

TA sl.

**FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG**

**Bericht Nr. 73**

**OPTIMIERUNG EINER DOPPELWANDIGEN ROHRLEITUNG**

**Sergej Rjasanov**

**UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
Fachbereich Mathematik  
Arbeitsgruppe Technomathematik  
Postfach 3049  
W-6750 Kaiserslautern**

**Juli 1992**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Das mathematisches Modell</b>	<b>4</b>
2.1	Wärmeleitung . . . . .	4
2.1.1	Dichte, spezifische Wärme . . . . .	5
2.1.2	Wärmeleitungskoeffizienten . . . . .	5
2.1.3	Wärmeübergangskoeffizienten . . . . .	6
2.1.4	Wärmestrahlung . . . . .	7
2.2	Abgasströmung . . . . .	17
2.3	Das Gleichungssystem . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Diskretisierung</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Computerrealisierung</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Parameterstudie für das Modell</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Optimierung der Rohrleitung</b>	<b>20</b>

# 1 Aufgabenstellung

Die Verringerung der Schadstoffemission ist gegenwärtig eine wichtige Aufgabe bei der Entwicklung neuer Fahrzeuge. Die durch die Einführung von geregelten Katalysatoren erzielte Wirkung kann praktisch nur durch die Verkürzung des benötigten Zeitraumes bis zum "Anspringen" des Katalysators weiter erhöht werden.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist ein neues Konzept (siehe [1]) vorgeschlagen worden, das sich u.a. durch folgende Merkmale auszeichnet:

- der doppelwandige Aufbau mit Isolierspalt;
- die gasdichte Außenwand mit Tragfunktion;
- die Gasführung durch dünnwandige Innenbleche...

Im Rahmen dieses Projektes sollten nachstehende Fragen behandelt werden:

- Berechnung des Temperaturfeldes in einem vereinfachten doppelwandigen Vorrohr (siehe Abb. 1) unter Berücksichtigung folgender physikalischer Prozesse:
  1. Abgasströmung im Innenrohr;
  2. Wärmeaustausch zwischen Abgas und Innenrohr;
  3. Wärmetransport durch Wärmeleitung von der Innenwand des Innenrohres bis zur Außenwand des Außenrohres;
  4. Wärmetransport durch Strahlung im Isolierspalt;
  5. Wärmeaustausch zwischen Außenrohr und Umgebung mit Berücksichtigung der Abstrahlung.
- Vergleich der erhaltenen numerischen Ergebnisse mit von der Firma "Gillet" durchgeführten Experimenten, um die Anwendbarkeit des Computerprogramms festzustellen und die gewählten physikalischen Parameter zu überprüfen.
- Durchführung von Rechnungen für verschiedene Eingabewerte (Wanddicke bei Innenrohr, Dicke des Isolierspaltes, Abgastemperatur am Rohreintritt, Massendurchsatz);
- Diskussion über die Möglichkeit, anhand der erhaltenen Ergebnisse einige Aussagen über die "optimale" Konstruktion des Vorrohres zu treffen.

## 2 Das mathematisches Modell

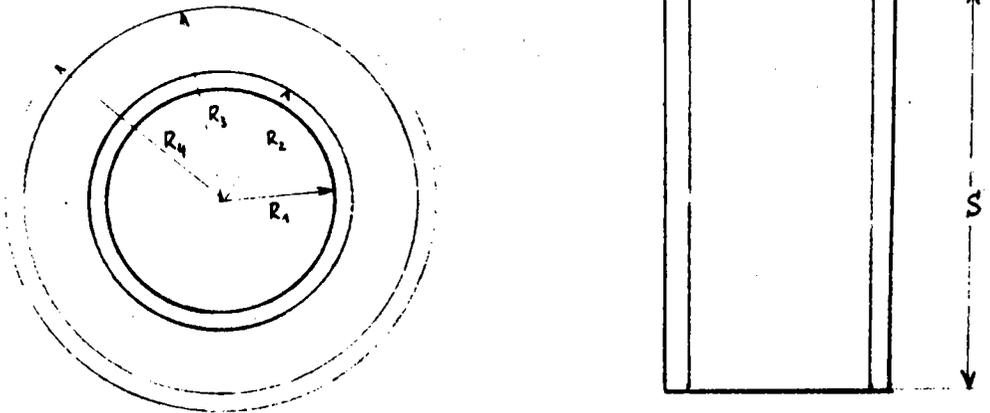


Abbildung 1

Wir betrachten ein gerades doppelwandiges Vorrohr, das geometrisch durch die Radien  $R_1, R_2, R_3, R_4$  und die Länge  $S$  gegeben ist (siehe Abb. 1). Die physikalischen Eigenschaften des Stahls, der Luft und des Abgases werden im weiteren diskutiert. Im Innenrohr strömt das Abgas, wobei die Strömung durch die Eingangstemperatur  $t_A$  [ $^{\circ}\text{C}$ ], den Masseudurchsatz  $m_A$  [ $\text{kg}/\text{h}$ ] und den Druck  $p_A$  [ $\text{bar}$ ] beschrieben wird (siehe Abschnitt 2.2). Die Strömung wird als voll turbulent angenommen, so daß die Abgastemperatur als konstant über dem Querschnitt betrachtet werden kann.

### 2.1 Wärmeleitung

Die gegebene Geometrie des Rohres und die getroffenen Annahmen bezüglich der Strömung liefern die Rotationssymmetrie des gesuchten Temperaturfeldes. Damit wird die Aufgabe zweidimensional und kann in Koordinaten  $(r, z)$  betrachtet werden (siehe Abb. 2), wobei  $R_1 \leq r \leq R_4$  und  $0 \leq z \leq S$  gilt.

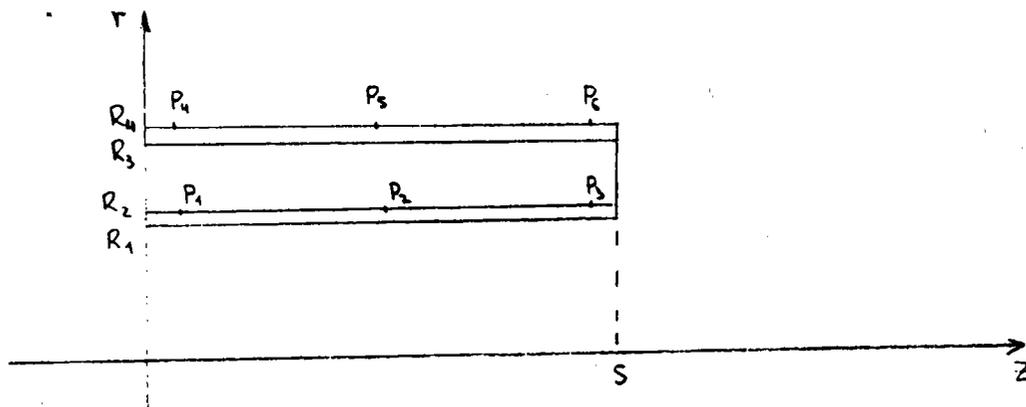


Abbildung 2

Die Wärmeleitung ist im wesentlichen durch folgende Materialparameter beschrieben:

- $\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$  - Dichte;
- $c \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$  - spezifische Wärme;
- $k \left[ \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right]$  - Wärmeleitungskoeffizient;
- $h \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right]$  - Wärmeübergangskoeffizient zwischen Abgas und Innenrohr, bzw. zwischen Außenrohr und Umgebung;
- $\epsilon$  - Emissionskoeffizient der Innen- bzw. Außenflächen der Rohre.

