

TA ed.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 23

IDENTIFIKATION VON AMPLITUDEN UND  
PHASENSPRÜNGEN IM INTENSITÄTSVERLAUF  
EINES Nd-YAG FESTKÖRPERLASERS

200 \*  
HANS-GEORG STARK

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH MATHEMATIK  
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE  
D - 6750 KAISERSLAUTERN

JULI 1987

## I. Einleitung

Der zeitliche Intensitätsverlauf eines Nd-YAG-Laserimpulses läßt sich näherungsweise durch folgenden Ausdruck beschreiben:

$$I(t) = J_0(t) + J_1(t) \sin(\omega_1 t + \phi_1) + J_2(t) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (\text{I.1})$$

Dabei sind die Frequenzen  $\omega_i$  ( $i=1,2$ ) nur schwach von der Zeit abhängig, so daß sie in den weiter unten erwähnten Intervallen als konstant vorausgesetzt werden. Außerdem gilt

$$\omega_2 \approx 2\omega_1 \quad (\text{I.2})$$

$J_0(t)$  wird im folgenden "Grundfunktion" genannt, die beiden anderen Ausdrücke heißen "erste bzw. zweite Oberschwingung". Zu einem gewissen festen Zeitpunkt  $t_s$  können nun in beiden Oberschwingungen sowohl in den Amplituden, als auch in den Phasen Sprünge

$\Delta J_i = J_i(t_s - 0) - J_i(t_s + 0)$  bzw.  $\Delta \phi_i = \phi_i(t_s - 0) - \phi_i(t_s + 0)$  auftreten. Die Aufgabenstellung ist nun, diese Sprünge zu identifizieren.

Bisher wurde zur Lösung dieses Problems folgendes Verfahren entwickelt (s. [1]).

Aus dem Fourierspektrum des Signals (I.1) werden durch Rücktransformation auf geeigneten Intervallen um  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  herum die beiden Oberschwingungen rekonstruiert.

Zur Bestimmung des Amplitudensprunges konstruiert man nach folgendem Muster eine Modellfunktion für die betrachtete, nach obigem Schema rekonstruierte, Oberschwingung:

Der (schwachen) Zeitabhängigkeit von  $\omega_i$  trägt man dadurch Rechnung, daß die Frequenzen für jede Halbschwingung aus den beiden Nulldurchgängen separat berechnet werden.

Die Amplitudenfunktionen  $J_k(t)$  ( $k=1,2$ ) werden als Polynome zweiten Grades angesetzt.

Die so entstandene Modellfunktion wird in geeigneten Intervallen jeweils links und rechts vom Sprung im least-squares Sinne an die betrachtete Oberschwingung approximiert.

Aus den Werten der resultierenden Amplitudenfunktionen an der Sprungstelle ermittelt man die Größe des Amplitudensprungs.

Zur Identifikation des Phasensprungs ermittelt man auf geeigneten Intervallen jeweils links und rechts vom Sprung aus den Extrema und den Nullstellen "mittlere" Frequenzen und Phasen  $(\omega_l, \phi_l)$  bzw.  $(\omega_r, \phi_r)$  links und rechts vom Sprung. Der Phasensprung wird dann einfach nach  $(\omega_l - \omega_r) t_s + \phi_l - \phi_r$  berechnet. (Für nähere Informationen zu dieser, im folgenden "Verfahren 1" genannten, Prozedur sei auf [1] verwiesen).

Dabei traten folgende Schwierigkeiten auf:

1. In der Rekonstruktion der Oberschwingungen aus dem Fourierspektrum liegt eine gewisse Willkür.
2. Die Approximation der Amplitudenfunktionen durch Polynome zweiten Grades ist sehr grob.
3. Die oben erwähnte schwache Zeitabhängigkeit der Frequenz macht die Bestimmung des Phasensprungs problematisch.

Im im folgenden beschriebenen Verfahren versucht man, die ersten beiden Schwierigkeiten zu umgehen, indem der volle Ausdruck (I.1) durch eine geeignete Modellfunktion approximiert wird. Dabei ist es natürlich insbesondere wichtig, für die  $J_k(t)$  ( $k=0,1,2$ ) passende Funktionen zu wählen. Zu diesem Zweck werden im nächsten Abschnitt einige Überlegungen zum physikalischen Ursprung des Signals angestellt.

Die oben erwähnten Probleme bei der Bestimmung des Phasensprungs bleiben aber bestehen.

## II. Die Modellfunktion

Wir machen folgende Annahme über den physikalischen Ursprung des Signals: Der Festkörperlaser strahlt in den Moden  $i$  mit den Frequenzen  $\omega_i = \omega_0 + i \cdot \Delta\omega$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ,  $|i \cdot \Delta\omega| \ll \omega_0$ ,  $\Delta\omega$ , den Abstand zweier benachbarter Moden, nennt man "virtuelle Resonatorfrequenz") um die Zentralfrequenz  $\omega_0$  herum. Zum Mode  $i$  gehört die Feldstärke

$$\vec{E}_i = \vec{e}_i \sin((\omega_0 + i\Delta\omega)t + \psi_i). \quad (\text{II.1})$$

Für den zeitlichen Effektivwert der zugehörigen Intensität

$$I_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \vec{E}_i^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{T_0} \vec{E}_i^2 dt$$

erhält man unter Berücksichtigung von  $|i \cdot \Delta\omega| \ll \omega_0$

$$I_i = \frac{\vec{e}_i^2}{2}. \quad (\text{II.2})$$

Am Meßpunkt registriert man die Gesamtfeldstärke

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (\text{II.3})$$

Berechnet man wie oben unter Berücksichtigung von  $|i \cdot \Delta\omega| \ll \omega_0$  den zeitlichen Effektivwert der resultierenden Gesamtintensität, so erhält man

$$I = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 + \sum_{n>k} \vec{e}_n \vec{e}_k \sin((n-k)\Delta\omega t + \phi_{nk}) \quad (\text{II.4})$$

oder nach Einsetzen von (II.2)

$$I = \sum_i I_i + \sum_{n>k} \alpha_{nk} \sqrt{I_n} \sqrt{I_k} \sin((n-k)\Delta\omega t + \phi_{nk}) \quad (\text{II.5})$$



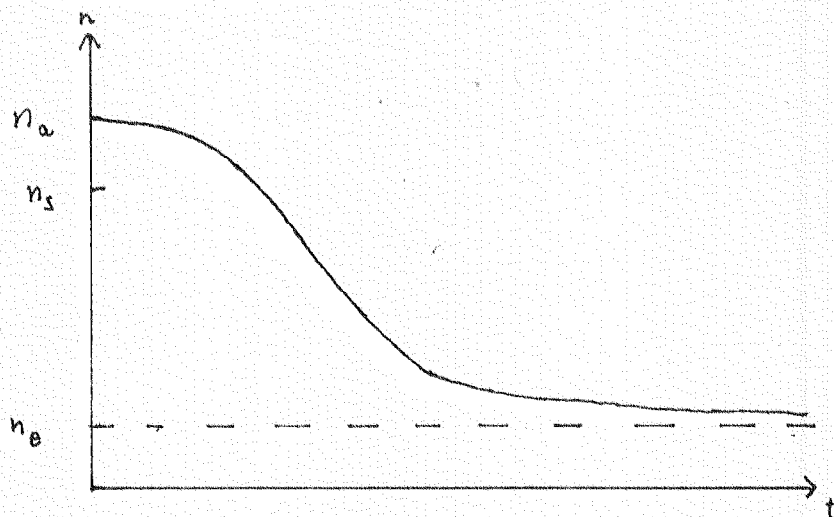
Die Gesamtintensität setzt sich also aus der Summe der Intensitäten der angeregten Moden und einer Fourierreihe mit der Grundfrequenz  $\Delta\omega$  zusammen. Dies erklärt das Zustandekommen von (I.1): die Grundfunktion beinhaltet die Intensitäten der einzelnen Moden, das oszillatorische Verhalten der Intensität beruht auf der Interferenz der Moden. Bei den vorliegenden Signalen zeigt sich nun, daß im Fourierspektrum die Frequenzen  $3\Delta\omega, 4\Delta\omega, \dots$  praktisch nicht mehr auftreten. Nimmt man ferner an, daß sich die einzelnen Intensitätsfunktionen  $I_i$  nicht allzu stark unterscheiden, scheint folgender Ansatz für (I.1) gerechtfertigt:

$$I(t) = J_0(t) + J_1(t) \sin(\Delta\omega t + \phi_1) + J_2(t) \sin(2\Delta\omega t + \phi_2) \quad (\text{II.6})$$

Dabei sind die  $J_k(t)$  Funktionen, die proportional zum Intensitätsverlauf eines einzelnen Modes sind. Das vorliegende Lasersystem wird im sogenannten "Q-switch" Modus betrieben (ohne auf diesen Begriff näher eingehen zu wollen) und damit läßt sich über den Intensitätsverlauf eines einzelnen Modes folgende Aussage machen (vgl. [2]):

$$I_k(t) \sim (n_a - n(t) + n_s \ln \frac{n(t)}{n_a}) \quad (\text{II.7})$$

Dabei ist  $n(t)$  der zeitliche Verlauf der sogenannten "Populationsinversion", der über die Impulsdauer hin qualitativ folgenden Verlauf hat:



Bei  $n = n_s$  erreicht (II.7) den Maximalwert, die Endinversion  $n_e$  ergibt sich als Lösung der transzendenten Gleichung

$$n_a - n_e + n_s \ln \frac{n_c}{n_a} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Wir nehmen nun an, daß der Zerfall der Populationsinversion einen Weibullartigen Verlauf hat, also

$$n(t) = (n_a - n_e) \exp \left( -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta \right) + n_e \quad (\text{II.9})$$

Damit lassen sich die  $J_k$  aus (II.6) durch den Parametersatz  $(n_{a,k}, n_{s,k}, \tau_k, \beta_k)$  ( $k=0,1,2$ ) beschreiben und haben die Form

$$J_k(t) = (n_{a,k} - n_k(t) + n_{s,k} \ln \frac{n_k(t)}{n_{a,k}}) \quad (\text{II.10})$$

wo

$$n_k(t) = (n_{a,k} - n_{e,k}) \exp \left( -\left(\frac{t}{\tau_k}\right)^{\beta_k} \right) + n_{e,k} \quad (\text{II.11})$$

$n_{e,k}$  ist dabei die Lösung von

$$n_{a,k} - n_{e,k} + n_{s,k} \ln \frac{n_{e,k}}{n_{a,k}} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Läßt man zusätzlich noch  $\Delta\omega$ ,  $2\Delta\omega$ ,  $\phi_1$  und  $\phi_2$  als Parameter frei, wird die Modellfunktion (II.6) also durch 16 Parameter beschrieben und durch ein Fletcher -Optimierungsverfahren im least-squares Sinne an die gemessene Intensität angepaßt.

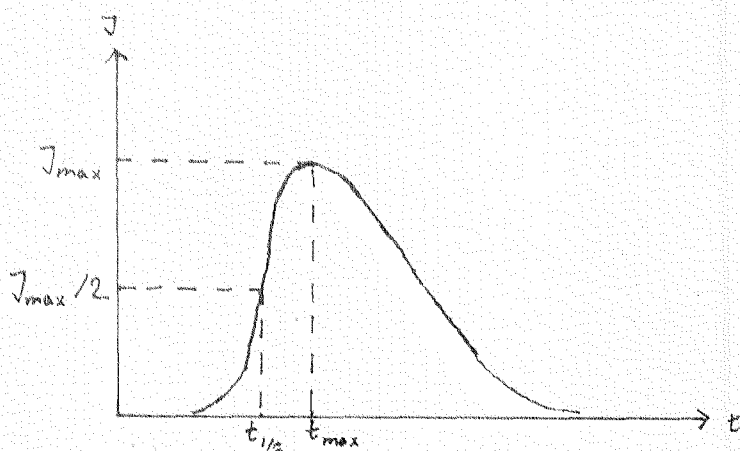
### III. Anfangswerte, Verfahren 2, Verfahren 3

Da die Güte der Approximation entscheidend von der Wahl günstiger Startwerte für die Parameteroptimierung abhängt, wurde ein Verfahren zur Ermittlung geeigneter Startwerte entwickelt, das hier kurz beschrieben werden soll.

Aus dem Fourierspektrum des Signals werden zunächst durch Rücktransformation der entsprechenden Spektralbereiche Grundfunktion, erste und zweite Oberschwingung rekonstruiert. Es sei darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zu Verfahren 1 nicht diese rekonstruierten Funktionen, sondern das volle Signal approximiert wird und die Rekonstruktionen nur zur Ermittlung geeigneter Anfangswerte für die Iteration in der im folgenden beschriebenen Weise benötigt werden.

Zunächst sollen geeignete Startwerte für den Parametersatz  $(n_a, n_s, \tau, \beta)$  ermittelt werden (da das Verfahren für alle  $k$ -Werte identisch ist, wird der  $k$ -Index weggelassen).

Die Amplitudenfunktion  $J(t)$  hat folgendes Aussehen (im Falle der rekonstruierten Oberschwingungen ist dies die Einhüllende der rekonstruierten Funktion)



$(J_{max}, t_{max})$  und  $(J_{max}/2, t_{1/2})$  werden den Rekonstruktionen entnommen und dienen als Eingäbedaten zur Startwertbestimmung. Wir betrachten das Intervall  $0 \leq t \leq t_{max}$ .  $n(t)$  ist monoton fallend und es gilt auf diesem Intervall

$$n_a \geq n(t) \geq n_s \tag{III.1}$$

wobei (s.o.)  $J(n)$  für  $n=n_s$  maximal wird, also

$$n(t_{max}) = n_s \tag{III.2}$$

Nun gilt auf diesem Intervall

$$\left| \frac{n - n_a}{n_a} \right| = \frac{n_a - n}{n_a} \leq \frac{n_a - n_s}{n_a} = \left| \frac{n_s - n_a}{n_a} \right| \quad (\text{III.3})$$

Die bisherigen Untersuchungen haben ergeben, daß folgende Relation angenommen werden kann:

$$n_s = \kappa \cdot n_a \quad (\text{III.4})$$

wo

$$\kappa \approx 0.93 \quad (\text{III.5})$$

(inwieweit diese Relation mit der physikalischen Relevanz des Ansatzes (II.6), (II.10) zu tun hat, kann hier nicht entschieden werden).

Deshalb gilt für die relative Abweichung von  $\ln \frac{n_s}{n_a}$  zu seiner linearen Näherung  $\frac{n_s - n_a}{n_a}$ :

$$\frac{\left| \ln \frac{n_s}{n_a} - \frac{n_s - n_a}{n_a} \right|}{\left| \ln \frac{n_s}{n_a} \right|} = 0.035.$$

Wegen (III.3) werden wir damit zur Anfangswertermittlung von  $(n_a, n_s, \tau, \beta)$  auf  $[0, t_{\max}]$  den natürlichen Logarithmus in (II.10) durch seine lineare Näherung ersetzen und erhalten so

$$J = n_a - n + n_s \frac{n - n_a}{n_a} = (n_a - n) \left( 1 - \frac{n_s}{n_a} \right) \quad (\text{III.6})$$

Aus  $J(n_s) = J_{\max}$  erhalten wir aus (II.10) und mit (III.4) folgende Anfangswerte für  $n_a$  und  $n_s$ :

$$n_a = \frac{J_{\max}}{1 - \kappa + \kappa \ln \kappa} \quad (\text{III.7})$$

$$n_s = \kappa \cdot n_a \quad (\text{III.8})$$

Daraus bestimmt man durch Lösung von (II.8) die zugehörige Endinversion  $n_e$ .

Zur Bestimmung von  $\tau$  und  $\beta$  benötigt man zunächst die Halbwertsinversion  $n_{1/2}$ , die nach (III.6) die Beziehung

$$(n_a - n_{1/2}) \left(1 - \frac{n_s}{n_a}\right) = J_{\max/2}$$

erfüllt.

