Aerodynamische Mehrpunktoptimierung eines Hochdruckverdichters mithilfe des Adjungiertenverfahrens

Vom Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik
der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte
Dissertation

von
Herrn
Dipl.-Ing. Sebastian Mann
aus Sebnitz

Tag der mündlichen Prüfung:	12.07.2022
Vorsitzender:	Junior-Prof. Dr.-Ing. Simon Stephan
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle
	Prof. Dr. Nicolas R. Gauger

D 386

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Prozesskette entwickelt, mit deren Hilfe aerodynamische numerische Optimierungen eines Hochdruckverdichters unter Berücksichtigung mehrerer relevanter Betriebspunkte effizient durchgeführt werden können.
Dazu werden zwei Parametriken erarbeitet und implementiert, um neben den konventionellen Beschaufelungsparametern auch die betriebspunktspezifische Stellung der Verstellstatoren und deren Verstellgesetz als freie Parameter berücksichtigen zu können.
Um die für die Optimierung nötigen Sensitivitätsinformationen des 17 Schaufelgitter umfassenden Hochdruckverdichter effizient bestimmen zu können, wird auf das Adjungiertenverfahren zurückgegriffen. Diese entkoppelt den Aufwand zur Bestimmung der Gradienteninformation von der Anzahl der freien Parameter nahezu. Der rechenintensive Teil der Prozesskette, die Strömungslösung und -auswertung, wird mit dem diskret adjungierten Strömungslöser adjointTRACE und dem Auswertewerkzeug adjointPOST durchgeführt. Die auf einem Fixpunkt-Ansatz beruhende Vorgehensweise zur Lösung der adjungierten Gleichung ermöglicht eine konsistente adjungierte Strömungslösung, deren Konvergenzrate derjenigen der primalen Strömungslösung entspricht.
Die Validierung der Sensitivitätsinformationen, auf Basis der im Rahmen der Arbeit entwickelten Prozesskette, wird in einem Vergleich zum Ansatz der Finiten Differenzen erfolgreich durchgeführt.
Mithilfe der validierten Prozesskette können erfolgreich Mehrpunktoptimierungen mit dem Ziel durchgeführt werden, den Pumpgrenzabstand an einem der betrachteten Betriebspunkte deutlich zu vergrößern. Die durch die neu implementierten Verstellgitterparametriken verbesserten Optimierungsergebnisse zeigen dabei deutlich den Einfluss und das Potential modifizierbarer Statorverstellwinkel im Auslegungsprozess.
Die Durchlaufzeiten der durchgeführten Optimierungen können aufgrund der erarbeiteten Prozesskette um Faktor vier bis zehn verglichen zur konventionellen Vorgehensweisen reduziert werden. Die noch stärker verkürzten Rechenaufwände gemessen in CPU-Zeit belegen die Notwendigkeit der Verwendung des Adjungiertenverfahrens für aerodynamischen Optimierungsaufgaben mit mehreren hundert Parametern und wenigen Nebenbedingungen.

Abstract

In the present thesis a process chain is developed, which is capable of being efficiently used in aerodynamic numerical optimizations of an high pressure compressor with respect to several relevant load cases.
Two parametrizations are developed and implemented to take the load case specific positions of variable stator vanes and their schedule into account.

To efficiently determine the necessary sensitivity information of the 17-row high pressure compressor, the adjoint method is used. The adjoint method makes the computational costs to calculate the gradient information almost independent of the number of free variables. The most expensive part of the process chain, the flow solution and its postprocessing, are executed with the help of the discrete adjoint flow solver adjointTRACE and the postprocessing tool adjointPOST, respectively. The chosen fixed point approach for the solution of the adjoint equation offers a consistent adjoint flow solution, which convergence rate is that of the underlying primal solver.
The validity of the sensitivity information, gathered with the help of the developed process chain, is executed in comparison to the method of finite differences.
With the help of this validated process chain, multi-point optimizations with the aim of improving the surge margin at a distinct load case, can be accomplished. The new implemented variables on the variable stator vanes are shown to offer better optimization results and point out the influence and the potential of the modified vane angles in the design process.
Throughput times of the accomplished optimizations can be reduced due to the adjoint method by factor four to ten compared to the conventional approach. The even more reduced CPU-times prove the necessity of the adjoint method for aerodynamic optimizations with several hundred parameters and few constraints.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all den Personen danken, die mich maßgeblich bei der Anfertigung dieser Dissertation unterstützt haben.
Zunächst möchte ich Prof. Dr. Nicolas R. Gauger vom Lehrstuhl für Scientific Computing der TU Kaiserslautern für die Bereitschaft danken, als betreuender Professor für mich zur Verfügung zu stehen, mir mithilfe vieler Gespräche, Vorträge und Workshops den mathematischen Zugang zu den Themen Adjungierung und Algorithmisches Differenzieren geebnet und mich in die wissenschaftliche Gemeinde eingeführt zu haben.
Zudem danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle vom Lehrstuhl für Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen der TU Kaiserslautern für die Bereitschaft als Erstkorrektor zu fungieren.
Den Kollegen Dr. rer. nat. Max Sagebaum und Thomas Dick vom Lehrstuhl für Scientific Computing der TU Kaiserslautern sowie Dr.-Ing. Jan Backhaus vom DLR Institut für Antriebstechnik danke ich besonders für die vielen persönlichen Gespräche, Telefonate und Diskussionen, welche mich an der Weiterentwicklung des adjungierten Strömungslösers teilhaben ließen und mir die mathematischen und informatorischen Problematiken näher brachten.
Ganz besonders bedanke ich mich bei meinem Betreuer Herrn Dr.-Ing Marc Nagel von MTU Aero Engines AG für die immerwährende fachliche und persönliche Unterstützung des Promotionsvorhabens, die sehr vielen Gespräche, Diskussionen, das kritische Hinterfragen und die sehr angenehme Zusammenarbeit.
Herrn Dr.-Ing. Harsimar Sahota danke ich für die umfangreiche Unterstützung bei der Bereitstellung des betrachteten Anwendungsfalles und als Unterstützer und Diskussionspartner bei der strömungsphysikalischen Auswertung der Ergebnisse. Den MTU-Kollegen Florian Klingenberg und Dr.-Ing. Ilya Arsenyev danke ich für die Diskussionen und die Unterstützung rund um die Optimierungsverfahren. Besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Stefan Genssler dem Rechencluster-Verantwortlichen bei MTU Aero Engines AG für das Verständnis für immer neue und größere Anforderungen und die immer wieder gefundenen Lösungen. Für die Unterstützung bei Studien zur Optimierungsprozesskette, dem adjungierten Strömungslöser sowie zu Optimierungsverfahren danke ich dem Kollegen Mathias Luers sowie den ehemaligen Masteranden und Werkstudenten Darya Melnyk, Andrei Merle und Robert Misler. Für den Zugang zu Unterlagen zu Verstellkinematiken bei Hochdruckverdichtern sowie den dazugehörigen Erläuterungen bedanke ich mich bei Herrn Werner Humhauser von MTU Aero Engines AG.
Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und ganz besonders bei meiner Frau Christin für die große Geduld, das Rückenfreihalten und die moralische Unterstützung bedanken, ohne die das Fertigstellen der vorliegenden Dissertation nicht möglich gewesen wäre.

Dachau, im Herbst 2021

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur **11**

1. Einleitung **17**
1.1. Einführung in die Thematik 17
1.2. Ziele der Arbeit 20
1.3. Gliederung der Arbeit 21

2. Aerodynamische Grundlagen der Verdichterstabilität und -optimierung **23**
2.1. Verdichterstabilität 23
2.1.1. Stabiler Betriebsbereich und stabilisierende Maßnahmen 23
2.1.1.1. Verdichterkennfelder 24
2.1.1.2. Betrieb außerhalb des Auslegungspunktes 28
2.1.1.3. Stabilisierende Maßnahmen 30
2.1.2. Leitgitterverstellung in der Verdichteraerodynamik 35
2.1.2.1. Gitterverstellung und Ähnlichkeit 35
2.1.2.2. Einsatz der Leitgitterverstellung 37
2.2. Verdichteroptimierung - Stand der Technik 38
2.2.1. Optimierung in der Verdichtervorauslegung 39
2.2.2. 3D-Formoptimierung 41

3. Grundlagen der numerischen Optimierung **47**
3.1. Optimierungsverfahren 47
3.1.1. Gradientenverfahren ohne Nebenbedingungen 48
3.1.2. Gradientenverfahren mit Nebenbedingungen 49
3.2. Berechnung von Ableitungen 51
3.2.1. Finite Differenzen 52
3.2.2. Algorithmische Differentiation 56
3.2.2.1. AD-Vorwärtsmodus 59
3.2.2.2. AD-Rückwärtsmodus 61
3.2.2.3. AD-Software 63
3.3. Ansätze zur Anwendung des Adjungiertenverfahrens 64
3.3.1. Methode des direkten Lösens der adjungierten Gleichung 67
3.3.2. Reverse Accumulation Methode 68
3.3.3. Black Box Methode 69

4. Aerodynamische Prozesskette und Optimierungsumgebung 73
4.1. Konventionelle Prozesskette 73
4.1.1. Präprozess 73
4.1.2. Strömungslösung 77
4.1.2.1. Modellierung 77
4.1.2.2. Wandbehandlung und Randbedingungen 78
4.1.3. Postprozess 79
4.2. Optimierungsumgebung 80
4.3. Umsetzung der hybriden Prozesskette in der Optimierungsumgebung 81
4.3.1. Werkzeuge zum Aufbau einer Prozesskette unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens 81
4.3.1.1. adjointTRACE 81
4.3.1.2. adjointPOST 82
4.3.2. Aufbau der hybriden Prozesskette 83
4.4. Einbinden der Leitgitterverstellung in die Optimierungsumgebung 87
4.4.1. Ungekoppelte Verstellung 87
4.4.2. Gekoppelte Verstellung 87

5. Ausgangsgeometrie und Studien zur Anwendung des Adjungiertenverfahrens 91
5.1. Ausgangsgeometrie und Lastfälle 91
5.1.1. Schaufelgeometrie 92
5.1.2. Verstellgitter 94
5.1.3. Modellierung 95
5.1.4. Benötigte Funktionale 97
5.1.4.1. Zielfunktionalbetrachtungen eines Betriebspunktes 97
5.1.4.2. Pumpgrenzabstand 100
5.1.4.3. Geometrische Profileinschnürung 101
5.2. Parameterstudien 102
5.2.1. Sensitivitäten der Auslegungsparameter 105
5.2.1.1. Validierung der Sensitivitäten 105
5.2.1.2. Ableitungen für das Betriebsverhalten 108
5.2.2. Schrittweitenstudie 109
5.3. Konvergenzstudien 111
5.3.1. Konvergenz der primalen und adjungierten Strömungslösung 111
5.3.2. Stabilisierte Konvergenz 115
5.3.3. Initialisierung der adjungierten Strömungslösung 117

6. Mehrpunktoptimierungen 121
6.1. Optimierungsaufgabe 121
6.2. Ergebnisse der durchgeführten Optimierungen 125
6.2.1. Optimierungsverläufe der Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C . 125
6.2.2. Strömungsphysikalische Auswertung der Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C 128

6.2.3. Beschaufelungs- und ungekoppelte VGV-Optimierung mit erweiterter Parametrik (Opt_D_C) . . . 134
6.3. Aufwandsbetrachtungen . . . 139
6.3.1. Durchlaufzeit und CPU-Stunden . . . 139
6.3.2. Beschleunigungsabschätzung durch Nutzung der hybriden Prozesskette 142

7. Diskussion der Optimierungsergebnisse 147

8. Zusammenfassung und Ausblick 151

Literaturverzeichnis 155

Abbildungsverzeichnis 163

Tabellenverzeichnis 169

A. Anhang 171
A.1. Navier-Stokes Gleichungen . . . 171
A.2. Transportgleichungen des k-ω-Turbulenzmodells . . . 173
A.3. Untersuchung der VSV-Parametrik . . . 173
A.3.1. S1 . . . 173
A.3.2. S2 . . . 175
A.3.3. S3 . . . 176
A.4. Weitere Sensitivitätsstudien für die Betriebspunkte außerhalb des Auslegungspunktes . . . 178
A.4.1. Betriebspunkt N100-PG . . . 178
A.4.2. Betriebspunkt N92-WL . . . 179
A.4.3. Betriebspunkt N92-PG . . . 182
A.4.4. Betriebspunkt N71-WL . . . 183
A.4.5. Betriebspunkt N71-PG . . . 186
A.5. Herleitungen für Zielgrößenbetrachtungen . . . 187
A.6. Approximation der Verstellgitterwinkel von Opt_B mithilfe der gekoppelten Parametrisierung . . . 189
A.7. Durchlaufzeiten und Rechenaufwände . . . 190

Nomenklatur

Lateinische Symbole:

Symbol	Einheit	Beschreibung
A	m^2	durchströmte Fläche
a	$\frac{J}{kg}$	spezifische Arbeit
c	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit im Absolutsystem
c_p	$\frac{J}{kg \cdot K}$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
H	-	Hesse-Matrix
h	$\frac{J}{kg}$	spezifische Enthalpie
h	-	Schrittweite bei der Auslenkung eines freien Parameters
J	-	Repräsentation einer Zielgröße
$\mathscr{L}$	-	Lagrange-Funktion
k	$\frac{J}{kg}$	turbulente kinetische Energie
M	Nm	Drehmoment
Ma	-	Machzahl
$\dot{m}$	$\frac{kg}{s}$	Massenstrom, Durchsatz
n	s^{-1}	Drehzahl
P	W	Leistung
p	Pa, bar	Druck
$\vec{p}$	-	Vektor der freien Variablen
$\vec{q}$	-	Vektor der Strömungslösung
R	$\frac{J}{kg \cdot K}$	spezifischen Gaskonstante
R	-	Repräsentation eines Residuums
Re	-	Reynoldszahl
s	-	Abstiegsrichtung
T	K	Temperatur

u	$\frac{m}{s}$	Umfangsgeschwindigkeit
w	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit im Relativsystem
$\vec{x}$	-	Vektor der Netzkoordination
$\vec{y}$	-	Vektor der Oberflächenkoordinaten
y^+	-	dimensionsloser Wandabstand der ersten Zelle eines CFD-Netzes

Griechische Symbole:

Symbol	Einheit	Beschreibung
α	$^\circ$	Anströmwinkel
β	$^\circ$	Abströmwinkel
δ	$^\circ$	Verstellwinkel um die Hochachse eines Verstellleitgitters
ε	-	Fehlerterm
η	%	Wirkungsgrad
κ	-	Wärmekapazitätsverhältnis
λ	-	adjungierte Zustandsvariable
μ	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	dynamische Viskosität
μ_{turb}	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	turbulente Viskosität
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte
σ	-	Schrittweite der Liniensuche
$\overline{\overline{\sigma}}$	$\frac{N}{m^2}$	Spannungstensor
Π	-	Druckverhältnis
φ	-	Durchflusskenngröße
Ψ	-	Leistungszahl
$\overline{\overline{\tau_{turb}}}$	$\frac{N}{m^2}$	turbulenter Spannungstensor
ω	$\frac{rad}{s}$	Winkelgeschwindigkeit
ω	$\frac{1}{s}$	bezogene Dissipationsrate
ω	-	auf den dynamischen Eintrittsdruck bezogener Druckverlust

Indizes:

Index	Beschreibung
1	auf die Rotorzuströmung bezogen
2	auf die Rotorabströmung bezogen
ADP	auf den aerodynamischen Auslegungspunkt bezogen
abs	auf das Absolutsystem bezogen
aus	auf den Austritt / die Abströmung bezogen
ax	auf die axiale Richtung bezogen
WL	auf den Betriebspunkt auf der Arbeitslinie (working line) bezogen
canc	auf den Auslöschungsfehler bezogen
ein	auf den Eintritt / die Zuströmung bezogen
PG	auf die Pumpgrenze bezogen
opt	auf das Optimum bezogen
rel	auf das Relativsystem bezogen
T	auf die Turbine bezogen
trunc	auf den Abbruchfehler bezogen
u	auf die Umfangsrichtung bezogen
V	auf den Verdichter bezogen
Welle	auf die Triebwerkswelle bezogen

Abkürzungen:

Abkürzung	Beschreibung
ACARE	Advisory Council for Aeronautics Research in Europe, Europäischer Forschungsbeirat für Luft- und Raumfahrt
AD	Algorithmische oder Automatische Differentiation
adjointPOST	adjungierte Instanz des Postprozessors POST
adjointTRACE	adjungierte Instanz des Strömungslösers TRACE
ADP	Aerodynamic Design Point, Aerodynamischer Auslegungspunkt
BFGS-Verfahren	Optimierungsverfahren benannt nach den Professoren Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno für unrestringierte Verfahren

CAD	Computer-Aided Design
CFD	Computational Fluid Dynamics, numerische Strömungsmechanik
CFL-Zahl	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
cgns	CFD General Notation System, Dateiformat zum Abspeichern von CFD-Daten
COBRA	Consistent Blade Representations for Aircraft engines, Geometriegenerierungs-Software MTU Aero Engines AG
CPU	Central Processing Unit, Prozessor
DAKOTA	Software für Optimierungsverfahren und Verfahren der Unsicherheitsquantifizierung
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
IGV	Inlet Guide Vane, Eintrittsleitgitter
Im	Imaginärteil einer komplexen Zahl
KKT-Bedingungen	Optimalitätsbedingung benannt nach Karush, Kuhn und Tucker
MUSCL	Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws
NO_X	Sammelbezeichnung für die gasförmigen Oxide des Stickstoffes
NLPQLP	ein spezielles Optimierungsverfahren der Klasse der SQP-Verfahren
Off-Design	Betriebszustand abseits des aerodynamischen Auslegungspunktes
OPUS	Optimization Utility System, Optimierungsframework MTU Aero Engines AG
PGA	Pumpgrenzabstand
POST	Postprozess-Werkzeug für die Auswertung von TRACE-Strömungslösungen
RANS-Gleichungen	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
Roe-Scheme	approximativer Riemann-Solver
RPM	Recursive Projection Method, Methode zur Stabilisierung der Lösung von Fixpunktiterationen
SQP-Verfahren	Sequentielle Quadratische Programmierungsverfahren, Klasse von Optimierungsverfahren
TRACE	Turbomachinery Research Aerodynamic Computational

	Environment, Strömungslöser
u.d.N.	unter den Nebenbedingungen
VIGV	Variable Inlet Guide Vane, verstellbares Eintrittsleitgitter
VGV	Variable Guide Vanes, Verstellstatoren
VSV	Variable Stator Vanes, Verstellstatoren
WL	Working Line, bezeichnet einen Arbeitspunkt oder die Zugehörigkeit einer Variable oder Ergebnisgröße zur Arbeitslinie des Verdichters

1. Einleitung

1.1. Einführung in die Thematik

Die Luftfahrtbranche und damit auch die Triebwerksentwicklung befindet sich – unabhängig von den Auswirkungen der aktuellen Corona-Krise – vor einem grundlegend notwendigen Wandel. Einerseits sind die Potentiale einer evolutionären Weiterentwicklung des derzeitigen Flugzeug- sowie Triebwerksdesigns klein und lassen eine Neuauflage von bestehenden Mustern unrentabel erscheinen. Andererseits hat die europäische Luftfahrtbranche sich im ACARE Flightpath 2050 ambitionierte Ziele gesetzt [1]. Im Vergleich zum Referenzjahr 2000 soll bis zum Jahr 2050 der CO2-Ausstoß je Passagier um 75% reduziert, die NO_X-Emissionen um 90% gesenkt sowie der wahrgenommene Fluglärm um 65% verringert werden. Hinzu kommen die Ziele des Pariser Klimaabkommens von 2015, welches besagt die Erhöhung der weltweiten Durchschnittstemperatur bis zum Jahr 2050 auf deutlich weniger als zwei Kelvin im Vergleich zum vorindustriellen Zeitalter zu begrenzen.
Neben den langfristig ausgelegten revolutionären Konzepten zum elektrischen Fliegen mittels Batterie oder Brennstoffzelle [2][3], welche insbesondere bei Langstreckenszenarios das Problem der noch zu geringen Energiedichte des Energieträgers lösen müssen, existieren Konzepte zur kurz- und mittelfristigen Weiterentwicklung der Turbomaschine. Diese evolutionären Konzepte streben eine Verringerung der Emissionen, beispielsweise der NO_x-Emmisionen mithilfe einer nassen Verbrennung [4] an. Zudem wird der Einsatz sogenannter *Sustainable Aviation Fuels* als klimafreundlicher Ersatzstoff für fossile Brennstoffe diskutiert [5][6]. Auch die Direktverbrennung von klimafreundlich herstellbarem Wasserstoff in der Brennkammer einer Fluggasturbine ist eine mögliche Stoßrichtung zukünftiger Entwicklungen [7] im Bereich Kurz- und Mittelstrecke. Gasturbinen werden somit mittelfristig weiterhin der Flugantrieb der Wahl bleiben.
Die Effizienz einer Fluggasturbine wird vom Gesamtwirkungsgrad beschrieben, welcher sich aus dem inneren oder auch Gasturbinenwirkungsgrad und einem Vortriebswirkungsgrad zusammensetzt. Um den Vortriebswirkungsgrad zu maximieren und einen geforderten Schub zu liefern muss das Triebwerk den Geschwindigkeitsbetrag eines möglichst großen Massenstroms um einen möglichst kleinen Betrag erhöhen. Dieser Tatsache wird in aktuellen Triebwerken mit einem hohen Nebenstromverhältnis Rechnung getragen. Ein großer Teil der angesaugten Luftmasse wird am Kerntriebwerk vorbei geführt und nur geringfügig beschleunigt, während der kleinere Teil des Massenstroms durch das Kerntriebwerk geführt wird, am Gasturbinenprozess teilnimmt und stark beschleunigt wird. Der Gasturbinenwirkungsgrad ist dagegen maßgeblich vom Verhältnis der zu- und abgeführten Wärmemengen abhängig wie beispielweise in Bräunling [8] ausgeführt wird. Die zuführbare Wärmemenge ist durch die Schmelzpunkte der verwendeten Materialien der ersten Turbinenstufen nach der Brennkam-

mer limitiert. Um die zuführbare Wärmemenge in der Brennkammer trotzdem zu maximieren, ist neben der Ermöglichung einer Erhöhung der möglichen Austrittstemperatur aus der Brennkammer durch gekühlte Turbinenschaufeln und hochwarmfeste Materialien auch die Minimierung der Eintrittstemperatur in die Brennkammer bei möglichst hohem Druck entscheidend. Der Auslegung des Verdichtungssystems kommt dabei eine hohe Bedeutung zu. Zum einen ist ein hoher Verdichterwirkungsgrad nötig, um hohe Totaldruckverhältnisse bei gleichzeitig möglichst niedrigen Brennkammereintrittstemperaturen zu erreichen. Zum anderen stellt der Aspekt der aerodynamischen Verdichterstabilität insbesondere für Verdichter mit hohem Totaldruckverhältnis eine große Herausforderung dar. Die Auslegung muss einen stabilen Betrieb des Verdichters in allen Betriebspunkten sicherstellen. Instabilitäten können durch zu starke Fehlanströmungen der Verdichterbeschaufelung ausgelöst werden, welche wiederum zu lokalen Strömungsablösungen, umlaufenden Strömungsablösungen oder sogar zu Rückströmungen und dem sogenannten Verdichterpumpen führen können. Durch das schlagartige Rückströmen während des Verdichterpumpens kann die Verdichterbeschaufelung zerstört werden und zum Ausfall des Triebwerks führen. Anhaltendes Verdichterpumpen muss aus diesem Grund vermieden werden. Kurzes Verdichterpumpen beispielsweise infolge eines Vogelschlages darf jedoch nicht zum Ausfall des Triebwerks führen. Dies wird in Zertifizierungsläufen überprüft. Einführende Informationen zu instabilem Verdichterverhalten finden sich in Bräunling [9] und Wolfrum [10].

Eine entscheidende Rolle bei der Auslegung stabiler Hochdruckverdichter mit großen Totaldruckverhältnissen spielen die verstellbaren Leitgitter in den ersten Stufen des Verdichters. Die Erfindung der Verstellleitgitter geht auf Gerhard Neumann zurück, welcher sie erstmals bei der Entwicklung des J79-Triebwerks einsetzte [11]. Diese *variable stator vanes* sind um ihre Hochachse verstellbare Verdichterleitschaufeln, welche dafür sorgen, dass die nachfolgenden Rotorgitter des Verdichters so angeströmt werden, dass ein stabiler Verdichterbetrieb in allen relevanten Betriebspunkten möglich ist. Die Verstellung der Gitter untereinander ist üblicherweise mithilfe einer Kinematik an die aerodynamische Drehzahl des Triebwerks - einer Ähnlichkeitskennzahl bezüglich der Machzahl der Umfangsgeschwindigkeit - gekoppelt. Diese Technologie ist seitdem integraler Bestandteil der Verdichterauslegung für Flugtriebwerke.
Um bei der Auslegung eines Hochdruckverdichters die sicherheitskritische aerodynamische Stabilität berücksichtigen zu können, muss anstatt einer Bewertung kleiner Teilkontrollvolumina die gesamte Komponente bewertet werden. Um die bei aerodynamischer Instabilität auftretenden Strömungsphänomene aufzulösen, sind aufwändige instationäre 3D-Strömungssimulationen nötig. Mit deutlich wenig aufwändigen stationären Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Lösern wird angestrebt, das Verdichterverhalten zu simulieren ohne dabei die Strömungsphänomene zeitlich und räumlich korrekt aufzulösen. Soll die Beschaufelung eines Hochdruckverdichters mithilfe einer solchen stationären 3D-Strömungssimulation bewertet oder mithilfe einer automatisierten Optimierung verbessert werden, entstehen aus der Größe des Kontrollvolumens zwei Problematiken. Zum einen bedingt das große Kontrollvolumen hohe Ressourcenaufwände bezüglich Arbeitsspeicher und Rechenzeit für eine Einzelauswertung und Bewertungen mehrerer Betriebspunkte. Zum anderen ergeben sich aufgrund der Vielzahl an Schaufelreihen zahlreiche Auslegungsparameter, welche die Geometrie der Schaufelprofile

definieren. Dies führt zu einem hochdimensionalen Auslegungsraum. Das Optimierungsproblem kann unter Berücksichtigung aller Parameter nur lokal gelöst werden. Aufgrund der Vielzahl an Freiheitsgraden und der damit einhergehenden sehr großen Anzahl an nötigen Einzelauswertungen verbietet sich die Anwendung globaler Optimierungsverfahren. Lokale Gradientenverfahren bedienen sich Sensitivitätsinformationen, welche konventionell mithilfe Finiter Differenzen, beispielsweise durch einen Vorwärtsdifferenzenquotienten ermittelt werden. Bei mehreren hundert Parametern bedeutet dies einen hohen Aufwand zur Ermittlung dieser Sensitivitätsinformationen. Zudem ergibt sich die Problematik, dass eine kleine Änderung eines Parameters in einem großen Kontrollvolumen nur kleine Änderungen in der zu ermittelnden Zielgröße verursacht. Die Sensitivitätsinformation droht innerhalb des Unsicherheitsbereich der Bewertung zu verschwinden.
Eine rauschunempflindliche Alternative zu Finiten Differenzen zur Bestimmung der Sensitivitätsinformation stellt das Algorithmische Differenzieren dar. Anstatt die Sensitivitätsinformation aus einem Differenzenquotienten zu bestimmen, wird die Prozesskette zur Bestimmung der Zielgröße in einzelne Bestandteile oder Programme, diese in Einzelanweisungen und diese wiederum in Elementarfunktionen heruntergebrochen. Die Elementarfunktionen können daraufhin analytisch differenziert werden. Das Algorithmische Differenzieren im sogenannten primalen oder Vorwärtsmodus ermöglicht damit, unter Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung, die Sensitivitätsinformation exakt zu bestimmen. Der Problematik der vielen Freiheitsgrade kann zudem mit dem adjungierten oder Rückwärtsmodus des Algorithmischen Differenzierens begegnet werden. Die Gesamtheit der nötigen Sensitivitätsinformationen ist für m Zielgrößen $J = (J_1, J_2, ..., J_m)$ und n Parameter $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ in Form der sogenannten Jacobimatrix $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ in Gleichung (1.1) dargestellt. Der Aufwand zur Bestimmung aller $m \cdot n$ Sensitivitätsinformationen ist bei konventioneller Vorgehensweise mit Finiten Differenzen oder im Vorwärtsmodus des Algorithmischen Differenzierens proportional abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade jedoch unabhängig von der Anzahl der zu bestimmenden Zielgrößen. Dies wird durch n-faches Ausführen der Prozesskette in Gleichung (1.1) in roter Farbe symbolisiert. Wird adjungiert vorgegangen, beispielsweise im Rückwärtsmodus des Algorithmischen Differenzierens, ist der Aufwand proportional zu der Anzahl der zu bestimmenden Zielgrößen und unabhängig von der Anzahl an Parametern. Dies wird durch m-faches Ausführen der Prozesskette unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens in blau symbolisiert. Die Vorgehensweise entspricht einer Umkehr der Reihenfolge bei der Anwendung der Kettenregel.

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Der Aufwand zur Bestimmung von $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ und damit die Wahl der Vorgehensweise ist also vom Verhältnis der Anzahl m der Zielgrößen zur Anzahl n der Parameter abhängig, wie in Glei-

chung (1.1) graphisch veranschaulicht wird. Weitere Informationen zum Algorithmischen Differenzieren finden sich bei Griewank [12]. 3D-Formoptimierungen der Verdichterbeschaufelung weisen üblicherweise eine dreistellige Zahl an freien Geometrieparametern auf, während die Anzahl der aerodynamischen Funktionale und Nebenbedingungen im einstelligen oder niedrigen zweistelligen Bereich angesiedelt ist.

1.2. Ziele der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit soll ein aerodynamisch bereits vollständig ausgelegter achtstufiger transsonischer Hochdruckverdichter mithilfe einer, sechs Betriebspunkte umfassenden, Mehrpunktoptimierung aerodynamisch verbessert werden. Dabei werden erstmals, zusätzlich zu den Formparametern der Beschaufelung, die Verstellwinkel der Verstellleitgitter, sowohl als freie Parameter als auch als Funktion einer veränderlichen Kinematik berücksichtigt. Aufgrund der dreistelligen Gesamtzahl der geometriedefinierenden Parameter und der einstelligen Anzahl der aerodynamischen Zielgrößen wird eine Vorgehensweise auf Basis des Adjungiertenverfahrens gewählt.
Dazu sollen folgende Fragestellungen beantwortet werden:

- Kann eine aerodynamische Prozesskette unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens im industriellen Kontext effizient betrieben und eingesetzt werden?
- Welchen Einfluss hat die Hinzunahme von Parametern zur Leitgitterverstellung auf das Ergebnis einer Formoptimierung eines realitätsnahen Hochdruckverdichters?
- Welche Rolle spielt dabei die Art der gewählten Parametrik?
- Inwiefern ist der Ressourcenaufwand bezüglich Durchlaufzeit und CPU-Stunden einer industriell verwendet Prozesskette, welche das Adjungiertenverfahren verwendet, unabhängig von der Parameteranzahl?

Um die dargelegten Fragestellungen zu beantworten, werden die folgenden Arbeitsschritte notwendig:

- Erweiterung einer bestehenden formgebenden Geometrieparametrik um Parameter zur Starrkörperrotation von Verstellleitgittern.
- Aufbau eine hybriden Prozesskette bestehend aus einer konventionellen Präprozesskette sowie einer neu entwickelten 3D-Bewertungsprozesskette, welche den adjungierten Strömungslöser adjointTRACE sowie das adjungierte Bewertungswerkzeug adjointPOST nutzt.
- Anwendung der entwickelten hybriden Prozesskette auf ein realitätsnahes 3D-Hochdruckverdichtermodell und Validierung benötigter Sensitivitätsinformationen gegenüber dem Ansatz Finiter Differenzen.
- Durchführung und Auswertung von aerodynamischen Mehrpunktoptimierungen und Bewertung des Einflusses der Verstellgitterparametrik.

- Abschätzung der Ressourcenaufwände der entwickelten Prozesskette bezüglich CPU-Zeit und Rechendauer im Vergleich zu einer konventionellen Prozesskette auf Basis Finiter Differenzen

1.3. Gliederung der Arbeit

In den folgenden beiden Kapiteln 2 und 3 wird auf die für die vorliegende Arbeit relevanten Grundlagen und der Stand der Technik eingegangen.
Kapitel 2 führt in die Aerodynamik des Verdichters ein, erläutert den Begriff der aerodynamischen Stabilität und stellt Maßnahmen zur Sicherstellung der Verdichterstabilität vor. Auf die später im Rahmen der Optimierungen verwendete Leitgitterverstellung wird detailliert eingegangen. Der Stand der Technik zum Thema aerodynamische Verdichteroptimierung wird anhand wissenschaftlicher Literatur vorgestellt.
Grundlagenkapitel 3 leitet in das Themengebiet der Optimierungsverfahren ein, stellt Vorgehensweisen zur Ermittlung von Sensitivitätsinformationen vor und erläutert verschiedene Ansätze des Adjungiertenverfahrens.
Kapitel 4 beschreibt zunächst die bestehende konventionelle Prozesskette bestehend aus Geometriegenerierung, 3D-Vernetzung, Strömungslösung und –auswertung, sowie die Optimierungsumgebung. Nachfolgend wird detailliert auf die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Einbindung der Prozesskettenteile, welche mithilfe des Adjungiertenverfahren genutzt werden, sowie auf die Etablierung der parametrisierten Leitgitterverstellung eingegangen.
In Kapitel 5 werden die zu optimierende Geometrie sowie die zu berücksichtigenden Lastfälle vorgestellt. Eine Validierung der, auf Basis der neu entwickelten Prozesskette ermittelten, Sensitivitätsinformationen wird anhand einer Gegenüberstellung mit der konventionellen Vorgehenswiese durchgeführt. Anhand einer Konvergenzstudie werden die später im Rahmen der Optimierung verwendeten Vorgehensweisen und getroffenen Entscheidungen hinsichtlich Konvergenz, Initialisierung und Stabilisierung der adjungierten Strömungslösung begründet.
Die durchgeführten Optimierungen werden in Kapitel 6 beschrieben und aerodynamisch ausgewertet. Dabei werden einer Formoptimierung ohne Berücksichtigung der Verstellleitgitter zwei unterschiedlichen Parametriken zur Berücksichtigung der Verstellleitgitter gegenübergestellt. Zudem wird eine Optimierung mit deutlich erweitertem Parameterbereich durchgeführt und die Ressourcenaufwände einer konventionellen Vorgehensweise gegenübergestellt.
Es folgt eine Diskussion der Optimierungsergebnisse sowie der Erkenntnisse 7 der Arbeit.
Abschließend werden die Ziele der Arbeit in einer Zusammenfassung mit Ausblick 8 aufgegriffen und bewertet.

2. Aerodynamische Grundlagen der Verdichterstabilität und -optimierung

2.1. Verdichterstabilität

Die Aufgabe eines Verdichters in einer Gasturbine ist die möglichst effiziente Druckerhöhung des kompressiblen Fluids bei einer bestimmten mechanischen Drehzahl n. Dazu wird von der Turbine die Leistung P_{Welle} zur Verfügung gestellt. Neben der Effizienz der Druckerhöhung spielt die Stabiltät der Verdichtung eine maßgebliche Rolle. Im Gegensatz zur Turbinendurchströmung muss die Verdichterströmung einen positiven Druckgradienten überwinden, wozu die Wellenleistung der Turbine benötigt wird. Strömungen entlang von Oberflächen im Einfluss eines positiven Druckgradienten lassen die Strömungsgrenzschicht sehr schnell aufdicken und bergen in sich die Gefahr einer Grenzschichtablösung, wodurch die zu durchströmende Querschnittsfläche blockiert und die Strömung zum Erliegen gebracht werden kann. Die Stabilität des Verdichters muss über den gesamten Betriebsbereich, einschließlich möglichen Abweichungen vom nominellen Betriebsbereich etwa durch Verschleiß, Lastwechsel, unterschiedliche Witterungsbedingungen, sichergestellt werden.

2.1.1. Stabiler Betriebsbereich und stabilisierende Maßnahmen

Bei vielstufigen Hochdruckverdichtern ist die Stabilität über den gesamten Betriebsbereich vom Leerlauf auf der Startbahn bis zum Start bei heißen Bedingungen ohne stabilisierende Maßnahmen nicht zu gewährleisten. Während der Verdichter im Auslegungspunkt noch ohne stabilisierende Maßnahmen lauffähig ist, werden insbesondere bei Lastwechseln beziehungsweise im Off-Design kritische Zustände erreicht. Es kommt zu Ablösungen der Schaufelgrenzschicht auf Teilen der Schaufeln einer Schaufelreihe, was wiederum zu Phänomenen wie der rotierenden Ablösung oder im Extremfall zum Verdichterpumpen führt. Ein Verdichterpumpen ist zu vermeiden, da es zu einer hohen mechanischen Belastung aufgrund der Lastwechsel an den Verdichterschaufeln führt. Eine detaillierte Beschreibung der Phänomene im instabilen Verdichterbereich findet sich bei Wolfrum [10].
Um instabile Strömungszustände zu vermeiden, ist zunächst zu definieren, in welchem Bereich ein Verdichter stabil arbeitet und unter welchen Bedingungen stabilisierende Maßnahmen notwendig sind. Nachfolgend kann anhand der gewonnen Erkenntnisse beurteilt werden, wie stabilisierende Maßnahmen helfen um diese Zustände zu vermeiden.

2.1.1.1. Verdichterkennfelder

Um die vielen verschiedenen Möglichkeiten der Betriebsbedingungen eines Hochdruckverdichters möglichst einfach abzubilden, wird das Prinzip der Ähnlichkeit herangezogen. Die entscheidenden Ähnlichkeitskennzahlen für Verdichter im Flugtriebwerk sind die Machzahl Ma und die Reynoldszahl Re, wobei die Reynoldszahl gegenüber der Machzahl eine untergeordnete Rolle spielt. Demnach sind sich zwei Strömungen in erster Näherung genau dann ähnlich, wenn die Machzahlen im Sinne von Richtung und Größe an jeder Position der Strömungen gleich sind. Dies ist dann gegeben, wenn für einen axial angeströmten Verdichter jeweils die Machzahlen gebildet aus axialer Anströmgeschwindigkeit Ma_{ax} und Umfangsgeschwindigkeit Ma_u gleich sind. Unter der Annahme eines konstanten Strömungsquerschnitts und gleicher Gaseigenschaften lässt sich die Gleichheit der axialen Machzahl in eine Gleichheit des reduzierten Massenstroms $\dot{m}_{red} = \frac{\dot{m}\cdot\sqrt{T}}{p}$ überführen. Dazu wird die Definition der axialen Machzahl

$$Ma_{ax} = \frac{c_{ax}}{\sqrt{\kappa RT}}, \tag{2.1}$$

nach c_{ax} umgestellt und in die Definition des Massenstroms

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot c_{ax} = \rho \cdot A \cdot Ma_{ax} \cdot \sqrt{\kappa RT}, \tag{2.2}$$

eingesetzt. Wird die Dichte ρ mithilfe der idealen Gasgleichung ersetzt, ergibt sich nach Umstellen die Ähnlichkeit zwischen $\dot{m}_{red}$ und Ma_{ax}

$$\dot{m}_{red} = \frac{\dot{m}\cdot\sqrt{T}}{p} = \frac{A}{\sqrt{\kappa R}} \cdot Ma_{ax}. \tag{2.3}$$

In ähnlicher Weise kann die Umfangsmachzahlgleichheit in die Gleichheit der reduzierten Drehzahl $n_{red} = \frac{n}{\sqrt{T}}$ überführt werden. Aus der Definition der Umfangsmachzahl

$$Ma_u = \frac{u}{\sqrt{\kappa RT}} = \frac{2\pi rn}{\sqrt{\kappa RT}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\kappa R}} \cdot n_{red} \tag{2.4}$$

ergibt sich direkt die Ähnlichkeit. Aus diesen Erkenntnissen heraus genügt es, den reduzierten Massenstrom sowie die reduzierte Drehzahl eines Verdichters zu kennen, um Aussagen über weitere Ähnlichkeitskennzahlen abzuleiten, welche sich ebenfalls in erster Näherung aus der Machzahlähnlichkeit ergeben. Wird das Druckverhältnis $\Pi = \frac{p_{t,aus}}{p_{t,ein}}$ für verschiedene aerodynamische Drehzahlen n_{red} über $\dot{m}_{red}$ aufgetragen, ergibt sich das so genannte Verdichterkennfeld. Häufig wird der Wirkungsgrad als Ähnlichkeitsparameter zusätzlich in das Kennfeld eingetragen. Ein beispielhaftes Verdichterkennfeld ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Der aerodynamische Auslegungspunkt wird im Verdichterkennfeld durch die reduzierte Drehzahl, den reduzierten Massenstrom und ein resultierendes Druckverhältnis definiert. Dieser Punkt wird auch als Volllast oder Aerodynamic Design Point bezeichnet. Bereiche anderer Drehzahl werden als Teildrehzahl bzw. Überdrehzahlpunkte bezeichnet. Bereiche höheren Druckverhältnisses auf einer Drehzahllinie werden als Überlast, Bereiche geringeren Druck-

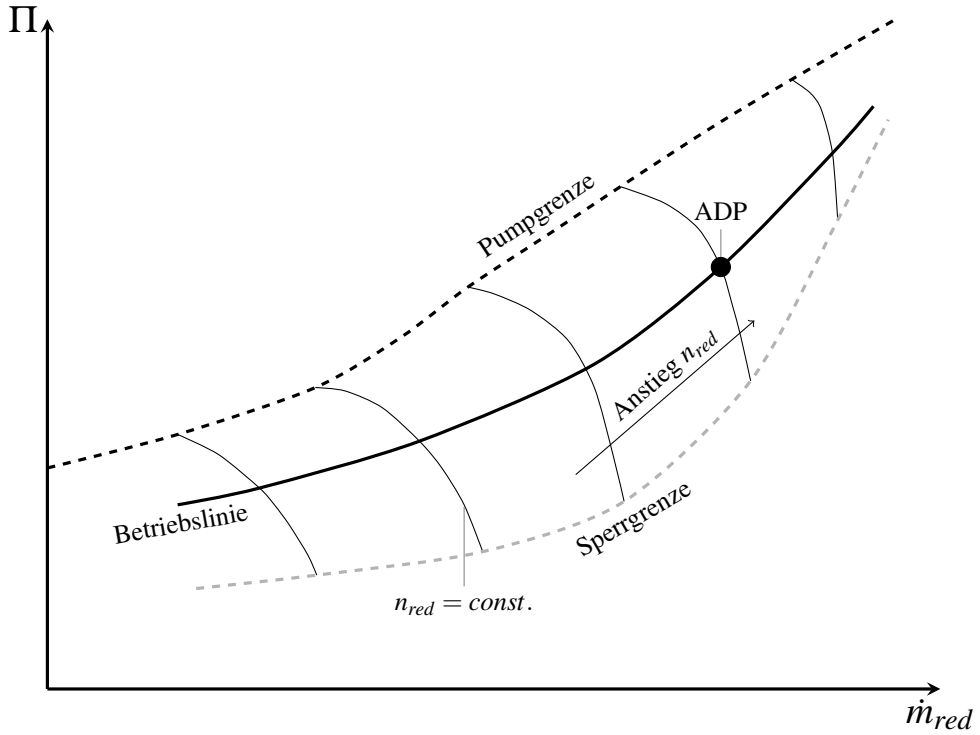


Abbildung 2.1.: Qualitative Darstellung eines Verdichterkennfeldes mit eingezeichneter Betriebslinie und ADP (Aerodynamic Design Point)

verhältnisses als Teillast bezeichnet. Die in Abbildung 2.1 eingezeichnete Arbeitslinie gilt unter der Bedingung, dass Zustandsänderungen von einem zu anderen Arbeitpunkt sehr langsam durchgeführt werden. Bei schnellen Lastwechseln wie zum Beispiel beim Durchstarten ergeben sich temporär von der Betriebslinie abweichende Betriebszustände, welche die Gefahren einer Strömungsinstabilität oder sogar eines Verdichterpumpens in sich bergen. Es muss sichergestellt werden, dass sich auch diese temporären Betriebszustände nicht jenseits der sogenannten Pumpgrenze befinden. Dazu muss ein gewisser Pumpgrenzabstand *PGA* eingehalten werden. Neben transienten Betriebszuständen haben die Änderung von Radialspalten, Alterungserscheinungen, Fertigungstoleranzen, Regelabweichungen im Bereich der verstellbaren Leitgitter, Reynoldszahleffekte [1] sowie eine variable Leistungsentnahme oder Zapfluft Einfluss auf den Pumpgrenzabstand, um nur einige wichtige Faktoren zu nennen. Eine Aufgliederung der Einflüsse auf die Lage der Pumpgrenze sowie die Lage der Betriebslinie sind in SAE International [13] visualisiert.
Für Pumpgrenzabstände gibt es verschiedene Definitionen. Ein sehr leicht aus dem Verdichterkennfeld abzuschätzender Pumpgrenzabstand ergibt sich aus dem bezogenen Abstand der Totaldruckverhältnisse zwischen Pumpgrenze und Arbeitspunkt, jeweils ausgewertet bei glei-

[1] Das Verdichterkennfeld basiert auf der Machzahlähnlichkeit. Das Verdichterverhalten an einem Punkt im Kennfeld gilt gleichzeitig für alle Betriebszustände, welche das gleiche $\dot{m}_{red}$ und Π aufweisen. Unterscheiden diese Betriebszustände sich jedoch in der Reynoldszahl gibt es leichte Abweichungen bspw. der Position der Pumpgrenze. Diese werden im Verdichterkennfeld vernachlässigt.

chem reduzierten Massenstrom $\dot{m}_{red}$, zu

$$PGA_{\dot{m}_{red}} = \frac{\Pi_{PG}}{\Pi_{BP}} - 1. \tag{2.5}$$

Dieser Pumpgrenzabstand $PGA_{\dot{m}_{red}}$ sollte nach Cumpsty [14] im Auslegungspunkt mindestens $PGA_{\dot{m}_{red}} = 25\%$ befinden.
Eine abweichende Definition eines Pumpgrenzabstandes bezogen auf die reduzierte Drehzahl n_{red} erscheint insofern sinnvoll, als dass es dem Prozess des Androsselns eines Verdichters bei konstanter Drehzahl entspricht. Cumpsty [14] definiert eine solche Pumpgrenze zu

$$PGA_{n_{red}} = 1 - \frac{\Pi_{BP}}{\Pi_{PG}} \cdot \frac{\dot{m}_{red,PG}}{\dot{m}_{red,BP}}. \tag{2.6}$$

Auf das Verdichterkennfeld bezogen beschreibt diese Definition die normierte Differenz der Anstiege von Geraden, welche vom Ursprung zum Betriebspunkt beziehungsweise zum Punkt gleicher reduzierter Drehzahl auf der Pumpgrenze führen.

Um das Verhalten des Verdichters abseits des Auslegungspunktes beurteilen zu können, wird zunächst auf die Darstellung des Stufenkennfeldes eingegangen. In einem Stufenkennfeld einer Verdichterstufe wird die Leistungszahl ψ über der Durchflusskenngröße φ aufgetragen. Die Leistungskennzahl ist eine mit der quadrierten Umfangsgeschwindigkeit u^2 entdimen-

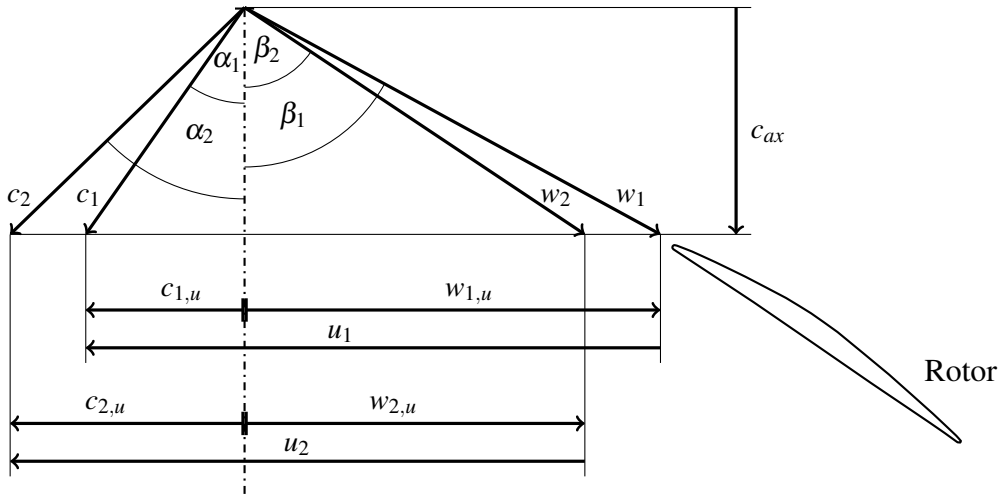


Abbildung 2.2.: Geschwindigkeitsdreieck für eine Verdichterstufe mit Geschwindigkeitskomponenten und Strömungswinkeln im Absolut- sowie Relativsystem

sionalisierte Darstellung der spezifischen Arbeit a, welche in der Verdichterstufe umgesetzt wird. Die Bedeutung der Leistungszahl bezüglich Größen aus dem Geschwindigkeitsdreieck, welches in Abbildung 2.2 dargestellt ist, wird leicht anhand der Gleichungsfolge

$$\psi = \frac{\Delta h}{u^2} = \frac{a}{u^2} = \frac{P_{Welle}}{\dot{m} \cdot u^2} = \frac{M_{Welle} \cdot \omega}{\dot{m} \cdot u^2} = \frac{\Delta c_u \cdot \dot{m} \cdot r \cdot \omega}{\dot{m} \cdot u^2} = \frac{\Delta c_u \cdot u}{u^2} = \frac{\Delta c_u}{u} \tag{2.7}$$

ersichtlich. Die Durchflusskennzahl stellt den Zusammenhang zum Massenstrom dar, welcher durch die Verdichterstufe hindurchbewegt wird. Unter der Annahme, dass die Zuströmbedingungen und die Eintrittsquerschnittsfläche konstant bleiben, ergibt sich aus der Definition des Massenstroms $\dot{m} = \rho \cdot c_{ax} \cdot A$, dass die Axialgeschwindigkeit als Abbild für den Massenstrom genutzt werden kann. Mit der Umfangsgeschwindigkeit entdimensionalisiert ergibt sich die Durchflusskenngröße zu

$$\varphi = \frac{c_{ax}}{u}. \tag{2.8}$$

In Anbetracht des in Abbildung 2.2 dargestellten Geschwindigkeitsdreiecks, lässt sich die theoretische ideale Darstellung des Stufenkennfeldes ableiten. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Anströmbedingungen, insbesondere der absolute Anströmwinkel α_1, nicht ändern. Außerdem wird der relative Rotorabströmwinkel β_2, unter Vernachlässigung einer etwaigen Minderumlenkung, konstant angenommen. Eine Änderung des mittleren Radius wird vernachlässigt, was in $u_1 = u_2 = u$ resultiert.
Zunächst kann aus Gleichung (2.7) und den Winkelbeziehungen aus Abbildung 2.2 die Leistungzahl ψ in Abhängigkeit der Durchflusskennzahl φ mit

$$\psi = \frac{c_{2,u} - c_{1,u}}{u} = (\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) \cdot \frac{c_{ax}}{u} = (\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) \cdot \varphi \tag{2.9}$$

angegeben werden. Hier muss α_2 als Unbekannte noch eliminiert werden. Aus den Winkelbeziehungen im Geschwindigkeitsdreieck ergibt sich zunächst

$$c_{ax} = \frac{w_{2,u}}{\tan\beta_2} = \frac{c_{2,u}}{\tan\alpha_2} \tag{2.10}$$

und damit

$$u = c_{2,u} + w_{2_u} = (\tan\alpha_2 + \tan\beta_2) \cdot c_{ax}. \tag{2.11}$$

Wird α_2 in Gleichung (2.11) separiert und in Gleichung (2.9) eingesetzt, ergibt sich die Leistungszahl zu

$$\psi = \left(\frac{1}{\varphi} - \tan\beta_2 - \tan\alpha_1\right) \cdot \varphi = 1 - \varphi\,(\tan\beta_2 + \tan\alpha_1)\,. \tag{2.12}$$

Wie in Abbildung 2.2 ersichtlich wird, nehmen sowohl α_1 als auch β_2 sinnvollerweise Winkel zwischen 0° und 90° an. Somit wird der Klammerausdruck in Gleichung 2.12 rechts immer größer als null und bleibt unter den zuvor getroffenen Annahmen konstant. Die so resultierende ideale Stufenkennlinie ist somit eine Gerade mit konstantem negativen Anstieg über φ. Sie ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Sie beschreibt die Möglichkeiten der Arbeitsumsetzung in einem Verdichterrotor und gilt unabhängig von der Drehzahl n. Wird φ klein und somit das Geschwindigkeitsdreieck eher flach, wird das Profil druckseitig angeströmt und zu einer großen Umlenkung gezwungen. Die Leistungszahl ψ steigt. Bei großem φ und einem eher schmalen und hohen Geschwindigkeitsdreieck, wird nur wenig umgelenkt. Die Stufenbelastung und damit die Leistungszahl ψ sind gering.
Da Verlustfaktoren, wie Minderumlenkung durch den Aufbau eine Profilgrenzschicht, so-

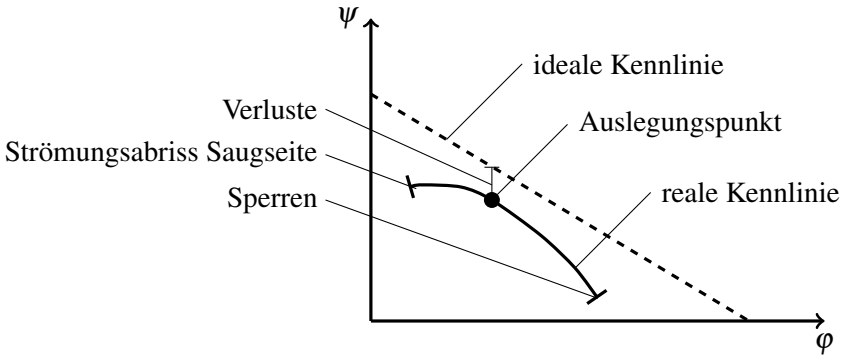


Abbildung 2.3.: Qualitatives drehzahlunabhängiges Stufenkennfeld einer Verdichterstufe mit idealem und realem Verlauf

wie Reibungsverluste und Fehlanströmungen die Arbeitsumsetzung beeinträchtigen, wird der Wert für ψ immer unterhalb des theoretischen Wertes bleiben. Wird φ klein, neigt das Profil zum Strömungsabriss. Die reale Stufenkennlinie endet deshalb abrupt im niederen Durchflusskennzahlbereich. Wird die Stufe bei hohem Durchsatz und geringer Umlenkung betrieben, führt die saugseitige Fehlanströmung zu Sekundärströmungen, welche die Passage blockieren. Das Profil neigt zum Sperren. Die Arbeitsumsetzung nimmt deshalb ab. Im mittleren Durchflusskennzahlbereich gibt es einen Punkt an dem das Profil optimal angeströmt wird.
Das Gesamtverdichterkennfeld ergibt sich aus den Einflüssen der einzelnen Stufenkennfelder. Einflüsse von stabilitätssichernden Maßnahmen auf das Gesamtverdichterkennfeld lassen sich gut anhand der Stufenkennlinien erklären.

2.1.1.2. Betrieb außerhalb des Auslegungspunktes

Wird ein Verdichter außerhalb des Auslegungspunktes ADP betrieben, wird vom Off-Design gesprochen. Solche Betriebspunkte können zum Beispiel beim Start des Flugzeugs mit höherer Schubanforderung an das Triebwerk oder im Anflug im Teildrehzahlbereich auftreten. Handelt es sich um einen stationären Flugzustand, nimmt der Betriebspunkt des Verdichters einen Zustand auf der Betrieblinie im Verdichterkennfeld in Abbildung 2.1 an. Da der Verdichter und damit die Geschwindigkeitsdreiecke für einen solchen Betriebspunkt nicht optimal ausgelegt sind, entstehen Fehlanströmungen, deren Auswirkungen sich leicht anhand der Stufenkennfelder beschreiben lassen. Hier soll beispielhaft ein Betriebszustand bei Überdrehzahl und bei Teildrehzahl diskutiert werden.
Im Fall von Überdrehzahl $n > n_{ADP}$ wie beispielsweise beim Start des Flugzeugs, wird vom Verdichter mehr Arbeit umgesetzt. Wie im Verdichterkennfeld in 2.1 deutlich wird, befindet sich der Betriebspunkt mit der erhöhten Drehzahl bei höherem reduziertem Massenstrom sowie bei höherem Druckverhältnis. Die Totalzustände $p_{t,ein}$ sowie $T_{t,ein}$ am Eintritt in den Verdichter sind in erster Näherung konstant. Damit muss, wenn $\dot{m}_{red,ein}$ steigt, auch der Massenstrom $\dot{m}_{ein}$ und damit $c_{ax,ein}$ ansteigen. Da $\dot{m}_{red,ein}$ üblicherweise prozentual stärker ansteigt als n_{red} wird auch der Anstieg von u durch den Anstieg von $c_{ax,ein}$ überkompensiert. Die Durchflusskennzahl φ_{ein} der ersten Stufe im Verdichter steigt an. Am Austritt steigt der Massenstrom $\dot{m}_{ein}$ natürlich ebenfalls an, jedoch werden auch die Totalzustände $p_{t,aus}$ und $T_{t,aus}$

sowie die Dichte ρ_{aus} aufgrund der höheren Verdichtung größer. Somit steigt $c_{ax,aus}$ weniger stark als u. Infolge dessen sinkt die Durchflusskennzahl der letzten Verdichterstufe φ_{aus}. Für die erste Stufe bedeutet eine Überdrehzahl somit eine Rechtsverschiebung im Stufenkennfeld in Richtung Sperrgrenze, während die letzte Stufe nach links in Richtung Stufenpumpgrenze wandert. Bei Überdrehzahl ist die Gefahr eines saugseitigen Strömungsabrisses in der letzten Verdichterstufe gegeben, was unbedingt vermieden werden muss.
Im Falle von Unterdrehzahl $n < n_{ADP}$ passiert das Gegenteilige. Die Verdichtung ist weniger stark, $c_{ax,aus}$ sinkt weniger als u und $c_{ax,ein}$ sinkt stärker als u. Demnach ist die erste Stufe nahe der Stufenpumpgrenze und die letzte Stufe wird eher saugseitig angeströmt. Die Zustände für Teildrehzahl, Auslegungspunkt und Überdrehzahl sind für die erste, eine mittlere und die letzte Stufe eines mehrstufigen Verdichters prinzipiell in Abbildung 2.4 dargestellt. Es

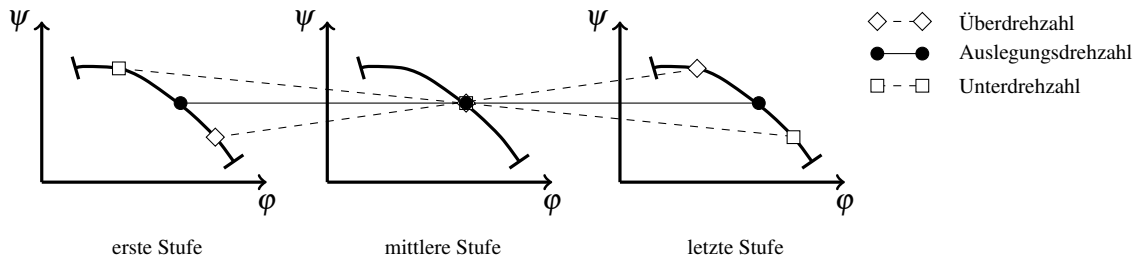


Abbildung 2.4.: Qualitativer Zusammenhang der Stufenkennfelder eines mehrstufigen Axialverdichters bei Überdrehzahl, Auslegungsdrehzahl und Unterdrehzahl.

wird deutlich, dass sich der Betriebspunkt im Stufenkennfeld für eine mittlere Stufen kaum verändert. Wie im Unterabschnitt 2.1.1.1 bereits erwähnt wurde, setzt sich das Verdichterkennfeld 2.1 aus den Stufenkennfeldern der einzelnen Stufen zusammen. Aus Abbildung 2.4 wird deutlich, dass bei Überdrehzahl die letzten Stufen und bei Teildrehzahl die ersten Stufen zum saugseitigen Strömungsabriss neigen. Deshalb wird die Pumpgrenze im Verdichterkennfeld im Bereich hoher Druckverhältnisse eher von den letzten Stufen definiert und im unteren Bereich eher von den ersten Stufen des Verdichters. Für die Sperrgrenze ist dies umgekehrt. In niedrigen Drehzahlbereichen sind die letzten Stufen nahe an der Sperrgrenze, in den oberen Drehzahlbereichen sind es die ersten Stufen.
Neben den stationären Betriebszuständen treten während des Fluges – etwa bei Manövern, beim Beschleunigen bzw. Verzögern des Triebwerkes oder auch bei Einlaufstörungen – instationäre Betriebszustände auf. Dabei bewegt sich der Betriebspunkt von der Arbeitslinie weg. Als kritisch wird vor allem der Bereich der Pumpgrenze angesehen. Wird ein Verdichter angedrosselt, wird der statische Druck am Verdichteraustritt erhöht. Der Betriebspunkt bewegt sich entlang einer Drehzahllinie von der Arbeitslinie weg in Richtung Pumpgrenze. Im Bereich der Pumpgrenze werden aufgrund des verringerten Massenstroms die vorderen Stufen druckseitig angeströmt. Die Pumpgrenze stellt den letzten stabilen Punkt der Drehzahllinie dar. Wird weiter angedrosselt, entstehen abhängig von der Stärke der Drosselung mehr oder weniger große abgelöste Gebiete an einem der vorderen Rotoren.
Handelt es sich um eine oder mehrere Ablösegebiete, welche sich nur in einem Teilsegment des Umfangs ausbilden, kommt es zur umlaufenden Ablösung. Die Strömungsphysik von umlaufenden Ablösungen wird beispielsweise bei Peters [15] beschrieben. Verbunden mit der

umlaufenden Ablösung können sich zusätzliche Charakteristiken im Verdichterkennfeld ergeben. Neben der bereits bekannten Primärcharakteristik, welche die in Abbildung 2.1 dargestellte Linie konstanter Drehzahl bezeichnet, ergeben sich je nach Verdichterausführung eine Sekundär- bzw. Tertiärcharakteristik. Diese sind allgemein in Rick [16] und anhand eines speziellen Verdichters in Peters [15] in Abbildung 8.15 beschrieben. Tertiärcharakteristiken treten auf, wenn ein Verdichter über die Pumpgrenze hinaus angedrosselt wird und sich in Teilen des Umfangs über die gesamte Schaufelhöhe Ablösungen ergeben, welche zur umlaufenden Ablösung führen. Sie sind durch deutlich kleinere Druckverhältnisse und kleinere Durchsätze im Vergleich zur Primärcharakteristik gekennzeichnet. Bei mehreren kleinen, am Umfang verteilten und radial begrenzten Ablösegebieten können Sekundärcharakteristiken auftreten. Diese führen eher zu moderaten Rückgängen in Druckverhältnis und Durchsatz.
Wird ein Triebwerksverdichter stärker angedrosselt, kann das sogenannte Verdichterpumpen ausgelöst werden. Die Ablösung tritt nun über den gesamten Umfang einer oder mehrerer Schaufelreihe auf und es kommt zu Rückströmungen ggf. über mehrere Schaufelreihen hinweg. Infolge der Rückströmung wird der Druckaufbau verhindert und der Verdichter wieder entlastet, die Strömung liegt wieder an. Bleibt die Drosselung bestehen, kommt es erneut zur Ablösung. Pumpen ist ein periodischer Vorgang, welcher zu starken Durchsatzschwankungen und zu großen Lastwechseln auf der Beschaufelung führt und die Integrität des Triebwerks gefährdet.
Bei vielstufigen Verdichtern wird es zunehmend schwieriger die Stabilität des Verdichters im Teildrehzahl- und Überdrehzahlbereich sicherzustellen. Stabilisierende Maßnahmen sind notwendig.

2.1.1.3. Stabilisierende Maßnahmen

Um hohe Druckverhältnisse zu erlangen, wie sie von aktuellen Verdichtungssystemen in Flugtriebwerken benötigt werden, sind eine Vielzahl von Verdichterstufen notwendig. Diese Tatsache führt zu der zuvor beschriebenen Problematik der Stabilität in großen Verdichtern.
Stabilisierende Maßnahmen für ein Verdichtungssystem lassen sich auf verschiedene Arten kategorisieren. Zunächst erscheint eine Aufteilung in passive und aktive Maßnahmen sinnvoll. Zudem finden sich einerseits konventionelle Maßnahmen, welche bereits in der Serienfertigung von Flugtriebwerken etabliert sind, andererseits fortschrittliche Maßnahmen der Stabilisierung, welche in der Konzeptphase sind oder lediglich an Prüfständen untersucht wurden. In der folgenden Übersicht fließen beide Kategorisierungen mit ein. Es wird unterschieden in *passive, gesamtkonzeptionelle* Maßnahmen, in *aktiv gesteuerte* Maßnahmen sowie in *aktiv geregelte* Maßnahmen. Die verschiedenen Maßnahmen werden auch kombiniert eingesetzt, um den hohen Anforderungen an die Verdichtungssysteme gerecht zu werden.

Die passiv gesamtkonzeptionellen Maßnahmen zur Stabilisierung sorgen von vornherein für einen stabilen Verdichterbetrieb. So lassen sich beispielsweise kritische Strömungszustände in gewissem Umfang durch Vorhalten von Inzidenzwinkeln vermeiden. Um im Teildrehzahlbereich einen stabilisierenden Effekt zu erhalten, können die ersten Stufen mit leicht negativer Inzidenz, die hinteren Stufen mit leicht positiver Inzidenz ausgelegt werden. Die hohe Schaufelbelastung in den ersten Stufen wirkt sich im Teildrehzahlbereich dann weniger stark aus,

ein saugseitiger Strömungsabriss kann verhindert werden. In den hinteren Stufen nimmt die Sperrneigung ab. Diese Maßnahme bedeutet für den Überdrehzahlbereich eine größere Herausforderung. Auch im Auslegungspunkt müssen Abstriche bei idealer Anströmung gemacht werden. Da die Stufenkennfelder der betreffenden Stufen geändert werden, ist auch die Arbeitsumsetzung eine andere.
Ein gesamtkonzeptioneller Ansatz auf Triebwerksebene ist die Mehrwelligkeit. Hohe positive und negative Inzidenzwinkel im Offdesign-Bereich werden hier dadurch verhindert, dass weniger Verdichterstufen auf einer Welle arbeiten und auf die gleiche Drehzahl n angewiesen sind. Im Teildrehzahlbereich beispielsweise ist die Umfangsgeschwindigkeit u im Vergleich zu c_{ax} in den ersten Stufen zu hoch. Eine langsamer drehende Welle kann auch die ersten Stufen in einem besseren Inzidenzwinkelbereich betreiben. Zwei- beziehungsweise Dreiwelligkeit hat sich durchgesetzt, im zivilen Bereich ist sie eine Voraussetzung um hohe Nebenstromverhältnisse und damit die hohe Effizienz heutiger Triebwerke zu ermöglichen. Nur durch langsamer drehende Niederdruckwellen ist es möglich große Fans zu betreiben, ohne Stoßinduzierte Lärmquellen an den Fanspitzen zu erzeugen.
Ein verdichterspezifisches passives Mittel zur Stabilisierung im gesamten Betriebsbereich stellen so genannte *Casing-Treatments* dar. Dies sind Gehäusekonturierungen im Bereich des Radialspaltes des Rotors. Sie haben die Aufgabe den Pumpgrenzabstand zu vergrößern. Die in transsonischen Verdichterlaufschaufeln auftretende Interaktion von Lekageströmung, Stoßfront und Grenzschichtfluid kann dadurch in positiver Art und Weise beeinflusst werden. Das Aufplatzen eines etwaigen Spaltwirbels soll verhindert oder verringert werden. Unterschieden werden die Casing Treatments in Konturierungen mit axialsymmetrischen Umfangsnuten und axialen Schlitzen. Auch Kombinationen von axialen Schlitzen und Umfangsnuten sind denkbar. Müller [17] untersucht den Einsatz von symmetrischen Umfangsnuten und ermittelt eine Vergrößerung des Pumpgrenzabstandes um 4,1% bis 7.2%, je nach Testgeometrie. Gleichzeitig fällt der Stufenwirkungsgrad um 0,5%. Im Vergleich mit den von ihm gewählten axialen Schlitzgeometrien, ist das Potential zur Vergrößerung der Pumpgrenzabstandes jedoch deutlich geringer. Die axialen Schlitze vergrößern den Pumpgrenzabstand um etwa 20%-25%. Allerdings fällt auch der Wirkungsgradverlust der Verdichterstufe deutlicher aus. An den Punkten maximalen Wirkungsgrades sind die Wirkungsgrade 1.1% geringer. Mit einer ähnlichen Gehäusekontur konnten Danner et al. [18] zeigen, dass neben erhöhten Pumpgrenzabständen zumindest im Auslegungspunkt ein erhöhter Stufenwirkungsgrad erreicht werden konnte. Casing Treatments werden bereits im Mitteldruckverdichter des Triebwerks *TP400-D6* erfolgreich eingesetzt und konnten dort den sonst notwendigen Einsatz von verstellbaren Verdichterleitgittern verhindern [19].

Zu den aktiv gesteuerten Maßnahmen zählt das Abblasen von Verdichterluft, welches vor allem bei niedrigen Drehzahlen wie beispielsweise beim Hochfahren des Triebewerks benutzt wird. Abblaseventile werden sowohl zur Zwischenabblasung als auch zur Abblasung hinter dem Verdichter verwendet. Bei Abblasung stromab des Verdichters wird die Geometrie des eigentlichen Verdichters nicht geändert, das Verdichterkennfeld bleibt somit gleich. Lediglich der Betriebspunkt ändert sich. Dies lässt sich anhand des Leistungsgleichgewichtes zwischen

Turbine und Verdichter

$$\dot{m}_2 \cdot c_{p,V} \cdot T_{t,2} \cdot \left(\left(\frac{p_{t,3}}{p_{t,2}} \right)^{\frac{R}{c_{p,V} \cdot \eta_{V,n}}} - 1 \right) = \dot{m}_4 \cdot c_{p,T} \cdot T_{t,4} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_{t,5}}{p_{t,4}} \right)^{\frac{R \cdot \eta_{T,n}}{c_{p,T}}} \right) \tag{2.13}$$

veranschaulichen. Die Größen $\eta_{V,n}$ und $\eta_{T,n}$ stellen dabei den polytropen Wirkungsgrad von Verdichter und Turbine dar. Nach dem Verdichterdruckverhältnis $\Pi = \frac{p_{t,3}}{p_{t,2}}$ aufgelöst ergibt sich

$$\Pi = \left[\frac{\dot{m}_4}{\dot{m}_2} \cdot \frac{c_{p,T}}{c_{p,V}} \cdot \frac{T_{t,4}}{T_{t,2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_{t,5}}{p_{t,4}} \right)^{\frac{R \cdot \eta_{T,n}}{c_{p,t}}} \right) + 1 \right]^{\frac{c_{p,v} \cdot \eta_{V,n}}{R}} . \tag{2.14}$$

Unter der Voraussetzung konstanter Turbinenleistung - ermöglicht durch erhöhte Treibstoffzufuhr - bleiben alle auftretenden Quotienten der rechten Seite gleich, lediglich der Quotient der Massenströme wird aufgrund der Abblasung kleiner. Somit wird Π kleiner. Insgesamt wird sich also die Betriebslinie absenken und zu einem größeren Pumpgrenzabstand führen. Da unter der Voraussetzung konstanter Turbinenleistung auch der Quotient der Totaltemperaturen gleich bleiben muss, ergibt sich ein erhöhter Treibstoffbedarf, um $T_{t,4}$ trotz geringerer Verdichtung zu gewährleisten. Das Druckniveau am Austritt der Turbine wird ebenfalls kleiner, der nutzbare Schub wird somit geringer. Die Abblasung ist damit ein effektives aber ineffizientes Mittel die Verdichterstabilität sicherzustellen. Die ungenutzte abgeblasene Verdichterluft kann in den Nebenstrom geleitet werden, um dort zum Schub beizutragen.
Im Falle einer Zwischenabblasung ergibt sich im Teildrehzahlbereich ein weiterer stabilisierender Effekt. Das geöffnete Ventil wirkt entdrosselnd auf den stromauf befindlichen Teil des Verdichters. Dies führt zu einem steigenden Massenstrom am Verdichtereintritt, wodurch $c_a x$ ansteigt und eine Anströmung geringerer Inzidenz ermöglicht. Die ersten Verdichterstufen werden somit entlastet. Das entsprechende Stufenkennfeld einer ersten Verdichterstufe bei Zwischenabblasung ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Da die Zwischenabblasung effektiv den

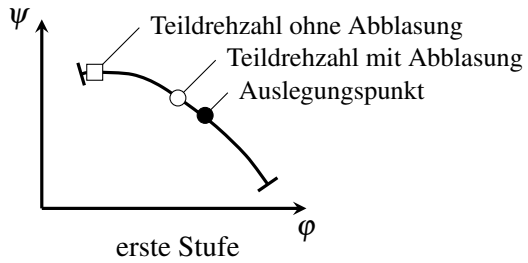
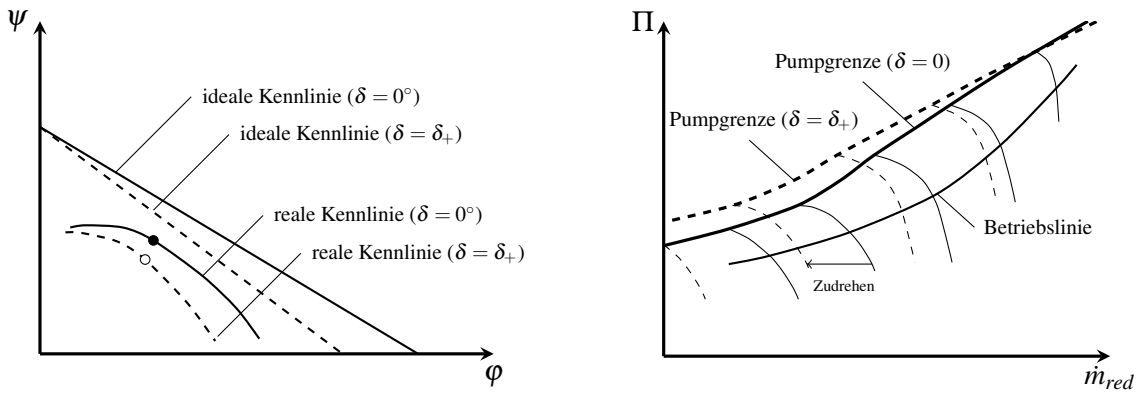


Abbildung 2.5.: Qualitative Darstellung eines Stufenkennfelds einer vorderen Verdichterstufe bei Auslegungsdrehzahl, Teildrehzahl mit und Teildrehzahl ohne Abblasung

Querschnittsverlauf des Verdichters ändert, bleibt auch das Verdichterkennfeld nicht unbeeinflusst. Der Betriebsbereich der ersten Verdichterstufen vergrößert sich in Richtung Teildrehzahl. Somit verschiebt sich auch die Pumpgrenze im niedrigen Drehzahlbereich nach links. Der Einfluss der Abblasung auf das Verdichterkennfeld wird in Salchow [20] exemplarisch dargestellt.