### 2.1.1 Dichte, spezifische Wärme

Die Dichte und die spezifische Wärme kommen für die Wärmeleitung nur als Produkt  $\rho c$  vor, so daß man sie nicht einzeln zu betrachten braucht. Das Produkt  $\rho c$  wurde als stückweise konstant angenommen und beträgt

$$\rho c = \begin{cases} \frac{1,07 \cdot 10^3 \cdot p_A}{(R \cdot \bar{T})} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{k}} & \text{für das Abgas,} \\ 359580,0 \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{k}} & \text{für den Stahl (V2A),} \\ 620,0 \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{k}} & \text{für die Luft des Isolierspaltes,} \end{cases}$$

wobei  $R$  die spezifische Gaskonstante für die Luft und  $\bar{T}$  die mittlere Temperatur bezeichnet.

Die Zusammensetzung des Abgases ist der von der Luft sehr ähnlich ( $O_2$  ist durch  $CO_2$  ersetzt), so daß man in Bezug auf Materialkonstanten das Abgas als Luft betrachten kann. Die spezifische Wärme  $c$  ist praktisch temperaturunabhängig.

### 2.1.2 Wärmeleitungskoeffizienten

Der Wärmeleitungskoeffizient für Stahl kann im betrachteten Temperaturbereich als konstant angesehen werden:

$$k = 17,0 \left[ \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right].$$

Der Wärmeleitungskoeffizient für Luft ist dagegen stärker temperaturabhängig und wird im Programm mit der Formel (siehe [2])

$$k = \frac{9,71}{T + 416,0} \left( \frac{T + 291,0}{273,0} \right)^{\frac{3}{2}},$$

realisiert, die empirischen Charakter trägt.

Die Wärmeleitung im Abgas wird nicht berücksichtigt, da die Strömungsgeschwindigkeit des Abgases im Bereich (10 m/s, 180 m/s) liegt; der Wärmetransport erfolgt damit praktisch ausschließlich durch Strömung.

### 2.1.3 Wärmeübergangskoeffizienten

Die Wärmeübergangskoeffizienten spielen eine große Rolle und müssen möglichst sorgfältig bestimmt werden. Bei der gegebenen Aufgabe handelt es sich um drei verschiedene Wärmeübergangskoeffizienten: zwischen Abgas und Innenrohr, zwischen Außenrohr und Umgebung und an den beiden Seiten des Rohres.

Die Seiten des Rohres wurden als wärmeisoliert angenommen, so daß der Wärmeübergangskoeffizient Null gesetzt wurde.

Die Strömung des Abgases wird als voll turbulent angenommen ("forced convection"), und der Wärmeübergangskoeffizient kann wie folgt berechnet werden:

$$H = \frac{Nu \cdot k}{D},$$

wobei  $Nu$  die Nusselt-Zahl,  $k$  den Wärmeleitungskoeffizienten und  $D = 2 \cdot R_1$  den Innendurchmesser des Rohres bezeichnen. Es existieren verschiedene empirische Formeln, um die Nusselt-Zahl zu bestimmen (siehe z.B. [3]). In dem Programm wurde die Formel von Dittus und Boelter (siehe [4]) realisiert:

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4}$$

wobei  $Re$  die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{D \cdot v}{\nu}$$

und  $Pr$  die Prandtl-Zahl bezeichnen.

Dabei ist  $v[m/sec]$  die Geschwindigkeit des Abgases und  $\nu$  die kinematische Viskosität der Luft, die stark temperaturabhängig ist:

$\nu \cdot 10^6$ [m <sup>2</sup> /s]	1.92	7.49	15.68	25.9	37.9	51.3	66.2	82.3	99.3	117.8	138.6	159.1
$T$ [K]	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

Tabelle 1

Die Tabelle 1 wurde benutzt, um die Reynolds-Zahl zu berechnen. Die Geschwindigkeit des Abgases wurde aus dem gegebenen Massendurchsatz  $m_A$  und dem Druck  $p_A$  sowie der Zustandsgleichung des Gases

$$p_A = \rho R T \quad (R \text{ - die spezifische Gaskonstante für die Luft,} \\ \rho \text{ - die Dichte des Abgases)}$$

berechnet:

$$v = \frac{m_A \cdot R \cdot T}{\pi R_1^2 p_A \cdot 3600}$$

Die Prandtl-Zahl ist dagegen schwach temperaturabhängig und wurde mit

$$Pr = 0.689$$

angenommen.

Bei der Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten an der Außenfläche des Außenrohres wurden die Formeln aus [3] ("natural convection") benutzt:

$$H = \frac{Nu \cdot k}{S},$$

wobei sich die Nusselt-Zahl für diesen Fall wie folgt berechnen läßt:

$$Nu = 0.59(Gr \cdot Pr)^{0.25}.$$

Hier bezeichnet  $Gr$ - die Grashof-Zahl

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot S^3}{\nu^2} (T_w - T_L).$$

Die Lage des Rohres wurde in Übereinstimmung mit durchgeführten Experimenten vertikal angenommen, die charakteristische Länge  $S[m]$  ist damit mit der Länge des Rohres identisch.  $g[m/sec^2]$  bezeichnet die Erdbeschleunigung,  $\beta$  kann als  $1/T_L$ , wobei  $T_L$  die absolute Temperatur der Luft ist, betrachtet werden,  $\nu$  bezeichnet die kinematische Viskosität und  $T_w$  die absolute Temperatur der Außenwand. Die Prandtl-Zahl wurde wieder als

$$Pr = 0.689$$

angenommen.

#### 2.1.4 Wärmestrahlung

Die Wärmestrahlung erfolgt zwischen der Außenfläche des Innenrohres und der Innenfläche des Außenrohres im Isolierspalt. Da das Innenrohr konvex und das Außenrohr konkav in diesem Zusammenhang ist, wurden die folgenden Strahlungseffekte berücksichtigt (siehe Abb. 3)

1. Strahlung vom Innenrohr zum Außenrohr;
2. Strahlung vom Außenrohr zum Innenrohr;
3. Strahlung des Außenrohres auf sich selbst.

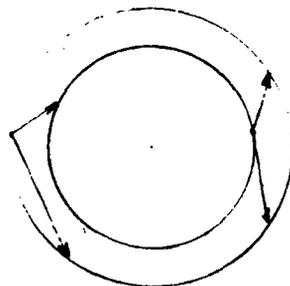


Abbildung 3.