Daraus und mit (III.7) und (III.8) erhält man

$$n_{1/2} = \frac{J_{\max}}{2} \frac{1 - \kappa - \kappa \ln \kappa}{(1 - \kappa + \kappa \ln \kappa)(1 - \kappa)} \quad (\text{III.9})$$

Aus (II.11) ergibt sich

$$\tau = \left[ \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n - n_e} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}} t \quad (\text{III.10})$$

Daraus folgt

$$\left[ \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n_s - n_e} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}} t_{\max} = \left[ \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n_{1/2} - n_e} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}} t_{1/2} .$$

Löst man dies nach  $\beta$  auf, so erhält man folgenden Anfangswert für  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\ln \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n_{1/2} - n_e} \right) - \ln \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n_s - n_e} \right)}{\ln \left( t_{1/2} / t_{\max} \right)} \quad (\text{III.11})$$

Dies kann man für das Wertepaar  $(n_s, t_{\max})$  in (III.10) einsetzen und erhält so als Anfangswert für  $\tau$ :

$$\tau = \left[ \ln \left( \frac{n_a - n_e}{n_s - n_e} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}} t_{\max} \quad (\text{III.12})$$

Den Startwert für  $\Delta\omega$  bestimmt man einfach aus dem entsprechenden Peak im Fourierspektrum, der Startwert für die Frequenz der zweiten Oberschwingung ist dementsprechend doppelt so groß. Zur Bestimmung von Startwerten für die Phasen geht man folgendermaßen vor (da auch hier das Verfahren für die erste und die zweite Oberschwingung völlig identisch ist, werden Indices wieder weggelassen):

Aus der rekonstruierten Oberschwingung bestimmt man als Referenzzeit  $t_{ref}$  den Zeitpunkt eines aufsteigenden Nulldurchgangs. Daraus ermittelt man den ersten Zeitpunkt  $\tilde{t}$  eines aufsteigenden Nulldurchgangs nach dem Ursprung (s. Abbildung)



$$\tilde{t} = t_{ref} - [t_{ref}/T] \cdot T \quad (\text{III.13})$$

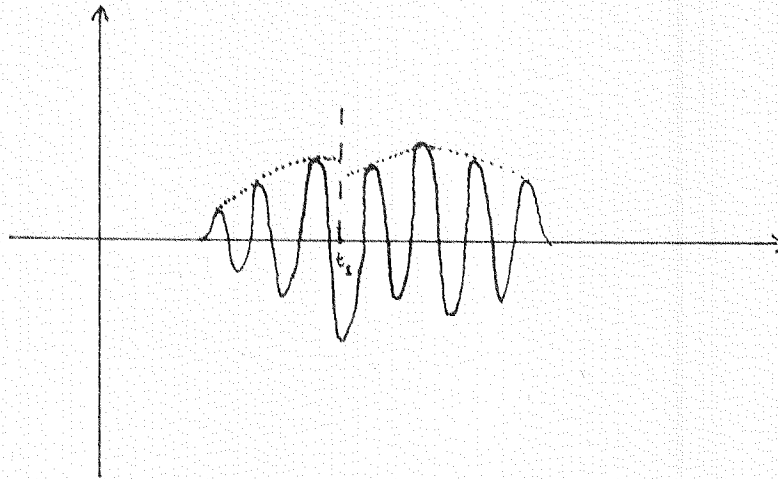
$[x]$  bezeichnet den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl  $x$  und es gilt  $T = 2\pi/\omega$ , wo  $\omega$  der Startwert der Frequenz ist. Dann berechnet man den Anfangswert der Phase wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{t} > T/2 : \quad \phi &= \pi - \omega(\tilde{t} - T/2) \\ \tilde{t} \leq T/2 : \quad \phi &= -\omega\tilde{t} + 2\pi \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

(damit sind die Phasen auf das Intervall  $(0, 2\pi]$  beschränkt). Die Idee ist nun, zur Sprungbestimmung rechts und links vom Sprung die Modellfunktion (II.6), (II.10) an das gemessene Signal anzupassen. Dazu haben sich zwei Verfahren als zweckmäßig erwiesen. (man beachte, daß "Verfahren 1" schon das Vorgehen in [1] bezeichnet)

### Verfahren 2

In der Hoffnung, mit (II.6), (II.10) Amplitudenmodelle zu besitzen, die das tatsächliche Signal hinreichend gut beschreiben, wählt man links und rechts vom Sprung (Zeitpunkt:  $t_s$ ) zwei Intervalle  $[t_l, t_s]$  bzw.  $[t_s, t_r]$ , die möglichst klein sein sollen, so daß auf ihnen die Frequenzen als konstant angenommen werden können. (es kann dabei bei der oben beschriebenen Bestimmung der Anfangswerte zweckmäßig sein,  $\Delta\omega$  nicht aus der Lage des Peaks im Fourierspektrum, sondern aus der Lage der Nulldurchgänge im betrachteten Intervall zu bestimmen). Man bestimmt nach dem oben beschriebenen Verfahren die Eingabedaten für den Anfangswertalgorithmus, wobei die Referenzzeiten aus den betrachteten Intervallen stammen müssen und es durchaus vorkommen kann, daß (insbesondere im Intervall nach dem Sprung) Eingabegrößen wie die Halbwertszeiten  $t_{1/2}$  geschätzt werden müssen (vgl. hierzu die Abbildung)



Damit wird die Iteration gestartet und die Amplituden- und Phasensprünge werden nach Abschluß der Iteration wie folgt berechnet:

$$\Delta J_k = J_k^{\text{vor}}(t_s) - J_k^{\text{nach}}(t_s) \quad (k=0,1,2) \quad (\text{III.15})$$

$$\Delta \phi_k = (\omega_k^{\text{vor}} - \omega_k^{\text{nach}}) t_s + \phi_k^{\text{vor}} - \phi_k^{\text{nach}} \quad (k=1,2) \quad (\text{III.16})$$

Vom Prinzip her ist damit auch die Bestimmung eines eventuellen Sprunges in der Grundfunktion möglich.



### Verfahren 3

Ist man sicher, daß in der Grundfunktion kein Sprung vorliegt, ist es zweckmäßig, sie auf dem Intervall  $[t_\ell, t_r]$  an die rekonstruierte Grundfunktion anzupassen und den so gewonnenen Parametersatz  $(n_{a,0}, n_{s,0}, \tau_0, \beta_0)$  bei der Anpassung an die Gesamtintensität auf  $[t_\ell, t_s]$  bzw.  $[t_s, t_r]$  festzuhalten. Ansonsten läuft das Verfahren wie oben beschrieben ab.

Unabhängig vom bisher beschriebenen Startwertalgorithmus besteht natürlich auch die Möglichkeit, die Startwerte direkt einzulesen oder einzugeben, falls geeignete Werte für sie vorliegen.

### IV. Beispiele

Es wurden an drei sprungbehafteten Laserimpulsen Untersuchungen durchgeführt, deren Resultate in den nachfolgenden Abbildungen festgehalten sind (die erste Ziffer in der Numerierung der Abbildungen bezieht sich immer auf den entsprechenden Puls).

Puls 1 enthält die Originaldaten eines sprungbehafteten Laserimpulses, die auch in [1] zur Auswertung vorlagen, die Abbildungen beziehen sich daher nur auf Verfahren 3, für Abbildungen zu Verfahren 1 sei auf [1] verwiesen.

Aus drei weiteren sprungfreien Datensätzen, nämlich einer Grundfunktion (Datensatz "Basiskurve"), einer ersten und einer zweiten Oberschwingung (Datensätze "Ripple 1" bzw. "Ripple 2") wurden in der im folgenden beschriebenen Weise zwei weitere Pulse mit konstruierten Sprüngen gebildet, mit deren Hilfe die Wirksamkeit der Verfahren getestet wurde.

Puls 2 wurde aus der Addition der drei Datensätze gebildet, wobei ab dem Sprungzeitpunkt  $t_s = 50$  die Daten aus der ersten und zweiten Oberschwingung mit dem Faktor 0.7 multipliziert wurden. Der Amplitudensprung bestand also aus einer relativen Amplitudenabnahme um den Faktor 0.7 in den beiden Oberschwingungen, ein Phasensprung liegt nicht vor.

Puls 3 wurde ebenfalls aus der Addition der drei Datensätze gebildet, wobei zum Sprungzeitpunkt  $t_s = 50.309$  in den beiden Oberschwingungen durch Herausnahme der Intervalle  $[50.309, 53.321]$  (im Ripple 1) bzw.  $[50.309, 51.939]$  (im Ripple 2) Phasensprünge erzeugt wurden. Aus den lokalen Frequenzen errechnen sich diese Phasensprünge zu  $\Delta\phi_1 = 0.26\text{rad}$  (Ripple 1) und  $\Delta\phi_2 = 0.59\text{rad}$  (Ripple 2), wobei entsprechend unserer Konvention aus Kapitel I diese Sprünge die Differenz der Phasen vor und nach dem Sprung bezeichnen.

Zu Puls 1:

In den Abbildungen 1.2 und 1.3 sind die Originalkurve und die nach Verfahren 3 ermittelte Modellfunktion der Form (II.6) in den betrachteten Intervallen um den Sprung herum aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Approximationsfähigkeit des Ansatzes (II.6) relativ gut ist. Um Anhaltspunkte für die Oberschwingungen zu bekommen, wurden in den Abbildungen 1.4 bis 1.7 entsprechende Grafiken erstellt, wobei die erste und zweite Oberschwingung durch Rücktransformation des zugehörigen Frequenzanteils im Fourierspektrum erhalten wurden und mit den entsprechenden Anteilen  $J_1(t)\sin(\omega_1 t + \phi_1)$  in der Modellfunktion (II.6) und den Amplitudenfunktionen  $J_1(t)$  allein verglichen wurden.

Insbesondere der Vergleich der Amplitudenfunktionen mit den entsprechenden Abbildungen in [1] zeigt die deutlich verbesserte Approximationsfähigkeit des Ansatzes (II.10)-(II.12) gegenüber der polynomialen Amplitudenmodellierung in Verfahren 1.

Zu Puls 2:

In den Abbildungen 2.2 und 2.3 sind die Resultate aus Verfahren 1 festgehalten, wobei insbesondere deutlich wird, daß kaum ein Unterschied zwischen der Verwendung von Polynomen 2. oder 4. Grades zur Amplitudenmodellierung besteht. Man beachte, daß in diesen Plots nicht Ripple 1 bzw. 2 aufgetragen sind, sondern die aus Puls 2 über das Frequenzspektrum rekonstruierter Oberschwingungen. Die ermittelten relativen Amplitudenabnahmen betragen 0.57 für die erste Oberschwingung

(Ripple 1) bzw. 0.20 in der zweiten Oberschwingung (Ripple 2) (der "wahre Wert" bei beiden Oberschwingungen betrug 0.7). Die Anpassung der vollen Modellfunktion (II.6) nach Verfahren 2 führte insbesondere nach dem Sprung zu schlechten Resultaten (Abb. 2.5). Eine deutliche Verbesserung trat bei der Anpassung nach Verfahren 3 ein (Abb. 2.6 bis Abb. 2.11). Insbesondere zeigen die Plots der Oberschwingungen (Abb. 2.8 bis Abb. 2.11) eine gegenüber Verfahren 1 (s. Abb. 2.2 und Abb. 2.3) erheblich verbesserte Anpassungsfähigkeit der Amplitudenfunktionen  $J_k(t)$ , die sich auch in den ermittelten Amplitudenabnahmen zeigt: 0.54 bei Ripple 1 und 0.75 bei Ripple 2.

Zu Puls 3:

Die Grenzen aller drei Verfahren liegen bei der Bestimmung der Phasensprünge: Da in allen Verfahren links und rechts vom Sprung jeweils über mehrere Perioden gemittelte Frequenzen und Phasen bestimmt werden, wobei in Verfahren 1 diese Mittelung explizit durchgeführt wird, in Verfahren 2 und Verfahren 3 die "Mittelung" im Iterationsprozeß geschieht, werden an den Rändern und damit insbesondere an der Sprungstelle immer Diskrepanzen zur dort herrschenden "lokalen" Frequenz bzw. Phase auftreten, die die Bestimmung des Phasensprungs in der gewünschten Genauigkeit unmöglich machen. Dies wird besonders deutlich in den Abbildungen 3.5 bis 3.8, in denen für Verfahren 3 neben Ripple 1 bzw. 2 und den Amplituden  $J_k(t)$  die entsprechenden Anteile  $J_k(t) \sin(\omega_k t + \phi_k)$  aufgetragen sind.

Dementsprechend stehen den oben genannten tatsächlichen Sprüngen bei Verfahren 1 die ermittelten Sprünge  $\Delta\phi_1=6.18$  (Ripple 1) und  $\Delta\phi_2=0.82$  (Ripple 2) und bei Verfahren 3  $\Delta\phi_1=0.48$  und  $\Delta\phi_2=1.70$  gegenüber.

Ein Vergleich der Abb. 3.2 und 3.3 mit den Abb. 3.5 bis 3.8 bestätigt allerdings nochmals die gegenüber Verfahren 1 verbesserte Bestimmung der Amplitudenfunktion bei Verfahren 3.

- [1] Vorläufiger Bericht der Arbeitsgruppe Technomathematik zur Identifikation von Amplituden- und Phasensprüngen
- [2] H. Weber, Laserphysik; Manuskript zur Vorlesung im WS 84/85, Universität Kaiserslautern
- [3] R. Fletcher: "A Modified Marquardt Subroutine for Non-linear Least Squares"  
~~U.K.A.F.C. Research Group, Atomic Energy Research Establishment, Harwell~~  
~~May 1971~~ Report R.6790, AERE, Harwell, England (1971)

Für die Durchföhrung der aufangrunden Programmierarbeiten danke ich  
Herrn B. Claus sehr herzlich.

Eine programmierte Version des Optimierungsverfahrens [3] wurde zum freundlichen  
von Dr. K. Schreier zur Verfügung gestellt. Auch dafür sei gedankt.

