWe), zu untersuchen. In Tab. 4.1 werden alle durchgeführten großformatigen Versuche aufgelistet. Alle Versuchskörper sind 4,2 m lang und 0,8 m breit.

Tab. 4.1: Bezeichnung und Abmessungen der durchgeführten großformatigen Druckversuche

Versuchskörper	Tragschale	Kernschicht			Vorsatzschale
	Dicke [mm]	Dicke [mm]	Dämmstofftyp	Verbindungsmittel	Dicke [mm]
DV-TS-1	100	-	-	-	-
DV-TS-2	100	-	-	-	-
DV-TS-3	100	-	-	-	-
DV-SW-60-EPS-GFK_A	100	60	EPS	GFK_A	70
DV-SW-140-EPS-GFK_A	100	140	EPS	GFK_A	70
DV-SW-200-EPS-GFK_A	100	200	EPS	GFK_A	70
DV-SW-60-EdStWe	100	60	-	EdStWe	70
DV-SW-100-EdStWe	100	100	-	EdStWe	70
DV-SW-200-EdStWe	100	200	-	EdStWe	70

4.2 Materialeigenschaften

4.2.1 Betoneigenschaften

In Abschnitt 2.2.1.3 wird für den Beton ein zur Bemessung von Stahlbetonwänden einsetzbares Materialmodell dargestellt. Dieses bilineare Modell wird nachfolgend zu Nachrechnungszwecken mit Mittelwerten statt Bemessungswerten angewendet.

Die Versuchskörper DV-TS-1 bis 3 wurden mit der gleichen Betoncharge hergestellt und es wird angenommen, dass diese identische Betoneigenschaften besitzen. Das für Nachrechnungszwecke geeignete bilineare Materialmodell wird beispielhaft für diesen Beton erläutert, dessen mechanische Eigenschaften durch die Untersuchung der Würfeldruckfestigkeit und der Biegezugfestigkeit erfasst wurden. Der Mittelwert der Druckfestigkeit beträgt $40,6 \text{ MN/m}^2$ und derjenige der Biegezugfestigkeit $2,4 \text{ MN/m}^2$. Es wird vereinfachend angenommen, dass der Mittelwert der Druckfestigkeit bei einer Stauchung von $\varepsilon_{c3} = 1,75 \text{ ‰}$ erreicht wird. Darüber hinaus wird ein Fließplateau bis zu einer Stauchung von $\varepsilon_{cu3} = 3,5 \text{ ‰}$ angenommen. Aus dem linear ansteigenden Bereich zwischen 0 ‰ und $1,75 \text{ ‰}$ ergibt sich ein E-Modul von 23.200 MN/m^2 , der für die Nachrechnungen gewählt wird. An Zylindern wurde für den E-Modul ein Wert von

4 Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen

23.700 MN/m² gemessen. Der anhand des linearen Bereichs zwischen 0 ‰ und $\epsilon_{c3} = 1,75$ ‰ ermittelte E-Modul wird für den Zugbereich extrapoliert. Somit entspricht die Biegezugfestigkeit von 2,4 MN/m² einer maximalen Dehnung von 0,102 ‰. Das für die Nachrechnung der Druckversuche DV-TS-1 bis 3 verwendete Materialmodell wird in Abb. 4.1 zusammenfassend dargestellt.

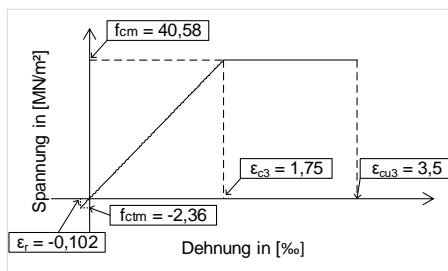


Abb. 4.1: Bilineares Materialmodell für die Nachrechnung der Druckversuche an Stahlbetonwänden (DV-TS-1 bis 3)

In Tab. 4.2 sind die für die Nachrechnung der unterschiedlichen großformatigen Druckversuche erforderlichen Betoneigenschaften der entsprechenden Versuchskörper aufgelistet. Kursiv geschriebene Werte werden wie im vorstehenden Absatz erläutert berechnet, während nicht kursiv geschriebene Werte von dem Materialprüfamt Kaiserslautern experimentell ermittelt wurden.

Tab. 4.2: Betoneigenschaften der großformatigen unter Druck getesteten Probekörper

Versuchskörper	Mittelwert der Druckfestigkeit in [MN/m ²]	Mittelwert des E-Moduls in [MN/m ²]		Mittelwert der Biegezugfestigkeit in [MN/m ²]	Dehnung in [‰] beim Erreichen der Biegezugfestigkeit
		gerechnet	gemessen		
DV-TS-1	40,6	23.200	23.700	-2,4	-0,102
DV-TS-2	40,6	23.200	23.700	-2,4	-0,102
DV-TS-3	40,6	23.200	23.700	-2,4	-0,102
DV-SW-60-EPS-GFK_A	35,8	20.500	22.200	-2,5	-0,119
DV-SW-140-EPS-GFK_A	24,9	14.200	20.600	-2,1	-0,148
DV-SW-200-EPS-GFK_A	29,2	16.700	19.800	-2,2	-0,133
DV-SW-60-EdStWe (TS)	39,8	22.800	-	-4,5	-0,197
DV-SW-60-EdStWe (VS)	36,4	20.800	-	-4,4	-0,212
DV-SW-100-EdStWe (TS)	39,8	22.800	-	-4,5	-0,197
DV-SW-100-EdStWe (VS)	36,4	20.800	-	-4,4	-0,212
DV-SW-200-EdStWe (TS)	39,1	22.300	-	-4,4	-0,196
DV-SW-200-EdStWe (VS)	36,2	20.700	-	-4,3	-0,207

4.2.2 Dämmstoffeigenschaften

4.2.2.1 Einleitung

Die Nachrechnung der neun großformatigen Druckversuche an Sandwichwänden, deren Kernschicht Dämmstoffmaterial beinhalten (DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A), erfordert Informationen über die Eigenschaften des verwendeten Dämmstoffs (EPS). Angenommen, dass die Schubfuge zwischen dem Beton und dem Dämmmaterial bis zum Versuchsende unversehrt bleibt, was für die nachgerechneten Versuche der Fall ist, müssen für die Nachrechnung der Versuche der Schubmodul und die Scherfestigkeit des Dämmstoffs bekannt sein. Diese werden im Rahmen von Scherversuchen an dem verwendeten Dämmmaterial gewonnen. Die Versuchsdurchführung und die Auswertung der durchgeführten Versuche an Wärmedämmstoffen für das Bauwesen zur Bestimmung des Verhaltens bei Scherbeanspruchung wird in *DIN EN 12090* geregelt.

4.2.2.2 Versuchsaufbau und Messtechnik

Der Versuchsaufbau wird konform zu der in *DIN EN 12090* beschriebenen Variante für Doppelprobekörper entwickelt und ist in Abb. 4.2 dargestellt. Abweichend sind lediglich die Haltevorrichtungen aus Holz für den Probekörper. Der Verbund zwischen dem Probekörper aus EPS und der Holzplatte erfolgt über eine Fuge aus Spezial-PU-Klebstoff, die bei jedem Versuch für das Versagen des Probekörpers nicht maßgebend ist. Die vertikale Verschiebung des Probekörpers mit steigender Zylinderkraft wird durch zwei vertikale Wegaufnehmer aufgezeichnet. Die Aufzeichnung der Zylinderkraft erfolgt über die im Prüfzylinder integrierte Kraftmessdose.

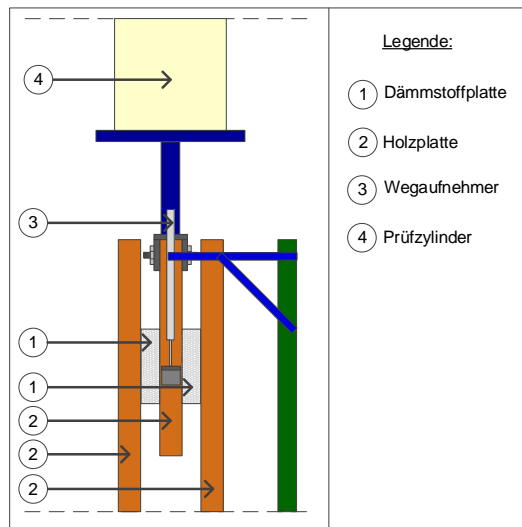


Abb. 4.2: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Scherfestigkeit des Dämmstoffs

4.2.2.3 Versuchskörper

Die Kernschichten aller drei großformatigen Versuchskörper (DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A) beinhalten zwar die gleiche Sorte EPS, allerdings nicht aus derselben Dämmstoffcharge, so dass von unterschiedlichen Eigenschaften ausgegangen werden muss. Diese werden mit Probekörpern untersucht, deren Abmessungen in *DIN EN 12090* geregelt sind und zwar 200 mm Länge, 100 mm Breite und eine Dicke gleich der Kernschichtdicke. Im Gegensatz zu Einzelprobekörpern gilt bei Doppelprobekörpern keine Mindestdicke der Probekörper von 50 mm. Im Vergleich zu Einzelprobekörpern ist nämlich die Gefahr der Verfälschung der Ergebnisse durch ein zusätzliches ungewolltes Biegemoment niedriger. Es werden Probekörper mit 60 mm, 140 mm und 200 mm Dicke geprüft.

4.2.2.4 Ergebnisse

Für jede Dämmstoffcharge und damit für jede Dicke der Dämmstoffplatten, die in den großformatigen Versuchskörpern zum Einsatz kommen, werden jeweils drei Probekörper, wie in Abb. 4.2 und in Abschnitt 4.2.2.3 dargestellt, geprüft. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.3 mit Hilfe von Last-Verformungs-Kurven dargestellt.

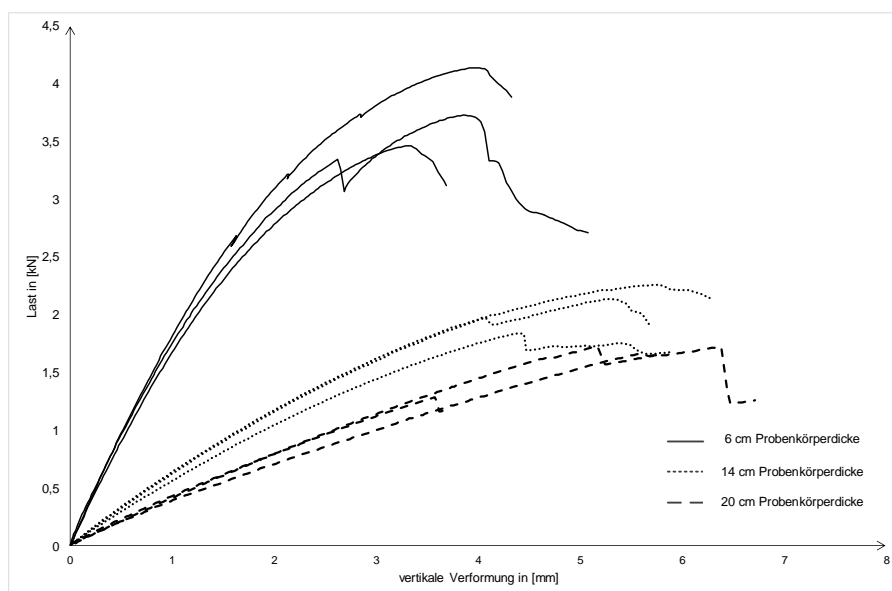


Abb. 4.3: Last-Verformungs-Kurven der Scherversuche des in den großformatigen Versuchskörpern verwendeten Dämmstoffmaterials für die jeweiligen Kernschichtdicken

Anhand der in Abb. 4.3 dargestellten Last-Verformungs-Kurven können gemäß *DIN EN 12090* die Scherfestigkeit bzw. die beim Versagen erreichte Verformung und der Schubmodul des Dämmstoffs berechnet werden. Während die Ermittlung der Scherfestigkeit eindeutig ist (siehe Ergebnisse in Tab. 4.3), ist die Bestimmung des Schubmoduls nicht exakt definiert. Das in *DIN EN 12090* für Kraft-Verformungs-Kurven vorgegebene Muster lässt sich anhand der experimentell gewonnenen Last-Verformungs-Kurven nur unzureichend wiederfinden. Die geforderte Wahl eines geradlinigen Teils

der Last-Verformungs-Kurve zur Bestimmung des Schubmoduls ist nicht eindeutig und kann beispielsweise zu der Bestimmung eines Nullpunkt-Tangenten-Schubmoduls führen, der für Tragfähigkeitsberechnungen auf der unsicheren Seite liegende Ergebnisse liefern kann. Müller 2015 bestimmt den Schubmodul als Steigung der Geraden zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt, der die Traglast des Probekörpers kennzeichnet. Liegt sein Ansatz für die Berechnung der Tragfähigkeit einer Sandwichwand zwar auf der sicheren Seite, ist er aber z. B. für die Bestimmung von Zwangskräften in der Vorsatzschale infolge eines Temperatursprungs zwischen beiden Schalen auf der unsicheren Seite. Weiler 2018 schlägt eine vom Verbundbau inspirierte Methode zur Bestimmung des Schubmoduls vor:

$$G = \frac{d \cdot 0,7 \cdot F_{D,k}}{A \gamma_{0,7F_{D,k}}} \quad (4.1)$$

Die Berechnung des charakteristischen Wertes der Versagenslast erfolgt hier nach DIN EN 1990. Der Ansatz von Weiler 2018 stellt eine Kompromisslösung zwischen der Berechnung des Schubmoduls nach DIN EN 12090 und nach Müller 2015 dar und bietet somit einen für die Bemessung durchgehend nutzbaren Schubmodul an. Wie aus Tab. 4.4 zu ersehen ist, liefert in diesem Fall der Ansatz nach Weiler 2018 Schubmodulwerte, die in etwa so groß sind wie diejenigen nach DIN EN 12090 und teilweise größtmäßig in der Nähe der Nullpunkt-Tangenten-Schubmoduli liegen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass jede Dämmstoffversuchsreihe nur drei Probekörper beinhaltet, was zu der Festlegung eines im Vergleich zu einer höheren Anzahl an Probekörpern ungünstigeren Fraktilefaktors k_n führt und bei der vorhandenen Streuung einen niedrigeren charakteristischen Wert verursacht. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass der Ansatz nach Weiler 2018 in einem solchen Fall die großen Werte des Schubmoduls durch dementsprechend kleine Werte der zulässigen Scherfestigkeit begleitet, um insgesamt bei Nachweisführungen nicht auf der unsicheren Seite zu liegen. Für die durchzuführende Nachrechnung der großformatigen Versuchskörper wird deshalb für das Dämmmaterial der Schubmodul nach Müller 2015 angesetzt.

Tab. 4.3: Scherfestigkeit des in der Kernschicht der großformatigen Versuchskörper eingesetzten Dämmstoffs

	A in [m ²]	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3	Mittelwert
DV-SW-60-EPS- GFK_A (6 cm Kernschichtdicke)	F _{max} in [MN]	0,003727	0,003463	0,004136	0,0037
	Δ _{umax} in [m]	0,00387	0,00331	0,00401	0,00373
	τ in [MN/ m ²]	0,093175	0,086576	0,103398	0,0943
DV-SW-140-EPS- GFK_A (14 cm Kernschichtdicke)	F _{max} in [MN]	0,001836	0,002135	0,002256	0,00207
	Δ _{umax} in [m]	0,00442	0,00529	0,00579	0,00511
	τ in [MN/ m ²]	0,045898	0,053367	0,056412	0,0518
DV-SW-200-EPS- GFK_A (20 cm Kernschichtdicke)	F _{max} in [MN]	0,001282	0,001726	0,001717	0,00157
	Δ _{umax} in [m]	0,00439	0,00517	0,00639	0,00531
	τ in [MN/ m ²]	0,032049	0,043143	0,042926	0,0393

In Tab. 4.4 sind die für den verwendeten EPS nach den unterschiedlichen erwähnten Rechenmethoden ermittelten Schubmodulwerte zusammengefasst.