Eine effizientere Möglichkeit der aktiv gesteuerten Maßnahmen ist die Leitgitterverstellung. Das vorrangig im Hochdruckverdichterbereich eingesetzte Verdrehen einer oder mehrerer Statorgitter verändert - anders als das Abblasen - nicht die Betriebslinie, sondern direkt das Verdichterkennfeld. Damit wird direkt auf die Fehlanströmung im Teildrehzahlbereich mit einer Änderung der Metallwinkel der Schaufeln reagiert. Die Notwendigkeit und das Vorzeichen der Verdrehung lassen sich leicht aus den zuvor eingeführten Zusammenhängen im Stufenkennfeld einer vorderen Verdichterstufe darstellen. Wie in Abbildung 2.4 dargestellt ist, befinden sich die ersten Stufen bei $n < n_{ADP}$ im Bereich hoher Leistungszahl ψ und sind damit ablösegefährdet. Um die Leistungszahl zu verringern, leitet sich aus der Herleitung der idealen Stufenkennlinie in Gleichung (2.12) ab, dass entweder β_2 oder α_1 vergrößert werden müssen. Dadurch wird die Kurve des idealen Stufenkennfeldes steiler und die Leistungszahl sinkt wie in Abbildung 2.6a dargestellt. Da Rotoren hohen Fliehkräften ausgesetzt sind und deren Aufhängung an der Nabe hoch belastet ist, ist deren Verstellung konstruktiv schwierig. Die Verdrehung der Leitschaufeln und damit die Veränderung von α_1 erscheint einfacher möglich. Wie bereits gezeigt, müssen die Leitschaufeln in Richtung eines größeren Anströmwinkels α_1 verdreht werden, womit die Fläche des engsten durchströmten Querschnitts verkleinert wird. Diese Verstellung im Teildrehzahlbereich wird als *Zudrehen* bezeichnet. Das Verdrehen der Leitschaufeln wird mit dem Drehzahlparameter gesteuert, worauf in Unterabschnitt 2.1.2.1 näher eingegangen wird. Aufgrund der geometrischen Änderungen am Verdichter und der dadurch geänderten Stufenkennfelder, ergibt sich ein verändertes Verdichterkennfeld. Wie in Abbildung 2.6b deutlich wird, verändert sich neben der im Teildrehzahlbereich höheren



(a) Stufenkennfeld erste Stufe (b) Verdichterkennfeld, angelehnt an Horn [21]

Abbildung 2.6.: Darstellung der Leitgitterverstellung eines Verdichters mit nomineller (durchgezogen) sowie zugedrehter (gestrichelt) Leitgitterstellung im Stufenkennfeld einer ersten Stufe (a) sowie im Verdichterkennfeld (b)

Pumpgrenze auch der Zusammenhang zwischen Drehzahlparameter und Massenstromparameter [22][21]. Der Pumpgrenzabstand nimmt insbesondere im Teildrehzahlbereich zu. Die Linien konstanten Drehzahlparameters verschieben sich in Gebiete geringeren Massenstroms. Zudem steigt im Teildrehzahlbereich der Wirkungsgrad im Vergleich zum Verdichter ohne Leitgitterverstellung wie in Gallar et al. [22] dargestellt. Die Betriebslinie ist in Abbildung 2.6 unverändert dargestellt. Dies ist nach Gallar et al. [23] nur in erster Näherung korrekt.

Der exakte Einfluss der Gitterverstellung auf die Betriebslinie ist durch den geänderten Wirkungsgrad bestimmt und in Gallar et al. [23] dargestellt. Auf die Steuerung, die mechanische Funktionsweise, sowie die Auslegung des Verstellungssystems wird in Unterabschnitt 2.1.2 genauer eingegangen.
Instabilitäten haben ihren Ursprung häufig im Bereich des Radialspaltes der Rotorschaufeln. Eine gesteuerte Einflussnahme auf die Spaltströmung stellt die Einblasung dar, welche stromauf des Rotors im Bereich des Radialspaltes stabilitätsverbessernd wirken kann. Der Effekt ist auf die Energetisierung der Grenzschicht, sowie das Korrigieren der Geschwindigkeitsdreiecke im Gehäusebereich zurückzuführen [24] [25]. Die Einblasedüsen gleichen dabei den fehlenden Axialanteil im Geschwindigkeitsdreieck im Gehäusebereich des Rotors aus. Nach Cassina et al. [24] sowie Suder et al. [25] kann durch die Einblasung der kritische Gehäuseschnitt der Rotorschaufel entlastet werden, wodurch die Belastung der Gesamtschaufel erhöht werden kann. Durch diese Entschärfung, lässt sich in der Folge das Stufenkennfeld des betreffenden Rotors in Richtung kleinerer Durchsätze erweitern. Dies führt im Gesamtverdichter ebenfalls zu einer Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung kleinerer Durchsätze wie in Scheidler et al. [26] sowie in Weigl et al. [27] gezeigt wird. In Suder et al. [25] wird der Einfluss der Einblasung auf das Verdichterkennfeld anschaulich auf Basis der Daten von Weigl et al.[27] dargestellt.
Im Triebwerk muss die eingeblasene Luft dem Verdichter stromab entzogen werden, weshalb von Umblasen gesprochen wird. Dies führt zu Effizienzeinbußen, da bereits verdichtete Luft dem Verdichter wieder entzogen wird. Ziel ist es deshalb, die eingeblasene Luftmenge möglichst gering zu halten.

Aktiv geregelte Maßnahmen greifen nicht auf eine feste Steuerfunktion zurück, wie es beispielsweise bei den derzeit kommerziell eingesetzten Leitgitterverstellungen der Fall ist, sondern haben das Ziel Strömungsinstabilitäten als Vorstufen von kritischen Verdichterzuständen zu detektieren und über eine Regelgröße zu eliminieren. Dabei ist die Regelgröße nicht fest mit einer Ähnlichkeitsgröße gekoppelt.
Bei Haynes et al. [28] wird eine über den Umfang variable Leitgitterverstellung gezeigt, welche auf erkannte umlaufende Störungen aktiv mit umfangs- und zeitvariabler Verstellung der Verstellstatoren reagiert. Dazu werden die Geschwindigkeitsfluktuationen stromauf des dreistufigen Verdichters analysiert und über einen Regelkreis in die entsprechende Antwort der Regelgröße umgeformt. Die Regelung basiert auf einem hydrodynamischen Instabiltätsmodell von Moore und Greitzer, welches von Haynes et al. erweitert wurde. Es gelingt den Betriebsbereich um bis zu 8% zu vergrößern.
Aufbauend auf dem Modell von Haynes et. al untersuchen Hendricks und Gysling [29] verschiedene Arten von Aktuatorsystemen theoretisch auf ihr bestmögliches Potential der Erweiterung des Betriebsbereiches. Dabei werden neben den von Haynes untersuchten Verstellleitgittern auch auf dem Umfang verteilte Einblasdüsen stromauf sowie Abblaseventile stromab untersucht. Hendricks und Gysling stellen fest, dass das Potential von Einblasedüsen am größten und deutlich größer als das von Verstellleitgittern ist. Der negative Einfluss durch die Verwendung von schon verdichteter Einblaseluft auf die Effizient des Verdichtungssystems wird nicht quantifiziert. D'Andrea et al. [30] konnten zeigen, dass eine Stabilisierung durch gepulste Einblasedüsen auf halbe Schaufelhöhe möglich ist. Bereiche abgelöster Strömung wurden

hierbei durch Wanddruckbohrungen detektiert.
Scheidler [26] konnte bei allen gemessenen Drehzahlen in einem Niederdruckverdicherkennfeld ebenfalls den Vorteil von geregelter Einblasung gegenüber Konstanteinblasung stromauf des Rotorspaltbereiches aufzeigen. Der notwendige Einblasemassenstrom konnte durch die Regelung deutlich reduziert werden. In Weigl et al. [27] wird eine geregelte Einblasung einer konstanten Einblasung gegenübergestellt. Die Visualisierung dieser Daten in einem Verdichterkennfeld findet sich in Suder et al.[25].
Aktiv geregelte Maßnahmen haben neben dem positiven Einflüssen auf die Stabilität den Nachteil, dass komplexe Regelkreise implementiert und schwere Aktuatoren am Triebwerk verbaut werden müssen. Dies beeinflusst den Wartungsaufwand, die Triebwerksmasse und den Bauraum nachteilig. Weitere Beispiele und Literaturhinweise zu aktiv geregelten Maßnahmen finden sich bei Horn[21].

2.1.2. Leitgitterverstellung in der Verdichteraerodynamik

2.1.2.1. Gitterverstellung und Ähnlichkeit

Wie bereits in Unterabschnitt 2.1.1.3 dargelegt ist der Verstellwinkel δ fest an eine Stellgröße gekoppelt. Nach Babic und Urban [31] ist diese Stellgröße üblicherweise die reduzierte Drehzahl $n_{red} = \frac{n}{\sqrt{T_t}}$. Da die reduzierte Drehzahl selbst die Regelgröße darstellt, deren Sollwert eingestellt werden soll, handelt es sich bei der Leitgitterverstellung lediglich um eine Steuerung und nicht um eine Regelung. Nachdem ein Betriebspunkt auf der Arbeitslinie eines Verdichters durch je zwei der drei Ähnlichkeitskenngrößen $\dot{m}_{red}$, n_{red}, Π eindeutig definiert ist, ergibt sich auch die Notwendigkeit eines durch eine Ähnlichkeitskenngröße gesteuerten Verstellwinkels δ.
Die Wahl von n_{red} als Stellgröße wird durch folgende Überlegungen noch deutlicher. Ein ähnlicher Betriebspunkt beziehungsweise Strömungszustand am Gitter ist, unter Vernachlässigung der Reynoldszahl-Ähnlichkeit, dadurch gekenntzeichnet, dass alle Strömungsrichtungen α und Machzahlen Ma gleich sind. In der Anströmung eines Stators führt diese Ähnlichkeit dazu, dass auch die axiale Anströmmachzahl

$$Ma_{0,ax} = Ma_0 \cdot \cos(\alpha_0) \tag{2.15}$$

gleich sein muss, wie im Geschwindigkeitsdreieck in Abbildung 2.7 deutlich wird. Diese axiale Machzahl lässt sich als Funktion des reduzierten Massenstroms $Ma_{1,ax} = Ma_{1,ax}\left(\dot{m}_{1,red}\right)$ darstellen, wie beispielsweise in Bräunling [32] gezeigt wird. Ist somit der reduzierte Massenstrom bezüglich der Anströmung in zwei Betriebspunkten gleich, ist die Anströmung aerodynamisch ähnlich. Mit bekanntem $\dot{m}_{0,red}$ und bekanntem Abströmwinkel nach dem Stator α_1 ergibt sich die Abströmmachzahl des Stators Ma_1 nach Babic und Urban [31] eindeutig. Dies gilt streng genommen nur bei bekanntem Gitterverlust. Unter dieser Annahme ergibt sich $Ma_1 = Ma_1\left(\dot{m}_{0,red}, \alpha_1\right)$ und umgekehrt auch

$$\dot{m}_{0,red} = \dot{m}_{0,red}\left(Ma_1, \alpha_1\right). \tag{2.16}$$

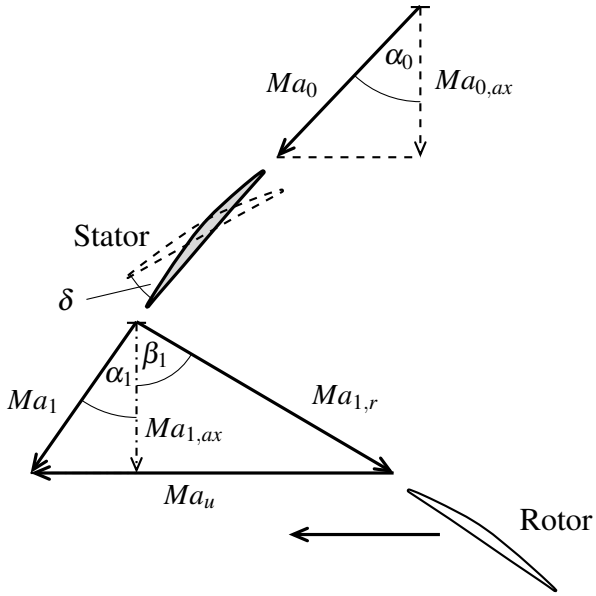


Abbildung 2.7.: Darstellung der Machzahl-Dreiecke an einer Paarung Verstellstator - Rotor. Das gestrichelt dargestellte Profil beschreibt einen *zugedrehten* Verstellstator

Da auch für die Rotoranströmung die Machzahl-Ähnlichkeit gefordert wird, sind im Relativsystem die Anströmmachzahl $Ma_{1,r}$ und der Anströmwinkel β_1 gegeben. In Anbetracht des Machzahldreiecks ist leicht ersichtlich, dass sowohl $Ma_1 = Ma_1\left(Ma_u, Ma_{1,r}, \beta_1\right)$ als auch $\alpha_1 = \alpha_1\left(Ma_u, Ma_{1,r}, \beta_1\right)$ gilt. Unter der Voraussetzung das die Anströmung des Rotors festgelegt ist, bedeutet dies, dass sowohl Ma_1 als auch α_1 lediglich von Ma_u abhängig sind. Die Machzahl der Umfangsgeschwindigkeit lässt sich mithilfe eines Ähnlichkeitsparameters darstellen als $Ma_u = Ma_u\left(n_{red}\right)$ wie ebenfalls in Bräunling [32] gezeigt wird. Aus Gleichung (2.16) ergibt sich damit

$$\dot{m}_{0,red} = \dot{m}_{0,red}\left(Ma_1\left(n_{red}\right), \alpha_1\left(n_{red}\right)\right). \tag{2.17}$$

Der Einfluss eines Verstellstators beeinflusst den Abströmwinkel als Funktion des Verstellwinkels in der Form $\alpha_1 = \alpha_1\left(\delta\right)$. Damit ergibt sich aus Gleichung (2.17)

$$\dot{m}_{0,red} = \dot{m}_{0,red}\left(Ma_1\left(n_{red}\right), \delta\left(n_{red}\right)\right) = \dot{m}_{0,red}\left(n_{red}\right). \tag{2.18}$$

Ein aerodynamisch ähnliches Verhalten ergibt sich somit nur dann, wenn der Verstellwinkel δ von n_{red} gesteuert wird und es somit eine eindeutige Paarung $\dot{m}_{0,red}$, n_{red} gibt.
Babic und Urban [31] argumentieren weiter, dass der Verstellwinkel prinzipiell auch über andere Ähnlichkeitsgrößen, welche wiederum eindeutig von n_{red} abgeleitet sind, gesteuert werden kann. So ist die Steuerung des Verstellwinkels wegen gegebenenfalls besserer mathematischer Kondition präziser möglich.
Nach Bräunling [32] wird die Steuerung der Verstellwinkels in der Praxis über die Kraftstoffregelung vorgenommen, welche auch direkt Einfluss auf die Drehzahl hat. Die am Faneintritt gemessene Umgebungstemperatur stellt dabei eine weitere Steuergröße dar, deren Ein-

fluss in Bräunling [32] beschrieben wird. Nach Grieb [33] sind neben einer Steuerung über den Drehzahlparameter auch Regelungen über weitere Triebwerksparameter üblich, um etwa transiente Betriebszustände zu berücksichtigen.

2.1.2.2. Einsatz der Leitgitterverstellung

Wie bereits in Unterabschnitt 2.1.1.3 erwähnt, sind verstellbare Leitgitter vor allem für den Teillastbetrieb von Axialverdichtern in Flugtriebwerken im Einsatz. Der Verstellung von Leiträdern in Axialverdichtern kommt jedoch auch in anderen Industriezweigen entscheidende Bedeutung zu. Verstellleitgitter werden beispielsweise in Verdichtern von Industriegasturbinen verwendet, um die Drehzahl an die Netzfrequenz anzupassen [22]. Nach Boos [34] kommen sie auch in der verfahrenstechnischen Industrie, wie beispielsweise bei Luftzerlegungsanlagen vor, um die Anlagen im Teillastbereich effizient zu betreiben. Im Folgenden wird sich auf den Einsatz in Flugtriebwerken konzentriert.
Verstellleitgitter sind meist nur in den ersten Stufen der Hochdruckverdichter im Einsatz. Walsh und Fletcher [35] erwähnen hierbei eine Grobabschätzung, nach der für jede Verdichterstufe, welche die Anzahl von fünf Stufen auf einer Welle überschreitet, eine Reihe von Verstellleitgittern notwendig sind. Dies gilt unter der Annahme, dass keine gesteuerten Ablasventile im Einsatz sind. Bei Dreiwellentriebwerken müssen gegebenenfalls auch die Mitteldruckverdichter mit verstellbaren Leitgittern ausgestattet werden. Im Trent 500 von Rolls-Royce werden im achtstufigen Mitteldruckverdichter ein variables Eintrittsleitrad VIGV, sowie zwei weitere variable Verdichterreihen VSV nötig [36].
Konstruktiv wird die Leitgitterverstellung mithilfe von Verstellhebeln und -ringen umgesetzt. Verlängerungen der Schaufelachsen aller Leitschaufeln auf einer Reihe erstrecken sich durch den Gehäuseringraum hindurch. An diesen Verlängerungen sind Schaufelverstellhebel angebracht, welche wiederum mit einem Verstellring verbunden sind, welcher das Gehäuse umschließt. Wird dieser Verstellring gegenüber dem Gehäuse verdreht, ändert sich der Verdrehwinkel der Schaufelverstellhebel und damit der Staffelungswinkel der Leitgitterschaufeln. Für jedes Leitgitter mit variablen Leitschaufeln befindet sich ein Verstellring am Gehäuse. Diese Verstellringe ermöglichen eine individuelle Ansteuerung des jeweiligen Schaufelgitters und damit eine separate Regelung der Verstellwinkel. Die konstruktive Umsetzung der Verstellkinematik mit Hebeln, Lagern, Verstellringen und Aktuatoren ist sehr komplex, raumgreifend und vor allem mit einer höheren Triebwerksmasse und höheren Kosten verbunden. Aus diesem Grund werden Verstellkinematiken meist mit nur einem Aktuator ausgeführt [22]. Dies führt dazu, dass die separate Steuerung jedes Verstellleitgitters nicht möglich ist. Stattdessen sind die Verstellringe über eine feste Hebelkinematik miteinander verbunden. Eine solche Hebelkinematik ist beispielhaft in Abbildung 2.8 für das Triebwerk J79 dargestellt. Für dieses Triebwerk wurden erstmals Verstellstatoren eingesetzt. Die konstruktive Ausführung der Verstellkinematiken hängt stark vom Hersteller beziehungsweise vom konkreten Triebwerk ab.
Insgesamt ergibt sich aus der Kinematik ein von der Aktuatorstellung abhängiges Verstellgesetz. Ein solches Verstellgesetz ist beispielhaft in Gallar et al. [22][23] dargestellt. Die Definition des Verstellgesetzes ist das Resultat aus umfangreichen Rig-Tests wie Gallar et al. [22] beschreibt. Für verschiedene Betriebspunkte des Verdichters werden die besten Verstellwinkelkombinationen der Verstellreihen ermittelt. Dabei werden die Verstellringe zunächst

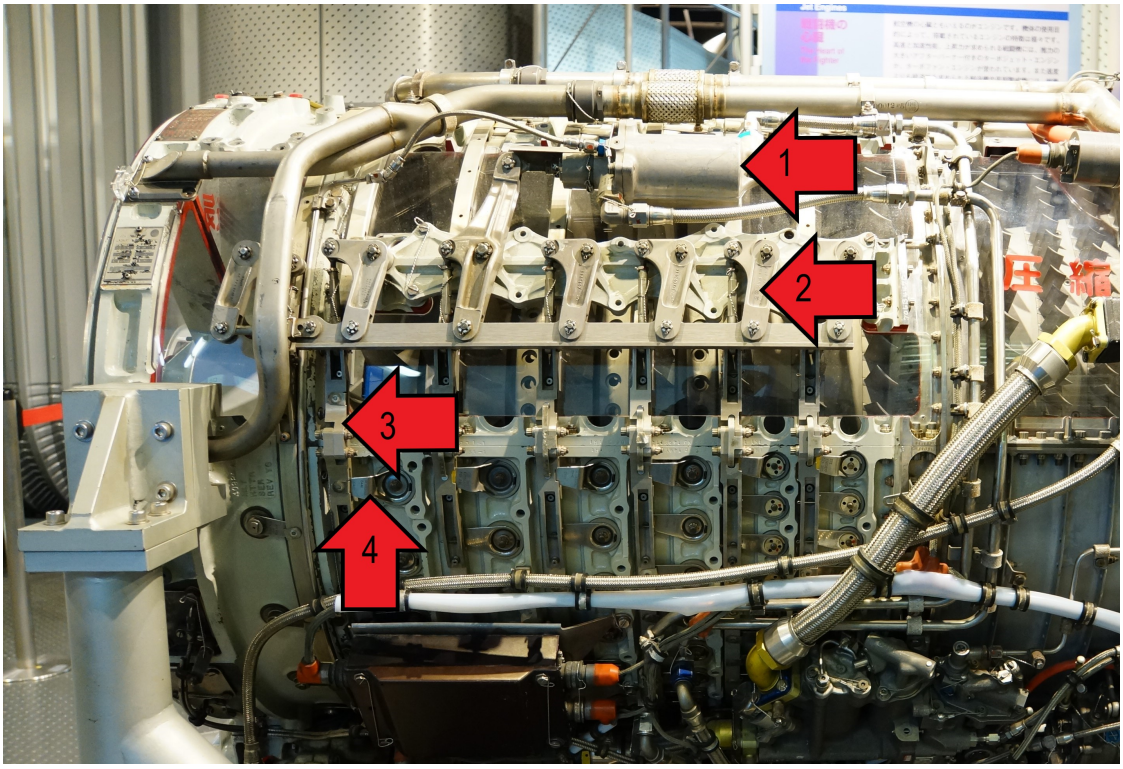


Abbildung 2.8.: Verstellhebelkinematik eines aufgeschnittenen J79-Triebwerks. Markiert sind 1) Aktuator, 2) Koppelkinematik, 3) Verstellring, 4) Schaufelverstellhebel[2]

unabhängig voneinander angesteuert. In Kenntnis der optimalen Winkel für jeden Betriebspunkt muss nun ein Verstellgesetz gefunden werden, welches diese idealen Winkelstellungen in allen Betriebspunkten für alle Verstellgitter möglichst gut abbildet. Dabei müssen aufgrund der Einschränkung durch die feste Kinematik Kompromisse gefunden werden. Dieses Vorgehen stellt aufgrund der hohen Anzahl an Experimenten einen hohen Aufwand dar und ist mit hohen Kosten verbunden. Aus dem in Gallar et al.[22] vorgestellten Verstellgesetz wird deutlich was bereits in Unterabschnitt 2.1.1.3 erläutert wurde. Die aufgrund der Teildrehzahl entstandene Fehlanströmung ist in den ersten Stufen des Verdichters am größten. Somit muss auch dort der Verstellwinkel δ am größten ausfallen. Die Verstellwinkel der nachfolgenden Stufen nehmen sukzessive ab.

2.2. Verdichteroptimierung - Stand der Technik

Die aerodynamische Optimierung von Axialverdichtern wird im Folgenden grundlegend in zwei Bereiche unterteilt, die Optimierung im Rahmen der Vorauslegung und die Formoptimierung während der Detailauslegung. Optimierungen der Winkel von Verstellstatoren kommen

[2]Lizenzinformation: Bild von Hunini (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:J79-IHI-11A_turbojet_engine(cutaway_model)_compressor_section_left_side_view_at_JASDF_Hamamatsu_Air_Base_Publication_Center_November_24,_2014.jpg), Markierungen und Bezifferung von Sebastian Mann, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode

in der Literatur bisher nur im Rahmen der Vorauslegung vor. Im Folgenden wird auf beide Teilbereiche der Verdichteroptimierung je zunächst zusammenfassend und anschließend detailliert eingegangen.

2.2.1. Optimierung in der Verdichtervorauslegung

In Optimierungen während der Vorauslegung liegt das Hauptaugenmerk auf der Interaktion des Verdichtungssystems mit dem Gesamttriebwerk und seinen Komponenten. Zudem wird die Abstimmung des Verdichters bezüglich mehrerer Betriebspunkte definiert. Die tatsächliche Geometrie der Beschaufelung ist noch unbekannt oder nur bezüglich nötiger An- und Abströmwinkel bekannt. Optimierungen beziehen sich demnach noch auf grundlegende Parameter, wie Ringraumverlauf und Geschwindigkeitsdreiecke bei verschiedenen Betriebspunkten. Für aerodynamische Optimierungen werden dafür schnelllaufende Methoden verwendet, welche die Verdichteraerodynamik auf die grundlegenden Effekte vereinfachen. Hierbei kommen Mittelschnittsverfahren zum Einsatz, welche mit empirischen Verlustkorrelationen oder Verlustmodellen ergänzt werden [37][22]. Auch Stromliniengeometrieverfahren mit ergänzten Verlustmodellen werden eingesetzt [38][39] und oder mit Leistungsrechnungsmethoden gekoppelt [39]. Da die Stabilität über den gesamten Betriebsbereich in diesem Auslegungsschritt festgelegt wird, ist es sinnvoll hierbei die Verstellwinkel etwaiger Verstellstatoren zu definieren. Während Vorauslegungsoptimierungen werden ausgehend von einer überschaubaren Parameteranzahl eine Vielzahl von Betriebspunkten ausgewertet. Auf Basis dieser Daten können für den gesamten Verdichter relevante Größen wie der Pumpgrenzabstand und der Verdichterwirkungsgrad effizient abgeschätzt oder bestimmt werden. Bezüglich der Position der Pumpgrenze werden entweder vereinfachende Annahmen, wie maximales Totaldruckverhältnis auf einer Drehzahllinie beziehungsweise horizontaler Verlauf der Drehzahllinie im Verdichterkennfeld [38][39] oder aber speziell entwickelte Kriterien verwendet [22][40].

Lihua et al. stellen in [37] ein Verfahren vor, in dem für verschiedene Teildrehzahlbereiche optimale Verstellwinkel der vier Verstellstatoren eines zehnstufigen Verdichters ermittelt und experimentell verifiziert werden. Dazu wird ein Mittelschnittsverfahren verwendet. Verlustmechanismen werden auf Basis empirischer Daten aus Kaskadentests berücksichtigt. Für den idealen Anströmwinkel im Teillastbereich werden die Verstellstatoren so justiert, dass sowohl Stator- als auch Rotoranströmwinkel bei Volllast möglichst ähnlich der Auslegungsinzidenz sind. Lihua et al. konnten somit eine gute Übereinstimmung der Methode mit den durchgeführten Tests zeigen. Sie konnten zeigen, dass die Stromaufwirkung der Verstellstatoren zu vernachlässigen ist und somit eine schrittweise Optimierung beginnend bei den stromauf liegenden Verstellstatoren möglich ist. In der Studie sind die Verstellstatoren ungekoppelt, der Pumpgrenzabstand wird lediglich im Experiment bestimmt und nicht berechnet. Lihua et al. beschreiben die Begriffe des *Overadjustments* und des *Jump-Adjustments*. Overadjustment beschreibt dabei die Zuviel-Verdrehung des Verstellstators zu Lasten des Wirkungsgrades mit dem Ziel eines größeren Pumpgrenzabstandes. Mit Jump-Adjustment wird eine Möglichkeit beschrieben die Ansteuerung für die zweite und dritte Verstellstufe einzusparen und trotzdem einen großen Pumpgrenzabstand zu gewährleisten.
In Shadaram et al. [38] wird eine Optimierung der drei Verstellgitter eines zehnstufigen Axi-

alverdichters mithilfe eines genetischen Algorithmus vorgestellt. Als Modell dient ein Stromliniengeometrieverfahren in dem Profilverluste, Sekundärströmungsverluste, Nabe- und Gehäusegrenzschichteinfüsse sowie Spaltverluste und Winkelabweichungen mithilfe von ergänzenden Modellen berechnet werden. Der Pumpgrenzabstand wird mit der Definition aus Gleichung (2.6) berechnet. Die Pumpgrenze wird dort definiert, wo die Drehzahllinie einen Anstieg von null aufweist. Shadaram et al. können die gute Übereinstimmung zum Experiment im Teillastbereich zeigen. Es werden drei Optimierungskampagnen durchgeführt, in dem sukzessive zunächst die IGV-Verstellreihe, dann die ersten zwei und schließlich alle drei Verstellreihen optimiert werden. Im Gegensatz zu Lihua et al. [37] ergeben sich in den verschiedenen Kampagnen deutlich unterschiedliche optimale Stator-Verstellwinkel. Es werden ebenfalls diskrete Drehzahlen angefahren, Massenströme und Druckverhältnisse ergeben sich dementsprechend.
Sun und Elder [40] sind mit einem speziellen Pump-Vorhersageverfahren nach eigener Einschätzung in der Lage, den Pumpgrenzpunkt zuverlässig zu bestimmen. Ihr auf der Stage-Stacking-Methode [3] beruhendes Mittelschnittsverfahren wird mit diesem Vorhersageverfahren und einem Optimierungsverfahren, welches auf einem Simplex-Verfahren beruht, gekoppelt. Auf Basis dessen werden die Staffelungswinkel von Verstellstatoren in einem siebenstufigen Verdichter optimiert. Neben dem Wirkungsgrad η als Zielgröße ist aufgrund der Verfügbarkeit des Pumpgrenz-Vorhersageverfahrens auch eine Optimierung des kleinstmöglichen Durchsatzes bei einer gegebenen Drehzahl möglich. Sun und Elder führen mit dem Verfahren verschiedene Studien durch, wobei sie sukzessive drei Betriebspunkte betrachten. Im hohen Drehzahlbereich sind die hinteren Stufen stabilitätsentscheidend, im Teildrehzahlbereich die vorderen. Dementsprechend werden in den verschiedenen Studien nur die hinteren beziehungsweise vorderen Verstellstatorwinkel optimiert.
Gallar et al. stellen in [22] ein Mittelschnittsverfahren vor, mit dessen Hilfe sie ein Verstellleitgitter-Schedule für einen großen Drehzahlbereich eines achtstufigen Axialverdichters optimieren können. Dazu werden Lieblein-basierte empirische Korrelationen verwendet um Verluste, Umlenkung und Grenzschichtwachstum an Nabe und Gehäuse zu berechnen. Der Pumpgrenzabstand wird mithilfe einer Abreiß-Inzidenz bestimmt, welche wiederum über eine spezielle Modellierung ermittelt wird. Im Gegensatz zu Lihua et al. [37] und Shadaram et al. [38] gewährleisten Gallar et al. [22], dass immer die gleichen Punkte im Verdichterkennfeld bezüglich reduziertem Massenstrom $\dot{m}_{red}$ und Druckverhältnis Π angefahren werden. Dadurch ergibt sich die jeweilige reduzierte Drehzahl entsprechend. Die zwangsläufige Auswirkung auf die Turbine wird über eine Wirkungsgrad-Drehzahl-Korrelation abgeschätzt und als nicht relevant erkannt. Gallar et al. nutzen ebenfalls einen genetischen Algorithmus und optimieren die drei Verstellwinkel ungekoppelt für verschiedene Betriebspunkte unter der Nebenbedingung eines Mindestwertes des Pumpgrenzabstandes. Der Verdichterwirkungsgrad kann dadurch insbesondere im Teillastbereich deutlich verbessert werden. Zudem wird die starke Abhängigkeit des Ergebnisses von der Pumpgrenzabstands-Nebenbedingung gezeigt.
Die Interaktion zwischen lokalem Verdichterbetriebsverhalten und Gesamttriebwerk wird in Reitenbach et al. [39] im Rahmen einer Multi-Fidelity-Optimierung wiedergegeben. Es wer-

[3] Die Stage-Stacking-Methode approximiert das Verhalten eines mehrstufigen Verdichters auf Basis der Kenntnis der einzelnen Stufenkennfelder.

den ein Stromliniengeometrieverfahren zur Beurteilung der Verdichteraerodynamik mit einem 0D-Triebwerksmodell gekoppelt. Während eines Prozesskettendurchlaufs werden zunächst die Winkel der Verstellstatoren definiert. Nachfolgend wird mit einer Reihe von Rechnungen im Stromliniengeometrieverfahren ein Verdichterkennfeldausschnitt erstellt. Dabei wird auch die Pumpgrenze approximativ bestimmt. Auf Basis dieses Teilverdichterkennfeldes wird eine 0D-Triebwerksrechnung durchgeführt, welche den genauen Betriebspunkt definiert und die Zielfunktionale schubspezifischer Treibstoffverbrauch $TSFC$ und Pumpgrenzabstand SM bestimmt. Mit den dadurch bekannten Eintrittsrandbedingungen für jeden Betriebspunkt und der dazugehörigen Drehzahl wird nochmals das Stromliniengeometrieverfahren bemüht, um die Größen für die Nebenbedingungen DeHaller Zahl DH und Diffusionsfaktor DF zu bestimmen. Dieses Verfahren wird in Reichenbach et al. auf einen neu ausgelegten Hochdruckverdichter der V2500-A5 angewandt, in welchem vier der zehn Stufen über Verstellstatoren verfügen. Es werden drei verschiedene Betriebspunkte betrachtet. Im Rahmen der Optimierung wurden mit einem genetischen Algorithmus Paretofronten zwischen den Größen $TSFC$ und SM für jeden Betriebspunkt aufgespannt. Deren Randpunkte zeigen exemplarisch das Potential der Verbesserung, welche mit dem Vorgehen möglich sind. Es wird gezeigt, dass im Punkt des besten $TSFC$ eine $TSFC$-Verbesserung mit gleichzeitiger Verbesserung des Pumpgrenzabstandes gegenüber dem Startzustand möglich ist. Der Punkt des besten Pumpgrenzabstandes geht mit leichten Einbußen beim $TSFC$ einher.

2.2.2. 3D-Formoptimierung

Die 3D-Formoptimierung wird einerseit in einer erweiterten Konzeptphase eingesetzt, in welcher der Ringraumverlauf weiterhin als freier Parameter modelliert wird. Die Beschaufelungsparametrisierung ist dabei entweder regelbasiert abgeleitet oder grob geometrisch parametrisiert. In der Detailauslegung andererseits sind die aerodynamischen Randbedingungen wie Drehzahl, Massenstrom, Anströmzustand sowie der grundlegende Ringraumverlauf meist bekannt. Es ist das Ziel, für die gefundenen Randbedingungen, eine möglichst in allen Betriebspunkten effiziente Beschaufelungsgeometrie zu finden. Im Folgenden wird sich auf die Anwendung der 3D-Formoptimierung im Rahmen von Detailauslegungen konzentriert. Optimierungsprozessketten nutzen dazu detaillierte RANS-Modelle der dreidimensionalen Strömungsmechanik. Aufgrund der hohen Ressourcenaufwände werden häufig nur einzelne Verdichtergitter oder -stufen [41][42][43][44] oder Teilkontrollvolumina eines Verdichters [45][46] in die Prozesskette aufgenommen. Zudem wird die Optimierung häufig nur im Auslegungspunkt oder wenigen verschiedenen Betriebspunkten durchgeführt. Im Gegensatz zu Optimierungen in der Vorauslegung ist die Anzahl der Parameter deutlich größer. Dementsprechend werden vorwiegend klassische gradientenbasierte Optimierungsverfahren verwendet. Die große Parameteranzahl führt dazu, dass zunehmend Ansätze unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens Verwendung finden. Dabei werden sowohl kontinuierliche Ansätze [42][43][44][46][47] als auch diskrete Ansätze [48][49][50], wie sie in Abschnitt 3.3 beschrieben sind, verwendet. Eine Optimierung der Winkel für Verstellstatoren sind, nach gegenwärtigen Informationsstand des Autors, in der Literatur bisher nicht Teil des Parameterraumes von 3D-Formoptimierungen. Die genaue Bestimmung von Pumpgrenzabständen ist zu aufwändig oder aufgrund der Beschränkung auf Teilkontrollvolumina nicht sinnvoll. Übliche Zielgrö-

ßen sind der Wirkungsgrad η oder als Ersatz dessen, die Zunahme der spezifischen Entropie $\frac{\Delta s}{R}$. Bei Optimierung einzelner Stufen oder Gitter ist außerdem das Totaldruckverhältnis Π_t ein häufiges Teilziel [43][41]. Zur Einstellung des Betriebspunktes wird üblicherweise der Massenstrom $\dot{m}$ und oder das Totaldruckverhältnis Π_t verwendet. Da unter Anwendung des Adjungiertenverfahrens der Simulationsaufwand mit der Anzahl der Zielgrößen ansteigt, ist es üblich Zielgrößen in Form von gewichteten Quadratsummen zusammenzufassen [45][43] [43][46], um nur eine adjungierte Simulation je Gradientenschritt durchführen zu müssen.

Mithilfe eines speziellen genetischen Algorithmus errechnet Benini [41] im Rahmen einer Multi-Objective-Optimierung eine Paretofront der gleichberechtigten Ziele Wirkungsgrad η und Totaldruckverhältnis Π_t. Er nutzt dabei eine Bézierpunktbeschreibung der betrachteten Rotorschaufelprofile. Die Parametrisierung mit insgesamt 23 Parametern ermöglicht auch in Umfangsrichtung geneigte und gekrümte Lean- und Bow-Geometrien. Als Nebenbedingung dient der Massenstrom $\dot{m}$. Um viele ungültige Auswertungen wegen nicht korrekten Massenstroms zu verhindern, werden in einer Vorauswahl nur solche Geometrien bewertet, deren Engfläche benachbarter Schaufeln in einem vorgegebenen Bereich liegen. Benini kann mit dieser Vorgehensweise eine deutliche Verbesserung der Schaufel in Bezug auf die Zielgrößen erreichen. Die Wirkungsgradverbesserung wird dabei auf die Abschwächung von Stößen sowie das Aufspalten von Stößen in zwei schwache Stöße zurückgeführt. Die Möglichkeit der Krümmung und Neigung in Umfangsrichtung wird dabei von Benini als entscheidend erkannt. Wang und He stellen in einer sehr umfangreichen zweiteiligen Arbeit ein Adjungiertenverfahren zur Optimierung von mehrreihigen Verdichtern vor [47] und verfizieren dessen erfolgreichen Einsatz anhand mehrerer Optimierungen [45]. Es wird ein Mixing-Plane-Ansatz unter Nutzung der Adjungiertenmethode entwickelt, welcher die Interaktion von mehreren Verdichterreihen über eine, in der primalen Simulation schon üblichen, Mixing-Plane ermöglicht. Wang und He wählen den in Abschitt 3.3 erwähnten kontinuierlichen Ansatz und behandeln das im Strömungslöser vorhandene Spalart-Almaras Turbulenzmodell mit der in Abschnitt 3.3 dargestellten frozen-μ Vereinfachung. Zur Differentiation der Zielgrößen bezüglich des Netzes sowie der Strömungslösung wird das Verfahren der komplexen Variablen[4] verwendet. Sensitivitäten werden im 3D-Netz abgebildet. Die Präprozesskette bis zum 3D-Netz erfolgt konventionell mithilfe ausgelenkter Netze. Die umfangreichen Möglichkeiten der entwickelten Prozesskette werden im zweiten Teil der Arbeit von Wang und He [45] aufgezeigt. Ausgehend von einer Eingitter-Optimierung des Nasa 67 Rotors in einem Betriebspunkt mit 143 Variablen, wird die Anwendung der Mixing-Plane im Adjungiertenverfahren in Optimierungen mit zwei und drei Verdichtergittern in einem beziehungsweise drei Betriebspunkten durchgeführt und aerodynamisch ausgewertet. Dabei werden 275 beziehungsweise 331 Variablen verwendet. In einer kompletten Verdichteroptimierung mit sieben Verdichtergittern und dementsprechend 1023 Variablen zur Definition der Geometrie wird der Vorteil eines Adjungiertenverfahrens in der Optimierung am deutlichsten demonstriert. Die in allen Fällen verwendete Zielgröße Wirkungsgrad wurde unter den Nebenbedingungen Massenstrom und Totaldruckverhältnis in allen Optimierungen verbessert. Dabei wurden die Zielgrößen im Sin-

[4] Bei diesem Verfahren wird der Strömungslöser im komplexen Zahlenraum ausgeführt. Der Imaginärteil lässt sich dabei für die Berechnung der ersten Ableitung benutzen, was mithilfe der komplexen Definition der Taylorreihe gezeigt werden kann.

ne einer gewichteten Quadratsumme zusammengefasst, um den Aufwand der Auswertung der adjungierten Strömungslösung zu begrenzen. Im Fall der Mehrpunkt-Optimierung wurden zudem die Zielgrößen und Nebenbedingungen aller Betriebspunkte in einer großen gewichteten Quadratsumme zusammengefasst. Die erreichten Ergebnisse wurden aerodynamisch ausgewertet. Wie schon bei Benini [41] konnten die Verbesserungen durch eine lokale Verringerung der Stoßintensität jedoch auch durch eine radiale Umverteilung des nötigen Druckaufbaus erreicht werden.
Im Gegensatz zum kontinuierlichen Ansatz von Wang und He, entwickeln Frey et al. [48] einen diskret adjungierten Strömungslöser adjointTRACE, welcher eine diskret adjungierte Mixing-Plane-Beschreibung enthält. Die errechneten Gradientenwerte werden mit dem Vorgehen mit Finiten Differenzen verglichen und zeigen sehr gute Übereinstimmung.
Walther und Nadarajah nutzen in [50] ebenfalls einen Mixing-Plane-Ansatz mithilfe der Adjungiertenmethode für ihren diskret adjungierten 2D-Strömungslöser. Für das Menter k-ω SST Turbulenzmodell wird für den adjungierte Strömungslösung eine unveränderliche turbulente Viskosität angenommen. Optimiert wird eine Verdichterstufe. Als Variablen dienen die Oberflächennetzpunkte der beiden Verdichterschaufeln. Um eine glatte Schaufeloberfläche zu erhalten, wird eine nicht näher spezifizierte implizite Glättungsmethode verwendet. Zusätzlich müssen geometrische Nebenbedingungen dafür sorgen, dass Radien an Vorder- und Hinterkanten eingehalten werden. Als Zielfunktion wird der Entropieanstieg verwendet. Abgesehen von den geometrischen Nebenbedingungen werden die aerodynamisch Größen Massenstrom und Totaldruckverhältnis als Nebenbedingungen verwendet. Diese werden jedoch nicht im Sinne einer gewichteten Quadratsumme in die Zielgröße integriert, sondern mit einem SQP-Verfahren behandelt. In der Optimierung unter Nebenbedingungen konnte eine deutliche Verringerung des Entropieanstiegs erreicht werden. Es zeigt sich, dass die Massenstromnebenbedingung als restriktiver einzuschätzen ist als die Nebenbedingung des Totaldruckverhältnisses.
Backhaus et. al können in [49] zeigen, dass Vorteile von, mithilfe des Adjungiertenverfahrens berechneten, Gradienten nicht nur in klassischen Gradientenverfahren in der Verdichteraerodynamik Anwendung finden können. Die effizient gewonnene Gradienteninformation wird in zwei Antwortflächenmodellen genutzt, um die Vorhersagequalität der so genannten Meta-Modelle zu verbessern und die notwendige Datenbasis an konventionellen primalen Datensätzen zu verringern. Als adjungierter Löser wird TRACE beziehungsweise adjointTRACE benutzt. Dieser Strömungslöser ist eine Vorgängervariante, des in der vorliegenden Arbeit genutzten Strömungslösers, welcher in Frey et al. [48] beschrieben wird und einen diskreten Mixing-Plane-Ansatz enthält. Für beide Antwortflächenfunktionen, das gradientenunterstützte Kriging sowie das gradientenunterstützte neuronale Netz, konnte die verbesserte Vorhersage im Vergleich zu Modellen ohne Gradienteninformation gezeigt werden. Ausgehend von diesen Ergebnissen wurde eine Optimierung eines gegenläufigen Fans auf dem gradientenunterstützten neuronalen Netz durchgeführt. Die Basis für die Optimierung von 104 Parametern stellen dabei lediglich 45 Datensätze dar, für welche sowohl primale als auch adjungierte Berechnungen durchgeführt wurden. Aus dieser geschaffenen Datenbasis werden zwei neuronale Netze trainiert, welche die Zielgrößen Wirkungsgrad und Massenstrom bestmöglich abbilden sollen. Auf diesen Antwortflächen konnte mithilfe eines Augmented Lagrange-Verfahrens eine deutliche Verbesserung des Wirkungsgrades einer bereits gut voroptimierten Lösung unter

Einhaltung der Massenstromnebenbedingung erreicht werden.
John et al [51] führen eine auf Freiformflächen basierte Optimierung eines transsonischen Verdichterrotors mithilfe des adjungierten Strömungslösers *adjointHydra* durch. Dabei wird zusätzliche eine Netzadaption durchgeführt, welche höher aufzulösende Strömungseffekte anhand der Hessematrix der Machzahlverteilung im 3D-Netz ermittelt und bestehende Netzknoten entsprechend umverteilt. Die Netzadaption wird auf Basis schwach auskonvergierter Lösungen iterativ im Vorfeld der Sensitivitätsbestimmung, welche das Adjungiertenverfahren verwendet, durchgeführt. Auf dem Adjungiertenverfahren basierende Sensitivitäten der Zielgröße nach den Strömungsgrößen und den Netzknoten werden mit Sensitivitäten der Netzknoten auf die Auslegungsparameter auf Basis Finiter Differenzen kombiniert. John et al [51] können zeigen, dass die Netzadaption zu besseren Ergebnissen aber auch zu deutlich längeren Laufzeiten der Optimierung führt.
Die Vorteile einer Mehrpunkt-Optimierung im Gegensatz zu einer Optimierung an nur einem Betriebspunkt konnten Luo et al. [42] anhand einer Rotoroptimierung zeigen. Sie verwenden einen kontinuierlich adjungierten Strömungslöser mit dem in Abschnitt 3.3 eingeführten *frozen* μ *Ansatz* und können somit zeiteffizient die Gradienteninformationen der 288 Parameter bestimmen. Um auf einer Kennlinie des Kennfeldes Verbesserungen zu erreichen, werden drei Betriebspunkte einer Drehzahllinie in die Optimierung einbezogen. Ein Punkt nahe dem Strömungsabriss, ein Punkt nahe am gesperrten Zustand sowie am Auslegungspunkt. Wie schon bei Wang und He [45] wurden dabei Massenstrom und Totaldruckverhältnis als Nebenbedingungen verwendet und alle Zielgrößen in einer Zielfunktion mithilfe einer gewichteten Quadratsumme zusammengefasst. Im Gegensatz zur Ein-Punkt Optimierung zeigt sich eine Verbesserung im gesamten Kennfeld des Verdichters, insbesondere in der Stabilität des Niveaus des Totaldruckverhältnisses im Offdesign-Bereich. In einer weiteren Arbeit zeigen Luo und Liu [43] mit den gleichen Werkzeugen einen Ansatz zur Mehrzieloptimierung, wobei das Totaldruckverhältnis nicht länger als Nebenbedingung betrachtet wird, sondern als zweites Ziel maximiert werden soll. Die Mehrzieloptimierung wird jedoch als geschachtelte Ein-Zieloptimierung durchgeführt, weshalb auch hier das Verfahren des steilsten Abstieges verwendet werden kann.
Yu et al. weisen in ihrer Arbeit [46] darauf hin, dass es bei mehrstufigen Verdichteroptimierungen notwendig sei, die radialen statischen Druckverläufe zwischen den Gittern möglichst konstant zu halten. Deshalb entwickeln sie eine zusätzliche radiale Interface-Nebenbedingung für den statischen Druck, welche sie während der Optimierung konstant halten. Sie nutzen einen kontinuierliche adjungierten Strömungslöser. Der Mixing-Plane-Ansatz wird um die benötigte radiale Nebenbedingung ergänzt. Die turbulente Viskosität wird im adjungierten Lösungsanteil als konstant angenommen. Die Parametrisierung der Airfoils erfolgt mithilfe von Hicks-Henne-Funktionen. Aus dieser Diskretisierung heraus ergeben sich für das recht große zu berechnende Kontrollvolumen von elf Verdichtergittern 792 Parameter an den ersten sechs Verdichterschaufeln. Wie bei Wang und He [47] und Luo et al.[42] werden die Zielgrößen in ein Zielfunktional zusammengefasst. Das Zielfunktional enthält den Wirkungsgrad als Ziel, sowie Massenstrom, Druckverhältnis und radiale statische Druckverteilung als Nebenbedingungen. Die Nachrechnung der Optimierung zeigt eindeutige Verbesserungen, welche von Yu et al. [46] auf verringerte Stoßintensitäten zurückzuführen sind. Weshalb eine parallel durchgeführte Optimierung ohne die beschriebene radiale statische Drucknebenbedingung

auf ein schlechteres Ergebnis bezüglich des Wirkungsgrades führt, wird nicht begründet.
Yang et al [52] optimieren die letzte Statorschaufel eines 4,5-stufigen Verdichters. Zur Sensitivitätsberechnung wird ein kontinuierlicher Ansatz des Adjungiertenverfahrens verwendet. Dabei wird zunächst ein Betriebspunkt nahe der Pumpgrenze aerodynamische optimiert. Die Zielgröße wird als gewichtete Summe des Entropieanstiegs und der Massenstromnebenbedingung formuliert. Die erzielte aerodynamische Verbesserung wird auf eine vermiedene Ablösung zurückgeführt. Die beschriebene Prozesskette wird zusätzlich verwendet, um eine, zwei Betriebspunkte umfassende, Optimierung bei unterschiedlichen Drehzahlen durchzuführen. Beide Betriebspunkte befinden sich in der Nähe der Pumpgrenze. Die Zielgrößen und Nebenbedingungen der Betriebspunkte werden ebenfalls zueinander gewichtet zu einem Funktional zusammengefasst. Aufgrund der Ähnlichkeit der physikalischen Phänomene beider Betriebspunkte unterscheidet sich das Optimierungsergebnis kaum von der Optimierung mit einem Betriebspunkt. Yang et al [52] können zeigen, dass auch der in der Optimierung nicht berücksichtigte Betriebspunkt des besten Wirkungsgrades von der Verbesserung der pumpgrenznahen Betriebspunkte profitiert.

3. Grundlagen der numerischen Optimierung

3.1. Optimierungsverfahren

Numerische Optimierungsverfahren stehen in einer Vielzahl von Arten und Varianten für die automatisierte Verbesserung von Zielfunktionen zur Verfügung. Die Wahl des Optimierungsverfahrens ist immer im Kontext der Optimierungsaufgabe und des zu bewertenden Modells zu betrachten. Eine stringente Klassifizierung von Optimierungsverfahren ist aufgrund von Überschneidungen und Mischformen zwischen den Verfahrensarten schwierig. Aspekte zur Unterteilung sind beispielsweise die Arten der Problemstellung. Fragen, welche über die Wahl der Art des Optimierungsverfahrens entscheiden sind: Handelt es sich um eine Ein-Ziel- oder Mehr-Ziel-Optimierung? Ist das zugrundeliegende Modell linear oder nichtlinear? Wird ein globales Optimum angestrebt oder kann man angesichts eines hohen Rechenaufwands nur eine lokale Verbesserung erwarten? Müssen Nebenbedingungen beachtet werden? Weitere Dimensionen eröffnen sich bei der Art der Variablenwerte, diese können deterministischer oder stochastischer Natur sein, kontinuierlich definiert oder nur auf Ganzzahlen beschränkt sein. Auch die Problemgröße in Bezug auf die Anzahl an freien Parametern stellt einen möglichen Aspekt der Klassifizierung der Problemstellung dar. Luenberger [53] spricht hier von kleinskaligen Problemen bis fünf Freiheitsgraden, mittelskaligen Problemen bis 100 Freiheitsgraden und großskaligen Problemen mit mehr als 100 Freiheitsgraden. Die Verfahren selbst können gradientenbasiert sein oder auf natürliche Optimierungsstrategien wie Evolution oder Schwarmintelligenz zurückgreifen. Bei rechenaufwändigen Modellen wird häufig auf Antwortflächen-unterstützte Verfahren zurückgegriffen.
Im Folgenden wird sich auf die Beschreibung der Verfahrensklasse beschränkt, welche für die vorliegende Arbeit infrage bzw. zur Anwendung kommen. Das zugrundeliegende Problem ist nichtlinearer Natur, die Variablen sind deterministisch und kontinuierlich definiert. Es handelt sich um eine Ein-Ziel-Optimierung mit nichtlinearen Nebenbedingungen. Da die Problemstellung in einem hochdimensionalen Parameterraum definiert ist, scheiden globale Algorithmen aufgrund der zu hohen Anzahl an nötigen Auswertungen aus. Da es sich um eine Ein-Ziel-Optimierunge handelt wird auf gradientenbasierte Verfahren zurückgegriffen. Für die zuvor erwähnten alternativen Optimierungsverfahren und Problemstellungen wird auf die jeweilige Spezialliteratur verwiesen [54][55]. Im vorliegenden Kapitel werden grundlegende Begriffe und Vorgehensweisen der gradientenbasierten Optimierung umrissen und erläutert. Für weitergehende Informationen zur gradientenbasierten Optimierung wird auf die Literteratur [53][56] verwiesen.
Eine allgemeine Definition eines nichtlinearen Optimierungsproblems kann folgendermaßen

beschrieben werden:

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimiere}} \quad f(x) \tag{3.1a}$$

$$\text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0. \tag{3.1b}$$

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sind dabei stetig differenzierbar und beschreiben Ungleichheits- beziehungsweise Gleichheitsnebenbedingungen. Ein zulässiger Punkt x heißt zulässig, wenn alle m Ungleichheits- und alle p Gleichheitsnebenbedingungen eingehalten werden.
Gradientenverfahren sind iterative Verfahren, deren Iterationen jeweils aus zwei Teilschritten bestehen. Ausgehend von einem Ausgangszustand $x^0 \in \mathbb{R}^n$ wird zunächst mithilfe von Ableitungsinformationen bezüglich der Zielgröße und der Nebenbedingungen eine Abstiegsrichtung bestimmt. Entlang dieser Abstiegsrichtung wird in Schritt zwei entweder mithilfe einer Liniensuche oder einer direkten Schrittweitenabschätzung ein günstiger Ausgangspunkt für die nächste Iteration bestimmt.

3.1.1. Gradientenverfahren ohne Nebenbedingungen

Zunächst sollen die Nebenbedingungen (3.1b) außer Acht gelassen werden. Ein sehr einfaches Gradientenverfahren ist das *Verfahren des steilsten Abstiegs*. Dabei wird als Abstiegsrichtung die Richtung des steilsten Abstiegs $s = -\nabla f(x)$ gewählt. Nachfolgend wird ein Punkt entlang dieser Suchrichtung s bestimmt, welcher eine möglichst gute Verbesserung der Zielgröße $f(x)$ darstellt. Für jede Iteration k des Verfahrens werden die folgenden beiden Teilschritte durchgeführt:

1. Berechnung der Abstiegsrichtung $s_k = -\nabla f(x^k)$
2. Bestimmung eine Schrittweite $\sigma_k > 0$ und Setzen von $x^{k+1} = x^k + \sigma_k s^k$

Unterschreitet die Norm der Ableitung eine bestimmte Grenze, ist das Verfahren also in der Nähe des Minimums, wird abgebrochen. Die Bestimmung einer guten Schrittweite σ_k wird mithilfe einer Liniensuche durchgeführt. Dazu werden mehrere Funktionsauswertungen für verscheidene σ_k-Werte durchgeführt und ein Punkt mit ausreichend kleinem Funktionswert ausgewählt. Für die Wahl von σ_k kann beispielsweise die Armijo-Regel genutzt werden, welche bei Luenberger [53] beschrieben wird.
Das vorgestellte Verfahren konvergiert linear gegen die Lösung x^*. Linear heißt, dass es ein $0 < \gamma < 1$ gibt, für welches

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x^k - x^*\| \tag{3.2}$$

gilt. Dies führt im Falle von Problemen mit hoher Konditionszahl [5] zu γ-Werten nahe 1 und damit zu langsamer Konvergenz.

[5] Die Konditionszahl $\kappa(\nabla^2 f(x)) = \frac{\lambda_{max}((\nabla^2 f(x))}{\lambda_{min}((\nabla^2 f(x))}$ gibt das Verhältnis von größtem zu kleinstem Eigenwert der Hesse-Matrix von $f(x)$ an. Anschaulich gesprochen, führt eine hohe Konditionszahl zu sehr exzentrischen Höhenkonturen der Funktion $f(x)$. Im Fall von kreisrunden Höhenkonturen ist die Konditionszahl 1.

Ein unter bestimmten Umständen quadratisch konvergierendes Verfahren ist das *Newton-Verfahren*. Die gute Konvergenzrate wird durch eine aufwändige Berechnung des Update-Schrittes s_k durch Lösen der Newton-Gleichung

$$\nabla^2 f(x^k)s^k = -\nabla f(x^k) \tag{3.3}$$

erkauft. Ist s_k bestimmt, kann der Ausgangspunkt der nächsten Iteration direkt ohne Liniensuche mit $x^{k+1} = x^k + s^k$ berechnet werden. $\nabla^2 f(x^k)$ stellt in (3.3) die Hesse-Matrix der Funktion f an der Stelle x^k dar und muss zur Berechnung von s^k invertiert werden. Bereits die Bestimmung der Hessematrix ist bei großen Parameterzahlen zu aufwändig und daher die Anwendung des reinen Newton-Verfahrens nicht praktikabel. Zudem konvergiert das Newtonverfahren nur unter der Bedingung, dass die Hesse-Matrix positiv definit ist, also nur positive reele Eigenwerte besitzt, was aber zumindest in der Nähe der Lösung x^* gegeben ist. Ein Vorteil des Newtonverfahrens ist die Invarianz gegenüber Skalierungen der Variablenwerte.

Um den großen Rechenaufwand des Newton-Verfahrens zu vermeiden, jedoch trotzdem superlineare Konvergenzen zu erreichen, haben sich *Quasi-Newton-Verfahren* etabliert. Ein populärer Vertreter ist das sogenannte *BFGS-Verfahren*, benannt nach den Professoren Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno. Wieder muss zur Bestimmung des Update-Schrittes ein Gleichungssystem

$$H^k s^k = -\nabla f(x^k) \tag{3.4}$$

gelöst werden. H^k ist eine Approximation der Hessematrix, welche deutlich weniger aufwändig zu bestimmen ist. Die Gradienteninformation ist hierbei ausreichend. Die Bestimmung von H^{k+1} ist mithilfe einer Aufdatierungsformel der sogenannten *BFGS-Formel* wie beispielsweise in Luenberger [53] möglich.

3.1.2. Gradientenverfahren mit Nebenbedingungen

Ein intuitiver Weg um Nebenbedingungen in der Bewertung der Zielgröße zu berücksichtigen ist es, nicht gültige Lösungen mit einer Verschlechterung der Zielfunktion zu *bestrafen*. Dieser Vorgehensweise widmen sich songenannte *Penalty-Verfahren*. Das restringierte Problem wird durch eine sequentielle Abfolge von unrestringierten Problemen abgebildet. Jedes der unrestringierten Probleme kann als

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimiere}} \quad f(x) + \beta\pi(x) \tag{3.5}$$

definiert werden. Dabei stellt $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einen *Strafterm* dar, für welchen im gültigen Bereich $\pi(x) = 0$ und im Bereich verletzter Nebenbedingungen $\pi(x) > 0$ gilt. β ist der sogenannte *Penalty-Parameter*, welcher erhöht werden muss, wenn die Lösung des Problems (3.5) zu einer Lösung im ungültigen Bereich führt. Je höher der Penalty-Parameter, desto besser wird die Formulierung (3.5) der Aufgabenstellung (3.1) gerecht, desto schwieriger ist jedoch auch die numerische Behandlung aufgrund einer hohen Konditionszahl.
Während bei Penalty-Verfahren *außerhalb* des gültigen Bereiches Strafterme addiert werden und der Penalty-Parameter sukzessive vergrößert wird, gibt es sogenannte *Barrier Methoden*,

welche innerhalb des gültigen Bereichs einen Strafterm addieren der am Rand des gültigen Bereichs ansteigt und welcher sukzessive *verringert* wird. Das Vorgehen ist sehr ähnlich zum Penalty-Verfahren, es wird auf Luenberger[53] verwiesen.

Eine übliche Möglichkeit, das Optimierungsproblem mithilfe einer Gleichung zu formulieren, bietet die *Lagrange-Funktion*

$$\mathscr{L}(x,\mu,\lambda) = f(x) + \mu^T h(x) + \lambda^T.g(x) \tag{3.6}$$

Die sogenannten *Lagrange-Multiplikatoren* sind für jede Nebenbedingung definiert. Damit gilt $\mu \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Für die Lagrange-Funktion gilt $\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Damit können die Terme, welche in (3.6) zu $f(x)$ hinzuaddiert wurden, formal auch als Strafterme betrachtet werden.
Um zu beurteilen, ob ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine zumindest lokale Lösung des Optimierungsproblems (3.1) darstellt, gelten die *Karush-Kuhn-Tucker-* oder kurz *KKT-Bedingungen*

$$\nabla_x \mathscr{L}(x^*,\mu^*,\lambda^*) = \quad \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* + \nabla h(x^*)\mu^* = 0, \tag{3.7a}$$

$$\nabla_\mu \mathscr{L}(x^*,\mu^*,\lambda^*) = \quad h(x^*) = 0, \tag{3.7b}$$

$$g(x^*) \leq 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad {\lambda^*}^T g(x^*) = 0. \tag{3.7c}$$

Ist (3.6) ein Abbild der Problemstellung (3.1), so muss im Optimum die Ableitung von $\mathscr{L}$ bzgl. x null sein. Die Aussagen (3.7b) und $g(x^*) = 0$ ergeben sich direkt aus der Problemstellung (3.1b). Bedingung (3.7c) stellt sicher, dass bei eingehaltener Ungleichheitsnebenbedingung der Term $\lambda^T g(x)$ in (3.6) zu null wird. Dazu muss mindestens einer der beiden Terme λ^* und $g(x^*)$ null sein. Für den Fall das $g(x^*) < 0$ gilt, muss $\lambda^* = 0$ gelten. Im Fall, dass die Lösung genau auf der Grenze $g(x^*) = 0$ liegt, muss ein positives λ gefunden werden, welches der Gleichung (3.7a) genügt. Anschaulich ausgedrückt besagen die KKT-Bedingungen, dass in einem Problem mit Gleichheits- und oder aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen lokale Optima genau dort zu finden sind, wo eine Höhenlinie der Zielgröße $f(x)$ die Grenze des gültigen Bereichs tangiert. Im Falle ohne Gleichheitsnebenbedingungen und passiver Ungleichheitsnebenbedingung befindet sich das Optimum trivialerweise dort, wo der Gradient von $f(x)$ verschwindet.

Sogenannte *Sequential Quadratic Programming-* oder kurz *SQP-Verfahren* nutzen die Definition der KKT-Bedingungen direkt aus. Die Funktion $f(x)$ wird zunächst mit einer Taylorreihe lokal quadratisch approximiert. Dazu ist formal die Ableitung der Zielgröße sowie die Hesse-Matrix notwendig. Nebenbedingungen werden linear approximiert. Dies führt zu der Teilaufgabenstellung

$$\underset{s\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimiere}} \quad \nabla f(x^k)s + \frac{1}{2}s^T H_k s \tag{3.8a}$$

$$\text{u.d.N.} \quad g(x^k) + \nabla g(x^k)^T s \leq 0, \tag{3.8b}$$

$$h(x^k) + \nabla h(x^k)^T s = 0. \tag{3.8c}$$

Die Matrix H_k ist hierbei jedoch nicht die Hesse-Matrix von $f(x)$ sondern die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion des ursprünglichen Optimierungsproblems (3.1) und ergibt sich zu $H_k = \nabla^2_{xx}\mathscr{L}(x^k, \mu^k, \lambda^k)$. Die Lagrange-Multiplikatoren werden dabei nicht wie β im Penalty-Verfahren (3.5) als Penalty-Parameter sondern als zu iterierende Größe interpretiert. Auf Basis dieser lokalen quadratischen Problemstellung kann mithilfe der KKT-Bedingungen ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Die für das Teilproblem nötigen Lagrange-Multiplikatoren sind μ_q und λ_q, wobei der Index q auf das quadratische Eigenschaft verweist. Das gewonnene Gleichungssystem ist nun nach dem KKT-Tripel s, μ_q und λ_q zu lösen. Diese gewonnene Lösung des quadratischen Teilproblems (3.8) kann nun für den Updateschritt des übergeordneten Problems verwendet werden. Es ergibt sich das Update zu $x^{k+1} = x^k + s$, $\mu^k + 1 = \mu^k_q$ und $\lambda^{k+1} = \lambda^k_q$. Für die aufwändig zu ermittelnde Hessematrix H_k kann in Analogie zum Quasi-Newton-Verfahren aus Abschnitt 3.1.1 eine Approximation der Hesse-Matrix mit einer Aufdatierungsformel wie der BFGS-Formel verwendet werden. Nach Ulbrich und Ulbrich [56] kann gezeigt werden, dass damit die Konvergenzrate ebenfalls superlinear ist. SQP-Verfahren sind weit verbreitet, populäre Versionen sind beispielsweise *DONLP2* und *NLPQLP*[57].

3.2. Berechnung von Ableitungen

Wie bereits in Unterabschnitt 3.1.1 erwähnt wurde, sind genaue Ableitungsinformationen für Gradientenverfahren unabdingbar. Dabei handelt es sich um die Ableitung einer Zielgröße J nach einem Parameter α. Je nach Komplexität der Abbildung der Menge der Parameter α_i auf die Menge der Zielgrößen J_j, ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten die Ableitungen $\frac{dJ_j}{d\alpha_i}$ zu bestimmen.
Ist die Funktion $J(\alpha)$ explizit gegeben, kann die Ableitung exakt per Hand mithilfe der Differentiationsregeln berechnet werden. Für kompliziertere Formeln kann ein Computer-Algebra-System verwendet werden, welches die nötigen Regeln systematisch einsetzt. Diese Art der Ableitung wird als symbolisch bezeichnet und ist exakt. Verbirgt sich hinter der Auswertung der Funktion $J(\alpha)$ ein Computerprogramm oder sogar eine Prozesskette mehrerer Computer-Codes, sind diese Methoden nicht mehr oder nur mit sehr großem Aufwand einsetzbar. Insbesondere implizit berechnete Funktionsauswertungen, wie sie in Systemen von Differentialgleichungen auftreten, sind ein Beispiel dafür. In der Praxis wird in diesem Fall häufig auf eine Approximation der Ableitung mithilfe so genannter Finiter Differenzen, beispielsweise mithilfe eines zentralen Differenzenquotienten zurückgegriffen. Diese Art der Berechnung von Ableitungen wird oft numerische Differentiation genannt. Die Bezeichnung numerische Differentiation umfasst jedoch mehr als nur die Methode der Finiten Differenzen. Nach Griewank [58] wird numerische Differentiation oft mit der Berechnung einer fehlerbehafteten, weil approximativ berechneten Ableitung gleichgesetzt. Das dies nicht zwangsläufig zutrifft, kann mithilfe der Algorithmischen Differentiation, welche zum Teil auch missverständlich als automatische Differentiation bezeichnet wird, gezeigt werden. Dabei wird die Ableitung ebenfalls numerisch bestimmt. Auf die Prinzipien der Algorithmischen Differentiation wird in Unterabschnitt 3.2.2 näher eingegangen. Zunächst wird der Einsatz Finiter Differenzen zur Ableitungsbestimmung in Unterabschnitt 3.2.1 erläutert.