Um die Strahlung numerisch zu berechnen, wurden die Oberflächen der Rohre in Ringe diskretisiert (in z-Richtung) und die Temperatur jedes Ringes konstant angenommen. Die Berechnung der geometrischen Gewichte (shape factors) führt in diesem Fall auf ein doppeltes Oberflächenintegral, das seinerseits auf ein vierfaches gewöhnliches Integral zurückgeführt werden kann. Es ist gelungen, zwei von vier Integralen analytisch zu berechnen. Die zwei übrigen wurden numerisch ausgewertet.

Die Berücksichtigung der Streuung führt zur Notwendigkeit, ein Gleichungssystem bezüglich des gestreuten Teils der Strahlung aufzustellen und zu lösen, wobei die Dimension dieses Gleichungssystems gleich der Anzahl der Diskretisierungsringe ist. Ein effektives Auflösungsverfahren war notwendig, weil die Matrix großdimensioniert und vollbesetzt ist und das Gleichungssystem in jedem Zeitschritt zu lösen ist. Es ist gelungen, das Gleichungssystem so umzuformen, daß die Matrix symmetrisch und positiv definit wird und damit die Anwendung von Verfahren der konjugierten Gradienten möglich ist. Die Berechnungen haben gezeigt, daß die Berücksichtigung der Strahlung einen vertretbaren Aufwand mit sich bringt, der um eine Ordnung niedriger ist als die Berechnung der Wärmeleitung.

Betrachten wir zuerst zwei "schwarze Körper" mit den Oberflächen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  die konstante, aber i.a. unterschiedliche Temperatur  $T_1$  und  $T_2$  besitzen. Ein Teil der Energie, die der erste Körper durch die Strahlung verliert, wird vom zweiten Körper aufgenommen. Bezeichnen wir diesen Teil als  $F_{12}$ . Der entsprechende Wärmeflussanteil beträgt

$$q = u_1 S_1 F_{12}$$

wobei

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma T_1^4 \left[ \frac{J}{m^2 s} \right] - \text{den Strahlungsfluß,} \\ \sigma &= 5.669 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{J}{m^2 \cdot s \cdot K^4} \right] - \text{die Boltzmann-Konstante,} \\ S_1 & \quad [m^2] - \text{die Oberfläche des ersten Körpers} \end{aligned} \quad (1)$$

bezeichnet.

Der Wärmetransport zwischen zwei Körpern beträgt damit:

$$q_{1,2} = u_1 S_1 F_{12} - u_2 S_2 F_{21}.$$

Wenn die Temperatur der Körper identisch ist, darf es keinen Wärmetransport geben, und damit gilt

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (2)$$

Diese Eigenschaft spielt eine besondere Rolle und ist für viele Situationen nützlich. Der Wärmetransport eines Oberflächenelements  $ds_x$  auf ein anderes Element  $ds_y$  kann wie folgt bestimmt werden

$$dq_{x \rightarrow y} = u(x) ds_x \cdot \frac{ds_y \cos \angle(n_x, y-x) \cos \angle(n_y, x-y)}{\pi |x-y|^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} u(x) \frac{(n_x, y-x)(n_y, x-y)}{|x-y|^4} ds_x ds_y,$$

wobei  $n_x$  den Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normale im Punkt  $x$  bezeichnet. Der gesamte Wärmefluß im Punkt  $y$ , der durch die Einstrahlung hervorgerufen wird, beträgt damit

$$q_+(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma(y)} \frac{(n_x, y-x)(n_y, x-y)}{|x-y|^4} u(x) dS_x,$$

wobei  $\Gamma(y)$  denjenigen Teil des Randes  $\Gamma$  bezeichnet, der aus  $y$  "sichtbar" ist. Wenn wir die Funktion  $\kappa(x, y)$  als

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \text{ aus } y \text{ sichtbar ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eingeführt, läßt sich die letzte Formel folgendermaßen umschreiben:

$$q_+(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \kappa(x, y) \frac{(n_x, y-x)(n_y, x-y)}{|x-y|^4} u(x) dS_x = (\mathcal{B}u)(y). \quad (3)$$

Die Eigenschaften des Randintegraloperators  $\mathcal{B}$  werden etwas später diskutiert. Zunächst stellen wir fest, daß sich der Wärmefluß im Punkt  $y$  ergibt als

$$q(y) = q_+(y) - q_-(y) = (\mathcal{B}u)(y) - u(y).$$

Ist die Temperaturverteilung an der Oberfläche  $\Gamma$  bekannt, so ist die Funktion

$$u(x) = \sigma T^4(x)$$

gegeben, und der Wärmefluß  $q(y)$  kann durch die Anwendung des Integraloperators  $\mathcal{B}$  berechnet werden.

Die Situation ändert sich aber, wenn wir einen "realen" Körper betrachten. Der Körper, der nicht "schwarz" ist, absorbiert nur einen Teil der Strahlung und strahlt auch nur ein Teil von  $\sigma T^4(x)$  ab, so daß die Funktion  $u(x)$  jetzt die Form

$$u(x) = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4(x), \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (4)$$

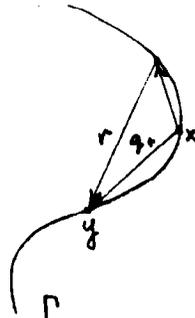
annimmt, wobei  $\epsilon$  für Stahlblech etwa 0.5 beträgt und auf jeden Fall berücksichtigt werden muß. Wir werden  $\epsilon$  als eine Konstante betrachten (normalerweise hängt  $\epsilon$  von der Wellenlänge ab) und damit voraussetzen, daß es sich um einen sogenannten "grauen" Körper handelt.

Eine weitere Annahme besteht darin, daß der Teil der Strahlung, der nicht absorbiert wird, vollständig diffus reflektiert und nicht (wie bei "durchsichtigen" Medium) teilweise durchgelassen wird.

Der Wärmefluß im Punkt  $y \in \Gamma$  beträgt in diesem Fall

$$q(y) = \epsilon(q_+(y) + r(y)) - u(y), \quad (5)$$

wobei  $u(y)$  in (4) und  $q_+(y)$  in (3) definiert ist und weiter  $r(y)$  denjenigen Teil der Strahlung bezeichnet, der nicht direkt wie  $q_+(y)$  sondern nach mindestens einer diffusen Reflexion den Punkt  $y$  erreicht (siehe Abb. 4).