Tab. 4.4: Schubmodul [MN/m²] des in der Kernschicht der großformatigen Versuchskörper eingesetzten Dämmstoffs nach unterschiedlichen Ansätzen

	DIN EN 12090	Müller 2015	Weiler 2018	Nullpunkt-Tangenten-Schubmodul
DV-SW-60-EPS-GFK_A	2,574	1,518	2,590	2,940
DV-SW-140-EPS-GFK_A	1,943	1,406	2,023	2,214
DV-SW-200-EPS-GFK_A	1,868	1,486	2,004	2,163

4.2.3 Verbindungsmittel

4.2.3.1 Verwendete Verbindungsmittel

In den Versuchskörpern DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A werden zur Ausführung der Kernschicht zusätzlich zu dem Dämmmaterial EPS Thermoanker der Firma Schöck GmbH mit dem Durchmesser 12 mm eingesetzt. Informationen zu den Eigenschaften dieses Produktes, u. a. zu seiner Geometrie, können Z-21.8-1894 entnommen werden. *Weiler 2018* errechnet eine Federsteifigkeit von 0,064 kN/m für das stiftförmige Verbindungsmittel. Zwölf solcher diskreten Verbindungsmittel sind in jedem Probekörper DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A vorhanden (siehe Abschnitt 4.5.1.1). Ihr Vorhandensein wird über die Fläche des Versuchskörpers „verschmiert“ und der äquivalente G-Modul wird für die Nachrechnung der großformatigen Druckversuche zu demjenigen des Dämmstoffs addiert.

$$F_K = (c_D + c_A)u \quad (4.2)$$

$$F_K = \left(G_D \frac{b_D l_D}{h_K} + c_A \right) u \quad (4.3)$$

$$F_K = (G_D + G_A)u \frac{b_D l_D}{h_K} \quad (4.4)$$

mit:

$$G_A = c_A \frac{h_K}{b_D l_D} \quad (4.5)$$

Die Federsteifigkeit wurde von *Weiler 2018* bei einer Kernschichtdicke von 20 cm ermittelt. Somit beträgt der Schubmodul $G_A = 0,54 \text{ MN/m}^2$.

In den Versuchskörpern DV-SW-60-EdStWe, DV-SW-100-EdStWe und DV-SW-200-EdStWe besteht die Kernschicht lediglich aus Edelstahlwellen der Firma Kappema GmbH (siehe Abb. 4.4). Für dieses eingesetzte Verbindungsmittel wurden experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Scherfestigkeit sowie des Schubmoduls erforderlich.

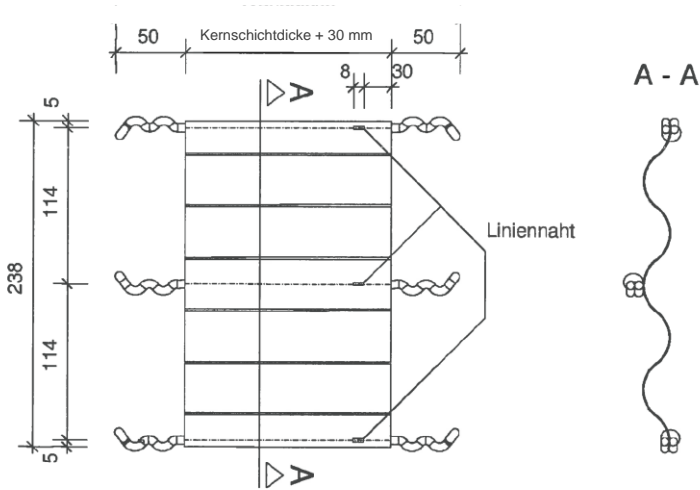


Abb. 4.4: Geometrie der Edelstahlwelle der Firma Kappema GmbH

4.2.3.2 Versuchsaufbau und Messtechnik

Der verwendete Versuchsaufbau zur Ermittlung des Verhaltens bei Scherbeanspruchung der in der Kernschicht vorhandenen Edelstahlwellen orientiert sich an den im Rahmen von Zulassungsverfahren formulierten Anforderungen. Dargestellt werden der Versuchsaufbau und die verwendete Messtechnik in Abb. 4.5.

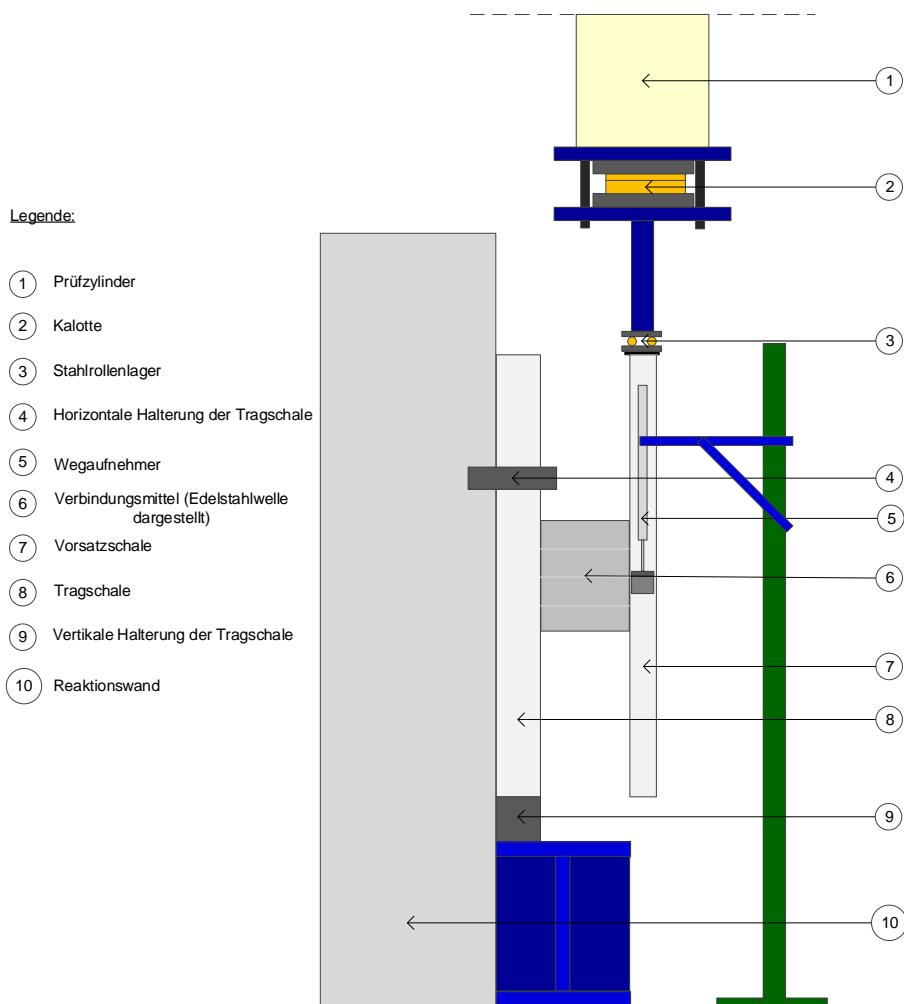


Abb. 4.5: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Schersteifigkeit der Verbindungsmittel

Die Tragschale des Probekörpers ist an einer Reaktionswand befestigt. Die Zylinderkraft wird über eine Kalotte und Stahlrollenlager in die Vorsatzschale eingeleitet. Die Messung der ausgeübten Zylinderkraft erfolgt über eine im Prüfzylinder integrierte Kraftmessdose. Die vertikalen Verschiebungen der Vorsatzschale werden von zwei vertikalen Wegaufnehmern links und rechts der Vorsatzschale gemessen.

Die Konfiguration des Versuchstands ohne Stahlrollenlager zwischen der Vorsatz- und der Tragschale ermöglicht die freie Drehung der Vorsatzschale um ihre horizontale Achse. Diese freie Drehung wird weiterhin von der Art der Lasteinleitung in die Vorsatzschale ermöglicht: Die Stahlrollenlager an dieser Stelle verhindern ein Festhalten der Vorsatzschale in horizontaler Richtung. Somit handelt es sich um Biege-Scherversuche der verwendeten Edelstahlwellen. Diese Konfiguration des Versuchsaufbaus

bildet ein statisch nicht mitwirkendes Dämmmaterial oder wie in den mit Edelstahlwellen ausgeführten Versuchskörpern das Nichtvorhandensein eines Dämmmaterials in der Kernschicht nach.

4.2.3.3 Versuchskörper

Die Probekörper bestehen aus einer 60 mm dicken Vorsatzschale und aus einer 100 mm dicken Tragschale. Der Abstand zwischen den zwei Betonschalen beträgt 50 mm, 120 mm oder 200 mm je nach Versuchsreihe. Die zwei ersten Werte weichen jeweils um 1 cm und 2 cm von den Kernschichtdicken der entsprechenden großformatigen Versuchskörper ab, was keine gravierende Auswirkungen auf die Richtigkeit der in Abschnitt 4.5 durchgeführten Nachrechnungen hat. Jeder Probekörper beinhaltet zwei Edelstahlwellen. Die Edelstahlwellen binden um 15 mm in jede Betonschale ein. Die Vorsatzschale ist mit einer Matte Q188 bewehrt, während die Tragschale mit zwei Matten Q188 bewehrt ist. Die Geometrie der Probekörper wird in Abb. 4.6 dargestellt.

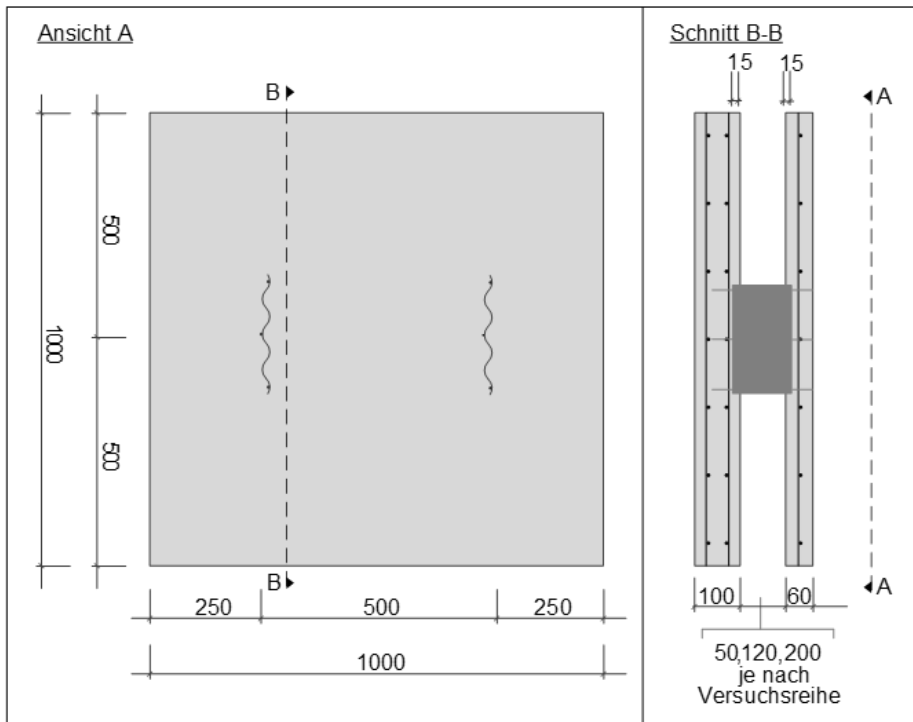


Abb. 4.6: Geometrie der Probekörper zur Ermittlung der Scherfestigkeit und des Schubmoduls der Edelstahlwellen

4.2.3.4 Ergebnisse

Die Last-Verformungs-Kurven der durchgeführten Versuche zur Ermittlung der Schersteifigkeit der Verbindungsmittel sind aus Abb. 4.7 zu entnehmen. Pro Versuchsreihe werden fünf Versuche durchgeführt. Die Auswertung der Versuche erfolgt nach Weiler 2018 (siehe Abschnitt 4.2.2.4). Bei 50 mm Kernschichtdicke ist der G-Modul

gleich $0,486 \text{ MN/m}^2$, bei 120 mm gleich $2,53 \text{ MN/m}^2$ und bei 200 mm gleich $2,68 \text{ MN/m}^2$. Der G-Modul ist eine von der Kernschichtdicke unabhängige Größe. Wie zu erwarten war, sind die Werte bei 120 mm und 200 mm Kernschichtdicke sehr ähnlich. Überraschend ist der bei 50 mm Kernschichtdicke vergleichsweise deutlich geringere Wert. Die Erklärung hierfür kann bei der komplexen Geometrie des Verbindungsmittels gefunden werden, die bei 50 mm andere Tragmechanismen hervorruft als bei größeren Kernschichtdicken. Der Mittelwert der Verzerrung beim Erreichen der Scherfestigkeit beträgt für die Versuchsreihe mit 50 mm Kernschichtdicke 20 mm, für diejenige mit 120 mm Kernschichtdicke 11 mm und für diejenige mit 200 mm Kernschichtdicke 5,91 mm.

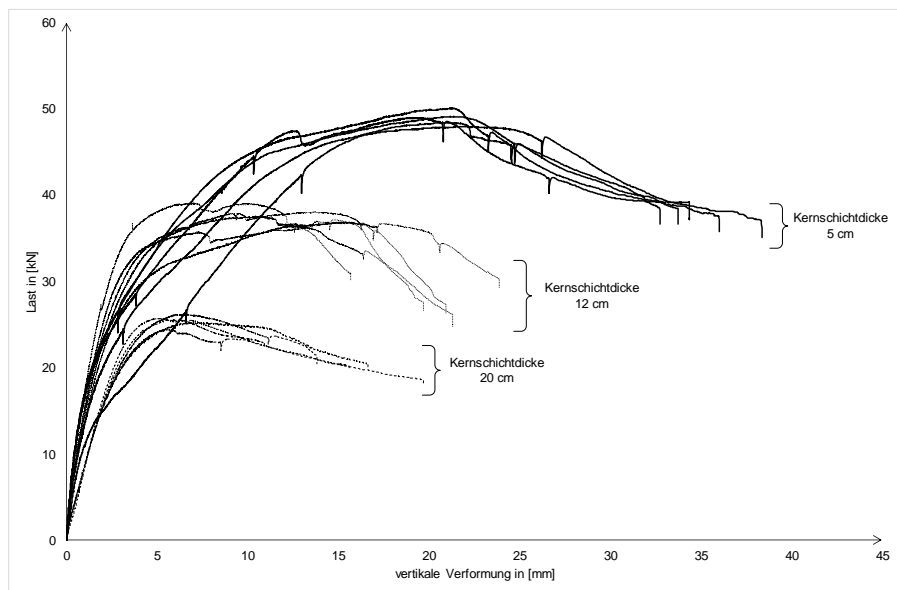


Abb. 4.7: Last-Verformungs-Kurven der Scherversuche an den in den großformatigen Versuchskörpern verwendeten Edelstahlwellen bei den Kernschichtdicken 50 mm, 120 mm und 200 mm

4.3 Versuchsaufbau und Messtechnik für großformatige Druckversuche

Ziel der durchgeführten Versuche ist es, das Verformungsverhalten und die Traglast von Stahlbeton- und Sandwichwänden mit realitätsnahen Abmessungen unter Druckbelastung zu untersuchen.

Dafür wurde in Anlehnung an den in *Heft 423* beschriebenen Versuchsaufbau der in Abb. 4.9 dargestellte Versuchsaufbau entwickelt. Der Versuchskörper mit einer Länge von 4,2 m (Stahlbeton- oder Sandwichwand) wird liegend und hochkant geprüft (siehe Abb. 4.8). Er wird zwischen zwei Stahlträgern in Längsrichtung auf Druck belastet. Hierfür werden zwei Spannstangen, die am beweglichen Stahlträger über zwei Muttern fixiert sind, mit Hilfe von zwei am eingespannten Stahlträger angebrachten Pressen

gezogen. Durch das Ziehen der Spannstangen erhält der Versuchskörper eine Druckkraft. Die Kräfteinleitung erfolgt über vertikale Stahlrollenlager, die eine gelenkige und linienartige Lagerung an den beiden Enden sicherstellen. Der Versuchskörper ist außerdem an seinen beiden Enden in vertikaler Richtung auf Kugeln gelagert. So kann er sich im Grundriss frei verformen. Seitlich wird seine Position im Versuchsaufbau mit Schrauben justiert, so dass die Lasteinleitung an der gewünschten Stelle erfolgt. Bei den Sandwichwänden wird die Kraft zentrisch in die Tragschale eingeleitet. Um ein Kippen der Versuchskörper zu verhindern, wird die Vorsatzschale temporär, bis zum Vorhandensein einer ausreichenden Reibungskraft zwischen den Stahlrollenlagern und der Tragschale, abgestützt. Nach der Entfernung der erforderlichen Abstützung wird der Versuch bis zum Versagen des Versuchskörpers gefahren.

Zwei Wegaufnehmer messen die horizontalen Verschiebungen des Versuchskörpers in seiner Mitte quer zu seiner Längsrichtung. Die Kräfte, die von den Pressen ausgeübt werden, werden von zwei Kraftmessdosen aufgenommen.