3.2.1. Finite Differenzen

Die Gültigkeit einer Approximation von Ableitungen durch Finite Differenzen, kann mithilfe einer Taylorreihe um $J(\alpha_0)$ gezeigt werden.

$$J(\alpha) = J(\alpha_0 + h) = J(\alpha_0) + h \cdot J'(\alpha_0) + \frac{h^2}{2} \cdot J''(\alpha_0) + ... + \frac{h^n}{n!} \cdot J^{(n)}(\alpha_0). \tag{3.9}$$

Die Taylorreihe approximiert die Funktion $J(\alpha)$ in Umgebung der Entwicklungsstelle α_0. Je mehr Informationen an der Entwicklungsstelle in Form von Ableitungen ($J'(\alpha_0)$, $J''(\alpha_0)$, $J'''(\alpha_0)$, ...) vorhanden sind, desto genauer kann die Funktion in der Umgebung von α_0 approximiert werden. Die Summe aller fehlenden Ableitungsterme ergeben den Abbruchfehler ε_{trunc}. Aufgelöst nach $J'(x)$ ergibt sich aus Gleichung (3.9)

$$J'(\alpha_0) = \frac{J(\alpha_0 + h) - J(\alpha_0)}{h} - \frac{h}{2} \cdot J''(\alpha_0) - ... \frac{h^{n-1}}{n!} \cdot J^{(n)}(\alpha_0). \tag{3.10}$$

Falls nur diskrete Funktionswerte und keine Ableitungen einer Funktion $J(\alpha)$ bekannt sind, ergibt sich für die erste Ableitung der sogenannte Vorwärts-Differenzenquotient

$$J'(\alpha_0) = \frac{J(\alpha_0 + h) - J(\alpha_0)}{h} + O(h) \tag{3.11}$$

mit einem Abbruchfehler erster Ordnung $O(h)$, also ein Fehler, welche mit kleiner werdendem h linear fällt.
Soll die erste Ableitung $J'(\alpha)$ genauer bestimmt werden, sind zusätzliche Stützstellen nötig. Wird $J(\alpha)$ an den Stellen $\alpha = \alpha_0 + h$ und $\alpha = \alpha_0 - h$ mithilfe der jeweiligen Taylorreihe approximiert und werden die Ergebnisse voneinander subtrahiert, ergibt sich

$$J(\alpha_0 + h) - J(\alpha_0 - h) = 2h \cdot J'(\alpha_0) + \frac{h^3}{3} \cdot J'''(\alpha_0) + ... + \frac{2 \cdot h^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \cdot J^{(2n+1)}(\alpha_0). \tag{3.12}$$

Aufgelöst nach der ersten Ableitung ergibt sich der sogenannte zentrale Differenzenquotient

$$J'(\alpha_0) = \frac{J(\alpha_0 + h) - J(\alpha_0 - h)}{2h} + O(h^2), \tag{3.13}$$

welcher einen Abbruchfehler zweiter Ordnung besitzt. Auf diese Weise lassen sich systematisch höherwertige Approximationen für die erste Ableitung bilden. Dieses Vorgehen wird bei Munz und Westermann [59] mithilfe des Interpolationspolynoms nach Newton und äquidistanten Stützstellen gezeigt und die Berechnungsformeln werden angegeben. Es ergibt sich das in Tabelle 3.1 dargestellte Verhalten der Fehlerordnungen. Mit den zusätzlichen Stützstellen steigt sowohl die Fehlerordnung als auch der Aufwand zur Bestimmung einer Ableitung an. Dies ist insbesondere im Falle einer ohnehin zeitintensiven Funktionsauswertung von entscheidendem Nachteil.
Nach bisherigen Betrachtungen erscheint es sinnvoll, eine möglichst kleine Schrittweite h zu verwenden, um eine Ableitung mithilfe von Finiten Differenzen zu berechnen. Neben dem so-

Anzahl zusätzlicher äquidistanter Stützstellen	Betrag des Hauptfehlerterms	Konsistenzordnung
1 (rechtsseitig)	$\frac{h}{2} \cdot J''(\alpha_0)$	$O(h)$
2 (zentral)	$\frac{h^2}{6} \cdot J'''(\alpha_0)$	$O(h^2)$
4 (zentral)	$\frac{h^4}{30} \cdot J^{(5)}(\alpha_0)$	$O(h^4)$
6 (zentral)	$\frac{h^6}{140} \cdot J^{(7)}(\alpha_0)$	$O(h^6)$

Tabelle 3.1.: Verhalten der Hauptfehlerterme sowie Konsistenzordnungen bei Diffenzenquotienten mit unterschiedlicher Anzahl an zusätzlichen Stützstellen

eben beschriebenen Abbruchfehler ε_{trunc} spielt jedoch der Auslöschungsfehler ε_{canc} eine entscheidende Rolle. Eine Subtraktion zweier nahezu gleicher Zahlen, wie es bei sehr kleinem h in den Formeln (3.11) und (3.13) geschieht, führt zu einer sehr kleinen Differenz und zu einer Verringerung der signifikanten Stellen in der Mantisse des Ergebnisses. Die zusätzliche Division durch eine kleine Zahl führt zurück zu einer großen Zahl mit wenigen signifikanten Stellen und somit zu einem Fehler. Der Gesamtfehler setzt sich somit aus ε_{trunc} und ε_{canc} zusammen. Während der Abbruchfehler mit kleiner werdendem h kleiner wird, steigt der Auslöschungsfehler proportional zu $\frac{1}{h}$ an. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.1 beispielhaft anhand der Funktion $J(\alpha) = \frac{2\alpha-7}{\alpha}$ dargestellt, für welche an der Stelle $\alpha = 4$ die Ableitung mithilfe von Differenzenquotienten bestimmt wurde. In der Abbildung sind die Gesamtfehler des Vorwärtsdifferenzenquotienten, des zentralen Differenzenquotienten sowie der Differenzenquotienten mit vier beziehungsweise sechs zusätzlichen Stützstellen dargestellt. Während die Schrittweite von $h = 1$ sukzessive verringert wird, sinkt der Gesamtfehler entsprechend der Fehlerordnung bis zu einem Minimum ab. Da das Ergebnis mit nur 16 signifikanten Stellen berechnet wurde, steigt der Gesamtfehler nach weiterer Schrittweitenverringerung aufgrund der Auslöschung wieder an.
Wie aus Abbildung 3.1 ersichtlich wird, ergibt sich je nach Differenzenformel eine andere optimale Schrittweite h_{opt}. Bei Formeln für Finite Differenzen höherer Ordnung ist die optimale Schrittweite größer als bei kleinerer Ordnung. Unterliegt die Funktion zusätzlich starkem Rauschen, verringert sich zum Einen die bestmögliche Approximationsgenauigkeit, zum Anderen ergibt sich eine größere optimale Schrittweite. Dies ist in Abbildung 3.2 veranschaulicht. Hier wurde ein zufälliger Fehlersummand aus dem Bereich $-1.0E-8 \leq \varepsilon \leq 1.0E-8$ zu den Ergebnissen addiert. Es wird deutlich, dass das Rauschen der Zielfunktion wie ein vergrößerter Auslöschungsfehler wirkt und somit die Anzahl der signifikanten Stellen der Mantisse verringert.
Diese hier anschaulich dargestellte Bestimmung der optimalen Schrittweite ist nur dann möglich, wenn die exakte Ableitung bekannt ist. Da diese im allgemeinen Fall jedoch nicht bekannt ist, stellt die Bestimmung der optimalen Schrittweite ein große Herausforderung dar. Mithilfe von Abschätzungen der beiden Hauptfehlerquellen, dem Abbruchfehler ε_{trunc} und dem Auslöschungsfehler ε_{canc} kann zunächst formell die optimale Schrittweite ermittelt werden. Ausgehend vom Vorwärtsdifferenzenquotienten und dessen Hauptfehlerterm ergibt sich

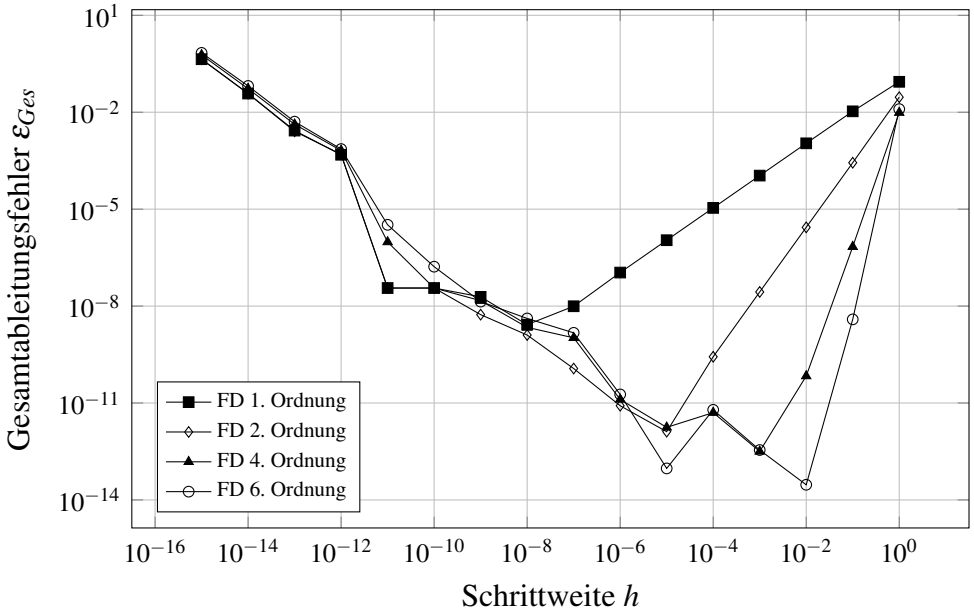


Abbildung 3.1.: Darstellung des Gesamtfehlers ε_{ges} verschiedener Differenzenquotienten über der Schrittweite h für die Funktion $J(\alpha) = \frac{2\alpha-7}{\alpha}$ ausgewertet an der Stelle $\alpha = 4$

der Abbruchfehler aus (3.11) zu

$$\varepsilon_{trunc} = \frac{h}{2} \cdot |J''(\alpha)|. \tag{3.14}$$

Die Abschätzung des Auslöschungsfehlers liefern Gill et al [60]. Mithilfe eines Fehlerterms ε_A, welcher den maximalen absoluten Fehler bei einer Funktionsauswertung beschreibt, kann der Auslöschungsfehler nach oben abgeschätzt werden und ergibt

$$\varepsilon_{canc} = |[J(\alpha+h) - J(\alpha)] - [J(\alpha+h)_{exakt} - J(\alpha)_{exakt})]| \leq 2 \cdot \varepsilon_A. \tag{3.15}$$

Damit ergibt sich für den Gesamtfehler

$$\varepsilon_{ges} = \frac{\varepsilon_{canc}}{h} + \varepsilon_{trunk} = \frac{2}{h} \cdot \varepsilon_A + \frac{h}{2} \cdot |J''(\alpha)|. \tag{3.16}$$

Unter der Annahme, dass ε_A und $|J''(\alpha)|$ einmalig numerisch bestimmt oder abgeschätzt werden können, ergibt sich $\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{ges}(h)$. Zur Minimierung des Gesamtfehlers führt das Ableiten und Nullsetzen von Gleichung (3.16) zu einer optimalen Schrittweite von

$$h_{opt} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{|J''(\alpha)|}}. \tag{3.17}$$

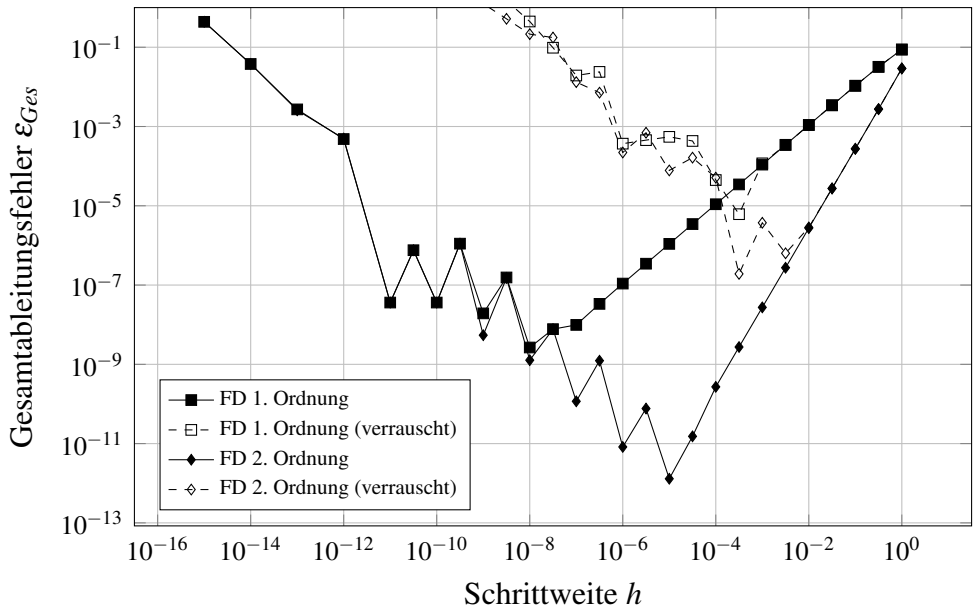


Abbildung 3.2.: Beispielhafte Auswirktung des Zielfunktionalrauschens auf den Gesamtfehler bei der Ableitungsberechnung mithilfe des Vorwärtsdifferenzenquotienten sowie des zentralen Differenzenquotienten für die Funktion $J(\alpha) = \frac{2\alpha-7}{\alpha}$ ausgewertet an der Stelle $\alpha = 4$

Neben der Schwierigkeit, diese abgeschätzte optimale Schrittweite bestimmen zu können, stellt sich die Frage der Verwendung dieser Schrittweite während des Optimierungsverlaufes. Unter der Annahme, dass sich sowohl die Genauigkeit der Funktionsauswertungen im Definitionsbereich als auch die zweiten Ableitungen nicht signifikant ändern, kann die in Gleichung (3.17) angegebene Schrittweite h_{opt} als sogenannte statische Schrittweite für den gesamten Optimierungsprozess verwendet werden. Gill et al [60] zeigen unter der Bedingung einer einfachen Funktionsauswertung und der Forderung $O(|J''|) = O(|J|)$, dass unter Anwendung des Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$O(h_{opt}) = O(\sqrt{\varepsilon_A}) \tag{3.18}$$

gilt. Dies führt auf die Schlussfolgerung, dass bei einer Maschinen- oder Berechnungsgenauigkeit von $1 \cdot 10^{-k}$, die Schrittweite $h = 1 \cdot 10^{-\frac{k}{2}}$ ein gute Wahl ist. Für den zentralen Differenzenquotienten ergibt sich entsprechend

$$O(h_{opt}) = O(\sqrt[3]{\varepsilon_A}). \tag{3.19}$$

Diese Abschätzungen lassen sich anhand der Abbildungen 3.1 und 3.2 gut überprüfen, wenn von einer Berechnungsgenauigkeit von $1 \cdot 10^{-16}$ im unverrauschten und von $1 \cdot 10^{-8}$ im verrauschten Fall ausgegangen wird.
Dynamische Schrittweiten werden im Verlaufe einer Optimierung auf Basis unterschiedlicher

Kriterien verändert. Von Conn et al [61] als auch von Barton [62] wird

$$h_{opt} = sign(\alpha)\sqrt{\varepsilon_M} \cdot max[\alpha, S] \tag{3.20}$$

als eine einfache und häufig benutzte dynamische Schrittweitensteuerungen genannt. Dabei stellt ε_M die Maschinengenauigkeit und S die übliche Größenordnung von α dar. Die Schrittweite skaliert demnach mit α. Dadurch kann der Verlust signifikanter Stellen bei stark unterschiedlichen Größenordnungen von α und h im Nenner des Differenzenquotienten vermieden werden. Zudem verhindert der Einsatz von S eine zu kleine Schrittweite in der Nähe von $\alpha = 0$. Nachteilig ist nach Barton [62], dass sich die Schrittweite nicht auf das in Gleichung (3.17) ermittelte h_{opt} bezieht.
Barton formuliert in [62] die Verkleinerung des Gesamtfehlers auf Basis einer Abschätzung des maximal möglichen bezogenen Ableitungsfehlers $M = \frac{U}{J'}$, welcher eine Approximation noch gewährleistet. Der Wert U stellt dabei die absolute Abweichung von J' dar. Aus seiner Herleitung erhält er eine einfache Regel, welche die Anzahl d an Stellen angibt, welche sich in den k signifikanten Stellen von $J(\alpha)$ zu $J(\alpha+h)$ ändern sollten, um eine günstige Schrittweite zu erhalten. Die Anzahl d berechnet sich aus

$$d = log_{10}(2) - log_{10}(M). \tag{3.21}$$

Anhand eines Beispiels lässt sich die Vorgehensweise von Barton besser verdeutlichen. Beide dargestellten Zahlen haben eine gewisse Ungenauigkeit, welche die signifikanten Stellen reduziert. Von diesen k signifikanten Stellen sollen sich die d letzten Stellen ändern, um eine gute Schrittweite zu erhalten.

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \overbrace{1.1234567890}^{k \text{ signifikante Stellen}}\cancel{12345} \\ J(\alpha+h) &= 1.12345678\underbrace{54}_{d \text{ sich verändernde Stellen}}\cancel{68795} \end{aligned}$$

Wird d während des Optimierungsvorganges größer, kann h im nächsten Schritt verkleinert werden damit ε_{trunc} nicht zu groß wird. Umgekehrt muss bei kleiner werdendem d die folgende Schrittweite vergrößert werden um dem Auslöschungsfehler vorzubeugen.
Barton konnte zudem in einer Studie mit einer begrenzten Anzahl an Testfällen und Schrittweitenverfahren zeigen, dass eine dynamische Schrittweitensteuerung das Konvergenzverhalten verbessern, jedoch häufig nicht den negativen Effekt einer schlecht gewählten ersten Schrittweite kompensieren kann. Insbesondere bei verrauschten Zielgrößen mit wenigen signifikanten Stellen wurde die Notwendigkeit einer gut gewählten Schrittweite deutlich.

3.2.2. Algorithmische Differentiation

Die Algorithmische Differentiation - kurz AD - stellt im Gegensatz zum Ansatz der Finiten Differenzen eine Methode zur numerischen Bestimmung von Ableitungen dar, welche keine Approximation der Ableitung ist, sondern im Rahmen der Rechengenauigkeit der Maschine exakte Ableitungen ermittelt. Die Grundidee der Algorithmischen Differentiation fußt

auf der Annahme, dass sich eine Funktion $J(\alpha)$ in Teilfunktionen zerlegen lässt. Damit wird eine Funktion nicht länger als geschlossenes System mit Eingangsgröße α und Resultat J betrachtet. Stattdessen wird sich mit den bekannten Zwischenzuständen und deren Aneinanderreihung auseinandergesetzt. Der Begriff Funktion ist dabei allgemein zu verstehen und beinhaltet auch Computerprogramme oder sogar Prozessketten von mehreren hintereinander ausgeführten Programmen. Diese Prozessketten lassen sich in Prozesse unterteilen. Diese Prozesse bestehen aus Funktionalitäten und Tools, diese wiederum aus Codezeilen, deren Inhalte letztendlich auf Anweisungen und Elementarfunktionen herunter gebrochen werden können. In Abbildung 3.3 ist eine solche Aufschlüsselung einer Prozesskette dargestellt, wie sie beispielsweise in der aerodynamischen Optimierung auftreten kann.

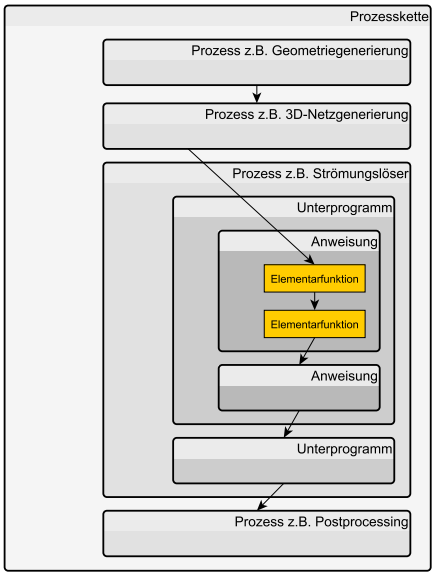


Abbildung 3.3.: Darstellung der Zerlegung einer beispielhaften Optimierungsprozesskette in Teilprozessen bis hin zu Elementarfunktionen

Unter Elementarfunktion $y = y(a,b)$ wird in diesem Zusammenhang die Anwendung einer Grundrechenart $(+,-,\cdot,/)$, die Anwendung von trigonometrischen Funktionen sowie das Logarithmieren und Potenzieren verstanden. Entscheidend ist, dass die Ableitung des Ergebnisses der Elementarfunktionen nach seinen Eingangsgrößen $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ analytisch angegeben werden kann. Für die Grundrechenarten und beispielhafte weitere Elementarfunktionen sind diese Ableitungen in Tabelle 3.2 aufgeführt.
Ist eine Funktion $J(\alpha)$ in diese Elementarfunktionen zerlegt, kann für jede der Elementarfunktionen eine Ableitung angegeben werden. Neben dem durch Aneinanderreihung aller Elementarfunktionen erhaltenen Funktionswert $J(\alpha)$ ergibt sich unter Anwendung der Kettenregel auch die Ableitung des Funktionswertes $J'(\alpha)$. Die Anwendung der Kettenregel auf eine solche Aneinanderreihung von Elementarfunktionen kann vereinfacht anhand einer Funktion $J(y_3(y_2(y_1(\alpha))))$ dargestellt werden. Die Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}. \tag{3.22}$$

Elementarfunktion	$y = y(a(x), b(x))$	$y' = \frac{\partial y}{\partial x}$
$+$	$y = a + b$	$y' = a' + b'$
$-$	$y = a - b$	$y' = a' - b'$
$\cdot$	$y = a \cdot b$	$y' = a' \cdot b + a \cdot b'$
$/$	$y = \frac{a}{b}$	$y' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2} = \frac{a' - y \cdot b'}{b}$
sin	$y = \sin(a)$	$y' = \cos(a)$
log	$y = \log_{const} a$	$y' = \frac{1}{a \cdot \ln const}$
a^b	$y = a^b$	$y' = a^b \cdot (b' \cdot \ln a + \frac{b}{a})$

Tabelle 3.2.: Beispielhafte Elementarfunktionen und deren Ableitungen

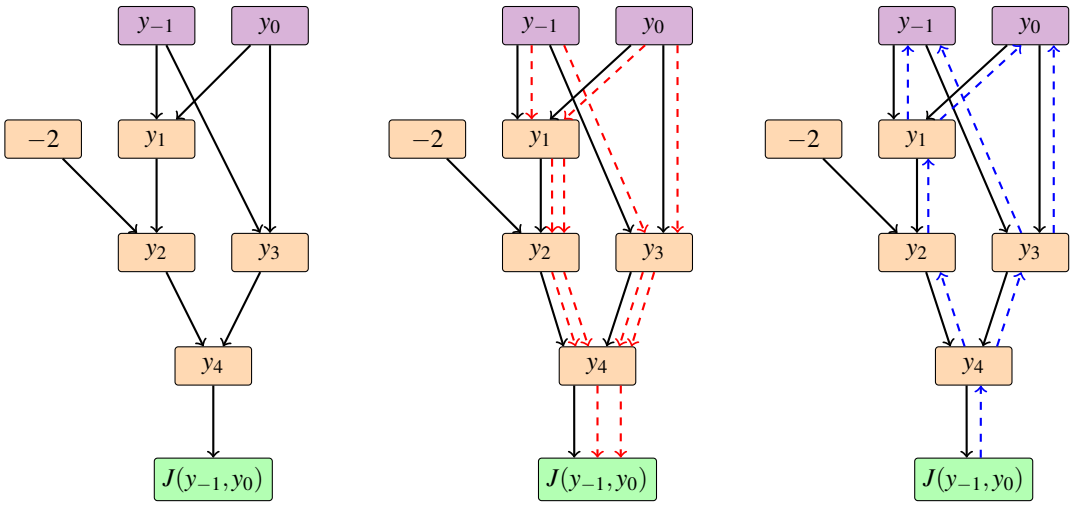
Aufgrund der Kommutativität dieser Kettenregel, kann deren Auswertung „von rechts“ oder „von links“ vorgenommen werden. Diese scheinbar triviale Erkenntnis ist für die Differentiation von großen Funktionen beziehungsweise Programmcodes von großer Bedeutung und beeinflusst den Rechenaufwand maßgeblich. Die Auswertung von rechts entspricht dem Vorwärtsmodus des Algorithmischen Differenzierens, die Auswertung von links entspricht dem Rückwärtsmodus.
Zur besseren Veranschaulichung der beiden Modi eignet sich ein so genannter Berechnungsgraph, welcher die Verkettung der einzelnen Elementarfunktionen veranschaulicht. Beispielhaft wird die Funktion

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \tag{3.23}$$

zunächst in ihre Elementarfunktionen zerlegt. Dabei werden die Parameter α_1 und α_2 üblicherweise mit y_{-1} und y_0 bezeichnet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \alpha_1 \\ y_0 &= \alpha_2 \\ y_1 &= y_{-1} + y_0 \\ y_2 &= y_1 - 2 \\ y_3 &= y_{-1} \cdot y_0 \\ y_4 &= \frac{y_2}{y_3} \\ J &= y_4. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die so enstandene Verkettung von Elementarfunktionen kann wie in Abbildung 3.4a als Berechnungsgraph dargestellt werden. Die schwarzen Pfeile stellen dabei die erstmalige Berechnung der Funktion dar. Diese Auswertung wird primaler Schritt genannt und berechnet zunächst nur den Funktionswert $J(\alpha)$.



(a) primal (b) AD-Vorwärts (c) AD-Rückwärts

Abbildung 3.4.: Berechnungsgraphen einer primalen Auswertung (a), eines AD-Vorwärtsmodus (b) sowie eines AD-Rückwärtsmodus (c). Schwarze Pfeile stellen eine primale Auswertung dar. Rote beziehungsweise blaue gestrichelte Pfeile stellen Ableitungen im jeweiligen Modus dar.

Zur Berechnung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial J}{\partial y_4} \cdot \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_{-1}} + \frac{\partial y_4}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial y_{-1}} \right), \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial J}{\partial y_4} \cdot \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_0} + \frac{\partial y_4}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial y_0} \right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

wird die jeweilige Kettenregel verwendet. Zur Berechnung der Kettenregeln werden im Folgenden der AD-Vorwärts- sowie der AD-Rückwärtsmodus vorgestellt.

3.2.2.1. AD-Vorwärtsmodus

Wie bereits erwähnt, stellt der Vorwärtsmodus die „Von-rechts-Auswertung“ der Kettenregel dar. Im Berechnungsgraph entspricht das der Auswertung von oben nach unten. Die Ableitungen des jeweiligen Zwischenergebnisses y nach den Parametern α wird parallel zur eigentlichen Auswertung der Funktion berechnet. Das Vorgehen ist für die Beispielfunktion (3.23) in Tabelle 3.3 dargestellt. Im Falle der Beispielfunktion werden pro primaler Elementarfunktion zwei weitere Berechnungsschritte für die beiden Ableitungen nach $\alpha_1$und α_2 ausgeführt. Dabei wird jeweils die Ableitung der jeweiligen Elementarfunktion berechnet und als Faktor mit dem bisherigen Produkt der Kettenregel multipliziert. In der letzten Zeile der Tabelle ergeben sich sowohl der Funktionswert J als auch die beiden Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}$ und $\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}$. Wird

Elementarfunktion	y	Ableitung	$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}$	$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}$
y_{-1}	$\alpha_1 = 3$	$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha}$	1	0
y_0	$\alpha_2 = 7$	$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha}$	0	1
$y_1 = y_{-1} + y_0$	10	$\frac{\partial y_{-1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha}$	$1+0=1$	$0+1=1$
$y_2 = y_1 - 2$	8	$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}$	1	1
$y_3 = y_{-1} \cdot y_0$	21	$y_0 \cdot \frac{\partial y_{-1}}{\partial \alpha} + y_{-1} \cdot \frac{\partial y_0}{\partial \alpha}$	$7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 7$	$7 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$
$y_4 = \frac{y_2}{y_3}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{\frac{\partial y_2}{\partial \alpha} - y_4 \cdot \frac{\partial y_3}{\partial \alpha}}{y_3}$	$\frac{1-\frac{8}{21}\cdot 7}{21} = \frac{-5}{63}$	$\frac{1-\frac{8}{21}\cdot 3}{21} = \frac{-1}{147}$
$J = y_4$	$\mathbf{\frac{8}{21}}$	$\frac{\partial J}{\partial \alpha}$	$\mathbf{\frac{-5}{63}}$	$\mathbf{\frac{-1}{147}}$

Tabelle 3.3.: AD-Vorwärtsmodus ausgeführt für die Beispielfunktion (3.23)

die Funktion (3.23) an der gleichen Stelle analytisch ausgewertet,

$$J(3,7) = \frac{3+7-2}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21} \tag{3.26}$$

sowie formal abgeleitet

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} &= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - 2) \cdot \alpha_2}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^2} = \frac{3 \cdot 7 - (3+7-2) \cdot 7}{(3 \cdot 7)^2} = \frac{-5}{63} \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - 2) \cdot \alpha_1}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^2} = \frac{3 \cdot 7 - (3+7-2) \cdot 3}{(3 \cdot 7)^2} = \frac{-1}{147} \end{aligned} \tag{3.27}$$

ergeben sich die gleichen Werte.
Mit der Anwendung des Vorwärtsmodus ergeben sich im Rahmen der Maschinengenauigkeit exakte Werte für die Ableitungen. Die Ergebnisse sind nicht durch Abbruch- oder Auslöschungsfehler beeinflusst, wie bei dem Ansatz der Finiten Differenzen. Im Folgenden soll der Rechenaufwand des Vorwärtsmodus betrachtet werden.
In Abbildung 3.4b sind zusätzlich zu den schwarzen Pfeilen der primalen Auswertung rote Pfeile für den Vorwärts-AD-Modus eingezeichnet. Während die Pfeilverbindung von einem Vorgängerzustand y_r zu einem Nachfolgezustand y_s im primalen Modus für die Teilnahme an der Berechnung einer Elementarfunktion zur Berechnung von y_s steht, symbolisiert ein roter Pfeil des Vorwärts-AD-Modus die Bestimmung des Terms $\frac{\partial y_s}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\alpha}$. Für die Bestimmung der Ableitung des Funktionwertes y_4 der Beispielfunktion sind mit $\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\alpha_1}$, $\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\alpha_2}$, $\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\alpha_1}$ und $\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\alpha_2}$ vier solcher Werte zu bestimmen, welche gemäß der Differentiationsregel der Division kombiniert werden müssen. Obwohl mithilfe der Pfeile nicht direkt auf den benötigten Rechenaufwand zurückgeschlossen werden kann, wird bildhaft deutlich wie sich der Rechenaufwand des Vorwärts-AD-Modus zur Anzahl der Parameter verhält. Wären beispielsweise zur Berechnung von Zwischenergebnis y_1 anstatt zweier Parameter drei Parameter von Nöten, ergäben sich für die Berechnung von y_4 sechs Pfeile für die jeweiligen Ableitungsterme. Der

Rechenaufwand des Vorwärts-AD-Modus muss somit annähernd linear mit der Anzahl der Parameter ansteigen. Auch der Speicherbedarf für die Ableitungsinformationen steigt linear mit der Anzahl der Parameter.

3.2.2.2. AD-Rückwärtsmodus

Der AD-Rückwärtsmodus stellt die Auswertung der Kettenregel „von links“ dar, so wie es beim manuellen Ableiten einfacher Gleichungen häufig intuitiv durchgeführt wird. In Gleichung (3.25) wird deutlich, dass sich die Kettenregeln der beiden Ableitungen im Beispiel nur durch den jeweils rechten Term eines jeden Summanden unterscheiden. Alle anderen Terme der Kettenregeln sind identisch. Der AD-Rückwärtsmodus macht sich dies zu Nutze, indem die Kettenregel von links ausgewertet wird. Dabei können Mehrfachauswertungen der gleichen Terme vermieden werden. Im Berechnungsgraph entspricht dies einer Auswertung von unten nach oben und ist mit blauen Pfeilen in Abbildung 3.4 symbolisiert.
Zur besseren Erläuterung des Modus, werden zunächst quergestrichene Zwischenergebnisse $\overline{y_r}$ definiert. Ein solches gestrichenes Zwischenergebnis lässt sich interpretieren als

$$\overline{y_r} = \frac{\partial J}{\partial y_r}. \tag{3.28}$$

Es ist somit ein Zwischenergebnis zum jeweiligen Zeitpunkt der Auswertung der Kettenregel von links. Im Berechnungsgraph ausgedrückt ergibt sich $\overline{y_r}$ als Zwischenergebnis der Auswertung von unten. Alle blauen Pfeile und deren Vorgänger, welche in y_r münden, sind an der Berechnung von $\overline{y_r}$ beteiligt.
Zu Beginn der Kettenregelauswertung von links sind alle $\overline{y}$ noch unbekannt und werden null gesetzt. Lediglich $\overline{J}$ ist laut Definition in Gleichung (3.28) bekannt und entspricht demnach eins. Jeder blaue Pfeil im Berechnungsgraphen kann nun als Updateprozess für den jeweiligen gestrichenen Wert am Pfeilende interpretiert werden. Die Updateprozedur für einen Pfeil von y_s nach y_r ergibt sich zu

$$\overline{y_r} = \overline{y_r} + \frac{\partial y_s}{\partial y_r} \cdot \overline{y_s}. \tag{3.29}$$

Werden nun die Pfeile von unten nach oben gemäß dem Berechnungsgraphen in Abbildung 3.4c nach (3.29) aktualisiert, ergeben sich mit $\overline{y_{-1}} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_1}$ und $\overline{y_0} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_2}$ die gewünschten Ableitungen.
In jedem Update-Schritt muss laut (3.29) ein $\frac{\partial y_s}{\partial y_r}$ berechnet werden. Wie in Tabelle 3.3 für den Vorwärtsmodus deutlich wird, sind für die Berechnung dieses Terms häufig primale Werte $y(\alpha_1, \alpha_2)$ notwendig. Außerdem muss die Art der Elementarfunktion y_s bekannt sein, um mithilfe der Differentiationsregeln den Term $\frac{\partial y_s}{\partial y_r}$ berechnen zu können. Bevor somit der in (3.29) beschriebene Update-Prozess gestartet werden kann, muss für den AD-Rückwärtsmodus zunächst eine primale Berechnung durchgeführt werden. Während dieser Berechnung müssen sowohl alle Zwischenergebnisse y_r als auch alle Arten der Elementarfunktionen mit Verweis auf die beteiligten Zwischenergebnisse gespeichert werden. Dieser Speicherprozess neben der primalen Auswertung wird als „taping“ bezeichnet.
In Tabelle 3.4 ist der komplette AD-Rückwärtsmodus anhand der einfachen Beispielfunktion

(3.23) dargestellt. Ein Ausdruck der Form $(2,-,y_{r1},y_{r2})$ stellt dabei dar, was im so genannten *tape* gespeichert werden muss. Der Funktionswert ist demnach 2 und es wurde eine Subtraktion mit Minuend y_{r1} und Subtrahend y_{r2} durchgeführt. Mithilfe der gestuften Darstel-

Primaler Durchlauf mit „taping“	
$y_{-1} = \alpha_1 = 3$	$(3,,,)$
$y_0 = \alpha_2 = 7$	$(7,,,)$
$y_1 = y_{-1} + y_0 = 10$	$(10,+,y_{-1},y_0)$
$y_2 = y_1 - 2 = 8$	$(8,-,y_1,)$
$y_3 = y_{-1} \cdot y_0 = 21$	$(21,\cdot,y_{-1},y_0)$
$y_4 = \frac{y_2}{y_3} = \frac{8}{21}$	$(\frac{8}{21},/,y_2,y_3)$
$J = y_4 = \mathbf{\frac{8}{21}}$	
AD-Rückwärts	
$\overline{y_4} = 1, \quad \overline{y_{-1}} \ \ldots \ \overline{y_3} = 0$	
$\overline{y_2} = \overline{y_2} + \frac{1}{y_3} \cdot \overline{y_4} = 0 + \frac{1}{21} \cdot 1 = \frac{1}{21}$	
$\overline{y_3} = \overline{y_3} + \left(-\frac{y_2}{y_3^2}\right) \cdot \overline{y_4} = 0 + \frac{-8}{441} \cdot 1 = -\frac{8}{441}$	
$\overline{y_{-1}} = \overline{y_{-1}} + y_0 \cdot \overline{y_3} = 0 + 7 \cdot \left(-\frac{8}{441}\right) = -\frac{8}{63}$	
$\overline{y_0} = \overline{y_0} + y_{-1} \cdot \overline{y_3} = 0 + 3 \cdot \left(-\frac{8}{441}\right) = -\frac{8}{147}$	
$\overline{y_1} = \overline{y_1} + 1 \cdot \overline{y_2} = 0 + 1 \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{21}$	
$\overline{y_{-1}} = \overline{y_{-1}} + 1 \cdot \overline{y_1} = -\frac{8}{63} + 1 \cdot \frac{1}{21} = -\frac{5}{63}$	
$\overline{y_0} = \overline{y_0} + 1 \cdot \overline{y_1} = -\frac{8}{147} + 1 \cdot \frac{1}{21} = -\frac{1}{147}$	
$\overline{\alpha_2} = \overline{y_0} = -\mathbf{\frac{1}{147}}$	
$\overline{\alpha_1} = \overline{y_{-1}} = -\mathbf{\frac{5}{63}}$	

Tabelle 3.4.: AD-Rückwärtsmodus ausgeführt für die Beispielfunktion (3.23)

lungsweise in Tabelle 3.4 wird deutlich, dass für jede primal ausgeführte Elementarfunktion maximal zwei Update-Schritte notwendig sind. Dies sind die Update-Schritte für die maximal zwei $\overline{y}$, deren primale Gegenspieler y an der Berechnung der jeweiligen Elementarfunktion beteiligt sind. Im Berechnungsgraphen zeigt sich beim Nachvollziehen der Schritte aus Tabelle 3.4, dass je blauem Pfeil ein Update-Prozess durchgeführt wird. Damit lässt sich wie im Vorwärtsmodus nicht direkt auf den Rechenaufwand schließen. Jedoch wird deutlich, wie sich der Aufwand zur Anzahl der Parameter verhält. Wäre, wie hypothetisch bereits im Vorwärtsmodus erörtert, für die Berechnung von y_1 ein weiterer Parameter von Nöten, würden sich ein weiterer schwarzer Pfeil für die primale Auswertung, sowie ein blauer Pfeil für die Auswertung im AD-Rückwärtsmodus ergeben. Verglichen zum primalen Schritt vergrößert sich der Aufwand an durchzuführenden Rechenschritten im AD-Rückwärtsmodus nicht. Im

Gegensatz zum AD-Vorwärtsmodus steigt der Rechenaufwand somit nicht mit der Anzahl der Variablen an.

3.2.2.3. AD-Software

Es finden sich eine Reihe von AD-Werkzeugen für verschiedene Programmiersprachen, mit deren Hilfe Quellcode differenziert werden kann. Die Werkzeuge lassen sich grob in zwei Kategorien unterteilen. Zum einen existieren Software-Pakete, welche Operator Overloading nutzen und zum anderen Werkzeuge, welche den Source Code Transformation Ansatz verfolgen.
Mithilfe des Operator Overloadings oder Function Overloadings werden elementare Operatoren in Quellcodes überladen, das bedeutet umdefiniert. Während beispielsweise der binäre Operator + im vorliegenden Quellcode eine reine Addition der beteiligten Operanden darstellt, wird das + im überladenen Modus anders interpretiert. Im AD vorwärts Modus wird der + Operator genutzt um die Summe der Ableitungen der Operanden zu bestimmen. Im AD rückwärts Modus werden hingegen die Art des Operators sowie die beteiligten Operanden in einem sogenannten *Stack* abgelegt, welcher wie schon in Unterabschnitt 3.2.2.2 erwähnt als Tape bezeichnet wird. Dieser Stack kann nach einmaligem Durchlauf des kompletten Codes wieder abgebaut werden, beziehungsweise das Tape rückwärts abgespielt werden.
Beispiele für AD-Werkzeuge, welche C beziehungsweise C++-Code mithilfe der Technik des Operator Overloading differenzieren sind *ADOL-C*, *dco/c++* oder *CoDiPack*.
ADOL-C steht für Automatic Differentiation by Overloading in C++ und ermöglicht das Differenzieren im Vorwärts- und Rückwärtsmodus von C- beziehungsweise C++-Code. Dabei bleiben die Codeanweisungen komplett unberührt, am Codeablauf ändert sich nichts. Es müssen lediglich alle Größen, nach denen abgeleitet werden soll, beziehungsweise Größen, welche sich aus diesen berechnen als spezieller Datentyp deklariert werden. Sie werden als aktive Variablen bezeichnet. Für den Rückwärtsmodus wird eine Datenstruktur für das sogenannte tape angelegt, dessen Anfang und Ende im Code definiert werden muss. Schließlich muss ein Header-File eingebunden werden, um den C oder C++-Code kompilieren und bauen zu können. Eine prinzipielle Vorgehensweise zur Nutzung von ADOL-C und nötige Tätigkeiten zur Vorbereitung des Codes finden sich bei Walter und Griewank [63].
Das Werkzeug dco/c++ kann zum Differenzieren von C++ genutzt werden und bietet über ADOL-C hinaus weitere Möglichkeiten zur Performanzsteigerung. Mithilfe der sogenannten „statement-level preaccumulation“ bietet es beispielsweise die Möglichkeit Ableitungen im Rückwärtsmodus effizienter zu berechnen. Während beim Überladen einer komplizierten Anweisung im Code gegebenenfalls Zwischenvariablen entstehen, nach denen abgeleitet werden muss und welche damit die tape-Größe erhöhen, lassen sich diese mit dem statement-level preaccumulation für den Rückwärtsmodus vermeiden. Stattdessen werden die Ableitungen schon im Vorwärtsmodus ausgewertet und müssen nicht auf das tape gespeichert werden. Der im Rückwärtsmodus notwendige Update-Schritt muss dadurch nur einmal je Anweisung und nicht je Elementarfunktion durchgeführt werden. Vertiefendere Informationen dazu finden sich in Lotz et al [64].
Das in Rahmen der vorliegenden Arbeit genutzte AD-Werkzeug *CoDiPack* ist speziell auf minimalen Speicherbedarf und optimale Rechenzeit ausgelegt und für große Softwarepakete

in C++ entwickelt. Neben der schon erwähnten möglichen *preaccumulation* bietet CodiPack beispielsweise erweiterte Möglichkeiten des tapings. Nähere Informationen dazu in Sagebaum [65] und Sagebaum et al [66]. Das AD-Werkzeug *TAPENADE* ist ein bewährter Source Code Transformation Repräsentant. Das Werkzeug ermöglicht das Erstellen von Code im Adjungiertenverfahren in den Sprachen Fortran95, Fortran77 und C. Der Aufbau gliedert sich nach Hascoët [67] in einen Parser-Teil als Front-End, welcher den Code in der jeweiligen Sprache liest, einem Analyse- und AD-Teil, sowie einem Ausgabeteil als Back-End, welcher den Code im Adjungiertenverfahren in der jeweiligen Sprache schreibt. TAPENADE erzeugt eine sogenannte interne Repräsentation des jeweiligen Quellcodes, welche unabhängig von der jeweiligen Programmiersprache des Quellcodes ist. Im Inneren werden eine Reihe von Analysen durchgeführt. Im AD-Bereich werden eine Ableitungs-Abhängigkeitsanalyse sowie eine Aktivitätsanalyse durchgeführt, welche dazu führen, dass nicht benötigte Ableitungen vermieden werden. Das führt zu weniger Speicherbedarf und geringerer Berechnungszeit für den Code im Adjungiertenverfahren. Speziell für den Rückwärtsmodus von AD werden spezielle Analysen durchgeführt, welche auf Basis der erfolgten Anweisungen entscheiden, welche Werte auf das tape geschrieben werden müssen und welche nicht. Beispielsweise sind bei einer Summe oder Differenz zweier abhängiger Variablen, deren primale Werte für die Ableitungsberechnung nicht von Belang, während bei Produkten die primalen Werte auch in der Ableitung wieder auftauchen. So kann bei Summen und Differenzen Speicherplatz auf dem tape eingespart werden. TAPENADE ist vorwiegend für die Berechnung erster Ableitungen im Vorwärts- sowie Rückwärtsmodus zu nutzen. Im Bereich zweiter Ableitungen gibt es nach Hascoët und Pascual [68] bereits erste Ansätze, es ist jedoch noch weitere Entwicklungsarbeit nötig.
Die Entscheidung für das eine oder andere AD-Werkzeug beziehungsweise für Operator Overloading oder Source Transformation wird anhand der Kriterien Komplexität, Ressourcenbedarf, Einfachheit der Implementierung und individuellen Möglichkeiten der Optimierung entschieden. Für einen größeren Überblick zu AD und deren Werkzeugen wird hier auf die Website der AD-Gemeinde `www.autodiff.org` verwiesen.

3.3. Ansätze zur Anwendung des Adjungiertenverfahrens

Gradientenbasierte Optimierungsverfahren benötigen möglichst genau berechnete Gradienten im Sinne von Ableitungen der jeweiligen Zielfunktion J bezüglich der Design-Variablen α. Dies wird umso wichtiger, je höher die Ordnung des Verfahrens ist. Ausgehend von Verfahren erster Ordnung wie dem Verfahren des steilsten Abstiegs über Verfahren konjugierter Gradienten wird die Güte der Gradienteninformation besonders bei Verfahren höhrerer Ordnung wie Quasi-Newton-Verfahren entscheidend. Wie in Unterabschnitt 3.1.1 beschrieben wird die Gradienteninformation benutzt um eine approximierte Hesse-Matrix zu erstellen. Dies betrifft z.B. die in Unterabschnitt 3.1.1 beschriebenen BFGS-Verfahren. Auch im Rahmen von Antwortflächenverfahren wie z.B. dem Gradient-enhanced Kriging werden genaue Ableitungen benötigt, wie Backhaus et al. zeigen [69].

Zur dreidimensionalen Formoptimierung im Bereich der Aerodynamik sind häufig eine Vielzahl von Design-Parametern α notwendig. Die Anzahl n dieser Variablen bewegt sich im Bereich der Turbomaschinenaerodynamik in etwa zwischen dreißig und einigen hundert. Die für die Optimierung benötigte Gradienteninformation lässt sich durch die Jacobimatrix

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

abbilden.
Würden alle Werte der Jacobi-Matrix mithilfe von direkten Methoden wie Finiten Differenzen oder dem AD-Vorwärtsmodus berechnet werden, würde der Rechenaufwand proportional zu der Anzahl der Design-Variablen ansteigen, wäre jedoch unabhängig von der Anzahl an Zielgrößen J. Adjungiertenverfahren haben zum Ziel, die Berechnung der Jacobi-Matrix (3.30) unabhängig von der Anzahl der Variablen α zu realisieren. Dabei ist der Aufwand jedoch in etwa proportional zur Anzahl der Zielgrößen J. Bezüglich der Jacobi-Matrix betrachtet, stellt die direkte Methode die spaltenweise, die Methode auf Basis des Adjungiertenverfahrens die zeilenweise Auswertung der Matrix dar. Da in realitätsnahen Auslegungsaufgaben die Anzahl der Variablen die der Zielgrößen häufig deutlich übersteigt, ist ein Ansatz mithilfe des Adjungiertenverfahrens in vielen Fällen von Vorteil.

Die Welt der Adjungiertenverfahren teilt sich grundlegend in kontinuierliche und in diskrete Ansätze auf. Das Adjungiertenverfahren im kontinuierlichen Ansatz linearisiert zunächst die zugrunde liegenden nichtlinearen Differentialgleichungen des jeweiligen Modells und erhält damit die adjungierten Gleichungen. Die Diskretisierung erfolgt nachfolgend auf den adjungierten Gleichungen. Dieses nun diskretisierte Modell im Adjungiertenverfahren ist ähnlich dem nichtlinearen, primalen Modell zu lösen.
Für den diskreten Ansatz werden die bereits diskretisierten nichtlinearen Grundgleichungen linearisiert, um die adjungierte Gleichung zu erhalten. Die Lösung dieser adjungierten Gleichung ist auf verschiedenen Wegen möglich, welche in diesem Abschnitt erläutert werden sollen. Im Vergleich der beiden Methoden ergeben sich unterschiedliche Problematiken, welche dazu beitragen, sich im speziellen Fall für die eine oder die andere Methode zu entscheiden. Peter und Dwight [70] stellen einige Vor- und Nachteile des kontinuierlichen und des diskreten Ansatzes gegenüber. Für die Wahl des diskreten Ansatzes in der vorliegenden Arbeit waren dabei vor allem die Punkte Konsistenz zum nichtlinearen Modell, Verifizierbarkeit mithilfe Finiter Differenzen und Differenzierung verschiedener Turbulenzmodelle entscheidend. Zudem spielte die eventuelle Anwendbarkeit von AD eine entscheidende Rolle. Auf Basis dieser Überlegungen beziehen sich nachfolgende Betrachtungen lediglich auf Adjungiertenverfahren mit der diskreten Methode. Für den kontinuierlichen Ansatz wird auf Peter und Dwight [70] und Palacios et al. [71] verwiesen.
Eine übliche Vereinfachung, um die unter Umständen komplexe Adjungierung des Turbulenzmodells zu umgehen, ist der sogenannte *frozen* μ- oder *constant eddy viscosity*-Ansatz. Dabei

wird die turbulente Wirbelviskosität μ_t, wie sie in Gleichung (4.6) in Unterabschnitt 5.1.3 eingeführt wird, während der adjungierten Strömungslösung als konstant angenommen. Sie nimmt für jede Zelle des Rechennetzes den Wert an, den Sie nach der primalen Strömungslösung hat und wird als konstant betrachtet. Die Größe wird demnach nicht nach Eingangsgrößen abgeleitet. Die Auswirkungen der Vereinfachung auf die Gradientengüte wird beispielsweise in Frey et al. [72] diskutiert. In der vorliegenden Arbeit wird der *frozen* μ-Ansatz nicht verwendet.

Zur Herleitung der verschiedenen diskreten Ansätze für Adjungiertenverfahren bietet es sich an, die Aufgabenstellung als Optimierungproblem zu formulieren. Ziel ist die Berechnung einer Sensitivität $\frac{\partial J}{\partial x}$ und somit einer Jacobimatrix. Ein Zielfunktional $J(q,x)$ ist abhängig vom Strömungszustand q und von den Freiheitsgraden x. Die Freiheitsgrade x können zum Beispiel Netzknoten einer 3D-Diskretisierung darstellen. Häufig sind die Netzknoten $x = x(\alpha)$ wiederum von Designvariablen α abhängig. Der übersichtlicheren Darstellung halber, wird die Abhängigkeit von $x(\alpha)$ hier nicht dargestellt. Das Zielfunktional J soll unter der Nebenbedingung geltender physikalischer Strömungslösungen minimiert werden. Liegt dem Problem ein aerodynamisches Modell, wie zum Beispiel die 3D-RANS-Gleichungen zugrunde, stellt die Lösung der 3D-RANS-Gleichungen eine Nebenbedingung der Optimierungsaufgabe dar. Die Nebenbedingung gilt als erfüllt, wenn für alle Residuumsterme des Modells $R = 0$ gilt. Unter dieser Maßgabe lässt sich das Optimierungproblem folgendermaßen definieren.

$$\text{Minimiere} \quad J(q(x),x) \tag{3.31}$$

$$\text{u.d.N.} \quad R(q(x),x) = 0. \tag{3.32}$$

Ein solches restringiertes Optimierungproblem kann zunächst mithilfe der bereits in Unterabschnitt 3.1.2 vorgestellten Lagrange-Funktion als

$$\mathscr{L}(\lambda, q(x), x) = J(q,x) + \lambda^T R(q(x),x) \tag{3.33}$$

formuliert werden. Der Lagrange-Multiplikator λ stellt dabei einen Spaltenvektor mit allen Lagrange-Multiplikatoren der jeweiligen Residuen dar. Aus Unterabschnitt 3.1.2 sind notwendige Bedingungen für Optimalität aus den KKT-Bedingungen bekannt. Sie ergeben sich zu

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = \mathscr{L}_\lambda = R = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = \mathscr{L}_q = \frac{\partial J}{\partial q} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial q} = 0 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = \mathscr{L}_x = \frac{\partial J}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda^T \left(\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) = 0 \tag{3.36}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.35) in (3.36) ergibt sich

$$\text{primale Gleichung:} \qquad 0 = R \tag{3.37}$$

$$\text{adjungierte Gleichung:} \qquad 0 = \frac{\partial J}{\partial q} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial q} \tag{3.38}$$

$$\text{Sensitivitätsgleichung:} \qquad 0 = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial x} \tag{3.39}$$

Ein so definiertes Optimum kann iterativ erreicht werden. Ein übliches Vorgehen ist, zunächst die primale Gleichung zu lösen, welche wiederum selbst ein iteratives Verfahren darstellt. Das Resultat ist der konvergierte Zustand $q_*(x)$. Nachfolgend wird die adjungierte Gleichung gelöst um den adjungierten Vektor λ_* zu ermitteln. Mithilfe der erreichten Lösung lässt sich der gesuchte Gradient

$$\mathscr{L}_x = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda_*^T \frac{\partial R}{\partial x} \tag{3.40}$$

berechnen. Dieser kann nun von einem beliebigen gradientenbasierten Verfahren verwendet werden um das Designproblem (3.31) zu lösen.

Da die Lösung von Gleichung (3.37) einen gegebenenfalls langen iterativen Prozess darstellt, ist die Berechnung der exakten Ableitung $\frac{\partial R}{\partial q}$, welche in (3.38) nötig ist, aufwändig. Wird diese Ableitung bzw. die Ableitung $\frac{\partial J}{\partial q}$ ungenau bestimmt, ergibt sich ein falsches λ_* und damit eine Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung. Dies führt dazu, dass die aus Gleichung (3.40) resultierende Sensitivität ungenau oder falsch ist.
Im Folgenden werden drei verschiedene Wege vorgestellt, wie die benötigten Sensitivitäten ermittelt werden können. Die ersten beiden Verfahren gehen von einer komplett auskonvergierten primalen Lösung q_* aus und machen sich $R = 0$ mehr oder weniger zunutze.
Das dritte Verfahren wird ohne Einschränkungen die zum Konvergenzgrad der primalen Lösung konsistenten Gradienten $\frac{\partial J}{\partial q}$ liefern, unabhängig davon ob $R = 0$ erfüllt ist oder nicht.

3.3.1. Methode des direkten Lösens der adjungierten Gleichung

Zur Bestimmung der adjungierten Lösung kann die adjungierte Gleichung (3.38) mithilfe eines Gleichungssystemlösers direkt exakt oder approximativ für λ gelöst werden. Bei exakter Konvergenz der primalen Gleichung (3.37) und exakter Lösung des Gleichungssystems (3.38) ergibt sich ebenfalls eine exakte zur primalen Lösung konsistent adjungierte Lösung. Dazu wird häufig, wie beispielsweise bei Frey et al. [48] versucht die gegebenenfalls vorhandenen Dünnbesetztheit des linearen Gleichungssystems (3.38) auszunutzen. Unter Nutzung der zuvor beschriebenen Annahme konstanter Wirbelviskosität wurde dieser Ansatz in Frey et al [72] und Akin et al [73] verwendet. Unter Zuhilfenahme des Toolkits *PETSc* und per AD bestimmten Ableitungstermen wurde der Ansatz von Marta et al [74] verfolgt.
Insbesondere unter Berücksichtigung eines Turbulenzmodells ist das Gleichungssystem nach Albring et al. [75] schlecht konditioniert und die Nutzung von Krylow-Unterraum-Verfahren [6]

[6] Krylow-Unterraum-Verfahren sind iterative Lösungsverfahren um dünnbesetzte lineare Gleichungssystem zu lösen

zur Lösung kann ineffizient oder in gegebener Zeit unmöglich sein. Da $R = 0$ nur näherungsweise erreicht werden kann, ergibt sich prinzipiell eine zur primalen Lösung inkonsistente adjungierte Lösung.

3.3.2. Reverse Accumulation Methode

Zu jeder geometrischen Konfiguration x wird zunächst die primale Lösung ermittelt, sodass $R(q,x) = 0$ gilt. Zu einer solchen auskonvergierten Lösung gehört ein Zustand $q_*(x)$, welcher für die Auswertung der Zielgrößen $J(q_*,x)$ entscheidend ist. Iterative RANS-Löser können verallgemeinert in der Form

$$q(x)_{i+1} = q(x)_i + P(q,x)R(q,x) \tag{3.41}$$

geschrieben werden. Der Term $P(q,x)$ bezeichnet dabei den Vorkonditionierer. Dieser ist im Falle eines expliziten Zeitschrittverfahrens die Zeitschrittweite, im Falle eines impliziten Zeitschrittverfahrens aufwändiger zu ermitteln wie Albring et al. [75] und Backhaus et al. [69] zeigen. Wie bereits beschrieben, ist die adjungierte Gleichung (3.38) nur für $R = 0$ konsistent zur primalen Gleichung (3.37). In der Praxis konvergiert die primale Lösung nur zu nahezu $R = 0$, was eine Inkonsistenz in der Adjungierten nach sich zieht und schließlich die Sensitivität verfälscht. Um für den Fall einer nur nahezu auskonvergierten Lösung möglichst gute Ergebnisse für den adjungierten Vektor zu erzielen, bezieht der Ansatz der Reverse Accumulation den Vorkonditionierer $P(q,x)$ in die Erstellung der adjungierten Gleichung mit ein. Somit ergibt sich die so veränderte adjungierte Gleichung zu

$$0 = \frac{\partial J}{\partial q_*} + \lambda^T \frac{\partial (PR)}{\partial q_*}. \tag{3.42}$$

Der Index $_*$ kennzeichnet hierbei den auskonvergierten Zustand. Transponiert man diese Gleichung und addiert auf beiden Seiten mit λ, lässt sich auch die adjungierte Gleichung in eine Fixpunktgleichung

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \left(\frac{\partial J}{\partial q_*}\right)^T + \left(R\frac{\partial P}{\partial q_*} + \frac{\partial R}{\partial q_*}P\right)^T \lambda_i. \tag{3.43}$$

umformen, welche ähnlich der primalen Gleichung (3.41) iterativ gelöst werden kann. In Gleichung (3.43) wird deutlich, dass der Term P für den Vorkonditionierer nicht nur als Wert, sondern auch als Ableitung nach q_* bestimmt werden muss. Durch Definition der Hilfsgröße

$$G = q + PR \tag{3.44}$$

sowie der Hilfsgröße

$$N = G^T\lambda + J^T = q^T\lambda + (PR)^T\lambda + J^T, \tag{3.45}$$

welche abgeleitet nach q_*^T die rechte Seite von (3.43) ergibt, lassen sich die beiden Fixpunktiterationen (3.41) und (3.43) in der Nomenklatur der Reverse Accumulation kurz als

$$q_n(x) = G(q_{n-1}, x) \tag{3.46}$$

$$\lambda_m(x) = \frac{\partial N(q_*, x, \lambda_{m-1})}{\partial q_*} = \left(\frac{\partial G(q_*, x)}{\partial q_*}\right)^T \lambda_{m-1} + \left(\frac{\partial J(q_*, x)}{\partial q_*}\right)^T \tag{3.47}$$

angegeben. Das Auftreten von q_* in Gleichung (3.47) kennzeichnet, dass zur Bestimmung vom λ_m der auskonvergierte primale Zustand q_* vorliegen muss und Gleichung (3.46) somit seinen Fixpunkt erreicht hat. Dies wird sich insofern zunutze gemacht, als dass die Ableitungsterme nach q aus Gleichung (3.43) nur am auskonvergierten Zustand berechnet werden müssen. Die algorithmische Differentiation muss somit nur auf den letzen Iterationsschritt angewendet werden. Die beiden iterativen Vorgänge (3.46) und (3.47) sind nur über den Zustand q_* verknüpft. Die Fixpunktiteration der adjungierten Gleichung (3.47) ist somit eigenständig und kann unter Nutzung von q_* und der ermittelten Ableitungen $\frac{\partial J^T}{\partial q_*}$ und $\frac{\partial G^T}{\partial q_*}$ bis zur gewünschten Genauigkeit iteriert werden. Das Berechnungsschema zur Berechnung der adjungierten Lösung mit AD ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Anzahl der zu berechnenden

$$\text{primal:} \qquad q_0 \xrightarrow{G(q_0,x)} q_1 \xrightarrow{G(q_1,x)} q_2 \xrightarrow{\cdots} q_{n-1} \xrightarrow{G(q_{n-1},x)} q_n = q_* \xrightarrow{J(q_*,x)} J$$

$$\text{adjungiert:} \qquad \lambda_* = \lambda_m \xleftarrow{\frac{\partial N(q_*,x,\lambda_{m-1})}{\partial q_*}} \lambda_{m-1} \xleftarrow{\cdots} \lambda_2 \xleftarrow{\frac{\partial N(q_*,x,\lambda_1)}{\partial q_*}} \lambda_1 \xleftarrow{\frac{\partial N(q_*,x,\lambda_0)}{\partial q_*}} \lambda_0 \xleftarrow{\left(\frac{\partial J(q_*,x)}{\partial q_*}\right)^T} \mathbf{1}$$

Abbildung 3.5.: Schematische Darstellung des Reverse Accumulation Ansatzes. Die adjungierte Berechnung nutzt das konvergierte Ergebnis der primalen Lösung q_*. Die Anzahlen der Iterationsschritte der beiden Berechnungen n und m sind voneinander unabhängig.

Schritte im Adjungiertenverfahren ist damit prinzipiell unabhängig von der Anzahl der primalen Konvergenzschritte. Zur Berechnung der resultierenden Sensitivität ergibt sich aus der Sensitivitätsgleichung (3.36)

$$\mathscr{L}_x = \frac{\partial N(q_*, x, \lambda_*)}{\partial x}. \tag{3.48}$$

3.3.3. Black Box Methode

Der Black-Box-Ansatz bedingt, im Gegensatz zu den soeben vorgestellten Ansätzen, keine primal auskonvergierte Lösung. Er leitet sich direkt aus dem AD-Rückwärtsmodus ab und führt zu einer analytisch exakten Ableitung $\frac{dJ}{dx}$.
Ziel ist es, eine Ableitung

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{\partial J}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x} \tag{3.49}$$

zu berechnen. Dabei stellen die Terme $\frac{\partial J}{\partial q}$ und $\frac{\partial J}{\partial x}$ Ableitungen des Zielfunktionals bezüglich des Strömungszustandes beziehnungsweise der Diskretisierung dar. Die Berechnung des Zielfunktionals J ausgehend von einer bekannten Strömungslösung q ist typischerweise weniger umfangreich als die Berechnung der Strömungslösung q selbst. Demnach können die Ableitungsterme $\frac{\partial J}{\partial q}$ und $\frac{\partial J}{\partial x}$ mithilfe des AD-Rückwärtsmodus ohne Zuhilfenahme von Checkpointing bestimmt werden. Die Berechnung von q stellt einen iterativen Prozess dar, welcher bereits in Unterabschnitt 3.3.2 als Fixpunktgleichung (3.44) dargestellt wurde. Da $R = 0$ im Black Box Modus nicht vorausgesetzt wird, darf Gleichung (3.44) nicht länger als auskonvergierte Fixpunktgleichung behandelt werden. Ein vereinfachter schematischer primaler Programmablauf ist in Anlehnung an die in Abbildung 3.4 dargestellten Ablaufdiagramme in Abbildung 3.6 dargestellt. Jeder Zustand q_k ist vom Vorgängerzustand q_{k-1} und von den

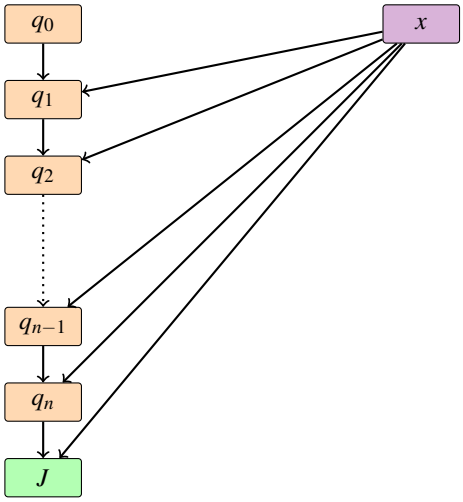


Abbildung 3.6.: Schematischer Berechnungsgraph einer vereinfachten Prozesskette ausgehend von einer Diskretisierung x und einem initialen Strömungszustand q_0 mit Strömunglösung q_n und Ergebnisgröße J.

Netzkoordinaten x abhängig. Nach dem in Abbildung 3.6 dargestellten Ablauf ergibt sich beispielsweise für die letzten beiden primalen Iterationen die Ableitung von J nach x zu

$$\frac{dJ(q_n(q_{n-1}(q_{n-2},x),x),x)}{dx} = \frac{\partial J}{\partial q_n}\left(\frac{\partial q_n}{\partial q_{n-1}}\left(\frac{\partial q_{n-1}}{\partial q_{n-2}} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial q_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial J}{\partial x}. \tag{3.50}$$

Im Sinne von AD, muss jeder primale Iterationsschritt von q_0 bis q_n abgeleitet werden. Verglichen mit dem Schema in Abbildung 3.5 ergibt sich nun das in Abbildung 3.7 dargestellte Schema.

Hierbei wird deutlich, dass die Berechnung im Adjungiertenverfahren nicht länger eine eigenständige Rückwärtsiteration darstellt, welche in beliebig vielen Iterationsschritten zur Konvergenz gebracht wird, sondern über die Zwischenergebnisse q direkt mit der primalen Lösung gekoppelt ist. Die adjungierten Zwischenzustände $\hat{\lambda}$ unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Aussagekraft von den Zwischenzuständen λ im Reverse Accumulation Ansatz. Während λ ein iterativ verbessertes Zwischenergebnis darstellt mit dessen Hilfe Gleichung (3.48) ausge-

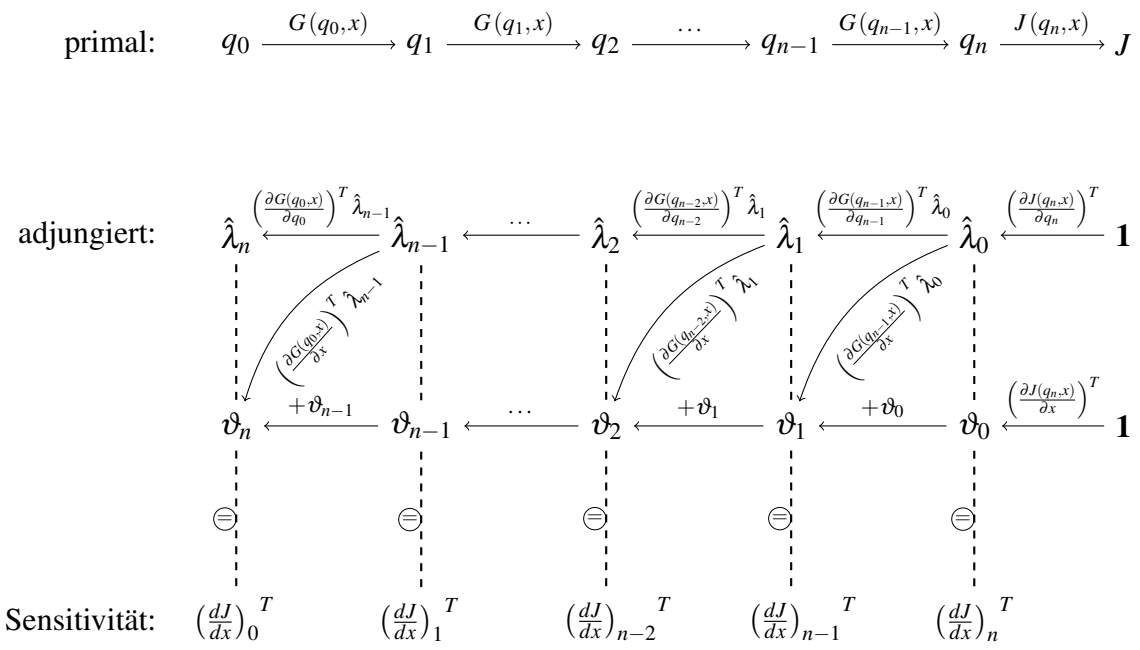


Abbildung 3.7.: Schematische Darstellung des Black Box Ansatzes. Zwischenergebnisse resultieren aus den Termen auf den am Ergebnis eintreffenden durchgezogenen Pfeilen. Bei mehreren eintreffenden Pfeilen sind die jeweiligen Terme zu addieren. Mit gestrichenen Linien verbunden sind Zustände die einer definierten Iteration zuzuordnen sind und im Gegensatz zum Reverse Accumulation eine physikalische Bedeutung haben.

wertet werden kann um die Sensitivität zu erhalten, bezeichnet $\hat{\lambda}_k$ nach n primalen Schritten und k Rückwärtsschritten leidiglich die Kette der Ableitungen nach den Strömungszuständen $\frac{\partial q_n}{\partial q_{n-1}} \frac{\partial q_{n-1}}{\partial q_{n-2}} \cdots \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_k}$. Um die Sensitivität nach x zu berechnen, muss zusätzlich in jedem Rückwärtsschritt die sogenannte Kontrolle ϑ, der Ableitungsterme nach x bestimmt werden. Die Black Box Methode ist die Umsetzung des in Unterabschnitt 3.2.2.2 dargestellten AD-Rückwärtsmodus für die gesamte Prozesskette. Dabei ist jedoch zu beachten, dass zur Berechnung eines neuen Zustandes q_k aus einem Zustand q_{k-1} eine Vielzahl von Elementarfunktionen ausgewertet und auf dem Tape gespeichert werden müssen. Anders als beim Reverse Accumulation Ansatz, wo davon ausgegangen wird, dass $q_n = q^* = q_{n+1}$ gilt und das Tape nur die letzte Iteration enthalten muss, muss bei der Black Box Methode jede Elementarfunktion jedes Zeitschrittes auf dem Tape gehalten werden. Da dies die Kapazität des Arbeitsspeichers übersteigen würde, muss schrittweise mit sogenanntem Checkpointing vorgegangen werden. Während der primalen Berechnung werden dazu mehrere Zwischenzustände zwischen q_0 und q_n als *Checkpoints* auf der Festplatte gespeichert. Im Rückwärtsschritt wird dann zunächst der vorletzte Zustand $n-1$ mithilfe eines Checkpoints geladen, das Tape für den Schritt n aufgezeichnet und im AD-Rückwärtsmodus ausgewertet, danach der vorvorletzte Checkpoint geladen usw. Weiterführende Informationen zum Checkpointing finden sich bei Griewank [76].

4. Aerodynamische Prozesskette und Optimierungsumgebung

4.1. Konventionelle Prozesskette

Als konventionelle Prozesskette wird im Folgenden eine bei Aerodynamikoptimierungen verwendete Prozesskette verstanden, welche keine Prozesskettenbestandteile enthält, welche die Adjungiertenmethode verwenden. Die Prozesskette hat die Aufgabe auf Basis von Entwurfsvariablen p für die zu berechnende Geometrie aerodynamische Bewertungsgrößen J zu generieren. Sie gliedert sich grob in den Präprozess bestehend aus Parametrisierung, Geometriegenerierung und Netzgenerierung, den eigentlichen Prozess des Berechnens des Strömungsfeldes und den Postprozess, welcher die Auswertung des Strömungsfeldes durchführt. Die dazugehörige Prozesskette ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt. Die Bestandteile werden im Folgenden näher erklärt.

4.1.1. Präprozess

Die Generierung der zu bewertenden Geometrie baut in der hier betrachteten konventionellen 3D-Prozesskette auf einem bekannten meridionalen Ringraumverlauf auf. Dieser wurde aus bereits vorher durchgeführten 2D-Berechnungen im Rahmen der Vorauslegung mithilfe von Stromlinienkrümmungsverfahren gewonnen.
Die im Ringraum befindlichen Schaufelreihen werden mithilfe einer speziellen Parametrisierung erzeugt, welche die Profilform auf mehreren radialen Schnitten definiert und diese radialen Schnitte mithilfe einer polynomialen Beschreibung über den Radius verändert. In Abbildung 4.2 sind die zur Verfügung stehenden Profilparameter dargestellt. Jedes Profil gliedert sich dabei in die vier umlaufenden Teilbereiche Saugseite, Vorderkante, Druckseite, Hinterkante. Die Bereiche werden von vier Profilaufpunkten voneinander getrennt, sie sind als dicke schwarze Punkte in Abbildung 4.2 abgebildet. Die Lage der Profilaufpunkte sowie die Anstiege der Kurven an diesen Punkten werden über die allgemeinen Profilparameter bestimmt. Diese sind im oberen Teil von Tabelle 4.1 aufgeführt: Die sogenannte Hilfssehnenlänge s_h definiert den Abstand der Vorderkantenaufpunkte von den Hinterkantenaufpunkten und ist somit eine Stellgröße der Sehnenlänge. Die Lage des Profils wird durch die zwei Lageparameter t_{ax} und t_ϑ axial sowie in Umfangsrichtung definiert. Der Bezugspunkt der Lageparameter kann dabei die Vorderkante, die Hinterkante oder wie hier dargestellt, der Schwerpunkt des Profils sein. Die Staffelung des Profils wird über den Winkel α_{St} definiert, den die Verbindungslinie von Vorderkantenaufpunkten zu Hinterkantenaufpunkten mit der Maschinenachse bildet. Die Abstände der Vorderkantenaufpunkte bzw. der Hinterkantenaufpunkte bilden die Vorderkan-

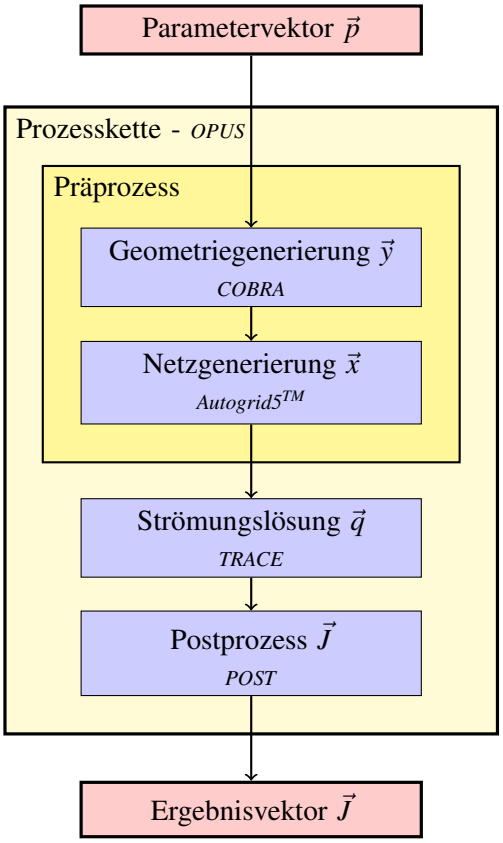


Abbildung 4.1.: Darstellung der konventionellen Prozesskette. Die jeweils verwendeten Werkzeuge sind kursiv gesetzt.

tendicke d_{VK} und die Hinterkantendicke d_{HK}. Der Metallwinkel sowie der Keilwinkel wird jeweils an Vorder- und Hinterkante wie in Abbildung 4.2 rechts dargestellt als α_{VK} und μ_{VK} bzw. α_{HK} und μ_{HK}definiert.
Zusätzlich sind die Verläufe der Kurven zwischen den Verbindungpunkten über weitere Spline-Parameter realisiert. Diese dimensionslosen Parameter sind je Spline jeweils an beiden Aufpunkten definiert. Die Parameter für den Saugseitenspline für den vorderen Aufpunkt sind in Abbildung 4.2 schematisch eingetragen. In Tabelle 4.1 sind sie im unteren Bereich aufgeführt. Die Größe τ_{VK-S} stellt dabei die Krümmung des Splines am Vorderkantenaufpunkt der Saugseite dar. Die Größe ρ_{VK-S} definiert wie weit der gegebene Anstieg am Vorderkantenaufpunkt der Saugseite in Richtung Hinterkante wirkt. Die gleiche Größe in Bezug auf die Krümmung stellt die Größe σ_{VK-S} dar. Alle drei Parameter sind auch am Hinterkantenaufpunkt der Saugseite sowie an beiden Aufpunkten der Druckseite definiert. Die Formen der Vorder- und Hinterkantensplines können prinzipiell ebenfalls in dieser Art und Weise beschrieben werden, werden aber üblicherweise in aerodynamischen Optimierungen als gegeben und unveränderlich angenommen. Die Umsetzung dieser Parametrisierung wird durch das Schaufelgeometriewerkzeug *AirFoil Designer pDesk*® vollzogen. Neben der reinen Schaufelgestaltung wird in diesem Werkzeug die Möglichkeit genutzt, Profile auf bestimmte geometrische Ziele zu *fitten*. So bietet pDesk die Möglichkeit z.B. eine Schaufeldicke mithilfe eines

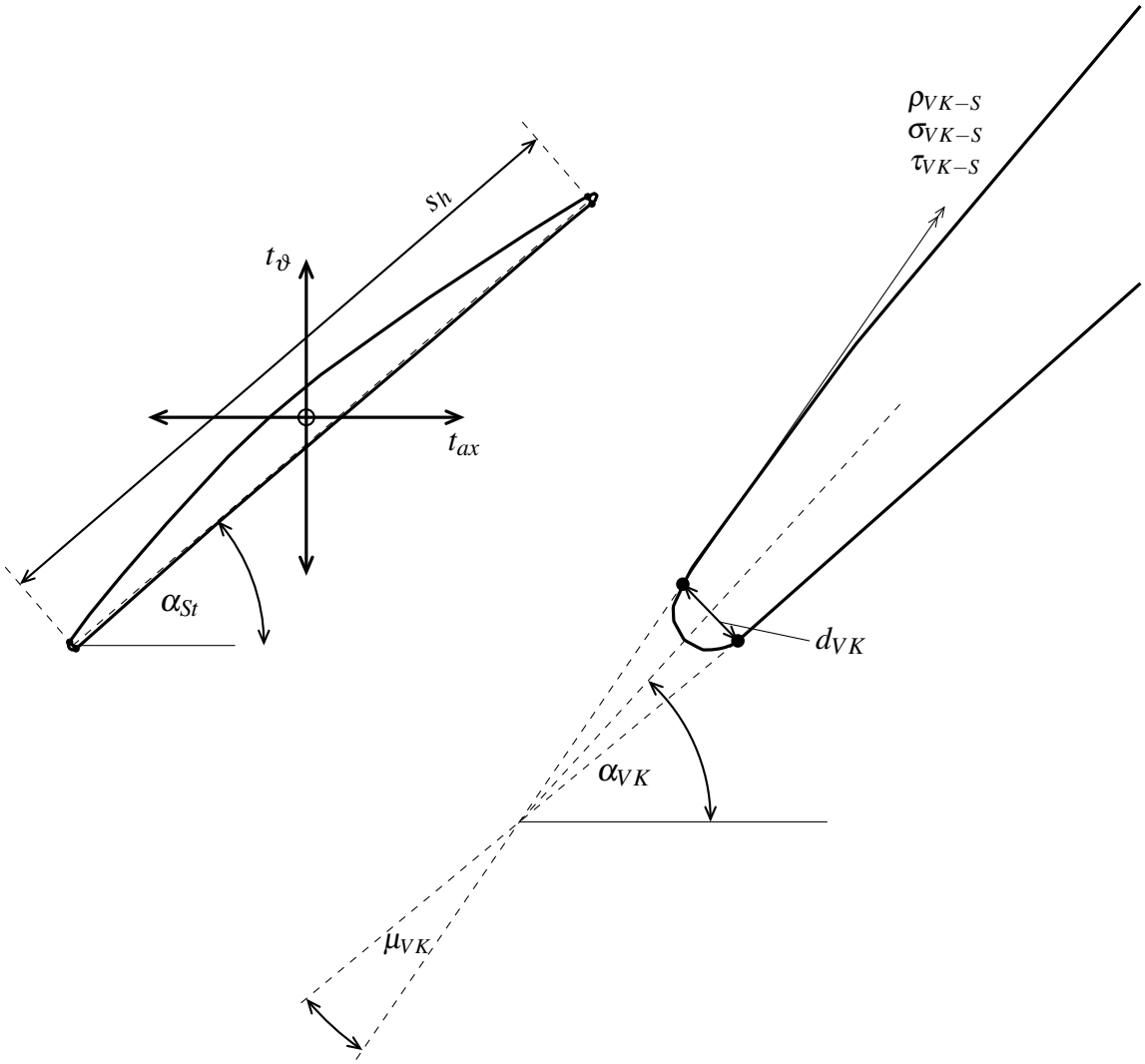


Abbildung 4.2.: Darstellung der Profilparameter am Gesamtprofil links, sowie beispielhaft an der Vorderkante rechts.