Abb. 1.1

PULS1

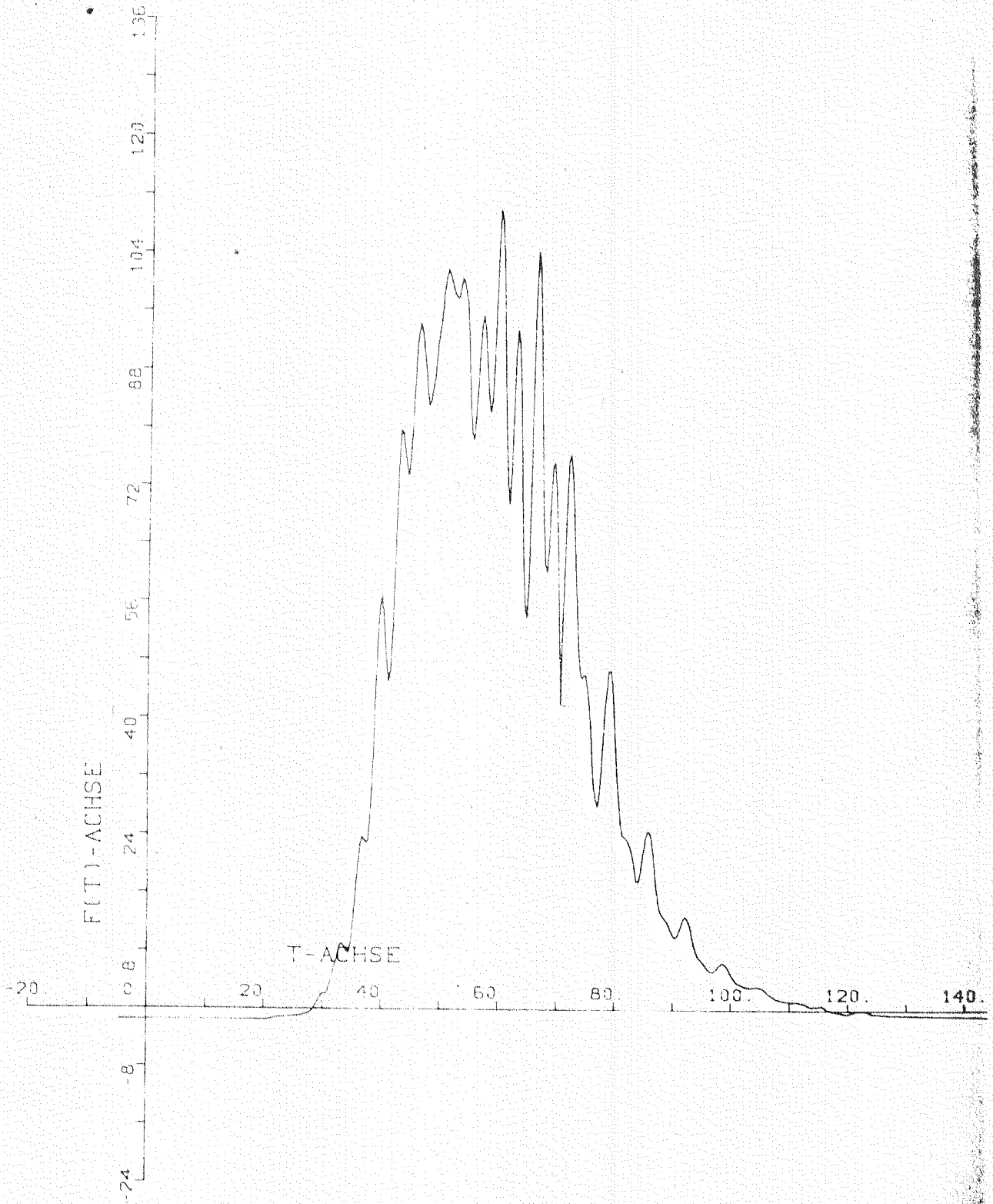


Abb. 1.2

Puls 1, Verfahren 3

Originalkurve und Modellfunktion (—○—) links vom Sprung

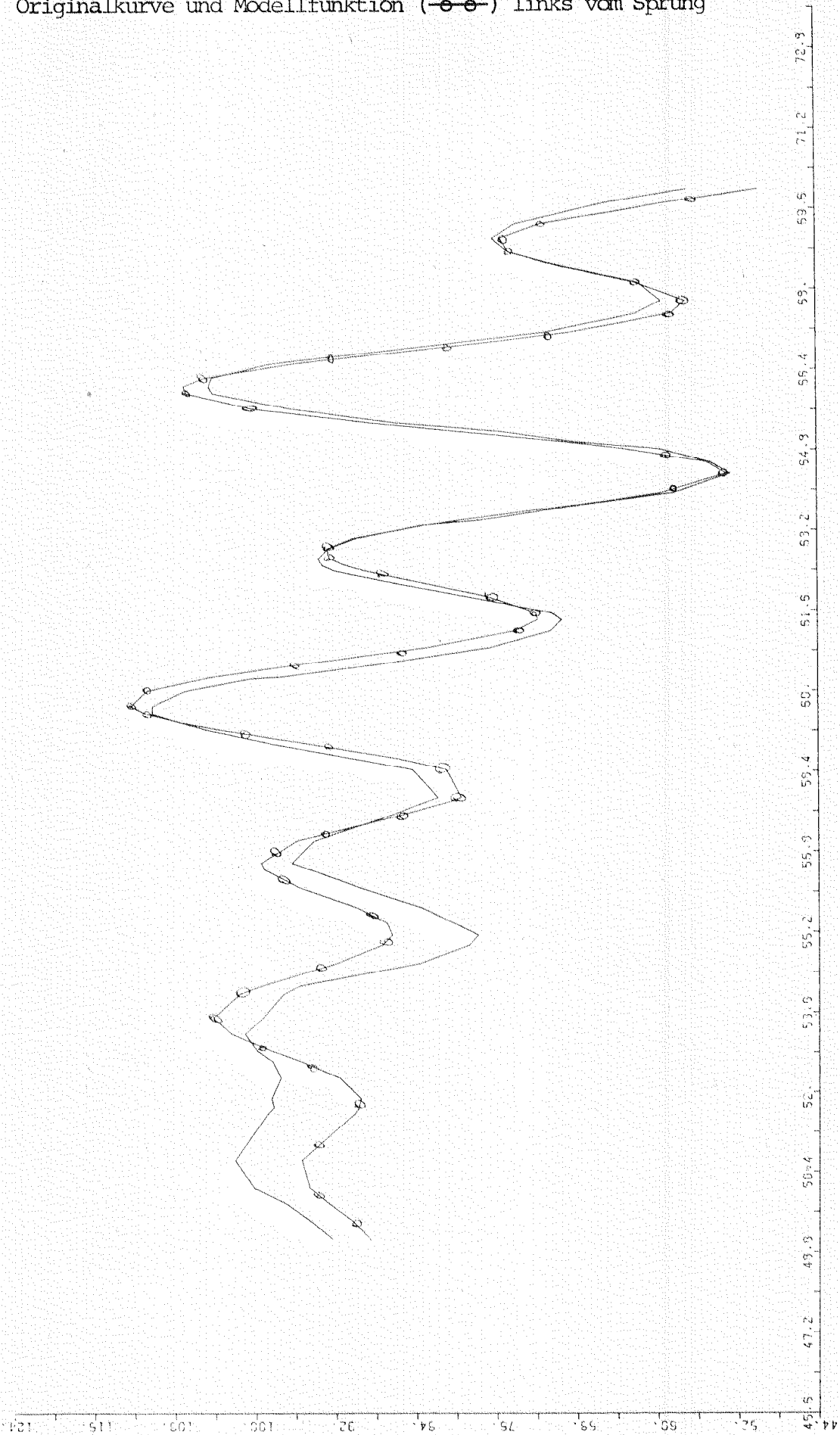


Abb. 1.3

Puls 1, Verfahren 3

Originalkurve und Modellfunktion (—○—) rechts vom Sprung

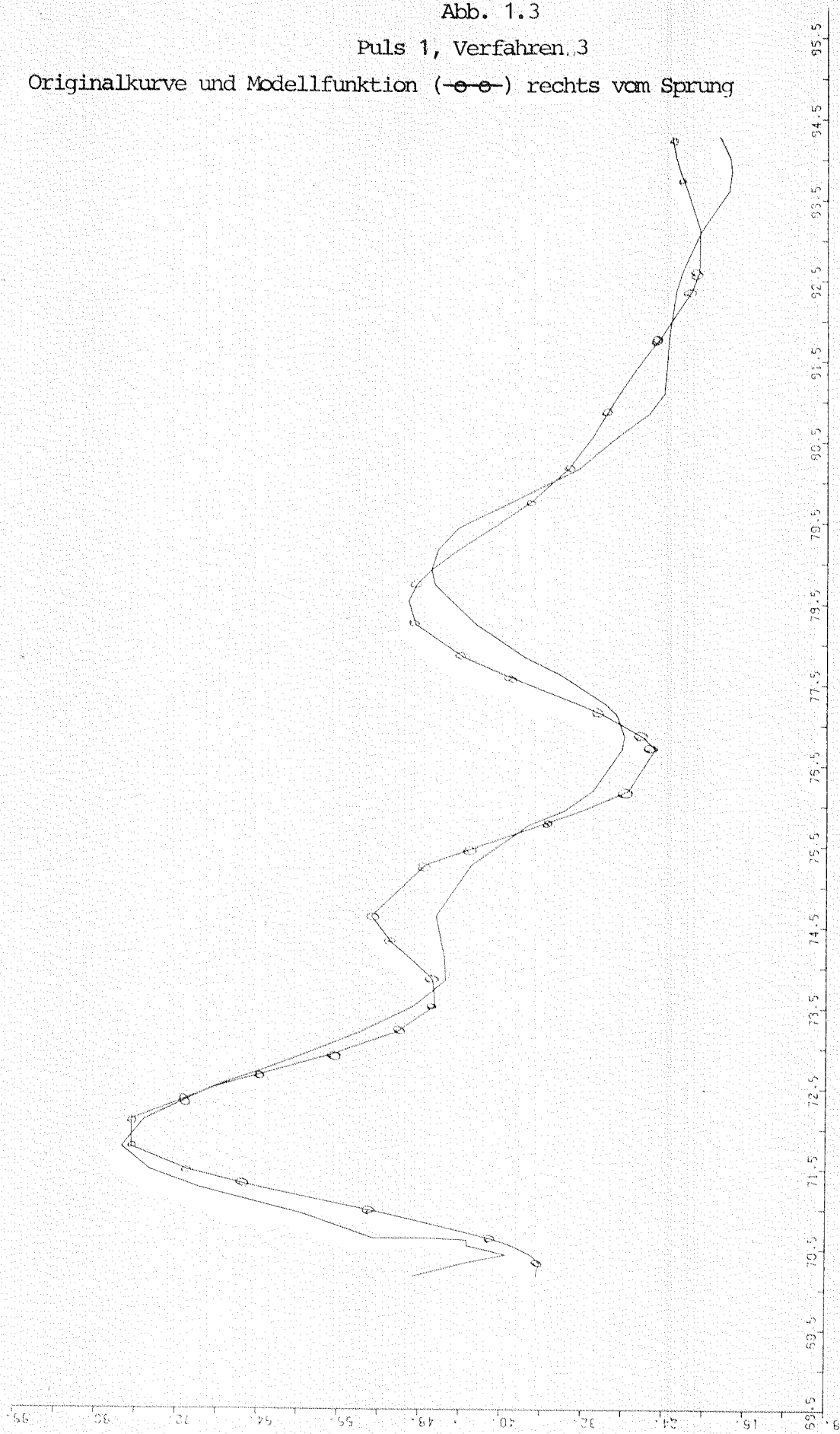




Abb. 1.4

Puls 1, Verfahren 3

Rekonstruierte 1. Oberschwingung, zugehörige Modellfunktion (---) und Amplitudenfunktion vor Sprung

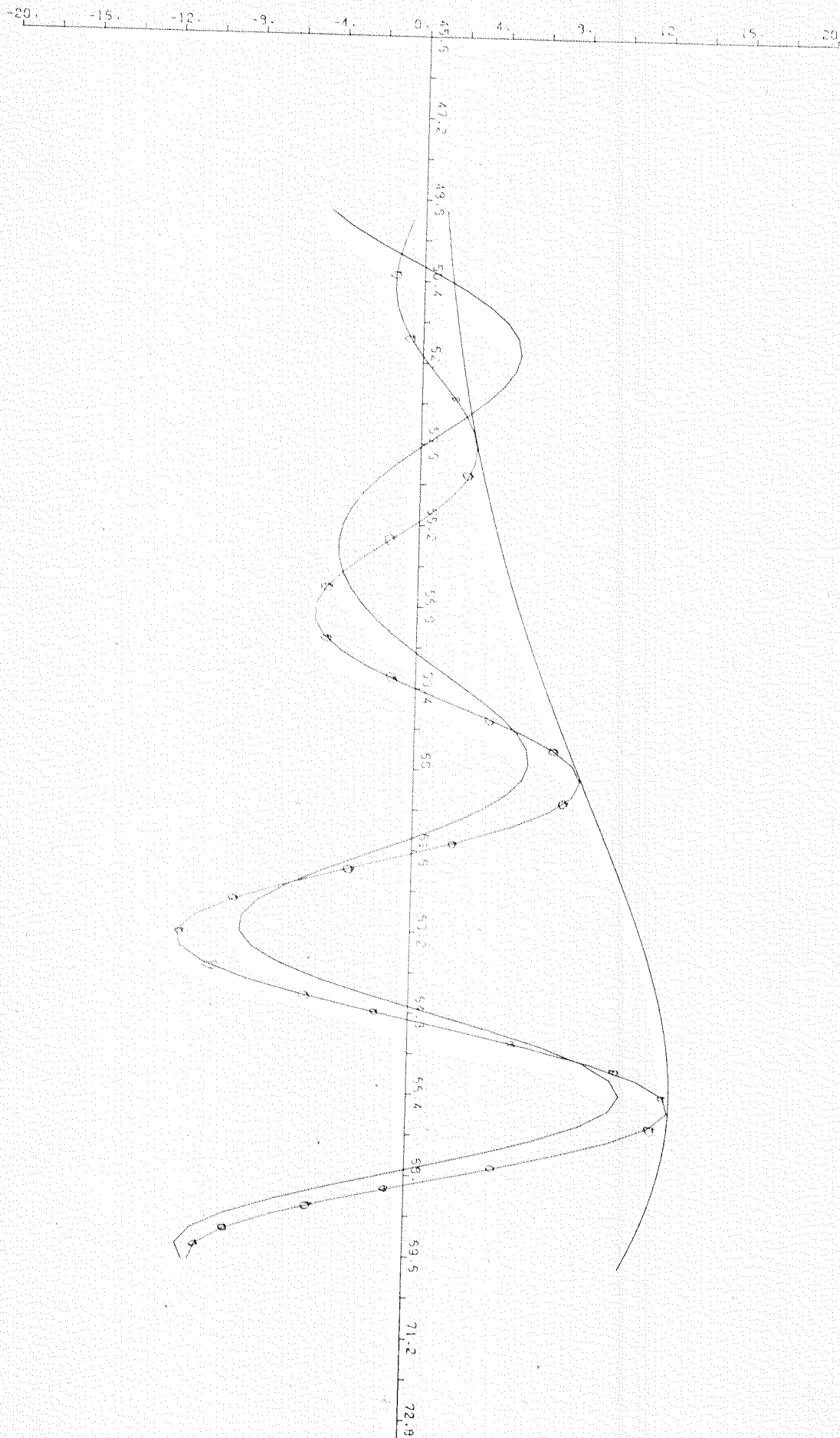


Abb. 1.5

Puls 1, Verfahren 3

Rekonstruierte 1. Oberschwingung, zugehörige Modellfunktion (—) und Amplitudenfunktion nach Sprung