Zusätzlich werden Dehnmessstreifen verwendet, um die Stahldehnung sowie die Betondehnung im Laufe des Versuchs zu erfassen.

Die Gefahr eines schlagartigen seitlichen „Wegrutschens“ des Versuchskörpers aus dem Prüfstand am Ende des Versuchs lässt eine Beobachtung des Versuchskörpers aus der Nähe während des Versuchs nicht zu. Unter anderem lassen sich keine Rissmessungen durchführen.



Abb. 4.8: Sandwichwand im Prüfstand im Labor für konstruktiven Ingenieurbau der TU Kaiserslautern vor Beginn des Versuchs

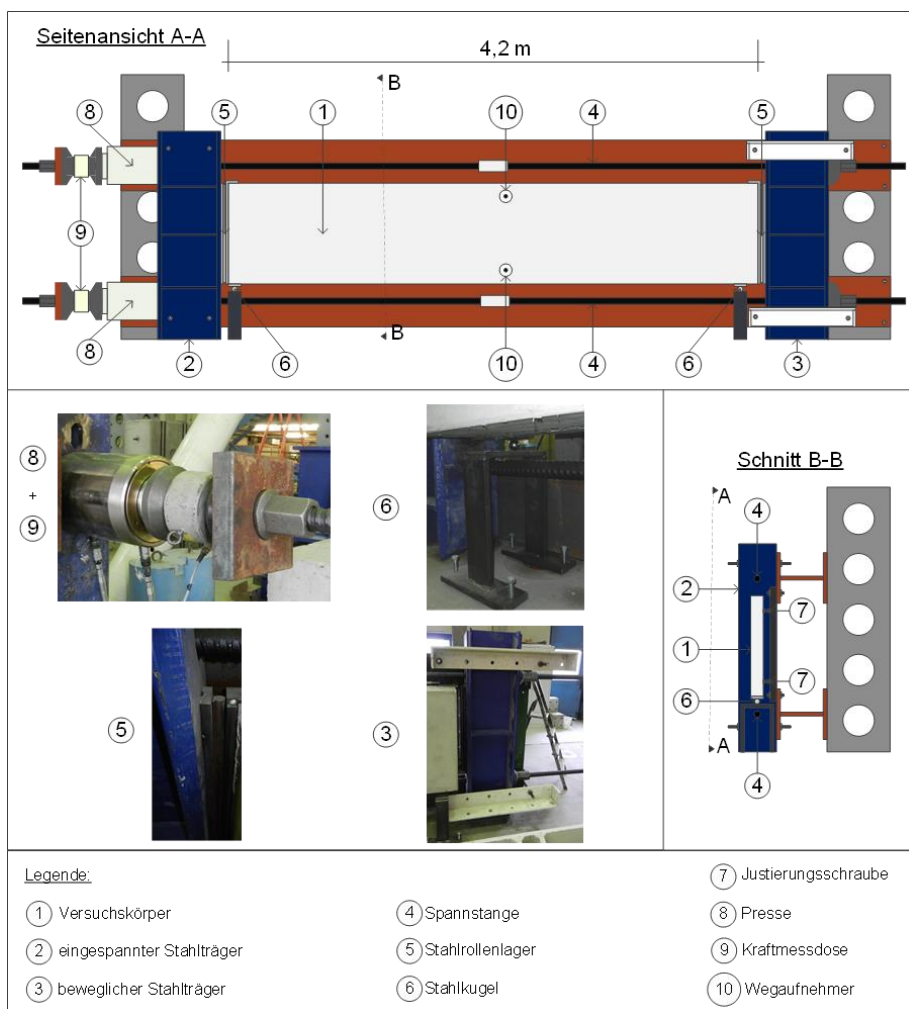


Abb. 4.9: Versuchsaufbau und Messtechnik für die Druckversuche an Stahlbeton- und an Sandwichwänden (Darstellung mit Stahlbetonwand)

4.4 Ergebnisse und Nachrechnung von Druckversuchen an Stahlbetonwänden

4.4.1 Beschreibung der Versuchskörper

Die drei geprüften Stahlbetonwände DV-TS-1 bis 3 sind baugleich und können als Referenzversuchskörper betrachtet werden. Sie bestehen nämlich lediglich aus der Tragshale der in Abschnitt 4.5 erwähnten Versuchskörper mit Sandwichquerschnitt. Der Einfluss der Vorsatzschale über die Kernschicht auf die Tragshale kann somit durch den Vergleich zwischen den geprüften Sandwichwänden und den geprüften Versuchskörpern DV-TS-1 bis 3 verdeutlicht werden. Des Weiteren geben die Ergebnisse der in Abschnitt 4.4 durchgeführten Versuche eine Information zu der Streuungsfähigkeit

der nach dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen Versuchsaufbau durchgeführten Druckversuche und zu der bei einem solchem Versuchsaufbau miteingehenden ungewollten Lastexzentrizität.

Die Versuchskörper sind 0,1 m dick, 0,8 m breit und 4,2 m lang. Der verwendete Beton weist die Betonfestigkeitsklasse C25/30 auf. Als Bewehrung wird in der oberen Lage und der unteren Lage jeweils eine Lagermatte Q335 A eingesetzt. Über die Breite des Probekörpers sind pro Bewehrungslage sechs Bewehrungsstäbe vorhanden, d. h. es ergibt sich eine Bewehrungsfläche von 3,02 cm². Die Lage der Bewehrung in den geprüften Versuchskörpern kann Abb. 4.10 entnommen werden. Die geringen Betondeckungen ermöglichen bzgl. der normativen Regelungen lediglich die Erfüllung der Verbundanforderungen.

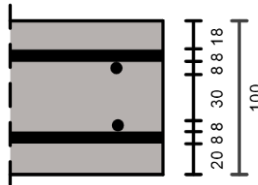


Abb. 4.10: Position der Bewehrungslagen in den Versuchskörpern

Bei der Wanddicke von 100 mm und einer Länge der Wand von 4,20 m beträgt die Schlankheit λ des Versuchskörpers 145,5. Versuchstechnische Gründe machen die Wahl einer solchen hohen Schlankheit erforderlich: Die Versagenslasten müssen nämlich auch bei Sandwichwänden bei Werten unterhalb von 2 MN liegen, um den Einsatzbereich der Kraftmessdose (siehe Abb. 4.9) nicht zu überschreiten.

4.4.2 Ergebnisse

Die Last-Verformungs-Kurven der drei geprüften Stahlbetonwände DV-TS-1 bis 3 sind in Abb. 4.11 dargestellt. Die Versuchskörper bestehen allein aus der Tragschale, wie sie bei den in Abschnitt 4.5.1.1 beschriebenen Sandwichwänden vorhanden ist. Die Knickrichtung kann hier nicht vorhergesagt werden. Jedoch sind alle drei Versuchskörper letztendlich in dieselbe Richtung (identisch zu der Knickrichtung der in Abschnitt 4.5 geprüften Sandwichwände) geknickt. Dies deutet auf eine ungewollte Lastexzentrizität hin, die im Rahmen der Auswertung dieser Versuchsreihe herausgefunden werden muss.

Die Last-Verformungs-Kurven deuten alle auf eine von Anfang an zunehmende Verbiegung des Versuchskörpers aufgrund der ungewollten Lastexzentrizität hin. Diese ist für die Nachrechnung ein Schlüsselwert, von der hier vereinfachend ausgegangen wird, dass sie am Fußpunkt und am Kopf der Wand gleich groß ist. Es werden drei Nachrechnungen mit drei unterschiedlichen Exzentrizitäten (5 mm, 6 mm und 7 mm) mit dem in Abschnitt 2.3 dargestellten eigenen Programm durchgeführt, um herauszufinden, mit welcher die Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen die beste ist. Im Ergebnis wird davon ausgegangen, dass die Exzentrizität der Lasteinleitung und auch die Imperfektionen des Versuchskörpers mit einer Exzentrizität der Lasteinleitung

4 Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen

gleich 6 mm erfasst werden können. Dieser Wert wird angesichts der Überstimmung der rechnerischen Traglast mit dem Mittelwert der experimentellen Traglasten gewählt.

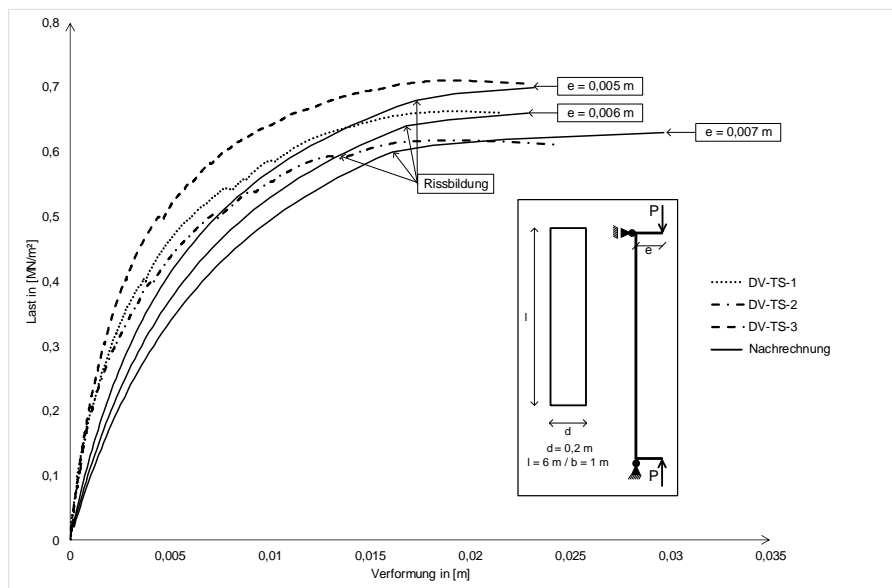


Abb. 4.11: Last-Verformungs-Kurve zu den drei an allein stehenden Tragschalen durchgeführten Druckversuchen und die dazugehörigen Nachrechnungen mit unterschiedlichen Exzentrizitäten

Die drei Versuchskörper erreichen unterschiedliche Traglasten, und zwar 662 kN, 618 kN und 710 kN. Dies ergibt einen Mittelwert von 663 kN und einen Variationskoeffizienten von 6,97 %. Die Versagensarten sind identisch. Kurz vor dem Versagen fangen die Durchbiegungen an, überproportional zur Lasterhöhung zu steigen. Am Ende des Versuchs, d. h. nach dem Ausknicken des Versuchskörpers, weist die konvexe Seite, die während des Versuchs Zugspannungen ausgesetzt war, Risse auf. Jedoch ist es zunächst nicht möglich, zu bestimmen, ob diese Risse vor dem Versagen auftreten oder als Folgen des Versagens erscheinen. Da eine mit dem bloßen Auge durchgeführte Überwachung der Rissbildung während des Versuchs ausgeschlossen ist, werden bei den Versuchen DV-TS-1 bis 3 Dehnmessstreifen auf die konvexe und auf die konkave Wandseite in ihre Mitte an der zu erwartenden Stelle einer möglichen Rissbildung aufgebracht, um eine Aussage diesbezüglich treffen zu können.

Rechnerisch findet das Versagen des Probekörpers kurz nachdem dieser in den Zustand II übergeht (siehe Abb. 4.11) statt. Bei den Versuchskörpern DV-TS1 und DV-TS3 scheint laut den von den Dehnmessstreifen gelieferten Last-Dehnungs-Kurven das Versagen stattzufinden während beide Versuchskörper sich noch im Zustand I befinden. Allerdings kann auch festgestellt werden, dass bei diesen zwei Probekörpern die erreichten Zugspannungen die rechnerisch angenommene mittlere Biegezugfestigkeit, die dem vom Materialprüfamt experimentell bestimmten Wert entspricht, überschreiten, ohne dass die Rissbildung eintritt. Bei dem Druckversuch DV-TS2 findet

dahingegen die Rissbildung bei dem rechnerisch angenommenen Mittelwert der Biegezugfestigkeit statt. Kurz nach der Rissbildung erfolgt das Versagen des Probekörpers. Dies ist exakt konform zu dem rechnerisch zu erwartenden Versagensmechanismus (siehe Abb. 4.12).

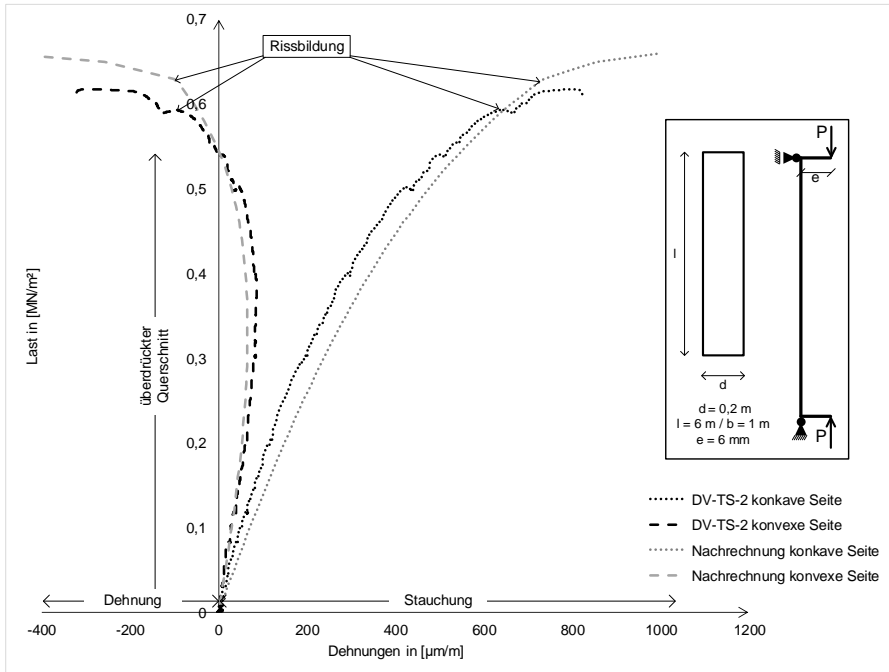


Abb. 4.12: Last-Dehnungs-Kurve in Feldmitte zu DV-TS2 und dazugehörige Nachrechnung

Experimentell deutet der im Versuchskörper beim Eintritt des Versagens vorhandene Spannungszustand auf ein Stabilitätsversagen hin. Weder auf der konkaven Seite (Druckseite) noch auf der konvexen Seite (Zugseite) werden nämlich Bruchspannungen überschritten. Die Druckversuche konnten aus versuchstechnischen Gründen nicht weggesteuert durchgeführt werden. Somit ist der für Stabilitätsversagen charakteristische absteigende Ast nicht zu beobachten. Das auf die Bemessung abzielende verwendete Programm beinhaltet nicht die Querschnittskonfigurationen, die einen absteigenden Ast beschreiben würde.

4.5 Nachrechnung von Druckversuchen an Sandwichwänden

4.5.1 Beschreibung und Herstellung der Versuchskörper

4.5.1.1 Beschreibung der Versuchskörper

Die hohe Anzahl an Parametern erfordert eine Einschränkung der zu variierenden Parameter, die zu dem in Tab. 4.1 dargestellten Versuchsprogramm führt. Variationen erfolgen für:

- die Dämmungsdicke (60 mm, 100 mm, 140 mm und 200 mm)

- das Vorhandensein von Dämmmaterial (-, EPS)
- die Art des Verbindungsmittels (GFK_A, EdStWe)

Die Tragschalen- und die Vorsatzschalendicken sowie ihre jeweilige Bewehrung bleiben konstant. Die Eigenschaften der hergestellten Versuchskörper sind in Tab. 4.1 zusammengefasst. Die Tragschale wird wie die in Abschnitt 4.4.1 dargestellten Versuchskörper bewehrt. Die Vorsatzschale wird einlagig mit einer Lagermatte Q335 A, die eine Bewehrungsmenge in Längs- und Querrichtung von 3,02 cm² ergibt, bewehrt.

Die Versuchskörper DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A sind mit EPS (Styropor) gedämmte Sandwichwandstreifen. Die eingesetzten GFK-Verbindungsmittel sind horizontal platzierte Thermoanker der Firma Schöck GmbH (Z-21.8-1894) mit einem Durchmesser von 12 mm. Zwischen diesen drei Versuchskörpern variiert lediglich die Kernschichtdicke (60 mm, 140 mm und 200 mm).

Die Versuchskörper DV-SW-60-EdStWe, DV-SW-100-EdStWe und DV-SW-200-EdStWe werden ohne Dämmstoff hergestellt, um die Wirkung der Verbindungsmittel (EdStWe) allein ermitteln zu können.

Die Tragschalen werden zentrisch beansprucht.