Parameters auf einen festgelegten Wert zu iterieren. Diese Schaufeldicke wird nachfolgend auch unter Änderung anderer freier Parameter weiterhin eingehalten. Dies ist insbesondere für die Optimierung von großem Vorteil, da somit nur gültige Geometrien erzeugt und in der Folge auch bewertet werden.
Für die radiale Staffelung der Profilparameter werden Polynome verwendet, welche je nach Anzahl an Stützprofilen in verschiedenen Graden abgebildet werden können. Dabei ist es möglich für verschiedene Profilparameter unterschiedliche Polynome zu verwenden.
Die generierten Schaufeln werden von dem MTU-eigenen Geometrie-Werkzeug *COBRA* verwendet. Zusammen mit dem meridionalen Ringraumverlauf werden Flächen generiert, welche auf dem CAD-Standard *Parasolid*^{TM} basieren. COBRA bietet zudem verschiedene Möglichkeiten den Übergang von Schaufel zu Ringraum mittels Verrundungen zu modellieren, sowie die Möglichkeit der dreidimensionalen Ringraumkonturierung. Ringraumkonturierungen wer-

Parameter	Beschreibung	weitere Parameter gleicher Art
s_h	Hilfssehnenlänge	-
t_{ax}	axialer Lageparameter	-
t_ϑ	Lageparameter in Umfangsrichtung	-
α_{St}	Profilstaffelungswinkel	-
d_{VK}	Vorderkantendicke	d_{HK}
α_{VK}	Vorderkantenmetallwinkel	α_{HK}
μ_{VK}	Vorderkantenkeilwinkel	μ_{HK}
τ_{VK-S}	Splinekrümmung Vorderkante Saugseite	τ_{HK-S}, τ_{VK-D}, τ_{HK-D}
ρ_{VK-S}	Wirkungsweite des Splineanstiegs an der Vorderkante der Saugseite	ρ_{HK-S}, ρ_{VK-D}, ρ_{HK-D}
σ_{VK-S}	Wirkungsweite der Splinekrümmung an der Vorderkante der Saugseite	σ_{HK-S}, σ_{VK-D}, σ_{HK-D}

Tabelle 4.1.: Auflistung der Profilparameter und deren Beschreibungen

den im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendet. In COBRA generierte Flächen können zudem mittels Transformationen beeinflusst werden. Auf diese Möglichkeit wird später im Rahmen der Abbildung von Verstellstatoren eingegangen.
Aufbauend auf den von COBRA erzeugten CAD-Flächen, wird ein dreidimensionales strukturiertes Hexaeder-Netz des zu durchströmenden Raumes zwischen den Flächen erzeugt. Dazu wird eine angepasste Version des Vernetzungswerkzeuges *Autogrid5*^{TM} verwendet, welches spezielle flexible strukturierte Netztopologien für Turbomaschinenkonfigurationen bereithält und mithilfe eines Glätters für eine gute Netzqualität sorgt. Dabei wird jede Schaufelreihe separat vernetzt und die resultierenden Netze zusammengefügt.

Im Präprozess werden vor allem über die Schaufelparametrisierung, als auch später über die Transformationen von Airfoilflächen zur Darstellung der Verstellwinkel, Optimierungsparameter definiert. Die in der Formoptimierung ebenfalls denkbare und teilweise angewandte Möglichkeit der direkten Beeinflussung von Oberflächennetzpunkten als freie Parameter, wie sie beispielsweise bei Walther und Nadarajah [50] verwendet wird, ist im industriellen Kontext noch nicht praktikabel. Auch wenn diese netzbasierte Parametrisierung insbesondere angesichts von Prozessketten auf Bais der Adjungiertenmethode für die Optimierung attraktiv erscheint, ist sie außerhalb der Optimierung schwer handhabbar. Die hier definierten Geometrieparameter bieten eine für den Auslegungsingenieur einfache, effektive und intuitiv zu bedienende Beschreibung der Geometrie. Die Parametrisierung stellt sicher, dass vor und auch nach der Optimierung weiter manuell an den Geometrien gearbeitet werden kann. Im Fall der Netzpunkte als freie Parameter wäre das Nachbearbeiten derzeit nur sehr aufwändig mög-

lich, die Definition geometrischer Nebenbedingungen wäre erschwert und die Beurteilung der Fertigbarkeit der entstanden Geometrien schwer zu beurteilen.

4.1.2. Strömungslösung

Als Strömungslöser dient das Finite-Volumen-Verfahren *TRACE*, welches am Institut für Antriebstechnik des DLR in Köln entwickelt wird. Es ist auf den Einsatz von Innenströmungen insbesondere in Turbomaschinen ausgelegt und löst die dreidimensionalen Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen. TRACE ermöglicht das Lösen der Gleichungen auf strukturierten wie unstrukturierten Netzen. Im Folgenden wird TRACE mit den in dieser Arbeit verwendeten Modellen näher beschrieben. Weitere Informationen zum Strömungslöser TRACE finden sich unter `www.trace-portal.de/userguide/trace/index.html`.

4.1.2.1. Modellierung

Das physikalische Modell der Strömung bilden die Navier-Stokes-Gleichungen, welche in ihrer differentiellen und konservativen Form in Anhang A.1 dargestellt sind. Um diese Gleichungen direkt zu lösen, müssen zeitlich und räumlich sehr kleinskalige Turbulenzeffekte aufgelöst werden, was ein sehr feines Rechennetz zur Folge hat. Dies ist nach Anderson [77] nur in sehr kleinen Kontrollvolumina und mit erheblicher Rechenzeit möglich und wird als *Direkte Numerische Simulation - DNS* bezeichnet. Um diese Nachteile zu vermeiden, wird auf die direkte Simulation dieser kleinen Skalen verzichtet und als Ansatz die *Reynolds-Mittelung* für die Zustandsgrößen des Strömungsfeldes gewählt. Dazu wird eine Strömungsgröße wie z.B. die Geschwindigkeit $u(\vec{x},t)$ in einen Mittelwert und einen Schwankungswert nach Gleichung

$$u(\vec{x},t) = \overline{u}(\vec{x}) + u'(\vec{x},t) \tag{4.1}$$

aufgeteilt. Dabei gilt für diese beiden Terme

$$\overline{u} = \lim_{\overline{\tau}\to\infty} \frac{1}{\overline{\tau}} \int_0^{\overline{\tau}} u \,\mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

und

$$\overline{u'} = \lim_{\overline{\tau}\to\infty} \frac{1}{\overline{\tau}} \int_0^{\overline{\tau}} u' \,\mathrm{d}t = 0. \tag{4.3}$$

Dies führt dazu, dass an Stellen von Produkten dieser Strömungsgrößen in den Navier-Stokes-Gleichungen Terme auftreten, wie etwa auf der linken Seite der Impulsgleichung in (A.2), welche Produkte der Schwankungsanteile der Geschwindigkeiten enthalten. Diese ergeben gemeinsam gemittelt nicht null. Diese Terme werden im turbulenten Spannungstensor $\overline{\overline{\tau_{turb}}}_{ij} = -\rho\overline{u_i'u_j'}$ zusammengefasst und zum in Anhang A.1 dargestellten Spannungstensor $\overline{\overline{\sigma}}$ addiert. Durch die vorgenommene Mittelung entstehen zusätzliche Terme, welche das System unterbestimmt machen. Um das sogenannte Schließungsproblem zu lösen, werden Turbulenzmodelle

genutzt.
In dieser Arbeit wird ausschließlich das $k-\omega$-Turbulenzmodell von Wilcox [78] verwendet. Darin werden die neuen Terme im turbulenten Spannungstensor mithilfe des Ansatzes von Boussinesq zu

$$\overline{\overline{\tau_{turb}}}_{ij} = 2\mu_{turb}\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad . \tag{4.4}$$

definiert. S_{ij} stellt dabei den Spannungstensor

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} u_x & \frac{v_x+u_y}{2} & \frac{w_x+u_z}{2} \\ \frac{v_x+u_y}{2} & v_y & \frac{v_z+w_y}{2} \\ \frac{w_x+u_z}{2} & \frac{v_z+w_y}{2} & w_z \end{bmatrix} \quad . \tag{4.5}$$

dar. Die in Gleichung (4.5) enthaltene turbulente Viskosität ist zu

$$\mu_{turb} = \frac{\rho k}{\omega} \tag{4.6}$$

definiert. Damit ist die Anzahl der zusätzlichen Unbekannten $\tau_{turb_{xx}}$, $\tau_{turb_{yy}}$, $\tau_{turb_{zz}}$, $\tau_{turb_{xy}} = \tau_{turb_{yx}}$, $\tau_{turb_{xz}} = \tau_{turb_{zx}}$, $\tau_{turb_{yz}} = \tau_{turb_{zy}}$ aus dem turbulenten Spannungstensor von sechs auf zwei reduziert worden. Die verbleibenden Unbekannten, die turbulente kinetische Energie k sowie die bezogene Dissipationsrate ω werden jeweils mit einer separaten partiellen Differentialgleichung, welche in Anhang A.2 dargestellt sind, definiert. Aufgrund der beiden zusätzlichen Gleichungen wird beim $k-\omega$-Turbulenzmodell von einem Zweigleichungsmodell gesprochen.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt im TRACE-Code mithilfe des Roe-Schemas, welches mit einem MUSCL-Schema kombiniert ist [79]. Die Zeitintegration ist implizit umgesetzt und erfolgt mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren.

4.1.2.2. Wandbehandlung und Randbedingungen

Das Berechnungsnetz ist in Blöcke aufgeteilt, welche an allen Berandungen mit zwei Schichten so genannter Geisterzellen besetzt sind, welche für die Kommunikation zum benachbarten Block oder zur Wand dienen.
Zur Abbildung einer Begrenzung des Strömungsfeldes durch eine feste reibungsbehaftete Wand bietet TRACE die Möglichkeiten *Low-Reynolds* für den Fall einer voll aufgelösten Grenzschicht, sowie einen Wandfunktionsmodus, in dem die laminare Unterschicht sowie der Übergangsbereich zum Bereich voll ausgebildeter Turbulenz nicht aufgelöst sondern modelliert werden. Nähere Informationen zur Definition der Grenzschichtbereiche finden sich beispielsweise in Oertel et. al [80]. Für den voll aufgelösten Fall wird in Weber und Fox [81] ein wandnähster Zellmittelpunkt von $y_+ \approx 1$ empfohlen. Für die Wandfunktion ist die Empfehlung $y_+ = 30-150$. Im Bereich der Verdichteraerodynamik bei MTU Aero Engines AG werden mithilfe spezieller Wandfuntionen, welche den Übergangsbereich zur laminaren Unterschicht gut modellieren auch deutlich kleinere y_+-Werte in Verbindung mit Wandfunk-

tionen verwendet. Dies ist in Hinblick auf gut aufgelöste Spaltbereiche und eine dünne Hinterkante notwendig und unumgänglich.
Ein- und Ausströmbereiche werden mit nichtreflektierenden Randbedingungen behandelt. Da in stationären Berechnungen üblicherweise nur eine Schaufel pro Schaufelreihe berechnet wird, wird eine so genannte periodische Randbedingung zur Kopplung von Schaufelnetzen in Umfangsrichtung verwendet. Dabei wird der Zustand in Umfangsrichtung von einem auf den nächsten periodischen Rand kommuniziert.
Zur Koppelung von Blöcken unterschiedlicher Netztopologie stehen ein *Mixing-Plane-Ansatz* sowie ein *Zonal-Ansatz* oder *Zonal-Mixed-Ansatz* zur Verfügung. Der Mixing-Plane-Ansatz koppelt Blöcke, welche den Übergang von einem Turbomaschinengitter zum nächsten bilden und unterschiedliche Drehgeschwindigkeiten aufweisen. Dazu wird laut [81] auf die nicht reflektierenden Ein- und Ausströmrandbedingungen zurückgegriffen. In stationären Rechnungen erfolgt eine Mittelung in Umfangrichtung, was eine separate Behandlung jeder Schaufelreihe in ihrem jeweiligen Relativsystem möglich macht. Räumliche über den Umfang schwankende Strömungsinformationen können über die Mixing-Plane hinweg nicht weitergegeben werden. Der Zonal-Ansatz verbindet aneinander angrenzende Blöcke im gleichen Relativsystem, deren Verbindungsflächen deckungsgleich sind jedoch aufgrund unterschiedlicher Netztopologie keine Eins-zu-Eins-Verbindungen der Netze ermöglichen. Sind die Verbindungsflächen nicht deckungsgleich wird das Zonal-Mixed-Interface verwendet. In den Bereichen des Interfaces, in dem sich die Blöcke überlappen, wird kommuniziert. Im nicht überlappenden Bereich kann eine bewegte oder stehende Wand als Randbedingung definiert werden.

4.1.3. Postprozess

Die Bewertung der durchgeführten Strömungslösung basiert auf den Daten der von TRACE bereitgestellten cgns-Ergebnisdatei. Das in Zusammenarbeit von MTU Aero Engines AG und dem Institut für Antriebstechnik des DLR in Köln erstellte Auswertungswerkzeug POST bietet die Möglichkeit diese Daten in verschiedenen Formen aufzubereiten. Während im manuellen Betrieb neben den nulldimensionalen Strömungsgrößen wie Wirkungsgrad, Gesamtmassenstrom oder Leistung auch eindimensionale Werte wie radiale Abströmwinkelverläufe oder zweidimensionale Konturplots von Schaufeloberflächen interessant sind, sind für den Optimierungsprozess lediglich 0D-Werte von Belang. Dazu werden skalare Werte von definierten Strömungsgrößen in einem Standardprozess zunächst an allen Schnittebenen zwischen Schaufelreihen gebildet. Darauf basierend, werden Werte für jede Schaufelreihe, jede Stufe sowie für definierte Teile oder das gesamte Kontrollvolumen bestimmt. Zusätzlich ist die Definition von weiteren beliebigen Schnitten möglich auf denen wiederum gewünschte Größen berechnet werden können. Insbesondere radiale Schnitte können als sogenannte S1-Schnitte Quellen für Optimierungsziele in Form von Profilgrößen darstellen.
Obwohl lediglich skalare Größen für den Optimierungsverlauf von Belang sind, gehören auch eindimensionale Größen zur Prozesskette. Diese Daten werden während der Optimierung über eine grafische Benutzeroberfläche visualisierbar gemacht. So können beispielsweise radiale Verläufe eines statischen Drucks oder eines Abströmwinkels zwischen den einzelnen Bewertungen der Optimierung verglichen werden.

4.2. Optimierungsumgebung

Die in dieser Arbeit erwähnten Prozessketten werden mithilfe der Optimierungsumgebung *OPUS* in der Version 2.0 abgebildet, welche bei der MTU Aero Engines AG entwickelt und hausintern genutzt wird. OPUS kann im Bereich der Entwicklung von Turbomaschinen für die Fachdisziplinen Aerodynamik, Strukturmechanik, Wärmetechnik, Luftsystem und Leistungsrechnung als sogenannte *Workflow Engine* genutzt werden. Weitere Anwendungen und disziplinübergreifende Anwendungsfelder sind möglich und zum Teil bereits in Anwendung.
Der Begriff Workflow Engine stammt aus der Wirtschaftsinformatik und dem Prozessmanagement und beschreibt ein Programm zur Steuerung von Arbeits- oder Geschäftsprozessen. Neben der sukzessiven Ausführung von Teilprozessen übernimmt eine Workflow-Engine eine dokumentierende und kontrollierende Rolle. Zu diesem Zweck ist häufig ein Datenbanksystem angeschlossen. Zur benutzerfreundlichen Handhabung des Gesamtprozesses sind graphische Benutzeroberflächen üblich. Näheres zu Workflow-Engines und Workflow-Management findet sich in Hollingsworth [82].
Dem Prinzip der Workflow-Engine folgend, besteht Opus aus einer zentralen Steuerungseinheit, welche die eigentliche Workflow Engine abbildet und den auszuführenden Prozessen, welche die Prozesskettenglieder in einer aerodynamischen oder strukturmechanischen Prozesskette darstellen. Zum Aufsetzen, Beeinflussen, Beobachten und Auswerten der berechneten Prozessekette steht eine umfangreiche graphische Benutzeroberfläche zur Verfügung.
Jede Prozesskette besteht aus Einzelbausteinen, sogenannten *Actions*, welche sequentiell abgearbeitet werden. Dazu ist eine klare Schnittstellendefinition notwendig. Jeder Einzelbaustein der Prozesskette gibt bekannt, welche Daten benötigt und welche Daten geliefert werden. An den Schnittstellen der Actions werden Zustände definiert, welche durch das Abarbeiten einer Action erreicht werden können. Dem folgend ist eine beliebige Prozesskette denkbar, solange die Einzelbausteine gemäß der geforderten Ein- und Ausgaben verknüpft werden können. Über sogenannte *Gateway-Actions* lassen sich eine oder mehrere parallel betriebene Subprozessketten innerhalb einer Prozesskette etablieren. Gateway-Actions bieten zudem die Möglichkeit einzelne Subprozessketten benutzerdefiniert oder kontextbasiert zu- oder abschalten. Es sind damit beliebig geschachtelte Prozessketten definierbar.
Durch die Fähigkeit der automatisierten Abarbeitung von Prozessketten bietet sich OPUS zum Auswerten von großen Versuchsplänen, zum Durchführen von Sensitivitätsstudien und zur Ausführung von Optimierungen an. Zur Optimierung wird in OPUS derzeit die Optimierungsumgebung DAKOTA [83] verwendet, welche neben Optimierungsverfahren auch ein verfahrensübergreifendes Verwaltungssystem für Variablen und Ergebnisgrößen zur Verfügung stellt. Im Fall einer Optimierung startet OPUS den *Iterator* DAKOTA mit dem gewünschten Optimierungsverfahren. DAKOTA nutzt zur Generierung der erforderlichen Ergebnisdaten die in OPUS definierte Prozesskette.
OPUS stellt die für die Fachdisziplinen üblichen Prozessketten vorkonfiguriert zur Verfügung, so dass der Anwender schnell zur eigentlichen Problemdefinition, zum Beispiel zur Definition der Optimierungsaufgabe übergehen kann.

4.3. Umsetzung der hybriden Prozesskette in der Optimierungsumgebung

4.3.1. Werkzeuge zum Aufbau einer Prozesskette unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens

Die in Abbildung 4.1 beschriebene Prozesskette ist bezüglich der Nutzungsrechte und Lizenzierung der Einzeltools sowie hinsichtlich der genutzten Programmiersprachen heterogener Natur.
Die Geometriegenerierung ist durch ein MTU-eigenes Tool *COBRA* vertreten, welches in Lisp programmiert ist. Für die strukturierte 3D-Vernetzung wird das kommerzielle Tool *Autogrid5*^{TM} von *Numeca* verwendet. Der Strömungslöser *TRACE* sowie das Postprocessing-Tool *POST* werden vom DLR-Institut für Antriebstechnik in Köln entwickelt und sind in C geschrieben. Angesichts dieser Heterogenität, wurde die Umsetzung des Adjungiertenverfahrens auf die ressourcenintensive Strömungslösung und das Postprocessing beschränkt. Im Folgenden wird deshalb von der *hybriden Prozesskette* gesprochen. In Unterabschnitt 4.3.2 wird der Aufbau der Prozesskette unter Nutzung der Bausteine beschrieben.

4.3.1.1. adjointTRACE

Der in Zusammenarbeit von dem DLR-Institut für Antriebstechnik Köln, dem Lehrstuhl für Scientific Computing der TU Kaiserslautern sowie MTU Aero Engines AG entwickelte adjungierte Strömungslöser adjointTRACE wird ausführlich in Sagebaum et al[84] und Backhaus et al [69] beschrieben. Die Differentiation des TRACE-Quellcodes nutzt den Ansatz der diskreten Adjungierten und bedient sich der Mittel der in Unterabschnitt 3.2.2 beschriebenen Algorithmischen Differentiation. Um das AD-Tool *CoDiPack* auf den TRACE-Code anwenden zu können, muss der C-Code als C++-Code interpretiert werden. Das AD-Tool *CoDiPack* wird in in Sagebaum et al[66] beschrieben. Der so entstandene adjungierte Strömungslöser erlaubt die Verwendung verschiedener Modi des Adjungiertenverfahrens, von welchen die bereits in den Unterabschnitten 3.3.2 und 3.3.3 erwähnten Modi *ReverseAccumulation* sowie *Black Box* für den Einsatz in der in Abbildung 4.1 dargestellten Prozesskette in Frage kommen. Zudem wurde dem Strömungslöser TRACE ein Modus *Checkpointing* hinzugefügt, welcher es ermöglicht im Anschluss an eine Iteration des Strömungslösers einen Checkpoint abzuspeichern, welcher als Startpunkt einer adjointTRACE-Berechnung dienen kann.
Um die Effizienz der Berechnung der adjungierten Lösung weiter zu verbessern wurde die AD-Technik des Präakkumulierens verwendet, auf welche in Sagebaum et al. [84] näher eingegangen wird. Vereinfacht ausgedrückt, wird beim Präakumulieren bereits beim Aufzeichnen des tapes ein Teil der Differentiation vorgenommen. Das ist an diesen Stellen möglich, da hier bereits alle zur Differentiation notwendigen Zwischengrößen vorhanden und im Speicher verfügbar sind und sich im Folgenden nicht mehr ändern. Dieses Vorgehen lohnt sich insbesondere beim Reverse-Accumulation-Ansatz, da hier das tape nur einmal aufgezeichnet, aber vielfach ausgewertet wird. Durch die Präakkumulierung konnte nach Sagebaum et al. [84] ei-

ne Rechenzeitreduktion der Tapeauswertung von bis zu 36% erreicht werden.
Neben den in Sagebaum et al. [84] und Backhaus et al. [69] beschriebenen Fähigkeiten von adjoint-TRACE, sei auf die Möglichkeiten der Stabilisierung des Reverse-Accumulation-Verfahrens hingewiesen. Hierzu stehen drei Möglichkeiten zur Verfügung. Das Verfahren *Recursive Projection Method* oder *RPM* ist in [85] beschrieben und ermöglicht die ggf. nötige Stabilisierung der Berechnung im Adjungiertenverfahren. Die mit dieser Methode erreichte Stabilisierung behandelt instabile Bereiche des Rechennetzes mit einem in [85] beschriebenen speziellen Lösungsverfahren. Dies führt zu einem steigenden Rechenaufwand an diesen instabilen Bereichen. Die Konsistenz des Verfahrens bleibt damit aber unberührt. Die unter Zuhilfenahme von RPM ermittelten Sensitivitäten sind durch die Notwendigkeit der Stabilisierung nicht beeinträchtigt. Ein zweites in adjointTRACE implementiertes Stabilisierungsverfahren erhöht den Aufwand der Berechnung nicht, beeinträchtigt jedoch die Qualität der Sensitivitätsinformation in den instabilen Bereichen. Die als *SetZero* bezeichnete Methode ermittelt frühzeitig instabile Bereiche im 3D-Netz und setzt den adjungierten Zustand zu Null und verhindert somit stark divergierende Werte der Adjungierten. Aus der Erfahrung mit adjointTRACE betrifft dies einzelne Zellen im Rechennetz. Als dritte Stabilisierungsmethode ist die Methode *setAverage* implementiert, welche wie setZero divergierende Bereiche erkennt, die betreffenden adjungierten Größen jedoch nicht Null setzt sondern aus den umgebenden Zellen rekonstruiert. Weitere Informationen zu möglichen Stabilisierungsmaßnahmen finden sich in Xu et al [86]. Wird der Modus BlackBox verwendet, bietet adjointTRACE die Möglichkeit, das in Griewank [76] beschriebene *Checkpointing* einzusetzen, welches derzeit jedoch nur mit äquidistanten Checkpoints und nicht mit binomial verteilten Checkpoints möglich ist. Zur Initialisierung der adjungierten Lösung kann entweder eine Null-Initialisierung oder eine bereits berechnet adjungierte Lösung gleicher Netztopologie verwendet werden. Für die iterativen Adjungiertenverfahren stehen verschiedene Konvergenzkriterien zur Verfügung anhand derer die jeweiligen Berechnungen beendet werden können. Die resultierenden 3D-Netzsensitivitäten werden nach Erreichen der maximalen Schrittzahl oder des Konvergenzkriteriums im cgns-Format ausgegeben.

4.3.1.2. adjointPOST

Die Postprocessing Routinen stellen einen nicht-iterativen Berechnungsprozess dar, welcher mit reiner Algorithmischer Differentiation im Rückwärtsmodus, wie in Unterabschnitt 3.2.2.2 beschrieben, differenziert werden kann. Der Einsatz der Algorithmischen Differentiation bietet die Möglichkeit alle im Postprocessing verfügbaren Ergebnisgrößen zu differenzieren. Das Postprocessing stellt das letzte Glied der Prozesskette dar, welches die nulldimensionalen Größen berechnet, nach welchen differenziert werden soll. Um nach diesen Größen im Rückwärtsmodus differenzieren zu können, müssen diese Größen aktiviert werden. Analog zum Eins-Setzen der Ergebnisgröße in Unterabschnitt 3.2.2.2 wird vom Aktivieren oder Seeding der Ergebnisgröße gesprochen. Der primale, also nicht-adjungierte Postprocessing-Schritt gibt die Ergebnisgrößen in sogenannte Kommunikationsdateien aus. Um die Anwenderfreundlichkeit zu gewährleisten bzw. dem AD-Vorgehen im Rückwärtsmodus weiterhin Rechnung zu tragen, wird das Seeding als Eingangsdatei für das Adjungiertenverfahren im gleichen Datenformat wie die Ergebnisdatei des primalen Modus geschrieben. Anstatt des

Wertes der Ergebnisgröße aus der primalen Berechnung wird der Wert der zu differenzierenden Größe auf eins gesetzt. Die Werte aller anderen Größen werden auf null gesetzt bzw. nicht aufgeführt, was einem Nullsetzen gleichkommt. Auf diese Weise fungiert das Format der primalen Ergebnisdatei als Eingangsdatei für das Adjungiertenverfahren. Zusätzlich bietet dieses Vorgehen die Möglichkeit gemischte Ergebnisgrößen, welche sich aus gewichteten 0D-Ergebnisgrößen zusammensetzen, für das Adjungiertenverfahren zu aktivieren. Die Informationsübermittlung zwischen Strömungslöser und Postprocessing ist über das Schreiben und Lesen von Dateien geregelt. Während im primalen Modus das cgns-Format benutzt wird, um die Strömungslösung im Netz zu speichern, werden im Adjungiertenverfahren zwei zusätzliche Dateien geschrieben, um die im Adjungiertenverfahren des Postprocessings generierten Ableitungsinformationen an den adjungierten Strömungslöser zu übermitteln. Diese beiden Dateien enthalten zum Einen die Ableitungen der Zielgröße nach den Strömungsgrößen jeder einzelnen Zelle und zum Anderen die Ableitungen der Zielgröße nach den Netzmetriken. Diese beiden Komponenten entsprechen den Termen $\frac{\partial J}{\partial q}$ und $\frac{\partial J}{\partial x}$ aus Abschnitt 3.3.

4.3.2. Aufbau der hybriden Prozesskette

Aufgrund der erwähnten Heterogenität der Prozesskette werden nur die Strömungslösung sowie das Postprocessing als Bausteine im Adjungiertenverfahren ausgeführt. Dies führt zu einer hybriden Prozesskette, welche sich aus einem rein primalen Präprozess und den beschriebenen Werkzeugen im Adjungiertenverfahren zusammensetzt.
Die Konsequenzen der gemischten Form der Prozesskette werden im Folgenden näher erläutert.
In einer konventionellen Vorgehensweise zur Bestimmung von Gradienteninformationen für eine Optimierung wird üblicherweise das Verfahren der Finiten Differenzen angewendet. Die damit angenäherte Ableitungsinformation lässt sich als Differenzenquotient gemäß (4.7)

$$\frac{\Delta J}{\Delta \alpha} = \frac{\Delta J}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} \tag{4.7}$$

ausdrücken. Zur Bestimmung des Gradienten einer Zielgröße bezüglich n Parametern, sind somit n+1 Durchläufe der gesamten Prozesskette notwendig. Der Berechnungsaufwand skaliert somit mit der Anzahl an Variablen.
Wäre die gesamte Prozesskette algorithmisch differenzierbar, würde sich die Ableitungsinformation folgendermaßen ermitteln lassen.

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \left[\frac{\partial J}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} \tag{4.8}$$

Hierbei ist nur ein primaler Durchlauf und ein Durchlauf auf Basis des Adjungiertenverfahrens durch die Prozesskette nötig, um alle Sensitivitätsinformationen hinsichtlich einer Zielgröße zu bestimmen. Der Aufwand skaliert mit der Anzahl an Zielgrößen.
Stehen nicht alle Prozesskettenbausteine differenzierbar zur Verfügung, ergibt sich das hybri-

de Vorgehen, welches sich gemäß

$$\frac{\Delta J}{\Delta \alpha} = \left[\underbrace{\frac{\partial J}{\partial q}}_{\text{adjointPOST}} \cdot \overbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}^{\text{adjointTRACE}} + \underbrace{\frac{\partial J}{\partial x}}_{\text{adjointPOST}} \right] \cdot \overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta \alpha}}^{\text{nicht adjungiert}} = \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} \tag{4.9}$$

ausdrücken lässt. Die Prozesskettenbausteine ohne Nutzung des Adjungiertenverfahrens müssen weiterhin n+1-Mal durchlaufen werden. Der nachfolgende Teil der Prozesskette unter Nutzung der Adjungiertenmethode benötigt nur einen Durchlauf je Zielfunktional. An der Schnittstelle zwischen beiden Prozesskettenteilen muss ein Skalarprodukt ausgewertet werden, um die vollständige Gradienteninformation zu erhalten.
In Abbildung 4.3 ist der gesamte Ablauf des hybriden Prozesses anhand eines Beispiels mit n Variablen und m Zielgrößen skizziert. Die Prozesskette der Basisgeometrie ist bis zur 3D-Vernetzung zunächst unverändert. Die Strömungslösung ist bis auf einen speziellen Ausgabemechanismus ebenfalls identisch zur primalen Prozesskette. Der spezielle Ausgabemechanismus ermöglicht das Schreiben sogenannter Checkpoints, welche im nachfolgenden Schritt benötigt werden, um mit der in Unterabschnitt 3.2.2.2 beschriebene Tape-Aufzeichnung exakt am letzten Iterationsschritt fortzusetzen. Die nachfolgende Strömungauswertung ist identisch zur primalen Prozesskette. Im Anschluss an den bekannten Teil der Prozesskette folgen die Werkzeuge adjointPOST und adjointTRACE in genau dieser Reihenfolge gemäß dem AD-Rückwärtsmodus. Das adjungierte Auswertewerkzeug adjointPOST führt dazu die Auswertung noch einmal primal durch und zeichnet dabei das nötige POST-tape auf, um es nachfolgend auszuwerten. Die Sensitivitätsinformationen $\frac{\partial J}{\partial q}$ und $\frac{\partial J}{\partial x}$ werden in die Kommunikationsdateien geschrieben. Der adjungierte Strömungslöser adjointTRACE liest nachfolgend den gespeicherten globalen Checkpoint und zeichnet einen Zeitschritt der primalen Lösung wie in Unterabschnitt 3.2.2.2 beschrieben auf das TRACE-Tape auf. Die Kommunikationsdateien des adjointPOST-Laufs werden gelesen und der Reverse Accumulation-Prozess für die Strömungslösung gestartet. An dessen Ende stehen die beschriebenen Netzsensitivitätsdateien. Werden Ableitungen für mehrere Zielgrößen der Ausgangsgeometrie benötigt, muss der Prozesskettenanteil adjointPOST und adjointTRACE mehrmals parallel durchgeführt werden, für jede Zielgröße einmal. Gemäß dem oben beschriebenen Prinzip des hybriden Prozesses, müssen die in Abbildung 4.3 dargestellten n ausgelenkten Geometrien und Rechennetze für den primalen Prozesskettenanteil parallel erzeugt werden.
Der als Sensitivitätsberechnung markierte Prozesskettenbaustein ist der Schritt zur Berechnung des zuvor erwähnten Skalarprodukts. Dabei werden die $\frac{\Delta x}{\Delta \alpha}$ aus den ausgelenkten Netzen im Vergleich zum Ausgangsnetz bestimmt. Alle Netze liegen dabei im cgns-Format vor. Der Term $\frac{dJ}{dx}$ ist das Ergebnis des adjungierten Strömungslösers, enthält 3D-Netzsensitivitäten und liegt ebenfalls im cgns-Format vor. Der Sensitivitätsmodus muss somit $n+1$ generierte Netze und m Ergebnisdateien des Adjungiertenverfahrens lesen, den Term Δx bilden und das Skalarprodukt $\frac{dJ}{dx} \cdot \Delta x$ auswerten, um die Sensitivitätsinformation als Zahlenformat ausgeben zu können. Die Funktionalität des Sensitivitätsmodus ist im Postprocessing-Tool POST enthalten, welches zu diesem Zweck erneut aufgerufen wird.

Der rechentechnische Aufwand für die Ausführung der Sensitivitätsberechnung ist im Vergleich zur Strömungslösung eher gering und beeinflusst die Durchlaufzeit der gesamten Prozesskette nur unwesentlich.
Die aus dem skizzierten hybriden Prozess erhaltene Sensitivitätsinformation kann dem Optimierungsalgorithmus zur Verfügung gestellt werden. Um die Anbindung des Optimierungsalgorithmus im Vergleich zum konventionellen Vorgehen mit Finiten Differenzen nicht ändern zu müssen, wurde hier ein unkonventioneller Weg gewählt.
Die aus dem Sensitivitätsmodus resultierenden Zielgrößenveränderungen der ausgelenkten Geometrien ΔJ werden auf die Zielgröße J der Basisgeometrie addiert. So wird jedem ausgelenkten Netz der jeweilige Zielgrößenwert zugeordnet und kann in dieser Form vom Optimierungsalgorithmus genutzt werden, etwa durch die Bildung einer Finiten Differenz $\frac{\Delta J}{\Delta \alpha}$, die dann als Gradienteninformation genutzt wird.
Aus dem beschriebenen Vorgehen wird ersichtlich, dass der Aufwand zur Ermittlung der Gradienteninformation nach dem hybriden Prinzip weder direkt mit den Variablen n noch mit den Zielgrößen m skaliert. Da die benötigte Rechenleistung der Strömungslösung den deutlich größten Anteil an der Rechenleistung der Gesamtprozesskette darstellt, skaliert der Rechenaufwand in Hinblick auf die benötigten CPU-Stunden in erster Näherung mit der Anzahl der Zielgrößen m.
Werden im Rahmen einer Mehrpunktoptimierung mehrere Betriebspunkte, mit ggf. anderen Geometrien beispielsweise aufgrund geänderter Verstellwinkel benötigt, muss die soeben beschriebene Prozesskette in gleicher Form für jeden Betriebspunkt separat durchgeführt werden.

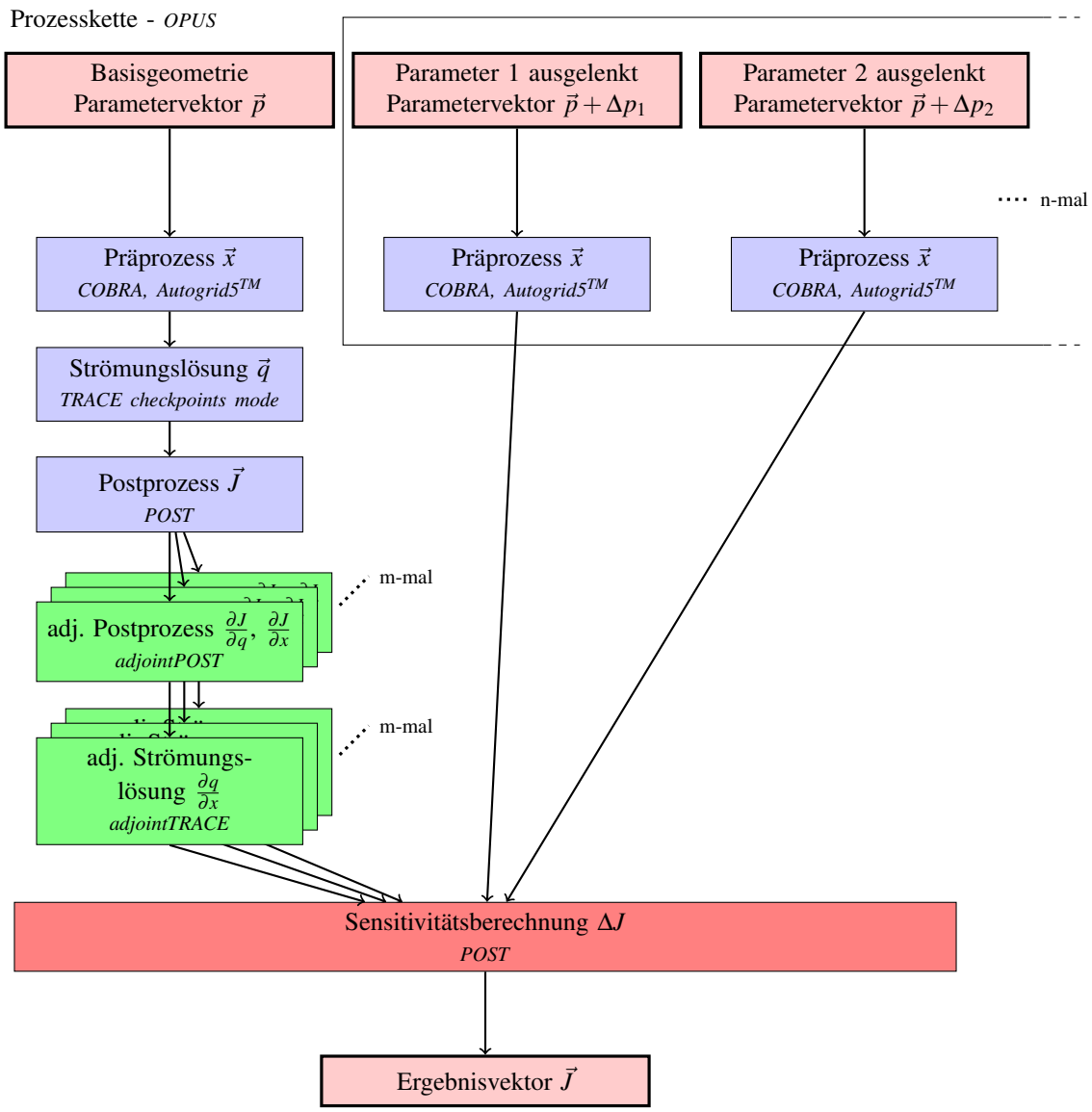


Abbildung 4.3.: Darstellung der hybriden Prozesskette zur Durchführung einer Gradientenbestimmung. Die jeweils verwendeten Werkzeuge sind kursiv gesetzt.

4.4. Einbinden der Leitgitterverstellung in die Optimierungsumgebung

Die Leitgitterverstellung wird im Folgenden als Teil der Geometriegenerierung verstanden und fügt sich in der vorgestellten Prozesskette in den Prozesskettenpunkt Geometriegenerierung bzw. Präprozess ein. Dies ist in den Abbildungen 4.1 und 4.3 dargestellt.
Innerhalb der Geometriegenerierungsprozesskette erfolgt die Verstellung der Leitgitter im Anschluss an die Definition des Schaufelprofils in Form einer Festkörpertransformation der generierten Schaufelfläche. Die transformierte Schaufelfläche wird im Nachgang mit dem Ringraum verschnitten. Die Transformation jeder Schaufel ist als Rotation um eine Achse definiert, welche im Vorfeld der Optimierung je Schaufel mithilfe eines Punktes und eines Richtungsvektors festgelegt wird. Die absoluten Positionen der Rotationsachsen der jeweiligen Schaufeln sind konstruktiv bekannt.

4.4.1. Ungekoppelte Verstellung

Die Verstellwinkel der variablen Statoren sind im Triebwerk miteinander gekoppelt, d.h. alle Verstellwinkel sind durch die Stellung des Verstellaktuators definiert. Zum Zwecke einer ungekoppelten Verstellung soll dieser Zusammenhang zunächst aufgehoben werden und jeder Verstellstator separat angesprochen werden können. Dazu wird in der Geometriegenerierung lediglich der Verstellwinkel für jede verstellbare Reihe als Parameter gesetzt. Diese Winkel können in einer Optimierung direkt als Parameter α genutzt werden. Dabei ist der maximal mögliche Winkelbereich zu beachten, um Berührungen der Schaufeln innerhalb einer Reihe, bzw. Unverträglichkeiten mit der ausgeführten Kinematik zu berücksichtigen. Eine solche ungekoppelte Nutzung im Rahmen einer Optimierung kann beispielsweise zur separaten Findung der idealen Verstellwinkel für jeden Betriebspunkt genutzt werden.

4.4.2. Gekoppelte Verstellung

Die Koppelung der Verstellstatoren erfolgt in der realen Maschine gemäß einer Hebelkinematik. Aus dieser ergibt sich je nach verwendeten Hebellängen und prinzipieller Ausführung ein Verstellgesetz. Im hier betrachteten Verdichter ist die Verstellkinematik mit allen Hebellängen und der Positionen der Verbindungsgelenke bekannt. Der zu betrachtende 8,5-stufige Verdichter verfügt über vier Verstellleitgitter, das *Vorleitrad*, welches auch als *Inlet Guide Vane* oder kurz *IGV* bezeichnet wird sowie die Verstellleitgitter an Stator 1, Stator 2 und Stator 3. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Modell dieser Kinematik erstellt, welches in den Prozess Geometriegenerierung der Prozesskette implementiert wurde. In Abbildung 4.4 ist die Kinematik schematisch dargestellt.
Während die ungekoppelte Verstellung keinen Einschränkungen unterliegt, ermöglicht die gekoppelte Modellierung, welche durch dieses feste Verstellgesetz entsteht, nur konstruktiv realisierbare Verstellwinkelkombinationen zu erhalten. Die innerhalb der Kinematik verwendeten Hebellängen und Gelenkpositionen können prinzipiell als freie Parameter definiert werden. Sie stellen damit Parameter dar, welche nur zulässige Verstellwinkel generieren können.

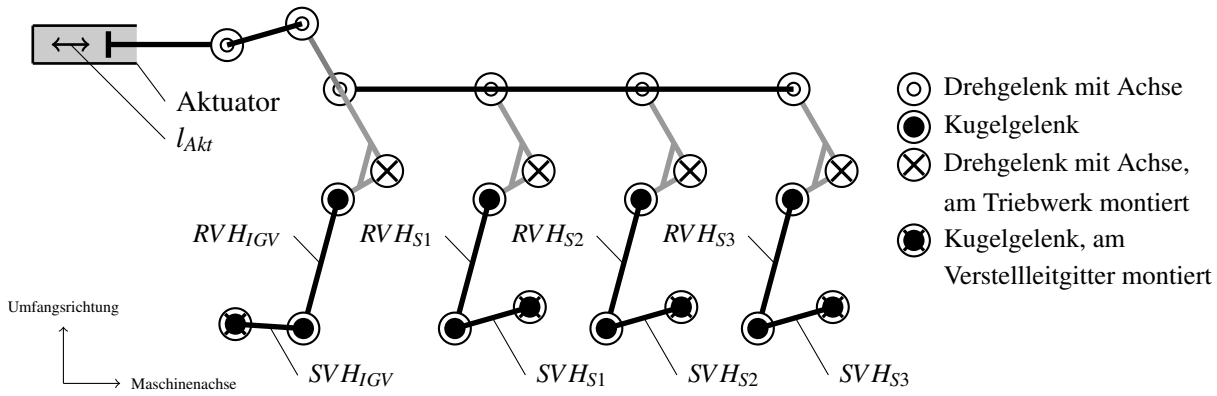


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung der Verstellkinematik. Durch eine Verstellung des Aktuators werden vier Verstelleitgitter simultan verdreht. Die Stärke der jeweiligen Verdrehungen ist von den jeweiligen Hebellängen abhängig.

Die oberen und unteren Grenzen der jeweiligen Parameterwerte müssen den mechanischen Gegebenheiten der Kinematik genügen, um machanische Kollisionen oder das Überschreiten von Totpunkten zu vermeiden. Mechanische Kollisionen würden in der OPUS-Prozesskette zu Prozessausfällen in der Geometriegenerierung führen. Das Anfahren von Totpunkten kann zu Hysteresen führen, da einer Aktuatorposition ggf. zwei Winkel zugeordnet werden können. Dies ist zu vermeiden. Eine Totpunktlage ist beispielhaft in Abbildung 4.5 dargestellt. Das in

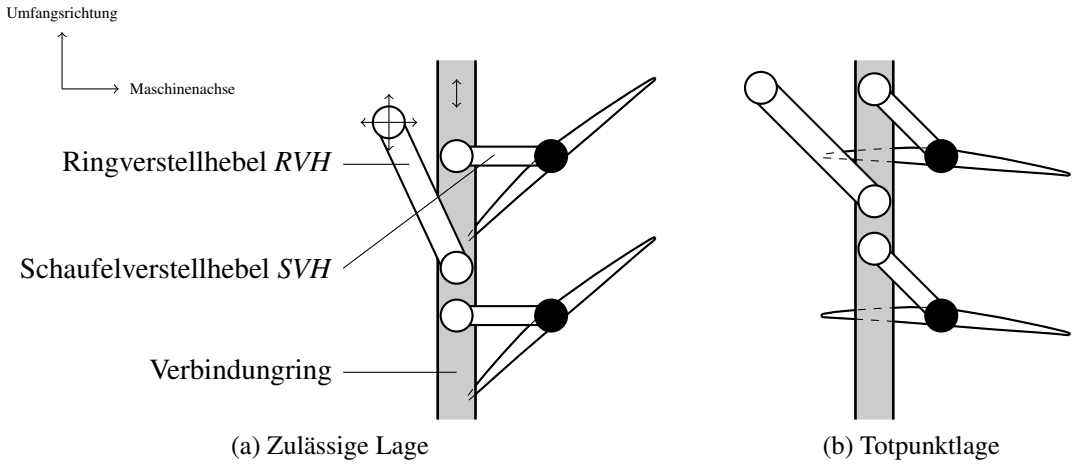
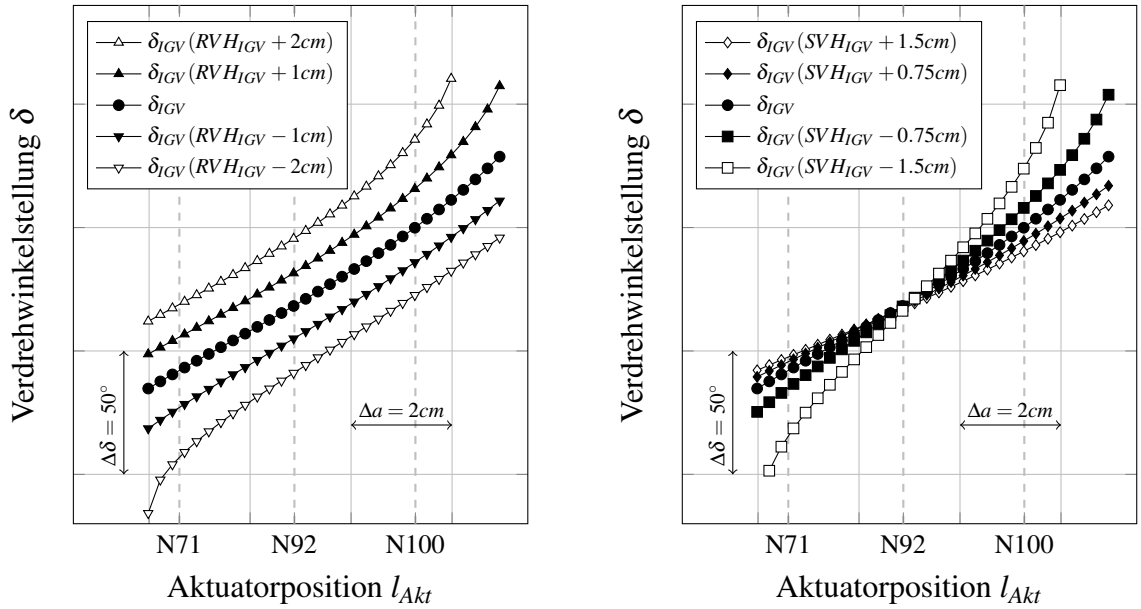


Abbildung 4.5.: Schematische Darstellung einer zulässigen Lage der Verstellhabel (a) und einer zu vermeidenden Totpunktstellung eines Verstellhebels (b). Kreise stellen dabei Drehgelenke, ausgefüllte Kreise ortsfeste Drehgelenke dar.

Abbildung 4.4 dargestellte Model der Verstellkinematik bietet mit seinen Verstellhebellängen bzw. Stablängen eine Vielzahl von möglichen Veränderungen der Kinematik. Um die Anzahl der verwendeten Parameter klein zu halten und das Prüfen von nicht definierten Zuständen zu erleichtern, wurden je Stator lediglich zwei Hebellängen als Parameter verwendet. Es handelt sich dabei um die Längen der in den Abbildung 4.4 und 4.5 dargestellten Ringverstellhebel

RVH und Schaufelverstellhebel SVH. Diese treten an jedem Verstellgitter auf. Gemeinsam mit der Aktuatorstellung l_{Akt} ergeben sich neun Parameter, welche den Zustand der Verstellwinkel beschreiben.
Die Beschränkung auf diese neun Parameter bietet den Vorteil der Unabhängigkeit der Parameter der einzelnen Reihenparameter. Die Parameter RVH_{IGV} und SVH_{IGV} haben beispielsweise ausschließlich auf den Verdrehwinkel des Vorleitrades Einfluss, nicht jedoch auf die Verstellwinkel der anderen Statoren. Lediglich der Parameter l_{Akt} stellt das verbindende Element zwischen den Reihen dar. Diese Trennung erlaubt lokale Verbesserungen an einem Verstellgitter mithilfe zweier Parameter. Dies ist insbesondere bei manueller Justierung sowie bei der Bewertung von Vorteil. Angesichts der in Abbildung 4.4 beschriebenen Kinematik sind jedoch keine grundlegenden qualitativen Veränderungen im Koppelungsverhalten möglich. Beispielsweise wird auch bei Änderung der eingeführten Parameter ein Zudrehen von Stator 1 zwangsläufig zu einem Zudrehen von Stator 2 führen. Lediglich die Stärke der Kopplung kann durch die Parametrik beeinflusst werden. Eine Hinzunahme weiterer Hebellängen aus der in Abbildung 4.4 dargestellten Kinematik erweitert diese Möglichkeiten ebenfalls nicht. Durch Freigabe weiterer Hebellängen würden sich lediglich die möglichen Parameterkombinationen erhöhen, die für die Einstellung eine speziellen Winkelkombination möglich wären.
Um aufzuzeigen, welche Verstellwinkeländerungen mit der Einschränkung auf diese neun Parameter möglich sind, wurden, anhand des Modells des Verstellgesetzes, Parameter einzeln verändert. Das Ergebnis ist für das Vorleitrad in Abbildung 4.6 dargestellt. Zur besseren Beurteilung realistischer Aktuatorpositionen und auftretender Verstellwinkel, sind die Ausgangs-Aktuatorpositionen der in den späteren Optimierungen betrachteten Drehzahllinien bei 100%, 92% und 71% der Auslegungsdrehzahl markiert. In Abbildung 4.6a werden l_{Akt} und RVH_{IGV} unabhängig voneinander verändert. Es wird deutlich, dass der RVH für das Niveau des Zusammenhanges zwischen l_{Akt} und δ_{IGV} verantwortlich ist. In Abbildung 4.6b werden dagegen l_{Akt} und SVH_{IGV} unabhängig voneinander verändert. Der Parameter SVH ist dafür verantwortlich, wie stark der Verstellwinkel δ auf eine Änderung der Aktuatorposition reagiert. Durch einen kürzeren SVH reicht weniger Verstellweg aus, um größere Winkeländerungen zu bewirken. Aufgrund der Drehlagerung des Schaufelverstellhebel nimmt damit auch die Linearität des Zusammenhangs l_{Akt} zu δ_{IGV} ab. Parameterstudien zu den Zusammenhängen an den Verstellschaufeln S1, S2 und S3 sind in Anhang A.3 in ähnlicher Art und Weise dargestellt.
Zusätzlich zur Darstellung des Einflusses der einzelnen Parameter dient Abbildung 4.7 dazu, die mithilfe der gewählten Parameterbereiche möglichen Verstellwinkel des Vorleitrades aufzuzeigen. Dazu wurden mithilfe eines Random-Samplings der Schaufel- als auch Ringverstellhebellängen 1000 Parameterkombinationen generiert, die jeweiligen Verstellwinkel ausgewertet und mit blau in Abbildung 4.7 markiert. Diese Darstellung gibt lediglich prinzipiell mögliche Verstellwinkel eines Verstellleitgitters in Abhängigkeit von l_{Akt} wieder, sagt aber nichts darüber aus, mit welchen Parameterkombinationen diese erreicht wurden. In orange sind außerdem 1000 zufällige Parametersätze unter ausschließlicher Nutzung von l_{Akt} und SVH_{IGV} eingezeichnet. Es wird dabei deutlich, dass sowohl der Parameter SVH als auch der Parameter RVH nötig sind, um für jede Aktuatorstellung eine breite Spanne von Verstellwinkeln gewährleisten zu können. In Anhang A.3 sind äquivalente Plots für die anderen Verstellleitgitter ergänzt.



(a) Einfluss RVH_{IGV} (b) Einfluss SVH_{IGV}

Abbildung 4.6.: Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{IGV}, und SVH_{IGV} auf den Verstellwinkel δ_{IGV}.

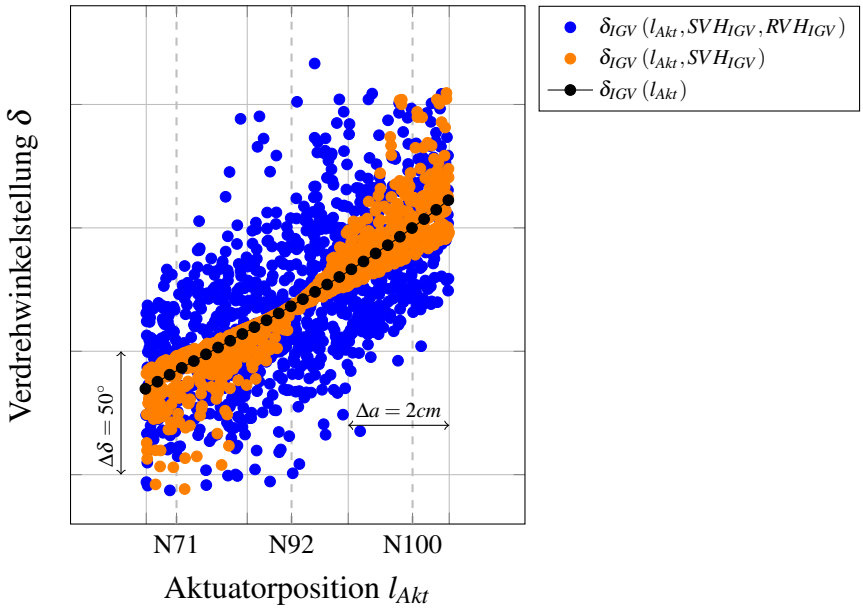


Abbildung 4.7.: Streubreite möglicher Verstellwinkel des Vorleitrades anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{IGV} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{IGV} und RVH_{IGV} (blau).

5. Ausgangsgeometrie und Studien zur Anwendung des Adjungiertenverfahrens

5.1. Ausgangsgeometrie und Lastfälle

Anwendungsfall der Studien und Optimierungen ist ein achtstufiger transonischer Hochdruckverdichter. Die ersten beiden Stufen sind im Auslegungspunkt transsonisch durchströmt. Der Verdichter ist in Abbildung 5.1 schematisch in der Meridionalansicht dargestellt. Zur Bewertung des Betriebsverhaltens wird das vollständige Kontrollvolumen des Hochdruckverdichters von Eintrittsleitgitter *IGV* bis Stator 8 vernetzt und vom Strömungslöser berechnet. Lediglich die ersten neun Schaufelreihen von *IGV* bis *S4* liegen als parametrisierte Schaufelgeometrien vor und dienen als Gegenstand der Geometrieoptimierung. Die Gitter *R5* bis *S8* sowie der komplette Ringraumverlauf bleiben geometrisch unverändert. Das Eintrittsleitgitter *IGV* sowie die ersten drei folgenden Statoren sind als Verstellstatoren *S1* – *S3* ausgeführt, deren Verstellung ebenfalls Gegenstand der Optimierung ist. Die Rotorschaufeln werden im Gehäu-

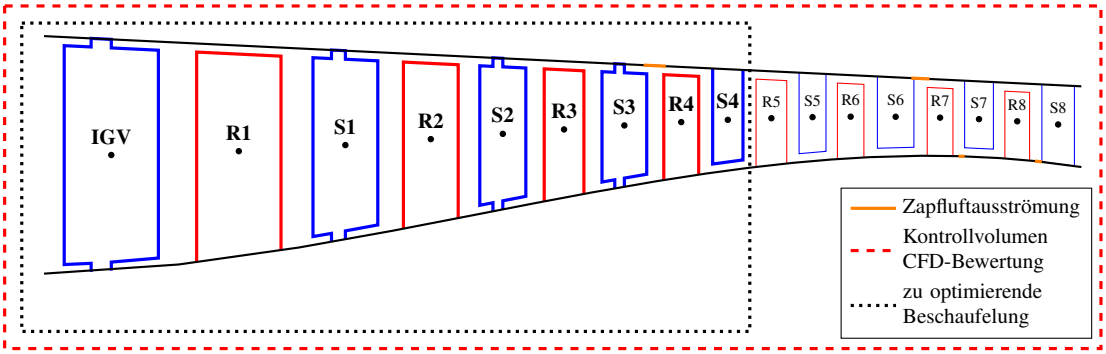


Abbildung 5.1.: Schematische Meridionalansicht des zu optimierenden Hochdruckverdichters.

sebereich mit einem Radialspalt ausgeführt. Im Naben- und Gehäusebereich der verstellbaren Statorschaufeln werden sogenannte Halbspalte verwendet. Diese stellen einen vereinfachten Ansatz zur Modellierung der Aufhängung der Verstellschaufeln dar. Die Statoren S4 bis S7 werden mit einem Radialspalt im Nabenbereich ausgeführt. Stator S8 ist ohne Radialspalt modelliert, da dieser als separates Bauteil direkt an den stromab folgenden Diffusor montiert wird keinen Radialspalt aufweist.

Die spätere Formoptimierung der ersten neun Schaufelreihen soll anhand mehrerer Betriebspunkte erfolgen, um ein möglichst realistisches Ergebnis zu erhalten, welches weiterhin die Nutzbarkeit des Verdichters in allen relevanten Flugsituationen sicherstellt. Dazu werden drei Drehzahlen des Verdichters berücksichtigt.

- 100% der Auslegungsdrehzahl, *Reiseflug*:
  Bewertung des aerodynamischen Auslegungspunktes bei Reiseflugbedingungen
- 92% der Auslegungsdrehzahl, *Garantiepunkt 1*:
  Bewertung eines später hinsichtlich des Pumpgrenzabstandes zu verbessernden Betriebspunktes
- 71% der Auslegungsdrehzahl, *Leerlauf am Boden*:
  Bewertung des Betriebszustandes im Leerlauf am Boden

Die Drehzahllinien werden mit einem vorangestellten *N*, also bespielsweise mit N100 gekennzeichnet. Um neben den Zuständen auf der Arbeitslinie auch kritische pumpgrenznahe Zustände abzudecken, werden je Drehzahllinie zwei Betriebspunkte berücksichtigt. Ein Zustand befindet sich auf der Arbeitslinie und wird mit dem Suffix *-WL* für working line bezeichnet. Der andere Zustand befindet sich in der Nähe der Pumpgrenze und wird mit dem Suffix *-PG* gekennzeichnet. Die vorgestellten Betriebspunkte sind in einem schematischen Verdichterkennfeld in Abbildung 5.2 markiert.

5.1.1. Schaufelgeometrie

Die Parametrik mit der Art der Profilparameter zur Schaufelgestalltung wurde in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellt. Für den Einsatz in den folgenden Studien und Optimierungen kommen die in Tabelle 5.1 aufgeführten Parameter zum Einsatz. Die radiale Parametrisierung der

Gruppierung		Parametertyp	Vorkommen	Anzahl je Profilschnitt	Anzahl gesamt
all	base	Metallwinkel	α_{VK}, α_{HK}	2	72
		Keilwinkel	μ_{VK}	1	36
		Staffelungswinkel	α_{St}	1	36
	spline	Splinekrümmung	$\tau_{\text{VK-S}}$, $\tau_{\text{HK-S}}$, $\tau_{\text{VK-D}}$, $\tau_{\text{HK-D}}$	4	144
		Wirkungsweite Splineanstieg	$\rho_{\text{VK-S}}$, $\rho_{\text{HK-S}}$, $\rho_{\text{VK-D}}$, $\rho_{\text{HK-D}}$	4	144
		Wirkungsweite Splinekrümmung	$\sigma_{\text{VK-S}}$, $\sigma_{\text{HK-S}}$, $\sigma_{\text{VK-D}}$, $\sigma_{\text{HK-D}}$	4	144
		Summe aller Schaufelparameter			576

Tabelle 5.1.: Auflistung der in den Optimierungen verwendeten Profilparameter. Die Gesamtzahl in der rechten Spalte ergibt sich aufgrund der Anzahl je Profilschnitt, multipliziert mit der Anzahl an radialen Stützstellen je Schaufel 4 und der Anzahl an Schaufeln 9.

jeweiligen Größe erfolgt für die Optimierungen mit einem Polynom dritten Grades, welches

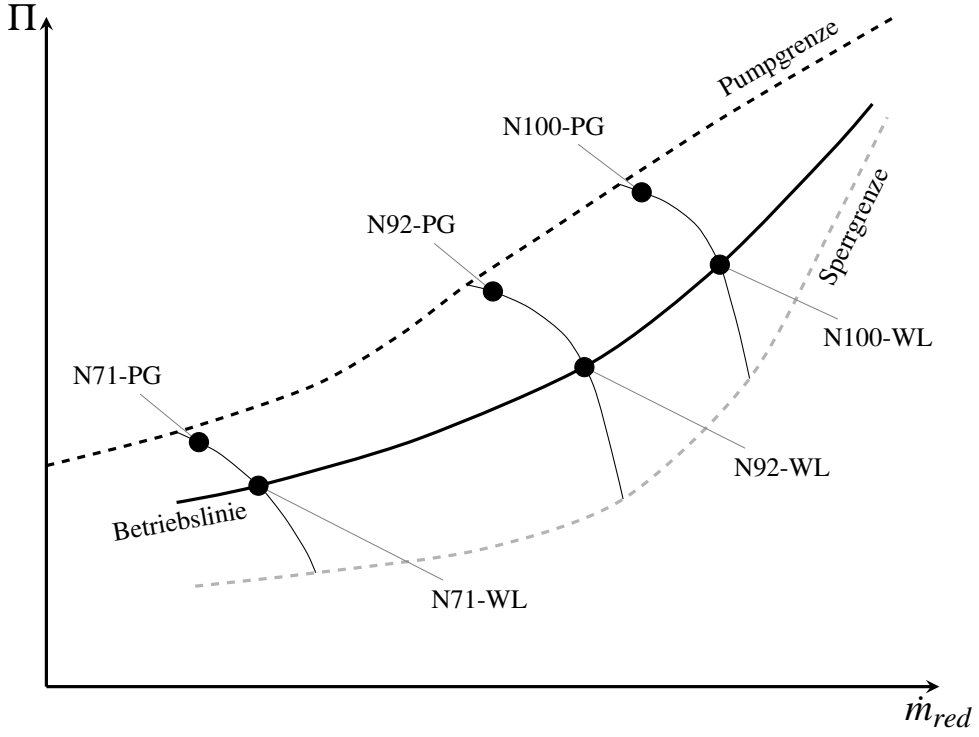


Abbildung 5.2.: Darstellung der zu betrachtenden Lastpunkte in einem schematischen Verdichterkennfeld

mit vier radialen Stützstellen bei 0%, 33%. 66% und 100% eindeutig definiert ist. Für die zu optimierenden Schaufeln liegen radiale Sollverläufe des Dicken- zu Längenverhältnisses vor, welche Vorgaben aus der Strukturmechanik darstellen und eingehalten werden müssen. Dies wird durch den in Unterabschnitt 4.1.1 beschriebenen internen *Fitting*-Mechanismus in der Geometriegenerierung sichergestellt. Um die Dicken- zu Längenverhältnisse einzustellen, wurde der Hinterkantenkeilwinkel μ_{HK} verwendet, welcher die Profildicke entsprechend anpasst und dadurch für die Profilgestaltung nicht mehr zur Verfügung steht. Zudem wurde auf die in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellten Profillageparameter t_{ax} und t_{theta} sowie auf die Hilfssehnenlänge s_h verzichtet, da auch die Fädelung der Schaufeln gewissen Vorbedingungen aus Strukturmechanik und Aeroelastik unterliegt. Vorder- und Hinterkantendicken d_{VK}, d_{HK} sind auf die kleinstmöglichen Werte auf Basis der Vorgaben der Strukturmechanik festgelegt, da hier keine Änderung durch die Optimierung zu erwarten ist. Mit den Parametern aus Tabelle 5.1 und unter Berücksichtigung des Polynomgrades sowie aller zu optimierenden Schaufelreihen ergeben sich insgesamt 576 Schaufelprofilparameter für die Optimierung. Die unteren und oberen Grenzen der Parameter werden so gewählt, wie sie durch die Standardeinstellungen bei MTU Aero Engines AG gesetzt sind. Sie werden hier nicht aufgeführt.

5.1.2. Verstellgitter

Die Modellierung der Verstellleitgitter im Optimierungsprozess kann im ungekoppelten Modus oder im gekoppelten Modus erfolgen. Die beiden Modi wurden in Abschnitt 4.4 vorgestellt und sollen in späteren Optimierungen Anwendung finden.
Die Parametergrenzen für den ungekoppelten Modus sind in Tabelle 5.2 oben aufgeführt und so gewählt, dass sie ausreichende Änderungen der Verstellwinkel für die durchzuführenden Studien sowie für die Optimierungen ermöglichen. Das Verstellgesetz im Ausgangspunkt ist

Parameter	untere Grenze	obere Grenze	Bemerkung
ungekoppelter Modus ***(VGV=angles)***			
$\delta_{IGV,N100/N92/n72}$	r:$-5°$	r:$+5°$	drei Parameter, einer je Drehzahllinie
$\delta_{S1,N100/N92/n72}$	r:$-5°$	r:$+5°$	drei Parameter, einer je Drehzahllinie
$\delta_{S2,N100/N92/n72}$	r:$-5°$	r:$+5°$	drei Parameter, einer je Drehzahllinie
$\delta_{S3,N100/N92/n72}$	r:$-5°$	r:$+5°$	drei Parameter, einer je Drehzahllinie
Parameteranzahl im ungekoppelten Modus: 12			
gekoppelter Modus ***(VGV=schedule)***			
RVH_{IGV}	r:$-7mm$	r:$+7mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
SVH_{IGV}	r:$-12mm$	r:$+12mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
RVH_{S1}	r:$-7mm$	r:$+7mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
SVH_{S1}	r:$-24mm$	r:$+24mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
RVH_{S2}	r:$-7mm$	r:$+7mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
SVH_{S2}	r:$-20mm$	r:$+20mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
RVH_{S3}	r:$-7mm$	r:$+7mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
SVH_{S3}	r:$-16mm$	r:$+16mm$	Einfluss auf alle Betriebspunkte
$l_{Akt,N100}$	r:$-7.5mm$	r:$+7.5mm$	Einfluss auf N100
$l_{Akt,N92}$	r:$-8mm$	r:$+8mm$	Einfluss auf N92
$l_{Akt,N71}$	r:$-9mm$	r:$+9mm$	Einfluss auf N71
Parameteranzahl im gekoppelten Modus: 11			

Tabelle 5.2.: Auflistung und Grenzen der Verstellstator-Parameter für den ungekoppelten und den gekoppelten Modus

relativ zur N100-Ausgangsstellung in Abhängigkeit von der Aktuatorstellung in Abbildung 5.3 dargestellt. Die oberen und unteren Grenzen der abgeleiteten Parameter für den gekoppelten Modus sind durch mechanische Restriktionen beschränkt. Die dazugehörige Hebelkinematik ist in Abbildung 4.4 schematisch abgebildet. Die mit RVH und SVH bezeichneten Hebellängen sowie die Position des Aktuators werden als variabel vorausgesetzt. Die zusätzliche Freigabe weiterer Hebel, würde die Anzahl an Freiheitsgraden zwar weiter erhöhen aber zu keiner deutlichen Vergrößerung des Auslegungsraums führen. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 4.7 deutlich. Die Intervalle werden so gewählt, dass ein Anfahren von Totpunkten

nicht möglich ist. Dazu werden die in Tabelle 5.2 angegebenen oberen und unteren Schranken definiert.

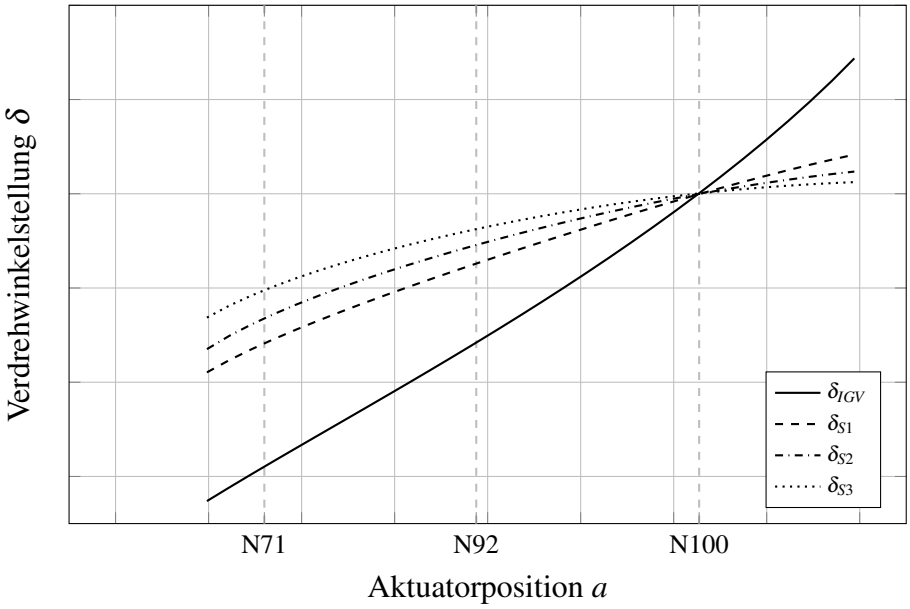


Abbildung 5.3.: Auftragung der Verstellwinkel für Vorleitrad (IGV), Stator 1 (S1), Stator 2 (S2) und Stator 3 (S3) über der Aktuatorposition der Verstellkinematik

5.1.3. Modellierung

In Anbetracht einer großen Anzahl an notwendigen Berechnungen und der hohen Anzahl an Schaufelgittern des Verdichters, wird in der vorliegenden Arbeit auf ein sogenanntes *Optimierungsmodell* zurückgegriffen. Dieses unterscheidet sich vom sogenannten *Detailmodell* in den Aspekten modellierte Geometriegüte und Netzauflösung, um die Berechnungszeit deutlich zu reduzieren. Im Optimierungsmodell wird auf sogenannte Strömungsnebenräume oder Kavitäten verzichtet, welche die Leckagemassenströme radial unterhalb der Verstellgitteraufhängung modellieren. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, werden im verwendeten Modell Zapfluftentnahmen an Stator 3 und Stator 6 gehäuseseitig sowie an Stator 7 und Stator 8 nabenseitig modelliert.

Die mithilfe des Vernetzungswerkzeugs erzeugten Gitter resultieren in strukturierten Netzen einer definierten Blocktopologie, welche beispielhaft in Abbildung 5.4 dargestellt ist. An der Schaufeloberfläche sowie im Seitenwandbereich werden erste Wandabstände von $y_+ \ll 30$ angestrebt. Wandabstände von $y+ = 30$ und größer, welche für die Nutzung von Wandfunktionen üblich sind, würden zu großen wandnahen ersten Zellen führen, welche in der Größenordnung der zu bewertenden Geometrieeigenschaften, beispielsweise eines Hinterkantenradius liegen. Im Bereich der Seitenwand sind die niedrigen Werte notwendig um die Radialspalte ausreichend aufzulösen. Die verwendeten Wandfunktionen und $y+$-Werte sind in der Verdichterauslegung bei MTU Aero Engines AG üblich, gut getestet und validiert. Die Zellenzahlen und

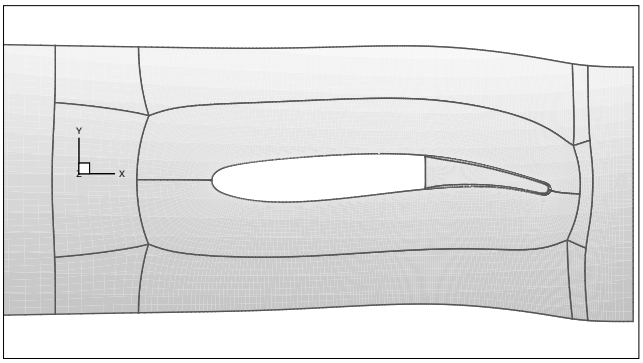
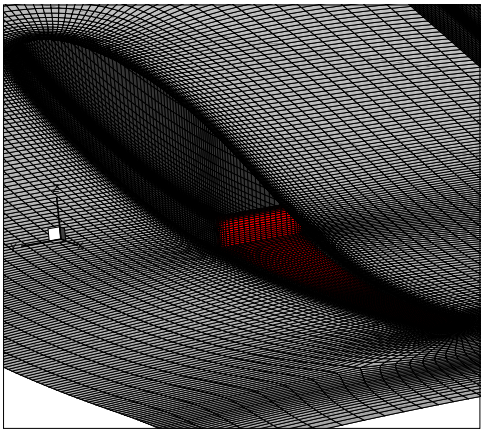


Abbildung 5.4.: Darstellung der Blocktopologie der strukturierten 3D-Vernetzung eines Nabenprofilschnittes anhand einer stark veränderten Originalgeometrie des IGVs. Eine sogenanntes Halbspaltnetz ist enthalten.