Um die Gleichung für die Funktion  $r(y)$  herzuleiten, bemerken wir zuerst, daß entsprechend (5) in jedem Punkt  $x \in \Gamma$  die Wärmemenge  $(1 - \epsilon)(q_+(x) + r(x))$  reflektiert wird. Da die Reflexion diffus ist, wird dieser Teil genauso "verteilt", als ob  $r(x)$  vom Punkt  $x$  abgestrahlt wäre (siehe (3)). Dann erhält der gegebene Punkt  $y$  die "Portion"  $r(y)$  mit

$$r(y) = \mathcal{B}((1 - \epsilon)(q_+(x) + r(x)))(y)$$

oder

$$r(y) = (1 - \epsilon)(\mathcal{B}^2 u)(y) + (1 - \epsilon)(\mathcal{B} r)(y)$$

oder

$$((I - (1 - \epsilon)\mathcal{B})r)(y) = (1 - \epsilon)(\mathcal{B}^2 u)(y) = f(y). \quad (6)$$

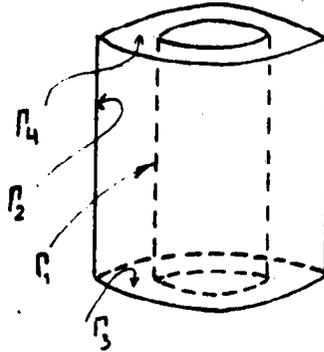
Die Gleichung (6) ist für  $0 < \epsilon < 1$  eine Randintegralgleichung zweiter Art, wobei der Kern des Operators  $\mathcal{B}$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \kappa(x, y) \cdot \frac{(n_x, y - x)(n_y, x - y)}{|x - y|^4} = K(x, y) \quad (7)$$

symmetrisch bezüglich  $x$  und  $y$  ist. Damit wird der Operator der Gleichung (6) selbstadjungiert in  $L_2(\Gamma)$ . Der Kern (7) ist sogar stetig, falls  $\Gamma$  ausreichend glatt ist, und die Gleichung (6) wird in diesem Fall eine Fredholmsche Integralgleichung mit selbstadjungiertem Operator  $I - (1 - \epsilon)\mathcal{B}$ . Weist dagegen der Rand  $\Gamma$  Ecken oder Kanten auf, so ist der Kern (7) hypersingular ( $\sim \frac{1}{|x - y|^2}$ ), und die Gleichung (6) ist in diesem Fall keine Fredholmsche Gleichung mehr.

Genau dieser Fall liegt bei unseren Untersuchungen vor. Der Rand  $\Gamma$  besteht aus vier

Teilen  $\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$ , wobei  $\Gamma_1$  die Außenfläche des Innenrohres,  $\Gamma_2$  die Innenfläche des Außenrohres,  $\Gamma_3$  und  $\Gamma_4$  die kreisförmigen "Deckel" sind. (siehe Abb. 5)



Die Flächenverhältnisse  $\frac{|\Gamma_3|}{|\Gamma_1|}$  und  $\frac{|\Gamma_4|}{|\Gamma_2|}$  betragen für die gegebene Geometrie annähernd 0.003. Diese Tatsache ermöglicht, auf die Berücksichtigung der Teile  $\Gamma_3$  und  $\Gamma_4$  zu verzichten und  $\Gamma$  nur als Vereinigung von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zu betrachten. Auf diese Weise sind eventuelle numerische Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Singularität des Kernes (7) an den Kanten auftreten, beseitigt und die Gleichung (6) kann für die gegebene Temperaturverteilung  $T(x)$  an den Oberflächen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  wie folgt numerisch gelöst werden.

Aufgrund Rotationsymmetrie der gesamten Aufgabe benutzen wir Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$ , und es gilt

$$T(x) = T(\rho, \varphi, z) = T(\rho, z).$$

Da der Wert  $\rho$  an der Oberfläche  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  fixiert ist, wird

$$T(x) = \begin{cases} T_1(z), & x \in \Gamma_1 \\ T_2(z), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad 0 \leq z \leq S.$$

Die Diskretisierung in  $z$ -Richtung sei

$$z_i = (i-1)h_1, \quad h_1 = \frac{S}{n_1 + 1}, \quad T(x) \approx \begin{cases} t_i^{(1)} & \text{für } x \in \Gamma_1, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}, \\ t_i^{(2)} & \text{für } x \in \Gamma_2, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}. \end{cases}$$

Die Temperatur wird damit als konstant innerhalb jeden Ringes

$$\Gamma_1^{(i)} = \{(\rho, \varphi, z) : \rho = R_2, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

bzw.

$$\Gamma_2^{(i)} = \{(\rho, \varphi, z) : \rho = R_3, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

angenommen. Die Funktionen  $r(x)$  und  $u(x)$  in (6) werden ebenfalls als stückweise konstant betrachtet. Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf die Gleichung (6) führt auf das folgende lineare Gleichungssystem der Dimension  $2n_1$ :

$$\begin{aligned}
& 2\pi R_2^2 h_1 r_i^{(1)} - (1 - \epsilon) \left[ \sum_{j=1}^{n_1} r_j^{(1)} \int_{\Gamma_i^{(1)}} \int_{\Gamma_j^{(1)}} K(x, y) ds_x ds_y + \sum_{j=1}^{n_1} r_j^{(2)} \int_{\Gamma_i^{(1)}} \int_{\Gamma_j^{(2)}} K(x, y) ds_x ds_y \right] = \int_{\Gamma_i^{(1)}} f(y) ds \\
& -(1 - \epsilon) \left[ \sum_{j=1}^{n_1} r_j^{(1)} \int_{\Gamma_i^{(2)}} \int_{\Gamma_j^{(1)}} K(x, y) ds_x ds_y + \sum_{j=1}^{n_1} r_j^{(2)} \int_{\Gamma_i^{(2)}} \int_{\Gamma_j^{(2)}} K(x, y) ds_x ds_y \right] + 2\pi R_3^2 h_1 r_i^{(2)} = \int_{\Gamma_i^{(2)}} f(y) ds \\
& i = 1, \dots, n_1
\end{aligned}$$

oder

$$Ar = b, \quad A \in \mathbb{R}^{2n_1 \times 2n_1}, \quad r, b \in \mathbb{R}^{2n_1} \quad (8)$$

mit

$$r = \begin{pmatrix} r^{(1)} \\ r^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A = 2\pi h_1 \begin{pmatrix} R_2^2 I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_3^2 I \end{pmatrix} - (1 - \epsilon) \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der Matrix  $A$  und der rechten Seite  $b$  sind durch die folgenden Integrale gegeben:

$$\begin{aligned}
(B_{kl})_{ij} &= \int_{\Gamma_i^{(k)}} \int_{\Gamma_j^{(l)}} K(x, y) ds_x ds_y, \quad i, j = 1, \dots, n_1; \quad k, l = 1, 2. \\
(b^{(k)})_i &= \int_{\Gamma_i^{(k)}} f(y) ds_y, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \quad (9)$$

Die numerische Lösung der Gleichung (6) besteht damit in der Auswertung der Integrale (9) und der Lösung des linearen Gleichungssystems (8). Da die Matrix  $A$  des Systems (8) temperatur- und damit zeitunabhängig ist, wird sie nur einmal berechnet. Die rechte Seite  $b$  hängt dagegen von der Temperatur ab und wird zu jedem Zeitpunkt neu generiert.