4.5.1.2 Herstellung der Versuchskörper

Die Herstellung der Versuchskörper DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A erfolgt im Labor der TU Kaiserslautern. Sie erfolgt im sogenannten Nass-in-Nass-Verfahren, welches in Abb. 4.13 dargestellt wird. Dieses Verfahren gehört zu den in Z-21.8-1894 zugelassenen Herstellungsprozessen. Die verschiedenen Schichten des Sandwichwandstreifens werden dabei liegend hergestellt. Durch die Eigenlast der Tragschale werden die Verbundeigenschaften zwischen dem Dämmstoff und dem frischen Beton der Trag- und der Vorsatzschale verbessert. Die Herstellung der Sandwichwand erfolgte ohne Unterbrechung.

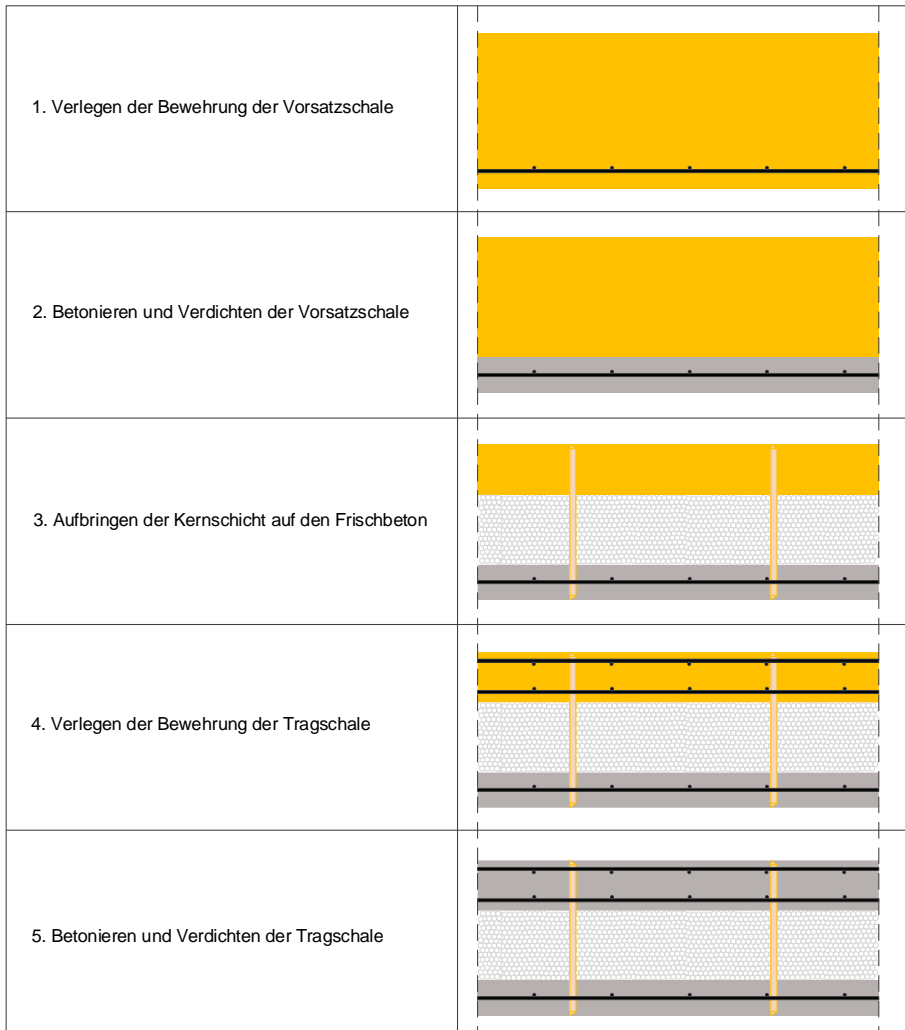


Abb. 4.13: Herstellung der Versuchskörper DV-SW-60-EPS-GFK_A, DV-SW-140-EPS-GFK_A und DV-SW-200-EPS-GFK_A im Nass-in-Nass-Verfahren

Die Herstellung der Versuchskörper DV-SW-60-EdStWe, DV-SW-100-EdStWe und DV-SW-200-EdStWe erfolgt im Fertigteilwerk Martin Schwarzenbeck & Co. und wird über den Zeitraum von mehreren Tagen durchgeführt. Zunächst wird die Tragschale mit eingebauten Verbindungsmitteln betoniert. Später wird die Vorsatzschale betoniert und die gehärtete Tragschale mit den eingebauten Verbindungsmitteln mit Wendegerät umgedreht und in diese eingetaucht. Die Vorgehensweise wird in Abb. 4.14 erläutert.

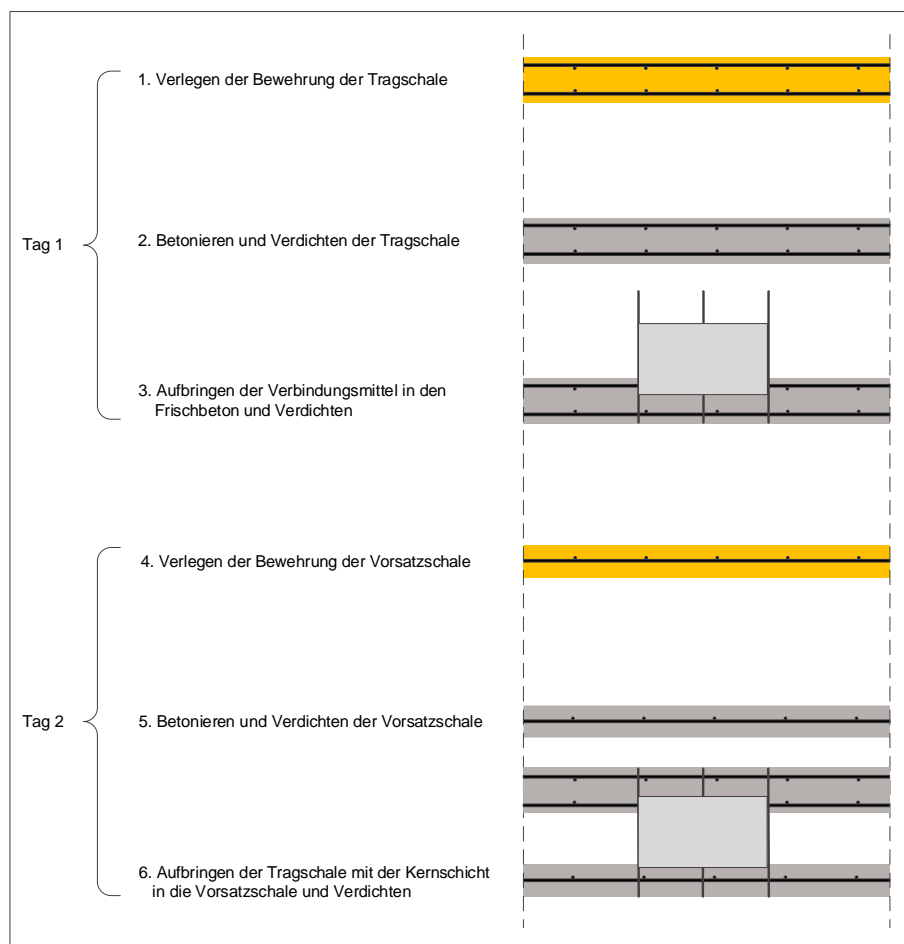


Abb. 4.14: Herstellung der Versuchskörper DV-SW-60-EdStWe, DV-SW-100-EdStWe und DV-SW-200-EdStWe im Fertigteilwerk mit Wendegerät

4.5.2 Ergebnisse

Die Last-Verformungs-Kurven der durchgeführten Versuche sowie die dazugehörigen Nachrechnungen werden in Abb. 4.15 bis Abb. 4.20 dargestellt. Es konnte während jedes Versuchs die Rissbildung der Vorsatzschale beobachtet und durch die Messungen der Dehnmessstreifen bestätigt werden. Nur bei dem Versuch DV-SW-60-EdStWe war eine klare Aussage zu einer eventuellen Rissbildung der Vorsatzschale im Laufe des Versuchs nicht möglich. Sowohl bei der Versuchsreihe mit EPS und Thermoankern als auch bei der Versuchsreihe mit Edelstahlwellen konnte das Versagen der Kernschicht als Ursache für das Gesamtversagen des Versuchskörpers identifiziert werden. Unmittelbar vor dem Versagen wurden sowohl das charakteristische Knistern eines versagenden EPS als auch das Knacken von versagenden Edelstahlwellen erkannt.

4.5 Nachrechnung von Druckversuchen an Sandwichwänden

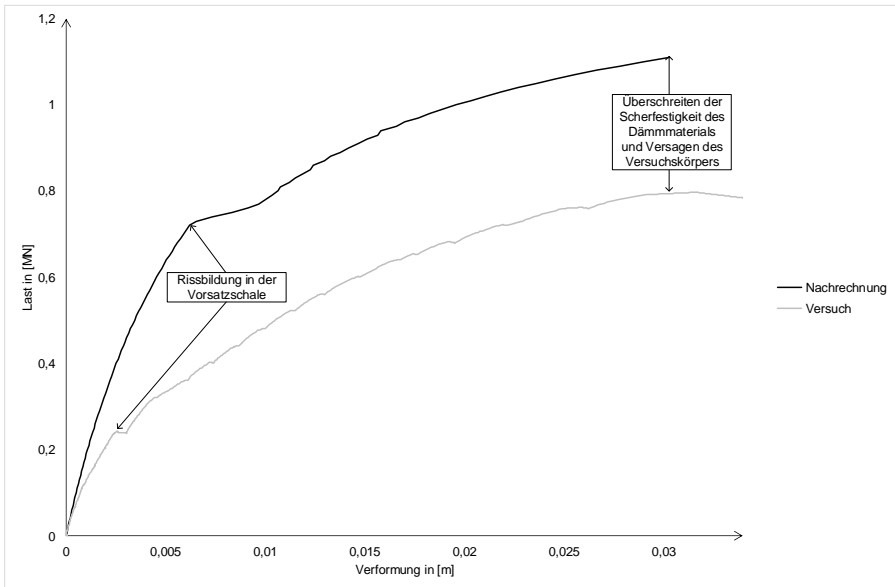


Abb. 4.15: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-60-EPS-GFK_A und dazugehörige Nachrechnung

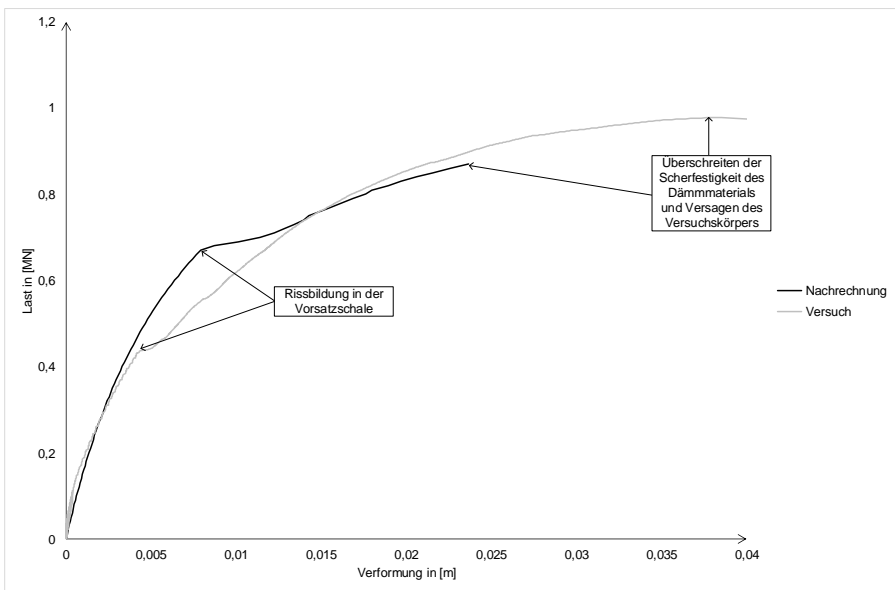


Abb. 4.16: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-140-EPS-GFK_A und dazugehörige Nachrechnung

4 Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen

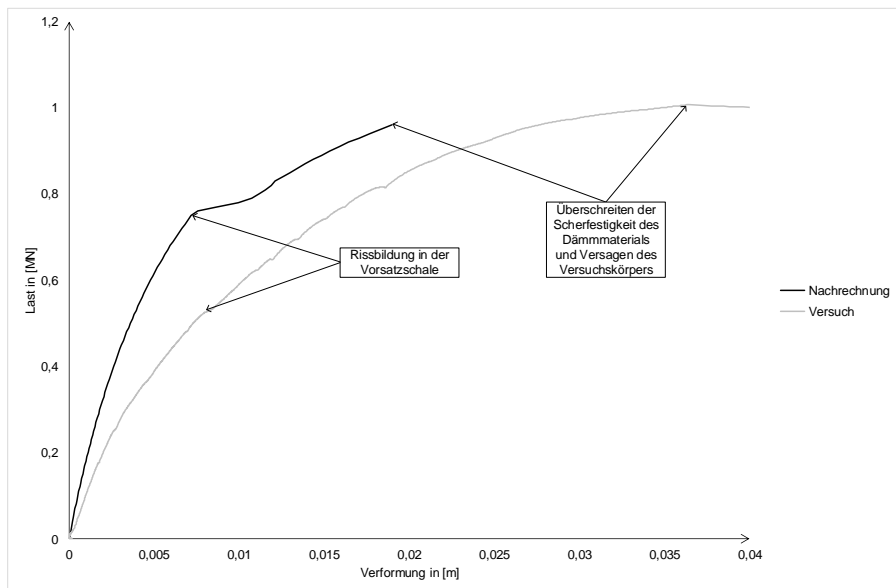


Abb. 4.17: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-200-EPS-GFK_A und dazugehörige Nachrechnung

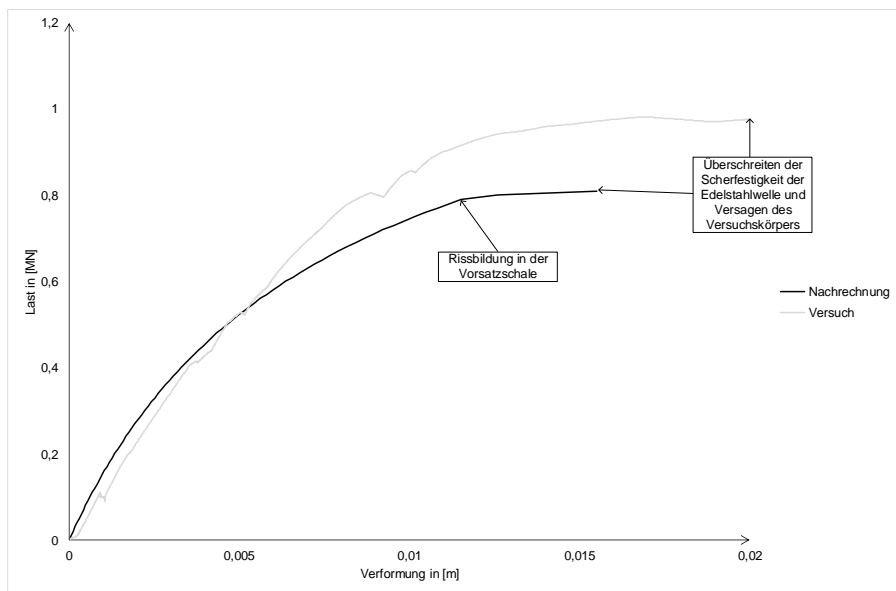


Abb. 4.18: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-60-EdStWe und dazugehörige Nachrechnung

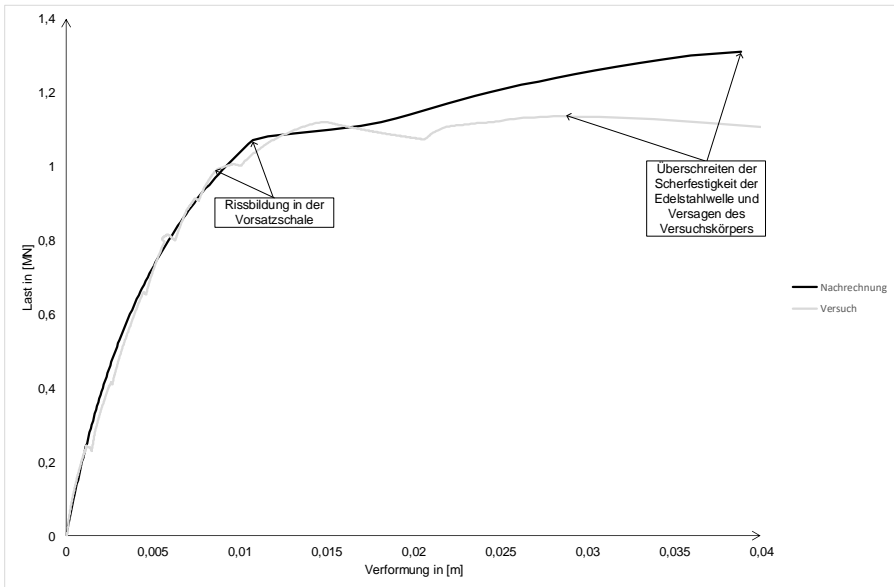


Abb. 4.19: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-100-EdStWe und dazugehörige Nachrechnung