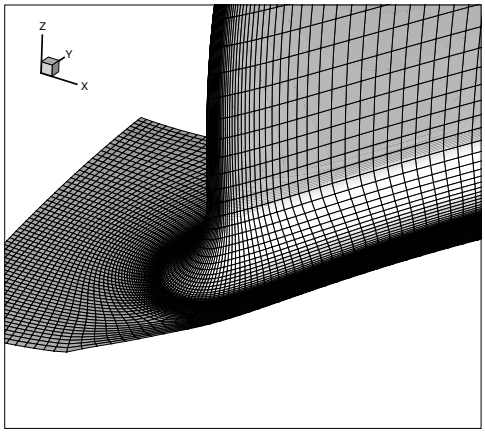
Drehzahllinie	N100	N92	N71
Anzahl Netzzellen in 10^6	5.32	4.99	4.72
Radiale Zellschichten im Spalt	13-25		

Tabelle 5.3.: Darstellung der Netzeigenschaften im Vergleich der Betriebspunkte

Radialspaltauflösungen sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst.
Für die Modellierung der Radialspalte der Verstellstatoren, werden sogenannte Halbspaltkonfigurationen verwendet. Der beispielhaft in Abbildung 5.5a dargestellte Halbspalt ist ein Kompromiss zwischen geometrischer Auflösung der komplexen Realgeometrie an der Verstellaufhängung und den Möglichkeiten die die strukturierte 3D-Vernetzung bietet. Für den Übergang von Schaufel zu Ringraum werden Ausrundungsradien modelliert. Die Oberfläche der vernetzten 3D-Geometrie im Bereich eines solchen Ausrundungsradius ist beispielhaft in Abbildung 5.5b dargestellt.
Die Randbedingungen für die Strömungssimulation werden am Einströmrand mithilfe radialer Verteilungen des Totaldrucks $p_{t,ein}$, der Totaltemperatur $T_{t,ein}$, der Strömungsrichtung sowie der Turbulenzparameter Turbulenzgrad und turbulentes Längenmaß vorgegeben. Am Ausströmrand wird der statische Austrittsdruck p_{aus} am Mittelschnitt vorgegeben. Die radiale Verteilung ergibt sich entsprechend des radialen Druckgleichgewichtes. Die Abströmrandbedingung ist nicht-reflektierend. Leckagemassenströme werden an den entsprechend definierten Bereichen bezogen auf den Eintrittsmassenstrom vorgegeben. Mithilfe dieser Daten, ist das System eindeutig definiert, alle anderen Größen - wie beispielsweise der Massenstrom - sind abhängig und ergeben sich aus der Strömungslösung. Zur Turbulenzmodellierung wird das $k-\omega$-Turbulenzmodell-Modell von Wilcox [78] eingesetzt. Der Verdichter wird vollturbulent berechnet, es kommt kein Transitionsmodell zum Einsatz.



(a) Ansicht des 3D-Netzes an der Nabe des IGV, Blickrichtung schräg radial von unten, Halbspaltnetz rot markiert



(b) Ansicht des Ausrundungsradius an der Nabe von Rotor 1, Nähe Vorderkante

Abbildung 5.5.: Detailansichten des 3D-Netzes an stark veränderten Originalgeometrien

5.1.4. Benötigte Funktionale

Ziel der Mehrpunktoptimierung des Hochdruckverdichters soll es sein, den Pumpgrenzabstand an einem Betriebspunkt zu verbessern. Gleichzeitig sollen die Positionen der Betriebspunkte auf der Arbeitslinie nicht signifikant geändert werden und der geforderte Pumpgrenzabstand auf jeder Drehzahllinie eingehalten werden. Zudem soll der isentrope Wirkungsgrad am Auslegungspunkt nicht kleiner werden. Die konkrete Optimierungsaufgabe wird in Abschnitt 6.1 definiert werden.

5.1.4.1. Zielfunktionalbetrachtungen eines Betriebspunktes

Um erfolgreich zu optimieren muss einerseits sichergestellt werden, dass sich keine ungewünschten Triviallösungen ergeben. Mit den in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellten Fittings und den nicht freigegebenen Vorder- und Hinerkanten wird dem Rechnung getragen. Andererseits ist sicherzustellen, dass die Optimierungsaufgabe nicht überbestimmt ist und somit keine verbesserte Lösung gefunden werden kann. Dies soll anhand einer Analyse des Optimierungsproblems für den Lastpunkt N100-WL anhand einer 0D-Betrachtung gezeigt werden. Ausgehend von den in 5.1.4 beschriebenen Forderungen ergeben sich die in Tabelle 5.4 dargestellten Bedingungen für den Betriebspunkt N100-WL. Die durch den Strömungslöser

Betriebspunkt	Größe	untere Grenze	obere Grenze
N100-WL	isentroper Wirkungsgrad η_{is}	η_{is}^*	
N100-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$	$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N100-WL	Totaldruckverhältnis Π	$0.995 \cdot \Pi^*$	$1.005 \cdot \Pi^*$

Tabelle 5.4.: Optimierungsbedingungen für den Betriebspunkt N100-WL

verursachten zusätzlichen inherenten Randbedingungen werden dabei berücksichtigt.

Ausgehend von der Definition des isentropen Verdichterwirkungsgrades

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\frac{T_{t,2}}{T_{t,1}} - 1}, \tag{5.1}$$

der Definition des Massenstroms am Austritt

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot sin\alpha_2 \cdot A, \tag{5.2}$$

sowie der der idealen Gasgleichung und Isentropenbeziehungen lässt sich, wie in Anhang A.5 gezeigt wird, folgender Ausdruck herleiten.

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{p_2^2}{R \cdot \dot{m}_{2,red}{}^2 \cdot p_{t1}^2} \cdot \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \cdot sin^2\alpha_2 \cdot A_2^2 - 1} \tag{5.3}$$

Die tiefgestellten Zahlen beschreiben hier die Position im Verdichter. Die Ziffer *1* bezeichnet den Einströmrand vor Gitter 1, die Ziffer *2* bezeichnet den Ausströmrand hinter dem letzten Gitter. Wie bereits in Unterabschnitt 5.1.3 erläutert wurde, wird am Ausströmrand der statische Druck p_2 vorgegeben und ist damit konstant. Am Einströmrand werden radiale Verläufe von T_{t1} und p_{t1} vorgegeben, welche über den Radius kaum variieren. Demnach sind - unter der Voraussetzung keiner entscheidenden radialen Massenstromumverteilungen am Eintritt - diese beiden Größen ebenfalls als konstant anzusehen. Der Austrittsquerschnitt sowie die Konstanten κ und R sind ebenfalls unveränderlich. Es bleiben die in (5.3) rot markierten Größen Π, $\dot{m}_{2,red}$ und α_2 um den Wirkungsgrad zu verbessern.
Werden im Rahmen der Optimierung Geometrieänderungen durchgeführt, welche den Wirkungsgrad erhöhen, zeigt Gleichung (5.3), dass sich auch mindestens eine der rot markierten Größen ändern muss. Aufgrund der Tatsache, dass Geometrieänderungen nur im vorderen Bereich des Verdichters stattfinden ist eine signifikante Änderung des Abströmwinkels α_2 auszuschließen. Somit ändert sich bei Wirkungsgradänderung auch mindestens eine der Größen Π und $\dot{m}_{2,red}$. Wenn die gestellten Bedingungen an den Betriebspunkt aus Tabelle 5.4 mit Gleichheitsnebenbedingungen $\Pi = \Pi^*$ und $\dot{m}_{2,red} = \dot{m}^*_{2,red}$ anstatt der in Tabelle 5.4 dargestellten Nebenbedingungsintervalle definiert worden wären, wäre das Problem überbestimmt. Um zu zeigen, dass eine signifikante Verbesserung des Wirkungsgrades η_{is} in den gesetzten Grenzen prinzipiell möglich ist, wurde Gleichung (5.3) mithilfe eines Samplings folgendermaßen ausgewertet.

- Für jede Auswertung wurden Zufallszahlen für die in Gleichung (5.3) rot markierten Größen bestimmt.
  - Für $\dot{m}_{red,2}$ und Π unabhängig von einander jeweils eine Zufallszahl zwischen unterer und oberer Grenze aus Tabelle 5.4
  - Für α_2 jeweils eine Zufallszahl zwischen $\alpha_2^* - 5°$ und $\alpha_2^* + 5°$. Dieses Intervall ist eine konservative Annahme, eine Abströmwinkeländerung in dieser Größenordnung ist nicht zu erwarten.

- Mithilfe der Zufallszahlen wird Gleichung (5.3) 1000 mal ausgewertet und η_{is} bestimmt.
- Die Ergebnisse werden farbig über $\dot{m}_{red,2}$ und Π in Abbildung5.6 aufgetragen. Ergebnisse die um mehr als 2% vom Ausgangswirkungsgrad abweichen, werden nicht eingezeichnet, da solch große Änderungen im Wirkungsgrad für den Betriebspunkt N100-WL im Laufe der Optimierung nicht zu erwarten sind.

In den Sampling-Datenpunkten in Abbildung 5.6 wird klar, dass eine eindeutige Korrelation zwischen Π und η_{is} besteht. Bei konstantem Massenstrom ist der Wirkungsgrad dann größer, wenn Π kleiner ist. Die Auswirkung einer Π-Änderung auf den Wirkungsgrad ist aber vergleichsweise stark. So ist im Ausgangspunkt lediglich eine Änderung von Π um 0.025%

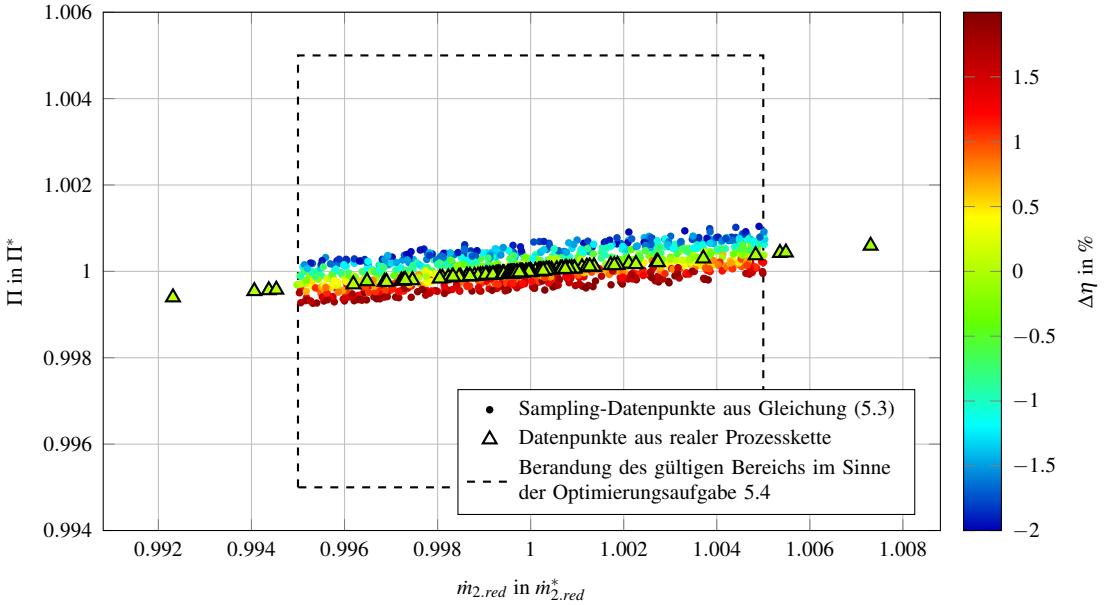


Abbildung 5.6.: Farbige Auftragung des Wirkungsgrades für Betriebspunkt N100-WL über dem reduzierten Massenstrom am Strömungsaustritt und dem Totaldruckverhältnis. Daten aus der realen Prozesskette bestätigen die Erkenntnisse aus den 0D-Betrachtungen.

nötig um den Wirkungsgrad um 1% zu ändern. Die in den Bedingungen für den Betriebspunkt N100-WL in Tabelle 5.4 gesetzte Grenze für Π ist ausreichend, um etwaig zu erwartende Verbesserungen des Wirkungsgrads zu ermöglichen. Das Optimierungsproblem ist somit im Betriebspunkt N100-WL nicht überbestimmt.
Zudem wird in Abbildung 5.6 eine deutliche Korrelation zwischen $\dot{m}_{red,2}$ und Π deutlich. Bei konstantem Wirkungsgrad gilt, je höher der reduzierte Massenstrom, desto höher das Totaldruckverhältnis. Da dieser Zusammenhang in einer flachen Kurve verläuft und aufgrund der zuvor geschilderten Korrelation zum Wirkungsgrad, kann es im Rahmen der Optimierung nicht vorkommen, dass eine der Grenzen des Totaldruckverhältnisses überschritten wird, ohne dass eine der Grenzen des reduzierten Massenstroms verletzt wird. Die Π-Grenzen aus

Tabelle 5.4 müssen in der Optimierung somit nicht aktiv gesetzt werden. Entsprechende Auswertungen im Adjungiertenverfahren bezüglich Π müssen somit nicht ausgeführt und Rechnerressourcen können eingespart werden.
Die gewonnen Erkenntnisse beruhen auf 0D-Überlegungen im Hochdruckverdichter. Leckagemassenströme, radiale Umverteilungen des Massenstroms und damit geänderte Mittelwerte wurden nicht berücksichtigt. Um die gewonnenen Erkenntnisse trotzdem als gültig zu verifizieren, wurden im Rahmen von Parameterstudien, welche in Abschnitt 5.2 vorgestellt werden, Prozesskettendurchläufe mit verschiedenen Schaufelgeometrien durchgeführt. Die dabei gewonnenen *realen* Samplingpunkte wurden ebenfalls in Abbildung 5.6 mit Dreiecken markiert eingezeichnet. Der absolute Wert des Wirkungsgrades weicht aufgrund der beschriebenen Vereinfachungen von den mithilfe von Gleichung (5.3) bestimmten Werten ab. Die relative Auftragung in Abbildung 5.6 ermöglicht jedoch einen Vergleich. Es wird deutlich, dass sich die im Rahmen der Studie ermittelten Daten sehr gut in die Zusammenhänge einfügen, die durch die 0D-Betrachtungen gewonnen wurden.

5.1.4.2. Pumpgrenzabstand

Ein Pumpgrenzpunkt wird in der Praxis numerisch bestimmt, indem der statische Gegendruck am Austritt des Verdichters p_{aus} sukzessive erhöht wird, bis die stationäre CFD-Rechnung divergiert oder nicht zu einem stationären Punkt auskonvergiert. Dabei wird der Kennfeldpunkt der letzten konvergierten Rechnung als Pumpgrenze definiert. Dieser Definition liegt die vereinfachende Annahme zugrunde, dass die numerische Divergenz mit den in der Realität auftretenden strömungsmechanischen Phänomenen an der Pumpgrenze, wie Strömungsabriss oder rotierendem Strömungsabriss[7], entspricht. Der Pumpgrenzpunkt wird mithilfe eines Intervallschachtelungsverfahrens bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird das Verfahren bis zu einer Genauigkeit von +/- 0.4% des Ausgangsgegendruckes durchgeführt. Der Pumpgrenzabstand zur vorgegebenen Arbeitslinie wird mithilfe der in Unterabschnitt 2.1.1.1 vorgestellten Gleichung (2.5) bestimmt.
Die vorgestellte Vorgehensweise ist für die Nutzung in einer Mehrpunktoptimierung aufgrund der Vielzahl von sequentiell notwendigen Berechnungen nicht effizient. Für die Optimierung wird auf eine bewährte Alternative zurückgegriffen, welche als Resultat nicht direkt einen Pumpgrenzpunkt liefert, aber indirekt zu einem verbesserten Pumpgrenzabstand führt. Dem alternativen Vorgehen liegt folgende Überlegung zugrunde:
Die Pumpgrenze jeder Drehzahllinie befindet sich im Kennfeld in einem Bereich des fallenden Wirkungsgrades, wie sich später in Abschnitt 6.1 zeigen wird. D.h. der isentrope Wirkungsgrad verringert sich, je näher an die Pumpgrenze angedrosselt wird. Unter dieser Voraussetzung wird die Annahme getroffen, dass bei einer durch die Optimierung herbeigeführten Erhöhung des Wirkungsgrades in Pumpgrenznähe bei konstantem Gegendruck p_2, in einer nachfolgenden Kennlinienberechnung stärker als p_2 angedrosselt werden kann und sich dadurch der Pumpgrenzabstand erhöht. Konkret wird in folgenden Schritten vorgegangen.

[7] Der rotierende Strömungsabriss oder *rotating stall* beschreibt eine am Rotor in Umfangrichtung von Schaufelblatt zu Schaufelblatt umlaufende Strömungsablösung. Das Phänomen wird beispielsweise in Wolfrum [10]näher beschreiben

- Nachdem für die Ausgangsgeometrie die Pumpgrenzpunkte aller relevanten Drehzahllinien bestimmt wurden, werden für die Optimierung *pumpgrenznahe* Punkte *N100-PG*, *N92-PG* und *N71-PG* auf der jeweiligen Drehzahllinie ausgewählt, welche ausreichend gut konvergieren um verwertbare Ergebnisgrößen ableiten zu können.

- Die statischen Gegendrücke der pumpgrenznahen Punkte werden während der Optimierung konstant gehalten.

- Anstatt den Pumpgrenzabstand in der Optimierung aufwändig zu bestimmen, werden zusätzliche Nebenbedingungen etabliert, welche die isentropen Wirkungsgrade für die pumpgrenznahen Betriebspunkte nicht kleiner werden lassen und sicherstellen, dass sich die reduzierten Massenströme an den Arbeitslinienpunkten *N100-WL*, *N92-WL* und *N71-WL* nicht signifikant verändern, um den Betriebspunkt nicht zu verändern.

Da der Pumpgrenzabstand nicht direkt kontrolliert werden kann, muss im Nachgang der Optimierung für die optimierte Konfiguration mithilfe der Intervallschachtelung gezeigt werden, dass die resultierende Drehzahllinie tatsächlich zu einem gleichen oder größeren Pumpgrenzabstand führt.

5.1.4.3. Geometrische Profileinschnürung

Wie in Unterabschnitt 5.1.1 erläutert wurde, wird der in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellter interner Fitting-Algorithmus der Geometriegenerierung verwendet um das Dicken- zu Längenverhältnis der Schaufeln einzuhalten. Trotz der Einhaltung dieses Verhältnisses kann es,

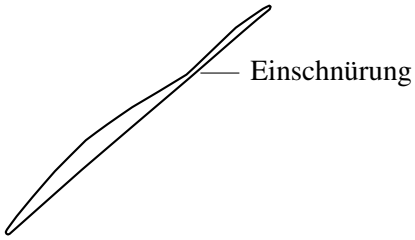


Abbildung 5.7.: Darstellung der geometrischen Einschnürung eines Schaufelprofils.

insbesondere unter Verwendung der in Tabelle 5.1 vorgestellten Spline-Parameter dazu kommen, dass das Schaufelprofil eine so genannte Einschnürung aufweist. Dies ist eine ungewünschte Profileigenschaft, welche sich dadurch auszeichnet, dass die Profildicke ein lokales Minimum zwischen Vorder- und Hinterkante aufweist, welches kleiner als die Vorderkanten- und Hinterkantendicke ist. Eine solche geometrische Einschnürung ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Um dies zu verhindern, kann das Maß der Einschnürung bestimmt werden und dem Optimierungsalgorithmus als geometrische Nebenbedingung definiert werden.

5.2. Parameterstudien

Das Verhalten der in Unterabschnitt 4.1.1 beschriebenen Schaufelparametrisierung ist aus den Erkenntnissen früher durchgeführter Optimierungen bekannt. Sowohl zu den üblichen Stellbereichen als auch zur Schrittweite zur Bestimmung der finiten Differenzen gibt es Erfahrungswerte. Für die neu eingeführten Parameter zur Beeinflussung der Winkel der Verstellstatoren aus Unterabschnitt 4.4 trifft das nicht zu. Zudem werden die Sensitivitätsinformationen mithilfe der in Unterabschnitt 4.3.2 beschriebenen hybriden Prozesskette bestimmt. Dies sorgt gegebenenfalls für geänderte optimale Schrittweiten h.
Die in diesem Abschnitt beschriebenen Sensitivitäts- und Schrittweitenstudien haben zum Ziel,

- die mit der hybriden Prozesskette bestimmten Sensitivitäten gegen die konventionell bestimmten Sensitivitätsinformationen zu verifizieren,
- einen Bereich sinnvoller Schrittweiten zu definieren, welche für die hybride Prozesskette möglichst gute Sensitivitätsinformationen liefert,
- Zusammenhänge zwischen den Parametern und dem Betriebsverhalten des Verdichters im gesamten Betriebsbereich abzuleiten und
- sinnvolle Verstellbereiche der Parameter zur Beeinflussung der Verstellleitgitter zu definieren und deren Einfluss auf das Betriebsverhalten zu untersuchen.

Zur Bestimmung und zum Vergleich der Sensitivitätsinformationen zwischen der konventionellen und der hybriden Prozesskette werden die Einflüsse einiger repräsentativer Parameter auf die in Unterabschnitt 5.1.4 definierten Zielgrößen dargestellt. Ausgehend von einem definierten Anfangszustand α_0 wird dazu jeder der zu untersuchenden Parameter einzeln um eine bestimmte Schrittweite h^* oder deren Vielfaches ausgelenkt. Im Fall der konventionellen Prozesskette wird jeder auf diese Weise definierte ausgelenkte Zustand mit der kompletten in Abschnitt 4.1 beschriebenen Prozesskette ausgewertet. Für die hybride Prozesskette wird der Ausgangszustand insofern als Basis verwendet, als dass für diesen die komplette Prozesskette inklusive der Prozesskettenbausteine im Adjungiertenverfahren durchlaufen wird. Für die ausgelenkten Zustände wird nur der Prozesskettenanteil bis zur 3D-Vernetzung durchgeführt. Mithilfe des in Unterabschnitt 4.3.2 beschriebenen Senstivitätsmodus werden Sensitivitäten für die ausgelenkten Zustände berechnet, welche, addiert zum Zielgrößenwert der Basis, eine absolute Zielgröße ergeben. Mathematisch stellt die Kurve eine Linearisierung der Strömungslösung um den Anfangszustand dar. Die so gewonnenen Zielgrößenwerte J können als Verlauf über h aufgetragen werden oder mithilfe von finiten Differenzen bzw. dem Differenzenquotient $\frac{\Delta J}{h}$ zu Sensitivitäten verrechnet werden.
Die zu untersuchenden Parameter werden hinsichtlich des Einflussbereiches in die Gruppen Profilparameter und VGV-Parameter unterteilt. Dabei werden die VGV-Parameter sowohl in der in Unterabschnitt 4.4.2 beschriebenen *ungekoppelten* Parametrik als auch in der in Unterabschnitt 4.4.2 beschriebenen *gekoppelten* Parametrik untersucht. Um möglichst verschiedene

Einflussbereiche im Verdichter in der Studie abzubilden, wird ein Profilparameter je Schaufelreihe untersucht. Das Eintrittsleitgitter wird bei den Profilparametern ausgespart, da insbesondere im Teillastbereich mit großer Fehlanströmung eher kleine Sensitivitäten bezüglich dieser Parametergruppe zu erwarten sind. Alle die in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellten Profilparameterarten sind in der Studie berücksichtigt. Profilparameter wurden im Rahmen der Studien radial über ein Polynom vierten Grades definiert mit Stützstellen bei 0%, 25%, 50%, 75% und 100% radialer Schaufelhöhe. Die dargestellte Auswertung im Rahmen der Studien erfolgt immer bei 75% der radialen Höhe der Schaufel, um einerseits Vergleichbarkeit zwischen den Paraemetern zu ermöglichen und andererseits im Vergleich zu den Randbereichen der Schaufel möglichst deutliche Sensitivitätsinformationen zu erhalten. Für die spätere Optimierung wird lediglich ein Polynom dritten Grades mit vier Stützstellen verwendet, um ein Überschwingen der Verläufe bei höheren Polynomgraden zu vermeiden. Die im Rahmen der Sensitivitätsstudie zu untersuchenden Parameter sind in Tabelle 5.5 zusammenfassend dargestellt.

Index	Symbol	Bezeichnung	Basisschritt-weite h^*	Einfluss-bereich
Schaufelparameter:				
S1	$\alpha_{VK,R02,y75}$	*row02-Metallwinkel-Vorderkante-y75*	0.8°	alle
S2	$\alpha_{HK,R03,y75}$	*row03-Metallwinkel-Hinterkante-y75*	0.5°	alle
S3	$\mu_{VK,R04,y75}$	*row04-Keilwinkel-Vorderkante-y75*	0.8°	alle
S4	$\alpha_{St,R05,y75}$	*row05-Profilstaffelungswinkel-y75*	0.6°	alle
S5	$\rho_{VK-S,R06,y75}$	*row06-Wirkungsweite Splineanstieg-Vorderkante-Saugseite-y75*	0.04	alle
S6	$\sigma_{VK-S,R07,y75}$	*row07-Wirkungsw. Splinekrümmung-Vorderkante-Saugseite-y75*	0.3	alle
S7	$\tau_{VK-S,R08,y75}$	*row08-Splinekrümmung-Vorderkante-Saugseite-y75*	2.0	alle
Verstellparameter (ungekoppelt):				
$V1$	$\delta_{IGV,N100}$	*Verdrehwinkel-Vorleitrad-N100*	0.5°	N100
$V2$	$\delta_{S1,N100}$	*Verdrehwinkel-Stator 1-N100*	0.5°	N100
$V3$	$\delta_{S2,N100}$	*Verdrehwinkel-Stator 2-N100*	0.5°	N100
$V4$	$\delta_{S3,N100}$	*Verdrehwinkel-Stator 3-N100*	0.5°	N100
$V5$	$\delta_{IGV,N92}$	*Verdrehwinkel-Vorleitrad-N92*	0.5°	N92
$V6$	$\delta_{S1,N92}$	*Verdrehwinkel-Stator 1-N92*	0.5°	N92
$V7$	$\delta_{S2,N92}$	*Verdrehwinkel-Stator 2-N92*	0.5°	N92
$V8$	$\delta_{S3,N92}$	*Verdrehwinkel-Stator 3-N92*	0.5°	N92
$V9$	$\delta_{IGV,N71}$	*Verdrehwinkel-Vorleitrad-N71*	0.5°	N71
$V10$	$\delta_{S1,N71}$	*Verdrehwinkel-Stator 1-N71*	0.5°	N71
$V11$	$\delta_{S2,N71}$	*Verdrehwinkel-Stator 2-N71*	0.5°	N71
$V12$	$\delta_{S3,N71}$	*Verdrehwinkel-Stator 3-N71*	0.5°	N71
Verstellparameter (gekoppelt):				
V_k1	RVH_{IGV}	*Ringverstellhebellänge IGV*	0.35 mm	alle
V_k2	SVH_{IGV}	*Schaufelverstellhebellänge IGV*	0.60 mm	alle
V_k3	RVH_{S1}	*Ringverstellhebellänge Stator 1*	0.35 mm	alle
V_k4	SVH_{S1}	*Schaufelverstellhebellänge Stator 1*	1.20 mm	alle
V_k5	RVH_{S2}	*Ringverstellhebellänge Stator 2*	0.35 mm	alle
V_k6	SVH_{S2}	*Schaufelverstellhebellänge Stator 2*	1.00 mm	alle
V_k7	RVH_{S3}	*Ringverstellhebellänge Stator 3*	0.35 mm	alle
V_k8	SVH_{S3}	*Schaufelverstellhebellänge Stator 3*	0.80 mm	alle
V_k9	$l_{Akt,N100}$	*Position des Aktuators N100*	0.375 mm	N100
V_k10	$l_{Akt,N92}$	*Position des Aktuators N92*	0.40 mm	N92
V_k11	$l_{Akt,N71}$	*Position des Aktuators N71*	0.45 mm	N71

Tabelle 5.5.: Vorstellung der in den Studien verwendeten Parameter. Die Spalte *Einflussbereich* bezeichnet die Drehzahllinien, deren Betriebspunkte von diesem Parameter beeinflusst sind. Die Basisschritteweite bezeichnet diejenige Schrittweite auf die in den folgenden Studien normiert wird.

5.2.1. Sensitivitäten der Auslegungsparameter

Für die Sensitivitätsstudien werden die Zielgrößen *isentroper Wirkungsgrad* und *reduzierter Massenstrom* untersucht. Der Einfluss der in Tabelle 5.5 dargestellten Parameter soll dargelegt werden. Gemäß der oben beschriebenen Vorgehensweise werden die Parameter jeweils in den Schrittweiten $-2h^*$, $-h^*$, $\frac{-h^*}{2}$,$\frac{-h^*}{4}$,0,$\frac{h^*}{4}$,$\frac{h^*}{2}$,h^* und $2h^*$ ausgelenkt und die Änderungen der Zielgrößen über der Schrittweite aufgetragen. Die Achsskalierung der Zielgrößenachse wird dabei für jeden Parameter gleich gewählt. Die Ergebnisse mithilfe der konventionellen Vorgehensweise werden in der Legende als *primal* gekennzeichnet. Der Legendeneintrag *adjoint* bezeichnet die Ergebnisse der hybriden Prozesskette mit dem Anteil im Adjungiertenverfahren. Im Folgenden werden die Ergebnisse für den Betriebspunkt N100-WL dargestellt. Für etwaige Vergleiche sind gleichwertige Untersuchungsergebnisse für die Betriebspunkte N100-PG, N92-WL, N92-PG, N71-WL und N71-PG in Anhang A.4 zu finden.

5.2.1.1. Validierung der Sensitivitäten

In den roten primalen Verläufen der Zielgrößen für den Betriebspunkt N100 in Abbildung 5.8 wird die Nichtlinearität der Zielgrößen über der Schrittweite h deutlich, beispielsweise in Parameter *S1*. Die gesuchte Senstivitätsinformation ist der Anstieg bzw. die Ableitung am Punkt $h = 0$. Die hybride Prozesskette linearisiert die Strömungslösung um den Zustand bei $h = 0$. Eine gute Bestimmung der Sensitivitätsinformation mithilfe der hybriden Prozesskette ist somit genau dann gegeben, wenn die *adjoint*-Kurve tangierend an der *primal*-Kurve anliegt. Da die hybride Prozesskette nicht durchgehend im Adjungiertenverfahren vorliegt, sondern nur die Strömungslösung und die Strömungsauswertung adjungiert ist, stellt die *adjoint* Kurve keine Linearisierung der gesamten Prozesskette dar, sondern lediglich der Strömungslösung. Die *adjoint*-Kurve ist demnach nicht notwendigerweise eine Gerade. Abweichungen von der exakten Linearität sind somit auf nichtlineare Effekte in der Präprozesskette, also in der Geometriegenerierung oder im Vernetzungsprozess zu suchen. In den Abbildung 5.8 und 5.9 sowie im Anhang A.4 ist dieser Effekt aufgrund des kleinen Parameterbereichs jedoch nicht zu beobachten. In Unterabschnitt 5.2.2 wird nochmals darauf eingegangen.
Für den in Abbildung 5.8 und 5.9 dargestellten Betriebspunkt *N100-WL* bildet der Verlauf der Zielgrößen der hybriden Prozesskette für jeden betrachteten Parameter eine Tangente an den Verlauf der Zielgrößen der konventionellen Prozesskette. Auch für die Betriebspunkte *N100-PG*, *N92-WL*, *N92-PG*, *N71-WL* und *N71-PG* ist dies der Fall, wie in Anhang A.4 ersichtlich wird. Im Betriebspunkt *N71-WL* in den Abbildungen A.13 und A.14 sind sehr stark nichtlineare Verläufe der Daten der konventionellen Prozesskette vorhanden. Betroffen sind die Parameter zur Verstellung der Leitgitter. Wie beispielhaft für die Parameter $V10$, V_k3 und V_k4 zur Verstellung von *Stator 2* in den Abbildungen A.13 und A.14 deutlich wird, springt die Zielfunktion für stärker aufgedrehte Statoren zu deutlich kleineren Wirkungsgraden sowie Massenströmen. Ursache dafür ist eine sich sprunghaft vergrößernde Ablösung im Nabenbereich von *Stator 2*. In Abbildung 5.10 ist die Strömungswinkel- sowie Massenstromverteilung für den Ausgangspunkt und für den um $\frac{h^*}{4}$ ausgelenkten Parameter V_k3 jeweils stromauf und stromab von Stator 2 dargestellt. Die Auslenkung entspricht einer Änderung des Verstellwinkels von Stator 2 von lediglich 0.12°. In der Winkelverteilung wird in Nabenähe die in ra-

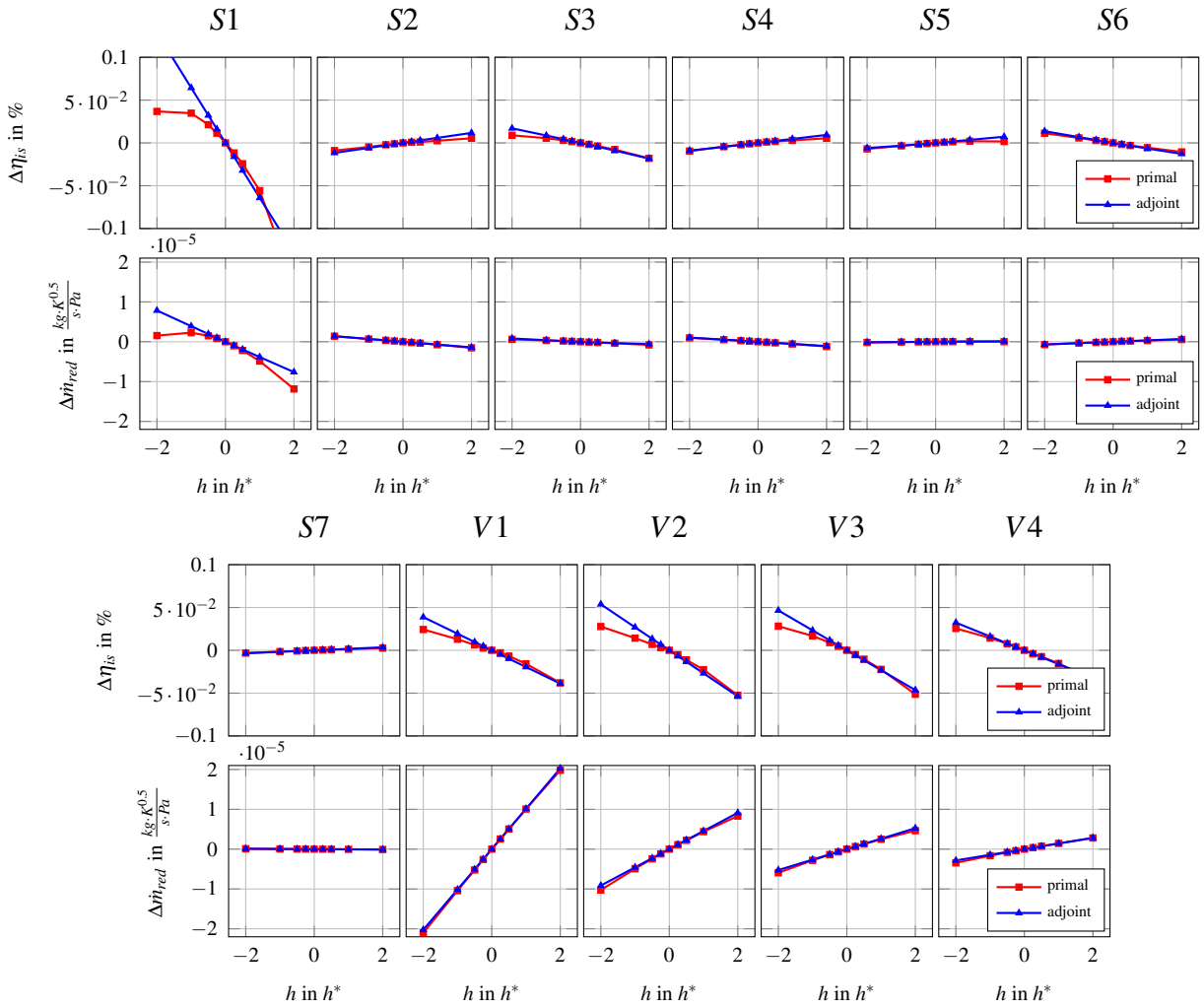


Abbildung 5.8.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

dialer Erstreckung deutlich größere Minderumlenkung der ausgelenkten Geometrie sichtbar. Der Abströmwinkel weicht in Nabennähe bis zu 19° von der Basisgeometrie ab. Auch in der resultierenden radialen Massenstromverteilung wird die größere Nabenablösung deutlich. Der Massenstrom der in der Basisgeometrie in Nabennähe vorhanden ist, wird in der ausgelenkten Geometrie in Richtung Mittelschnitt verschoben. Aufgrund des über den h-Verlauf plötzlichen Auftretens dieser Ablösung in der stationären Lösung, ist zu vermuten, dass der Verdichter sich hier auf einer Sekundärcharakteristik befindet. Das Phänomen wurde in Unterabschnitt 2.1.1.2 näher erläutert. Um dies weitergehend zu untersuchen, wäre eine umfangreiche instationäre Studie nötig, welche in der vorliegenden Arbeit nicht angestrebt wird. Angesichts der stark nichtlinearen Verläufe, würde eine gradientenbasierte Optimierung unter Verwendung Finiter Differenzen, abhängig von der gewählten Schrittweite, zu stark falschen Sensitivitäten führen. Das Adjungiertenverfahren sorgt dessen ungeachtet weiterhin für tangentiale Verläufe

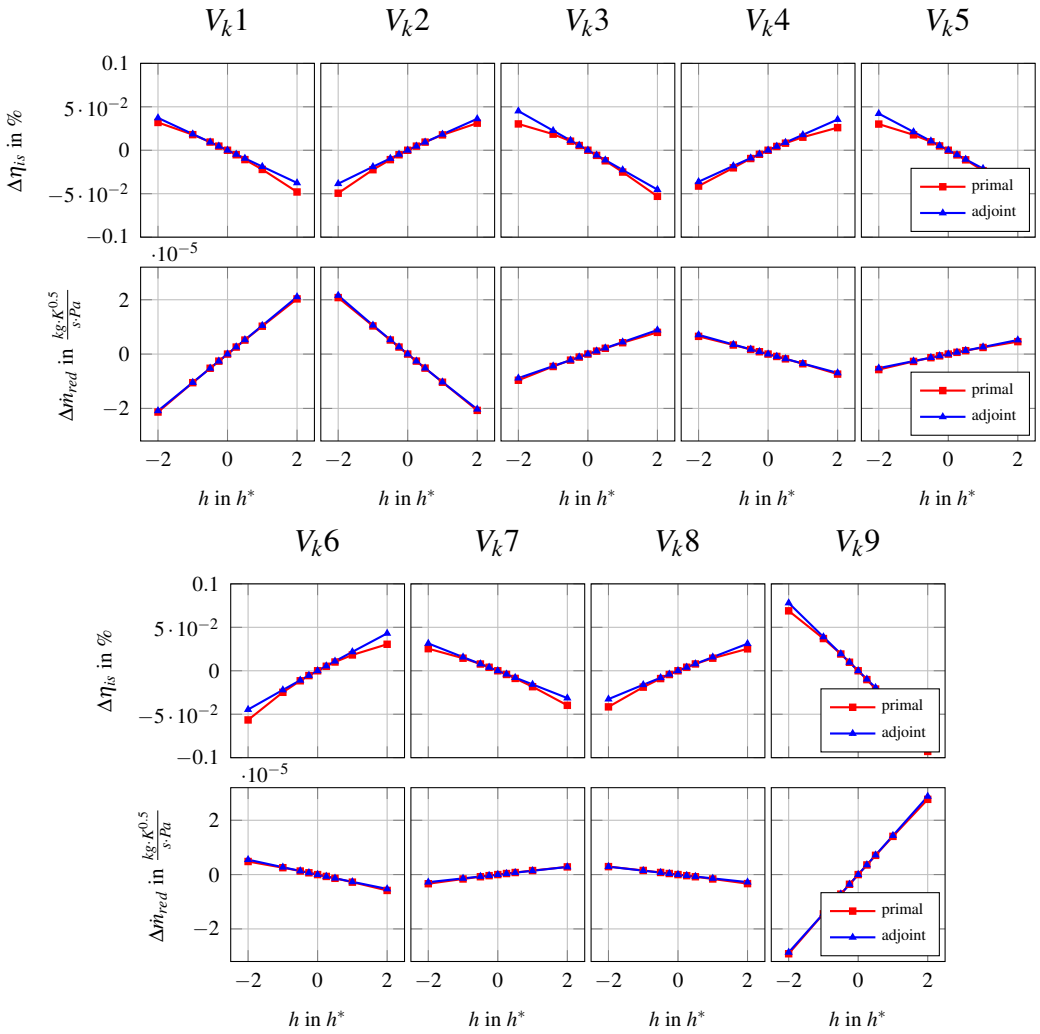


Abbildung 5.9.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-WL* für die Parameter der Verstellleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

an den nicht von der Ablösung betroffenen Bereich der konventionellen Zielgrößenverläufe. Aus den in den Abbildungen 5.8 und 5.9 sowie den in Anhang A.4 dargestellten Vergleichen und den zusätzlichen Untersuchungen, kann das Vorgehen der Sensitivitätsbestimmung mithilfe der hybriden Prozesskette als validiert betrachtet werden. Die hybride Prozesskette kann zur Bestimmung von Sensitivitätsinformationen in Optimierungen verwendet werden. Die mittels der hybriden Prozesskette bestimmten Sensitivitäten sind lokale Informationen, deren Gültigkeitsbereich in der Umgebung des Basispunktes insbesondere an Unstetigkeitsstellen oder sehr stark nichtlinearen Bereichen des Funktionals klein sein kann.

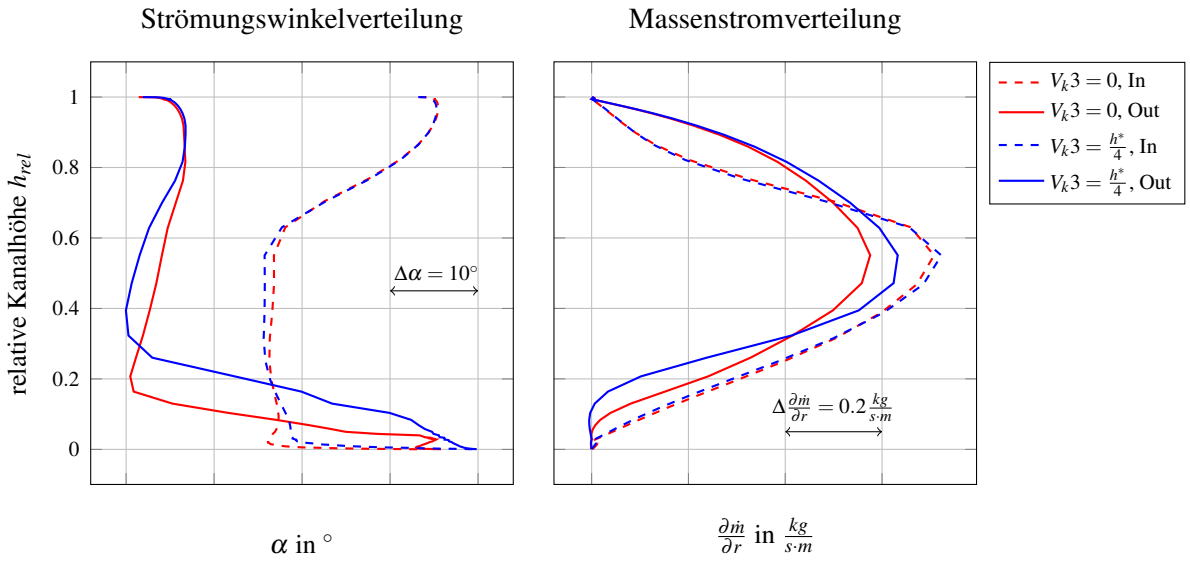


Abbildung 5.10.: Darstellung der in Umfangsrichtung massengemittelten radialen Massenstrom- sowie Strömungswinkelverteilung am Stator 2 bei Betriebspunkt N71-WL. Es ist die Basisgeometrie sowie eine Geometrie mit ausgelenktem Parameter V_k3 dargestellt. Die Änderung des Parameters entspricht dem Aufdrehen von Stator 2 um 0.12°. Es sind die Verläufe für den Einströmrand (In) und den Ausströmrand (Out) von Stator 2 dargestellt.

5.2.1.2. Ableitungen für das Betriebsverhalten

Auf Basis der Sensitivitätsinformationen in den Abbildungen 5.8 und 5.9 sowie in Anhang A.4 lassen sich Informationen zum Auslegungszustand sowie zum Betriebsverhalten und den Beziehungen der Betriebspunkte zueinander ablesen.
Die Sensitivitäten von Wirkungsgrad und Massenstrom bezüglich nahezu aller dargestellten Parameter sind in den pumpgrenznahen Betriebspunkten größer als an den Betriebspunkten auf der Arbeitslinie. Das wird insbesondere bei den Parametern der Verstellleitgitter deutlich. Dies ist insofern nicht verwunderlich, als dass der aerodynamische Auslegungspunkt sich näher an einem etwaigen Optimum befinden sollte und somit die Gradienten an diesem Punkt kleiner sind. Der Einfluss der Aktuatorstellung auf den Wirkungsgrad ist am Betriebspunkt *N92-PG* bespielsweise mehr als zehnmal größer als am Betriebspunkt *N92-WL* wie in den Abbildungen A.12 und A.10 anhand Parameter V_k10 deutlich wird.
Der Einfluss der hier untersuchten Schaufelparameter im Vergleich zum Einfluss der Verstellparameter nimmt bei Teillast deutlich ab. Dies gilt in besonderem Maße für die pumpgrenznahen Punkte. Dies hat Auswirkungen auf die spätere Optimierung, da die bisher nicht verwendeten Verstellparameter das Betriebsverhalten im Teillastbereich deutlich stärker gewichten werden, als es bisher in Optimierungen ohne Verstellparameter der Fall war.
Anhand der Wirkungsgradänderung unter Einfluss der Verstellparameter $V1$ - $V4$ im Vergleich

der Betriebspunkte *N100-WL* und *N100-PG* in den Abbildungen 5.8 und A.7 wird deutlich, dass im Auslegungsprozess Kompromisse gefunden werden. Während das Zudrehen der Verstellleitgitter bei Betriebspunkt *N100-WL* zu einer Verbesserung des Wirkungsgrades führen würde, wäre bei *N100-PG* das Gegenteil der Fall, was ggf. eine ungewünschte Reduzierung des Pumpgrenzabstandes zur Folge hätte.
Aus den Sensitivitätsdaten aller Betriebspunkte wird deutlich, dass der Verstellwinkel des Eintrittsleitgitters $V1$ einen entscheidenden Einfluss auf den Massenstrom an dem jeweiligen Betriebspunkt hat. Bei Auslegungsdrehzahl ist dies auf den direkten Einfluss des IGV auf die Anströmung des transsonisch durchströmten Rotors 1 und den indirekten Einfluss auf den ebenfalls transsonisch durchströmten Rotor2 zurückzuführen. In den anderen Betriebspunkten ist die Anströmung des IGV aufgrund der in Unterabschnitt 2.1.1.2 dargestellten Zusammenhänge bei reduzierter Drehzahl besonders ungünstig. Die Fehlanströmung am IGV und damit die Blockage aufgrund von Ablösegebieten ist groß. Eine Änderung des Verstellwinkels $V1$ hat direkten Einfluss auf die Größe der Blockage und somit auf den Massenstrom am Einströmrand.
Bezüglich des Parameters *S1*, welcher den Vorderkantenmetallwinkel von Rotor 2 auf 75% radialer Schaufelhöhe darstellt, ergibt sich ein hoher Einfluss auf Wirkungsgrad und Massenstrom für die Drehzahllinien *N100* und *N92* jedoch nahezu kein Einfluss auf der Drehzahllinie *N71*. Dies ist auf ein großes Ablösegebiet in Gehäusenähe an Rotor 1 zurückzuführen. Die Profilvorderkante liegt im Rückströmbereich und die Änderung der Profilvorderkante hat somit nur geringen Einfluss auf Wirkungsgrad und Massenstrom.

5.2.2. Schrittweitenstudie

Wie bereits in Unterabschnitt 3.2.1 eingeführt, kann bei Gradientenberechnungen mit der Methode der Finiten Differenzen der gewählten Schrittweite h eine entscheidende Bedeutung zukommen. Im Folgenden soll untersucht werden, wie groß dieser Einfluss im vorliegenden Fall ist und wie sich der Einfluss im Vergleich ohne und mit Adjungiertenverfahren ändert. Dazu werden drei Sensitivitätsberechnungen aus dem Unterabschnitt 5.2.1 näher betrachtet.

- Als Beispiel für eine geringe Sensitivität des Wirkungsgrades soll Parameter $S3$ im Betriebspunkt *N100-PG* betrachtet werden. Die Sensitivität ist in Abbildung A.7 dargestellt.

- Als Beispiel eines großen Einflusses auf den Wirkungsgrad wird der Verstellwinkel des Vorleitrades $V1$ am Betriebspunkt *N100-PG* näher untersucht. Die Sensitivität ist in Abbildung A.7 dargestellt.

- Als Beispiele einer schwer bewertbaren Wirkungsgrad-Sensitivität soll ebenfalls der Verstellwinkel des Vorleitrades, jedoch am Betriebspunkt *N71-WL* bewertet werden. Die Sensitivität $V9$ ist in Abbildung A.13 dargestellt.

Ähnlich zum Vorgehen in Unterabschnitt 3.2.1 wird die Schrittweite ausgehend von $4h^*$ jeweils schrittweise geviertelt. Es ergeben sich die Schrittweiten $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{0} h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{1} h^*$,

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3 h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^4 h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^5 h^*$, $\left(\frac{1}{4}\right)^6 h^*$. Die Vorgehensweise zur Auswertung der konventionellen und der hybriden Prozesskette ist wie in Unterabschnitt 5.2.1 beschrieben. Die Güte der Sensitivitätsinformation wird jetzt anhand der Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta J}{h}$ ermittelt und über der logarithmischen Schrittweite aufgetragen. In Anbetracht der in Unterabschnitt 3.2.1 eingeführten Fehler beim Berechnen Finiter Differenzen, ist ein fehlerhafter Gradient bei zu großen Schrittweiten aufgrund des Abbruchfehlers ε_{trunc} und bei zu kleinen Schrittweiten aufgrund des Auslöschungsfehlers ε_{canc} zu erwarten. Da der exakte Gradient unbekannt ist, wird stattdessen in der Auftragung über der Schrittweite ein konstanter Ableitungswert bei mittleren Schrittweiten erwartet. Das geschieht in der Annahme, dass es einen mittleren Schrittweitenbereich gibt, welcher weder zu stark vom Abbruchfehler noch zu stark vom Auslöschungsfehler verfälscht ist. In den Randbereichen bei sehr kleiner und sehr großer Schrittweite sind Abweichungen zu erwarten.
Die Auswertung am Beispiel des Parameters $S3$ erfüllt diese Erwartungen wie in Abbildung 5.11 links deutlich wird. Aufgrund begrenzter numerischer Genauigkeit für die Auswertung

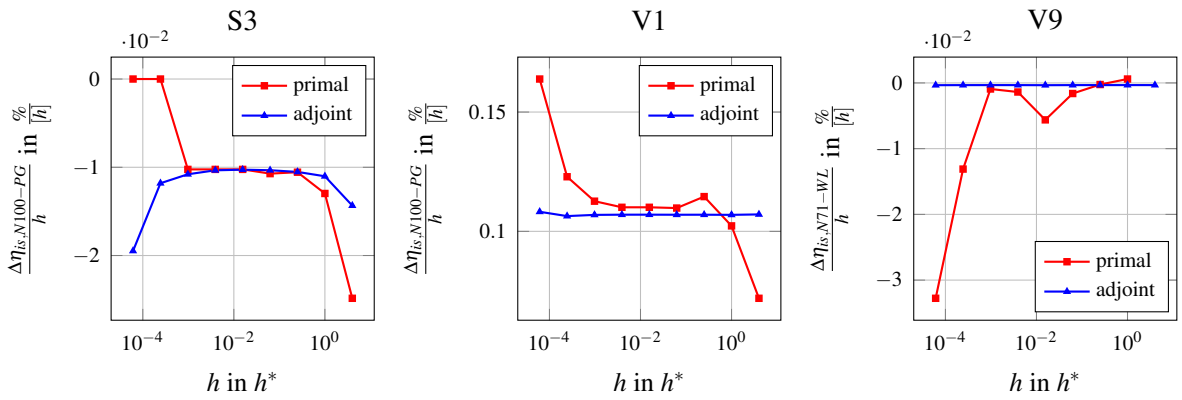


Abbildung 5.11.: Darstellung der Sensitivitätsinformation für die Parameter S3, V1 und V9 über der logarithmisch aufgetragenen Schrittweite h

der konventionellen Prozesskette und des sehr geringen Niveaus der Sensitivität ist der Auslöschungsfehler bei sehr kleinen Schrittweiten so stark, dass keine signifikanten Stellen mehr zur Verfügung stehen und damit die Sensitivität verschwindet. Wie bereits in Unterabschnitt 5.2.1 erwähnt, ist auch die Ableitungsinformation der hybriden Prozesskette nicht unabhängig von der Schrittweite, auch hier treten Auslösungs- und Abbruchfehler auf. Die Auftragungen für die *adjoint*-Kurven in Unterabschnitt 5.2.1 sind nur in erster Näherung eine Gerade. Dies ist auf den primalen Prozesskettenanteil zurückzuführen. Parameter $S3$ stellt den Vorderkantenkeilwinkel von Rotor 2 dar. Für Keilwinkeländerungen in positiver Richtung ist ein nichtlineares Verhalten der Netzantwort die logische Folge. Aufgrund des deutlich ausgeprägten flachen Verlaufs über der logarithmischen Schritteweite ist das Spektrums der möglichen Schrittweiten groß. Damit ist bei Parameter $S3$ kein negativer Einfluss der gewählten Schrittweite auf die Gradienteninformation zu erwarten.
Für die Sensitivität des Wirkungsgrades auf Parameter $V1$ gilt Vergleichbares. Aufgrund des großen linearen Bereichs der Netzänderung sowie des hohen Sensitivitätsniveaus wird für die

hybride Prozesskette weder der Bereich eines signifikanten Auslöschungs- noch eines Abbruchfehlers erreicht. Die hybride Prozesskette hat hiermit einen größeren Bereich möglicher Schrittweiten zur Auswahl, der negative Einfluss auf die Optimierung ist hier ebenfalls zu vernachlässigen.
Am Betriebspunkt *N71-WL* wird in Abbildung A.13 ein stark nichtlinearer Bereich der Sensitivität des Wirkungsgrades in Abhängigkeit von Parameter $V9$ deutlich. Die Ableitungsinformation der hybriden Prozesskette erscheint zunächst nicht tangential. Bei näherer Betrachtung und besserer Auflösung in Abbildung 5.11 rechts wird deutlich, dass die Ableitungsinformation mithilfe des konventionellen Vorgehens nahezu unmöglich ist. Dies ist auf die schlechte primale Konvergenz dieses Betriebspunktes zurückzuführen. Im Zusammenspiel von harten Konvergenzkriterien und leicht schwingenden Lösungen ist eine Bewertung mithilfe Finiter Differenzen schwierig. Es ergibt sich kein konstantes Plateau. Angesichts dieses Verlaufs erscheint die berechnete Ableitungsinformation der hybriden Prozesskette plausibel, ohne jedoch den korrekten Ableitungswert zu kennen. In diesen von Zielgrößenrauschen stark beeinflussten Bereichen stellt die Vorgehensweise der hybriden Prozesskette eine deutliche Verbesserung dar. Der Prozesskettenanteil, welcher für das Rauschen verantwortlich ist, wurde durch den Gegenpart im Adjungiertenverfahren ersetzt und damit die Berechnung von Sensitivitäten überhaupt ermöglicht.
Für die nachfolgenden Optimierungen wurde sich für die Schaufelparameter für eine um Faktor 5 kleinere Schrittweite gegenüber der üblichen Schrittweite entschieden. Gemäß Tabelle 5.5 entspricht dies einer Schrittweite von $\frac{h^*}{5}$. Für die ungekoppelten Parameter wurde sich auf Basis der durchgeführten Studien für eine Schrittweite von $0.1°$, also am rechten Rand des flachen Bereichs entschieden, um bei etwaigen niedrigeren Sensitivitäten Auslöschungsfehler zu vermeiden. Für die gekoppelten Parameter gilt gegenüber Tabelle 5.5 ebenfalls $\frac{h*}{5}$ als Schrittweite für die Optimierungen.

5.3. Konvergenzstudien

5.3.1. Konvergenz der primalen und adjungierten Strömungslösung

Iterative Verfahren, wie beispielsweise ein Pseudo-Zeitschrittverfahren, wie sie im Finite-Volumen-Löser TRACE angewendet werden verbessern im Idealfall in jedem Iterationsschritt die Lösung. Der Restfehler, das sogenannte *Residuum* wird in jedem Zeitschritt kleiner, die Rechnung *konvergiert*. Die Konvergenzgeschwindigkeit definiert sich als Residuumsreduktion je Zeitschritt. Sie ist maßgeblich von der Art der zugrunde liegenden Gleichungen sowie vom Lösungsverfahren abhängig, welches die zugrunde liegenden Gleichungen löst. Weitere Abhängigkeiten bestehen zur gewählten Diskretisierung des Rechengebietes, der Modellierung von Randbedingungen sowie der Größe des jeweiligen Pseudo-Zeitschritts.
Das Residuum kann im realen Anwendungsfall nicht auf null konvergiert werden. Je nach verwendeter Residuumsdefinition bzw. –norm ergibt sich ein Residuumswert, für welchen die Lösung als konvergiert angesehen wird. Gründe dafür sind zum Einen räumlich unzureichend aufgelöste Strömungsphänomene bzw. unzureichend diskretisierte Stellen der Geo-

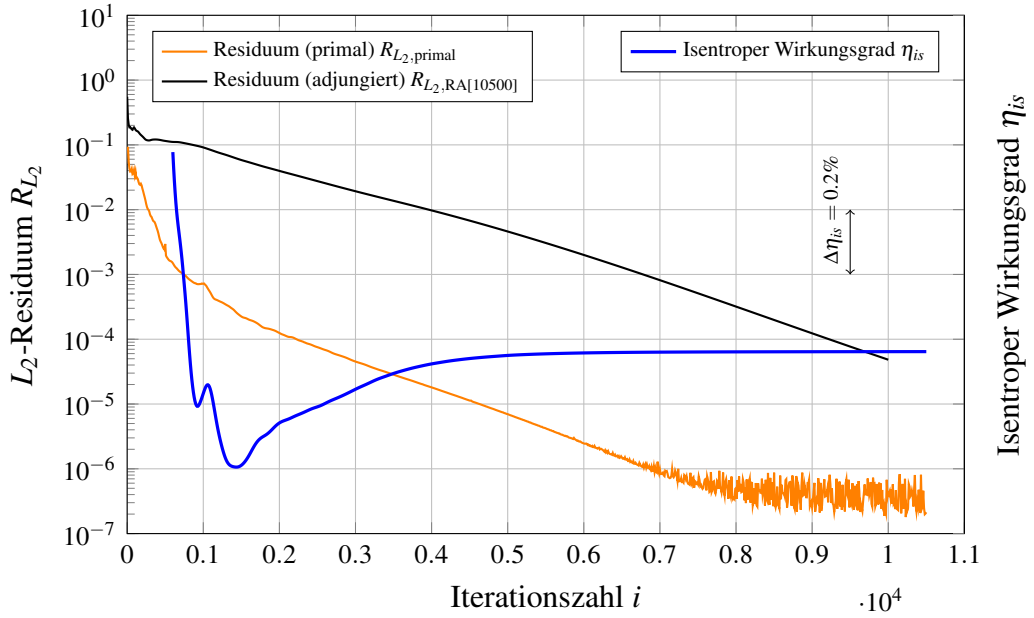


Abbildung 5.12.: Konvergenzverläufe der L_2-Residuen für die primale Berechnung $R_{L_2,\text{primal}}$ und die Berechnung im Adjungiertenverfahren mit Reverse Accumulation (RA) auf Basis der primalen Lösung bei 10500 Iterationen $R_{L_2,\text{RA}[10500]}$. Parallel ist der isentrope Wirkungsgrad η_{is} mit der rechten y-Achse aufgetragen. Die rechte y-Achse ist nicht logarithmisch.

metrie, welche lokal nicht weiter konvergieren. Zum anderen kann die zeitliche Auflösung unzureichend sein. Ein Zeitschritt kann zu groß gewählt sein bzw. ein stationäres Pseudo-Zeitschritt-Verfahren kann ein in Wahrheit instationäres Strömungsphänomen nicht ohne Restfehler auflösen. Der Fehler schwingt sich auf einem gewissen Niveau ein oder mündet in eine sogenannte *Limit Cycle Oscillation*[8] Durch Änderungen der Diskretisierung, bzw. durch leichte Anpassung des Lösungsverfahrens, etwa der Größe des Zeitschritts über die sogenannte CFL-Zahl, kann das Residuum ggf. weiter gesenkt werden. In der Praxis wird die Lösung ab einer bestimmten Restfehlergröße als konvergiert angesehen und abgebrochen. Neben dem reinen Residuum kommen auch 0D-Strömungsgrößen zum Einsatz, welche in jedem Iterationsschritt bestimmt werden und anhand deren Verlauf die Konvergenz der Berechnung abschätzt werden kann. Für den in Abschnitt 5.1 beschriebenen Testfall ist für den Betriebspunkt N100-WL die Konvergenz des primalen Lösungsschritts von TRACE mithilfe eines skalierten L2-Residuums in Abbildung 5.12 dargestellt. Parallel dazu ist der Verlauf des isentropen Wirkungsgrades abgebildet, welcher in vereinfachter Form in jeder Iteration bestimmt wird. Die primale Konvergenzgeschwindigkeit beträgt etwa 0.4 Zehnerpotenzen je 1000 Iterationen. Im Bereich ab 7500 Iterationen bildet sich ein Plateau heraus und das Residuum sinkt nicht signifikant weiter. Der Verlauf des isentropen Wirkungsgrades schwingt sich ein und stabilisiert sich zunehmend bis zur Abbruch der Konvergenzkriterien nach 10500 Iterationen.

[8]Der Begriff beschreibt einen zeitlichen Verlauf, welcher periodisch wiederkehrende Muster bildet.

Das hier angewendete Adjungiertenverfahren zeigt die gleiche Konvergenzgeschwindigkeit wie die primale Lösung. Dies lässt sich mit der, für den isentropen Wirkungsgrad auf Basis der primalen Lösung nach 10500 Zeitschritten gestarteten Berechnung im Reverse Accumulation Modus zeigen. In Abbildung 5.12 wurde das L_2-Residuum des Adjungiertenverfahrens $R_{L_2,RA[10500]}$, dem primalen L_2-Residuum $R_{L_2,primal}$ gegenübergestellt. Die Gleichheit der Konvergenzgeschwindigkeit der primalen und der adjungierten Lösung wird, zumindest gegen Ende der Konvergenz des Adjungiertenverfahrens, deutlich. Trotz der nicht exakt geltenden Bedingung $R_{L_2,primal} = 0$, welche in Abschnitt 3.3 als Voraussetzung für die erfolgreiche Nutzung des Reverse Accumulations Verfahrens aufgeführt wurde, ist eine Konvergenz der adjungierten Lösung möglich. Der Korrektheit halber ist zu erwähnen, dass aufgrund der nicht exakt erfüllten Bedingung $R_{L_2,primal} = 0$, auch keine exakt konsistente adjungierte Lösung für die zu berechnende Geometrie bestimmt werden kann.

In der Praxis wird nicht in jedem Fall bis zur Erreichung des Plateaus im Residuum gewartet. Als Konvergenzkriterium für die primale Rechnung gelten stattdessen mehrere 0D-

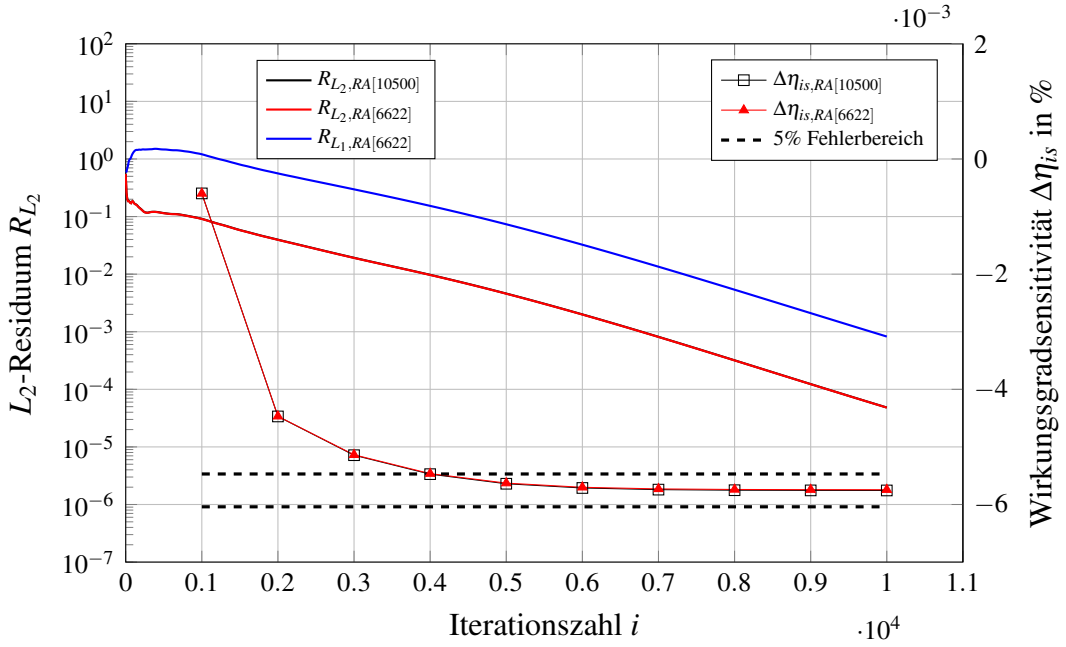


Abbildung 5.13.: Auftragung der L_2-Residuen des Adjungiertenverfahrens über der Iterationszahl für die Rechnung auf Basis der Lösung nach 10500 bzw. 6622 primalen Iterationen. Es sind keine Unterschiede erkennbar. Parallele Darstellung der dazugehörigen Wirkungsgradsensitivitäten auf der rechten Achse, ausgewertet nach jedem 1000ten Iterationsschritt. Zur Definition des Konvergenzkriteriums des Adjungiertenverfahrens ist der L_1-Residuenverlauf für Reverse Accumulation nach 6622 primalen Schritten aufgetragen.

Ergebnisgrößen, welche in jeder Iteration ausgewertet werden. Gemäß der im Anwendungfall verwendeten Konvergenzkriterien, wäre die in Abbildung 5.12 dargestellte primale Berech-

nung bereits nach 6622 Zeitschritten beendet worden. Die Berechnung im Adjungiertenverfahren wäre demnach auf der primalen Lösung von Iteration 6622 gestartet worden. Die Konvergenz des Adjungiertenverfahrens auf Basis der Lösung nach 6622 Schritten ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Der Konvergenzverlauf ist nahezu identisch mit dem Verlauf auf Basis der primalen Lösung nach 10500 Schritten in Abbildung 5.12. Zusätzlich wurde nach jeweils 1000 Zeitschritten die Wirkungsgradsensitivität bezüglich der finiten Auslenkung des Parameters VGV-Stator2 ausgewertet. Auch hier zeigt sich die Gleichwertigkeit der beiden primalen Lösungen für die Berechung der adjungierten Lösung. Zusätzlich sind nach 10000 Iterationen im Adjungiertenverfahren Wirkungsgradsensitivitäten anhand zehn ausgelenkter Netze bewertet worden, jeweils einmal für die adjungierte Lösung nach 10500 primalen Schritten und einmal für die adjungierte Lösung nach 6622 Schritten. Die Unterschiede in Abbildung

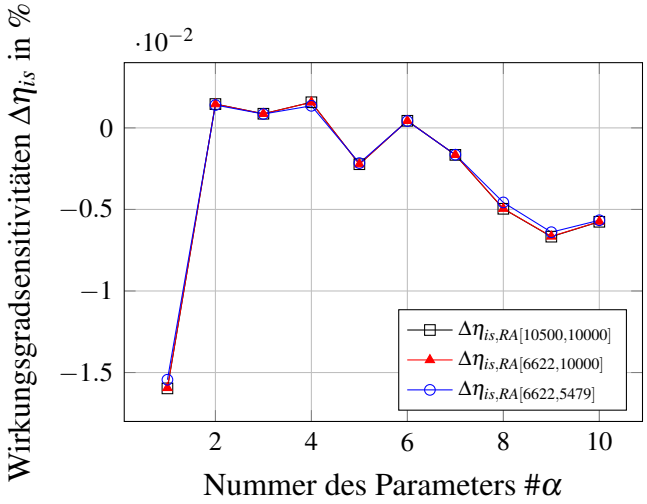


Abbildung 5.14.: Auswertung der adjungierten Lösungen anhand von 10 Parametern. Die Lösungen unterscheiden sich in der primalen Iterationszahl (linke Zahl in der eckigen Klammer) auf deren Basis die Berechnung im Adjungiertenverfahren gestartet wurde und in der Iterationszahl das Adjungiertenverfahrens (rechte Zahl in der eckigen Klammer) im Reverse Accumulation Verfahren

5.14 zwischen den Sensitivitäten sind minimal.
Der Abbruch der adjungierten Lösung erfolgt ebenfalls mithilfe eines Konvergenzkriteriums. Anhand der Auswertung eines ausgelenkten Netzes mithilfe von adjungierten Lösungen in Abbildung 5.13 , welche aller 1000 Iterationen auf dem Weg zur Konvergenz geschrieben wurden, kann die resultierende Sensitivitätsinformation bewertet werden. Es wird deutlich, dass die Änderung der Sensitivitätsinformation bereits etwa zu Zeitschritt 4000 im 5%-Fehlerintervall in Abbildung 5.13 liegt.
Sowohl ein früherer Abbruch der primalen Lösung als auch ein früherer Abbruch der Berechnung im Adjungiertenverfahren sind somit, mithilfe von entsprechenden Konvergenzkriterien, möglich. Auf Basis dieser Beobachtung und Auswertungen an den anderen Betriebspunkten und Zielgrößen, wurden passende primale Konvergenzkriterien sowie ein Konvergenzkriteri-

um für das Adjungiertenverfahren von $R_{L_1} = 0.01$ gewählt. Aufgrund des etwas glatteren Verhaltens gegenüber dem L_2-Residuum wird das L_1 Residuum für Konvergenzabschätzungen verwendet. Demnach wird die dargestellte adjungierte Rechnung aus Abbildung 5.14 bereits nach 7333 Iterationen beendet.

5.3.2. Stabilisierte Konvergenz

In der industriellen Praxis führen Berechnungen nach dem Reverse Accumulation Ansatz in einer nicht zu vernachlässigenden Häufigkeit zur Divergenz des Verfahrens. Grund dafür kann eine ungenügende primale Konvergenz sein, etwa durch frühzeitigen Abbruch per Konvergenzkriterium oder durch Iteration in einem Grenzzyklus wie er bei hoher Iterationszahl im primalen Konvergenzverlauf in Abbildung 5.12 beobachtet werden kann.
Die Konvergenz einer Fixpunktiteration ist nach dem banachschen Fixpunktsatz genau dann gegeben, wenn der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner als Eins ist. Die primale Lösung q ist in der Iterationsmatrix der Fixpunktiteration (3.47) enthalten. Ist mindestens einer der Eigenwerte der Iterationsmatrix >= 1 kann es zur Divergenz der Fixpunktiteration kommen.
In der Praxis hat sich gezeigt, dass jeweils eine oder wenige adjungierte Größen im 3D-Netz im Laufe der Iteration stark anwachsen und zur Divergenz führen. In Unterabschnitt 4.3.1.1 wurde bereits auf die Verfahren zur Stabilisierung des Reverse Accumulation Verfahrens eingegangen. Im Folgenden wird anhand einer Beispielrechnung am Betriebspunkt $N100 - WL$ gezeigt, welche Auswirkungen die Stabilisierung auf die Qualität der Sensitivitätsinformation hat. Im Gegensatz zu Unterabschnitt 5.3.1 wurde hier eine leicht veränderte Geometrievariante verwendet, in der eine Stabilisierung notwendig ist.
In Abbildung 5.15 wird deutlich, dass in diesem Beispiel bei genügend langer primaler Konvergenz, keine Stabilisierungsmaßnahmen notwendig sind. Die schwarze Kurve konvergiert und wird als Referenzkurve bezeichnet. Bei kürzerer primaler Konvergenz, wie sie auch in den späteren Optimierungen verwendet wird, führt Reverse Accumulation zur Divergenz etwa ab Zeitschritt 400. Anhand einer lokalen und zeitlich aufgelösten Analyse der Residuenverläufe, zeigt sich ein starkes Ansteigen des Residuums in der Nähe der Vorderkante von Rotor 8.
Die in Unterabschnitt 4.3.1.1 vorgestellte *Recursive Projection Method* kann die divergierende Iteration stabilisieren, wie in der roten Kurve in Abbildung 5.15 deutlich wird. Im Iterationsverlauf ist das zweimalige Stabilisieren durch die starken Zacken erkennbar. Die letztendliche Konvergenz des Verfahrens erfolgt zeitlich etwas verzögert im Vergleich zur Referenzkurve.
Die zweite in Unterabschnitt 4.3.1.1 beschriebene Stabilisierungsmaßnahme *Set-Zero* benötigt ebenfalls zwei Stabilisierungsschritte, in Zeitschritt 650 wird die oben genannte Stelle in der Nähe der Vorderkante von Rotor 8 stabilisiert, in Zeitschritt 760 wird eine Stabilisierung auf der Saugseite von Stator 7 notwendig. Nach erfolgter Stabilisierung nähert sich die Iteration sehr schnell wieder der Referenzkurve an.
Die dritte Stabilisierungsmaßnahme *Set-Average* stellt eine Abwandlung der *Set-Zero* Methode dar und stabilisiert den Iterationsverlauf ebenfalls. In Abbildung 5.15 wird deutlich, dass Stabilisierungsmaßnahmen bei Zeitschritt 650 , 750 und 820 nötig sind. Zudem kommt es zwischen den Zeitschritten 920 und 990 zu mehreren Stabilsierungen. Wie beim Verfahren *Set-Zero* nähert sich der Iterationsverlauf der Referenzkurve an.