Zuerst betrachten wir die Generierung der Matrix  $A$ . Der Block  $A_{11}$  dieser Matrix hat die Form

$$A_{11} = 2\pi h_1 R_2^2 I - (1 - \epsilon) B_{11} = 2\pi h_1 R_2^2 I,$$

weil der Kern (7) des Integraloperators  $\mathcal{B}$  für alle  $x, y \in \Gamma_1$  verschwindet. Diese Eigenschaft ist der Funktion  $\kappa(x, y)$  in (7) zu verdanken; sie ist eine Konsequenz daraus, daß jeder beliebige Punkt  $x$  von keinem anderen Punkt auf  $\Gamma_1$  zu sehen ist oder daß der konvexe Körper sich selbst nicht anstrahlt. Eine weitere Schlußfolgerung ist die

$$B_{12} = B_{21}^T, \quad B_{22} = B_{22}^T.$$

Diese folgt aus der Symmetrie des Kernes  $K(x, y)$  bezüglich seiner Argumente  $x$  und  $y$  und aus der Definition (9). Die entscheidende Reduktion des numerischen Aufwandes für die

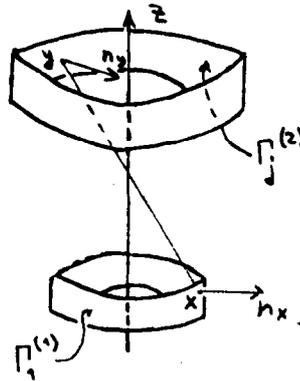
Generierung der Matrix  $A$  folgt aber aus der geometrischen Struktur der Rändelemente  $\Gamma_i^{(k)}$

$$B_{12}^T = B_{12} = B_{21}^T = B_{21}, \quad (10)$$

und der Tatsache, daß  $B_{12}, B_{22}$  - Toeplitz-Matrizen sind.

Damit ist die Matrix  $A$  eine symmetrische Block-Toeplitz-Matrix mit symmetrischen Blöcken. Diese Tatsache ermöglicht die Konstruktion effektiver Lösungsverfahren für das Gleichungssystem (8).

Die Eigenschaft (10) reduziert die Anzahl der Elemente der Matrix  $A$ , die numerisch zu berechnen sind, auf  $2n_1$  (die beiden ersten Zeilen der Matrizen  $B_{12}$  und  $B_{22}$ ). Betrachten wir zuerst die Elemente  $(B_{12})_{1j}, j = 1, \dots, n_1$ :



$$(B_{12})_{1j} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1^{(1)}} \int_{\Gamma_1^{(2)}} \kappa(x, y) \frac{(n_x, y - x)(n_y, x - y)}{|x - y|^4} ds_x ds_y,$$

$$x = R_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z_x \end{pmatrix}, y = R_3 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ z_y \end{pmatrix}, n_x = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, n_y = - \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(n_x, y - x) = R_3 \cos(\varphi - \psi) - R_2, (n_y, x - y) = R_3 - R_2 \cos(\varphi - \psi),$$

$$|x - y|^2 = R_2^2 + R_3^2 + (z_x - z_y)^2 - 2R_2R_3 \cos(\varphi - \psi),$$

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1, & \psi - \arccos \frac{R_2}{R_3} \leq \varphi \leq \psi + \arccos \frac{R_2}{R_3} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$ds_x = R_2 d\varphi dz_x, ds_y = R_3 d\psi dz_y,$$

und damit

$$(B_{12})_{1j} = \frac{R_2 R_3}{\pi} \int_0^{h_1} dz_x \int_{z_j}^{z_j+h_1} dz_y \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\psi - \arccos \frac{R_2}{R_3}}^{\psi + \arccos \frac{R_2}{R_3}} \frac{(R_3 \cos(\varphi - \psi) - R_2)(R_3 - R_2 \cos(\varphi - \psi))}{(R_3^2 + R_2^2 + (z_x - z_y)^2 - 2R_2 R_3 \cos(\varphi - \psi))^2} d\varphi.$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß es sich bei der Matrix  $B_{12}$  um eine Toeplitz-Matrix handelt, da die Abhängigkeit von  $z_x$  und  $z_y$  nur als  $(z_x - z_y)^2$  gegeben ist.

Weiterhin gilt mit  $\beta := \varphi - \psi$ ,  $z_y := z_y - z_j$ ,

$$(B_{12})_{1j} = 4R_2 R_3 \int_0^{h_1} \int_0^{h_1} s(a, b, c, d, e, \varphi) dz_x dz_y, \quad (11)$$

$$a = -R_2 R_3, \quad b = R_2^2 + R_3^2, \quad c = -R_2 R_3,$$

$$d = R_2^2 + R_3^2 + (z_x - z_y + z_j)^2, \quad e = -2R_2 R_3, \quad \varphi = \arccos \frac{R_2}{R_3},$$

$$j = 1, \dots, n_1,$$

$$\begin{aligned} s(a, b, c, d, e, \varphi) &= \int_0^\varphi \frac{a \cos^2 \beta + b \cos \beta + c}{(d + e \cdot \cos \beta)^2} \cdot d\beta = \\ &= \frac{a}{e^2} \varphi + \frac{b - \frac{2ad}{e}}{e} \cdot \frac{2}{\sqrt{d^2 - e^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d^2 + e^2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{d + e} + \\ &+ \left( c - \frac{ad^2}{e^2} \right) \left( \frac{-e \sin \varphi}{(d^2 - e^2)(d + e \cos \varphi)} + \frac{2}{(d^2 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{d^2 + e^2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{d + e} \right) \right). \end{aligned}$$

Das letzte Doppelintegral in (11) berechnet man numerisch, z.B. mit der Hilfe der Simpson-Quadraturformel.

Die Berechnung der Elemente  $(B_{22})_{1j}$  erfolgt analog:

$$x = R_3 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z_x \end{pmatrix}, \quad y = R_3 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ z_y \end{pmatrix}, \quad n_x = - \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n_y = - \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(n_x, y - x) = R_3(1 - \cos(\varphi - \psi)); \quad (n_y, x - y) = R_3(1 - \cos(\varphi - \psi)),$$

$$|x - y|^2 = 2R_3^2(1 - \cos(\varphi - \psi)) + (z_x - z_y)^2,$$

$$ds_x = R_3 d\varphi dz_x, \quad ds_y = R_3 d\psi dz_y$$

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1, & \psi - 2\arccos \frac{R_2}{R_3} \leq \varphi \leq \psi + 2\arccos \frac{R_2}{R_3}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und damit

$$(B_{22})_{1j} = \frac{R_3^4}{\pi} \int_1^{h_2} dz_x \int_{z_j}^{z_j+h_1} dz_y \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\psi-2\arccos\frac{R_2}{R_3}}^{\psi+2\arccos\frac{R_2}{R_3}} \frac{(1 - \cos(\varphi - \psi))^2}{(2R_3^2 + (z_x - z_y)^2 - 2R_3^2 \cos(\varphi - \psi))^2} d\varphi,$$

oder mit

$$\beta := \varphi - \psi, \quad z_y := z_y - z_j$$

$$(B_{22})_{1j} = 4R_3^4 \int_0^{h_1} \int_0^{h_1} s(a, b, c, d, e, \varphi) dz_x dz_y,$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1,$$

$$d = 2R_3^2 + (z_x - z_y + z_j)^2, \quad e = -2R_3^2, \quad \varphi = 2\arccos\frac{R_2}{R_3}; \quad j = 1, \dots, n_1.$$

Die numerische Berechnung der rechten Seite  $b$  in (8) führt auf ein fünffaches Integral, das im Unterschied zu der Matrix  $A$  in jedem Zeitpunkt auszuwerten ist. Die Struktur der rechten Seite  $f(y)$  in (6) ermöglicht aber, die bereits ausgerechnete Matrix  $B$  zu benutzen und  $b$  wie folgt anzunähern:

$$b = (1 - \epsilon)2\pi h_1 \begin{pmatrix} R_2^2 I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_3^2 I \end{pmatrix} B^2 t. \quad (12)$$

Der numerische Aufwand besteht dabei hauptsächlich in der zweifachen Multiplikation der Matrix  $B$  mit einem Vektor, die, wie wir bald sehen werden, sich außerordentlich effektiv realisieren läßt.