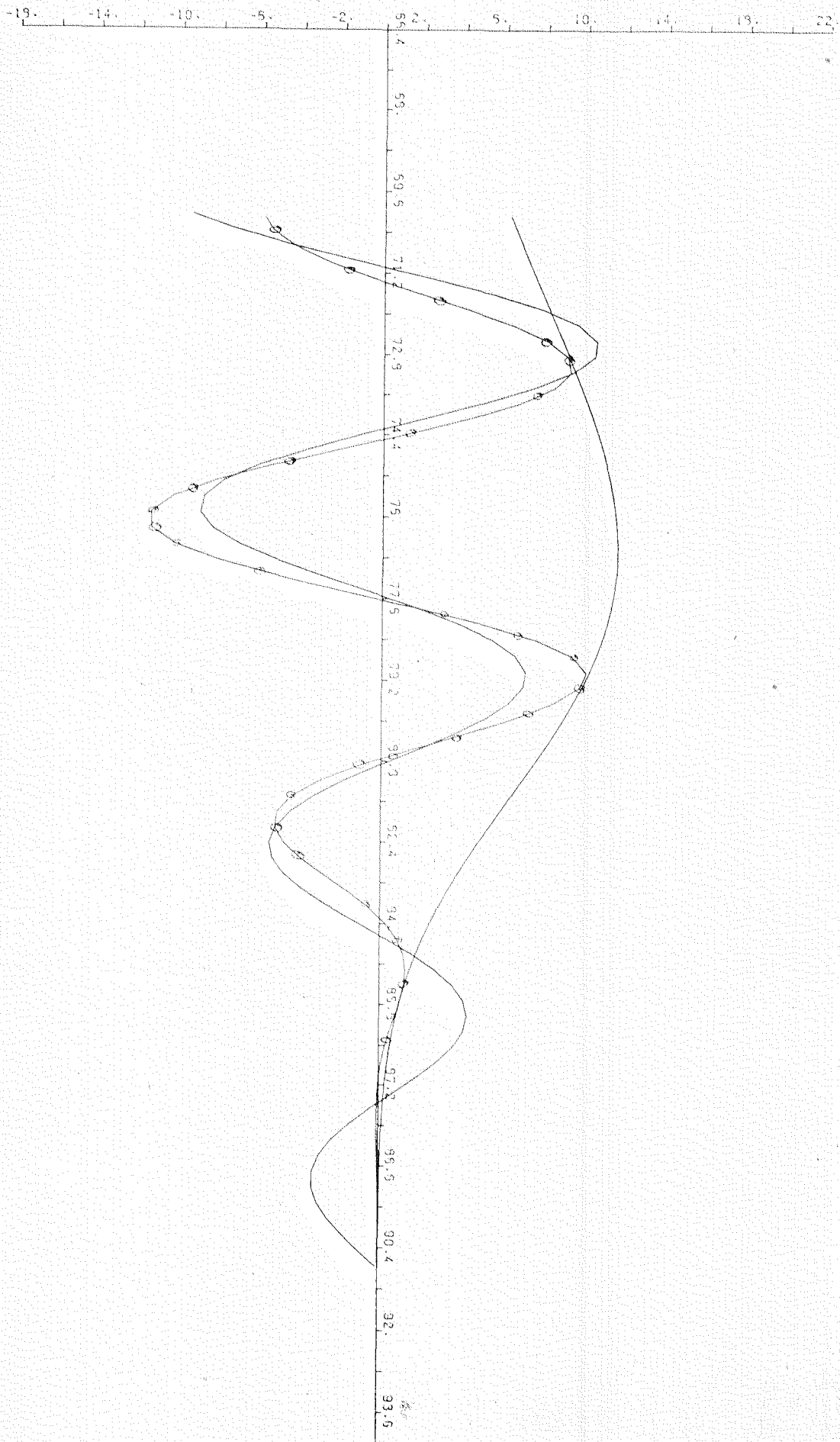
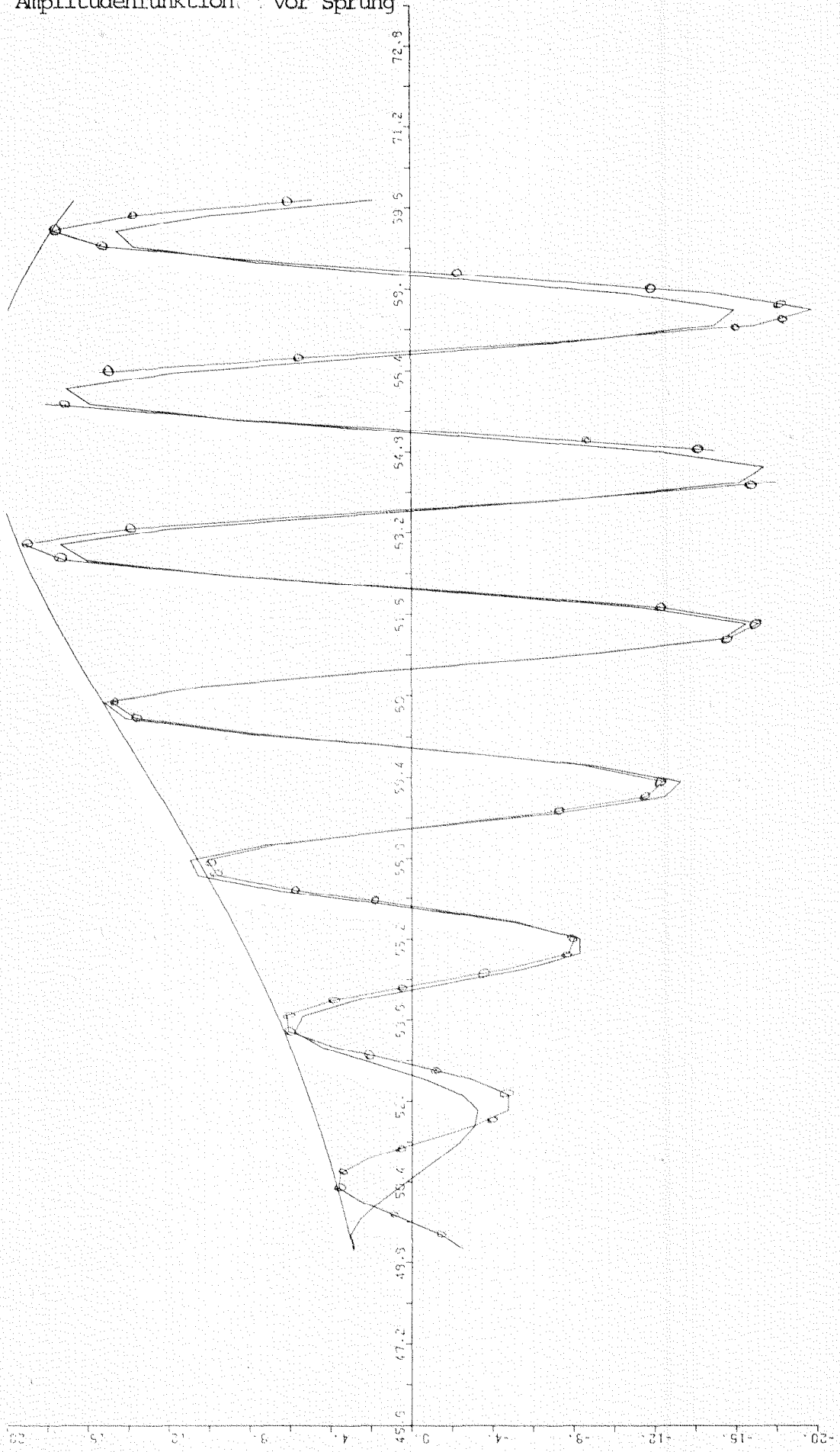


Abb. 1.6

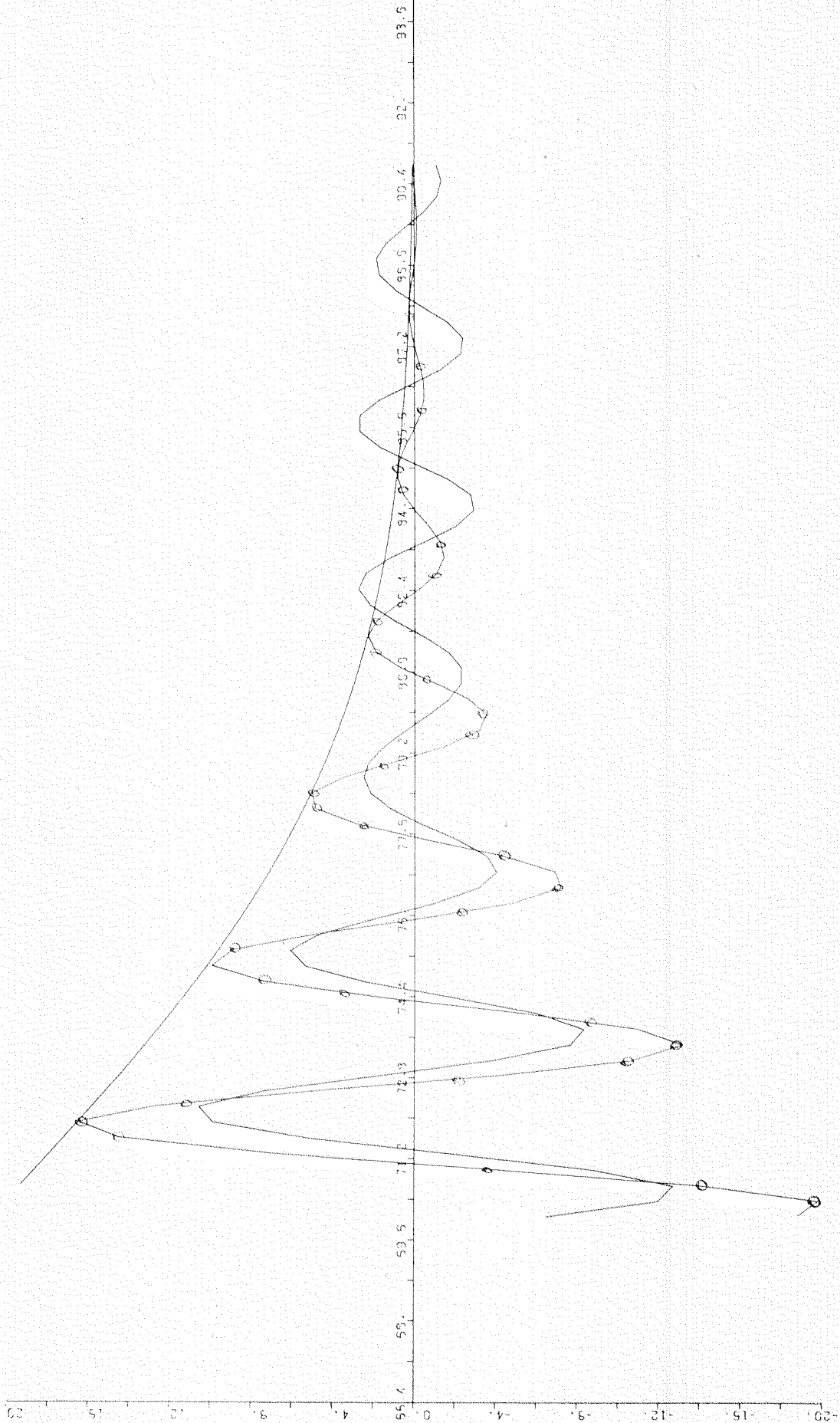
Puls 1, Verfahren 3

Rekonstruierte 2. Oberschwingung, zugehörige Modellfunktion (—○—) und Amplitudenfunktion vor Sprung



Puls 1, Verfahren 3

Rekonstruierte 2. Oberschwingung, zugehörige Modellfunktion (—○—) und Amplitudenfunktion nach Sprung



Puls 2

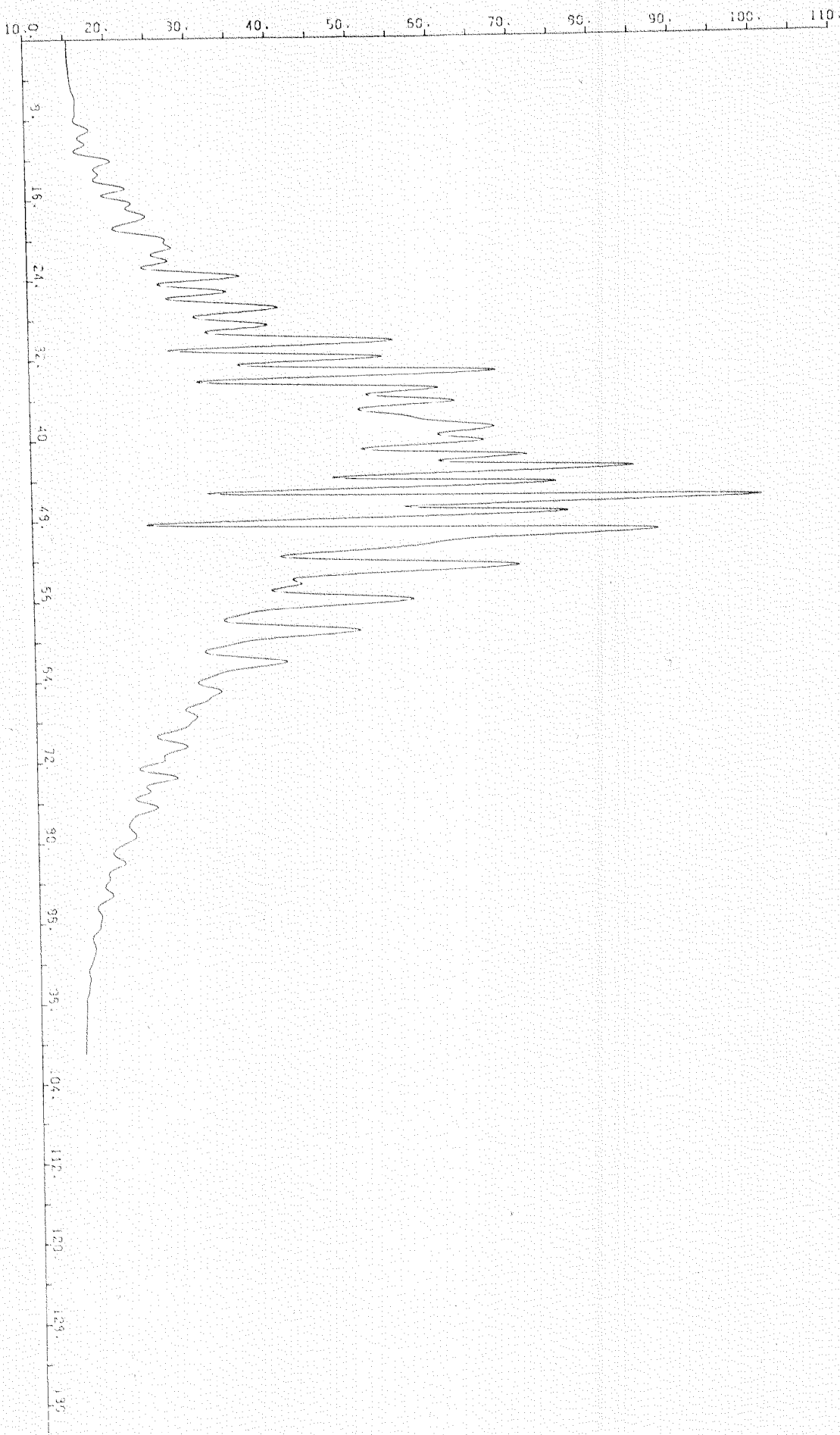


Abb. 2.2

Puls 2, Verfahren 1

Rekonstruierte 1. Oberschwingung vor und nach Sprung, zugehörige Amplitudenfunktionen (Modellierung als Polynome 2. und 4. Grades)