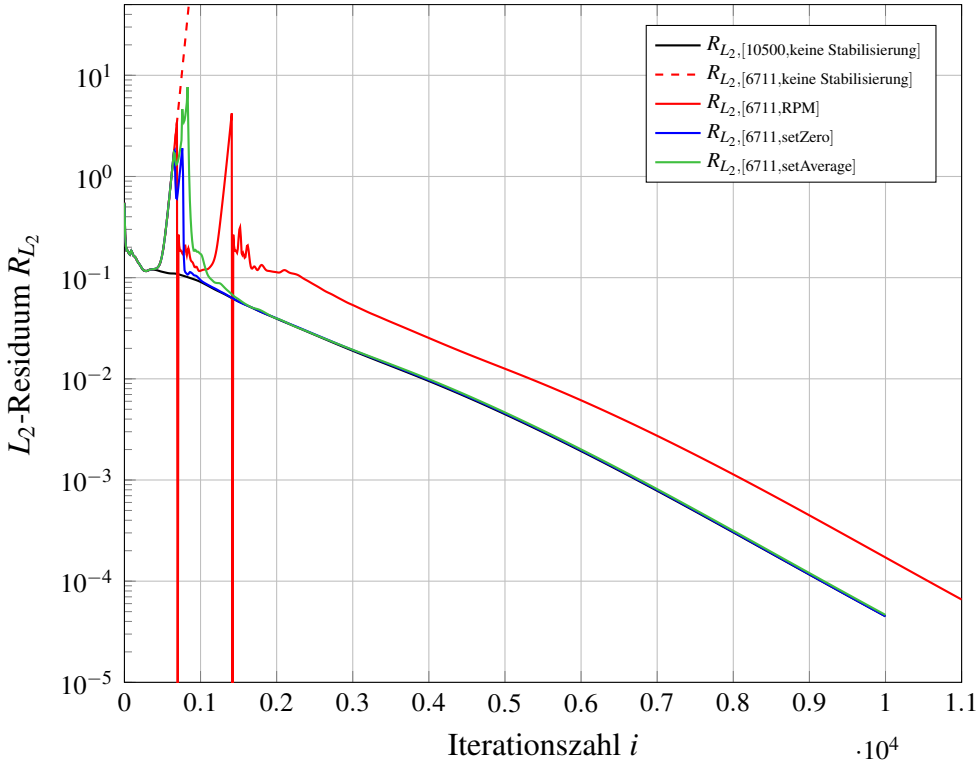


Abbildung 5.15.: L_2-Residuen des Adjungiertenverfahrens in Abhängigkeit der primalen Iterationszahl (linke Zahl in der eckigen Klammer) und der zur Stabilisierung verwendeten Methoden (rechter Wert in der eckigen Klammer). Schwarze, blaue und grüne Kurve liegen ab etwa Iteration 1500 nahezu deckungsgleich übereinander.

In Abbildung 5.16 wird die Auswirkung der Stabilisierungen auf die Güte der Sensitivitätsinformationen aufgezeigt. Dazu wurden zehn übliche Parameter in dem in Abschnitt 5.1 vorgestellten Designraum verteilt gewählt. Die Parameter sind nicht mit den Parameterzahlen aus Unterabschnitt 5.3.1 vergleichbar, da bei diesem Beispiel eine andere Parametrik gewählt wurde. Parameter zehn stellt eine Schaufelrotation um 0.2° dar und wurde explizit an Rotor 8 gewählt, wo in allen Verfahren eine Stabilsierung notwendig war. Wie bereits in Unterabschnitt 4.3.1.1 erwähnt, ermöglich die RPM-Methode eine Stabilisierung ohne Beeinträchtigung der Sensitivitätsgüte. Die *SetZero*-Methode führt zu leicht veränderten Sensitivitätsinformationen an den Parametern 1-9 und hat lokal deutliche Auswirkungen, wie Parameter zehn aufzeigt. Die *SetAverage*-Methode schwächt den schlechten Einfluss der *SetZero*-Methode deutlich ab und sorgt auch in Parameter zehn für eine gute Sensitivitätsgüte.
Für die Auswahl der passenden Stabilisierungsmethode spielt der Faktor Zuverlässigkeit der Stabilisierung die wichtigste Rolle. Für die RPM-Methode wurde in umfangreichen Untersuchungen keine allgemein gültige zuverlässige Einstellung gefunden. Zudem ist die in Abbildung 5.15 dargestellte verzögerte Konvergenz teilweise deutlich größer und führt zu sehr langen Konvergenzzeiten. Je durchgeführter Stabilisierungsinteraktion steigt zudem der Re-

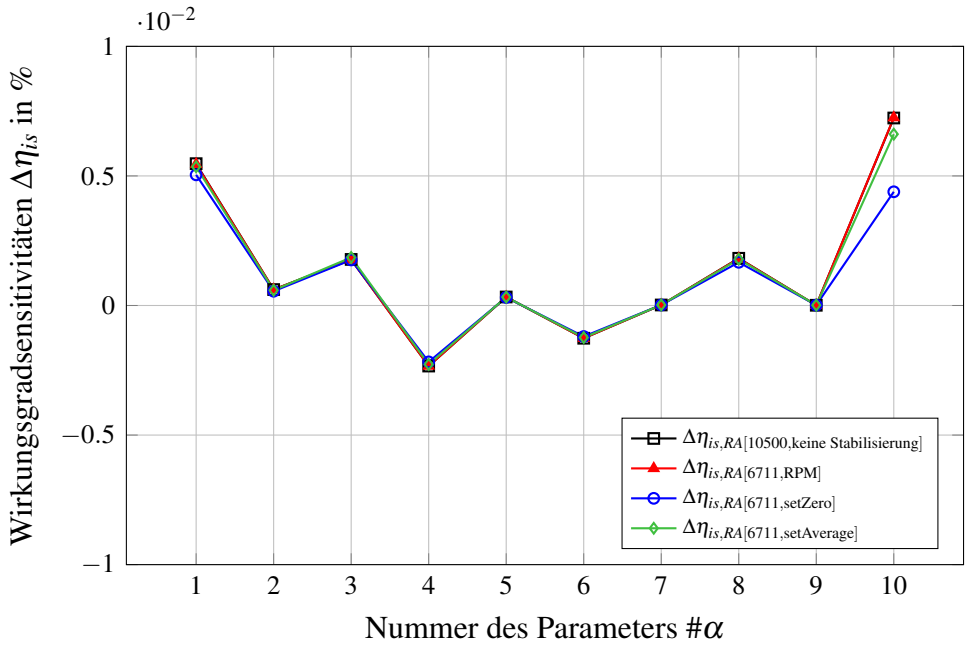


Abbildung 5.16.: Auswertung der adjungierten Lösungen aus Abbildung 5.15 anhand von 10 über den Verdichter verteilten Parametern [9]auf 25% Schaufelhöhe. Parameter 10 ist eine Parameteränderung, welche eine der zu stabilisierenden Stellen direkt beeinflusst.

chenaufwand und Speicherbedarf an. Im Vergleich zwischen Set-Zero und Set-Average im verwendeten Fall zeigt ausschließlich Set-Zero eine ausreichende Zuverlässigkeit. Wie bereits im Beispiel in Abbildung 5.15 sind zudem meist weniger Stabilisierungsinteraktionen notwendig. Als Konsequenz dieser Erkenntnisse und um überhaupt eine Mehrpunktoptimierung des beschriebenen Anwendungsfalls durchführen zu können, wird trotz der Schwächen im Bereich der Sensitivitätsgüte im Folgenden auf die setZero-Methode zurückgegriffen.

5.3.3. Initialisierung der adjungierten Strömungslösung

Das in Unterabschnitt 3.3.2 beschriebene Adjungiertenverfahren *Reverse Accumulation* stellt ein Verfahren dar, welches sich ausgehend von einer adjungierten Startlösung iterativ der adjungierten Lösung nähert. Die Startlösung λ_0 ist im allgemeinen Fall die Besetzung aller adjungierten Werte mit null, also der Nullvektor $\lambda_0 = 0$. Die in den vorangegangenen beiden Unterabschnitten dargestellten Konvergenzverläufe wurden auf Basis dieser allgemeinen Startlösung erzeugt.
Für das Lösen von primalen Strömungsbewertungen ist es üblich, bereits vorhandene ähnliche Strömunglösungen als Startlösungen zu verwenden. Die Konvergenzzeiten lassen sich, je nach Ähnlichkeit der Lösungen, zum Teil deutlich reduzieren. Dies lässt sich auch für Reverse

[9]Parameter: 1)R1-α_{VK}, 2)S1-α_{HK}, 3)R3-$\rho_{VK,S}$, 4)R2-α_{St}, 5)R2-μ_{VK}, 6)R4-$\tau_{VK,S}$, 7)S3-$\sigma_{VK,S}$, 8)IGV-$\rho_{HK,S}$, 9)S1-α_{St}, 10)S3-$\rho_{VK,D}$

Accumulation ausnutzen. Während einer Optimierung werden viele primale und adjungierte Lösungen erzeugt, welche als sinnvolle Kandidaten für Startlösungen infrage kommen.
Um Startlösungen anderer Geometrien nutzen zu können, müssen die jeweiligen Strömungsgrößen von einem 3D-Netz in das andere überführt werden. Da in der vorliegenden Prozesskette nur strukturierte Netze verwendet werden und zudem deren Netztopologie unverändert bleibt, ist das Überführen der Lösungen per Zellindices möglich. Die in Unterabschnitt 5.3.1 durchgeführten Konvergenz- und Sensitivitätsuntersuchungen werden im Folgenden durch Untersuchungen mithilfe zweier verschiedener adjungierter Startlösungen erweitert. Bei Start-

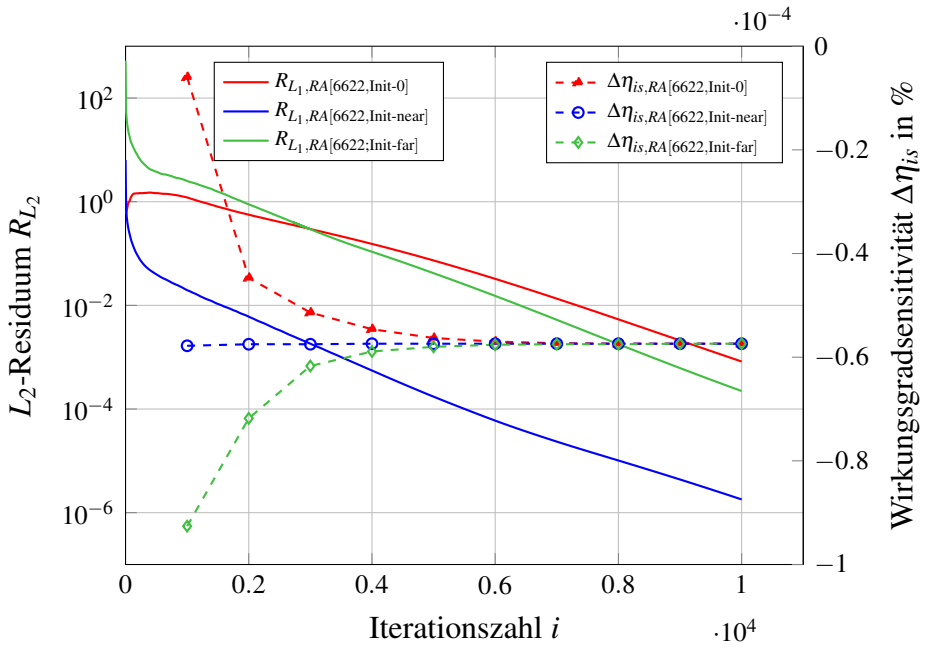


Abbildung 5.17.: Konvergenzverläufe der L_1-Residuen des Adjungiertenverfahrens und - rechts aufgetragen - Wirkungsgradsensitivitäten (ausgewertet anhand eines beispielhaften Parameters) auf Basis der primalen Lösung nach 6622 primalen Iterationen durch verschiedene Startlösungen des Adjungiertenverfahrens (rechter Wert in der eckigen Klammer).

lösung *Init-near* handelt es sich um eine sehr ähnliche Geometrie, wie sie beispielsweise nach einigen Optimierungsiterationen eines gradientenbasierten Verfahrens auftreten kann. Viele Parameter sind leicht verändert, die aerodynamischen Randbedingungen sind gleich und somit die zugrundeliegenden primalen Strömungslösungen ähnlich. Startllösung *Init-far* nutzt die gleiche Geometrie wie *Init-near*, wurde jedoch auf Basis eines anderen Lastpunktes berechnet. In den Untersuchungen in Unterabschnitt 5.3.1 wurde der aerodynamische Auslegungspunkt, Lastfall *N100-WL* verwendet. Die adjungierte Startlösung *Init-far* stellt jedoch eine existierende adjungierte Lösung des pumpgrenznahen Lastpunktes *N100-PG* dar. Die aerodynamischen Randbedingungen sowie die zugrundeliegenden primalen Strömungslösungen sind sehr stark verschieden voneinander. Die allgemeine Startlösung mit $\lambda_0 = 0$ wird im Folgenden als *Init-0* bezeichnet.

In Abbildung 5.17 wird deutlich, dass beide adjungierte Startlösungen zu einer Beschleunigung der Konvergenz führen, was für die entfernte Startlösung *Init-far* nicht zu erwarten war. Da das Residuum später zur Bewertung der Konvergenz herangezogen werden soll und das $L1$-Residuum verglichen zum $L2$-Residuum einen glatteren Verlauf aufzeigt, wird in Abbildung 5.17 auf das $L1$-Residuum zurückgegriffen. Die qualitative Ähnlichkeit zum $L2$-Residuum wird im Vergleich der roten Konvergenzlinien in Abbildung 5.17 und Abbildung 5.13 deutlich. Die naheliegende Startlösung ermöglich eine sehr deutliche Beschleunigung der Konvergenz. Die ausgewertete beispielhafte Sensitivität in Abbildung 5.17 zeigt zudem, dass die Lösungen zu den gleichen Sensitivitätsinformationen führen. Die Größenordnung des Residuums lässt einen Rückschluss auf die gefunden Gradientengüte zu. So ist beispielsweise das Residuum für den Fall *Init-near* bereits bei Iteration 1000 auf dem Niveau des Residuums für den Fall *Init-0* bei Iteration 6700, die Gradientengüte ist ebenfalls ähnlich. Das Residuum kann somit als Konvergenzkriterium herangezogen werden.

Aus Erfahrungen aus konventionellen aerodynamischen gradientenbasierten Optimierungen bei der MTU Aero Engines AG hat sich herausgestellt, dass stets ein und dieselbe primale Startlösung verwendet werden sollte. Theoretisch wäre es denkbar, die Strömungslösung der jeweils vorangegangen Optimierungsiteration zu verwenden. Da die primalen Strömungslösungen jedoch nicht bis zu einem primalen Residuum von null auskonvergiert werden können, entsteht eine leichte Abhängigkeit zur Startlösung. Um dies zu vermeiden wird in den Optimierungen der folgenden Kapitel jeweils ein und dieselbe primale Strömungslösung zur Initialisierung verwendet. Da adjungierte Startlösungen im Allgemeinen nicht im Vorfeld einer Optimierung vorliegen, wird für den ersten Gradienten die allgemeine Startlösung *Init-0* verwendet. Alle folgenden Berechnungen im Adjungiertenverfahren werden mit den adjungierten Lösungen des ersten Gradienten initialisiert.

6. Mehrpunktoptimierungen

6.1. Optimierungsaufgabe

Die entwickelte hybride Prozesskette wird in einer Mehrpunktoptimierung genutzt. Dazu werden die in Abschnitt 5.1 vorgestellten drei Drehzahllinien betrachtet. Der Optimierungsaufgabe liegt folgendes Szenario zugrunde.
Ein in der Vergangenheit ausgelegter und im Betrieb befindlicher Hochdruckverdichter soll aerodynamisch anhand folgender Maßgaben optimiert werden:

- Der *Garantiepunkt 1* bei Drehzahl N92 soll sicherer gegen Verdichterpumpen ausgelegt werden. Der Pumpgrenzabstand nach Definition in Gleichung (2.5) soll für die Drehzahllinie N92 vergrößert werden.

- Die Pumpgrenzabstände der beiden anderen Drehzahlen bei Reiseflug N100 und im Leerlauf am Boden N71 sollen sich nicht verschlechtern.

- Die Kennfeldpunkte der drei Drehzahlen auf der Arbeitslinie sollen in engen Grenzen gehalten werden, um die Betriebspunkte nicht zu verändern.

- Der isentrope Wirkungsgrad des Auslegungspunktes N100-WL bei Reiseflug soll sich nicht verschlechtern.

Die daraus abgeleitete Optimierungsaufgabe ist in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Bewer-

Betriebspunkt	Größe	Ziel	untere Grenze	obere Grenze
N100-WL	isentroper Wirkungsgrad η_{is}		η_{is}^*	
N100-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N92-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N71-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N100-WL	Totaldruckverhältnis Π		$0.995 \cdot \Pi^*$	$1.005 \cdot \Pi^*$
N92-WL	Totaldruckverhältnis Π		$0.995 \cdot \Pi^*$	$1.005 \cdot \Pi^*$
N71-WL	Totaldruckverhältnis Π		$0.995 \cdot \Pi^*$	$1.005 \cdot \Pi^*$
N100-WL	Pumpgrenzabstand $PGA_{\dot{m}_{red}}$		$PGA_{\dot{m}_{red}}^*$	
N92-WL	Pumpgrenzabstand $PGA_{\dot{m}_{red}}$	maximieren	$PGA_{\dot{m}_{red}}^*$	
N71-WL	Pumpgrenzabstand $PGA_{\dot{m}_{red}}$		$PGA_{\dot{m}_{red}}^*$	

Tabelle 6.1.: Definition der Optimierungsaufgabe. Mit * gekennzeichnete Größen sind die Werte der jeweiligen Ausgangslösung.

tung pumpgrenznaher Betriebspunkte der N71-Drehzahllinie wird dadurch erschwert, dass z.T. Ablösungen auftreten und die Drehzahllinie auf andere Charakteristiken ausweicht.

Das Vorgehen zum Einhalten des Pumpgrenzabstandes wurde in Unterabschnitt 5.1.4.2 näher beschrieben. Die in Unterabschnitt 5.1.4.1 gefundenen Vereinfachungen der Nebenbedingungen für einen Betriebspunkt führen ausgehend von Tabelle 6.1 zu der in Tabelle 6.2 dargestellten Ersatz-Optimierungsaufgabe, welche im Kennfeld in Abbildung 6.1 graphisch verdeutlicht

Betriebspunkt	Größe	Ziel	untere Grenze	obere Grenze
N100-WL	isentroper Wirkungsgrad η_{is}		η_{is}^*	
N100-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N92-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N71-WL	reduzierter Massenstrom $\dot{m}_{red}$		$0.995 \cdot \dot{m}_{red}^*$	$1.005 \cdot \dot{m}_{red}^*$
N100-PG	isentroper Wirkungsgrad η_{is}		η_{is}^*	
N92-PG	isentroper Wirkungsgrad η_{is}	maximieren		
N71-PG	isentroper Wirkungsgrad η_{is}		η_{is}^*	

Tabelle 6.2.: Definition der Ersatz-Optimierungsaufgabe. Mit * gekennzeichnete Größen sind die Werte der jeweiligen Ausgangslösung.

wird. Für die N92- und die N71-Drehzahllinie wird dabei die konservative Vorgehensweise gewählt, dass sich der Wirkungsgrad bei N92-PG bzw. N71-PG nicht verschlechtern darf. In Anlehnung an die Argumentation aus Unterabschnitt 5.1.4.2 wird dadurch bewirkt, dass sich der Pumpgrenzabstand nicht verschlechtert.

Mithilfe mehrerer Optimierungen soll die Funktionsfähigkeit der entwickelten Prozesskette gezeigt werden. Zum einen soll der Einfluss der Verstellleitgitter auf das Optimierungsergebnis ermittelt werden. Zum anderen soll der Einfluss der Parametrisierung bzw. die Notwendigkeit einer realitätsnahen gekoppelten Parametrisierung, wie sie in Unterabschnitt 4.4.2 vorgestellt wurde, beurteilt werden. Zudem soll quantifiziert werden, inwiefern sich eine deutlich umfangreichere Parametrisierung, welche aufgrund des Adjungiertenverfahrens zu keinem signifikanten Mehraufwand führt, auf das Optimierungsergebnis auswirkt. Zusätzlich soll die Notwendigkeit einer zu Teilen auf der Adjungiertenmethode basierenden Prozesskette bezüglich des Rechenaufwandes und der Durchlaufzeit beurteilt werden. Dazu sollen die in Tabelle 6.3 dargestellten Optimierungen durchgeführt werden, wobei die Ziele und Nebenbedingungen in allen Fällen gemäß Tabelle 6.2 und Abbildung 6.1 definiert sind. Die Optimierungsaufgaben werden mithilfe der in Unterabschnitt 4.3.2 vorgestellten hybriden Prozesskette und dem gradientenbasierten Optimierungsverfahren NLPQLP durchgeführt. Gegenüber des in Schittkowski [57] beschriebenen Verfahrens, wurden zwei Veränderungen vorgenommen.

- Wie in Schittkowski [57] beschrieben, erfolgt die Auswahl der genutzten Schrittweite der Liniensuche σ_k, wie sie in Unterabschnitt 3.1.1 eingeführt wurde, mithilfe der Armijo-Regel. Diese wird bei Luenberger [53] näher beschrieben und sorgt für eine ausreichende Verbesserung des Funktionals, findet aber nicht notwendigerweise diejenige Schrittweite, welche zur besten Verbesserung führt. Das Vorgehen gemäß Armijo-Regel ist bei sequentieller Ausführung der einzelnen Auswertungen einer Liniensuche

Kurzname	Bezeichnung	Beschaufelungs-Parametrik	VGV-Parametrik	Anzahl Parameter
Opt_A	Reine Beschaufelungsoptimierung	Sch=base	VGV=no	144
Opt_B	Beschaufelungs- und ungekoppelte VGV-Optimierung	Sch=base	VGV=angles	156
Opt_C	Beschaufelungs- und gekoppelte VGV-Optimierung	Sch=base	VGV=schedule	155
Opt_D$_C$	Beschaufelungs- und ungekoppelte VGV-Optimierung mit erweiterter Parametrik	Sch=all	VGV=schedule	587

Tabelle 6.3.: Übersicht der nachfolgend ausgeführten Mehrpunktoptimierungen und die jeweils verwendeten Parametersätze. Die Bezeichnungen für die Beschaufelungs- und VGV-Parametrik entsprechen dabei den in Unterabschnitt 5.1.1, Tabelle 5.1 bzw. Unterabschnitt 5.1.2, Tabelle 5.2 getroffenen Definitionen.

von der am weitesten entfernten zur nähsten Lösung sinnvoll, wenn dadurch die Liniensuche bei ausreichender Verbesserung abgebrochen werden kann. Beim vorliegenden Optimierungsproblem werden die einzelnen Auswertungen der Liniensuche jedoch parallel berechnet, wodurch immer die beste Lösung der Liniensuche als zu verwendende Schrittweite gewählt werden kann.

- Das in Schittkowski [57] beschriebene NLPQLP-Verfahren hat die Eigenschaft bei nicht erfolgreicher Liniensuche abzubrechen. Nicht erfolgreich bedeutet, dass keine Abstiegsrichtung gefunden wurde. Durch die in Unterabschnitt 5.3.2 beschriebenen Stabilitätsprobleme in der Prozesskette im Adjungiertenverfahren kann es vereinzelt zu Gradientenfehlern durch Stabilisierungsmaßnahmen kommen. Diese können dazu führen, dass die gefundene Richtung der Liniensuche keine Abstiegsrichtung ist. Um das Verfahren gegenüber solchen Prozessketten-bedingten Fehlern robuster zu machen und einen Abbruch der Optimierung zu vermeiden, wurden zwei weitere Liniensuchpunkte in negativer Abstiegsrichtung ergänzt. Demnach findet das Verfahren auch bei stark fehlerhafter Gradienteninformation verbesserte Punkte während der Liniensuche und bricht nicht ab.

Beide Veränderungen des Verfahrens sind bereits vielfach erprobt und führen zu der erhofften Beschleunigung und Robustifizierung des Verfahrens.
Jede durchgeführte Optimierung wird nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen abgebrochen und für das beste Ergebnis der Pumpgrenzabstand mit dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Intervallschachtelungsverfahren ausgewertet.

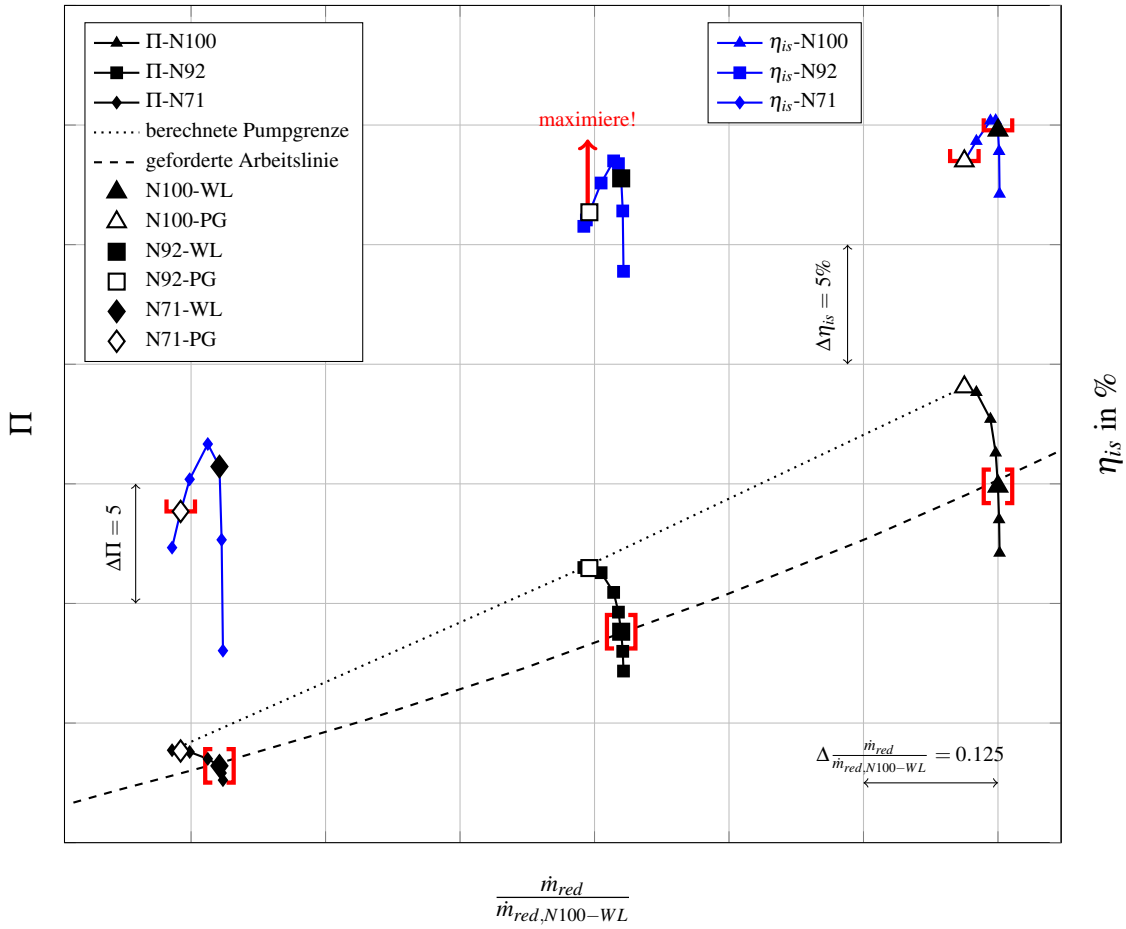


Abbildung 6.1.: Verdichterkennfeld des initialen Hochdruckverdichters. Die für die Optimierung verwendeten Betriebspunkte sind speziell gekennzeichnet. Die in Tabelle 6.1 ausgeführte Optimierungsaufgabe ist schematisch angedeutet. Die rot eingezeichneten Nebenbedingungen sind der Übersichtlichkeit halber nicht maßstabsgetreu verzeichnet und nur qualitativ zu verstehen.

6.2. Ergebnisse der durchgeführten Optimierungen

6.2.1. Optimierungsverläufe der Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C

Die Verläufe der in Tabelle 6.2 aufgeführten Zielgrößen und Nebenbedingungen der durchgeführten Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Eine Iteration umfasst dabei die Gradientenbestimmung mithilfe der in Abschnitt 4.3 beschriebenen hybriden Prozesskette sowie eine nachfolgende Liniensuche mithilfe der in Abschnitt 4.1 beschriebenen konventionellen Prozesskette. Eine Liniensuche besteht dabei aus zehn Auswertungen entlang der gefundenen Suchrichtung, wobei zwei der Auswertungen in negativer Suchrichtung ausgerichtet sind, wie bereits in Abschnitt 6.1 ausgeführt wurde. In Abbildung 6.2 ist dabei in jeder Iteration diejenige Auswertung dargestellt, welche vom NLPQLP-Verfahren als beste Lösung der Liniensuche als Ausgangspunkt für die folgende Iteration ausgewählt wurde. Die Größen sind jeweils normiert auf die Ausgangslösung dargestellt.
Alle Optimierungen haben einen ähnlichen Verlauf der Zielfunktion $\eta_{is,N92-PG}$. Die Zielgrößenverbesserung nach 16 Iterationen beträgt zwischen 1,49 und 2,04 Prozentpunkten. Gemäß dem erwarteten Potential hat die Optimierung Opt_B mit den ungekoppelt freigegebenen Verstellstatoren die größte Verbesserung, Opt_C die zweitbeste und Opt_A die kleinste Verbesserung erreicht. Insbesondere die engen Massenstromnebenbedingungen sowie die Wirkungsgradnebenbedingung am Auslegungspunkt N100-WL werden vom Verfahren voll ausgenutzt und zum Teil auch leicht verletzt. Die minimale Verletzung der unteren Grenze der Massenstromnebenbedingungen bei N100-WL um 0.01 % des Massenstromes der Basis sowie die Verletzung der Wirkungsgradnebenbediung bei N100-WL im Hundertstel-Prozentbereich beeinträchtigen die generelle Aussage der Optimierungen und deren Vergleichbarkeit untereinander nicht.
Das Ergebnis der Optimierung Opt_A führt zu einer deutlich verbesserten Zielgröße $\eta_{is,N92-PG}$ gemäß der Optimierungsaufgabe, wobei die Nebenbedingungen für die Größen $m_{red,N71-WL}$ und $\eta_{is,N100-WL}$ in der besten Auswertung in Iteration 14 leicht, jedoch in einer für die Bewertbarkeit nicht relevanten Größenordnung verletzt sind. Das Verfahren findet in der Folge nicht wieder ein einen gültigen Bereich zurück. Gründe dafür sind, zum einen der für größere Schrittweiten in Suchrichtung nicht mehr konvergierende Betriebspunkt N71-PG und zum anderen der Sprung des Betriebspunktes N71-WL auf eine Sekundärcharakteristik mit deulich verletzten Nebenbedingung wie die Iterationen 15 und 16 in Abbildung 6.2 zeigen. Das Verfahren beaufschlagt die nicht konvergierten Auswertungen mit schlechten Zielgrößenwerten sowie schlechten Werten für die Nebenbedingungsgrößen. Die verbleibenden konvergierenden Auswertungen überschreiten die $m_{red,N71-WL}$-Nebenbedingung deutlich und stärker als dies für das Verfahren im Rahmen der Gradientenbestimmung sichtbar war. Lediglich die sehr kleinen Schrittweiten der Liniensuche konvergieren, werden positiv bewertet und bilden die Basis für die nachfolgende Iteration. Beide Phänomene, die plötzliche Nichtkonvergenz sowie der Sprung auf eine geänderte Charakteristik sind Unstetigkeiten der Zielgröße und somit problematisch für gradientenbasierte Verfahren. In Unterabschnitt 6.2.3 wird in Bezug auf Opti_D$_C$ auf ein ähnliches Verharren im lokalen Minimum näher eingegangen.
Die Optimierungen Opt_B und Opt_C erfüllen alle Nebenbedingungen bis auf die Neben-

bedingung $\eta_{is,N100-WL}$, welche um wenige Hundertstel Prozentpunkte verletzt wird. Dies ist angesichts der Größenordnung der Änderung der Wirkungsgrade im Pumpgrenzbereich zu vernachlässigen und ändert nichts an der Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Lediglich die Nebenbedingung $\eta_{is,N71-PG}$ ist während aller Optimierungen unkritisch und niemals aktiv. Jedoch zeigt das z.T. sprunghafte Verhalten des Verlaufs erneut den Wechsel zwischen verschiedenen Charakteristiken auf der N71-Drehzahllinie.

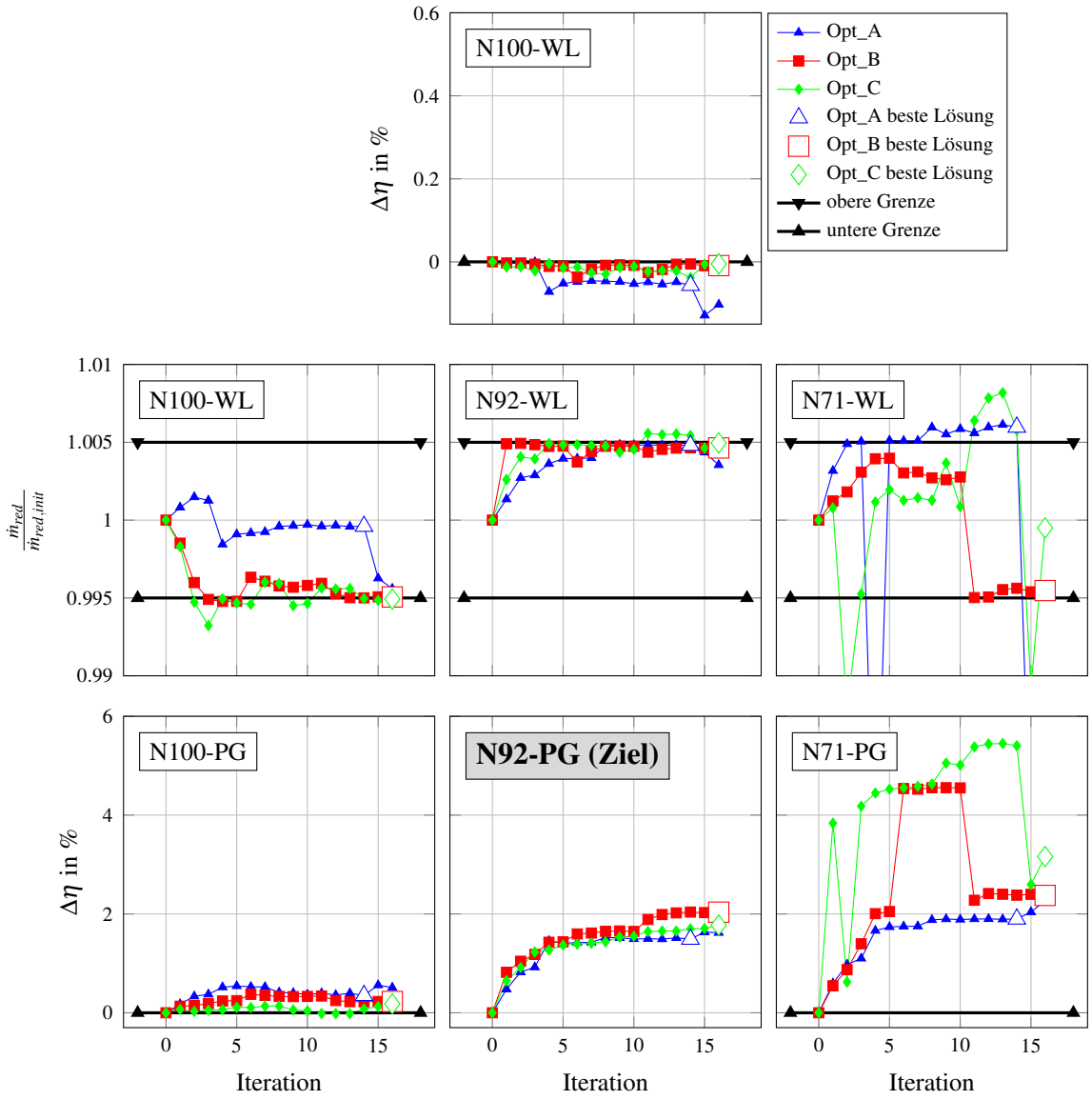


Abbildung 6.2.: Verläufe der Zielgröße sowie der Nebenbedingungen für die Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C. Der Startwert ist für alle Optimierungen gleich und erfüllt alle Nebenbedingungen.

6.2.2. Strömungsphysikalische Auswertung der Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C

Auf Basis der in Unterabschnitt 6.2.1 ermittelten Optimierungsverläufe, wurde jede Optimierung nach 16 Iterationen beendet. Die Optimierungen sind ggf. noch nicht komplett auskonvergiert, haben jedoch ein deutliche Verbesserung der Zielfunktion erreicht. Der Verlauf der Zielgröße $\eta_{is,N92-PG}$ über der Iterationszahl ist bereits deutlich abgeflacht. Die bis dahin jeweils beste Lösung ist in Abbildung 6.2 markiert und wurde jeweils als Basis für eine Kennfeldberechnung herangezogen. Dabei wurde mit dem in Unterabschnitt 5.1.4.2 beschriebenen Vorgehen die Pumpgrenze sowie der Pumpgrenzabstand bestimmt. Die Ergebnisse bezüglich der Zielfunktion und der Nebenbedingungen aus Tabelle 6.1 sind in Tabelle 6.4 zu-

Betriebspunkt	Größe Größe	untere Grenze	obere Grenze	Basis	Opt_A	Opt_B	Opt_C
N100-WL	$\Delta\eta_{is}$	0%		0%	-0.057%	-0.009%	-0.005%
N100-WL	$\dot{m}_{red}/\dot{m}^*_{red}$	0.995	1.005	1	0.9996	0.9951	0.9949
N92-WL	$\dot{m}_{red}/\dot{m}^*_{red}$	0.995	1.005	1	1.0048	1.0046	1.0050
N71-WL	$\dot{m}_{red}/\dot{m}^*_{red}$	0.995	1.005	1	1.0060	0.9955	0.9995
N100-WL	Π/Π^*	0.995	1.005	1	1.0000	0.9996	0.9996
N92-WL	Π/Π^*	0.995	1.005	1	1.0005	1.0003	1.0004
N71-WL	Π/Π^*	0.995	1.005	1	1.0005	0.9995	0.9996
N100-WL	$\Delta PGA_{\dot{m}_{red}}$	0%		0%	+2.21%	+4.20%	+2.19%
N92-WL	$\boldsymbol{\Delta PGA_{\dot{m}_{red}}}$	**0%**		**0%**	**+2.97%**	**+2.78%**	**+3.98%**
N71-WL	$\Delta PGA_{\dot{m}_{red}}$	0%		0%	+6.19%	+3.65%	+1.37%

Tabelle 6.4.: Übersicht der Optimierungsergebnisse nach erfolgter Kennfeldberechnung bzgl. der Optimierungsaufgabe aus Tabelle 6.1. Das Zielfunktional ist fett markiert. Verletzte Nebenbedingungen sind rot, erfüllte Nebenbedingungen grün gesetzt.

sammengefasst und die Kennfelder in Abbildung 6.3 dargestellt. Wie bereits in Abbildung 6.2 deutlich wurde, waren insbesondere die Massenstromnebenbedingungen aller Drehzahllinien sowie die Wirkungsgradnebenbedingung bei N100-WL herausfordernd für das Optimierungsverfahren. Die besten Lösungen der drei Optimierungen liegen bei diesen Größen jeweils am Rand des zulässigen Intervalls bzw. marginal darüber hinaus. Bei Optimierung Opt_A wurde aus diesem Grund nicht die beste Auswertung der letzten Iteration als die beste Lösung in Betracht gezogen, sondern die in Abbildung 6.2 markierte Lösung aus Iteration 14. Die aus Überlegungen in Unterabschnitt 5.1.4.1 heraus vernachlässigten Nebenbedingungen für das Totaldruckverhältnis Π konnten erwartungsgemäß, mit gutem Abstand zu den zulässigen Grenzen, eingehalten werden. Auch die nur indirekt kontrollierten Nebenbedingungen für die Pumpgrenzabstände konnten eingehalten werden. Der als Zielgröße definierte Pumpgrenzabstand auf der Drehzahllinie N92 konnte in allen Optimierungen deutlich um 2.78 - 3.98 %-Punkte verbessert werden. Auch die nur indirekt kontrollierten Nebenbedingungen für die Pumpgrenzabstände der beiden anderen Drehzahllinien konnten eingehalten bzw. zum Teil sogar deutlich verbessert werden. Die deutlichen Verbesserungen müssen da-

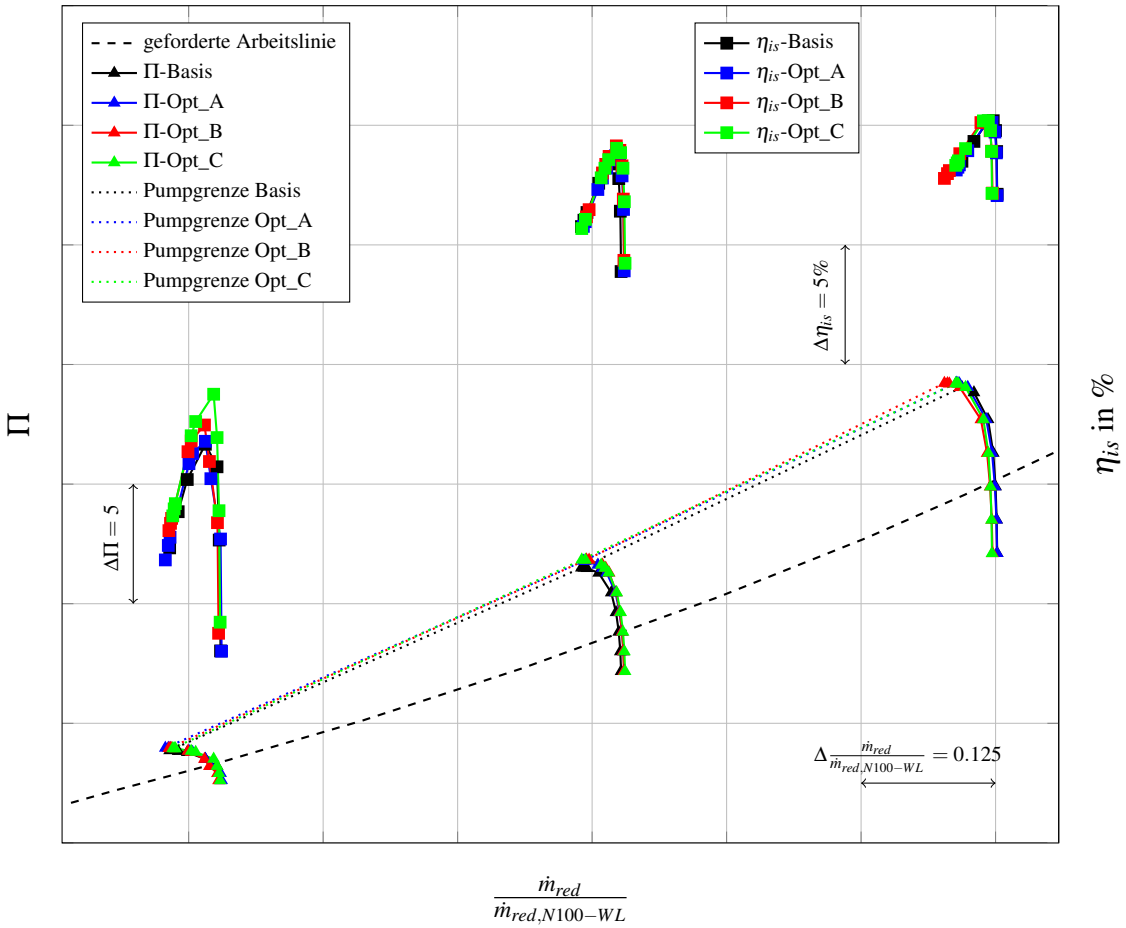
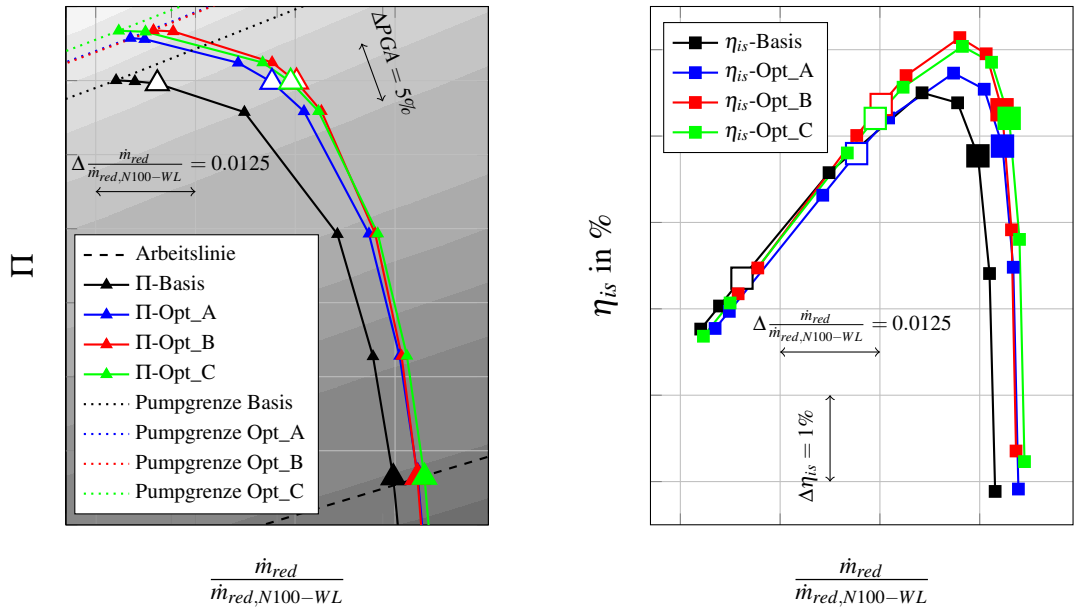


Abbildung 6.3.: Verdichterkennfelder der drei Optimierungsergebnisse Opt_A, Opt_B und Opt_C im Vergleich zur Initiallösung. Die im Intervallverfahren ermittelten Pumpgrenzpunkte sind jeweils mit der gepunkteten Linie verbunden.

bei als positivier Nebeneffekt betrachtet werden und waren nicht Ziel der Optimierung. Abgesehen von den marginal verletzten Nebenbedingungen zeigt sich, dass die Erfüllung der Ersatz-Optimierungsaufgabe in Tabelle 6.2 auch zu einem Erfüllen der eigentlichen Optimierungsaufgaben in Tabelle 6.1 führt. Dies legitimiert die gewählte Vorgehensweise.
In den folgenden Betrachtungen wird sich auf die Gründe und Unterschiede in der Verbesserung des Pumpgrenzabstandes bei Drehzahl N92 konzentriert. Wie in Abbildung 6.4a zunächst deutlich wird, sind die pumpgrenznahen und als N92-PG bezeichneten Punkte konstanten Gegendrucks in den jeweiligen Optimierungen deutlich von der Pumpgrenze entfernt. Wie es in Unterabschnitt 5.1.4.2 theoretisch beschrieben wurde, konnte der Wirkungsgrad an diesen Punkten verbessert und damit ein stärkeres Androsseln des Verdichters bei der jeweiligen Drehzahllinie ermöglicht werden. Mit dem stärkeren Androsseln über N92-PG hinaus ist ein verbesserter Pumpgrenzabstand verbunden.
Gründe für die Verbesserung der Zielgröße werden vor allem in Abbildung 6.5 deutlich. Al-



(a) Π-Kennlinie mit Pumpgrenze, Arbeitslinie und dem Pumpgrenzabstand als Hintergrundkontur

(b) Wirkungsgradkennlinie

Abbildung 6.4.: Ausschnitt aus dem in 6.3 dargestellten Kennfeld für die Kennlinie N92. Große ausgefüllte Symbole beschreiben den Betriebspunkt N92-WL, große weiß gefüllte Symbole den Betriebspunkt N92-PG.

le Optimierungen haben zu einem deutlich geringeren *Überrollen* der Stufen fünf und sechs geführt. Mit *Überrollen* wird eine Verringerung des Stufen-Totaldruckverhältnisses bei zunehmender Drosselung der Stufe bezeichnet. Dies ist auf stark ansteigende Verluste beispielsweise durch beginnende lokale Strömungsablösungen zurückzuführen. Demnach können in den Stufen fünf und sechs in Abbildung 6.5 die Bereiche links des Π-Maximums als übergerollt bezeichnet werden. Auch in den Stufen eins und zwei ist das pumpgrenznahe Verhalten verbessert, die Kennlinien verlaufen im Bereich kleinen Durchsatzes steiler. Abgesehen von Opt_B in Stufe drei konnte, wie in Abbildung 6.6 deutlich wird, in allen direkt geometrisch veränderlichen Stufen eins bis vier der isentrope Stufenwirkungsgrad im pumpgrenznahen Bereich verbessert werden.

Die Verstellung der neu implementierten Verstellleitgitter wurde von beiden Optimierungen Opt_B und Opt_C ausgenutzt. Die im jeweils besten Ergebnis verwendeten resultierenden Verstellwinkel-Deltas sind in Abbildung 6.7 dargestellt. Es wird deutlich, dass die freiere Parametrisierung in Opt_B zu größeren Auslenkungen führt als die gekoppelte Parametrisierung in Opt_C. Die Änderungen bewegen sich im Bereich weniger Grad und zeigen keinen eindeutigen Trend.
Die Verstellwinkelkombination der besten Lösung von Opt_B hätte nicht mit der gekoppelten Parametrik aus Unterabschnitt 4.4.2 erzeugt werden können. Dies kann mithilfe einer Optimierung der Kinematik auf Basis der in Tabelle 5.2 dargestellten Parameter und dem Ziel

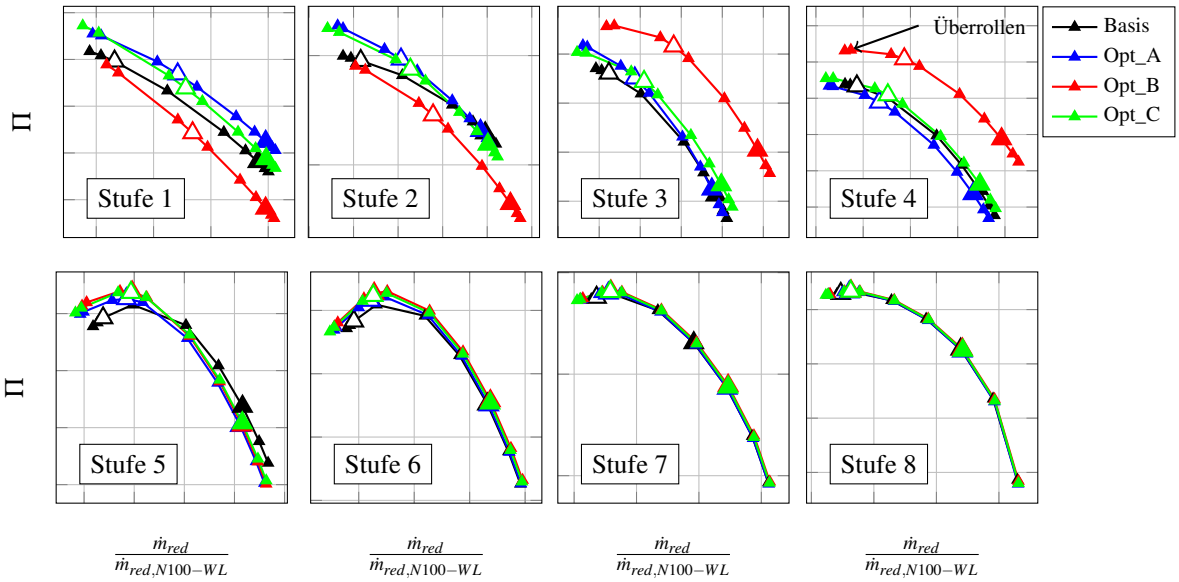


Abbildung 6.5.: Stufenkennfelder für die Kennlinie N92 aller Verdichterstufen. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,N100-WL}} = 0.0125$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\Pi = 0.025$.

einer Einstellung der Verdrehwinkel aus Opt_B gezeigt werden. Die Ergebnisse dieser Optimierung und dazugehörige Überlegungen sind in Anhang A.6 dargestellt. Die Verstellwinkel aus Opt_B konnten mit der gekoppelten Parametrisierung nicht annähernd erreicht werden. Jedoch wird in Anhang A.6 gezeigt, dass die in Opt_C resultierende Verstellwinkelkombination sehr nah an derjenigen Verstellwinkelkombination ist, die im Rahmen der Möglichkeiten der gekoppelten Parametrik geometrisch am nähsten zu der Winkelkombination von Opt_B ist.

Gemäß der Optimierungsverläufe aus Unterabschnitt 6.2.1 hat die Optimierung mit der freiesten Parametrik Opt_B auch die größte Verbesserung hinsichtlich der Ersatzzielgröße $\eta_{is,N92-PG}$ bei konstantem Gegendruck erzielt. Aus Abbildung 6.4a und Tabelle 6.4 wird nun deutlich, dass Opt_B in Bezug auf den tatsächlichen Pumpgrenzabstand nicht die beste Lösung darstellt, sondern etwa gleichwertig mit Opt_A und schlechter als Opt_C ist. In Abbildung 6.4b wird klar, dass der Wirkungsgrad bei konstantem Gegendruck an den in der Optimierung verwendeten Punkten N92-PG in Opt_B am stärksten vergrößert werden konnte. Jedoch kann diese Lösung nicht so stark zusätzlich angedrosselt werden wie die beste Lösung von Opt_A. Ein stärkeres Abfallen der Wirkungsgrade zur Pumpgrenze hin wird im Vergleich zu Opt_A und Opt_C in Abbildung 6.4b deutlich.
Ein Grund für die etwas kleinere Verbesserung des Pumpgrenzabstandes bei Optimierung Opt_B ist die stärkere Belastung von Rotor 4. Wie bereits in Abbildung 6.7 deutlich wird, ist das Verstellgitter S3 um etwa vier Grad aufgedreht worden. Dies führt in Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen in Unterabschnitt 2.1.1.3 und Abbildung 2.6a zu einer angehobenen Kennlinie im Stufenkennfeld von Stufe 4, welches in Abbildung 6.8 dargestellt

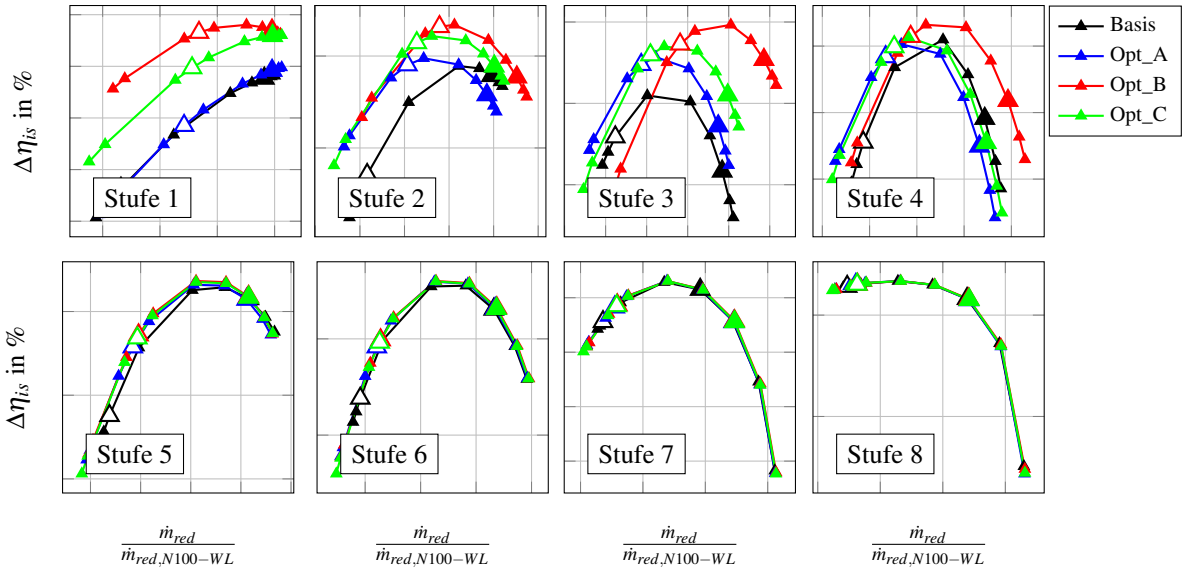


Abbildung 6.6.: Wirkungsgrad-Stufenkennfelder für die Kennlinie N92 aller Verdichterstufen. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,N100-WL}} = 0.0125$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\eta_{is} = 1\%$-Punkt.

ist. Während die Kennlinie für Stufe 4 in Abbildung 6.5 für Opt_B vom entdrosselten bis zum in der Optimierung verwendeten Drosselgrad N92-PG parallel zu den Kennlinien der anderen Optimierungen und der Basis verläuft, flacht die Kurve bei zunehmendem Androsseln stärker ab. Unmittelbar vor der Pumpgrenze kommt es in Stufe vier sogar zum leichten Überrollen. Das weitere Androsseln führt nicht mehr zu einem weiteren Druckanstieg, sondern das Totaldruckverhältnis sinkt. Auch der Stufenwirkungsgrad in Abbildung 6.6 fällt infolge dessen stärker ab als in Opt_A und Opt_C. Dies wirkt sich auch auf den Verlauf des Gesamtwirkungsgrades nahe der Pumpgrenze in Abbildung 6.4b aus. Da die Prozesskette den Wirkungsgrad am vermeintlich pumpgrenznahen Betriebspunkt N92-PG auf Basis eines konstanten Gegendruckes bestimmt hat und bei diesem Gegendruck noch keine deutliche Wirkungsgradverrin-

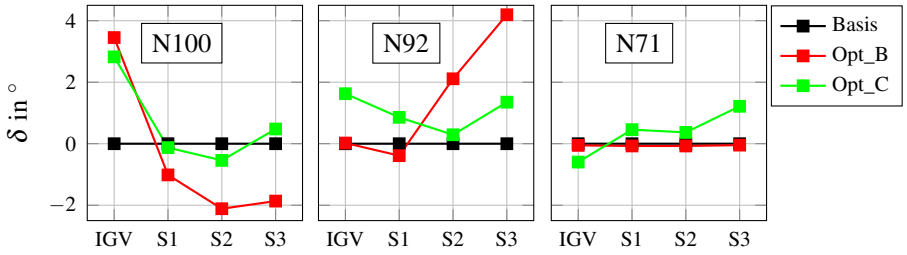


Abbildung 6.7.: Verstellung der Leitgitter relativ zur Ausgangsstellung. Positive Werte bedeuten ein Aufdrehen, d.h. eine druckseitigere Anströmung des stromab befindlichen Rotors, wie es in Abbildung 2.7 eingeführt wurde.

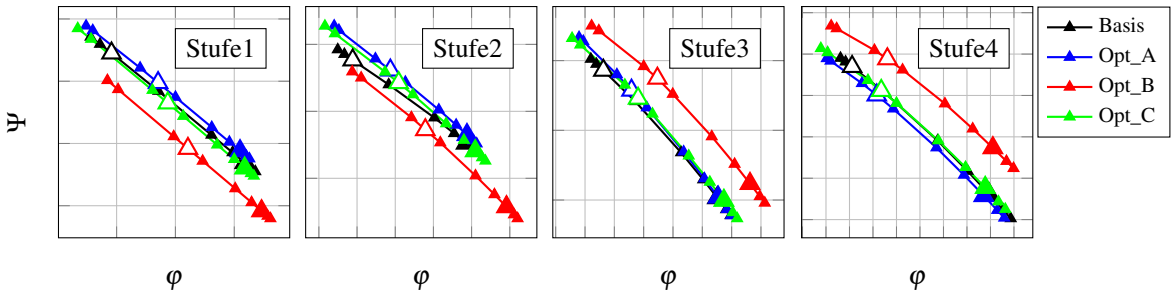


Abbildung 6.8.: Dimensionslose Stufenkennfelder für die Stufen 1-4 für die Drehzahl N92. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\Psi = 0.05$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\varphi = 0.01$.

gerung zu beobachten ist, konnte die Optimierung den Effekt der pumpgrenznahen Wirkungsgradverringerung nicht berücksichtigen. Durch das insgesamt hinsichtlich des Pumpgrenzabstandes verbesserten Verhaltens des Verdichters bei Drehzahl N92, kann deutlich weiter als N92-PG angedrosselt werden. In Unkenntnis dessen hat der Optimierungsalgorithmus Stator 3 folgerichtig aufgedreht. Dieses Aufdrehen hat am Betriebspunkt N92-PG noch keine negativen Auswirkungen, wie die Profilverlustpolaren in Abbildung 6.9 für Stator 3 und Rotor 4

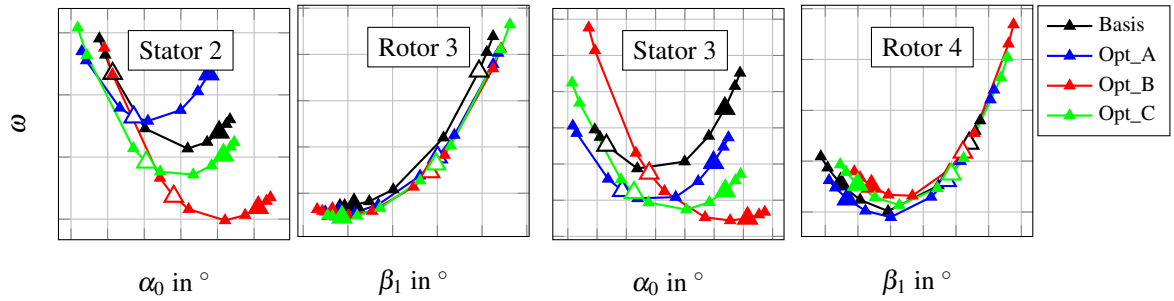


Abbildung 6.9.: Mit dem dynamischen Eintrittsdruck entdimensionalisierter Totaldruckverlust über dem Schaufel-relativen Anströmwinkel für die Kennlinie N92. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\alpha_0/\Delta\beta_0 = 1°$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\omega = 0.005$.

zeigen. Das weitere Androsseln zur Pumpgrenze hin zeigt jedoch in Opt_B deutlich größere Auswirkungen auf den Verlustzuwachs in Stator 3 und Rotor 4 als in den anderen Optimierungen. Infolge der gestiegenen Verluste in Stator 3 sinkt der Stufenwirkungsgrad der Stufe 3 ausgehend von N92-PG zur Pumpgrenze hin, wie Abbildung 6.6 zeigt. Die druckseitige Anströmung vom Rotor 4 und das damit steigende Ψ für Stufe 4 führen zu höheren Verlusten in Rotor 4 und letztlich einem Überrollen von Stufe 4.

6.2.3. Beschaufelungs- und ungekoppelte VGV-Optimierung mit erweiterter Parametrik (Opt_D$_C$)

Um den Einfluss einer detaillierteren Parametrik zu evaluieren wird, auf Basis der besten Lösung von Opt_C aufsetzend, eine weitere Optimierung Opt_D$_C$ durchgeführt. Neben den Schaufelbasisparametern werden nun auch die Splineparameter zur Druck- und Saugseitengestaltung hinzugenommen, welche in Unterabschnitt 4.1.1 beschrieben wurden. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, erhöht sich dadurch die Parameterzahl auf 587. Zusätzlich werden geometrische Nebenbedingungen nötig. Die Spline-Parameter führen zu größeren Freiheiten in der Gestaltung der Druck- und Saugseitenverläufe. Um eine geometrische Einschnürung wie sie in Unterabschnitt 5.1.4.3 dargestellt ist, zu verhindern, werden an elf radialen Schnitten jeder veränderlichen Verdichterschaufel Nebenbedingungen etabliert, die das Maß der Einschnürung über einer unteren Grenze halten sollen. Die Berechnung der Einschnürung findet im nicht auf Basis des Adjungiertenverfahrens betriebenen Teil der Prozesskette statt. Somit führen diese Nebenbedingungswerte auch nicht zu einer Erhöhung der Anzahl an Berechnungen mithilfe des Adjungiertenverfahrens.
Die Verläufe der Zielgröße und der aerodynamischen Nebenbedingungen sind in Abbbildung 6.10 dargestellt. Dabei werden wie in Unterabschnitt 6.2.1 nur die Bewertungen aufgetragen, welche als beste Lösung der Liniensuche bewertet wurden und als Ausgangspunkt der nächsten Iteration verwendet werden. Es wird deutlich, dass der in Opt_C bereits deutlich abgeflachte Verlauf der Zielgröße durch die erweiterte Parametrik nochmals deutlich verbessert werden kann. Dies wird teilweise jedoch durch leichte Nebenbedingungsverletzungen bei Massenstrom und Wirkungsgrad bei N100-WL sowie bei N100-PG erkauft. Die Nebenbedingungsverletzungen können in der Folge durch das Optmierungsverfahren nicht mehr kompensiert werden. Das Verfahren konvergiert zu einer Lösung unter leicht verletzten Nebenbedingungen. In Abbildung 6.13 sind, im Unterschied zur Auftragung in Abbildung 6.10, jeweils alle Ergebnisse der Liniensuchen für die Iterationen 24, 25 und 26 abgebildet. Die Liniensuche führt zehn Bewertungen, beginnend mit der größten Schrittweite, durch. Die beiden letzten Bewertungen sind in negative Suchrichtung gerichtet, wie in Abschnitt 6.1 erläutert wurde. Anhand des Anstiegs der Verläufe in der Nähe der Stelle $\sigma = 0$ wird deutlich, dass das Verfahren mit den entsprechenden Suchrichtungen dahin strebt, die Nebenbedingungsverletzungen zu verringern. Die Nichtlinearität bei größer werdender Schrittweite kann durch die Linearisierung um Punkt $\sigma = 0$ nicht vorhergesehen werden. In den Betriebspunkten N71-WL und N71-PG führt die gewählte Suchrichtung jedoch zur Nichtkonvergenz der Strömungslösung, was in Abbildung 6.13 für die drei Liniensuchen durch graue Symbole gekennzeichnet wird. In einem Betriebspunkt nicht konvergierte Lösungen werden durch das Verfahren schlecht bewertet. Lediglich bei kleinen Schrittweiten konvergieren diese Betriebspunkte. Das Verfahren ermittelt in jeder Iteration erneut korrekte lokale Sensitivitätsinformationen, welche dann in der Liniensuche zu Abstürzen führen. Das Verfahren verharrt aufgrund der nur sehr kleinen Schrittweiten der Liniensuche in der Nähe der bis dahin gefundenen Lösung.
Die Bewertung von Iteration 21 wurde trotz der leicht verletzten Nebenbedingungen für eine Kennfeldauswertung herangezogen und den Ergebnissen aus Opt_C in Abbildung 6.11 gegenübergestellt. Ausgewertet für die Drehzahllinie N92 wird in Abbildung 6.11a deutlich, dass Opt_D$_C$ zu einem steileren Verlauf der Kennlinie im Vergleich zu Opt_C geführt hat.

Der deutlich verbesserte Wirkungsgrad an Betriebspunkt N92-PG führt jedoch, wie bereits bei Opt_B in Unterabschnitt 6.2.2 beobachtet, nicht zu einer Verbesserung des Pumpgrenzabstandes gegenüber Opt_C. In Abbildung 6.11b wird deutlich, dass ausgehend von N92-PG der Wirkungsgrad zur Pumpgrenze hin stärker abnimmt als bei der Basis und bei Opt_C. Ein stärkeres Androsseln ist nicht möglich. Auch hier ist die Ursache wiederum darin zu suchen, dass der vermeintlich pumpgrenznahe Betriebspunkt N92-PG aufgrund der generellen Verbesserung die mit Opt_C erreicht wurde, nicht mehr in der Nähe der Pumpgrenze liegt und das Verhalten in Pumpgrenznähe dem Verfahren nicht zur Verfügung steht.

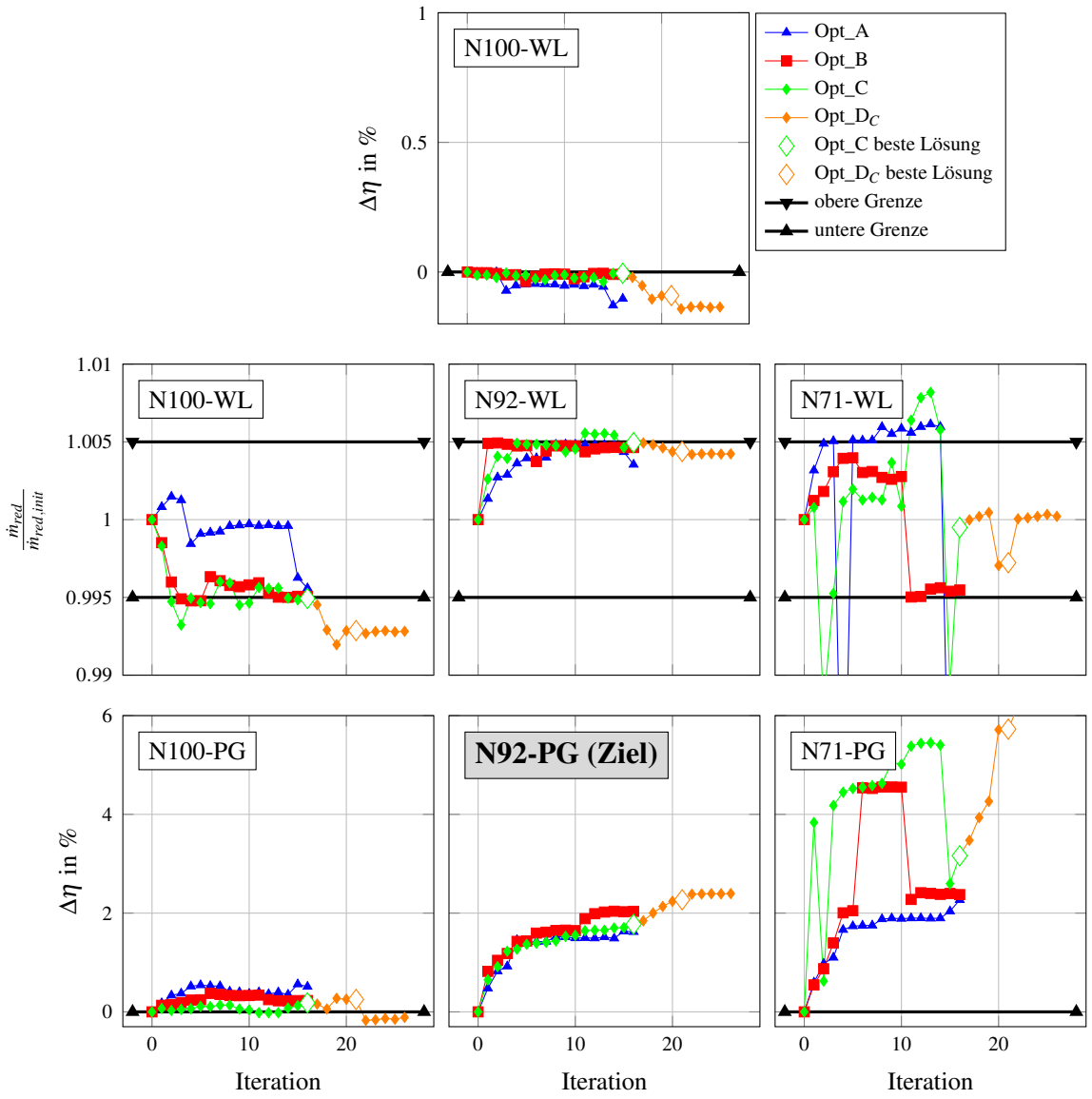
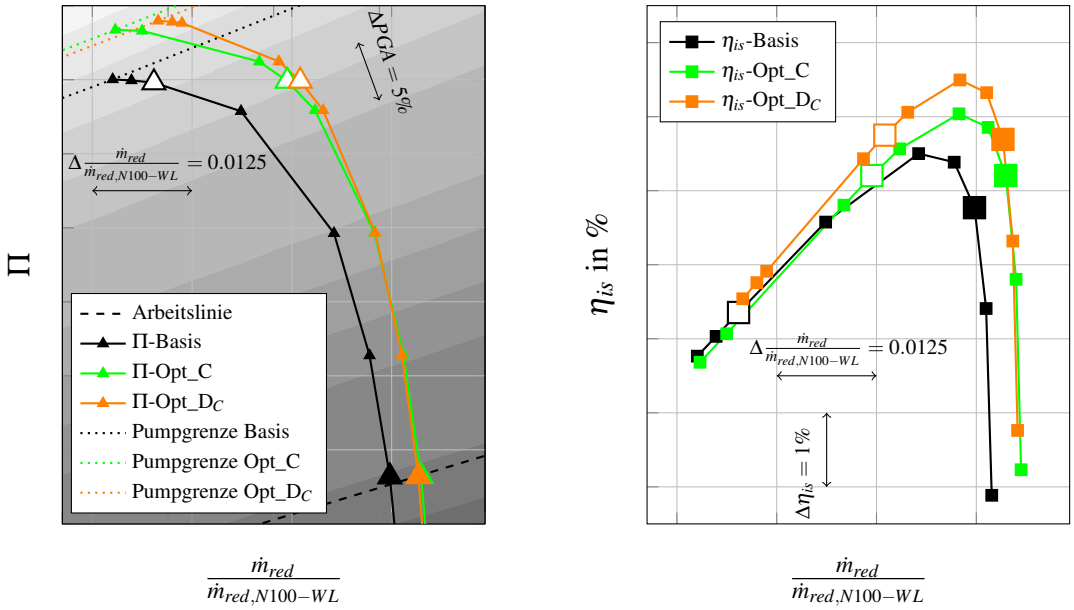


Abbildung 6.10.: Verläufe der Zielgröße sowie der Nebenbedingungen für die Optimierungen Opt_A, Opt_B, Opt_C und Opt_D$_C$, welche auf Basis der besten Lösung von Opt_C gestartet wurde.



(a) Π-Kennlinie mit Pumpgrenze, Arbeitslinie und dem Pumpgrenzabstand als Hintergrundkontur

(b) Wirkungsgradkennlinie

Abbildung 6.11.: Ausschnitt aus den Verdichterkennfeldern der besten Lösungen von Opt_C und Opt_D$_C$ für die Kennlinie N92. Große ausgefüllte Symbole beschreiben den Betriebspunkt N92-WL, große weiß gefüllte Symbole den Betriebspunkt N92-PG.

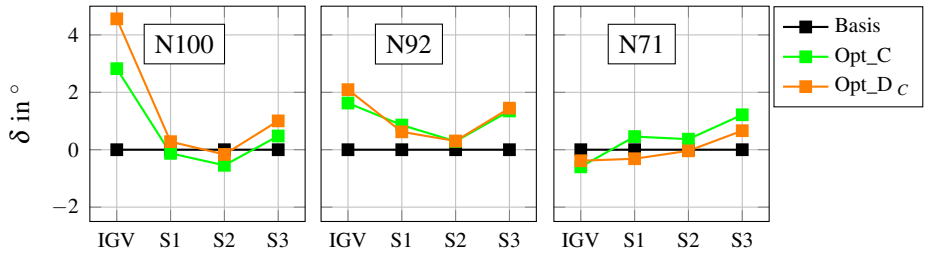


Abbildung 6.12.: Verstellung der Leitgitter relativ zur Ausgangsstellung. Positive Werte bedeuten ein Aufdrehen, d.h. eine druckseitigere Anströmung des stromab befindlichen Rotors.