Die Matrix  $A$  des Gleichungssystems (8) besitzt weitere wichtige Eigenschaften außer der bereits erwähnten Symmetrie ( $A = A^T$ ):

Sie ist positiv definit

$$(Az, z) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n_1}, \quad z \neq 0,$$

(für  $\epsilon \approx 1$  ist diese Behauptung offensichtlich), und ihre spektrale Konditionszahl ist gleichmäßig beschränkt bezüglich des Diskretisierungsparameters  $h_1$ :

$$\kappa(A) = O(1), \quad h_1 \rightarrow 0. \quad (13)$$

Die letzte Behauptung basiert auf der Herkunft der Matrix  $A$ : Sie ist eine Galerkin-Diskretisierung des Fredholmschen Integraloperators zweiter Art.

Damit sind alle Voraussetzungen für die Benutzung der Methode der konjugierten Gradienten [5] erfüllt. Der Algorithmus hat die Form

1.  $y_0 \in \mathbb{R}^{2n_1}$   
 $r_0 = Ay_0 - b$   
 $S_0 = r_0$

2. für  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k - \alpha_{k+1} s_k, & \alpha_{k+1} &= \frac{(r_k, r_k)}{(As_k, s_k)}; \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_{k+1} As_k, \\ s_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_{k+1} s_k, & \beta_{k+1} &= \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)}, \end{aligned}$$

und benötigt eine Matrix-Vektor-Multiplikation  $(As_k)$ , zwei Skalarprodukte  $((As_k, s_k)$  und  $(r_{k+1}, r_{k+1}))$  und drei Vektoroperationen pro Iterationsschritt. Der numerische Aufwand für die Skalarprodukte und Vektoroperationen ist fixiert und beträgt  $O(n_1)$  Operationen. Die Matrix-Vektor-Multiplikation kann dagegen sehr unterschiedlich realisiert werden und beeinflusst die Effektivität beträchtlich. Die "gewöhnliche" Multiplikation benötigt  $O(n_1^2)$  Operationen und wird damit dominieren. Die Matrix  $A$  ist aber eine Block-Toeplitz-Matrix, und die Operationen

$$As = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}s_1 + A_{12}s_2 \\ A_{21}s_1 + A_{22}s_2 \end{pmatrix}$$

kann auf vier Multiplikationen mit Toeplitz-Matrixen (z.B.  $A_{11}s_1$ ) zurückgeführt werden. Jede solche Multiplikation kann mit nur  $O(n_1 \log_2 n_1)$  arithmetischen Operationen ausgeführt werden, wenn man die Matrix  $A_{11}$  zu eine Zirkulanten auffüllt und die schnelle diskrete Fouriertransformation benutzt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - Toeplitz Matrix,  $x \in \mathbb{R}^3$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & & & & & \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{array} \right),$$

$\tilde{A}$  ist die Zirkulante und  $\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ y \end{pmatrix}$ ,

wobei  $y$  für uns ohne Bedeutung ist.

Die Dimension  $m$  der Matrix  $\tilde{A}$  beträgt (siehe [6]):

$$2n \leq m \leq 4n.$$

Da  $B$  ebenfalls eine Block-Toeplitz-Matrix ist, kann diese Idee auch für die Berechnung der rechten Seite  $b$  in (13) benutzt werden und damit zur Aufwandreduzierung beitragen. Die Eigenschaft (14) garantiert, daß die nötige Iterationszahl zur Berechnung der Lösung  $r$  des Gleichungssystems (8) mit der gegebenen Genauigkeit unabhängig vom Diskretisierungsparameter  $h_1$  bleibt. Der gesamte Aufwand für die numerische Lösung der Randintegralgleichung (6) beträgt damit  $O(n_1 \log_2 n_1) = O(h_1^{-1} \log_2 h^{-1})$  und ist "fast" optimal.

## 2.2 Abgasströmung

Die Strömung des Abgases wurde als voll turbulent und die Temperatur des Abgases konstant bezüglich  $\rho$  betrachtet. Die Änderung der Temperatur in  $z$ -Richtung erfolgt nur durch den Wärmeaustausch mit der Wand des Innenrohres, das durch den Wärmeübergangskoeffizienten  $H$  (siehe Absch. 2.1.2) beschrieben wird. Damit ergibt sich für die Temperatur des Abgases eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit der Anfangsbedingung, die mit der gegebenen Temperatur am Rohreintritt identisch ist:

$$\begin{aligned} v\rho c \frac{dT_A}{dz} &= -H(T_A - T), \quad 0 < z \leq s \\ T_A(0) &= t_A. \end{aligned} \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, daß die Geschwindigkeit  $v$ , die Temperatur am Rohreintritt und die Temperatur der Innenfläche des Innenrohres Funktionen der Zeit sind:

$$v = v(t), \quad t_A = t_A(t), \quad T = T(t, z)$$

die Gleichung (1) ist also für jeden Zeitpunkt  $t$  zu lösen. Für einen fixierten Zeitpunkt kann die Lösung von (1) analytisch angegeben werden:

$$T_A(z) = e^{-\frac{H}{v\rho c}z} \left( t_A + H \int_0^z T \cdot e^{\frac{H}{v\rho c}z} dz \right). \quad (2)$$

Die Berechnung der Temperatur  $T_A$  in den Knoten  $z_k = (k-1)h_1$ ,  $h_1 = \frac{s}{1+n_1}$  kann mit der Formel

$$T_A(z_k) \approx \frac{h_1}{2} e^{-\frac{H}{v\rho c}z_k} \left( t_A + H(T(0) + 2 \sum_{l=2}^{k-1} T(z_l) e^{\frac{H}{v\rho c}z_l} + T(z_k) e^{\frac{H}{v\rho c}z_k} \right),$$

die die Trapezquadraturformel für (2) beschreibt, erfolgen. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Summe  $\sum_{l=2}^{k-1}$  zu speichern und für die weiteren Knoten zu benutzen ist. Wird man diese Summe für jedes  $k$  neu ausrechnen, so steigt der Aufwand zur  $O(n_1^2)$ , andernfalls bleibt er bei  $O(n_1)$ , was auch optimal ist.