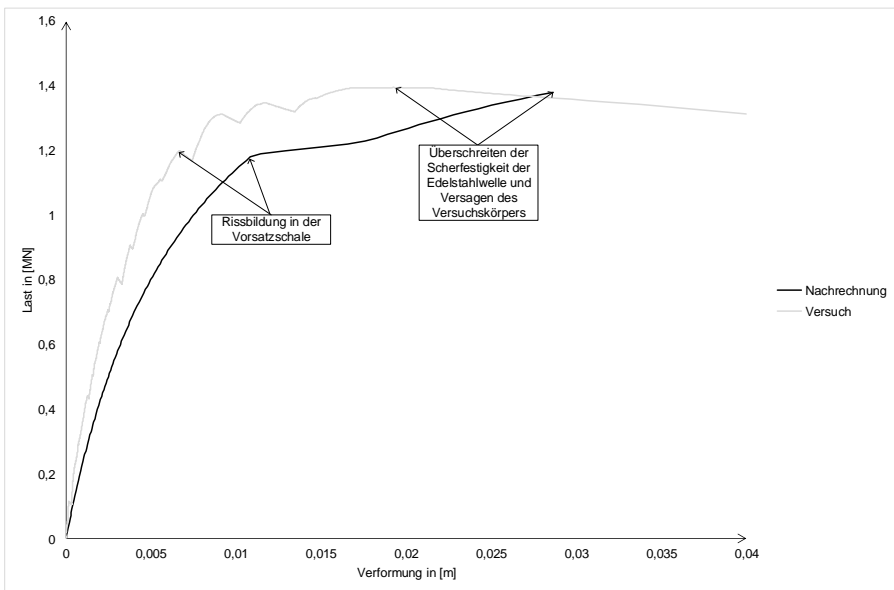


Abb. 4.20: Last-Verformungs-Kurve zu DV-SW-200-EdStWe und dazugehörige Nachrechnung

Die Nachrechnung aller großformatigen Druckversuche an Sandwichwänden erfolgt mit dem Programm TiToJ (siehe Abschnitt 3.4.2). Die im Rahmen der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Druckversuche an Stahlbetonwänden ermittelte ungewollte Lastexzentrizität von 6 mm wird berücksichtigt. Konform zu den durchgeführten Versuchen findet das Programm die Ursache des Versagens in dem Versagen der Kernschicht,

4 Überprüfung der Modelle durch experimentelle Untersuchungen

die durch das Überschreiten ihrer maximal zulässigen Verzerrung (Δ_{lim}) gekennzeichnet wird. Das Programm geht bei jedem Versuch von der Rissbildung der Vorsatzschale im Laufe des Versuchs aus. Nur bei dem Versuch DV-SW-60-EdStWe konnte dies experimentell nicht bestätigt werden. Auffällig ist der große Unterschied zwischen dem Lastniveau, bei dem die Rissbildung in der Vorsatzschale tatsächlich erfolgt, und dem höheren Lastniveau, bei dem diese rechnerisch auftritt. Beispielhaft wird dieser Unterschied im Rahmen des Versuchs DV-SW-140-EPS-GFK_A dargestellt (siehe Abb. 4.21). Dehnmessstreifen haben die jeweiligen Dehnungen in der Mitte des Versuchskörpers auf den Außenseiten von Trag- und Vorsatzschale im Laufe des Versuchs gemessen.

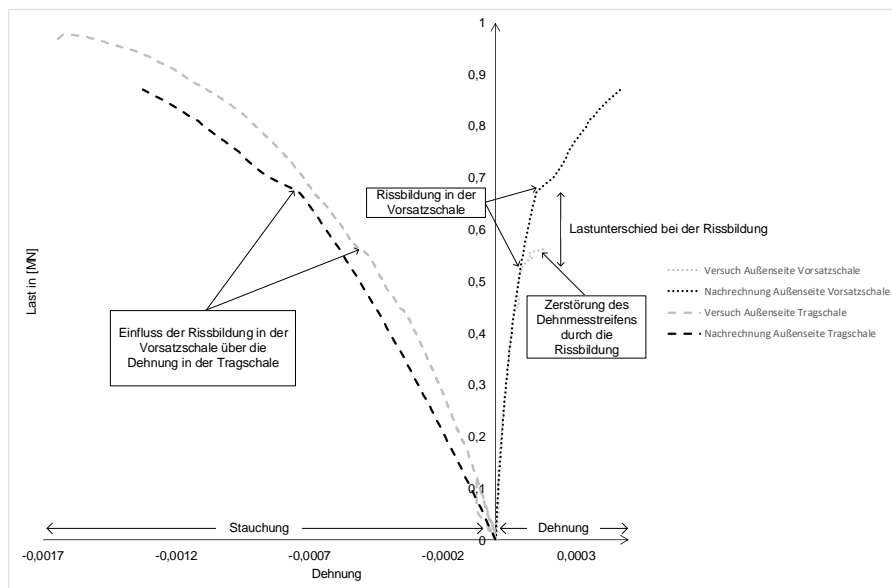


Abb. 4.21: Lastunterschied bei der Rissbildung am Beispiel des Versuchs DV-SW-140-EPS-GFK_A

Der Unterschied zwischen den Lastniveaus, bei denen die Rissbildung rechnerisch und experimentell erfolgt, lässt sich zum Teil durch das gewählte Betonmodell erklären. In dem für die Nachrechnung gewählten bilinearen Materialgesetz (siehe Abb. 4.1) ist der E-Modul für den Zugbereich gleich dem E-Modul für den Druckbereich. Dieser ist aber kleiner als der reale E-Modul, der von dem Materialprüfamt konform zur *DIN 1048-5* ermittelt wurde und der der Steigung beim Belasten des Prüfzylinders bis zu ungefähr 1/3 der zu erwartenden Druckfestigkeit und somit auch dem in *DIN EN 1990* definierten Sekanten-E-Modul entspricht. Da das Programm TiToU mit der Angabe der Biegezugfestigkeit und nicht der dazugehörigen Rissdehnung rechnet, ist die Dehnung und somit auch das Lastniveau, bei der die Rissbildung erfolgt, größer als in der Realität. Das Problem kann umgegangen werden, indem die Rissdehnung über den Sekanten-E-Modul und dann eine rechnerische, fiktive Biegezugfestigkeit über den rechnerischen E-Modul rückgerechnet werden. Beträgt zum Beispiel der Sekanten-E-Modul 20.600 MN/m^2 und der rechnerische E-Modul 14.200 MN/m^2 , ist für eine tatsächliche Biegezugfestigkeit von $2,1 \text{ MN/m}^2$ die rechnerische Rissdehnung gleich

0,148 ‰, während die tatsächliche Rissdehnung gleich 0,102 ‰ ist. Geht man von dieser Rissdehnung aus, kommt man auf eine rechnerische, fiktive Biegezugfestigkeit von 1,5 MN/m², die in das Programm TiToU eingegeben werden kann. Wie aus Abb. 4.22 zu ersehen ist, folgt aus dieser Korrektur eine realistischere Nachrechnung des Versuchs bezüglich des Rissbildungsprozesses.

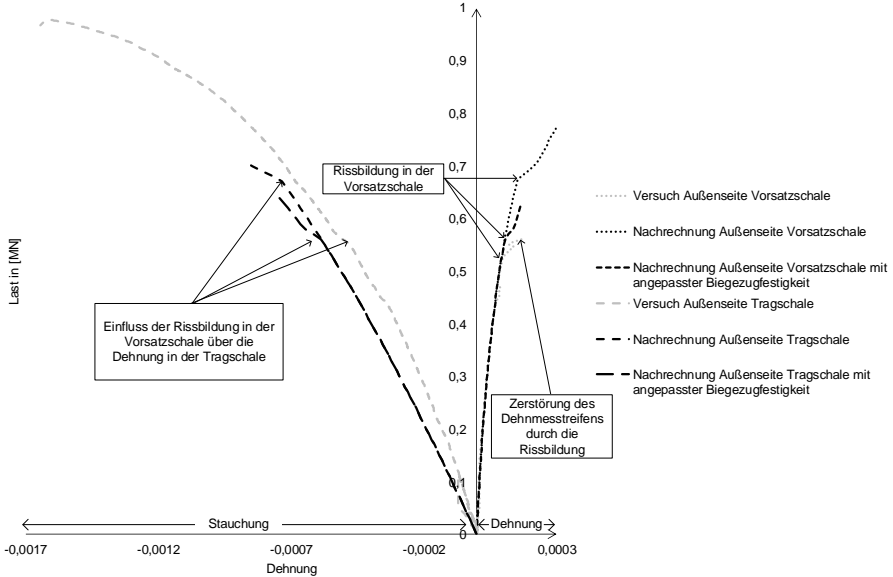


Abb. 4.22: Tatsächliches und rechnerisches Lastniveau bei der Rissbildung, letzteres mit und ohne angepasster Biegezugfestigkeit am Beispiel des Versuchs DV-SW-140-EPS-GFK_A

Die Trag- und die Vorsatzschalen der unterschiedlichen Versuchskörper besitzen unterschiedliche Materialeigenschaften, was die Aussagekraft eines Vergleichs der unterschiedlichen Konfigurationen untereinander relativiert. Vielmehr soll hier der Fokus auf die Abweichungen zwischen der beim Versuch gemessenen Traglast und ihrem nachgerechneten Wert gelegt werden. Alle bei großformatigen Druckversuchen erreichten Traglasten werden in Tab. 4.5 wiedergegeben. Die jeweiligen Abweichungen zwischen der im Versuch gemessenen Traglast und ihrem nachgerechneten Wert wird für jeden Versuch prozentual angegeben.

Tab. 4.5: Experimentelle und rechnerische Traglast der unterschiedlichen Versuchskörper

Versuchskörper	experimentelle Traglast in [kN]	rechnerische Traglast in [kN]
DV-TS-1	662	660
DV-TS-2	618	
DV-TS-3	710	
DV-SW-60-EPS-GFK_A	797	1.110 (+39%)
DV-SW-140-EPS-GFK_A	977	870 (-11%)
DV-SW-200-EPS-GFK_A	1.007	960 (-5%)
DV-SW-60-EdStWe	988	810 (-18%)

Tab. 4.5 Fortsetzung

Versuchskörper	experimentelle Traglast in [kN]	rechnerische Traglast in [kN]
DV-SW-100-EdStWe	1.135	1.310 (+15%)
DV-SW-200-EdStWe	1.395	1.380 (-2%)

Der Reiz, eine Analogie zwischen den Versagensarten, die bei Stahlbetonwänden unter Druckbeanspruchung auftreten (siehe Abschnitt 2.1) und denjenigen, die bei Sandwichwänden unter Druckbeanspruchung auftreten, zu finden, führt zu der Frage, ob das Erreichen der Traglast bei den durchgeführten Druckversuchen an Sandwichwänden durch ein Stabilitätsversagen oder ein Querschnittsversagen gekennzeichnet wird. An dieser Stelle muss zunächst auf die Unmöglichkeit, eine umhüllende Kurve der Querschnittstragfähigkeit für Sandwichbauteile unter Druckbeanspruchung zu definieren, aufmerksam gemacht werden. Grund dafür ist die Übertragung der Normalkraft zwischen der Trag- und der Vorsatzschale über die Kernschicht, die über die Hälfte der Sandwichwand erfolgt und die de facto die abstrakte Trennung zwischen dem Querschnitt und dem System verbietet. Bezüglich der Versagensarten bei den durchgeführten Versuchen, die durch das Versagen der Kernschicht gekennzeichnet sind, tendiert man dazu, es als ein Querschnittsversagen einzustufen, weil die Scherfestigkeit der Kernschicht überschritten wurde. Es handelt sich aber um ein Stabilitätsversagen. Es konnte kein absteigender Ast der Last-Verformungs-Kurve beobachtet werden, nur weil der Versuch in dem in Abschnitt 4.3 dargestellten Versuchsaufbau nicht weggesteuert durchgeführt wurde. Somit konnte der absteigende Ast der Last-Verformungs-Kurve der Kernschicht nicht ausgenutzt werden.

Der Einsatz des vom Verfasser erstellten Programms – TiToU – für die Nachrechnung der durchgeführten großformatigen Versuche ermöglichte mit Ausnahme des Versuchs DV-SW-60-EPS-GFK-A eine sehr gute Übereinstimmung, sowohl bezüglich des Tragwiderstands als auch im Hinblick auf die Rissbildungsprozesse sowie den Versagensmechanismus. Diese stichprobenartige Kontrolle der Gültigkeit des Nachrechnungsprogramms TiToU sollte erweitert werden, um einen Einsatz des Programms in der Baupraxis abzusichern.

5 Bemessungsbeispiel

5.1 Einleitung

Im Folgenden wird das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Bemessungskonzept für den Querschnittsentwurf und die Nachweisführung einer Sandwichwand verwendet und den Bemessungsansätzen des aktuellen Normenstands gegenübergestellt. Als Bemessungsbeispiel wird eine 8 m hohe Sandwichwand mit freihängender Vorsatzschale gewählt, die in der Eingangshalle eines fünfgeschossigen Hotelgebäudes zum Einsatz kommt. Diese ist in Abb. 5.1 dargestellt.

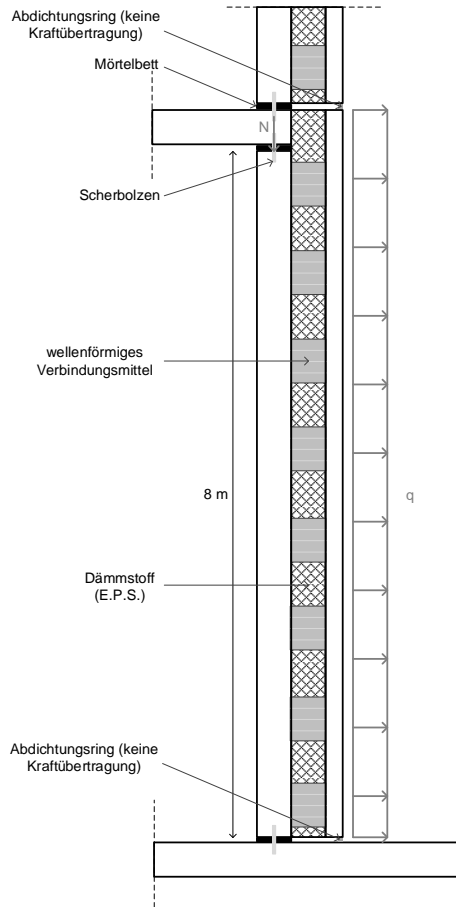


Abb. 5.1: Sandwichwand im Erdgeschoss eines Hotelgebäudes (maßstabsverzerrte Darstellung)

Ihre Kernschicht aus Styropor zeichnet sich durch den Einsatz der wellenartigen Verbindungsmittel der Firma Kappema aus, von denen ein Exemplar in Abb. 4.4 dargestellt ist.

Drei Varianten (A, B und C) dieser Sandwichwand werden bei gleichbleibenden Randbedingungen und für dieselbe Einwirkungskombination verglichen.

Die Variante A wird konform zu dem aktuellen Normenstand entworfen und bemessen. Dabei wird die Aufnahme der einwirkenden Lasten rechnerisch lediglich der Tragschale zugewiesen. Bei der Variante B wird die statische Mitwirkung der Vorsatzschale und der Kernschicht mit dem in dieser Arbeit dargestellten Bemessungskonzept und dem dazugehörigen Programm TiToU berücksichtigt. Dies gilt auch für die Variante C. Die Varianten B und C unterscheiden sich hinsichtlich des verfolgten Ansatzes bei dem Sandwichquerschnittsentwurf. Bei der Variante B werden die Tragschalendicke und dementsprechend auch die Gesamtwanddicke im Vergleich zur Variante A reduziert. Bei der Variante C wird die Tragschalendicke reduziert und die Kernschichtdicke so vergrößert, dass die gesamte Wanddicke gleich derjenigen der Variante A bleibt. Der Wärmedurchlasswiderstand der Wand erhöht sich somit. Die Sandwichwände der Varianten A, B und C weisen alle ungefähr die gleiche Tragfähigkeit N_{Rd} auf. Ihre Abmessungen und die jeweils aufnehmbare Normalkraft im Grenzzustand der Tragfähigkeit werden in Tab. 5.1 angegeben.