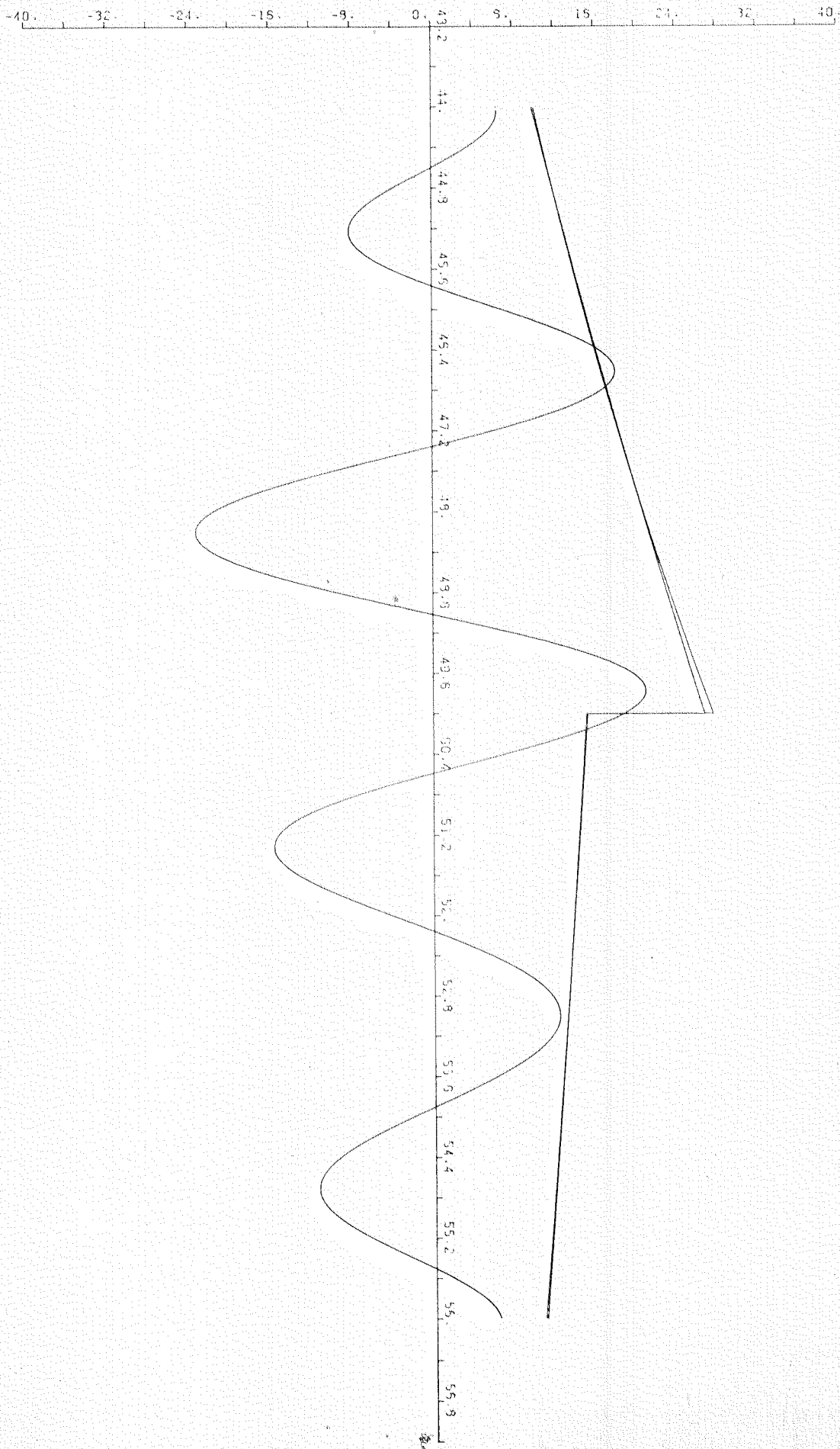
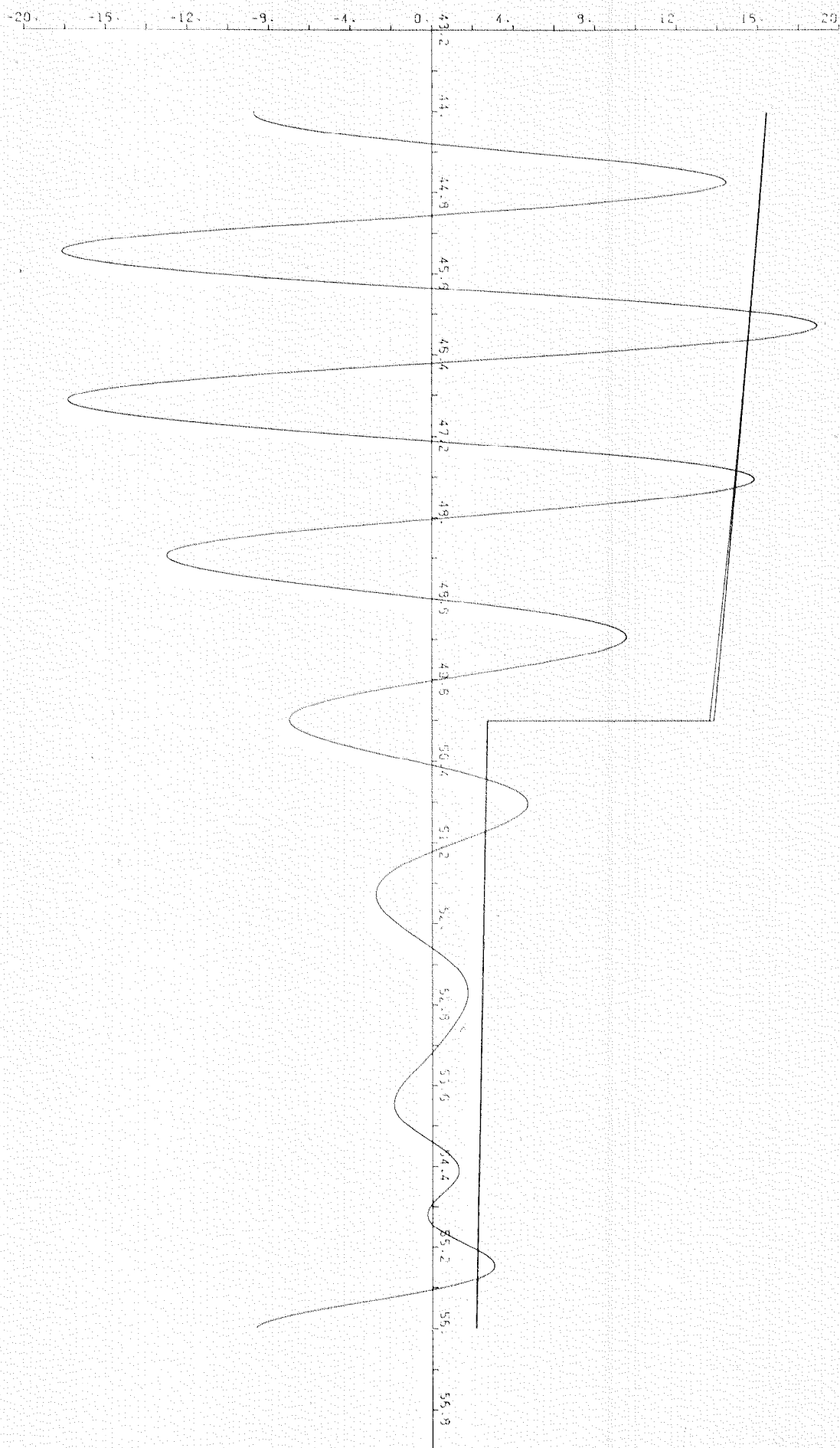


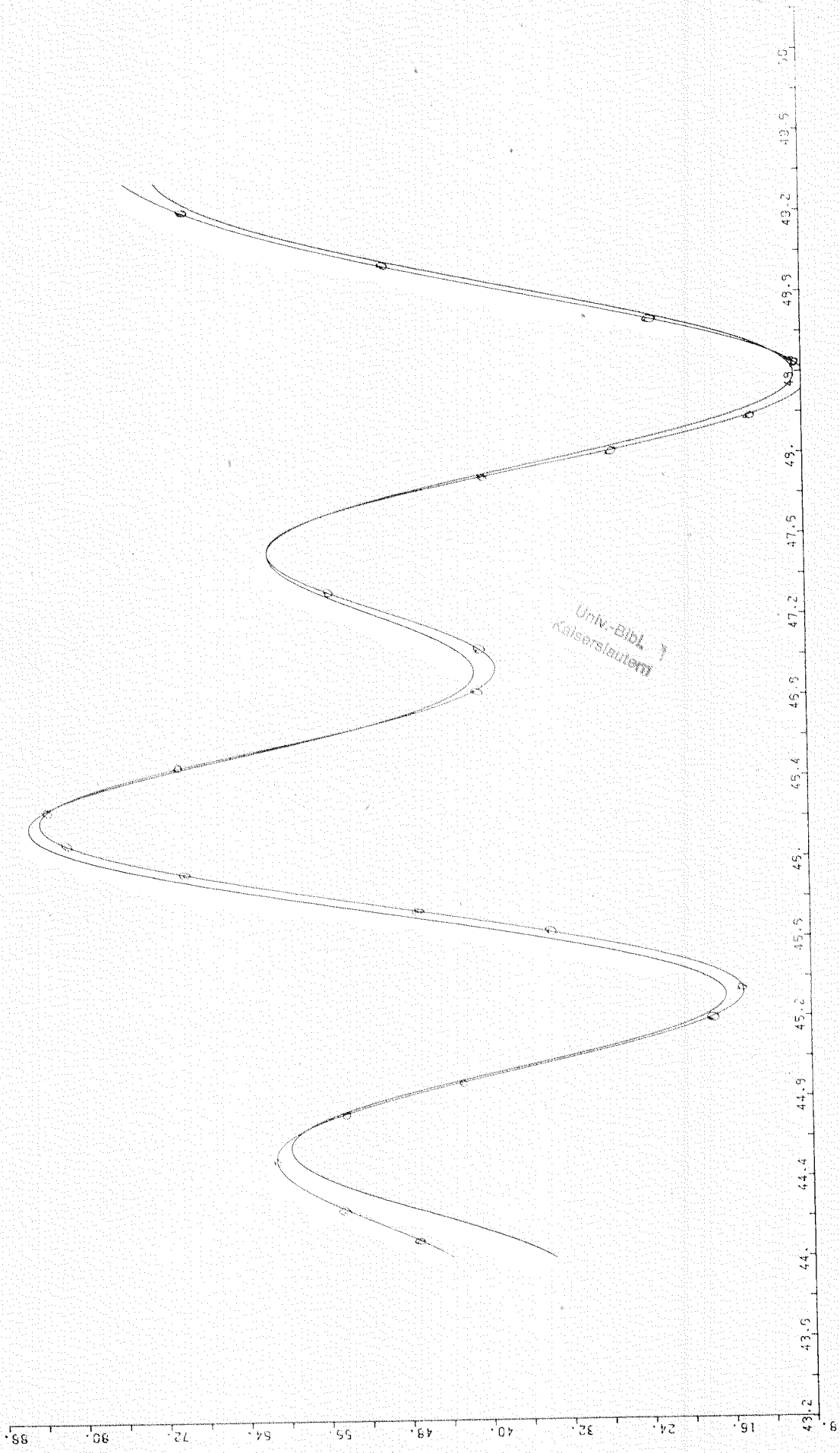
Abb. 2.3

Puls 2, Verfahren 1

Rekonstruierte 2. Oberschwingung vor und nach Sprung, zugehörige Amplitudenfunktionen (Modellierung als Polynome 2. und 4. Grades)