## 2.3 Das Gleichungssystem

Das Temperaturfeld im Vorrohr läßt sich durch das folgende Gleichungssystem beschreiben:

### 1. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right); \quad R_1 < r < R_2, \quad 0 < z < S;$$

mit den Randbedingungen

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = H(T_{\text{Abgas}} - T) \quad \text{für } r = R_1;$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = H(T_{\text{Umgebung}} - T) \quad \text{für } r = R_4;$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z = 0;$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z = S;$$

der Anfangsbedingung:

$$T(0, r, z) = T_{\text{Umgebung}}$$

und den Interface-Bedingungen

$$[T] = 0, \quad \text{für } r = R_2;$$

$$[k \frac{\partial T}{\partial r}] = q(y), \quad \text{für } r = R_2;$$

$$[T] = 0, \quad \text{für } r = R_3;$$

$$[-k \frac{\partial T}{\partial r}] = q(y), \quad \text{für } r = R_3;$$

wobei  $[.]$  den Sprung der Funktion bezeichnet. Die Funktion  $q(y)$  ist durch die Strahlung definiert und als an den Oberflächen verteilte Wärmequellen zu interpretieren.

2. Die Wärmetransportgleichung für das Abgas

$$v \cdot \rho \cdot c \frac{dT_{\text{Abgas}}}{dz} = -H(T_{\text{Abgas}} - T), \quad 0 < z \leq S$$

mit der Anfangsbedingung

$$T_{\text{Abgas}} = t_A.$$

3. Die Randintegralgleichung für die Wärmestrahlung im Isolierspalt:

$$q(y) = \epsilon(q_+(y) + r(y)) - u(y),$$

$$q_+(y) = (\mathcal{B}u)(y),$$

$$((I - (1 - \epsilon)\mathcal{B})r)(y) = (1 - \epsilon)(\mathcal{B}^2u)(y),$$

$$u(y) = \epsilon \cdot \tau T^4(y), (\mathcal{B}u)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \kappa(x, y) \frac{(n_x, y - x)(n_y, x - y)}{|x - y|^4} u(x) ds_x.$$

Es handelt sich damit um ein System einer nichtlinearen, zweidimensionalen partiellen Differentialgleichung parabolischen Typs, einer gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung und einer Randintegralgleichung zweiter Art, die durch die Rand- bzw. Interface-Bedingungen miteinander gekoppelt sind.

### 3 Diskretisierung

Um das vorgestellte Gleichungssystem numerisch zu lösen, wurden der Variablenbereich  $R_1 \leq r \leq R_4$ ,  $0 \leq z \leq S$  sowie der Zeitbereich  $0 \leq t \leq t_{max}$  diskretisiert. Die Schrittweiten betragen:

$$\begin{aligned} h_1 &= 5mm \text{ in } z\text{-Richtung,} \\ h_2 &= 0.1mm \text{ in } r\text{-Richtung,} \\ \tau &= 1 \text{ sec in } t\text{-Richtung.} \end{aligned}$$

### 4 Computerrealisierung

Die Methode der finiten Differenzen wurde für die numerische Lösung gewählt, wobei alle Nichtlinearitäten von vorhergehenden Zeitschritt übernommen wurden; ansonsten ist das Schema implizit. Dadurch entsteht für jeden Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem der Dimension  $N$ , wobei  $N$  für unterschiedliche Beispiele bis etwa 20 000 ansteigt. Die Gleichungssysteme wurden iterativ mit Hilfe von modernen Vorkonditionierungstechniken gelöst. Die Rechenzeit auf IBM RISC/6000 für ein Beispiel lag im Minutenbereich.

### 5 Parameterstudie für das Modell

Es wurden zwei Beispiele für die folgende Geometrie

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.0215 \text{ m,} \\ R_2 &= 0.0225 \text{ m,} \\ R_3 &= 0.026 \text{ m,} \\ R_4 &= 0.0275 \text{ m,} \\ S &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$

betrachtet:

Beispiel 1:  $t_A = 380^\circ C$ ,  $m_A = 24.5 \text{ kg/h}$ ,  $p_A = 1.05 \text{ bar}$

und

Beispiel 2:  $t_A = 690^\circ C$ ,  $m_A = 85 \text{ kg/h}$ ,  $p_A = 1.05 \text{ bar}$ ,  
wobei die Meßdaten für die 6 Punkte ( $P_1, \dots, P_6$ ) (siehe Abb. 2)

$$\begin{aligned} r = R_2, \quad z = 0.1 \text{ m, } 0.5 \text{ m, } 0.9 \text{ m} \text{ und} \\ r = R_4, \quad z = 0.1 \text{ m, } 0.5 \text{ m, } 0.9 \text{ m} \end{aligned}$$

vorhanden sind:

Bsp. 1	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$T^{\circ}C$	287	258	240	163	140	140

Tabelle 2

Bsp. 2	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$T^{\circ}C$	544	528	511	320	320	320

Tabelle 3.

Die erhaltenen numerischen Ergebnisse sind in zwei folgenden Tabellen dargestellt, wobei der Emissionskoeffizient  $\epsilon$  jeweils 0.25 (polierter Stahl), 0.5 (Stahlblech) und 0.75 (oxidierter Stahl) variiert wurde:

Beispiel 1:

$\epsilon \setminus P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
0.25	289	268	249	149	139	129
0.5	277	256	237	158	146	136
0.75	266	244	228	166	153	142

Tabelle 4

Beispiel 2

$\epsilon \setminus P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
0.25	572	551	531	289	279	269
0.5	543	525	511	319	309	300
0.75	525	509	486	352	339	320

Tabelle 5

Die Beispiele zeigen deutlich, daß  $\epsilon = 0.5$  die gemessenen Daten am besten wiedergibt, so daß dieser wichtige Parameter für weitere Berechnungen beibehalten wurde.

## 6 Optimierung der Rohrleitung

Es wurden mehrere Rechnungen durchgeführt, um die Einflüsse der Dicke des Innenrohres und des Isolierspaltes auf die Temperatur an der Oberfläche des Außen- bzw. Innenrohres zu bestimmen (Punkte  $P_1, \dots, P_6$ ). Die Dicke des Innenrohres wurde mit  $d_2 = 0.5 \text{ mm}$

bzw.  $d_2 = 1 \text{ mm}$  angenommen und die des Isolierspaltes mit  $d_1 = 2 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 3.5 \text{ mm}$  und  $d_1 = 7 \text{ mm}$ . Für die Abgasströmung wurden die Beispiele 1 und 2 sowie

Beispiel 3:  $t_A = 900^\circ\text{C}$ ,  $m_A = 300 \text{ kg/h}$ ,  $p_A = 1.05 \text{ bar}$

Beispiel 4:  $t_A = 380^\circ\text{C}$ ,  $m_A = 6 \text{ kg/h}$ ,  $p_A = 1.05 \text{ bar}$

betrachtet. Die numerischen Ergebnisse sind in folgenden Tabellen zusammengefaßt:

Beispiel 1

$d_1$	$d_2$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
2	0.5	267	244	227	173	159	149
	1	265	243	227	172	158	149
3.5	0.5	278	257	238	159	147	137
	1	277	256	237	158	146	136
7	0.5	288	268	249	144	131	118
	1	287	267	248	140	130	118

Tabelle 6

Beispiel 2

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
2	0.5	534	523	500	344	338	320
	1	535	521	498	343	337	319
3.5	0.5	545	526	513	321	310	301
	1	543	525	511	319	309	300
7	0.5	552	530	521	295	282	277
	1	550	528	519	295	282	276

Tabelle 7

Beispiel 3

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
2	0.5	770	752	735	499	488	477
	1	768	750	733	498	486	475
3.5	0.5	777	761	745	477	466	455
	1	775	758	742	476	465	454
7	0.5	780	764	748	449	439	427
	1	778	761	745	448	438	425

Tabelle 8

Beispiel 4

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
2	0.5	198	164	138	131	109	94
	1	196	162	137	130	108	93
3.5	0.5	211	179	153	119	103	89
	1	221	188	161	114	100	87
7	0.5	224	194	168	106	93	82
	1	223	192	166	106	92	81

Tabelle 9

Die Berechnungen zeigen, daß die Dicke des Innenrohres einen sehr niedrigen Einfluß auf das Temperaturfeld hat.

Die Dicke des Isolierspaltes spielt dagegen eine größere Rolle, wobei berücksichtigt werden muß, daß die Verdopplung der Dicke von 3.5 mm auf 7 mm für die Beispiele 1 und 4 mit niedrigerer Temperatur die Temperaturänderung von 5 % - 10 % bringt. Für die Beispiele 2 und 3 ist der Einfluß weniger bedeutend, weil bei höherer Temperatur die Strahlung eine größere Rolle spielt.

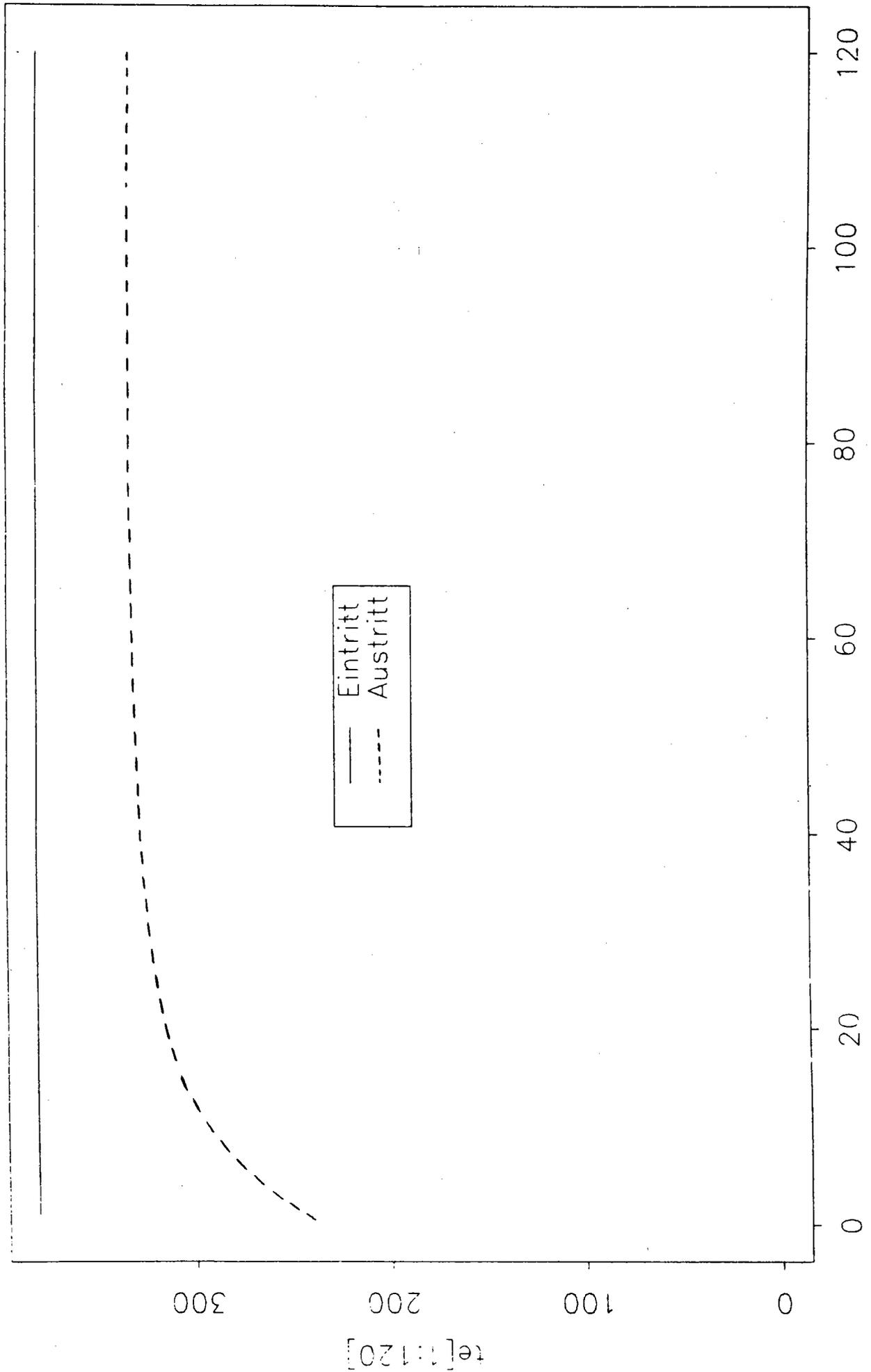
## Literatur

- [1 ] T. Nording: *Neuartiges Konzept für isolierte Abgaskrümmen, Vorrohre und Katalysatoren*, Motortechnische Zeitschrift 52, 1991, SS. 206-210
- [2 ] A.I. Brown, S.M. Marco: *Introduction to heat transfer*, Mac Graw-Hill Book Company, 1958
- [3 ] L.C. Thomas: *Fundamentals of heat transfer*, Prentice-Hall Inc., 1980
- [4 ] F.W. Dittus, L.M.K. Bollter: *Heat transfer in Automobile radiators of the tubular type*, Univ. of California - Berkely, Pub. Eng. 2, 1930, 443

$t_A = 380^\circ$ ,  $m_A = 24.5 \text{ kg/h}$ ,  $p_A = 1.05 \text{ bar}$

$R_1 = 0.0215 \text{ m}$ ,  $R_2 = 0.0225 \text{ m}$ ,  $R_3 = 0.026 \text{ m}$ ,  $R_4 = 0.0275 \text{ m}$ ,  $S = 1 \text{ m}$

Gastemperatur am Eintritt bzw. Austritt



1:120

nach  
10 Sekunden