Tab. 5.1: Abmessungen und maximal aufnehmbare Normalkräfte der unterschiedlichen Sandwichwandvarianten

Variante	A	B	C
Berücksichtigung der Kernschicht und der Vorsatzschale bei der Bemessung	nein	ja	ja
Ansatz	-	Reduzierung Gesamtwanddicke	Reduzierung Wärmedurchgangskoeffizient (U-Wert)
Tragschalendicke in [cm]	20	16	14
Kernschichtdicke in [cm]	20	20	26
Vorsatzchalendicke in [cm]	7	7	7
Gesamtdicke in [cm]	47	43	47
maximal aufnehmbare Normalkraft N_{Rd} in [kN]	440	470	480

5.2 Konstruktive Anforderungen und Materialeigenschaften

5.2.1 Konstruktive Anforderungen

Die Tragschale muss die konstruktiven Bewehrungsanforderungen für Wände einhalten. Sie erhält eine identische obere und untere Bewehrung. Die symmetrische Bewehrungsausführung findet hauptsächlich ihre Begründung in dem Wunsch, zusätzliche Momente resultierend aus Schwindeinflüssen und eventuelle Verwechslungen bei der Montage zu vermeiden. Um die statische Nutzhöhe und somit die statische Effizienz der jeweiligen vertikalen Bewehrungslagen zu erhöhen, liegen diese in der äußeren Lage, während die horizontalen Bewehrungslagen jeweils in den inneren Lagen angeordnet werden. Dies ist laut Absatz 9.6.4 (2) in *DIN EN 1992-1-1/NA* bei einer Betondeckung größer als 2ϕ zulässig.

Laut *DIN EN 1992-1-1/NA* Absatz 10.9.9 (4) darf die Vorsatzschale einer Sandwichwand einlagig bewehrt werden. Als Schale eines Sandwichelementes wird die Vorsatzschale einer kombinierten Beanspruchung aus Biegung und Normalkraft ausgesetzt.

Je nach Lasteinleitungsstelle der vertikalen Belastung und dementsprechend je nach Krümmungsrichtung, kann die einwirkende Normalkraft entweder eine Druckkraft oder eine Zugkraft sein. Nach Meinung des Verfassers sollte die Vorsatzschale sowohl die konstruktiven Bewehrungsanforderungen für Wände als auch diejenigen für Platten erfüllen.

Die konstruktiven Bewehrungsanforderungen für Wände und auch diejenigen für Platten werden in Tab. 5.2 zusammengefasst.

Tab. 5.2: Konstruktive Bewehrungsanforderungen für Platten und Wände

		Platte	Wand
Längsbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sl,min} = \frac{f_{ctm}W_c + N \left(z - z_{s1} - \frac{W_c}{A_c} \right)}{z f_{yk}}$	$A_{sv,min} = 0,003A_c$ bei schlanken Wänden mit $\lambda \geq \lambda_{min}$
	maximaler Bewehrungsgrad	-	$A_{sv,max} = 0,04A_c$
	Zwischenabstand	$s_{max,stabs} = 250 \text{ mm}$ bei $h \geq 250 \text{ mm}$ $s_{max,stabs} = 150 \text{ mm}$ bei $h \leq 150 \text{ mm}$	$s_l \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ mm} \\ 2 \times \text{Wanddicke} \end{array} \right.$
Querbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sh,min} = 0,2A_{sl,min}$	$A_{sh,min} = 0,5A_{s,v}$ bei schlanken Wänden mit $\lambda \geq \lambda_{min}$
	Zwischenabstand	$s_{max,stabs} \leq 250 \text{ mm}$	$s \leq 350 \text{ mm}$

Die Bewehrung der Sandwichwand ist bei den Fällen A, B und C identisch und ist in Abb. 5.2 dargestellt. Die Tragschalendicke entspricht dabei der Variante B.

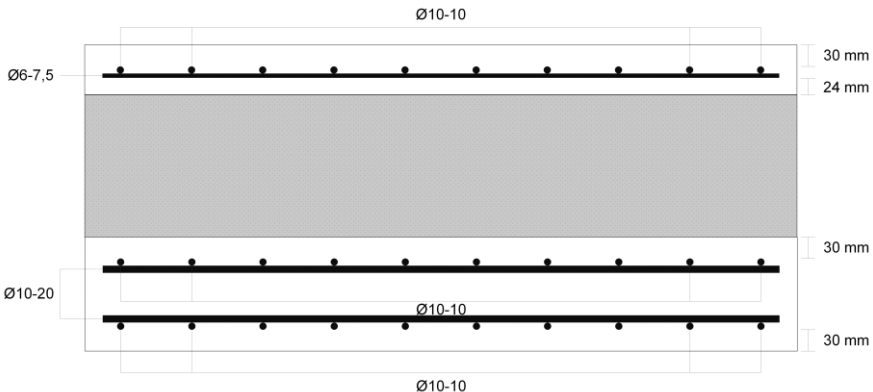


Abb. 5.2: Bewehrungslagen in der untersuchten Sandwichwand

Die minimalen Betonschalendicken ergeben sich aus normativen Vorschriften. Laut DIN EN 1992-1-1/NA Absatz 10.9.9 (5) beträgt somit die Mindestdicke für Trag- und

Vorsatzschale 70 mm. Die Mindestdicke der Vorsatzschale entspricht der Mindestdicke einer Platte ohne Querkraftbewehrung, die im Absatz 9.3.1.1 (NA.5) geregelt wird. Für Fertigteilwände ohne durchlaufende Decke wird im Absatz 9.6.1 (NA2) eine Mindestdicke von 100 mm vorgesehen. Diese sollte nach Meinung des Verfassers für die Mindestdicke der Tragschale eingehalten werden und also für die Tragschale die Vorgabe gemäß Absatz 10.9.9 (5) ersetzen.

5.2.2 Materialeigenschaften und Dauerhaftigkeit

5.2.2.1 Betonfestigkeitsklassen und Betondeckung

In diesem Beispiel werden die Trag- und Vorsatzschalen der Sandwichwand im Fertigteilwerk aus einem Beton der Festigkeitsklasse C25/30 und C40/50 hergestellt.

Die mathematische Abbildung der Eigenschaften der verwendeten Betone erfolgt anhand des vom Verfasser vorgeschlagenen bilinearen Werkstoffgesetzes, zu welchem Erläuterungen in Abschnitt 2.2.1.3 zu finden sind.

In Tab. 5.3 wird für die Betonfestigkeitsklasse C40/50 die Ermittlung des zu verwendenden Bemessungswerts der Betondruckfestigkeit dargestellt und der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie mathematisch beschrieben. Die Eigenschaften des verwendeten Betonstahls sind ebenso in Tab. 5.3 angegeben.

Angaben zur Spannungs-Dehnungs-Linie der Betonfestigkeitsklasse C25/30 sind in Tab. 2.4 zu finden.

Tab. 5.3: Materialkennwerte (Festigkeiten in [MN/m²]) eines Betons der Festigkeitsklasse C40/50 und eines Betonstahls B500A nach dem Ansatz des Autors (siehe Abschnitt 2.2.1.3)

Beton	Betonstahl
$\sigma_c(\epsilon_{c3})$ wird nach <i>DIN EN 1992-1-1</i> , Absatz 5.8.6 (siehe Tab. 2.3) gerechnet. $\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right)$ $\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$ $\epsilon_{c1} = 2,3\text{‰}$ $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ $f_{cd} = 0,85 \cdot \frac{40}{1,5} = 22,67$ $E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}}$ $E_{cd} = \frac{35200}{1,5} = 23466$ $\gamma_{ce} = 1,5 \text{ laut dem nationalen Anhang}$ $k = \frac{1,05 \cdot E_{cd} \cdot \epsilon_{c1}}{f_{cd}}$	$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ $f_{yd} = \frac{500}{1,15}$ $f_{yd} = 435$

Tab. 5.3 Fortsetzung

Beton	Betonstahl
$k = \frac{1,05 \cdot 23466 \cdot 2,3 \cdot 0,001}{22,67} = 2,5$ $\sigma_c(\varepsilon_{c3}) = \left(\frac{k \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{\varepsilon_{c3}^2}{\varepsilon_{c1}^2}}{1 + (k - 2) \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{c1}}} \right) \cdot f_{cd}$ $\sigma_c(\varepsilon_{c3}) = \left(\frac{2,5 \frac{1,75}{2,3} - \frac{1,75^2}{2,3^2}}{1 + (2,5 - 2) \frac{1,75}{2,3}} \right) \cdot 22,67 = 21,73$ <p>Für $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3}$</p> $\sigma_c = \frac{\sigma_c(\varepsilon_{c3})}{\varepsilon_{c3}} \varepsilon_c$ $\varepsilon_{c3} = 1,75\text{‰}$ <p>Für $\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3}$</p> $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_{c3})$ $\varepsilon_{cu3} = 3,5\text{‰}$ $f_{ctd} = \frac{f_{ctk,0,05}}{\gamma_c}$ $f_{ctd} = \frac{2,5}{1,5} = 1,67$	

Laut *DIN EN 1992-1-1/NA* Absatz 10.9.9 (6) müssen die Innenseiten der Tragschale und der Vorsatzschale, die im Kontakt zu einer geschlossenporigen Kerndämmung stehen, der Expositionsklasse XC3 zugeordnet werden. Im gewählten Beispiel ist die Außenseite der Tragschale einem Innenraum zugewandt und kann somit der Expositionsklasse XC1 zugeordnet werden, während die Außenseite der Vorsatzschale direkt bewittert werden kann und somit der Expositionsklasse XC4 zugeordnet werden muss.

Tab. 5.4: Einzuhaltende Betondeckungen in der Trag- und Vorsatzschale der Sandwichwand

	Tragschale Außenseite	Tragschale Innenseite	Vorsatzschale Innenseite	Vorsatzschale Außenseite
Betonfestigkeits- klasse	C25/30		C40/50	
Expositions- klasse	XC1	XC3	XC3	XC4
$c_{min,dur}$	10 mm	20 mm	20 mm	25 mm
Modifikation für $c_{min,dur}$ infolge der Druckfestig- keitsklasse	0	0	- 5 mm	- 5 mm
$\Delta_{c,dev}$ aus Korrosions- schutzgründen	10 mm	15 mm	15 mm	15 mm
Abminderung von $\Delta_{c,dev}$ infolge der Qualitätskontrolle	- 5 mm	- 5 mm	- 5 mm	- 5 mm
c_{nom}	20 mm	30 mm	25 mm	30 mm
c_v	30 mm	30 mm	25 mm	30 mm

Die Herleitung der einzuhaltenden Betondeckungen ist in Tab. 5.4 angegeben. Die Verlegemaße werden vereinfacht gewählt, um einerseits die Gefahr einer Verwechslung beim Verlegen der Bewehrung zu vermeiden und andererseits eine gewisse Symmetrie der Schalenquerschnitte zu gewährleisten, die vor ungewollten Krümmungen infolge des Schwindens bewahren soll.

5.2.2.2 Kernschichteigenschaften

Die Kernschicht besteht aus Dämmmaterial und aus den wellenförmigen Verbindungsmitteln der Firma Kappema. Das Dämmmaterial wird für die Nachweisführung nicht angesetzt. Grund dafür ist zum einen die fehlende Garantie bezüglich der Qualität der Fuge zwischen Dämmstoff und Beton. Je nach Herstellungsverfahren kann es dazu kommen, dass diese breitflächig keinen Verbund aufweist. Zum anderen sprechen die zur Zeit noch unbekanntenen Alterungsprozesse des Dämmstoffs, das heißt die Entwicklung seiner mechanischen Eigenschaften während der Nutzungsdauer des Bauwerks, noch gegen die Berücksichtigung des Dämmstoffs in statischen Berechnungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit. Für die im Rahmen dieses Beispiels durchgeführten Nachweise ist es auf der sicheren Seite, im Allgemeinen das Dämmmaterial nicht zu berücksichtigen. Sollen Zwangsspannungen infolge von Temperaturbeanspruchungen

oder Schwinden einbezogen werden, müsste das Dämmmaterial jedoch zusätzlich zu den Verbindungsmitteln berücksichtigt werden.

Für die Verbindungsmittel wird der Wert des Schubmoduls auf Basis des Ansatzes von Müller 2015 definiert. Dieser Wert liegt für alle durchgeführten Nachweise auf der sicheren Seite. Für die maximal aufnehmbare Verschiebung des Verbindungsmittels, bei der die Scherfestigkeit erreicht wird und die in der Nachweisführung in der Form der relativen Verschiebung zwischen den Betonschalen vorhanden ist, werden ein Maximal- und ein Minimalwert definiert, jeweils für die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit und diejenigen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit wird für die maximal aufnehmbare Verschiebung des Verbindungsmittels der Mittelwert der erreichten Verformungen beim Erreichen der Traglast (5,91 mm) in der in Abb. 5.3 dargestellten Versuchsserie verwendet. Die Tatsache, dass ein Mittelwert statt eines Bemessungswerts für die Bemessung angesetzt wird, lässt sich dadurch erklären, dass die Sicherheit diesbezüglich schon in der Wahl eines abgeminderten Werts für den Schubmodul nach Müller 2015 steckt, was dazu führt, dass die maximal aufnehmbare Verschiebung rechnerisch früher erreicht wird als in der Realität. Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wird vom Verfasser vorgeschlagen, 70 % des Wertes im Grenzzustand der Tragfähigkeit (4,13 mm) als maximal zulässigen Wert anzunehmen.

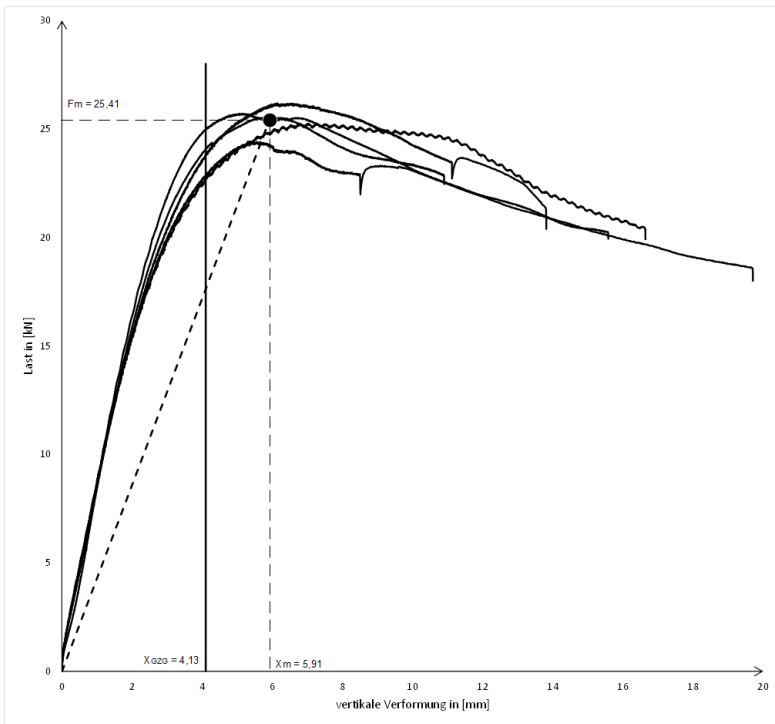


Abb. 5.3: Last-Verformungs-Kurven der untersuchten wellenförmigen Verbindungsmittel der Firma Kappema zur Bestimmung des Schubmoduls und der maximal aufnehmbaren Verformung im Grenzzustand der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit

Mit einem Verbindungsmittel je m^2 beträgt der Schubmodul $0,43 \text{ MN/m}^2$. Die Verteilung der Verbindungsmittel in der Sandwichwand wird in Abb. 5.4 dargestellt. Je m^2 können $3 + 0,5 \times 8 + 0,25 \times 4 = 8$ Verbindungsmittel angerechnet werden. Für das Bemessungsbeispiel wird von einem Schubmodul gleich $8 \times 0,43 \text{ MN/m}^2 = 3,44 \text{ MN/m}^2 \approx 3 \text{ MN/m}^2$ ausgegangen.