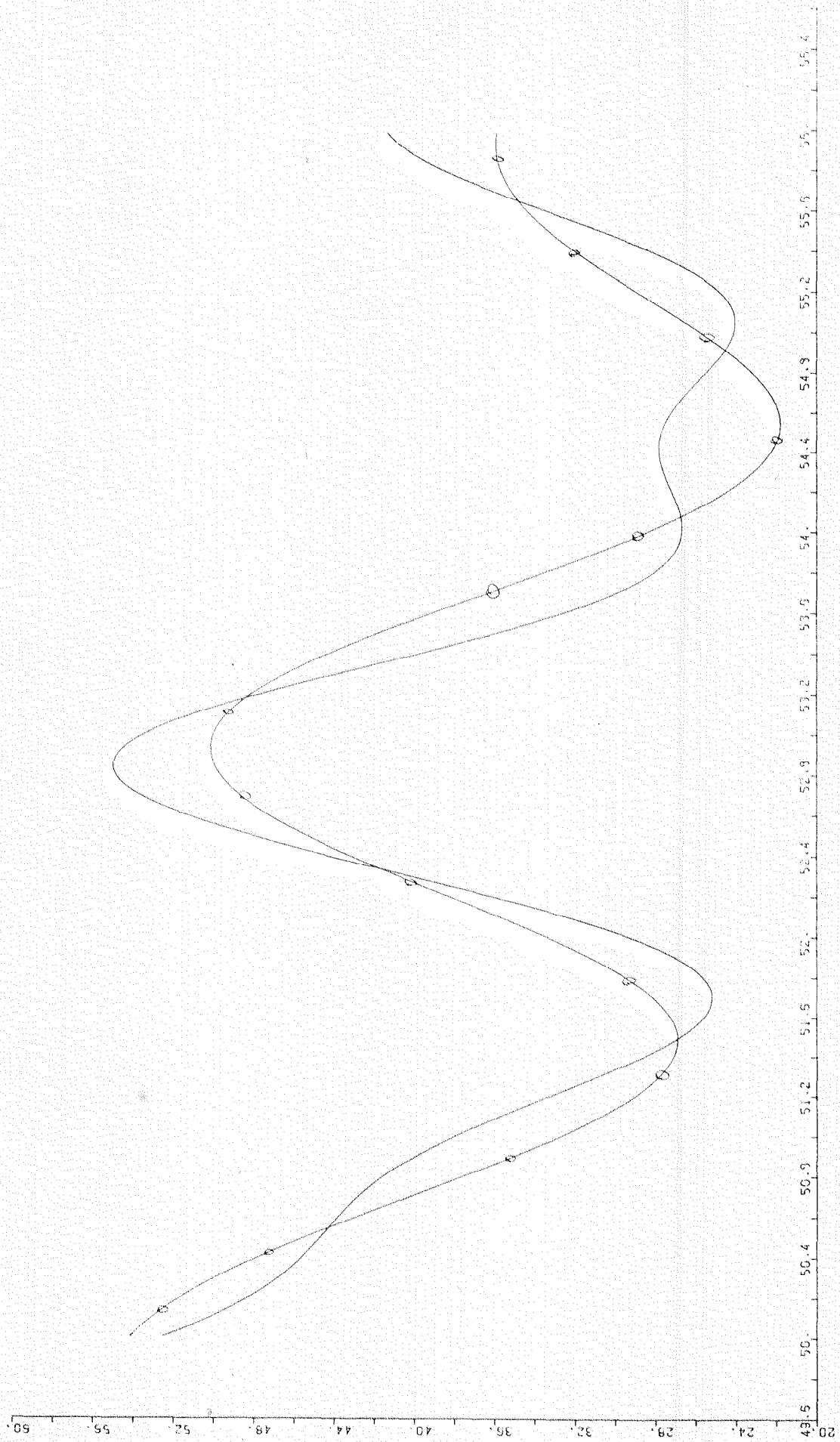






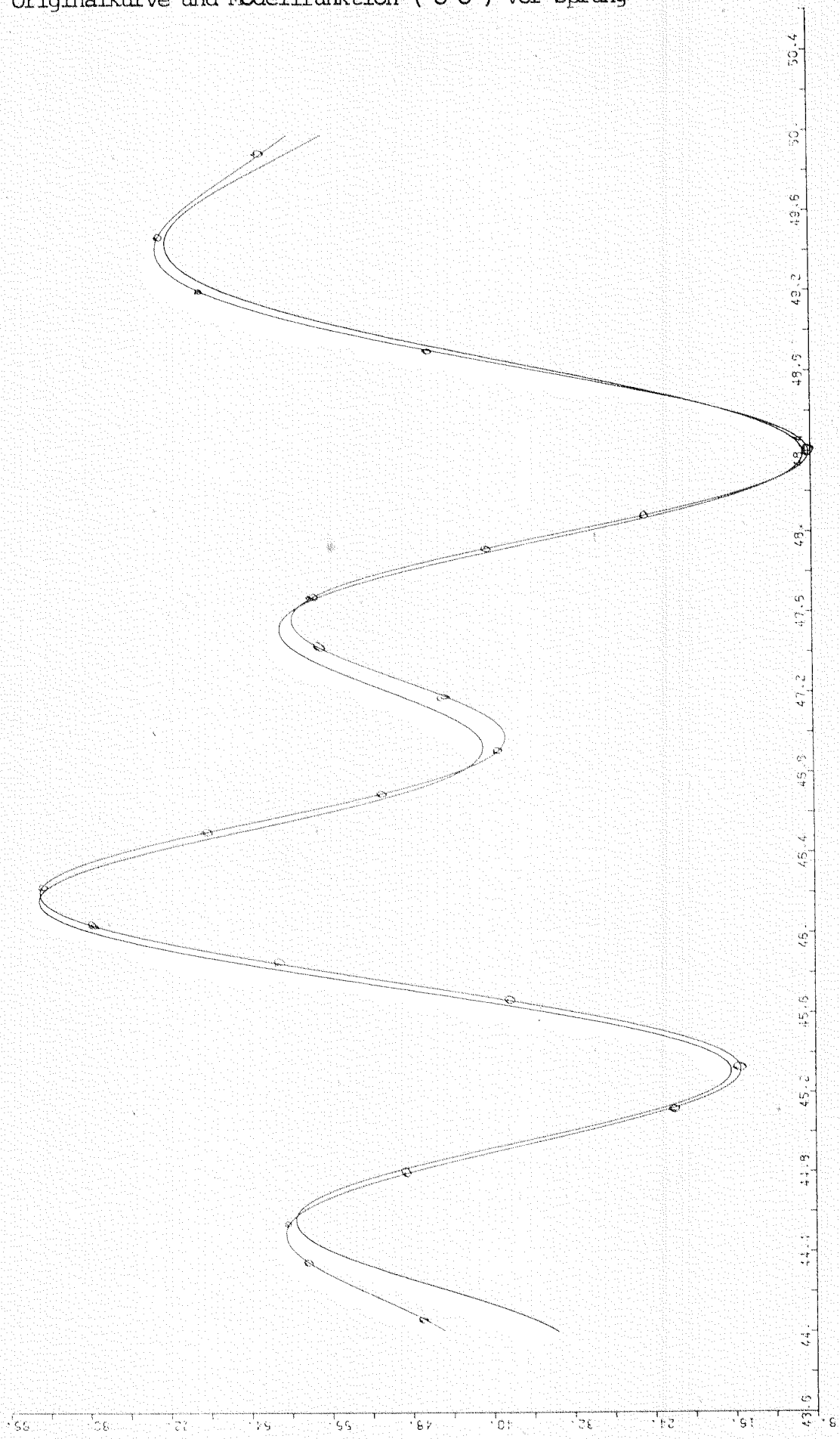
Puls 2, Verfahren 2

Originalkurve und zugehörige Modellfunktion (—○—) nach Sprung



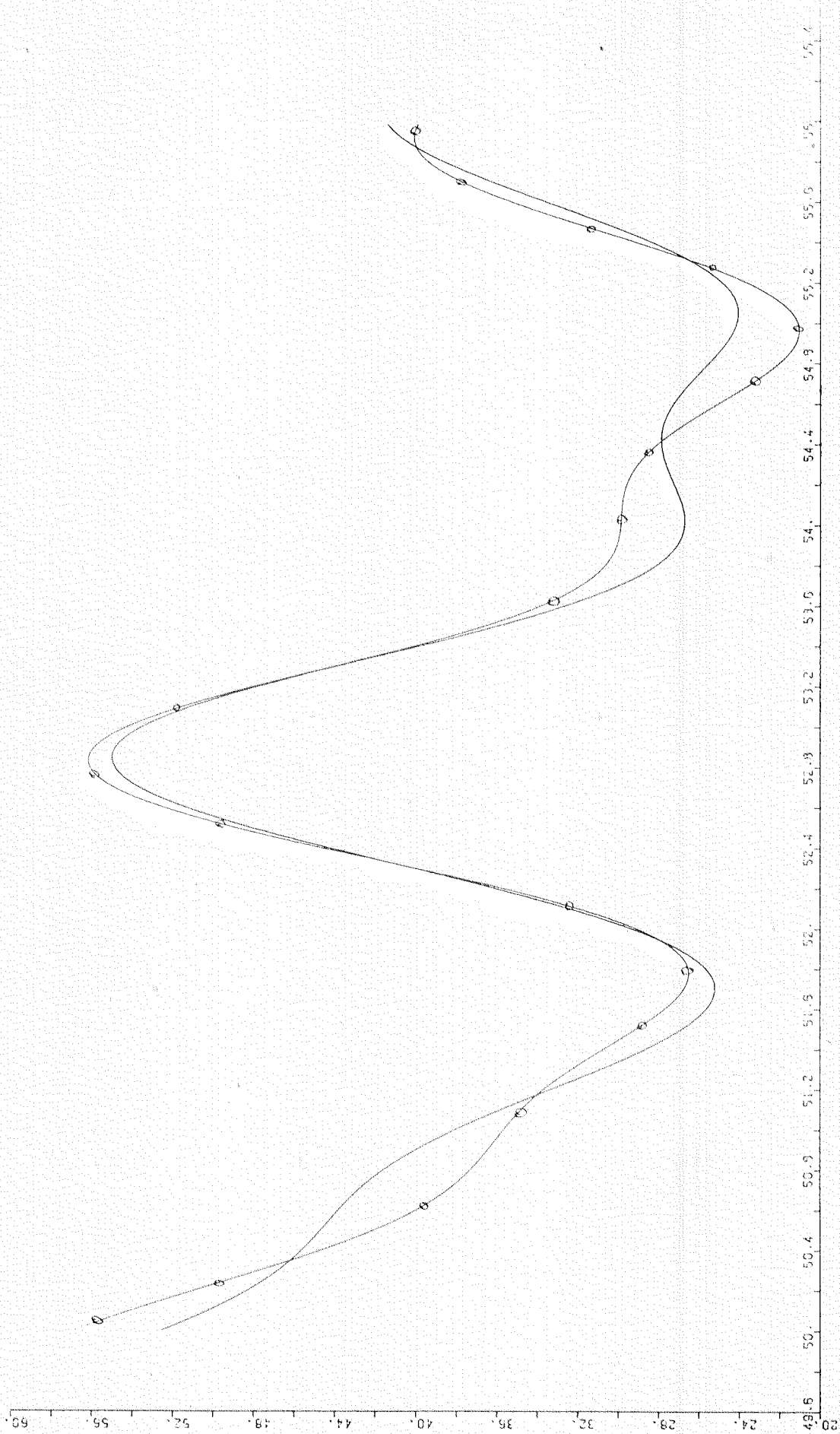
Puls 2, Verfahren 3

Originalkurve und Modellfunktion (—○—) vor Sprung



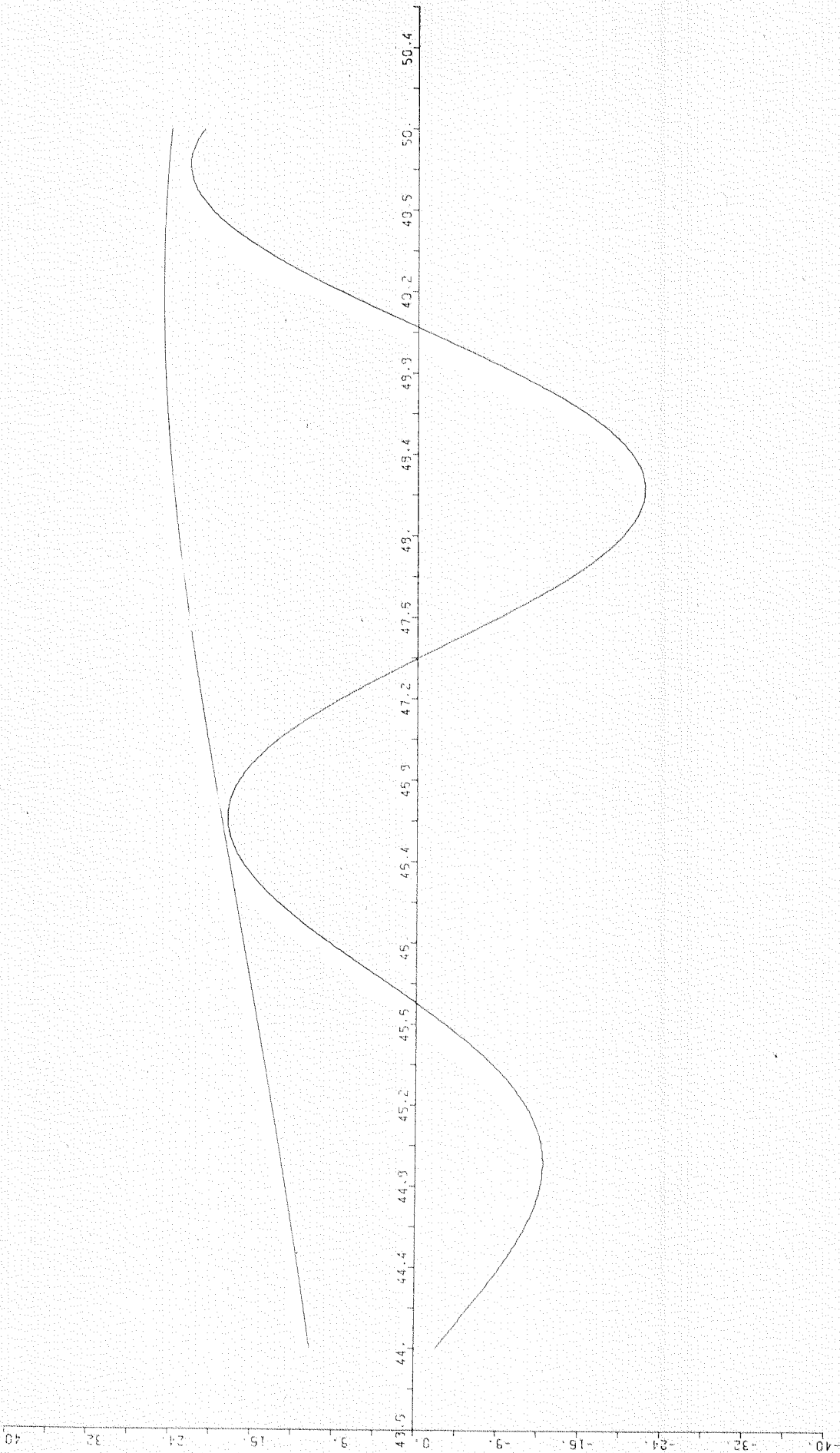
Puls 2, Verfahren 3

Originalkurve und Modellfunktion (—○—) nach Sprung



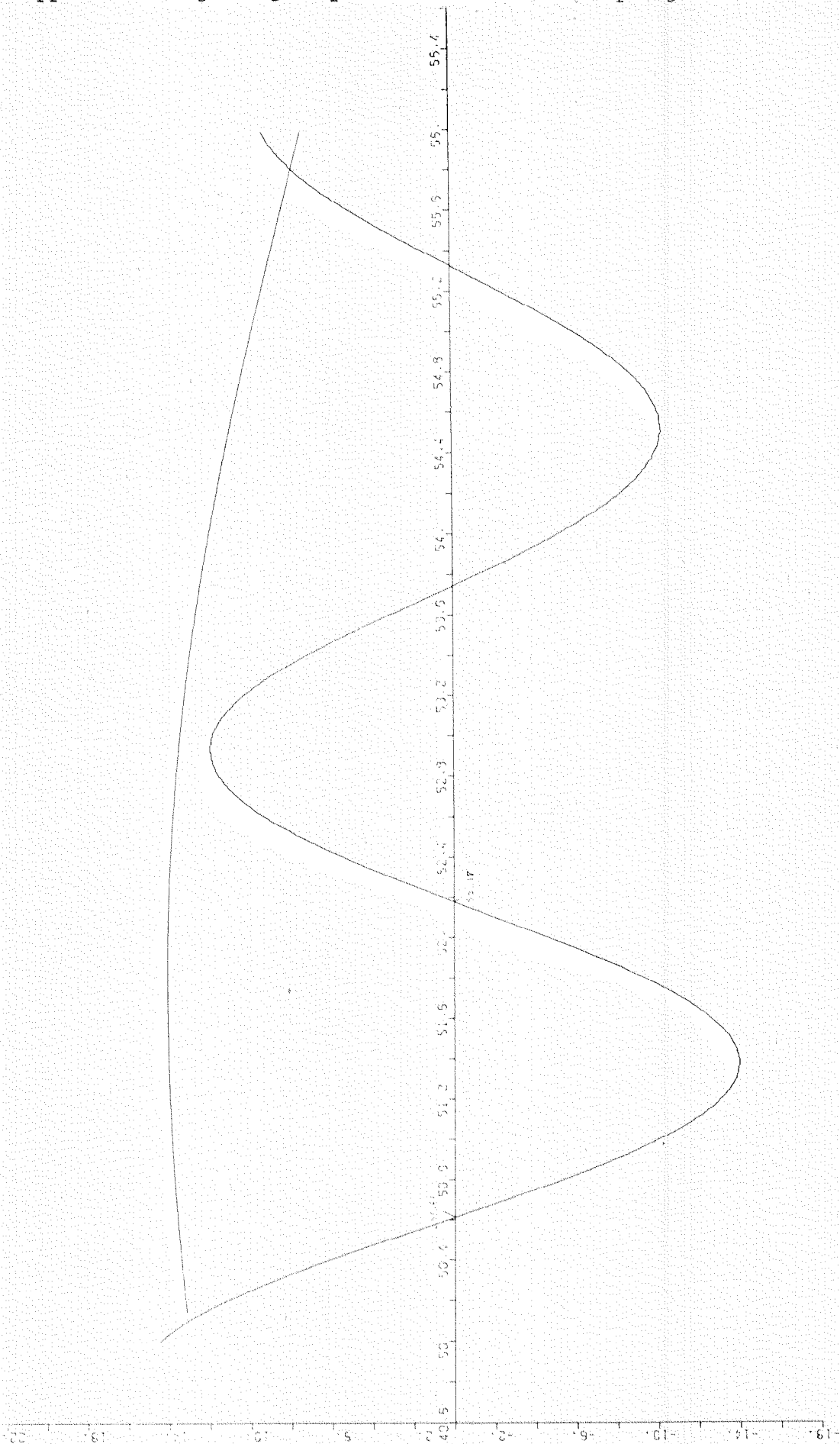
Puls 2, Verfahren 3

Ripple 1 und zugehörige Amplitudenfunktion vor Sprung



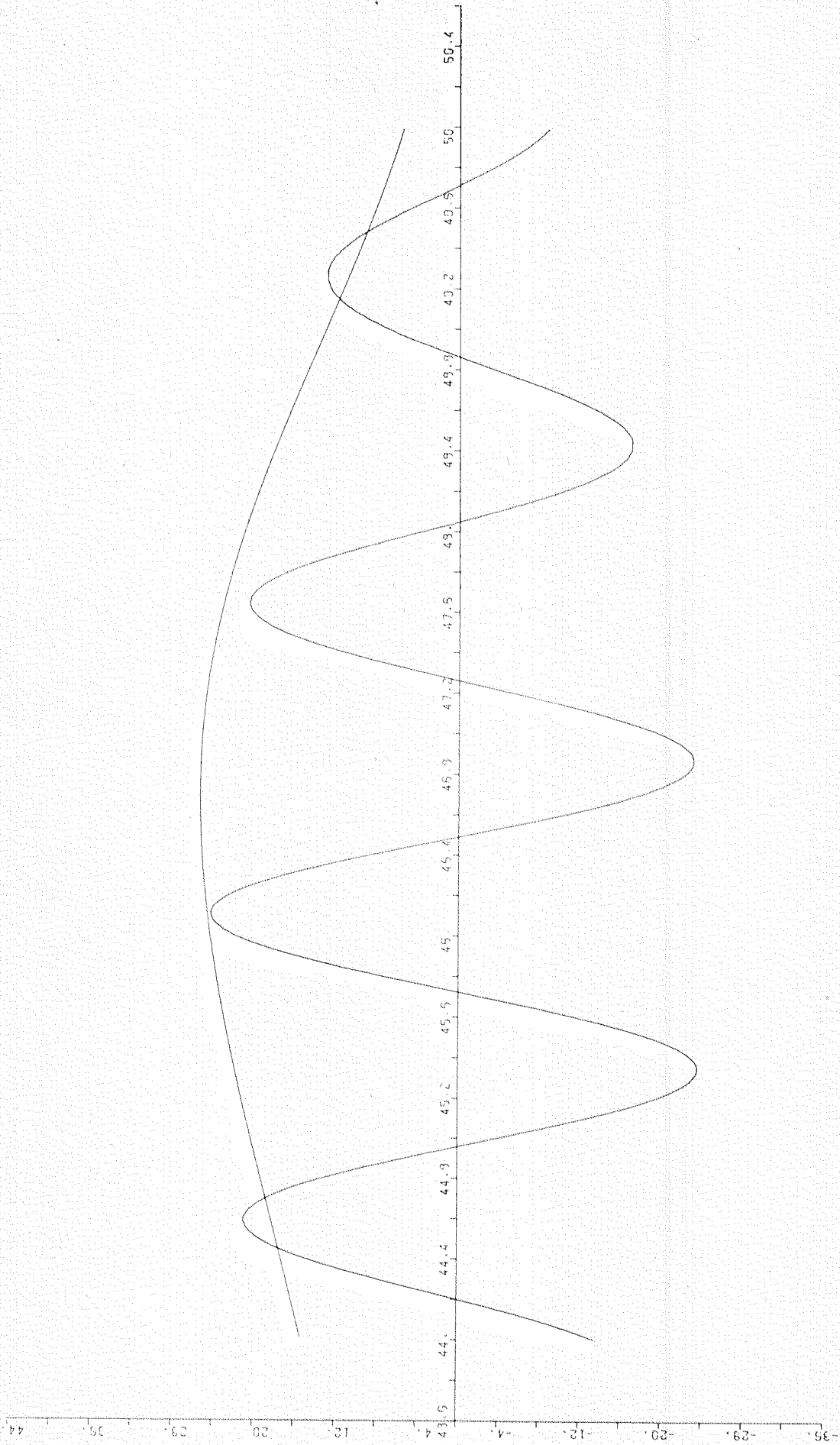
Puls 2, Verfahren 3