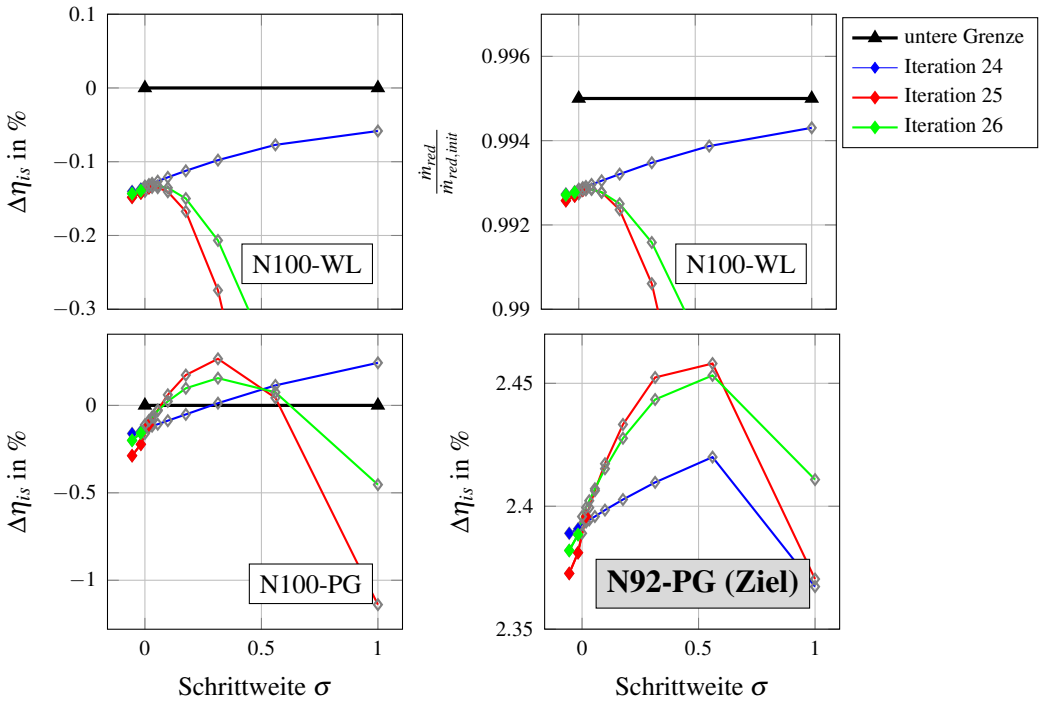


Abbildung 6.13.: Darstellung der Auswertungen der Liniensuche für die Iterationen 24, 25 und 26. Für ausgegraute Schrittweiten sind die Betriebspunkte N71-WL oder N71-PG nicht konvergiert und damit ungültig. Alle Liniensuchen zeigen an Stelle 0 in Richtung geringerer Nebenbedingungsverletzungen.

6.3. Aufwandsbetrachtungen

Für die in Abschnitt 6.1 beschriebenen Optimierungen wurde die in Unterabschnitt 4.3.2 vorgestellte hybride Prozesskette verwendet. Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde, ist die hybride Vorgehensweise im Vergleich zur konventionellen Vorgehensweise aus Abschnitt 4.1 bei einer großen Zahl an Optimierungsvariablen und wenigen Zielgrößen und Nebenbedingungen in Bezug auf Rechenaufwand und Durchlaufzeit vorteilhaft. Der Rechenaufwand wird dabei in CPU-Stunden ausgedrückt. Dabei werden auch Leerlaufzeiten, wie sie etwa bei ungünstiger Lastverteilung bei parallelisierten Rechnungen auftreten, mitgezählt. Die CPU-Stunden sind demnach ein Produkt aus Laufzeit und der Anzahl der beteiligten CPUs.
Berechnungen mithilfe des in Unterabschnitt 3.3.2 vorgestellten Reverse Accumulation Ansatzes nutzen den Rückwärtsmodus des Algorithmischen Differenzierens für die zu berechnenden Ableitungsterme. Dafür ist das speicherintensive Aufzeichnen des in Unterabschnitt 3.2.2.2 beschriebenen Tapes notwendig. Die durchgeführten Reverse Accumulation Berechnungen mit adjointTRACE führen insgesamt zu einem um circa Faktor zehn erhöhten Arbeitsspeicherbedarf verglichen zu einer konventionellen primalen Auswertung mit TRACE. Dies ist bei der Auswahl des zu verwendenden Rechners zu beachten.
Um den Vorteil der hybriden Prozesskette bezüglich Durchlaufzeit und benötigter Rechnerressourcen in CPU-Stunden zu quantifizieren sollen diese im Folgenden zunächst anhand der Optimierungen Opt_C und Opt_D_C abgeschätzt werden, bevor in Unterabschnitt 6.3.2 der Vergleich zur konventionellen Prozesskette gezogen wird.

6.3.1. Durchlaufzeit und CPU-Stunden

Dazu wurden zunächst die Durchschnittswerte der Durchlaufzeiten sowie der CPU-Zeiten der folgenden Prozessketten-Teile bestimmt:

- Geometriegenerierung (für alle drei Geometrien/Kennlinien gleich)
- 3D-Vernetzung (für alle drei Geometrien/Kennlinien gleich)
- Primale Strömungslösung und Auswertung zur Gradientenberechnung der hybriden Prozessekette (TRACE/POST, 64 CPUs pro Betriebspunkt)
- Primale Strömungslösung und Auswertung für Rechnungen der Liniensuche (TRACE/POST, 32 CPUs pro Betriebspunkt (nicht 64, damit alle zehn Bewertungen der Liniensuche an allen Betriebspunkten mit den zur Verfügung stehenden CPUs parallel berechnet werden können), wird auch als Referenz für eine TRACE-Rechnung zur Gradientenberechnung der konventionellen Prozesskette verwendet)
- Auswertung und Strömungslösung im Adjungiertenverfahren aller benötigter Funktionale eines Betriebspunktes (adjPOST/adjTRACE, 64 CPUs pro Zielgröße)
- Sensitivitätmodus (24 CPUs pro Betriebspunkt, in Unterabschnitt 4.3.2 vorgestellt)

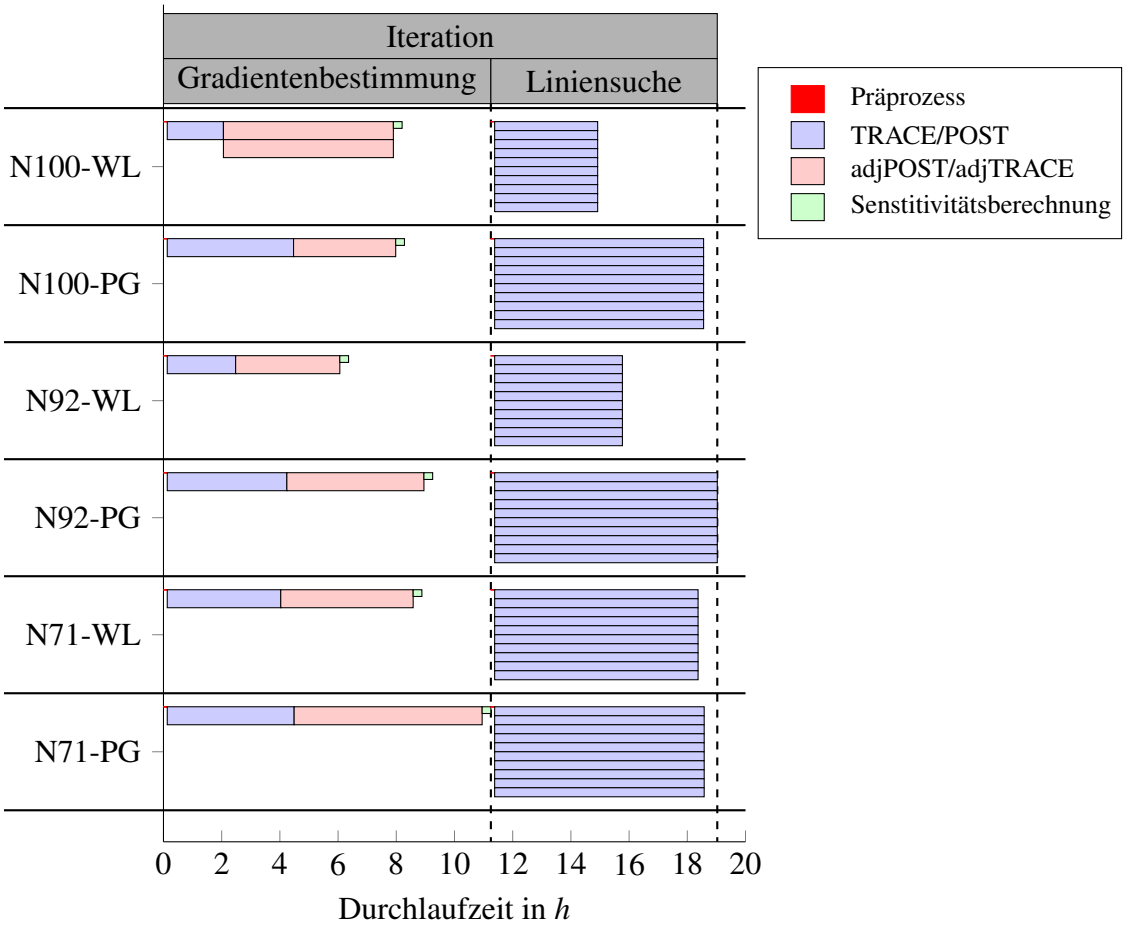


Abbildung 6.14.: Darstellung der berechneten Durchlaufzeit für eine Optimierungsiteration auf Basis der hybriden Prozesskette in der Gradientenbestimmung und der konventionellen Prozesskette in der Liniensuche. Die Breite der jeweiligen Balken skaliert mit der Anzahl der an der Berechnung beteiligten CPUs.

Auf Basis dieser in Tabelle A.1 in Anhang A.7 dargestellten Daten wurden die Aufwände für eine Iteration des verwendeten Gradientenverfahrens graphisch in Abbildung 6.14 dargestellt. Die Optimierungsiteration beim NLPQLP-Verfahren besteht wie in Abschnitt 6.1 erläutert wurde, aus der Gradientenberechnung sowie einer darauf folgenden Liniensuche. Für die Gradientenberechnung wurde die hybride Prozesskette, für die Liniensuche die konventionelle Prozesskette verwendet. Es werden je zehn Rechnungen für eine Liniensuche durchgeführt. Die Liniensuche kann erst gestartet werden, wenn die Gradienteninformation aller Betriebspunkte vorliegt. Die Erstreckung der Linien von links nach rechts stellt die Durchlaufzeit des jeweiligen Prozesskettenteils dar. Die vertikale Erstreckung ist ein Maß für die Anzahl verwendeter CPUs. Da die verwendeten Basisdaten aus Tabelle A.1 in Anhang A.7 auf Durchschnittswerten der einzelnen Prozesskettenteile beruhen, ist die Durchlaufzeit einer gesamten Iteration des Optimierungsverfahrens, wie sie sich in Abbildung 6.14 zu 19,03 h ergibt, nicht repräsentativ abgeschätzt. Die durchschnittlichen Durchlaufzeit einer Gesamtite-

ration ist größer. Die gewählte Darstellungsform ermöglicht jedoch eine Vergleichbarkeit der Aufwände zwischen konventioneller und hybrider Prozesskette sowie bei Verwendung unterschiedlich vieler Variablen. Der Prozesskettenanteil *Präprozess* ist in Abbildung 6.14 am Anfang von Gradientenberechnung und Liniensuche nur als dünner und kurzer roter Strich erkennbar. Dies ist eine vereinfachte Darstellung. Da der Präprozess in der hybriden Prozesskette bei Verwendung von n Variablen $n+1$ mal ausgeführt wird und die ausgelenkten Netze erst im Sensitivitätsmodus benötigt werden, geht nur eine Präprozesskette in die Durchlaufzeit ein. Die n fehlenden Präprozess-Anteile werden während der primalen und adjungierten Strömungslösungen durchgeführt. Sie sind in Abbildung 6.14 der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet, werden aber bei der Abschätzung der CPU-Zeit berücksichtigt.
Die Anzahl der benötigen CPU-Stunden einer Gesamtiteration am Beispiel von Opt_C mit 155 Variablen ergeben sich zu 15204 CPU· h. Diese setzen sich aus folgenden Anteilen zusammen:

- 3366 CPU· h für die Gradientenberechnung, bestehend aus:
  - $(155+1)\cdot 3$ Geometriegenerierungen und Vernetzungen =>145.08 CPU· h
  - 6 Strömungslösungen und -auswertungen (eine je Betriebspunkt) => 1343.51 CPU· h
  - 7 adjungierten Strömungslösungen und -auswertungen (eine je Zielgröße) => 1834.20 CPU· h
  - 6 Sensitivitätswertberechnungen (eine je Betriebspunkt) => 43.20 CPU· h
- 11838 CPU· h für die Liniensuche, bestehend aus:
  - $10\cdot 3$ Geometriegenerierungen und Vernetzungen => 9.30 CPU· h
  - 10 Strömungslösungen und -auswertungen je Betriebspunkt => 11829 CPU· h

Es wird deutlich, dass die Liniensuche einen großen Teil der CPU-Stunden auf sich vereint. Um diese jeweils zehn Berechnungen an sechs Betriebspunkten mit jeweils 32 CPUs allesamt parallel durchzuführen, müssen $10\cdot 6\cdot 32 = 1920$ CPUs gleichzeitig zur Verfügung stehen.
Aus Abbildung 6.14 wird ersichtlich, dass der Betriebspunkt N71-PG aufgrund der langen Konvergenzzeiten der Berechnung im Adjungiertenverfahren im Bereich der Gradientenberechnung Durchlaufzeit-limitierend ist. Im Bereich der Liniensuche bestimmt der Betriebspunkt N92-PG die Durchlaufzeit. Die abgeschätzte Durchlaufzeit einer Iteration des Optimierungsverfahrens von 19,03 Stunden zeigt, dass Optimierungen mit 17 Iterationen, wie sie in Unterabschnitt 6.2.1 durchgeführt wurden, sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Die auf Basis der Durchschnittswerte ermittelte Durchlaufzeit einer Optimierung beträgt bei 17 Iterationen etwa 13,5 Tage. Diese Zahl gilt dank der hybriden Prozesskette unabhängig von der Anzahl der verwendeten Variablen. Diese Aussage gilt unter der Voraussetzung, dass während der Zeit der primalen und adjungierten Strömungslösung alle benötigten 3D-Netze erzeugt werden können. Gründe für eine in der Praxis zum Teil deutlichen Abweichung von den 19,03 Stunden sind:

- Wartezeiten im Rechencluster aufgrund von Engpässen in der Verfügbarkeit der notwendigen Ressourcen (blockiert durch andere Anwender)
- Wartezeiten im Rechencluster aufgrund von Erreichen der maximal pro Anwender verfügbaren CPU-Anzahl (blockiert durch weitere vom Anwender gestartete Berechnungen auf dem Rechencluster)

- Wartezeiten aufgrund deutlicher Ungleichheiten der Durchlaufzeiten bei Liniensuchen (Abweichungen vom Durchschnittswert)

6.3.2. Beschleunigungsabschätzung durch Nutzung der hybriden Prozesskette

Auf Basis der gewonnen Werte aus Tabelle A.1 in Anhang A.7 kann der Vorteil der hybriden Prozesskette gegenüber der konventionellen Vorgehensweise quantifiziert werden. Bei den folgenden Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass Gradientenberechnungen der konventionellen Prozesskette mithilfe von Vorwärtsdifferenzenquotienten erster Ordnung durchgeführt werden. Für die Quantifizierung der Beschleunigungen werden drei Bilanzierungen verwendet. Die ermittelten Zeiten beziehen sich dabei immer auf eine Iteration des Optimierers, bestehend aus einer Gradientenberechnung und der darauf folgenden Liniensuche.

- reine CPU-Zeit
  - Diese Bilanzierung bildet die Rechenleistung in CPU-Stunden ab und ist ein Äquivalent zu den Berechnungskosten einer Iteration.
  - Sie lässt keine Rückschlüsse auf die Durchlaufzeit zu.
- Durchlaufzeit bei 4000 zur Verfügung stehenden CPUs
  - Während der Durchführung der Optimierungen bei MTU Aero Engines AG standen jedem Anwender maximal 4000 CPU für parallele Berechungen auf dem firmeneigenen Rechencluster zur Verfügung.
  - Diese Bilanzierung wird unter der Annahme durchgeführt, dass für den Anwender immer 4000 CPUs zur Verfügung stehen.
  - Sind mehr als die 4000 CPUs benötigt, beispielsweise bei der parallelen Berechnung aller Strömungslösungen für die Gradientenbestimmung mit der konventionellen Prozesskette, müssen diese Berechnung in mehreren hintereinander folgenden Gruppen durchgeführt werden. Jede Gruppe nutzt dabei maximal 4000 CPUs.
  - Bei 4000 parallel zur Verfügung stehenden CPUs kann die Liniensuche, welche 1920 CPUs parallel benötigt in einem Durchlauf durchgeführt werden.
- Durchlaufzeit bei ausreichend zur Verfügung stehenden CPUs
  - Diese Bilanzierung geht davon aus, dass immer ausreichend CPUs zur Verfügung stehen um alle nötigen parallel ausführbaren Berechnungen tatsächlich parallel auszuführen. Die Anzahl der CPUs pro Berechnung ist dabei zu den anderen Bilanzierungen unverändert wie in Tabelle A.1 in Anhang A.7 dargestellt.

Die auf Basis der beschriebenen Bilanzierungen gewonnen Beschleunigungswerte am Beispiel von Opt_C mit 155 freien Parametern sind in Tabelle 6.5 hergeleitet. Zum Vergleich sind die Beschleunigungswerte für Opt_D_C in Tabelle 6.6 aufgeführt.
Angesichts der Werte für die reine CPU-Zeit in Tabelle 6.5 links ergibt sich, dass die hybride

	reine CPU-Zeit in CPU·h	Durchlaufzeit in h bei 4000 CPUs	Durchlaufzeit in h bei ausreichend CPUs
Gradientenberechnung hybride Prozesskette			
Präprozess	145.08	0.13	0.13
Strömungslösung primal	1343.51	4.36	4.36
Strömungslösung adjoint	1834.20	6.46	6.46
Sensitivitätsberechnung	43.20	0.30	0.30
Summe	*3365.99*	*11.25*	*11.25*
Gradientenberechnung konventionelle Prozesskette (Vorwärtsdifferenzenquotient 1. Ordn.)			
Präprozess	145.08	0.13	0.13
Strömungslösung primal	184530.57	57.62	7.20
Summe	*184675.65*	*57.75*	*7.33*
Liniensuche			
Präprozess	9.30	0.13	0.13
Strömungslösung primal	11828.88	7.65	7.65
Summe	*11838.18*	*7.78*	*7.78*
Gesamtiter. hybrid (Grad. + Liniens.)	15204.17	19.03	19.03
Gesamtiter. konventionell (Grad. + Liniens.)	196513.83	65.53	15.11
Beschleunigung	**12.9**	**3.4**	**0.8**
hybrid besser ab # Parameter	3	21	nie

Tabelle 6.5.: Herleitung der durch die hybride Prozesskette erreichten Beschleunigung (verglichen zur konventionellen Prozesskette) auf Basis dreier verschiedener Bilanzierungen. Der Betrachtung liegt eine Parameterzahl von 155 wie in Opt_C als auch die gleiche Anzahl Zielgrößen von Opt_C zugrunde.

Prozesskette den Rechenaufwand für eine Optimierungsiteration um Faktor 12,9 gegenüber der konventionellen Prozesskette verringert hat. Der große Vorteil entsteht durch die eingesparten Strömungslösungen während der Gradientenbestimmungen. Wie in der letzten Zeile in Tabelle 6.5 dargestellt ist, lohnt sich die hybride Prozesskette bezüglich der CPU-Zeit bereits ab drei freien Parametern. Bei der Optimierung mit 587 freien Parametern ist der Rechenaufwand gegenüber der konventionellen Vorgehensweise sogar um Faktor 45,4 verringert. Diese großen Einsparungen bezüglich des Rechenaufwandes lassen sich nicht direkt auf die Durchlaufzeit umrechnen.
Unter der Voraussetzung, dass immer 4000 CPUs zur Verfügung stehen, ergeben sich für die Durchlaufzeit einer kompletten Iteration mit der hybriden Prozesskette etwa 19 Stunden, wie in Tabelle 6.5 in der Mitte deutlich wird. Durchlaufzeit-limitierend sind dabei der Betriebspunkt N71-PG während der Gradientenberechnung und der Betriebspunkt N92-PG während der Liniensuche. Um die Strömungslösungen der Gradientenberechnung mithilfe der konventionellen Prozesskette parallel durchführen zu können, würden für die 155 Parameter und Vorwärtsdifferenzenquotienten an sechs Betriebspunkten mit je 32 CPUs Opt_C (155+1)·6·32

	reine CPU-Zeit in CPU·h	Durchlaufzeit in h bei 4000 CPUs	Durchlaufzeit in h bei ausreichend CPUs
Gesamtiter. hybrid (Grad. + Liniens.)	15605.93	19.03	19.03
Gesamtiter. konventionell (Grad. + Liniens.)	707923.31	216.77	15.11
Beschleunigung	**45.4**	**11.4**	**0.8**

Tabelle 6.6.: Erreichte Beschleunigungswerte (verglichen zur konventionellen Prozesskette) auf Basis dreier verschiedener Bilanzierungen. Der Betrachtung liegt eine Parameterzahl von 587 wie in Opt_D$_C$ als auch die gleiche Anzahl Zielgrößen von Opt_D$_C$ zugrunde.

=29952 CPUs benötigt. Da nur 4000 CPUs zur Verfügung stehen, sind die Strömungslösungen in acht aufeinander folgenden Gruppen zur berechnen. Die Durchlaufzeit für die Strömungslösungen der Gradientenberechnung erhöht sich damit um Faktor 8. Auf Basis dieser Überlegungen ergibt sich für Opt_C eine Beschleunigung der Durchlaufzeit der hybriden Prozesskette gegenüber der konventionellen Prozesskette von Faktor 3,4. Die in Unterabschnitt 6.3.1 abgeschätzte Gesamtlaufzeit der Optimierung von 13,5 Tagen hätte gemäß dieser Bilanzierung mit der konventionellen Vorgehensweise etwa 53 Tage betragen. Der Vorteil der hybriden Prozesskette wird insbesondere im Vergleich mit Tabelle 6.6 deutlich. Trotz deutlich erhöhter Parameterzahl erhöht sich die Durchlaufzeit bei Nutzung der hybriden Prozesskette nicht. Dies ist solange gültig, wie alle Präprozess-Instanzen, deren Anzahl auch in der hybriden Prozesskette mit der Anzahl an Parametern skaliert, während der Durchlaufzeit der primalen und adjungierten Strömungslösungen durchgeführt werden können. Dadurch ergibt sich bei einer hohen Parameteranzahl von 587 eine Beschleunigung der Durchlaufzeit von Faktor 11,4. Die Durchführung einer einzelnen Optimierungsiteration von Opt_D$_C$ hätte somit unter den gegebenen Voraussetzungen unter Nutzung der konventionellen Prozesskette etwa neun Tage gedauert.

Wird von einer ausreichend verfügbaren Anzahl an CPUs wie in Tabelle 6.5 rechts ausgegangen, könnten alle notwendigen Gradientenberechnungen der konventionellen Prozesskette parallel betrieben werden. Unter diesen Voraussetzungen kann durch die vorgestellte hybride Vorgehensweise kein Vorteil in der Durchlaufzeit erreicht werden. Dies kann beispielsweise bei kleinen Parameterzahlen vorkommen. Im vorliegenden Fall von Optimierung Opt_C mit 155 Parametern wären für diesen Fall 29952 CPUs parallel benötigt worden. Stünde diese Zahl an CPUs tatsächlich zur Verfügung wäre die konventionelle Vorgehensweise schneller als die hybride Vorgehensweise. Da die hybride Vorgehensweise jedoch in jeder Iteration maximal 1920 CPUs belegt, wären anstatt einer Optimierung mit konventioneller Prozesskette 15 parallele Optimierungen mit hybrider Prozesskette möglich gewesen, um die 29952 CPUs zu belegen.

Anhand dieser Bilanzierungen wird deutlich, wie stark der Vorteil der hybriden Prozesskette von der Anzahl der Parameter und Zielgrößen abhängt. Es erschließt sich direkt, dass eine Optimierung wie Opt_D$_C$ mit 587 Parametern mithilfe der konventionellen Vorgehensweise nicht

praktikabel gewesen wäre. Die hybride Prozesskette ermöglicht es, solche hochdimensionalen Problemstellungen überhaupt einer Optimierung zuzuführen.

7. Diskussion der Optimierungsergebnisse

Auf Basis der in Abschnitt 6.2 durchgeführten und ausgewerteten Optimierungen sollen die in Abschnitt 6.1 aufgeworfenen Fragestellungen zu den Themen

- Funktionsfähigkeit der gewählten Prozesskette
- Einfluss der Verstellleitgitter auf das Ergebnis der Optimierung
- Einfluss der gewählten Parametrik der Verstellleitgitter
- Einfluss der Erhöhung der Parameteranzahl
- Aufwandsbetrachtungen im Vergleich zu einer konventionellen Prozesskette

aufgegriffen werden.

Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Vorgehensweise, inklusive Nutzung der hybriden Prozesskette zur Ermittlung der Gradienteninformation, hat sich in allen durchgeführten Optimierungen als tauglich erwiesen. Die Ersatzoptimierungsaufgabe konnte, abgesehen von marginalen Nebenbedingungsverletzungen, gut gelöst werden. Deutliche Verbesserungen des Zielfunktionals waren möglich. Die im Rahmen der Arbeit entwickelte Stabilisierung, welche in Unterabschnitt 5.3.2 untersucht wurde, hat maßgeblich zum Gelingen der Optimierungen beigetragen. Für einen hohen Anteil von etwa 40% der Berechnungen im Adjungiertenverfahren war zumindest eine einmalige Stabilisierung nötig, um für das in Unterabschnitt 3.3.2 beschriebene Reverse-Accumulation-Verfahren Konvergenz zu erreichen.
Bezüglich der Ersatzoptimierungsaufgabe aus Tabelle 6.2, konnte das zu erwartende Ergebnis erzielt werden. Die Optimierung Opt_B mit der freiesten Parametrisierung hat erwartungsgemäß die größte Verbesserung des Zielfunktionals ermöglicht, gefolgt von der gekoppelten Parametrik in Opt_C und der Parametrik ohne Verstellleitgitter Opt_A. Die Nachrechnungen und Kennfeldbewertungen der jeweils besten Ergebnisse der Optimierungen zeigen ebenfalls die Erfüllung der Optimierungsaufgabe aus Tabelle 6.1. Jedoch zeigen die Kennfeldauswertungen die Grenzen der Gültigkeit der Ersatzoptimierungsaufgabe auf. Das beste Ergebnis bezüglich der Ersatzoptimierungsaufgabe von Opt_B war bezüglich des tatsächlichen Pumpgrenzabstandes nicht besser als die Ergebnisse von Opt_A bzw. Opt_C. Die genauere Auswertung in Unterabschnitt 6.2.2 zeigt auf, dass sich die als pumpgrenznah angenommenen und mit konstantem Gegendruck betriebenen Betriebspunkte N100-PG, N92-PG und N71-PG im Laufe der Optimierungen immer weiter vom pumpgrenznahen Bereich entfernen. Wirkungsgradverbesserungen an den PG-Betriebspunkten ermöglichen in der nachträglichen Kennfeldberechnung höhere Gegendrücke an der Pumpgrenze und führen dazu, dass die angenommenen

pumpgrenznahen Betriebspunkte das eigentliche Verhalten im Pumpgrenznähe immer weniger gut abbilden. Dies führt dazu, dass das hohe Potential der ungekoppelten Parametrisierung aus Opt_B nicht weiter genutzt werden kann. Die vermeintlich größere Verbesserung in der Ersatzoptimierungsaufgabe von Opt_B schlägt sich nicht in einer größeren Verbesserung des tatsächlichen Pumpgrenzabstandes nieder. Um das volle Potential der Parametrisierungen auszuschöpfen, wäre es nötig, die Bewertung des pumpgrenznahen Verhaltens auch bei fortgeschrittener Optimierung zu gewährleisten. Ein theoretisch möglicher Ansatz dafür wäre, die Pumpgrenze für jede Drehzahllinie im Sinne einer impliziten Einstellaufgabe iterativ anzunähern und einen tatsächlich pumpgrenznahen Punkt für die Bewertung heranzuziehen. Der rechentechnische Aufwand dafür wäre aufgrund mehrerer Strömungslösungen je Drehzahllinie jedoch um ein Vielfaches höher als bei der genutzten Vorgehensweise. Eine weitere Alternative wäre, nach einer gewissen Anzahl an Optimierungsiterationen, den für die pumpgrenznahen Betriebspunkte verwendeten Gegendruck zu erhöhen, um der bis dahin erreichten Wirkungsgradverbesserung Rechnung zu tragen und den tatsächlichen pumpgrenznahen Bereich weiterhin aufzulösen. Die Iteration, ab der eine Anpassung notwendig ist, kann dabei aber nur abgeschätzt werden.

Der Einfluss der Parameter der Verstellleitgitter auf die Optimierungsverläufe von Opt_B und Opt_C und die letztendlichen Verbesserungen gegenüber der Optimierung ohne Verstellleitgitter Opt_A ist moderat. Trotz der Tatsache, dass die Verstellwinkel in Opt_B die einzigen Parameter darstellen, die sich im Gegensatz zu den Schaufelparametern ausschließlich auf eine Drehzahllinie auswirken, schneidet Opt_B in der Ersatzoptimierungsaufgabe nicht signifikant besser ab als Opt_A. Mögliche Erklärungen sind die bereits sehr gut ausgelegte Ausgangslösung des Hochdruckverdichters, welche generell nur wenig Potential zur Verbesserung per Verstellwinkeländerung bietet. Zudem wurden die Optimierungen mit einem gradientenbasierten, konventionellen SQP-Verfahren durchgeführt, wodurch eine Konvergenz in ein lokales Optimum in Nachbarschaft mehrerer etwaig besserer lokaler Optima nicht ausgeschlossen werden kann.
Im Vergleich der Optimierungen Opt_B und Opt_C bezüglich der erreichten Verstellwinkel in Abbildung 6.7 zeigt sich, dass die Wahl der Parametrisierung einen erheblichen Einfluss auf das Ergebnis hat. Die freiere ungekoppelte Parametrisierung nutzt die Möglichkeiten aus und führt zu einer Verstellwinkelkonstellation, die mit der bestehenden Kinematik nicht abgebildet werden kann. Auch eine Approximation mithilfe der gekoppelten Parametrik wie in Unterabschnitt 6.2.2 vorgestellt, ermöglicht es nicht die gefundene Lösung der freien Parametrik näherungsweise abzubilden. Die Wahl der Parametrisierung sollte deshalb von der Auslegungsaufgabe abhängig gemacht werden. Handelt es sich bei der gestellten Aufgabe um eine bestmögliche Verstellwinkelkombination bei zunächst unbekannter Kinematik ist die ungekoppelte Parametrisierung zu wählen. Ausgehend vom gefundenen Resultat muss eine Kinematik gefunden werden, die den gefundenen Verstellwinkeln genügt. Soll, wie in den vorliegenden Optimierungen, eine bereits existierende Kinematik verbessert werden, muss auf eine gekoppelte Parametrik zurück gegriffen werden, um die Realisierbarkeit der gefunden Verstellwinkel zu gewährleisten.

Die im Schaufelparameterbereich deutlich verfeinerte Parametrisierung mit einer Gesamtzahl von 587 Parametern in Opt_D_C ermöglicht eine deutliche Verbesserung des Zielfunktionals

hinsichtlich der Zielgröße der Ersatzoptimierungsaufgabe über das Ergebnis von Opt_C hinaus. Die Verbesserung von η_{is} am Betriebspunkt N92-PG konnte bei Opt_D$_C$ im Vergleich zu Opt_C um ein Viertel erhöht werden. Angesichts der Tatsache, dass die Erhöhung der Parameteranzahl von 155 in Opt_C auf 587 in Opt_D$_C$ dank der hybriden Vorgehensweise nicht zu einer Erhöhung der Durchlaufzeit und lediglich zu einer geringen Erhöhung der CPU-Zeit um 2,6% führt, ist für Folgestudien die detaillierte Schaufelparametrisierung zu bevorzugen. Während die höhere Parameteranzahl bei der Laufzeit zu keiner Veränderung führt, wirkt sie sich stark negativ auf den Festplattenspeicher aus. Wie in Abschnitt 4.3 beschrieben wurde, liegt die Präprozesskette im konventionellen Teil der hybriden Prozesskette und muss demnach für jeden Parameter der Gradientenbestimmung betrieben werden. Dies führt bei 587 Parametern und drei betrachteten aerodynamischen Drehzahlen zu $(587+1)\cdot 3 = 1764$ vollen 3D-Verdichternetzen, welche parallel auf der Festplatte abgespeichert werden müssen. Der benötigte Festplattenplatz für eine Gradientenbestimmung mit adjungierter Lösung und allen ausgelenkten Netzen beträgt für Opt_D$_C$ etwa 1,3 Terrabyte.
Angesichts der leicht verletzten Nebenbedingungen in Opt_D$_C$ und der in Unterabschnitt 6.2.3 beschriebenen Stagnation der Optimierung aufgrund der Nichtkonvergenz eines Betriebspunktes entlang der Liniensuchrichtung, kann das verwendete Optimierungsverfahren infrage gestellt werden. Das verwendete Optimierungsverfahren konnte die Information der nichtkonvergierenden und damit nicht gültigen Lösungen entlang der Liniensuchrichtung nicht verwerten, sondern hat ausgehend von korrekt bestimmten Gradienteninformationen immer wieder die gleiche Richtung eingeschlagen. Ein intelligenteres Verfahren, welches die Nichtkonvergenz der Bewertungen der Liniensuchen als Information mit aufnimmt, könnte hier zu besseren Lösungen führen.

Die in Abschnitt 6.3 beschriebenen Vorteile der hybriden Prozesskette bezüglich Durchlauf- und Rechenzeiten belegen, am Beispiel der vorliegenden Optimierungsbeispiele, die Alternativlosigkeit der hybriden Vorgehensweise. Wird ein Optimierungsproblem mit einer ähnlichen Anzahl an Zielfunktionalen und freien Parametern angestrebt und eine derzeit realistische parallel verfügbare Anzahl von CPUs angenommen, verbietet sich die konventionelle Vorgehensweise mithilfe einer Gradientenbestimmung mithilfe Finiter Differenzen. Die Rechenzeiten und damit die Kosten für die Optimierung würden wie in Abschnitt 6.3 gezeigt, deutlich steigen. Auch die Durchlaufzeit würde deutlich länger ausfallen. Insbesondere die Tatsache, dass die Hinzunahme einer größeren Zahl von freien Parametern zu einer merklichen Verbesserung des Optimierungsergebnisses führt, jedoch keine Durchlaufzeiterhöhung zur Folge hat, spricht dafür eine möglichst große Zahl an Parametern zu verwenden. Die verwendeten 587 freien Parameter in Opt_D$_C$ sind angesichts des großen Kontrollvolumens der gewählten Maschine nicht unrealistisch. Insbesondere, wenn die in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellte radiale Parametrisierung mit den vier verwendeten Stützstellen verfeinert würde und die Gitter Rotor 5 bis Stator 8 in Abbildung 5.1 für eine Schaufelparametrisierung zugänglich gemacht würden, wäre eine Parameterzahl von deutlich über 1000 realistisch. Ohne das Vorhandensein einer zu Teilen im Adjungiertenverfahren betriebenen Prozesskette wären diese Größenordnungen nicht mehr abbildbar. Angesichts sehr großer Parameterzahlen steigt jedoch auch der Aufwand der auf konventionellem Weg bestrittenen Teile der Prozesskette. Der Aufwand für den in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellten Präprozess steigt proportional zur An-

zahl der Parameter. Bei Verwendung sehr großer Parameteranzahlen sollte demnach der Prozesskettenanteil, welcher das Adjungiertenverfahren nutzt, erhöht werden, etwa durch eine Vernetzung oder Netzdeformation im Adjungiertenverfahren oder sogar durch eine komplette Prozesskette inklusive einer Geometriegenerierung im Adjungiertenverfahren. Angesichts der in Unterabschnitt 4.1.1 beschriebenen heterogenen Präprozesskette, bestehend aus hauseigenen und kommerziell vertriebenen Werkzeugen, sind diese Bestrebungen jedoch teilweise mit großem Entwicklungs- und Wartungsaufwand verbunden.

8. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine aerodynamische Mehrpunktoptimierung eines realitätsnahen achtstufigen transsonischen Hochdruckverdichters mithilfe einer auf dem Adjungiertenverfahren aufbauenden Prozesskette durchgeführt. Erstmals wurde dabei der Einfluss von Verstellleitgittern auf die 3D-Aerodynamik an mehreren Betriebspunkten während der Auslegung berücksichtigt.
Die in Abschnitt 1.2 niedergeschriebenen Fragestellungen konnten im Rahmen der Arbeit beantwortet werden und sollen im Folgenden aufgegriffen werden.
Der rechentechnisch aufwändigste Teil der Bewertungs-Prozesskette, der Strömungslöser, dessen Rechenaufwand in gradientenbasierten Optimierungsverfahren mit der Anzahl der Auslegungsfreiheitsgrade skaliert, konnte zum Zwecke der Gradientenbestimmung durch ein auf dem Adjungiertenverfahren basierenden Gegenstück ersetzt werden. Die daraus entstandene hybride Prozesskette, bestehend aus konventionellen Bestandteilen in der Präprozesskette sowie der 3D-Strömungssimulation unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens, wurde im Rahmen der Arbeit entwickelt, getestet und in das firmeneigene Optimierungsframework OPUS integriert.
Eine Validierung der mithilfe der verwendeten hybriden Prozesskette bestimmten Sensitivitätsinformationen wurde, im Vergleich zu einer konventionellen und auf Finiten Differenzen beruhenden Sensitivitätsbestimmung, erfolgreich durchgeführt. Die Sensitivitätsinformationen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung und offenbaren insbesondere an den Grenzen des Betriebsbereiches des Verdichters die Vorteile der Vorgehensweise mithilfe des Adjungiertenverfahrens.
Zur Modellierung des Einflusses der Verstellleitgitter wurde die Starrkörperrotation der modellierten Statorschaufeln des betrachteten Hochdruckverdichters mithilfe zweier Parametriken verwirklicht. Eine freie Parametrik, welche den Winkel eines jeden Verstellleitgitters an jeder Betriebsdrehzahl separat frei steuern kann, wurde einer gekoppelten Parametrik, welche die Hebelkinematik in einem realistischen Hochdruckverdichter abbildet, gegenübergestellt. Gemeinsam mit üblichen Geometrieparametern zur Geometriedefinition der Verdichterbeschaufelung, wurden die, auf den neu implementierten Parametriken beruhenden, Parameter der Verstelleitgitter einer Sensitivitätsuntersuchung hinsichtlich der Zielgrößen der späteren Optimierung unterzogen.
Auf Basis der bezüglich Parametrik und hybrider Vorgehensweise entwickelten Prozesskette wurden Mehrpunktoptimierungen mit dem Ziel durchgeführt, den Pumpgrenzabstand des Verdichters an einer definierten Betriebsdrehzahl zu verbessern. Um die Kennwerte des Verdichters an anderen Betriebszuständen nicht zu kompromittieren, wurden sechs zu bewertende Betriebspunkte simuliert und entsprechende Nebenbedingungen etabliert.
Anhand aller durchgeführten Optimierungen konnte die Funktionsfähigkeit der entwickelten Prozesskette und des Adjungiertenverfahrens mithilfe von AD gezeigt werden. Damit kann die

Frage nach der effizienten Nutzbarkeit der Vorgehensweise im industriellen Kontext positiv bewertet werden. Die gestellte Optimierungsaufgabe konnte erfüllt und der Pumpgrenzabstand um bis zu 3,98% verbessert werden.
Etwa ein Prozentpunkt konnte dabei auf den Einsatz der Verstellleitgitter zurückgeführt und damit der Einfluss der Verstellleitgitter bewertet werden. Die Verstellleitgitter wurden dabei je nach Betriebspunkt bis zu etwa 4,5° verdreht.
Dabei konnte der Einfluss der verwendeten Art der Parametrik der Gitterverstellung auf das Verbesserungspotential quantifiziert werden. Eine freie Parametrik, welche alle Verstellleitgitter unabhängig voneinander anspricht zeigt in der gewählten Optimierungsaufgabe ein deutlich größeres Potential als eine über eine Verstellkinematik gekoppelte Leitgitterverstellung. Allerdings führt die freie Parametrik zu Winkelkombinationen, welche mit der verwendeten Hebelkinematik nicht abgebildet werden kann.
Eine anhand zusätzlicher Beschaufelungsparameter verfeinerte Parametrik mit insgesamt 587 freien Parametern offenbart den großen Vorteil der hybriden Vorgehensweise unter Nutzung des Adjungiertenverfahrens. Im Vergleich zu den mit einfacher Parametrik durchgeführten Optimierungen mit nur 155 Parametern, führt die erweiterte Parametrik in der Optimierung zu einer größeren Verbesserung, jedoch zu keiner Vergrößerung der Durchlaufzeit der Optimierung und nur zu einer Erhöhung der CPU-Zeit von 2,6%. Die Unabhängigkeit der hybriden Vorgehensweise von der Parameteranzahl in Bezug auf Durchlaufzeit und CPU-Zeit kann somit auch im industriellen Kontext positiv bewertet werden.
Eine Bilanzierung der Ressourcenaufwände in Bezug auf CPU-Stunden und Durchlaufzeit wurde auf Basis der getätigten Optimierungen im Vergleich zu einer konventionellen Vorgehensweise ohne Adjungiertenverfahren durchgeführt. Es zeigt sich, dass der reine Berechnungsaufwand in CPU-Stunden dank der implementierten hybriden Prozesskette je nach verwendeter Parameteranzahl der durchgeführten Optimierungen zwischen Faktor 13 und 49 verringert wurde. Die benötigten Durchlaufzeiten der Optimierungen bei gegebener CPU-Anzahl konnten durch die hybride Vorgehensweise zwischen Faktor 3,4 und 11,4 verkürzt werden. Angesichts einer absoluten Durchlaufzeit der Optimierungen unter Verwendung der hybriden Prozesskette von etwa zwei bis drei Wochen, wird deutlich, dass die Durchführung der vorliegenden Optimierungsaufgabe unter Berücksichtigung mehrerer Betriebspunkte und der großen Zahl an Parametern auf dem konventionellen Weg zeitlich nicht darstellbar gewesen wäre.

Die im Rahmen der Arbeit im industriellen Kontext eingesetzte Vorgehensweise zur Lösung der Adjungiertengleichung 3.38 mithilfe des in Unterabschnitt 3.3.2 vorgestellten Fixpunktansatzes konnte erfolgreich für eine Sensitivitätsbestimmung der Parametrik eines komplexen dreidimensionalen Modells genutzt werden. Dank des im Reverse-Accumulation-Verfahren umgesetzten Fixpunktansatzes, konnte gezeigt werden, dass die Konvergenzgeschwindigkeit der iterativen Lösung der Adjungiertengleichung der Konvergenzgeschwindigkeit der primalen Strömungslösung entspricht. Unter Nutzung der Algorithmischen Differentiation mittels AD-Tool mit Operatorüberladen und dem vorgestellten Fixpunkt-Ansatz, konnte somit eine zum primalen Strömungslöser konsistente Lösung der Adjungiertengleichung ermöglicht werden. Die Anwendung anhand eines sehr großen industriell verwendeten Verdichtermodells zeigt, dass die Anforderungen an den Arbeitsspeicherbedarf dieser Vorgehensweise mit

heutigen Clusterrechnern darstellbar sind. Die Anwendung der Algorithmischen Differentiation auf den Strömunglöser TRACE sowie das Postprocessing-Tool POST mittels des AD-Tools CodiPack ermöglicht zudem die nachhaltige Codeentwicklung. Auf Basis des gleichen Programmier-Codes wird lediglich über Kompilieroptionen darüber entscheiden, ob ein ausführbares Programm für die primale oder die adjungierte Strömungslösung erstellt wird.

Die in der Arbeit durchgeführten Optimierungen offenbaren Handlungsfelder, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht adressiert werden konnten, jedoch interessante Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen bieten.
Die durch die hybride Prozesskette bezüglich Rechenzeit und CPU-Stunden sehr effiziente Vorgehensweise skaliert im Rechenaufwand für den Strömungslöser nicht mit der Anzahl der freien Parameter. Der konventionelle Teil der Prozesskette, insbesondere die 3D-Vernetzung stellt jedoch weiterhin eine große Hürde dar, die sich insbesondere bei dem verfügbaren Speicherplatz für die vielen 3D-Netze auswirkt. Die Ausweitung des Adjungiertenverfahrens auf die Netzgenerierung bzw. auf eine etwaige Netzdeformation könnte hier Abhilfe schaffen.
Der Aufwand für das Adjungiertenverfahren steigt mit der Anzahl der verwendeten Zielgrößen und Nebenbedingungen linear an. Angesichts einer Vielzahl von Nebenbedingungen in realitätsnahen Optimierungsaufgaben in der Industrie, sollten Optimierungsverfahren gewählt werden, welche die Ableitungsinformation nur dann benötigen, wenn die Nebenbedingungen auch tatsächlich verletzt sind. Sogenannte „ActiveSet-Methoden“ könnten zusammen mit der vorliegenden Prozesskette weiteres Beschleunigungspotential bieten.
Im Verlauf der Optimierungen waren häufig Stabilisierungsmaßnahmen notwendig, um die adjungierte Strömungslösung zu ermitteln und damit die nötigen Sensitivitätsinformationen überhaupt bestimmen zu können. Wie gezeigt wurde, wirken sich die gewählten Stabilisierungsmaßnahmen lokal negativ auf die Güte der Sensitivitätswerte aus. Um dies in Zukunft vermeiden zu können, sollte in umfangreicheren Studien die möglichst allgemeingültige Nutzbarkeit von solchen Stabilisierungsmaßnahmen untersucht werden, welche die Gradientengüte nicht beeinträchtigen. Um Instabilitäten möglichst schon vor Berechnung der adjungierten Strömungslösung zu vermeiden, sollte sich um die robuste und ausreichende Konvergenz des primalen Strömungslösers bemüht werden.
Aufgrund von Nichtkonvergenz oder Divergenz einzelner Betriebspunkte am Rand des Betriebsbereichs des verwendeten Modells, kann es trotz korrekter Sensitivitätsbestimmung mit dem in dieser Arbeit verwendeten Optimierungsalgorithmus zum Stillstand der Optimierung kommen. Ein verbesserter Algorithmus, welcher auch die Tatsache nicht konvergierter Bewertungen intelligenter berücksichtigt, könnte das Potential der vorliegenden Prozesskette gegebenenfalls weiter erhöhen.
In der vorliegenden Arbeit konnte exemplarisch anhand eines Hochdruckverdichters eine Vorgehensweise zur Lösung einer Optimierungsaufgabe im Bereich der detaillierten Formoptimierung dargestellt werden. Optimierungsaufgaben für noch größere Kontrollvolumina oder im Bereich der Turbinenaerodynamik offenbaren anderen Herausforderungen in Bezug auf Anzahl der Zielgrößen, Modellierung und Parametrik. Um die entwickelte hybride Prozesskette auch auf andere Problemstellungen der Formoptimierung im industriellen Kontext anwenden zu können, sind umfangreiche weiterführende Studien notwendig. Einerseits ist das Anwendungsgebiet der hybriden Vorgehensweise abzustecken und zu überprüfen, ob die

Vorgehensweise für die Aufgabe sinnvoll nutzbar ist. Dabei ist zu ermitteln, ob das jeweilige Optimierungsproblem gegebenenfalls umformuliert werden muss, um eine große Anzahl von Zielgrößen zu vermeiden, etwa mittels einer oder mehrerer Linearkombinationen oder Quadratsummen von Zielgrößen. Andererseits muss durch Studien ermittelt werden, wie die vorliegenden Prozesskette effizient eingesetzt werden kann. Hierbei spielen das verwendete Optimierungsverfahren, das Ressourcenmanagement in Bezug auf Arbeitsspeicher, Festplattenspeicher und Anzahl der verwendeten Prozessorkerne entscheidende Rollen.
Soll der Anwendungsbereich der hybride Vorgehensweise auf Problemstellungen aus dem Bereich zwischen Vorauslegung und detaillierter Formoptimierung erweitert werden, entstehen weitere Handlungsfelder. Unterliegt ein Verdichterentwurf im Rahmen einer Optimierung grundlegenden Änderungen, beispielsweise Formänderungen im meridionalen Verlauf des Ringraums, führt dies auch zu quantitativen Änderungen von aerodynamischen Randbedingungen. Gegebenenfalls sollen aerodynamische Randbedingungen, wie beispielsweise Zapfluftmassenströme, direkt in die Parametrik aufgenommen werden. Für die beschriebenen Szenarien bedarf es Erweiterungen am TRACE-Code. Die Berechnung der Senstivitäten, welche derzeit ausschließlich Netzkoordinaten berücksichtigt, muss um aerodynamischen Randbedingungen erweitert werden.

Die vorliegende Arbeit sowie die entwickelte hybride Prozesskette stellen eine im industriellen Kontext effizient nutzbare Grundlage dar, auf Basis derer die erwähnten Handlungsfelder bearbeitet und zukünftige Auslegungsaufgaben mit großen Parameterzahlen gelöst werden können.

Literatur

[1] Directorate-General for Research, Innovation, Directorate General for Mobility und Transport. *Flightpath 2050 Europe's Vision for Aviation, Report of the High Level Group on Aviation Research*. Techn. Ber. EUROPEAN COMMISSION, 2011.

[2] C. Pornet. „Electric Drives for Propulsion System of Transport Aircraft". In: *New Applications of Electric Drives*. 2015. Kap. 5, S. 115–141. ISBN: 978-953-51-2233-3.

[3] H. Kuhn, A. Seitz, L. Lorenz, A. Isikveren, A. Sizmann und Bauhaus Luftfahrt. „Progress and Perspectives of Electric Air Transport". In: *28th International Congress of the Aeronautical Sciences (ICAS 2012)*. 2012.

[4] S. Ortanderl, D. Eames, J. Berton und C. Snyder. „Revisiting Water Injection for Commercial Aircraft". In: *World Aviation Congress and Exposition*. 2004-01-3108. Reno, Nevada, USA, 2004.

[5] ICAO International Civil Aviation Organisation. *SUSTAINABLE AVIATION FUELS GUIDE*. report Version 2. ICAO, 2018.

[6] ATAG Air Transport Action Group. *Beginner's Guide to Sustainable Aviation Fuel*. report Version 3. ATAG, 2017.

[7] S. Taamallah, K. Vogiatzaki, F.M. Alzahrani, E.M.A. Mokheimer, M.A. Habib und A.F. Ghoniem. „Fuel flexibility, stability and emissions in premixed hydrogen-rich gas turbine combustion: Technology, fundamentals, and numerical simulations". In: *Applied Energy, Elsevier*, 2015.

[8] W. Bräunling. *Flugzeugtriebwerke*. S. 391-393. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

[9] W. Bräunling. *Flugzeugtriebwerke*. S. 942-951. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

[10] N.M. Wolfrum. „Entwicklung und Validierung eines Casing Treatment Modells zur aerodynamischen Auslegung von Axialverdichtern". Diss. Technische Universität München, Lehrstuhl für Flugantriebe, 2010.

[11] M.C. Brimer. „Designing Simplicity to Achieve Technological Improvement: The General Electric J79 Turbojet Engine". Magisterarb. University of Missouri, 2017.

[12] A. Griewank. *Evaluation Derivatives - Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Frontiers in Applied Mathematics. S. 37-68. Philadelphia: SIAM, 2000.

[13] SAE International. *Inlet Total-Pressure-Distortion Considerations for Gas-Turbine Engines*. Techn. Ber. SAE AIR1419. SAE The Engineering Society For Advancing Mobility Land Sea Air und Space International, 1999.

[14] N.N. Cumpsty. *Compressor Aerodynamics*. 2nd Revised. S. 366-367. Krieger Publishing Company, 2004.

[15] T. Peters. „Untersuchung von Strömungsinstabilitäten in einem mehrstufigen Axialverdichter unter dem Einfluß von rotierenden Eintrittsstörungen“. Diss. Neubiberg: Universität der Bundeswehr München, 2004.

[16] H. Rick. *Gasturbinen und Flugantriebe : Grundlagen, Betriebsverhalten und Simulation*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783540794455;354079445X.

[17] M. Müller. „Untersuchungen zum Einfluss von Gehäusestrukturierungen auf die Stabilität und die Leistungsdaten eines transsonsischen Axialverdichters“. Diss. Technischen Universität Darmastadt, 2011.

[18] F.C.T. Danner, H.P. Kau, M. Müller, H.-P. Schiffer und G.A. Brignole. „Experimental and Numerical Analysis of Axial Skewed Slot Casing Treatments of a Transonic Compressor Stage“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air*. GT2009-59647. 2009.

[19] K. Engel, C. Zscherp, N. Wolfrum, D. Nürnberger und E. Kügeler. „CFD Simulations of the TP400 IPC with Enhanced Casing Treatment in Off-Design Operating Conditions“. In: GT2009-60324. ASME Turbo Expo 2009. 2009.

[20] K. Salchow. „Verbesserung des instationären Betriebsverhaltens von Turboflugtriebwerken durch Leitgitterverstellung und Abblasung im Verdichter“. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 476. Diss. Institut für Luftfahrtantriebe, Universität Stuttgart, 2001.

[21] W. Horn. „Verbesserung des Betriebsverhaltens von Turboflugtriebwerken durch aktiv geregelte Verdichter“. Diss. Institut für Luftfahrtantriebe, Universität Stuttgart, 2011.

[22] L. Gallar, M. Arias, V. Pachidis und P. Pilidis. „Compressor Variable Geometry Schedule Optimisation using Genetic Algorithms“. In: GT2009-60049. ASME Turbo Expo 2009. 2009.

[23] L. Gallar, M. Arias, V. Pachidis und R. Singh. „Stochastic axial ompressor variable geometry schedule optimisation“. In: *Aerospace Science and Technology* 15.5, 2011, S. 366–374.

[24] G. Cassina, A. Kammerer, B.H. Beheshti und R.S. Abhari. „Parametric Study of Tip Injection in an Axial Flow Compressor Stage“. In: *ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air*. GT2007-27403. 2007.

[25] K.L. Suder, M.D. Hathaway, S.A. Thorp, A.J. Strazisar und N.B. Bright. „Compressor Stability Enhancement using Discrete Tip Injection“. In: *ASME Turbo Expo 2000*. 2000-GT-650. 2000.

[26] S.G. Scheidler. „Untersuchugn der Systemaspekte stabilitätsverbessernder Maßnahmen in Gasturbinen“. Diss. Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, 2005.

[27] H.J. Weigl, J.D. Paduano, L.G. Fréchette, A.H. Epstein, E.M. Greitzer, M.M. Bright und A.J. Strazisar. „Active Stabilization of Rotationg Stall and Surge in a Transonic Single Stage Axial Compressor“. In: *ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*. 97-GT-411. 1997.

[28] J.M. Haynes, G.J. Hendricks und A.H. Epstein. „Active Stabilization of Rotating Stall in a Three-Stage Axial Compressor“. In: *ASME, International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*. 93-GT-346. 1993.

[29] G.J. Hendricks und D.L. Gysling. „Theoretical Study of Sensor-Actuator Schemes for Rotating Stall Control“. In: *Journal of Propulstion and Power* 10.1, 1994, S. 101–109.

[30] R. D'Andrea, R.L. Behnken und R.M. Murray. „Active Control of Rotating Stall using Pulsed Air Injection: A Parametric Study on a Low-Speed, Axial Flow Compressor“. In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. Bd. 2494. S. 152-165. 1995.

[31] G.M. Babic und L.A. Urban. „Engine Vane Control“. In: 69-GT-14. ASME Gas Turbine Conference. 1969.

[32] W. Bräunling. *Flugzeugtriebwerke*. S. 934-936. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

[33] H. Grieb. *Verdichter für Turboflugtriebwerke*. S. 610-613. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

[34] P. Boos. *Über die Regelfähigkeit von Axialverdichtern mit verstellbaren Leitgittern*. Techn. Ber. DK 62-541:621.51. VEB Bergmann Borsig - Stammbetrieb des Kombinates Kraftwerksanlagenbau, 1988.

[35] P.P. Walsh und P. Fletcher. *Gas Turbine Performance*. Bd. 2. Chapter 5, Gas Turbine Engine Componentes. Blackwell Science Ltd., 1998.

[36] Rolls-Royce plc, Hrsg. *The Jet Engine*. Bd. 6. 2005.

[37] W. Lihua, H. Fusheng, L. Feng und W. Yanli. „Investigation an dExperiment on Optimizing Angles of Variable Stator of Axial Flow Compressor“. In: *ASME, The American Society of Mechanical Engineers*. 85-IGT-32. Nanhua Powerplant Research Institute, Zhuzhou, Hunun, China. 1985.

[38] A. Shadaram, A. Fathi und R. Azizi. „Optimization of Variable Stator's Angle for Off Design Compression Systems using Streamline Curvature Method“. In: *ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air*. GT2009-59772. 2009.

[39] S Reitenbach, M. Schnös, R.-G. Becker und T. Otten. „Optimization of Compressor Variable Geometry Settings using Multi-Fidelity Simulation“. In: *ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition*. GT2015-42832. 2015.

[40] J. Sun und R.L. Elder. „Numerical optimization of a stator vane setting in multistage axial-flow compressors“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. Bd. 212 Part A. 4. 1998, S. 247–259.

[41] E. Benini. „Three-Dimensional Multi-Objective Design Optimization of a Transonic Compressor Rotor“. In: *Journal of Propulsion and Power* 20, 2004, S. 559–565.

[42] J. Juo, C. Zhou und F. Liu. „Multipoint Design Optimization of a Transonic Compressor Blade by Using an Adjoint Method“. In: *Journal of Turbomachinery* 136.051005, 2014, S. 1–10.

[43] J. Luo und F. Lliu. „Multi-Objective Optimization of a Transonic Compressor Rotor by Using an Adjoint Method“. In: *AIAA Journal* 53, 2014, S. 797–801.

[44] J. Yu, L. Ji, W. Li und W. Yi. „Shape Optimization of Multi-Stage Axial Compressor Blades Using Adjoint Method With Emphasis on Thickness Distribution“. In: ASME Turbo Expo 2015 GT2015-42234. 2015.

[45] D.X. Wang, L. He, Y.S. Li und R.G. Wells. „Adjoint Aerodynamic Design Optimization for Blades in Multistage Turbomachines—Part II: Validation and Application“. In: *Journal of Turbomachinery* 132.021012, 2010, S. 1–11.

[46] J. Yu, L. Ji, W. Li und W. Yi. „Shape Optimization of Multi-Stage Axial Compressor Blades Using Adjoint Method With Static Pressure Constraint at Blade Row Interface“. In: ASME Turbo Expo 2015 GT2015-42232. 2015.

[47] D.X. Wang und L. He. „Adjoint Aerodynamic Design Optimization for Blades in Multistage Turbomachines—Part I: Methodology and Verification“. In: *Journal of Turbomachinery* 132.021011, 2010, S. 1–14.

[48] C. Frey, H.-P. Kersken und Dirk Nürnberger. „THE DISCRETE ADJOINT OF A TURBOMACHINERY RANS SOLVER“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air*. GT2009-59062. 2009, S. 1–10.

[49] J. Backhaus, M. Aulich, C. Frey, T. Lengyel und C. Voß. „Gradient Enhanced Surrogate Models Based on Adjoint CFD Methods for the Design of a Counter Rotating Turbofan“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo* 8, 2012.

[50] B. Walther und S. Nadarajah. „Constrained Adjoint-Based Aerodynamic Shape Optimization of a Single-Stage Transonic Compressor“. In: *Journal of Turbomachinery* 135, 2012.

[51] A. John, G. Vivarelli, N. Qin und S. Shahpar. „Using Feature-Based Mesh Adaption to improve the Adjoint Optimisation of Transonic Compressor Blades“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2020 Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. GT2020-15351. 2020.

[52] J. Yang, J. Luo, J. Xiong und F. Liu. „Aerodynamic Design Optimization of the Last Stage of a Multi-Stage Compressor by Using an Adjoint Method“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. GT2016-56893. 2016.

[53] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Mathematik Kompakt. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1989. ISBN: 0201157942.

[54] A.R. Conn, N.I.M. Gould und P.L. Toint. *Trust Region Methods*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2000.

[55] O. Stein. *Grundzüge der Globalen Optimierung*. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2018.

[56] M. Ulbrich und S. Ulbrich. *Nichtlineare Optimierung*. Mathematik Kompakt. Springer Basel, 2012. ISBN: 9783034601429.

[57] K. Schittkowski. *NLPQLP: A New Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm for Parallel Computing*. Techn. Ber. Department of Mathematics, University of Bayreuth, 2001.

[58] A. Griewank. *Evaluation Derivatives - Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Frontiers in Applied Mathematics. S. xix. Philadelphia: SIAM, 2000.

[59] C.-D. Munz und T. Westermann. *Numerishe Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen - Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure*. S. 48-58. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.

[60] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders und M. Wright. *A Procedure for Computing Forward-Difference Intervals for Numerical Optimization*. Techn. Ber. Stanford: System Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, 1981.

[61] A.R. Conn, Gould N.I.M. und P.L. Toint. *Trust Region Methods*. MPS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: SIAM, 2000.

[62] R.R. Barton. *Experiments in Computing Finite Difference Derivatives when Optimizing Low Accuarcy Functions*. Techn. Ber. 884. Ithaca: School of Operations Research und Industrial Engineering, College of Engineering, Cornell University, 1990.

[63] A. Walther und A. Griewank. „Combinatorial Scientific Computing“. In: Hrsg. von U. Naumann und O. Schenk. Chapman-Hall CRC Computational Science, 2012. Kap. Getting started with ADOL-C, S. 181–202.

[64] J. Lotz, K. Leppkes und U. Naumann. *dco/c++ -Derivative Code by Overloading in C++*. Techn. Ber. Aachener Informatik Berichte. RWTH Aachen, Departement of Computer Science, 2012.

[65] M. Sagebaum. „Advanced techniques for the semi automatic transition from simulation to design software“. doctoralthesis. Technische Universität Kaiserslautern, 2018. URL: `http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:386-kluedo-53891`.

[66] M. Sagebaum, T. Albring und N.R. Gauger. „High-Performance Derivative Computations using CoDiPack“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 45.4, 2019. URL: `https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/3356900`. published.

[67] L. Hascoët. „Automatic Differentiation by Program Transformation“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2007, S. 1–49.

[68] L. Hascoët und V. Pascual. „The Tapenade Automatic Differentiation tool: Principles, Model, and Specification“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 39.3, 2013, 20:1–20:43.

[69] J. Backhaus, A. Schmitz, C. Frey, M. Sagebaum, S. Mann, M. Nagel und N.R. Gauger. „Application of an Algorithmically Differentiated Turbomachinery Flow Solver to the Optimization of a Fan Stage“. In: *AIAA 2017-3997*, 2017.

[70] J.E.V. Peter und R.P. Dwight. „Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches“. In: *Computers and Fluids* 39.3, 2010, S. 373–391.

[71] F. Palacios, T. Economon und J. Alonso. „Large-scale aircraft design using SU2“. In: *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*. 2015.

[72] C. Frey, G. Ashcroft, J. Backhaus, E. Kügeler und J. Wellner. „Adjoint-Based Flow Sensitivity Analysis using arbitrary Control Surfaces“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2011: Power for Land, Sea and Air*. GT2011-45041. 2011, S. 1–10.

[73] M.B. Akin, W. Sanz und P. Pieringer. „Endwall Contour Optimization of a Turbine Mid Turbine Frame using an Adjoint Method“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*. GT2014-26038. 2014, S. 1–9.

[74] A Marta, S Shankaran und A. Stein. „Blade Shape Optimization using a RANS Discrete Adjoint Solver“. In: *2nd International Conference on Engineering Optimization*. 2010.

[75] T. Albring, M. Sagebaum und N.R. Gauger. „Efficient Aerodynamic Design using the Discrete Adjoint Method in SU2“. In: *AIAA 2016-3518*, 2016.

[76] A. Griewank. *Evaluation Derivatives - Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Frontiers in Applied Mathematics. S. 303-336. Philadelphia: SIAM, 2000.

[77] J.D. Jr Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. Bd. 4 Auflage. McGraw-Hill, Inc., 1995.

[78] D.C. Wilcox. „Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models“. In: *AIAA Journal* 26.11, 1988, S. 1299–1310.

[79] M. Franke, E. Kügeler und D. Nürnberger. „Das DLR-Verfahren TRACE: Moderne Simulationstechniken für Turbomaschinenströmungen“. In: *DGLR-Jahrbuch 2005*. 2005.

[80] H. Oertel jr., M. Böhle und T. Reviol. *Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Bd. 7. Auflage. S. 134 ff. Springer Vieweg, 2015.

[81] A. Weber und R. Fox. *TRACE User's Manual*. Version 5.3. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Antriebstechnik, Numerische Methoden. D-51147, Köln, 2006.

[82] D. Hollingsworth. *Workflow Management Coalition, The Workflow Reference Model*. Techn. Ber. TC00-1003. 2 Crown Walk, Winchester, Hampshire, UK, SO22 5XE: The Workflow Management Coalition, 1995.

[83] B.M. Adams, K.R. Dalbey, M.S. Eldred, Swirler L.P., Bonhoff W.J., J.P. Eddy, Vigil D.M., P.D. Hough und Lefantzi S. *DAKOTA, A Multilevel Parallel Object-Oriented Framework for Design Optimization, Parameter Estimation, Uncertainty Quantification, and Sensitivity Analysis: Version 5.2 User's Manual*. Sandia Technical Report SAND2010-2183. Updated November 2011. Sandia National Libraries, 2009.

[84] M. Sagebaum, E. Özkaya, N.R. Gauger, J. Backhaus, C. Frey, S. Mann und M. Nagel. „Efficient Algorithmic Differentiation Techniques for Turbo-machinery Design“. In: *AIAA 2017-3998*, 2017.

[85] F. Renac. „Improvement of the recursive projection method for linear iterative scheme stabilization based on an approximate eigenvalue problem“. In: *Journal of Computational Physics* 230.14, 2011, S. 5739–5752.