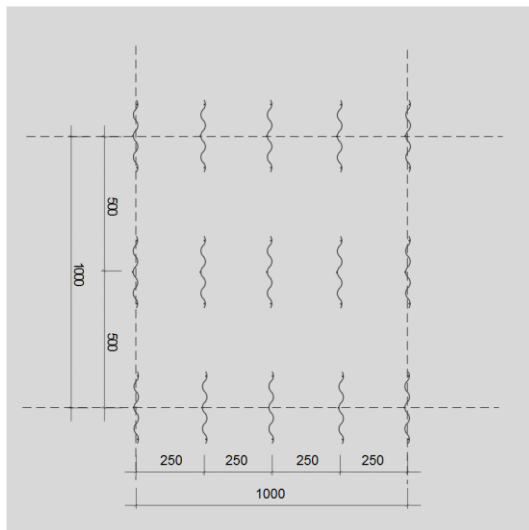


Abb. 5.4: Verteilung der wellenförmigen Verbindungsmittel von Kappema in 1 m^2 Sandwichwandfläche [Abmessungen in mm]

5.3 Einwirkungen

5.3.1 Ständige und veränderliche Einwirkungen

Die ständigen Lasten setzen sich aus dem Eigengewicht der sich übereinander befindenden Sandwichwände, der 20 cm dicken Stahlbetonregeldecken mit den entsprechenden Lasteinzugsflächen und aus den Ausbaulasten in diesen Bereichen zusammen. Das Eigengewicht der zu bemessenden Sandwichwand im Erdgeschoss wird am Kopf der Tragschale angesetzt. Die Ausbaulasten betragen 2 kN/m^2 . Die veränderlichen Einwirkungen entsprechen den Verkehrslasten in den Lasteinzugsflächen. Diese betragen 5 kN/m^2 . Das Erdgeschoss weist eine Höhe von 8 m auf. Die Regelgeschosshöhe ab dem 1. Obergeschoss beträgt 3 m. Die Lasten sind in Tab. 5.5 zusammengefasst.

Tab. 5.5: Ständige und veränderliche Einwirkungen

Geschoss	Ständige Lasten [kN]			Veränderliche Lasten [kN]
	Eigengewicht Wand	Eigengewicht Decke	Ausbaulasten	Verkehrslasten
4.OG	20,25	15	6	15
3.OG	20,25	15	6	15
2.OG	20,25	15	6	15
1.OG	20,25	15	6	15
EG	54	15	6	15
Summe	135	75	30	75
Gesamtsumme	240			75

5.3.2 Lastfall Wind

In diesem Beispiel wird der Fall Windsog untersucht, für den hier davon ausgegangen wird, dass er in Kombination mit Exzentrizitäten der vertikalen Last in Richtung der Innenraumseite der Tragschale den maßgebenden Fall bildet. Es sei darauf hingewiesen, dass in der Praxis Winddruck und Windsog mit unterschiedlichen Vorzeichen der Exzentrizität kombiniert werden müssen und dass der maßgebende Fall nicht vorhergesagt werden kann. Die Bestimmung der Windlast ist der Tab. 5.6 zu entnehmen.

Tab. 5.6: Windlast

Windlastzone	4 (Binnenland)
Böengeschwindigkeitsdruck	1,30 kN/m ² (18 m < h < 25 m)
Außendruckbeiwert $c_{pe,10}$	-0,5 (Sog)
Charakteristischer Wert	0,65 kN/m ²

5.3.3 Kriecheinflüsse

Die Kriecheinflüsse werden nach *DIN EN 1992-1-1/NA* ermittelt und sind in Tab. 5.7 zusammengefasst.

Tab. 5.7: Bestimmung der jeweiligen Kriechzahlen der Vorsatz- und der Tragschale

	Vorsatzschale	Tragschale
Beton	C40/50	C25/30
Zement	CEM 42,5 R (Klasse R)	CEM 42,5 R (Klasse R)
wirksame Bauteildicke	$h_0 = \frac{2 \times A_c}{u} = \frac{0,07 \times 1}{0,07 + 1} = 0,0654m$	Variante A: $h_0 = \frac{0,2 \times 1}{0,2 + 1} = 0,167m$ Variante B: $h_0 = \frac{0,16 \times 1}{0,16 + 1} = 0,138m$ Variante C: $h_0 = \frac{0,14 \times 1}{0,14 + 1} = 0,123m$

Tab. 5.7 Fortsetzung

	Vorsatzschale	Tragschale
relative Luftfeuchte	80 %	50%
Betonalter bei Belastungsbeginn	28 Tage	28 Tage
Endkriechzahl	1,505	Variante A: 2,63 Variante B: 2,71 Variante C: 2,77

Das Kriechen wird, wie in *DIN EN 1992-1-1* vorgeschlagen, durch die Multiplikation der Dehnungswerte des Betons in der Spannungs-Dehnungs-Linie mit einem Faktor $(1+\varphi_{\text{eff}})$ berücksichtigt. Weitere Erläuterungen dazu sind in Abschnitt 2.2.1.3 zu finden. Somit sind Zusatzausmitteln infolge Kriechen bei den Berechnungen, die auf einer Laststeigerung nach Theorie II. Ordnung basieren, berücksichtigt.

Es können aber keine zeitlichen Zwischenzustände zwischen $t = 0$ und $t = \infty$ betrachtet werden. Unterschiedliche Lastgeschichten mit den dazugehörigen Kriechumlagerungen können also nicht berücksichtigt werden. Dies ist nach *DIN EN 1992-1-1* auch nicht erforderlich und wird von üblicher kommerzieller Software ebenfalls nicht geleistet.

5.3.4 Zusammenfassung

Vereinfachend wird die zweite veränderliche Einwirkung nicht abgemindert. In Tab. 5.8 werden die Bemessungswerte der vertikalen und horizontalen Lasten im Grenzzustand der Tragfähigkeit und im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit angegeben.

Tab. 5.8: Bemessungswerte der vertikalen und horizontalen Lasten im Grenzzustand der Tragfähigkeit und im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

Einwirkung	Grenzzustand der Tragfähigkeit	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
vertikal	$1,35 \times 240 + 1,5 \times 75 = 436,4 \text{ kN}$	$1,0 \times 240 + 1,0 \times 75 = 315 \text{ kN}$
horizontal	$1,5 \times 0,65 = 1,0 \text{ kN/m}^2$	$0,65 \text{ kN/m}^2$

Die Nachweisführung erfolgt nachfolgend beispielhaft für die Variante B.

5.4 Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit

5.4.1 Nachweis für Biegung und Normalkraft

Bei der Bemessung für Biegung und Normalkraft muss die Lasteinleitungsstelle der Normalkraft berücksichtigt werden. Die Lasteinleitung soll zentrisch in die Tragschale erfolgen. Unplanmäßige Exzentrizitäten müssen aber einbezogen werden. Diese werden nach *DIN EN 1992-1-1/NA* bestimmt. Für eine Wand ist die Imperfektion e_i gleich $l/400$, also in diesem Fall $8 \text{ m} / 400 = 2 \text{ cm}$. Wie in Abschnitt 5.3.2 erläutert wird die Exzentrizität in diesem Beispiel in Richtung der Innenraumseite angesetzt.

Das Programm TiToU führt eine Laststeigerung bis zum Versagen durch. Das entsprechende Diagramm ist in Abb. 5.5 dargestellt. Maßgebend für das Erreichen von N_{Rd}

(470 kN) ist das Versagen der Verbindungsmittel am Kopf und am Fuß der Sandwichwand. Dabei ist die Vorsatzschale noch im ungerissenen Zustand.

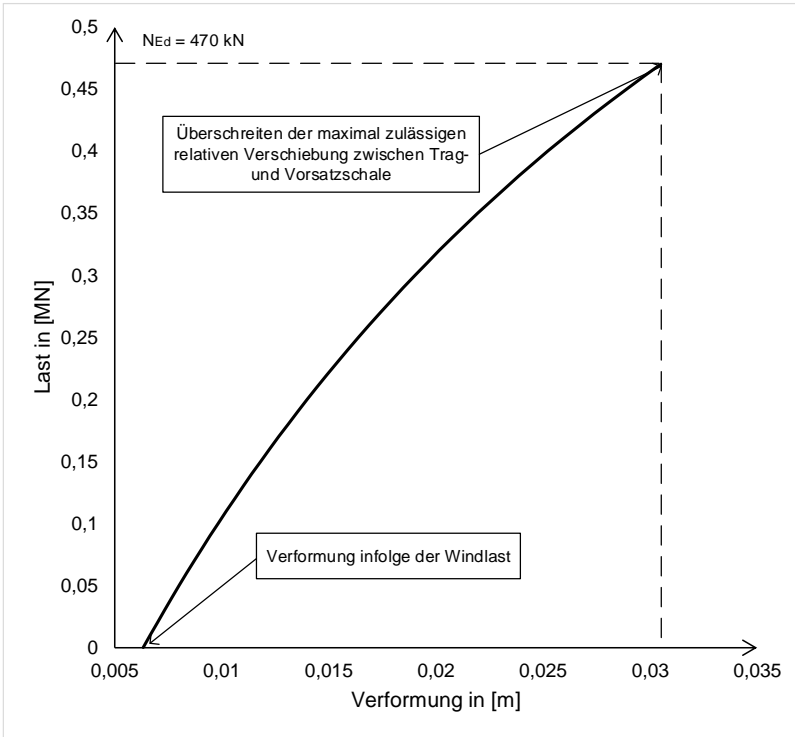


Abb. 5.5: Last-Verformungs-Diagramm der Sandwichwand im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Bei einem Bemessungswert der horizontalen Einwirkung (Wind) von 1 kN/m^2 kann die Sandwichwand (Variante B) eine maximale Normalkraft von 470 kN aufnehmen. Da die einwirkende Normalkraft 436 kN beträgt (siehe Abschnitt 5.3.4), ist somit der Nachweis für Biegung und Normalkraft im Grenzzustand der Tragfähigkeit erbracht.

5.4.2 Nachweis für Querkraft

Da die Querkraftnachweise der Trag- und der Vorsatzschale im Programm TiToU nicht durchgeführt werden, müssen diese gesondert erfolgen. In diesem Beispiel reicht sowohl in der Tragschale als auch in der Vorsatzschale die Querkrafttragfähigkeit des Betons allein (ohne Querkraftbewehrung) aus, um die einwirkende Querkraft aufzunehmen.

5.4.3 Nachweise der Verbindungsmittel

Wie schon in Abschnitt 5.4.1 erwähnt sind die Verbindungsmittel für das Versagen der Sandwichwand ausschlaggebend.

5.5 Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

5.5.1 Begrenzung der Rissbildung

Die Ermittlung des Spannungszustands als maßgebendes Kriterium zur Feststellung eines gerissenen oder ungerissenen Betonquerschnitts findet zum Zeitpunkt $t = \infty$ statt.

Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit ist die Tragschale überdrückt.

Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit befindet sich die Vorsatzschale sowohl auf ihrer Innenseite als auch auf ihrer Außenseite unter Zug. Auf Ihrer Außenseite ist die Zugspannung am größten und beträgt $0,74 \text{ MN/m}^2$. Dieser Wert befindet sich unterhalb des charakteristischen Wertes der Zugfestigkeit eines Betons der Festigkeitsklasse C40/50 ($f_{ctk;0,05} = 2,5 \text{ MN/m}^2$). Somit bleibt die Vorsatzschale im ungerissenen Zustand, was aus optischen Gründen erforderlich ist.

5.5.2 Begrenzung der Verformung

Es ist unüblich, einen Verformungsnachweis zum Zeitpunkt $t = \infty$ für ein Druckglied wie eine Wand oder eine Stütze durchzuführen. Dies ist auch bei Sandwichwänden der Fall. Die maximale horizontale Verformung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit von der 8 m hohen Sandwichwand beträgt 1,98 cm. Dies entspricht ungefähr einem Verformungsniveau von $1/400$. Dieser Wert gewährleistet ein gutes Erscheinungsbild des Bauteils.

5.5.3 Begrenzung der Verformung der Verbindungsmittel

Die maximal zulässige relative Verschiebung zwischen Trag- und Vorsatzschale im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit beträgt 4,13 mm (siehe Abschnitt 5.2.2.2). Wie aus Abb. 5.6 zu ersehen ist, wird dieser Grenzwert nicht überschritten.

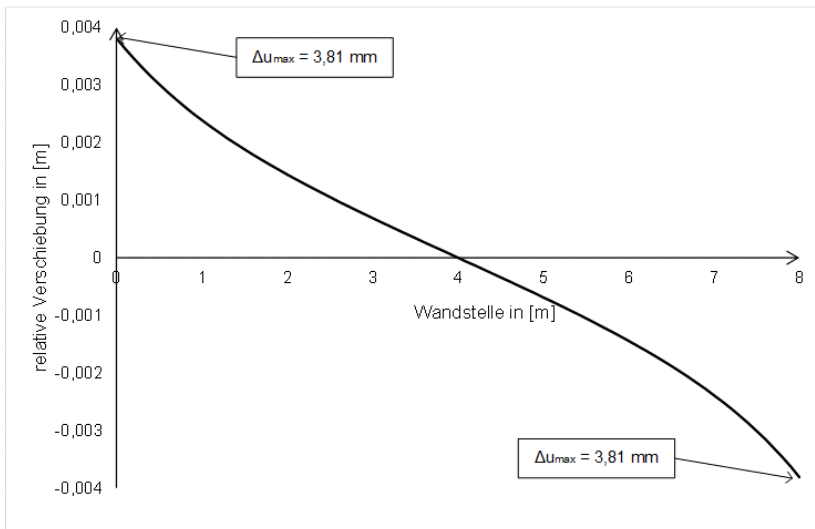


Abb. 5.6: Verlauf der relativen Verschiebung zwischen Trag- und Vorsatzschale über die Wandhöhe im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

5.6 Konstruktive Aspekte

5.6.1 Tragschale

In Tab. 5.9 wird überprüft, ob die Anforderungen an die Tragschale eingehalten sind.

Tab. 5.9: Anforderungen für Wände

Längsbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sv.min} = 0,003A_c = 0,003 \times 0,2 = 6 \text{ cm}^2 < 2 \times 7,85 = 15,7 \text{ cm}^2$
	maximaler Bewehrungsgrad	$A_{sv.max} = 0,04A_c = 0,04 \times 0,2 = 80 \text{ cm}^2 > 15,7 \text{ cm}^2$
	Zwischenabstand	$s_l = 100 \text{ mm} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{300 \text{ mm}} \\ 2 \times \text{Wanddicke} = 2 \times 200 \text{ mm} = 400 \text{ mm} \end{array} \right.$
Querbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sh.min} = 0,5A_{s,v} = 0,5 \times 15,7 \text{ cm}^2 = 7,85 \text{ cm}^2$ $A_{sh.vorh} = 7,85 \text{ cm}^2$
	Zwischenabstand	$s = 200 \text{ mm} \leq 350 \text{ mm}$

5.6.2 Vorsatzschale

Anforderungen für Platten

Die Mindestbewehrung der Vorsatzschale wird in Hinsicht auf die Sicherstellung eines duktilen Bauteilverhaltens nach *DIN EN 1992-1-1/NA* und nicht zur Begrenzung der Rissbreite bestimmt. Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wird nämlich aus optischen Gründen keine Rissbildung in der Vorsatzschale toleriert (siehe Abschnitt 5.5.1). Die erforderliche Mindestbewehrung hängt u. a. vom Zugkraftniveau in der Vorsatzschale ab. Dieses kann mit dem Programm TiTou bestimmt werden. Um jedoch den Nachweisvorgang nicht zu erschweren und auf der sicheren Seite zu liegen, wird vom Verfasser empfohlen, die Mindestbewehrungsmenge unter Vernachlässigung des Biegemomentes und auf Basis der Entstehung eines Trennrisses zu bestimmen.

$$A_{s,min} = \frac{f_{ctm}A_c}{f_{yk}} = \frac{3,5 \cdot 0,07}{500} = 4,9 \text{ cm}^2 < 7,85 \text{ cm}^2 \quad (5.1)$$

Maximaler Zwischenabstand:

$$s = 100 \text{ mm} < s_{max,slabs} = 150 \text{ mm} \quad (5.2)$$

Minimaler Querbewehrungsgrad:

$$A_{sh.min} = 0,2A_{sl.min} = 0,2 \cdot 7,85 \text{ cm}^2 = 1,57 \text{ cm}^2 < A_{sh.vorh} = 3,77 \text{ cm}^2 \quad (5.3)$$

Zwischenabstand der Querbewehrung

$$s_{max,slabs} = 75 \text{ mm} \leq 250 \text{ mm} \quad (5.4)$$

In Tab. 5.10 wird überprüft, ob die Anforderungen für Wände bei der Vorsatzschale eingehalten sind.