Ripple 1 und zugehörige Amplitudenfunktion nach Sprung



Puls 2, Verfahren 3

Ripple 2 und zugehörige Amplitudenfunktion vor Sprung





Puls 2, Verfahren 3

Ripple 2 und zugehörige Amplitudenfunktion nach Sprung

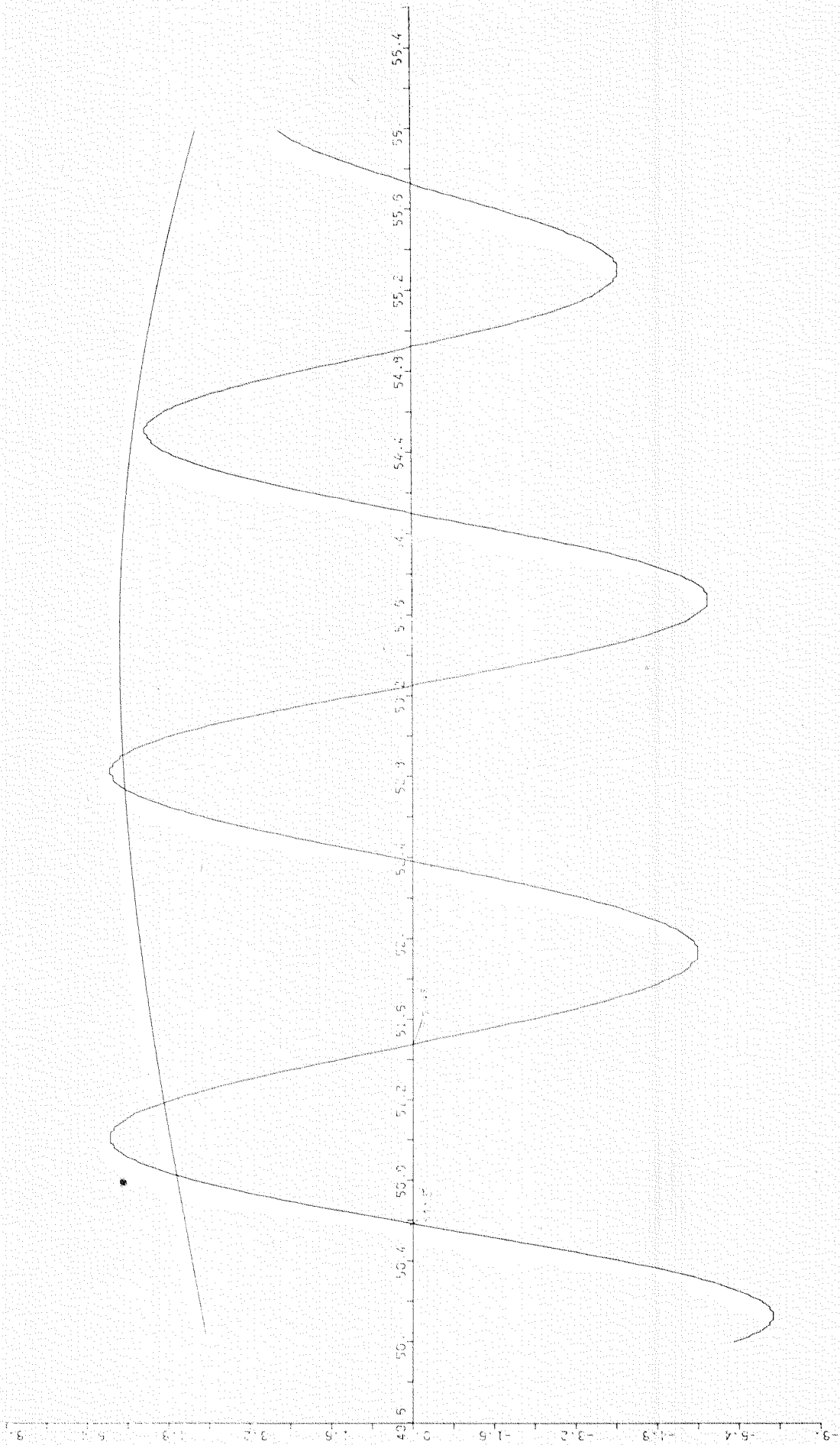


Abb. 3.1

Puls 3

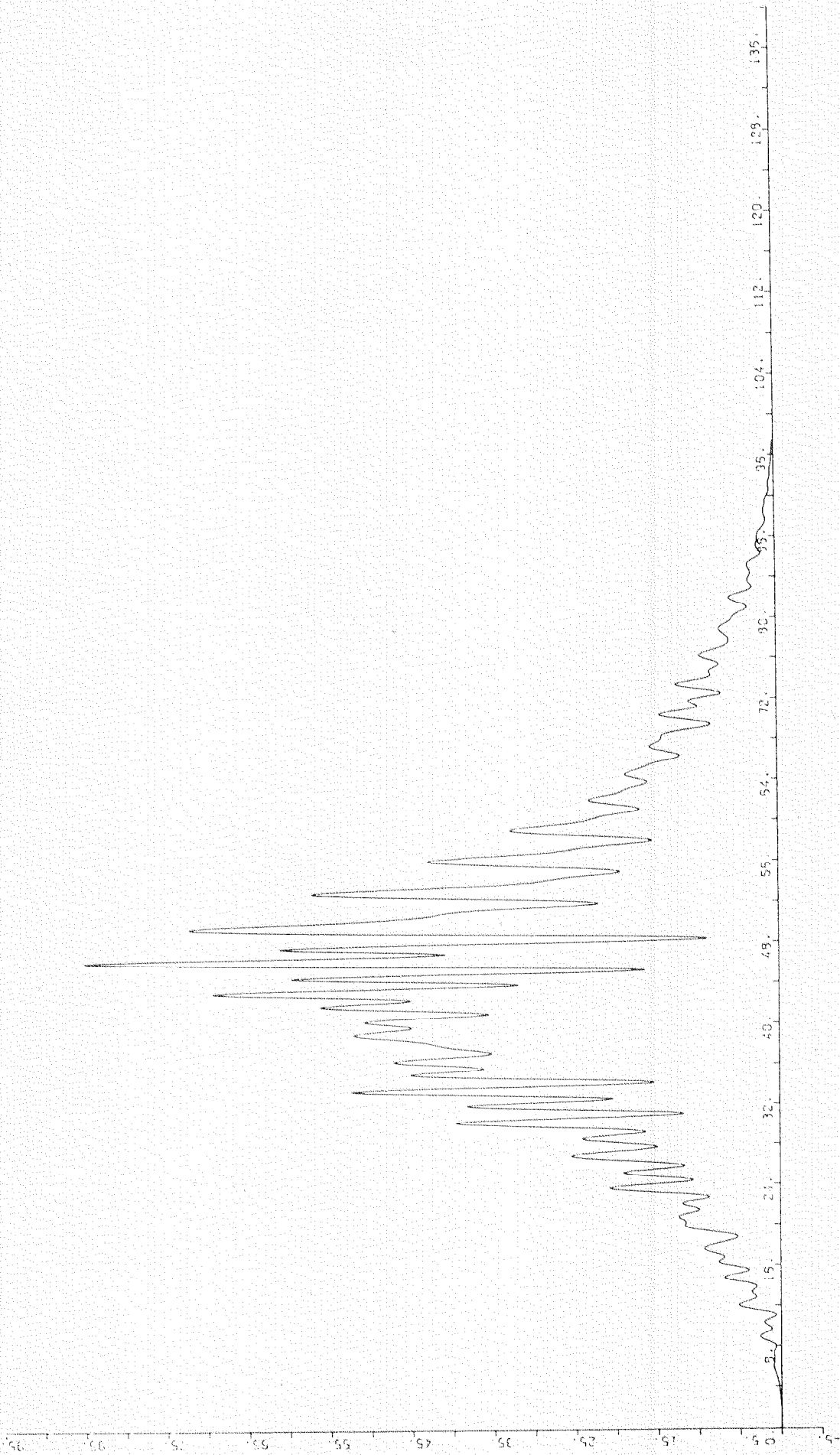
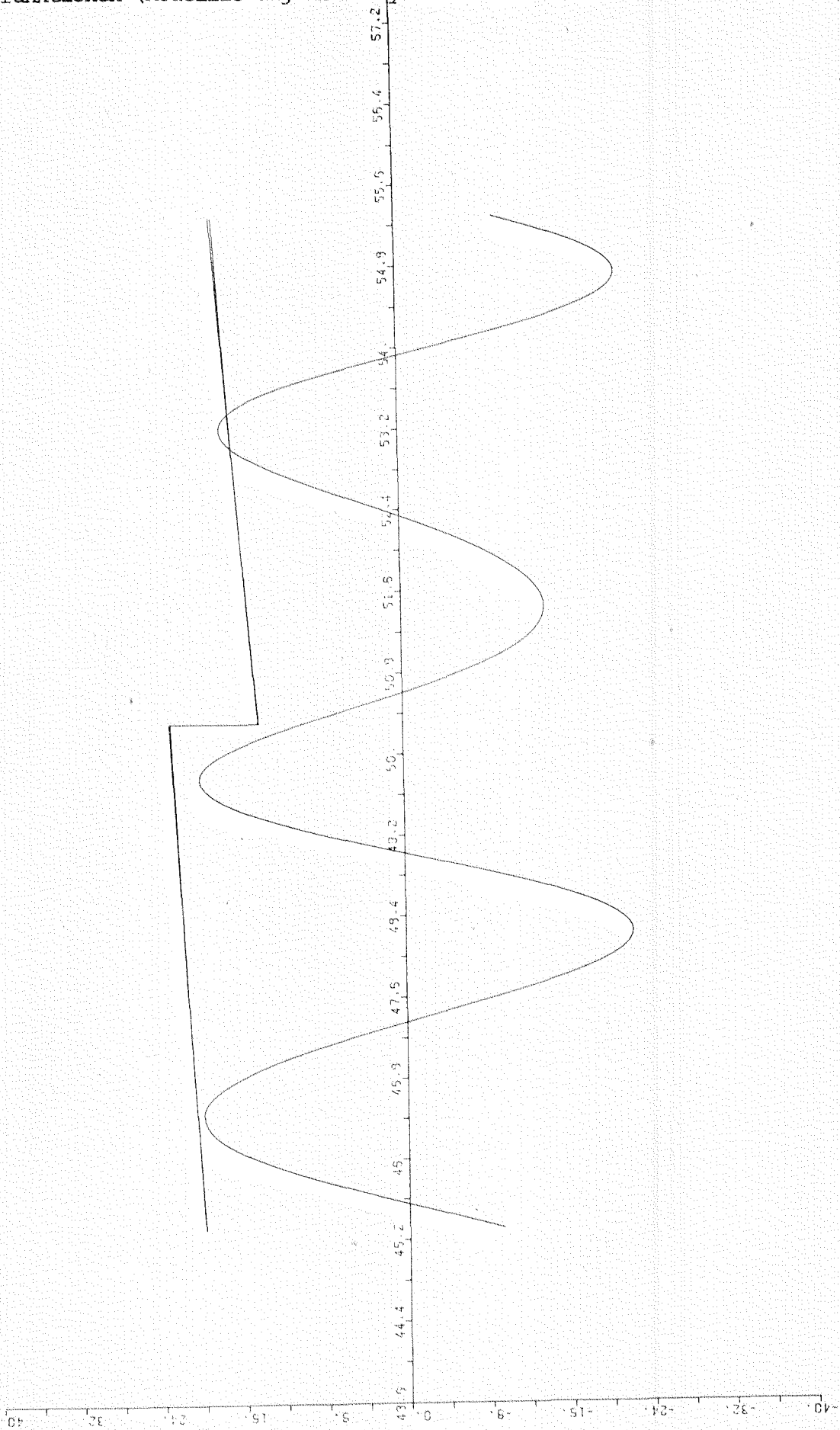


Abb. 3.2

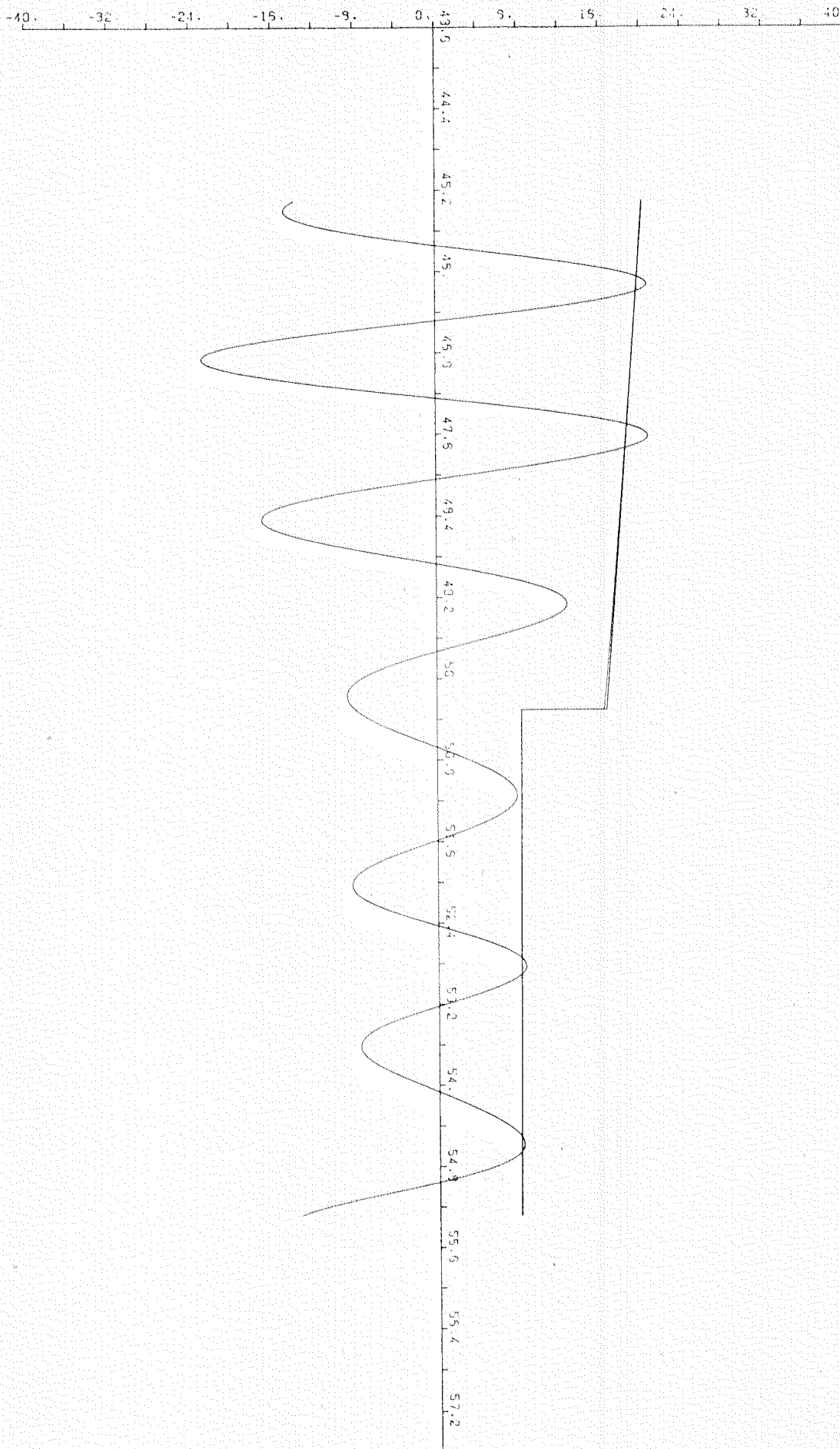
Puls 3, Verfahren 1

Rekonstruierte 1. Oberschwingung vor und nach Sprung, zugehörige Amplitudenfunktionen (Modellierung als Polynome 2. und 4. Grades)