[86] S. Xu, D. Radford, M. Meyer und J.-D. Müller. „Stabilisation of discrete steady adjoint solvers“. In: *Journal of Computational Physics* 299, 2015, S. 175–195.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Qualitative Darstellung eines Verdichterkennfeldes mit eingezeichneter Betriebslinie und ADP (Aerodynamic Design Point) 25
2.2. Geschwindigkeitsdreieck für eine Verdichterstufe mit Geschwindigkeitskomponenten und Strömungswinkeln im Absolut- sowie Relativsystem 26
2.3. Qualitatives drehzahlunabhängiges Stufenkennfeld einer Verdichterstufe mit idealem und realem Verlauf 28
2.4. bla 29
2.5. Qualitative Darstellung eines Stufenkennfelds einer vorderen Verdichterstufe bei Auslegungsdrehzahl, Teildrehzahl mit und Teildrehzahl ohne Abblasung . 32
2.6. Darstellung der Leitgitterverstellung eines Verdichters mit nomineller (durchgezogen) sowie zugedrehter (gestrichelt) Leitgitterstellung im Stufenkennfeld einer ersten Stufe (a) sowie im Verdichterkennfeld (b) 33
2.7. Darstellung der Machzahl-Dreiecke an einer Paarung Verstellstator - Rotor. Das gestrichelt dargestellte Profil beschreibt einen *zugedrehten* Verstellstator . 36
2.8. Verstellhebelkinematik eines aufgeschnittenen J79-Triebwerks. Markiert sind 1) Aktuator, 2) Koppelkinematik, 3) Verstellring, 4) Schaufelverstellhebel . . 38

3.1. Darstellung des Gesamtfehlers ε_{ges} verschiedener Differenzenquotienten über der Schrittweite h für die Funktion $J(\alpha) = \frac{2\alpha-7}{\alpha}$ ausgewertet an der Stelle $\alpha = 4$ 54
3.2. Beispielhafte Auswirktung des Zielfunktionalrauschens auf den Gesamtfehler bei der Ableitungsberechnung mithilfe des Vorwärtsdifferenzenquotienten sowie des zentralen Differenzenquotienten für die Funktion $J(\alpha) = \frac{2\alpha-7}{\alpha}$ ausgewertet an der Stelle $\alpha = 4$ 55
3.3. Darstellung der Zerlegung einer beispielhaften Optimierungsprozesskette in Teilprozessen bis hin zu Elementarfunktionen 57
3.4. Berechnungsgraphen einer primalen Auswertung (a), eines AD-Vorwärtsmodus (b) sowie eines AD-Rückwärtsmodus (c). Schwarze Pfeile stellen eine primale Auswertung dar. Rote beziehungsweise blaue gestrichelte Pfeile stellen Ableitungen im jeweiligen Modus dar. 59
3.5. Schematische Darstellung des Reverse Accumulation Ansatzes. Die adjungierte Berechnung nutzt das konvergierte Ergebnis der primalen Lösung q_*. Die Anzahlen der Iterationsschritte der beiden Berechnungen n und m sind voneinander unabhängig. 69
3.6. Schematischer Berechnungsgraph einer vereinfachten Prozesskette ausgehend von einer Diskretisierung x und einem initialen Strömungszustand q_0 mit Strömunglösung q_n und Ergebnisgröße J. 70

3.7. Schematische Darstellung des Black Box Ansatzes. Zwischenergebnisse resultieren aus den Termen auf den am Ergebnis eintreffenden durchgezogenen Pfeilen. Bei mehreren eintreffenden Pfeilen sind die jeweiligen Terme zu addieren. Mit gestrichenen Linien verbunden sind Zustände die einer definierten Iteration zuzuordnen sind und im Gegensatz zum Reverse Accumulation eine physikalische Bedeutung haben. 71

4.1. Darstellung der konventionellen Prozesskette. Die jeweils verwendeten Werkzeuge sind kursiv gesetzt. 74
4.2. Darstellung der Profilparameter am Gesamtprofil links, sowie beispielhaft an der Vorderkante rechts. 75
4.3. Darstellung der hybriden Prozesskette zur Durchführung einer Gradientenbestimmung. Die jeweils verwendeten Werkzeuge sind kursiv gesetzt. 86
4.4. Schematische Darstellung der Verstellkinematik. Durch eine Verstellung des Aktuators werden vier Verstelleitgitter simultan verdreht. Die Stärke der jeweiligen Verdrehungen ist von den jeweiligen Hebellängen abhängig. 88
4.5. Schematische Darstellung einer zulässigen Lage der Verstellhabel (a) und einer zu vermeidenden Totpunktstellung eines Verstellhebels (b). Kreise stellen dabei Drehgelenke, ausgefüllte Kreise ortsfeste Drehgelenke dar. 88
4.6. Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{IGV}, und SVH_{IGV} auf den Verstellwinkel δ_{IGV}. 90
4.7. Streubreite möglicher Verstellwinkel des Vorleitrades anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{IGV} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{IGV} und RVH_{IGV} (blau). . 90

5.1. Schematische Meridionalansicht des zu optimierenden Hochdruckverdichters. 91
5.2. Darstellung der zu betrachtenden Lastpunkte in einem schematischen Verdichterkennfeld 93
5.3. Auftragung der Verstellwinkel für Vorleitrad (IGV), Stator 1 (S1), Stator 2 (S2) und Stator 3 (S3) über der Aktuatorposition der Verstellkinematik 95
5.4. Darstellung der Blocktopologie der strukturierten 3D-Vernetzung eines Nabenprofilschnittes anhand einer stark veränderten Originalgeometrie des IGVs. Eine sogenanntes Halbspaltnetz ist enthalten. 96
5.5. Detailansichten des 3D-Netzes an stark veränderten Originalgeometrien . . . 97
5.6. Farbige Auftragung des Wirkungsgrades für Betriebspunkt N100-WL über dem reduzierten Massenstrom am Strömungsaustritt und dem Totaldruckverhältnis. Daten aus der realen Prozesskette bestätigen die Erkenntnisse aus den 0D-Betrachtungen. 99
5.7. Darstellung der geometrischen Einschnürung eines Schaufelprofils. 101
5.8. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung 106
5.9. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-WL* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 107

5.10. Darstellung der in Umfangsrichtung massengemittelten radialen Massenstrom- sowie Strömungswinkelverteilung am Stator 2 bei Betriebspunkt N71-WL. Es ist die Basisgeometrie sowie eine Geometrie mit ausgelenktem Parameter V_k3 dargestellt. Die Änderung des Parameters entspricht dem Aufdrehen von Stator 2 um 0.12°. Es sind die Verläufe für den Einströmrand (In) und den Ausströmrand (Out) von Stator 2 dargestellt. 108
5.11. Darstellung der Sensitivitätsinformation für die Parameter S3, V1 und V9 über der logarithmisch aufgetragenen Schrittweite h 110
5.12. Konvergenzverläufe der L_2-Residuen für die primale Berechnung $R_{L_2,\text{primal}}$ und die Berechnung im Adjungiertenverfahren mit Reverse Accumulation (RA) auf Basis der primalen Lösung bei 10500 Iterationen $R_{L_2,\text{RA}[10500]}$. Parallel ist der isentrope Wirkungsgrad η_{is} mit der rechten y-Achse aufgetragen. Die rechte y-Achse ist nicht logarithmisch. 112
5.13. Auftragung der L_2-Residuen des Adjungiertenverfahrens über der Iterationszahl für die Rechnung auf Basis der Lösung nach 10500 bzw. 6622 primalen Iterationen. Es sind keine Unterschiede erkennbar. Parallele Darstellung der dazugehörigen Wirkungsgradsensitivitäten auf der rechten Achse, ausgewertet nach jedem 1000ten Iterationsschritt. Zur Definition des Konvergenzkriteriums des Adjungiertenverfahrens ist der L_1-Residuenverlauf für Reverse Accumulation nach 6622 primalen Schritten aufgetragen. 113
5.14. Auswertung der adjungierten Lösungen anhand von 10 Parametern. Die Lösungen unterscheiden sich in der primalen Iterationszahl (linke Zahl in der eckigen Klammer) auf deren Basis die Berechnung im Adjungiertenverfahren gestartet wurde und in der Iterationszahl das Adjungiertenverfahrens (rechte Zahl in der eckigen Klammer) im Reverse Accumulation Verfahren 114
5.15. L_2-Residuen des Adjungiertenverfahrens in Abhängigkeit der primalen Iterationszahl (linke Zahl in der eckigen Klammer) und der zur Stabilisierung verwendeten Methoden (rechter Wert in der eckigen Klammer). Schwarze, blaue und grüne Kurve liegen ab etwa Iteration 1500 nahezu deckungsgleich übereinander. 116
5.16. Auswertung der adjungierten Lösungen aus Abbildung 5.15 anhand von 10 über den Verdichter verteilten Parametern. Parameter 10 ist eine Parameteränderung, welche eine der zu stabilisierenden Stellen direkt beeinflusst. 117
5.17. Konvergenzverläufe der L_1-Residuen des Adjungiertenverfahrens und - rechts aufgetragen - Wirkungsgradsensitivitäten (ausgewertet anhand eines beispielhaften Parameters) auf Basis der primalen Lösung nach 6622 primalen Iterationen durch verschiedene Startlösungen des Adjungiertenverfahrens (rechter Wert in der eckigen Klammer). 118

6.1. Verdichterkennfeld des initialen Hochdruckverdichters. Die für die Optimierung verwendeten Betriebspunkte sind speziell gekennzeichnet. Die in Tabelle 6.1 ausgeführte Optimierungsaufgabe ist schematisch angedeutet. Die rot eingezeichneten Nebenbedingungen sind der Übersichtlichkeit halber nicht maßstabsgetreu verzeichnet und nur qualitativ zu verstehen. 124

6.2. Verläufe der Zielgröße sowie der Nebenbedingungen für die Optimierungen Opt_A, Opt_B und Opt_C. Der Startwert ist für alle Optimierungen gleich und erfüllt alle Nebenbedingungen. 127
6.3. Verdichterkennfelder der drei Optimierungsergebnisse Opt_A, Opt_B und Opt_C im Vergleich zur Initiallösung. Die im Intervallverfahren ermittelten Pumpgrenzpunkte sind jeweils mit der gepunkteten Linie verbunden. 129
6.4. Ausschnitt aus dem in 6.3 dargestellten Kennfeld für die Kennlinie N92. Große ausgefüllte Symbole beschreiben den Betriebspunkt N92-WL, große weiß gefüllte Symbole den Betriebspunkt N92-PG. 130
6.5. Stufenkennfelder für die Kennlinie N92 aller Verdichterstufen. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,N100-WL}} = 0.0125$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\Pi = 0.025$. 131
6.6. Wirkungsgrad-Stufenkennfelder für die Kennlinie N92 aller Verdichterstufen. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,N100-WL}} = 0.0125$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\eta_{is} = 1\%$-Punkt. 132
6.7. Verstellung der Leitgitter relativ zur Ausgangsstellung. Positive Werte bedeuten ein Aufdrehen, d.h. eine druckseitigere Anströmung des stromab befindlichen Rotors, wie es in Abbildung 2.7 eingeführt wurde. 132
6.8. Dimensionslose Stufenkennfelder für die Stufen 1-4 für die Drehzahl N92. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\Psi = 0.05$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\varphi = 0.01$. 133
6.9. Mit dem dynamischen Eintrittsdruck entdimensionalisierter Totaldruckverlust über dem Schaufel-relativen Anströmwinkel für die Kennlinie N92. Die Gitterbreite in x-Richtung beträgt jeweils $\Delta\alpha_0/\Delta\beta_0 = 1°$, die Gitterbreite in y-Richtung jeweils $\Delta\omega = 0.005$. 133
6.10. Verläufe der Zielgröße sowie der Nebenbedingungen für die Optimierungen Opt_A, Opt_B, Opt_C und Opt_D$_C$, welche auf Basis der besten Lösung von Opt_C gestartet wurde. 136
6.11. Ausschnitt aus den Verdichterkennfeldern der besten Lösungen von Opt_C und Opt_D$_C$ für die Kennlinie N92. Große ausgefüllte Symbole beschreiben den Betriebspunkt N92-WL, große weiß gefüllte Symbole den Betriebspunkt N92-PG. 137
6.12. Verstellung der Leitgitter relativ zur Ausgangsstellung. Positive Werte bedeuten ein Aufdrehen, d.h. eine druckseitigere Anströmung des stromab befindlichen Rotors. 137
6.13. Darstellung der Auswertungen der Liniensuche für die Iterationen 24, 25 und 26. Für ausgegraute Schrittweiten sind die Betriebspunkte N71-WL oder N71-PG nicht konvergiert und damit ungültig. Alle Liniensuchen zeigen an Stelle 0 in Richtung geringerer Nebenbedingungsverletzungen. 138
6.14. Darstellung der berechneten Durchlaufzeit für eine Optimierungsiteration auf Basis der hybriden Prozesskette in der Gradientenbestimmung und der konventionellen Prozesskette in der Liniensuche. Die Breite der jeweiligen Balken skaliert mit der Anzahl der an der Berechnung beteiligten CPUs. 140

A.1. Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S1}, und SVH_{S1} auf den Verstellwinkel δ_{S1}. 174
A.2. Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S1 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S1} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S1} und RVH_{S1} (blau). 174
A.3. Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S2}, und SVH_{S2} auf den Verstellwinkel δ_{S2}. 175
A.4. Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S2 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S2} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S2} und RVH_{S2} (blau). 176
A.5. Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S3}, und SVH_{S3} auf den Verstellwinkel δ_{S3}. 177
A.6. Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S3 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S3} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S3} und RVH_{S3} (blau). 177
A.7. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung 178
A.8. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 179
A.9. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung 180
A.10. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-WL* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 181
A.11. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung . . . 182
A.12. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 183
A.13. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung 184
A.14. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-WL* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 185
A.15. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung . . . 186
A.16. Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung 187
A.17. Verstellleitgitter-Winkel für die drei Kennlinien N100, N92, N71 für die Lösungen von Opt_B, Opt_C und der Approximation der Lösung von Opt_B mithilfe der in Opt_C verwendeten gekoppelten Parametrisierung. 189

Tabellenverzeichnis

3.1. Verhalten der Hauptfehlerterme sowie Konsistenzordnungen bei Diffenzenquotienten mit unterschiedlicher Anzahl an zusätzlichen Stützstellen 53
3.2. Beispielhafte Elementarfunktionen und deren Ableitungen 58
3.3. AD-Vorwärtsmodus ausgeführt für die Beispielfunktion (3.23) 60
3.4. AD-Rückwärtsmodus ausgeführt für die Beispielfunktion (3.23) 62

4.1. Auflistung der Profilparameter und deren Beschreibungen 76

5.1. Auflistung der in den Optimierungen verwendeten Profilparameter. Die Gesamtzahl in der rechten Spalte ergibt sich aufgrund der Anzahl je Profilschnitt, multipliziert mit der Anzahl an radialen Stützstellen je Schaufel 4 und der Anzahl an Schaufeln 9. 92
5.2. Auflistung und Grenzen der Verstellstator-Parameter für den ungekoppelten und den gekoppelten Modus 94
5.3. Darstellung der Netzeigenschaften im Vergleich der Betriebspunkte 96
5.4. Optimierungsbedingungen für den Betriebspunkt N100-WL 97
5.5. Vorstellung der in den Studien verwendeten Parameter. Die Spalte *Einflussbereich* bezeichnet die Drehzahllinien, deren Betriebspunkte von diesem Parameter beeinflusst sind. Die Basisschritteweite bezeichnet diejenige Schrittweite auf die in den folgenden Studien normiert wird. 104

6.1. Definition der Optimierungsaufgabe. Mit * gekennzeichnete Größen sind die Werte der jeweiligen Ausgangslösung. 121
6.2. Definition der Ersatz-Optimierungsaufgabe. Mit * gekennzeichnete Größen sind die Werte der jeweiligen Ausgangslösung. 122
6.3. Übersicht der nachfolgend ausgeführten Mehrpunktoptimierungen und die jeweils verwendeten Parametersätze. Die Bezeichnungen für die Beschaufelungs- und VGV-Parametrik entsprechen dabei den in Unterabschnitt 5.1.1, Tabelle 5.1 bzw. Unterabschnitt 5.1.2, Tabelle 5.2 getroffenen Definitionen. 123
6.4. Übersicht der Optimierungsergebnisse nach erfolgter Kennfeldberechnung bzgl. der Optimierungsaufgabe aus Tabelle 6.1. Das Zielfunktional ist fett markiert. Verletzte Nebenbedingungen sind rot, erfüllte Nebenbedingungen grün gesetzt. 128
6.5. Herleitung der durch die hybride Prozesskette erreichten Beschleunigung (verglichen zur konventionellen Prozesskette) auf Basis dreier verschiedener Bilanzierungen. Der Betrachtung liegt eine Parameterzahl von 155 wie in Opt_C als auch die gleiche Anzahl Zielgrößen von Opt_C zugrunde. 143

6.6. Erreichte Beschleunigungswerte (verglichen zur konventionellen Prozesskette) auf Basis dreier verschiedener Bilanzierungen. Der Betrachtung liegt eine Parameterzahl von 587 wie in Opt_D_C als auch die gleiche Anzahl Zielgrößen von Opt_D_C zugrunde. 144

A.1. Darstellung der Durchlaufzeiten und Rechenaufwände für die einzelnen Prozesskettenbestandteile 191

A. Anhang

A.1. Navier-Stokes Gleichungen

Als Navier-Stokes Gleichung werden hier die drei Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik zusammengefasst. Daraus entstehen fünf partielle Differentialgleichungen. Es handelt sich um die Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls in alle drei Raumrichtungen sowie die Energiegleichung. Im folgenden werden sie in differentieller konservativer Form dargestellt.
Die Gleichung für den Massenerhaltungssatz ergibt sich zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \tag{A.1}$$

Sie besagt, dass die Masse eines ortsfesten, infinitesimal kleinen Elements im Strömungsraum sich in dem Maße ändert, wie Masse über die Elementgrenzen ein- oder ausströmt.

Aus der Impulserhaltungsgleichung ergibt sich für die x-Richtung beispielhaft

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}_{\text{Oberflächenkräfte}} + \underbrace{\rho f_x}_{\text{Volumenkräfte}} = \left(\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}\right)_x + \rho f_x \quad . \tag{A.2}$$

Die Änderung des Impulses hängt somit sowohl von den Impulsflüssen über die Elementgrenzen als auch von Quelltermen ab. Quellterme können Oberflächenkräfte wie Druckkräfte und Spannungen oder Volumenkräfte wie die Zentrifugalkraft in der Turbomaschine sein. Oberflächenkräfte lassen sich mithilfe des Spannungstensors

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

ausdrücken. Dieser lässt sich mithilfe des Newtonschen Reibungsansatzes für Schubspannungen und dem Stokesschen Reibungsansatz für die Diagonalelemente mit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -p + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}\right) & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & -p + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}\right) \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

ausdrücken.

Der Energieerhaltungssatz ergibt sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\text{Wärmeleitungsterme}}$$
$$+\underbrace{\rho\dot{q}}_{\text{Wärmequellterme}}+\underbrace{\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(wp)}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}}_{\text{Arbeitsterme der Oberflächenkräfte}}$$
$$\underbrace{+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}}_{\text{Arbeitsterme der Oberflächenkräfte}}+\underbrace{\rho\vec{f}\cdot\vec{V}}_{\substack{\text{Arbeitsterm}\\ \text{der Volumenkräfte}}}\quad. \tag{A.5}$$

Die Energie eines infinitesimalen Elements ändert sich abhängig von dem Energiefluss über die Grenzen des Elements sowie über Quellterme bestehend aus Wärme- und Arbeitstermen. Die Spannungsterme τ lassen sich wiederum durch die jeweiligen Einträge aus (A.4) ersetzen.

Aufbauend auf diesen Gleichungen ergeben sich mit ρ, u, v, w, p, k, e, μ und T neun Unbekannte für nur fünf Gleichungen. Um Bestimmtheit herzustellen werden noch vier Gleichungen benötigt. Diese sind die ideale Gasgleichung

$$p=\rho\cdot R\cdot T, \tag{A.6}$$

die Umrechnung der Temperatur auf die innere Energie e mithilfe einer konstanten spezifischen Wärmekapazität c_v

$$e=c_v\cdot T, \tag{A.7}$$

das Sutherlandgesetz, welches aus einer Referenzviskosität $m_0=1.7198\cdot 10^{-5}\frac{kg}{m\cdot s}$ und der Referenztemperatur $T_0=273K$ die dynamische Viskosität

$$\mu=\mu_0\cdot\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{T_0+110K}{T+110K} \tag{A.8}$$

bestimmt, sowie die Prandtlzahl für Luft

$$Pr=\frac{\mu\cdot c_p}{k}=0.72, \tag{A.9}$$

welche spezifisch für jedes Gas angegeben werden kann.

A.2. Transportgleichungen des k-ω-Turbulenzmodells

Für das Zweigleichungsturbulenzmodell k-ω nach Wilcox werden zwei Transportgleichungen definiert. Für die turbulente kinetische Energie gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k)=\frac{1}{Re_0}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-Re_0\beta^*\rho\omega k+\frac{1}{Re_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\sigma^*\mu_{turb})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] . \quad \text{(A.10)}$$

Für die bezogene Dissipationsrate ω gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j\omega)=\alpha\frac{\omega}{k}\frac{1}{Re_0}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-Re_0\beta\rho\omega^2+\frac{1}{Re_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\sigma\mu_{turb})\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right] . \quad \text{(A.11)}$$

Die Konstanten werden nach [81] festgelegt zu:

$\alpha = 5/9$
$\beta = 3/40$
$\beta^* = 9/100$
$\sigma = 1/2$
$\sigma^* = 1/2$

Die Reynoldszahl Re_0 dient der Entdimensionalisierung und definiert sich zu

$$Re_0=\frac{a_0\cdot L_0\cdot\rho_0}{\mu_0} , \quad \text{(A.12)}$$

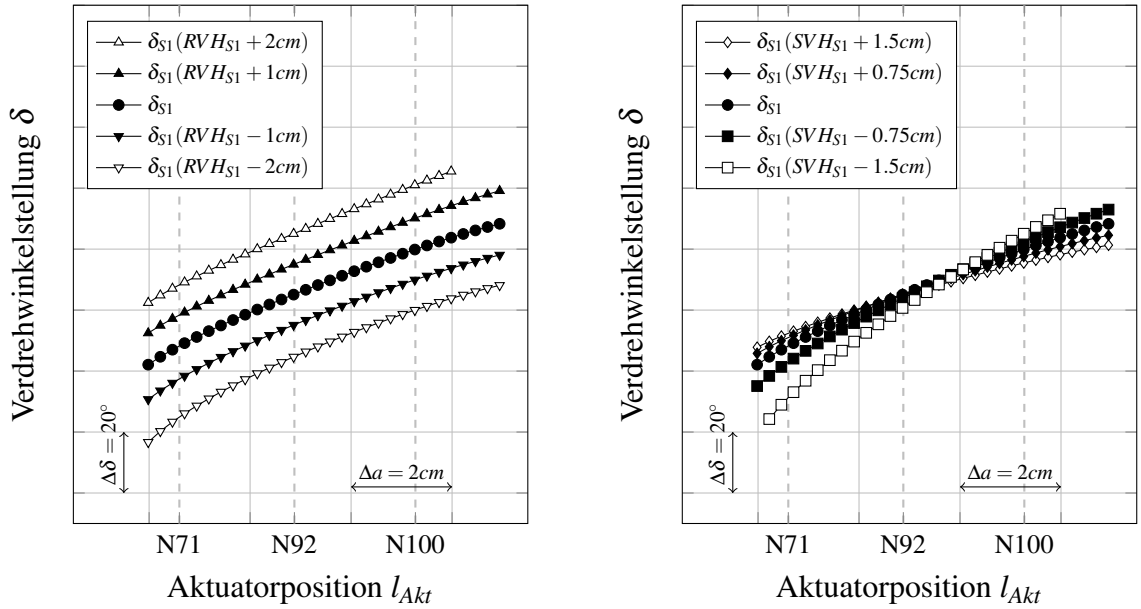
wobei a_0 eine Referenzschallgeschwindigkeit, L_0 eine Referenzlänge. ρ_0 eine Referenzdichte und μ_0 die aus dem Sutherland-Gesetz (A.8) berechnete Referenzviskosität darstellt.

A.3. Untersuchung der VSV-Parametrik

Die Bandbreite der möglichen Verstellwinkel auf Basis der in Abschnitt 4.4 vorgestellten Parametrik wird im Folgenden dargelegt. Neben den bereits in Abschnitt 4.4 für das Vorleitrad dargestellten Zusammenhängen zwischen den Parametern l_{Akt}, RVH_{IGV} und SVH_{IGV}, werden die Zusammenhänge für die jeweiligen Größen für die Verstellleitergitter S1, S2 und S3 dargelegt.

A.3.1. S1

Die Einflüsse der Parameter RVH_{S1} und SVH_{S1} sind in Abbildung A.1 dargestellt. Die mit der gewählten Parametrik möglichen Verstellwinkel sind in Abbildung A.2 über der Aktuatorposition dargestellt.



(a) Einfluss RVH_{S1} (b) Einfluss SVH_{S1}

Abbildung A.1.: Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S1}, und SVH_{S1} auf den Verstellwinkel δ_{S1}.

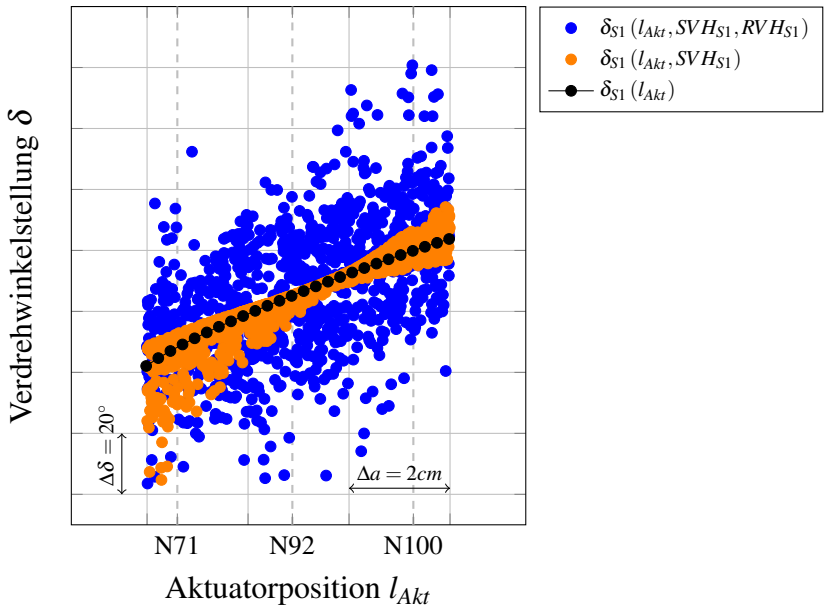
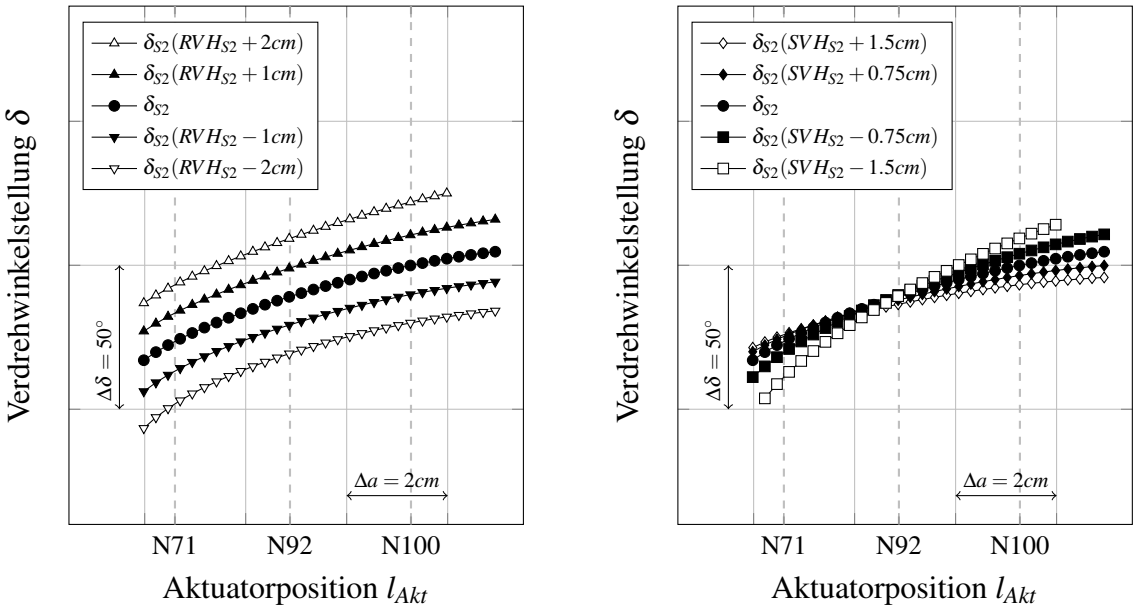


Abbildung A.2.: Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S1 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S1} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S1} und RVH_{S1} (blau).

A.3.2. S2

Die Einflüsse der Parameter RVH_{S2} und SVH_{S2} sind in Abbildung A.3 dargestellt. Die mit der



(a) Einfluss RVH_{S2}

(b) Einfluss SVH_{S2}

Abbildung A.3.: Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S2}, und SVH_{S2} auf den Verstellwinkel δ_{S2}.

gewählten Parametrik möglichen Verstellwinkel sind in Abbildung A.4 über der Aktuatorposition dargestellt.

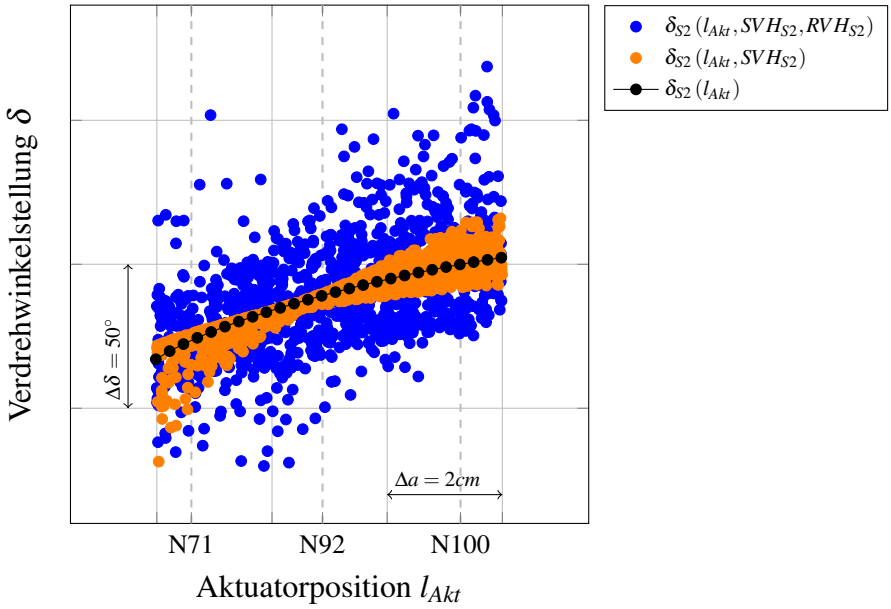
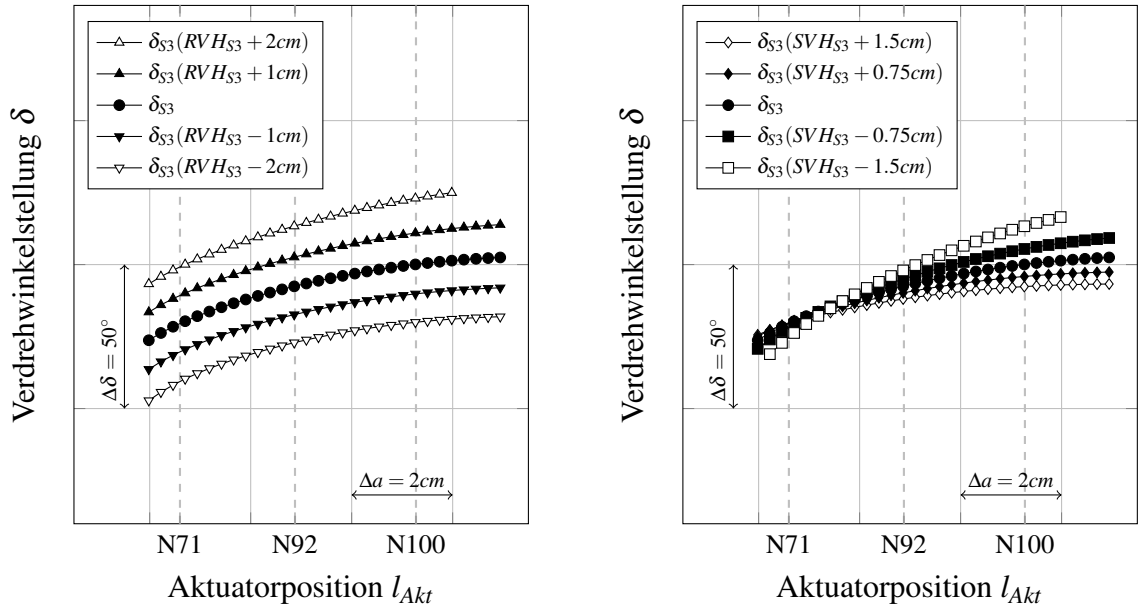


Abbildung A.4.: Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S2 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S2} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S2} und RVH_{S2} (blau).

A.3.3. S3

Die Einflüsse der Parameter RVH_{S3} und SVH_{S3} sind in Abbildung A.5 dargestellt. Die mit der gewählten Parametrik möglichen Verstellwinkel sind in Abbildung A.6 über der Aktuatorposition dargestellt.



(a) Einfluss RVH_{S3}

(b) Einfluss SVH_{S3}

Abbildung A.5.: Darstellung des Einflusses der Parameter l_{Akt}, RVH_{S3}, und SVH_{S3} auf den Verstellwinkel δ_{S3}.

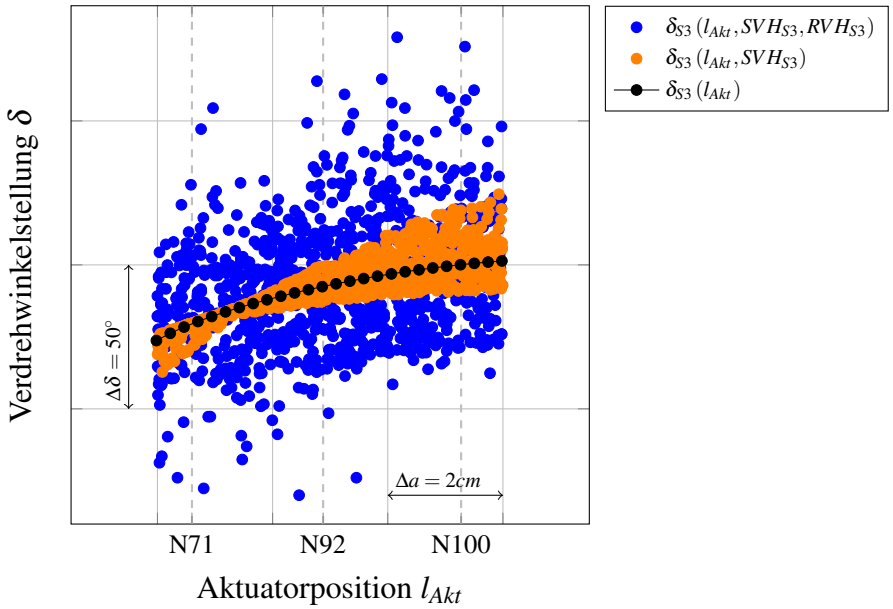


Abbildung A.6.: Streubreite möglicher Verstellwinkel des Verstellleitgitters S3 anhand eines Samplings unter Nutzung der Parameter l_{Akt} allein (schwarz), unter Nutzung von l_{Akt} und SVH_{S3} (orange) und unter Nutzung von l_{Akt}, SVH_{S3} und RVH_{S3} (blau).

A.4. Weitere Sensitivitätsstudien für die Betriebspunkte außerhalb des Auslegungspunktes

Die in Unterabschnitt 5.2.1 näher beschriebenen Auswertungen zur Sensitivität des Betriebpunktes *N100-WL* auf eine Auswahl an Geometrieparametern werden hier um die Betrachtungen der Betriebspunkte *N100-PG*, *N92-WL*, *N92-PG* und *N71-WL* und *N71-PG* ergänzt.

A.4.1. Betriebspunkt N100-PG

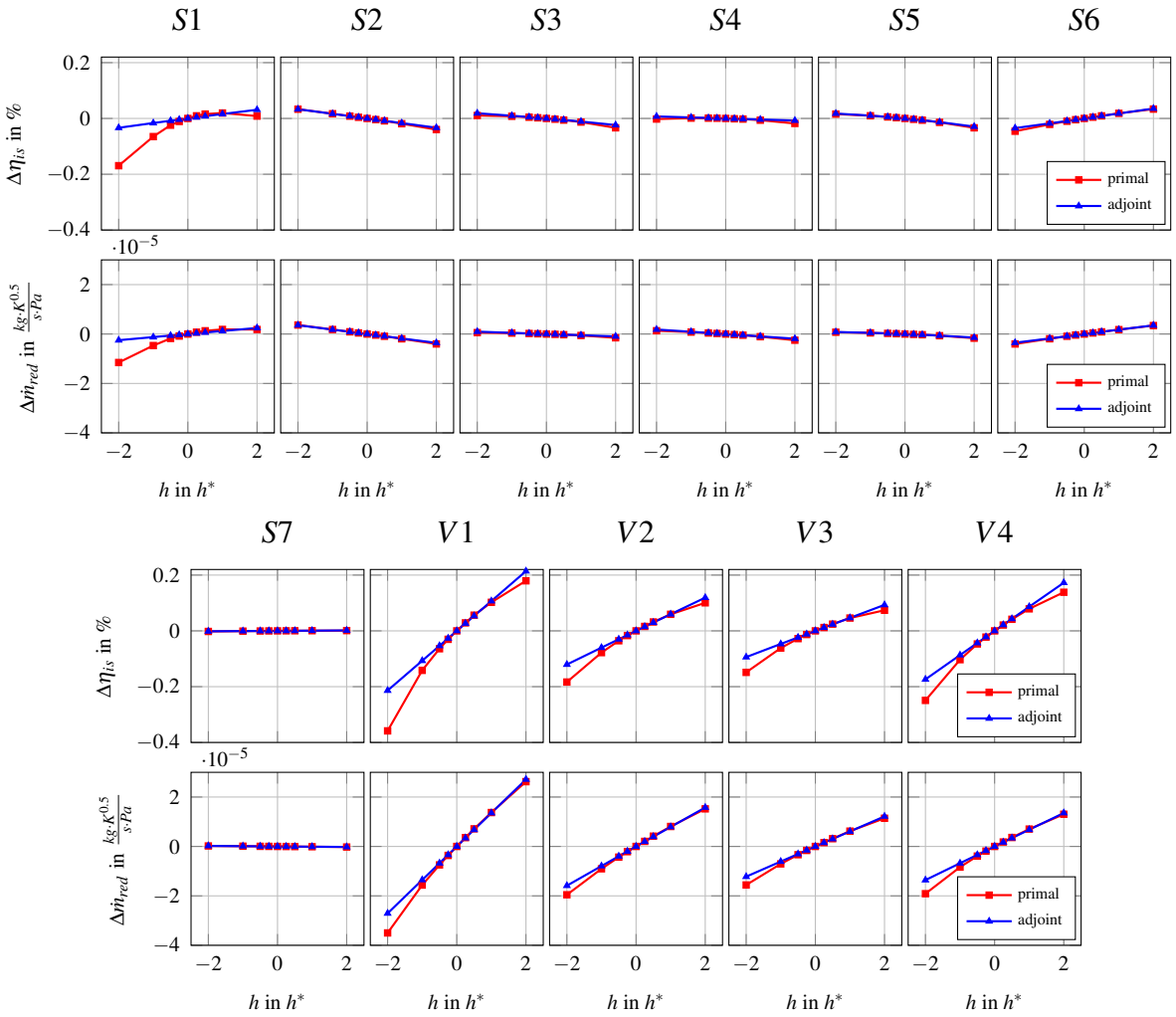


Abbildung A.7.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

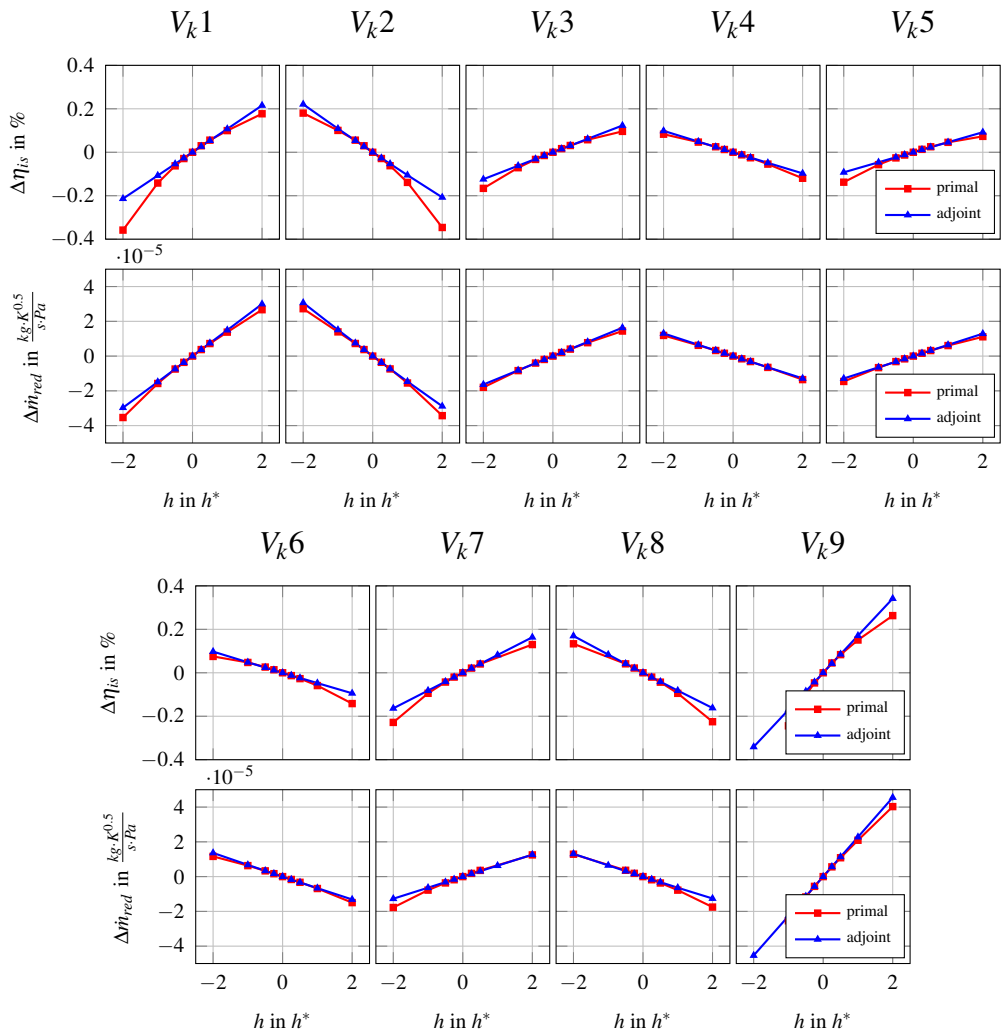


Abbildung A.8.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N100-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

A.4.2. Betriebspunkt N92-WL

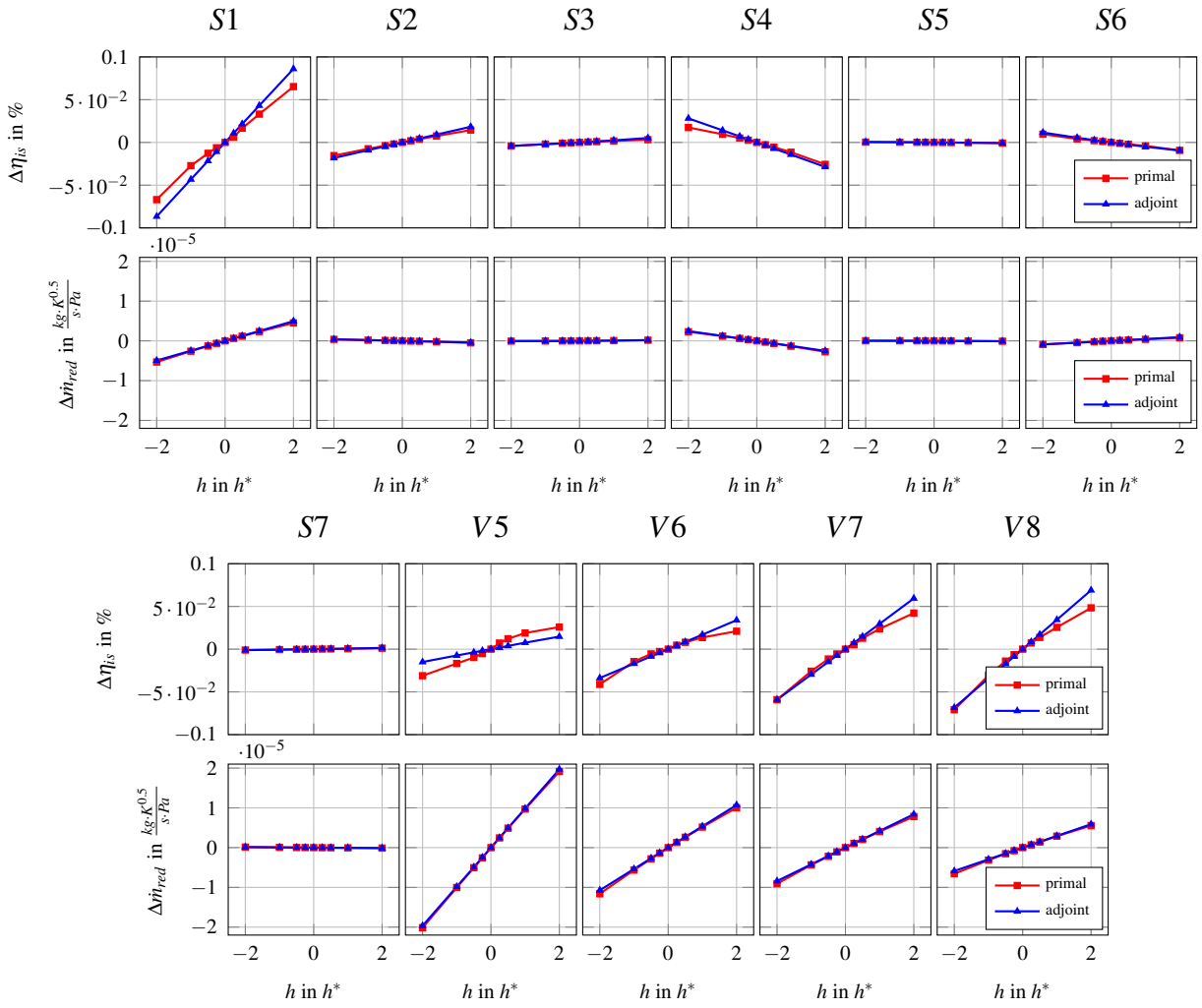


Abbildung A.9.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

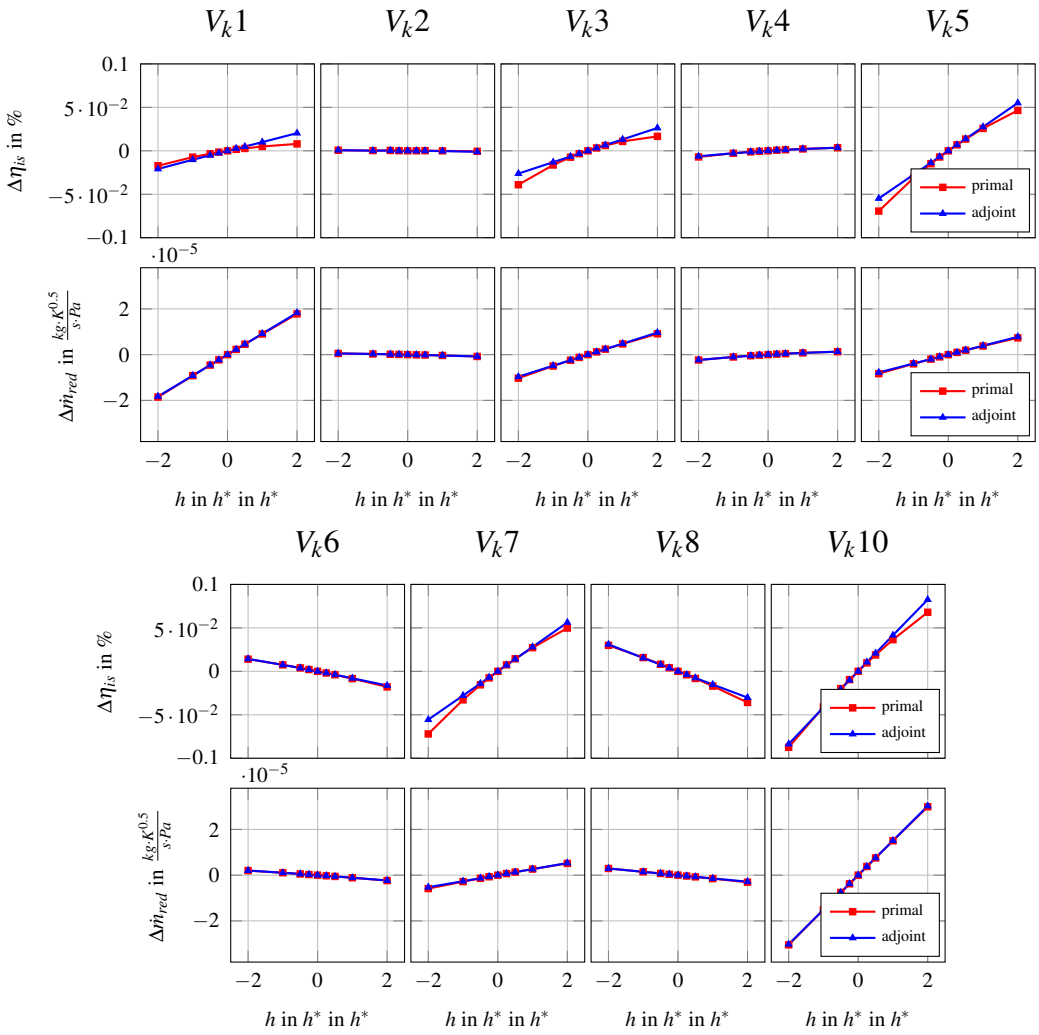


Abbildung A.10.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-WL* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

A.4.3. Betriebspunkt N92-PG

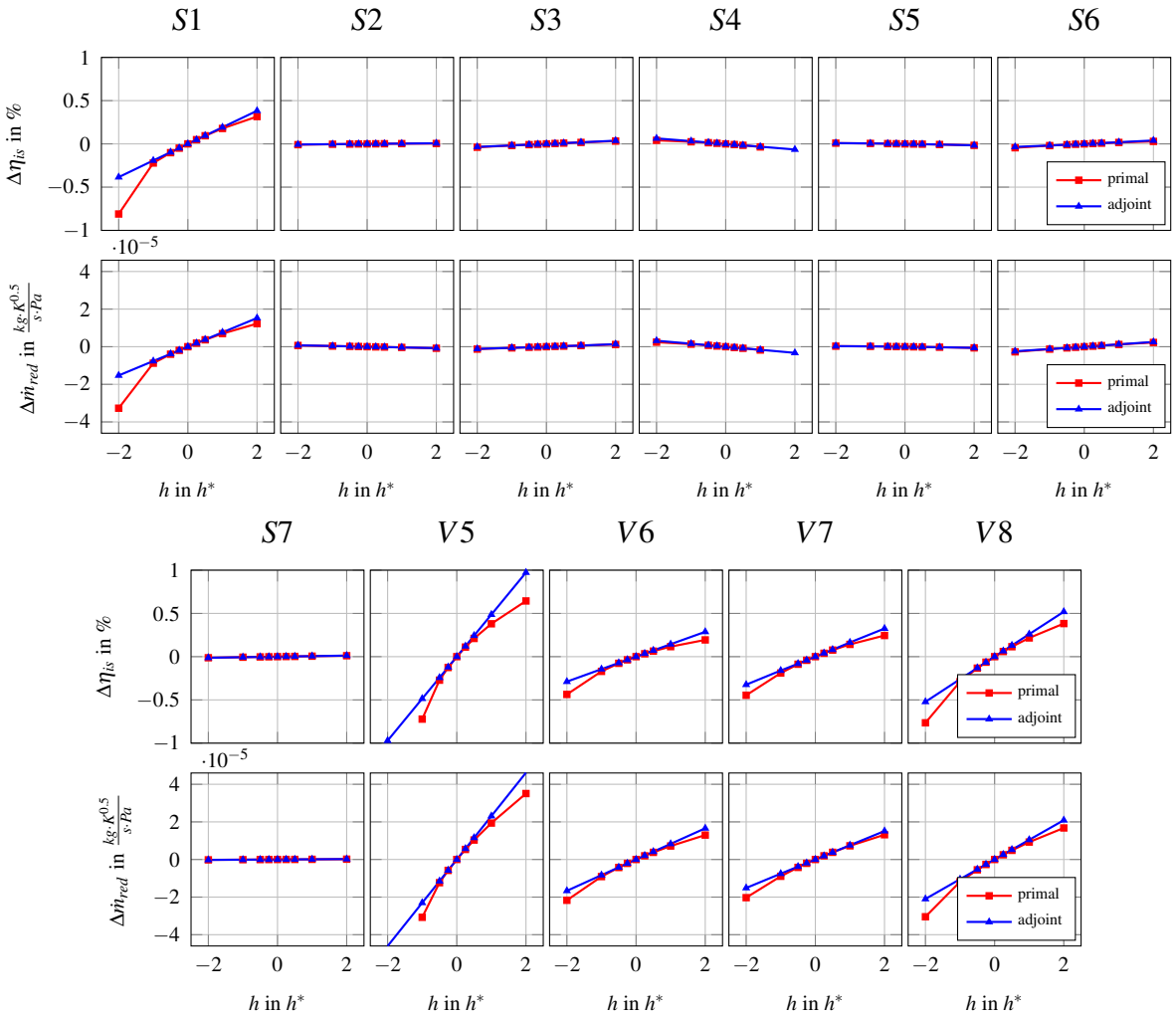


Abbildung A.11.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

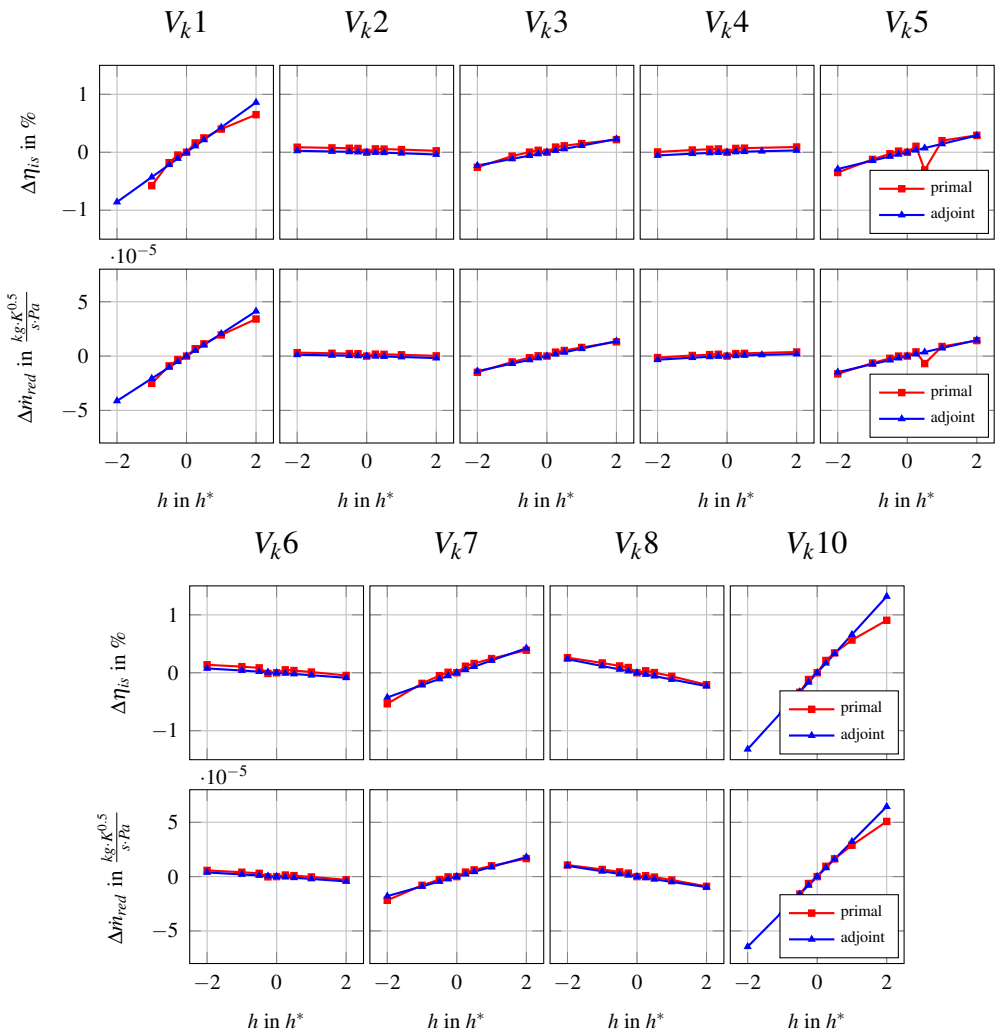


Abbildung A.12.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N92-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

A.4.4. Betriebspunkt N71-WL

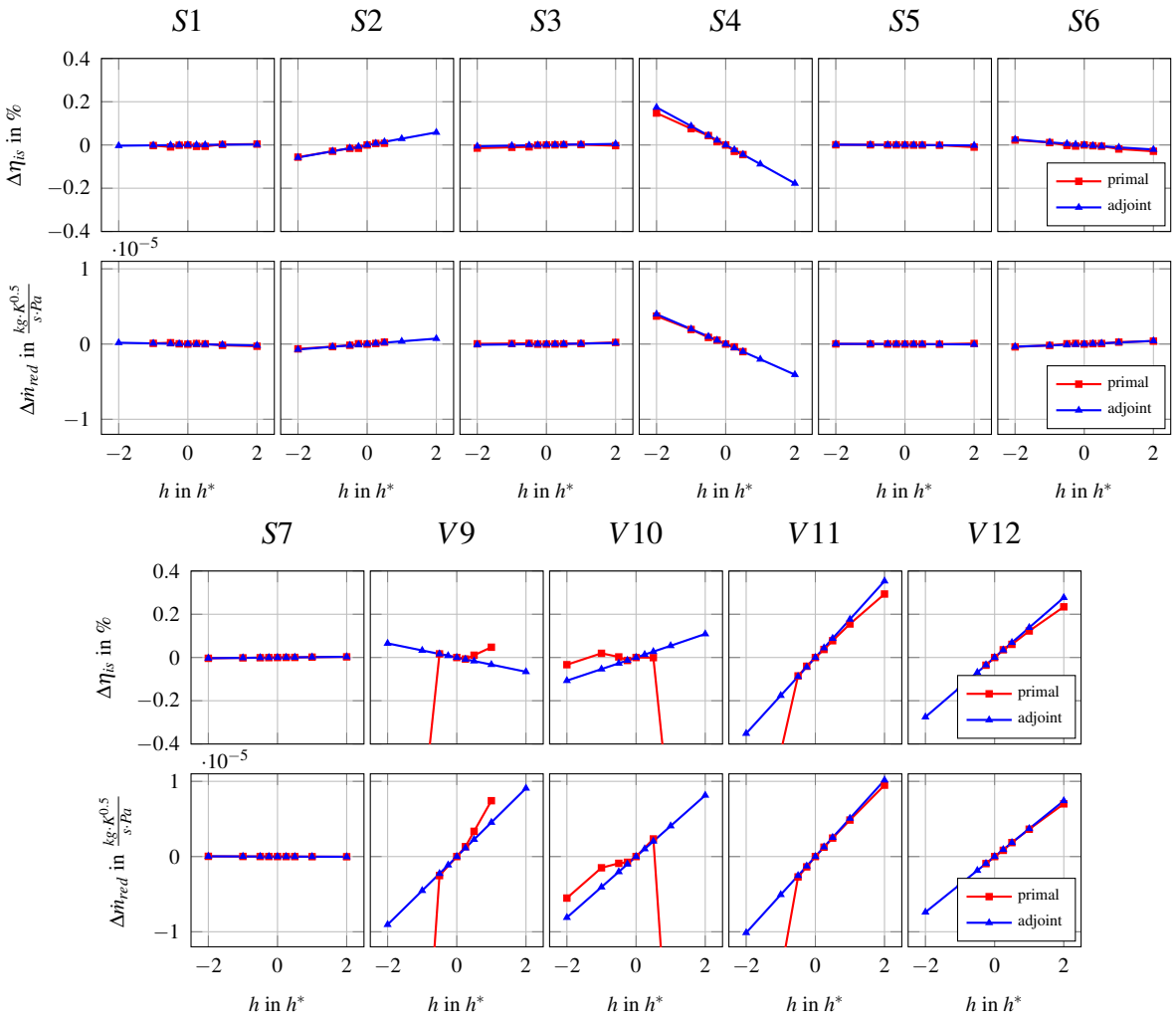


Abbildung A.13.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-WL* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

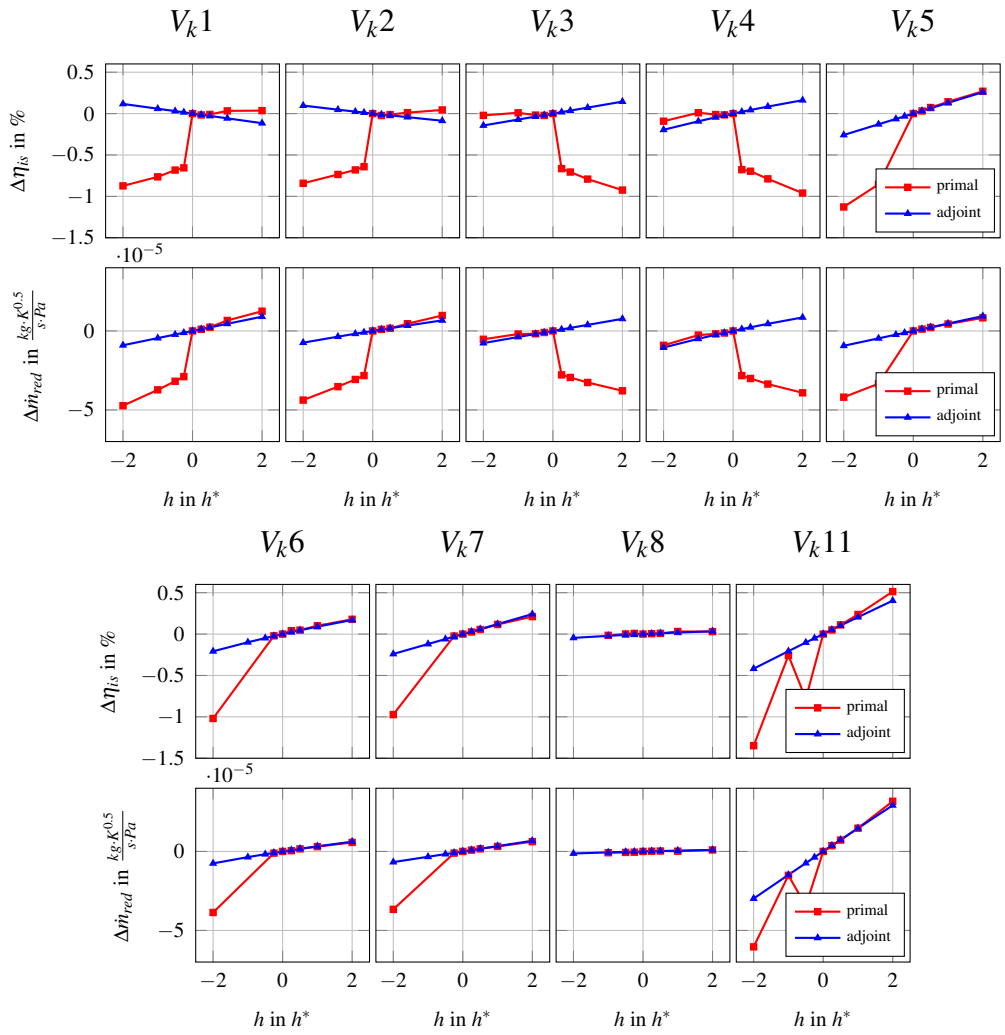


Abbildung A.14.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-WL* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

A.4.5. Betriebspunkt N71-PG

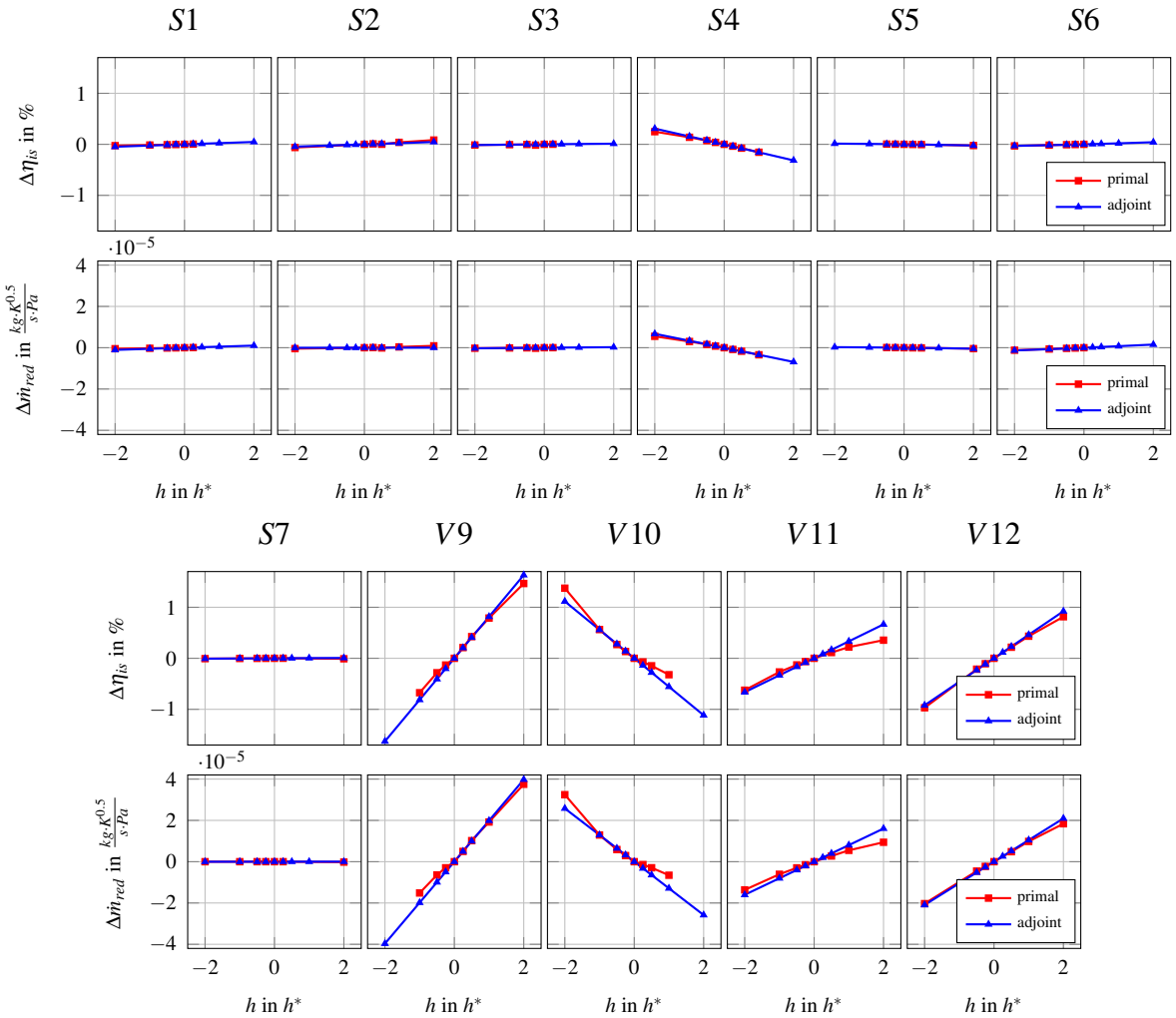


Abbildung A.15.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-PG* für die Schaufelparameter sowie die Parameter der Verstelleitgitter in der *ungekoppelten* Parametrisierung

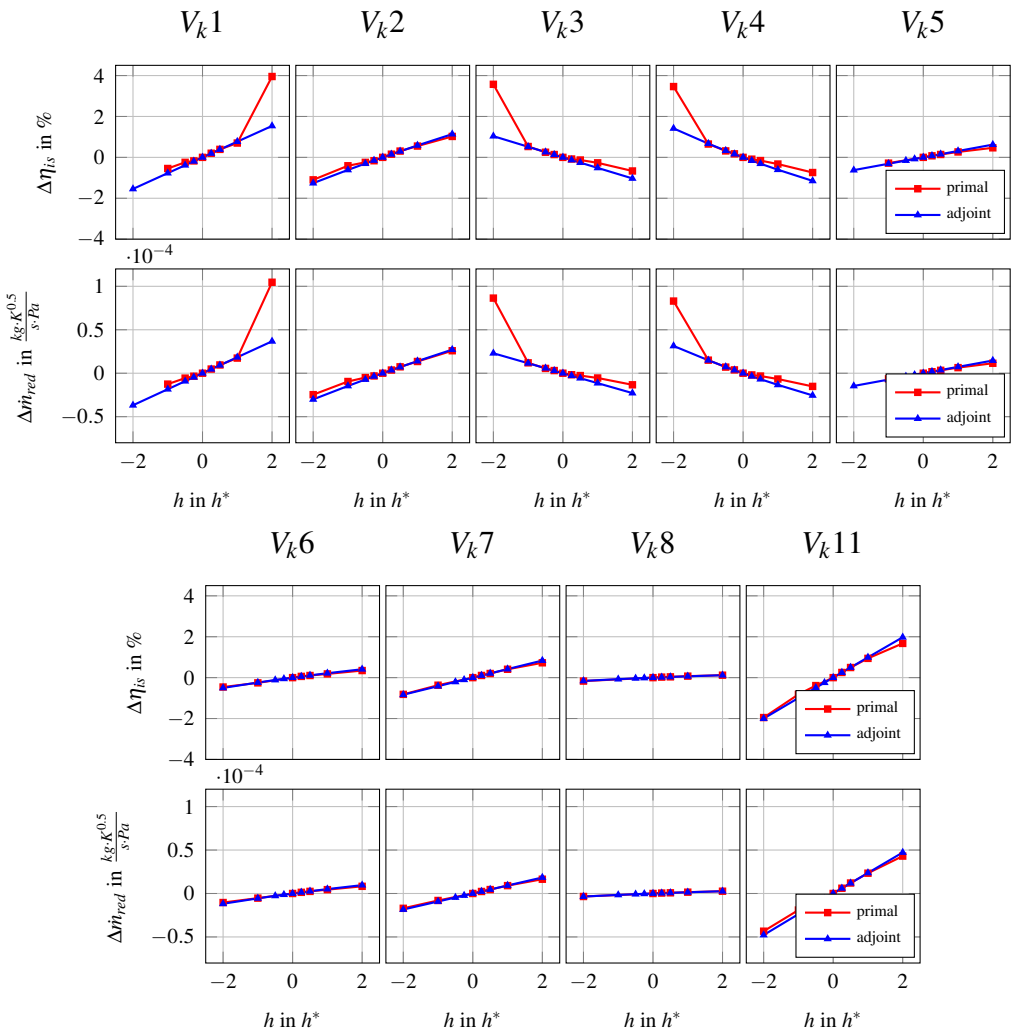


Abbildung A.16.: Sensitivitäts-Plots für den Lastpunkt *N71-PG* für die Parameter der Verstelleitgitter in der *gekoppelten* Parametrisierung

A.5. Herleitungen für Zielgrößenbetrachtungen

Im Folgenden soll Gleichung (5.3) aus Unterabschnitt 5.1.4.1 hergeleitet werden. Dazu muss in der Definition des isentropen Verdichterwirkungsgrades

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\frac{T_{t,2}}{T_{t,1}} - 1}, \tag{A.13}$$

zunächst die ungekannte Größe T_{t2} ersetzt werden. Mithilfe der Definition des Totaldruckverhältnisses und der Isentropenbeziehung

$$\frac{T_{t2}}{T_2} = \left(\frac{p_{t2}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \tag{A.14}$$

ergibt sich der Wirkungsgrad zu

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{T_2}{T_{t,1}} - 1}. \tag{A.15}$$

Die unbekannte Größe T_2 kann mithilfe der Massenstromdefinition

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot sin\alpha_2 \cdot A_2 \tag{A.16}$$

hergeleitet werden. Dazu wird ρ_2 in (A.16) mithilfe der idealen Gasgleichung

$$p_2 = \rho_2 \cdot R \cdot T_2 \tag{A.17}$$

und die Geschwindigkeit c_2 in (A.16) mithilfe der Machzahldefinition

$$Ma_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2}} \tag{A.18}$$

ersetzt. Es ergibt sich

$$\dot{m}_2 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} \cdot Ma_2 \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2} \cdot sin\alpha_2 \cdot A_2 = \frac{p_2}{\sqrt{R \cdot T_2}} \cdot Ma_2 \cdot \sqrt{\kappa} \cdot sin\alpha_2 \cdot A_2 \tag{A.19}$$

Die Machzahl lässt sich wiederum mit der Isentropenbeziehung

$$Ma_2^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_{t2}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \tag{A.20}$$

in (A.19) einsetzen. Die resultierende Gleichung

$$\dot{m}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{R \cdot T_2}} \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]} \cdot sin\alpha_2 \cdot A_2 \tag{A.21}$$

lässt sich, umgestellt nach T_2

$$T_2 = \frac{p_2^2}{R \cdot \dot{m}_2{}^2} \cdot \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \cdot sin^2\alpha_2 \cdot A_2^2, \tag{A.22}$$

in die Wirkungsgradformel (A.15) einsetzen. Es ergibt sich

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{p_2^2}{T_{t1} \cdot R \cdot \dot{m}_2{}^2} \cdot \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \cdot sin^2\alpha_2 \cdot A_2^2 - 1}. \tag{A.23}$$

Nach Ersetzen des Massenstroms $\dot{m}_2$ mithilfe der Definition des reduzierten Massenstroms

$$\dot{m}_{2,red} = \dot{m}_2 \frac{\sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}} \tag{A.24}$$

ergibt sich die in Unterabschnitt 5.1.4.1 genutzte Formel

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{p_2^2}{R \cdot \dot{m}_{2,red}^2 \cdot p_{t1}^2} \cdot \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \left[\left(\frac{\Pi \cdot p_{t1}}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \cdot sin^2\alpha_2 \cdot A_2^2 - 1}. \tag{A.25}$$

A.6. Approximation der Verstellgitterwinkel von Opt_B mithilfe der gekoppelten Parametrisierung

Um zu belegen, dass die Verstellgitterwinkel der besten Lösung aus Opt_B nicht mit der gekoppelten Parametrisierung erzeugt werden können, wurde die gekoppelte Parametrisierung aus Unterabschnitt 4.4.2 bzw. 5.1.2 einer Optimierung zugeführt. Ziel der Optimierung war es, die Verstellwinkel der besten Lösung von Opt_B wiederzugeben. Als Zielgrößen wurden dazu die Fehlerquadrate verwendet, welche sich aus den Differenzen der berechneten Winkel zu den Soll-Winkeln aus Opt_B ergeben. Die so enstandenen zwölf Fehlerquadrate wurden dem Gauß-Newton-Verfahren *optpp_g_newton* des Optimierungs-Frameworks *DAKOTA 5.2* [83] zugeführt und optimiert. Im Ergebnis in Abbildung A.17 wird deutlich, dass die Verstell-

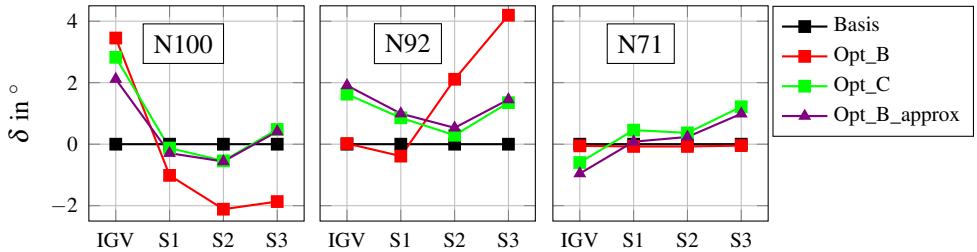


Abbildung A.17.: Verstellleitgitter-Winkel für die drei Kennlinien N100, N92, N71 für die Lösungen von Opt_B, Opt_C und der Approximation der Lösung von Opt_B mithilfe der in Opt_C verwendeten gekoppelten Parametrisierung.

winkel der besten Lösung von Opt_B nicht approximiert werden können. Insbesondere die bereits in Unterabschnitt 6.2.2 diskutierte und in Abbildung 6.7 dargestellte starke Auslenkung von Stator 3 und Stator 4 bei Drehzahl 92% konnten nicht abgebildet werden. Jedoch

hat Opt_C, ausgehend von der Basislösung, eine Verstellwinkelkombination gewählt, die im Rahmen der gekoppelten Parametrik geometrisch möglichst nah an die Verstellwinkelkombination von Opt_B angenähert ist, wie die Ähnlichkeit zwischen Opt_B_approx und Opt_C zeigt.
Ergänzend zur Approximation der Verstellwinkel, unterstützt auch folgende Überlegung die Begründung, warum die Approximation mithilfe der gekoppelten Parametrisierung zu keinem guten Ergebnis führen kann:

- Aus Abbildung A.17 für N100 von Opt_B zeigt sich, dass $\Delta\delta$ für das IGV deutlich positiv, das $\Delta\delta$ für Stator 3 deutlich negativ ist.
- Dies ist nicht allein durch eine veränderte Aktuatorstellung l_{Akt} möglich, da sonst die Auslenkung in gleicher Richtung erfolgt wäre, sondern bedarf einer Änderungen der Hebellängen RVH/SVH an IGV und/oder Stator 3.
- Da die Hebellängenänderungen auch für N71 gelten, sind durch die gekoppelte Parametrisierung auch bei N71 Unterschiede in der den $\Delta\delta$-Werten zu erwarten.
- Opt_B zeigt jedoch bei N71 nahezu keine Änderung der $\Delta\delta$-Werte. Eine Approximation mithilfe der gekoppelten Parametrisierung muss deshalb scheitern.

Damit ist gezeigt, dass der Optimierungsalgorithmus die freiere ungekoppelte Parametrisierung in Opt_B ausgenutzt hat und diese Verstellwinkelkonstellation nicht mit der gekoppelten Parametrisierung erreichbar gewesen wäre.

A.7. Durchlaufzeiten und Rechenaufwände

Im Folgenden sind die Durchlaufzeiten sowie die Rechenaufwände für die am Prozess beteiligten Prozesskettenbausteine aufgeführt. Die Werte stellen arithmetische Mittelwerte der während der Optimierung Opt_C ermittelten Zeiten dar. Für die Vernetzung kann kein eindeutiger Wert für die benutzten CPUs angegeben werden, da der Vernetzungsprozess in verschiedene Bestandteile gegliedert ist, welche unterschiedliche Anzahlen an CPUs nutzen. Für die pumpgrenznahen Betriebspunkte sind für die Geometriegenerieung und die Vernetzung keine Werte gegeben, da diese Betriebspunkte die gleiche Geometrie und das gleiche Netz wie die jeweiligen Arbeitslinienbetriebspunkte N*-WL aufweisen.

Betriebs-punkt	Geometrie-generierung (1 CPU)	Ver-netzung	Strömungs-lösung Grad. (64 CPUs)	adjStrömungs-lösung Grad. (64 CPUs)	Sens.-berechnung (24 CPUs)	Strömungs-lösung LS (32 CPUs)
Durchlaufzeiten in h						
N100-WL	0.10	0.03	1.93	(2 Funktionale) 5.84	0.30	3.54
N100-PG			4.34	3.52	0.30	7.18
N92-WL	0.10	0.03	2.35	3.58	0.30	4.39
N92-PG			4.11	4.71	0.30	7.65
N71-WL	0.10	0.03	3.90	4.55	0.30	6.99
N71-PG			4.36	6.46	0.30	7.20
Rechenaufwände in CPU·h						
N100-WL	0.10	0.21	123.53	(2 Funktionale) 374.02	7.20	113.43
N100-PG			277.64	225.04	7.20	229.91
N92-WL	0.10	0.21	150.50	229.12	7.20	140.45
N92-PG			263.04	301.59	7.20	244.79
N71-WL	0.10	0.21	249.61	291.21	7.20	223.83
N71-PG			279.18	413.22	7.20	230.46

Tabelle A.1.: Darstellung der Durchlaufzeiten und Rechenaufwände für die einzelnen Prozesskettenbestandteile

Lebenslauf des Verfassers

Bildungsweg

1996 - 2004:	Abitur, Götzinger Gymnasium, Neustadt in Sachsen
2005 - 2007:	Vordiplom, Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität Stuttgart
2008 - 2012:	Diplom, Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität Stuttgart
2009 - 2010:	Viermonatiger Aufenthalt an der Staatlichen Luft- und Raumfahrtuniversität (SSAU) in Samara (Russland) zum Zwecke des Verfassens einer Studienarbeit zum Thema „Auslegung und Konstruktion eines Getriebes für ein gegenläufiges Propfan-Triebwerk“
2011 - 2012:	Anfertigung einer Diplomarbeit zum Thema „Automatisierte Optimierung einer Turbinenschaufelgeometrie und Analyse des Strömungsfeldes hinsichtlich instationärer Effekte“ am DLR Institut für Antriebstechnik, Abteilung Turbine in Göttingen

Berufliche Tätigkeiten

2010 - 2011:	Studienbegleitende Arbeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Luftfahrtantriebe (ILA) der Universität Stuttgart, Tätigkeitsbereich: Analyse und Vergleich verschiedener Technologien zur drucksteigernden Verbrennung in Flugtriebwerken
2012 - 2021:	Entwicklungsingenieur in der aerodynamischen Methodenabteilung bei MTU Aero Engines AG in München
seit 2022:	CAE-Berechnungsingenieur bei der CFturbo GmbH in Dresden