Tab. 5.10: Anforderungen für Wände

Längsbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sv.min} = 0,003A_c = 0,003 \times 0,07 = 2,1 \text{ cm}^2 < 7,85 \text{ cm}^2$
	maximaler Bewehrungsgrad	$A_{sv.max} = 0,04A_c = 0,04 \times 0,07 = 28 \text{ cm}^2 > 7,85 \text{ cm}^2$
	Zwischenabstand	$s_l = 100\text{mm} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{300 \text{ mm}} \\ 2 \times \text{Wanddicke} = 2 \times 70\text{mm} = 140\text{mm} \end{array} \right.$
Querbewehrung	minimaler Bewehrungsgrad	$A_{sh.min} = 0,5A_{s,v} = 0,5 \times 7,85\text{cm}^2 = 3,92\text{cm}^2$ $A_{sh.vorn} = 3,77 \text{ cm}^2$
	Zwischenabstand	$s = 75 \text{ mm} \leq 350 \text{ mm}$

5.7 Schlussfolgerung

Anhand dieses Beispiels wird die Bemessung einer Sandwichwand mit statischer Berücksichtigung aller ihrer Bestandteile dargestellt. Diese Sandwichwand wird einer Momenten- und einer Normalkraftbeanspruchung ausgesetzt, infolge einer Windlast und einer Druckkraft. Kriecheinflüsse auf die Betonschalen werden berücksichtigt. In diesem Beispiel werden Temperatureinwirkungen nicht miteinbezogen. Diese sollten aber für eine praktische Umsetzung berücksichtigt werden. Schwindeinflüsse werden ebenso in diesem Beispiel nicht miteingerechnet. Je nach Herstellungsverfahren der Sandwichwand können sie aber einen ausgeprägten Einfluss haben, so dass sie Berücksichtigung finden sollten. Weitere Punkte wie die Einleitung der Kraft in die Wand müssten untersucht werden. Dabei sollten die Teilflächenbelastung und die Querkraft nachgewiesen werden. Dafür wird auf die klassische Literatur zum Massivbau verwiesen.

Es wurde mit dem Bemessungsbeispiel gezeigt, dass für diese bestimmten Einwirkungen und Randbedingungen die Tragschalendicke um 20% reduziert werden kann (16 cm statt 20 cm), wenn Kernschicht und Vorsatzschale gleich dick bleiben, und um 30% (14 cm statt 20 cm), wenn die Gesamtwanddicke durch eine Erhöhung der Kernschichtdicke gleich dick bleibt.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Bemessungskonzepts für Sandwichwände, welches eine Bemessung nach den tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten ermöglicht. Nach aktuellem Normenstand darf nämlich der versteifende Einfluss der Vorsatzschale auf das Tragverhalten der Tragschale bei statischen Berechnungen unter vertikaler und horizontaler Last nicht berücksichtigt werden, was eine systematische Überdimensionierung der Tragschale zur Folge hat, die bei schlanken und knickgefährdeten Wänden besonders ausgeprägt ist. Im Gegensatz hierzu sollte das entwickelte Bemessungskonzept der Bedeutung aller Bestandteile einer Sandwichwand Rechnung tragen und somit die Reduzierung ihrer Querschnittsabmessungen möglich machen.

Zunächst musste allerdings der Weg zu diesem Ziel gewählt werden, der letztendlich die Art des Bemessungsmodells bestimmt. Im Unterschied zu aus Versuchsreihen gewonnenen empirischen und semi-empirischen Modellen leitet der Verfasser das in dieser Arbeit vorgestellte rein theoretische Modell aus physikalischen und mathematischen Analysen her und verifizierte dieses durch großformatige Versuche. Um mit diesem analytischen Vorgehen zum Ziel zu gelangen, galt es, unterschiedliche Fragestellungen zu lösen und Konzepte zu entwickeln, die nachfolgend in verkürzter Form dargestellt werden.

Zunächst wurden physikalische Zusammenhänge von Druckgliedern aus Stahlbeton erläutert und das normative Umfeld bei deren Bemessung dargestellt. Dies war der Sockel für die Entwicklung und Implementierung eines eigenen Programms zur Bemessung von Stahlbetondruckgliedern nach Theorie II. Ordnung. Zwar stehen schon viele Bemessungsprogramme für Stahlbetondruckglieder zur Verfügung. Grund für die Entwicklung eines neuen Programms war der Wunsch, ein Subprogramm für die Bemessung von Betonschalen zu erarbeiten, das sich in das ebenfalls vom Verfasser entwickelte Hauptprogramm TiToU (*Pavis d'Escurac 2018*) für die Bemessung von Sandwichwänden integrieren lässt. Dafür müssen Steifigkeitsänderungen über die Bauteilhöhe analytisch und nicht numerisch behandelt werden. Daneben bietet das Programm die Möglichkeit, die nichtlinearen Materialgesetze des Betons und des Bewehrungsstahls sowie die infolge der Rissbildung entstehende Nichtlinearität zu berücksichtigen. Dabei wird das Materialgesetz des Betons bilinear approximiert. Die Wirtschaftlichkeit des Bemessungsverfahrens und seine Sicherheit wurden durch den Vergleich mit normierten Bemessungsverfahren nachgewiesen. Die Zugversteifung wird vom Programm derzeit nicht berücksichtigt. Aufgrund der Programmstruktur sollte deren Integration aber möglich sein.

Das Hauptprogramm TiToU löst die Differentialgleichung sechsten Grades, die das physikalische Verhalten einer Sandwichwand unter Normalkraft- und Biegebeanspruchung wiedergibt, analytisch mit Hilfe von Exponentialansätzen. Zur Berücksichtigung der Normalkraft wird ein analytisches Modell zur Beschreibung des Krafttransfers zwischen der Trag- und der Vorsatzschale entwickelt und implementiert. Aus diesem Modell resultiert die Bestimmung der Lage des Schwerpunkts des aktivierten Querschnitts, anhand dessen die Exzentrizität der einwirkenden Normalkraft und das induzierte Biegemoment ermittelt werden können. Das Programm bietet die Möglichkeit, die integrale Bemessung von Sandwichwänden durchzuführen. Es berücksichtigt

dabei alle relevanten Versagensarten und kann für jedes Lastniveau den genauen Spannungsverlauf in den unterschiedlichen Bestandteilen der Sandwichwand angeben.

Ein Bemessungsbeispiel veranschaulicht, dass das entwickelte Bemessungsverfahren eine Reduzierung der Querschnittsabmessungen ermöglicht. In dem Beispiel konnte die Tragschalendicke je nach Ansatz um 20 bis 30% verringert werden.

Für eine Anwendung des entwickelten Bemessungskonzepts in der Praxis bedarf es noch einer umfangreicheren Überprüfung durch zusätzliche großformatige Versuche und numerische Untersuchungen, bei denen weitere Parameter variiert werden sollten.

Außerdem gilt es, weitere physikalischer Aspekte zu erforschen. Dazu gehören der Einfluss des Schwindens der Betonschalen auf die beschriebenen Tragmechanismen und die Auswirkung von Temperatursprüngen zwischen den Schalen sowie von Temperaturgradienten innerhalb der Schalen. Diese Aspekte sind nicht Bestandteil dieser Arbeit, dürfen jedoch keinesfalls vernachlässigt werden.

Sollten andere Verbindungsmittel, zum Beispiel aus glasfaserverstärktem Kunststoff, verwendet werden, müsste ihre Dauerhaftigkeit untersucht und der eventuellen Veränderung ihrer Eigenschaften über die Zeit im Bemessungskonzept Rechnung getragen werden.

Der Fall einer aufstehenden statt einer freihängenden Vorsatzschale wird von den Algorithmen des vom Verfasser entwickelten Programms nicht abgedeckt. Für deren Bemessung müssten andere Randbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichungen berücksichtigt werden können.

Darüber hinaus wurden keine brandschutztechnischen Nachweise durchgeführt. Mit der statischen Berücksichtigung der Vorsatzschale gewinnen diese allerdings eine noch größere Bedeutung und sind ebenfalls zu führen.

Die genannten Themen und offenen Fragen könnten Anlass für weitere Forschungsprojekte zu Sandwichwänden sein.

Das Konzept der Sandwichwand ließe sich auch weiterentwickeln: So könnte die Vorsatzschale vorgespannt und die Schubsteifigkeit der Kernschicht erhöht werden. Auf diese Art und Weise würde man gleichzeitig die Vorsatzschale auf einem hohen Niveau aktivieren und das Problem ihrer aus optischen Gründen unerwünschten Rissbildung in der Vorsatzschale lösen.

Literaturverzeichnis

Arens u. a. 2015

ARENS, Tilo; HETTLICH, Frank; KARPFFINGER, Christian; KOCKELKORN, Ulrich; LICHTENEGGER, Klaus; STACHEL, Hellmuth: *Mathematik*. 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg, 2015

Berner 1978

BERNER, Klaus: *Stahl/Polyurethan-Sandwichtragwerke unter Temperatur- und Brandbeanspruchung*, Darmstadt: *Technische Hochschule Darmstadt*, 1978 (Dissertation)

Deschamps u. a. 2003

DESCHAMPS, Claude; WARUSFEL, André; RUAUD, Jean F.; MOULIN, François; SIFRE, Jean-Claude; MIQUEL, Anne: *Mathématiques tout-en-un-1ère année. Cours et exercices corrigés MPSI - PCSI*. 2ème édition, Dunod, Paris, 2003

Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein E.V. 2015

Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein E.V.: Beispiele zur Bemessung nach Eurocode 2. Band 2: Ingenieurbau, Ernst & Sohn, Berlin, 2015

DIN 1045-1

DIN 1045-1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 1: Bemessung und Konstruktion*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2008-08

DIN 66001

DIN 66001: *Informationsverarbeitung Sinnbilder und ihre Anwendung*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 1983-12

DIN 66261

DIN 66261: *Sinnbilder für Struktogramme nach Nassi-Schneiderman*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 1985-11

DIN EN 12090

DIN EN 12090: *Wärmedämmstoffe für das Bauwesen – Bestimmung des Verhaltens bei Scherbeanspruchung; Deutsche Fassung EN 12090:2013*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2013-06

DIN EN 1990

DIN EN 1990: *Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2010-12

DIN EN 1992-1-1

DIN EN 1992-1-1: *Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2011-01

DIN EN 1992-1-1/NA

DIN EN 1992-1-1/NA: *Nationaler Anhang – National festgelegte Parameter – Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton - und Spannbetontragwerken – Teil 1 - 1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2013-04

Fingerloos u. a. 2012

FINGERLOOS, Frank; HEGGER, Josef; ZILCH, Konrad: *EUROCODE 2 für Deutschland. DIN EN 1992-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau mit Nationalem Anhang - Kommentierte Fassung*. 1. Auflage, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2012

Gastmeyer 2003

GASTMEYER, Ralf: *Neuentwicklungen bei der Konstruktion mehrschichtiger Stahlbeton-Wandtafeln mit integrierter Wärmedämmung*. Beton- und Stahlbetonbau 98 Heft 6, S. 360–368, 2003

Gross u. a. 2011

GROSS, Dietmar; HAUGER, Werner; SCHNELL, Walter; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 8. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2011

Heckmann 2018

HECKMANN, Michael: *Experimentelle und numerische Untersuchungen an Sandwichwänden unter vertikaler Lastbeanspruchung*, Kaiserslautern: TU Kaiserslautern, 2018 (Masterarbeit betreut durch Pavis d'Escurac, Arnaud)

Heft 423

Heft 423: *Experimentelle Untersuchungen des Trag- und Verformungsverhaltens schlanker Stahlbetondruckglieder mit zweiachsiger Ausmitte*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 1992

Heft 600

Heft 600: *Erläuterungen zu DIN EN 1992-1-1 und DIN EN 1992-1-1/NA (Eurocode 2)*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2012

Horstmann 2010

HORSTMANN, M.: *Zum Tragverhalten von Sandwichkonstruktionen aus textilbewehrtem Beton*, Aachen: RWTH Aachen, 2010 (Dissertation)

Kleinschmitt 2005

KLEINSCHMITT, Jörrit: *Die Berechnung von Stahlbetonstützen nach DIN 1045-1 mit nichtlinearen Verfahren. Ein auf Beispielen basierender Vergleich hinsichtlich Anwendbarkeit, Wirtschaftlichkeit und erzielbarer Bauwerkssicherheit*. Beton- und Stahlbetonbau 100 Heft 2, S. 166–176, 2005

Kordina u. Quast 2001

KORDINA, Karl; QUAST, Ulrich: *Beton Kalender. Bemessung von schlanken Bauteilen für den durch Tragwerksverformungen beeinflussten Grenzzustand der Tragfähigkeit - Stabilitätsnachweis*, Ernst & Sohn, Berlin, 2001

MC 2010

MC 2010: *fib Model Code for Concrete Structures 2010*, Berlin, Ernst & Sohn, 2013

Müller 2015

MÜLLER, Frank: *Selbsttragende Sandwichelemente mit Deckschichten aus Hochleistungsbeton und einem Kern aus extrudiertem Polystyrol*, Kaiserslautern: TU Kaiserslautern, 2015 (Dissertation)

Pahn 2011

PAHN, Matthias: *Beitrag zur Ermittlung von Schnitt- und Verformungsgrößen bei mehrschichtigen Stahlbetonwandtafeln mit Verbindungsmitteln aus glasfaserverstärktem Kunststoff*, Kaiserslautern: TU Kaiserslautern, 2011 (Dissertation)

Pavis d'Escurac 2018

PAVIS D'ESCURAC, Arnaud: *TiToU. Programm zur nichtlinearen Berechnung Sandwichwände unter Normalkraft und Biegung*, TU Kaiserslautern, 2018

Pfeiffer 2018

PFEIFFER, Uwe: *Stab2D-NL. Programm zur nichtlinearen Berechnung ebener Stabwerke*, Technische Universität Hamburg-Harburg Institut für Massivbau, 2018

Pfrang 1961

Pfrang: *Analytical study of the behavior of long restrained reinforced concrete columns subjected to eccentric loads*, Urbana, Illinois: *University of Illinois*, 1961 (betreut durch Siess)

Quast 2000

QUAST, Ulrich: *Zur Kritik an der Stützenbemessung* 95 Heft 5, S. 305–311, 2000

Quast 2004

QUAST, Ulrich: *Beton Kalender. Stützenbemessung*, Ernst & Sohn, Berlin, 2004

Schwarze 1984

SCHWARZE, Knut: *Numerische Methoden zur Berechnung von Sandwichelementen*. Stahlbau 53 Heft 12, S. 363–370, 1984

Shams 2015

SHAMS, Ali: *A novel approach for the production and design of load-carrying sandwich panels with reinforced concrete facings*, Aachen: RWTH Aachen, 2015 (Dissertation)

Stamm u. Witte 1974

STAMM, Klaus; WITTE, Horst: *Sandwichkonstruktionen: Berechnung, Fertigung, Ausführung*. Ingenieurbauten: Theorie und Praxis, Springer Verlag, Wien, 1974

Voltaire u. Bamberger 2008

VOLDOIRE, François; BAMBERGER, Yves: *Mécanique des structures. Initiation-Approfondissements-Applications*, Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 2008

Weiler 2018

WEILER, Torsten: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonsandwichelementen mit stiftförmigen Verbundmitteln*, Kaiserslautern: TU Kaiserslautern, 2018 (Dissertation)

Z-21.8-1894

Z-21.8-1894: *Schöck Thermoanker*. Deutsches Institut für Bautechnik: Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung, Berlin, 2016-11

Zilch u. Zehetmaier 2010

ZILCH, Konrad; ZEHETMAIER, Gerhard: *Bemessung im konstruktiven Betonbau. Nach DIN 1045-1 (Fassung 2008) und EN 1992-1-1 (Eurocode 2)*. 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2010

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Arnaud Pavis d'Escurac

Beruflicher Werdegang

seit 09/2018: Projektleiter in der Tragwerksplanung bei der Werner Sobek Frankfurt GmbH & Co. KG.

01/2013 – 05/2018: Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Universität Kaiserslautern am Fachgebiet Massivbau und Baukonstruktion bei Prof. Dr.-Ing. Jürgen Schnell

Hochschulausbildung

09/2005 – 12/2012: Studium des Bauingenieurwesens mit deutsch–französischem Doppeldiplom. Abschluss der ESTP Paris und der TU Dresden, Vertiefungsrichtung: konstruktiver Ingenieurbau, Abschluss: Dipl.-Ing., M. Eng.

09/2004 - 06/2005: Studium der Humanmedizin an der Université Louis Pasteur, Straßburg

Schulbildung

06/2004: Abitur am Lycée Kléber in Straßburg