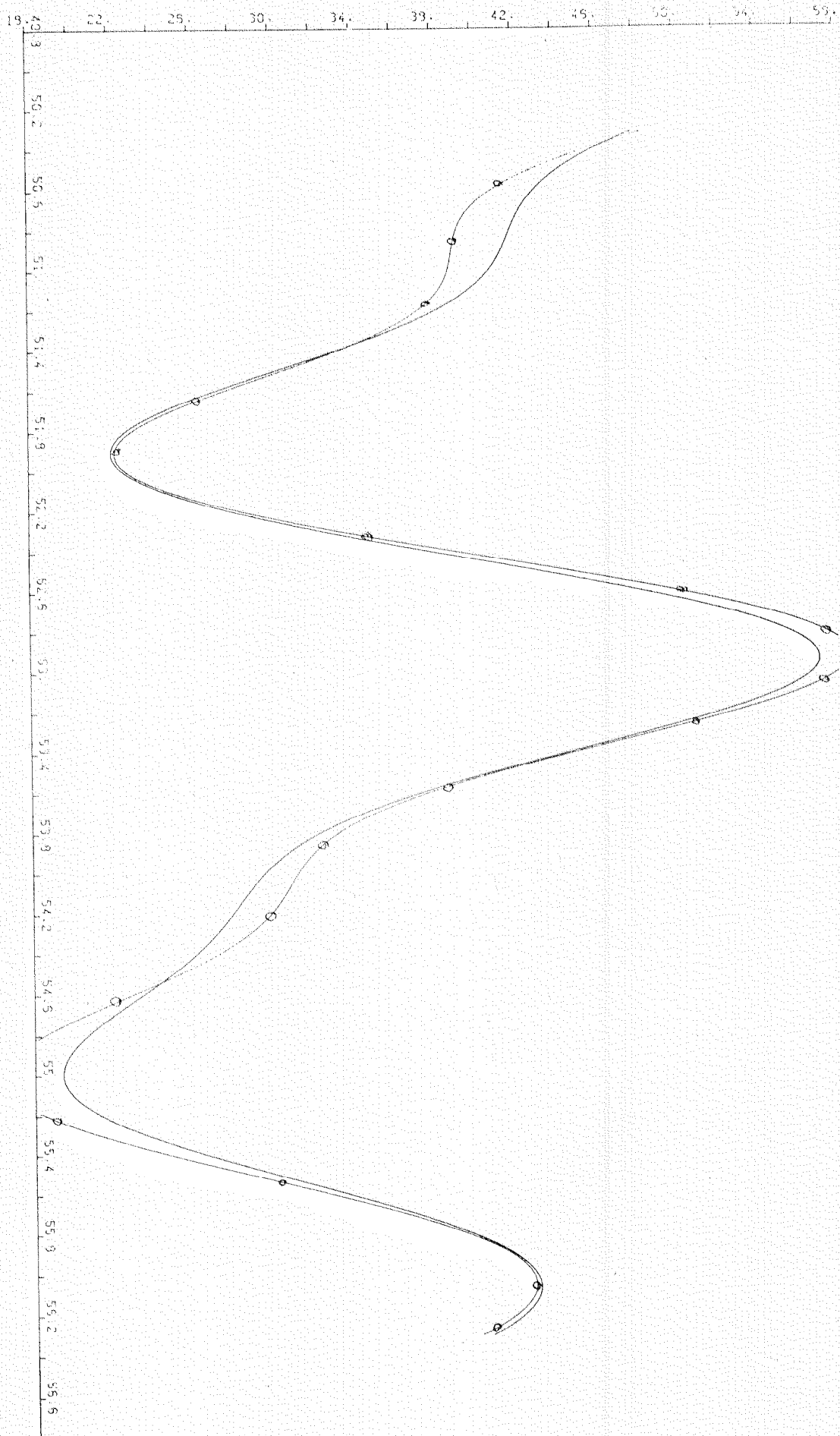
Puls 3, Verfahren 1

Rekonstruierte 2. Oberschwingung vor und nach Sprung, zugehörige Amplitudenfunktionen (Modellierung als Polynome 2. und 4. Grades)

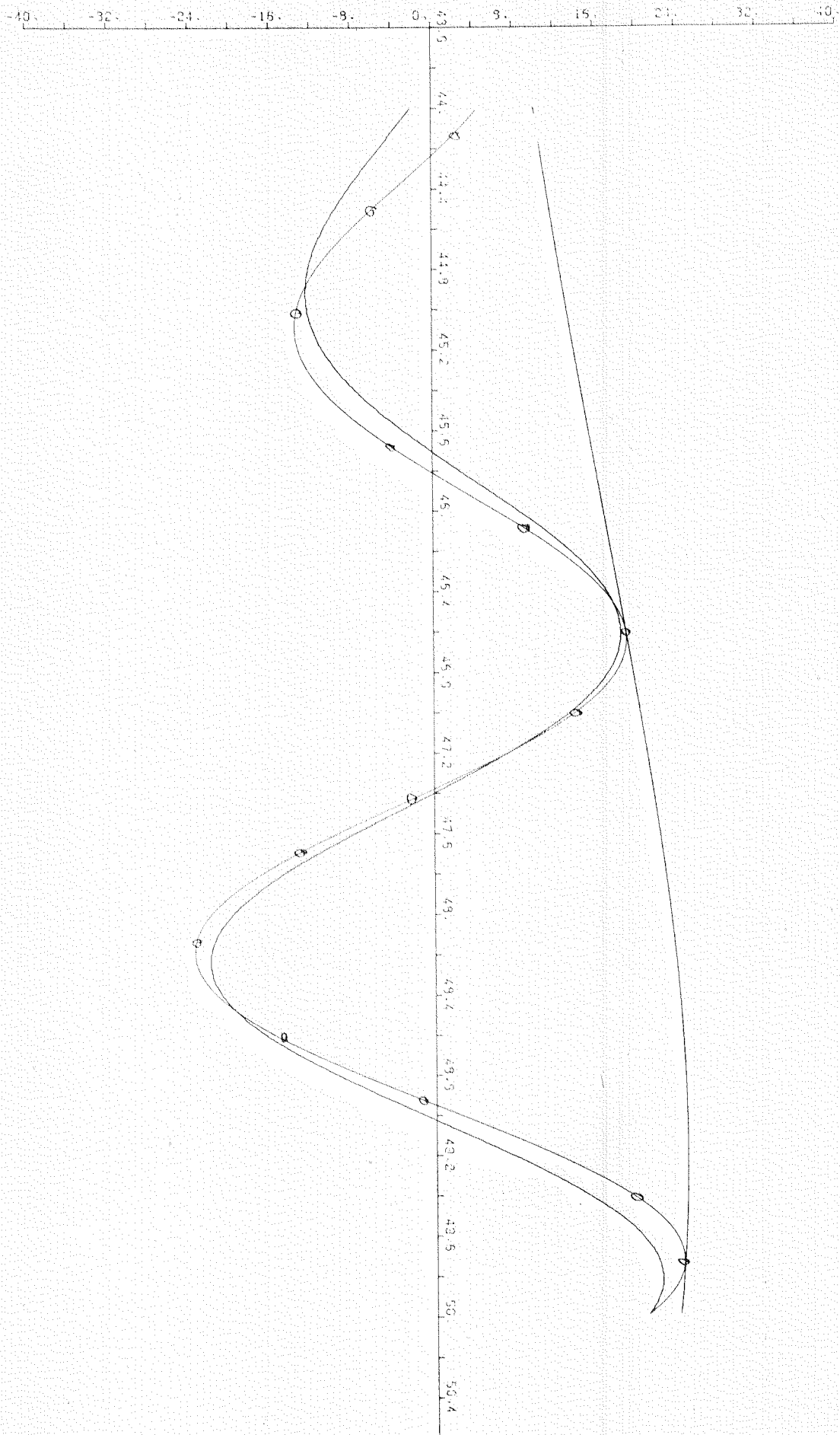


Puls 3, Verfahren 3

Originalkurve und zugehörige Modellfunktion (—○—) nach Sprung  
 (für die entsprechende Abbildung vor dem Sprung vgl. Abbildung 2.6)

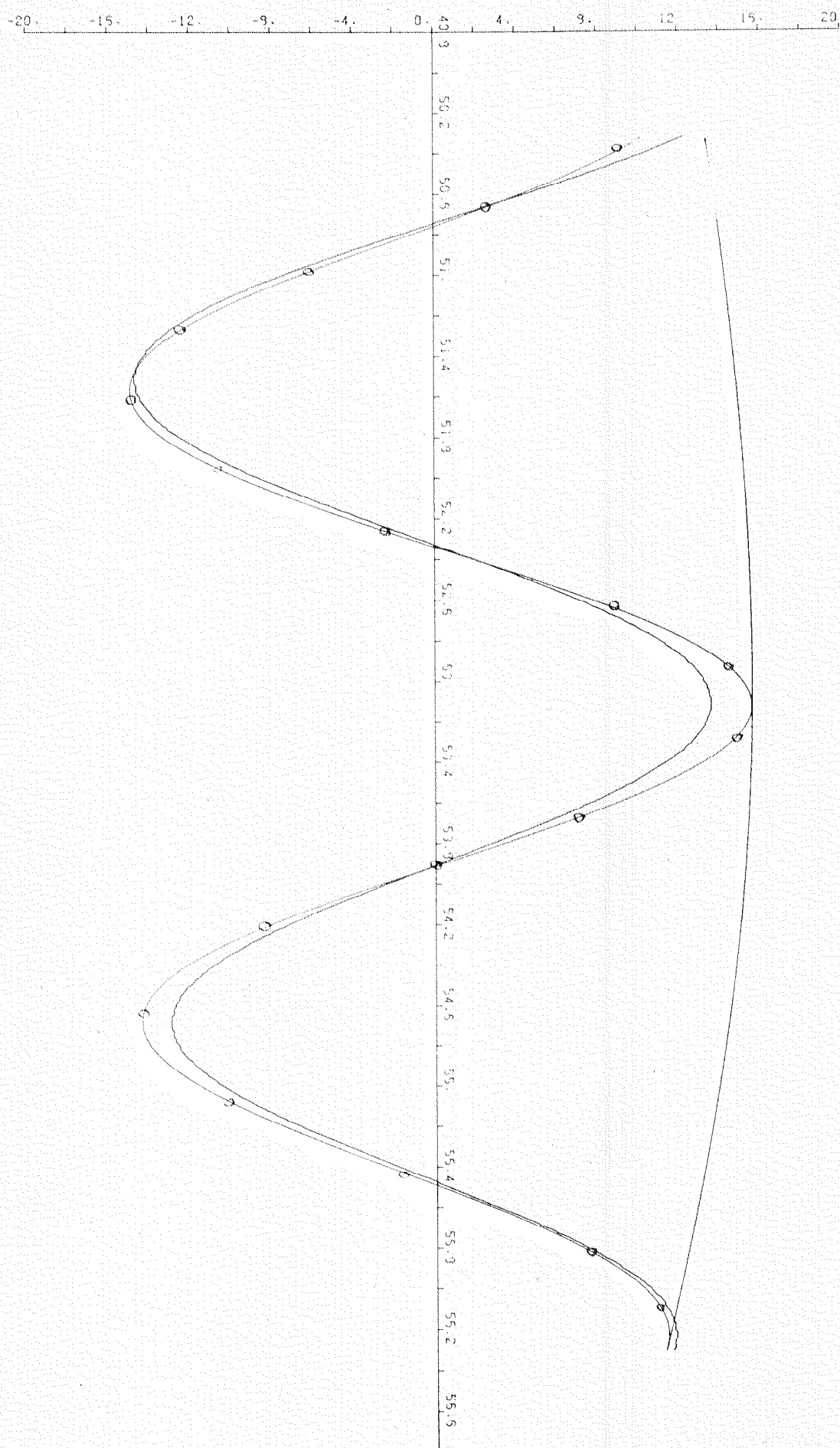


Ripple 1, zugehörige Modellfunktion (—○—) und Amplitudenfunktion vor Sprung



Puls 3, Verfahren 3

Ripple 1, zugehörige Modellfunktion (—○—) und Amplitudenfunktion nach Sprung





Puls 3, Verfahren 3

Ripple 2, zugehörige Modellfunktion (—○—) und Amplitudenfunktion vor Sprung

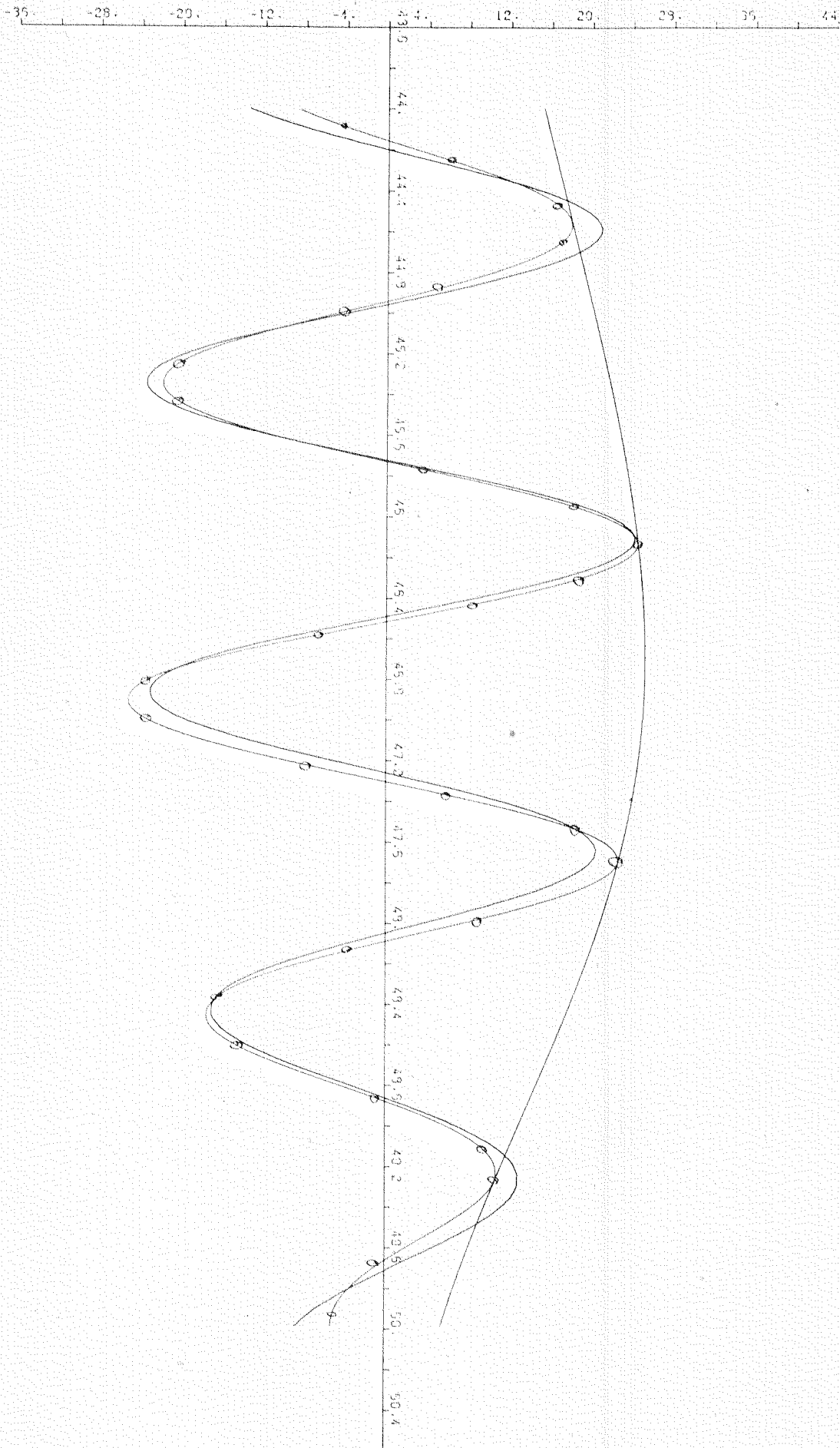


Abb. 3.8

Puls 3, Verfahren 3

Ripple 2, zugehörige Modellfunktion (—e—) und Amplitudenfunktion nach Sprung

