SPEKTRALSEQUENZEN

MATHIAS SCHULZE

Inhaltsverzeichnis

1. Graduierte Moduln und Exakte Paare 1
2. Abgeleitete Paare 2
3. Spektralsequenzen exakter Paare 4
4. Grenzwerte von Spektralsequenzen 4
5. Spektralsequenzen von Komplexen mit Filtration 5
6. Konvergenz von Spektralsequenzen 6
7. Entartete und sphärische Spektralsequenzen 8
8. Spektralsequenzen von Doppelkomplexen 9

1. Graduierte Moduln und Exakte Paare

Im Folgenden werden Moduln über einem festen Ring betrachtet.
Man kann die folgenden Konstruktionen auch für eine beliebige abelsche Kategorie durchführen.

Definition 1.1. Sei $m \in \mathbb{N}$.

1. Ein m-graduierter Modul ist eine Familie von Moduln $M = (M_p)_{p \in \mathbb{Z}^m}$.
2. Eine Abbildung m-graduierter Moduln $M \xrightarrow{f} N$ ist eine Familie von Homomorphismen $(M_p \xrightarrow{f_p} N_{p+\deg f})_{p \in \mathbb{Z}^m}$ mit $\deg f \in \mathbb{Z}^m$.
   Man nennt $\deg f$ den Grad von f.
3. Ein 2-graduierter Modul heißt auch bigraduierter Modul und der Grad einer Abbildung bigraduierter Moduln auch Bigrad.
   Für 1-graduiert schreibt man auch graduiert.
4. Für einen bigraduierten Modul M definiert man $M^t := (M_{q,p})_{p,q}$.
5. Komponentenweise definiert man m-graduierte Untermoduln, m-graduierte Quotientenmoduln, Kerne, Cokerne und Bilder von Abbildungen m-graduierter Moduln, Urbilder unter Abbildungen m-graduierter Moduln und Exaktheit von Sequenzen m-graduierter Moduln.

Bemerkung 1.2.

1. Grade von Abbildungen m-graduierter Moduln verhalten sich additiv bei Komposition.
2. Für festes $m \in \mathbb{N}$ bilden die m-graduierten Moduln mit den Abbildungen m-graduierter Moduln eine Kategorie.

Definition 1.3. Sei $m \in \mathbb{N}$.

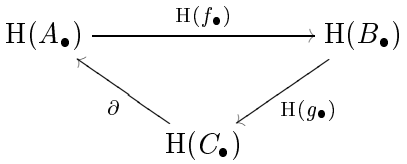
1. Sei E ein m-graduierter Modul und $E \xrightarrow{d} E$ eine Abbildung m-graduierter Moduln mit $dd = 0$.
   Dann heißt (E, d) m-graduierter Differentialmodul, d Differential von (E,d), und wir nennen $H(E, d) := \ker d / \operatorname{im} d$ Homologie von (E,d).
2. Eine Abbildung m-graduierter Differentialmoduln $(E, d) \xrightarrow{\tau} (E', d')$ ist eine Abbildung m-graduierter Moduln $E \xrightarrow{\tau} E'$ mit $d'\tau = \tau d$.

3. Ein 2-graduierter Differentialmodul heißt auch bigraduierter Differentialmodul und der Grad einer Abbildung bigraduierter Differentialmoduln auch Bigrad.
   Für 1-graduiert schreibt man auch graduiert.

Bemerkung 1.4.

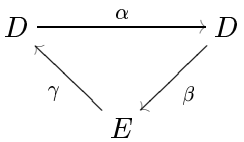
1. Für festes $m \in \mathbb{N}$ bilden die m-graduierten Differentialmoduln mit den Abbildungen m-graduierter Differentialmoduln eine Kategorie und H ist ein Funktor von dieser in die Kategorie der m-graduierten Moduln.
2. Ein Komplex von Moduln $C_\bullet = (C_\bullet, d_\bullet)$ ist ein graduierter Differentialmodul mit $\deg d_\bullet = -1$.

Beispiel 1.5. *Ist* $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von Komplexen von Moduln, so erhält man aus der langen exakten Homologiesequenz ein exaktes Dreieck graduierter Moduln*



Definition 1.6. Sei $m \in \mathbb{N}$.

1. Ein exaktes Paar (m-graduierter Moduln) $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ besteht aus m-graduierten Moduln D und E und Abbildungen $D \xrightarrow{\alpha} D$, $D \xrightarrow{\beta} E$ und $E \xrightarrow{\gamma} D$, so daß das Dreieck

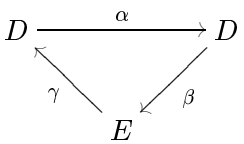
   

   exakt ist.
2. Eine Abbildung $(D, E, \alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{(\delta,\epsilon)} (D', E', \alpha', \beta', \gamma')$ exakter Paare (m-graduierter Moduln) besteht aus Abbildungen m-graduierter Moduln $D \xrightarrow{\delta} D'$ und $E \xrightarrow{\epsilon} E'$ mit $\delta\alpha = \alpha'\delta$, $\epsilon\beta = \beta'\delta$ und $\delta\gamma = \gamma'\epsilon$.

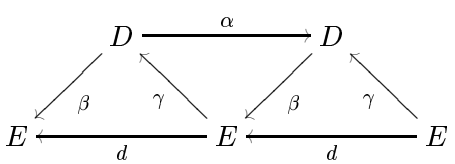
Bemerkung 1.7. Die exakten Paare mit den Abbildungen exakter Paare bilden eine Kategorie.

2. Abgeleitete Paare

Man betrachte das exakte Paar



Definiert man $E \xrightarrow{d} E$ durch $d := \beta\gamma$, so ist $\deg d = \deg\beta + \deg\gamma$.
Man hat dann



Wegen $\gamma\beta = 0$ ist auch $dd = 0$ und man definiert

$$E' := \mathrm{H}(E, d)$$
$$D' := \operatorname{im}\alpha$$

Die Abbildung α induziert eine Abbildung $D' \xrightarrow{\alpha'} D'$ mit $\deg \alpha' = \deg \alpha$.
Wegen $d = \beta\gamma$ induziert β eine Abbildung $\operatorname{im}\gamma \xrightarrow{\beta''} \operatorname{im} d$ und wegen $d\beta = 0$ eine Abbildung $D \xrightarrow{\beta'''} \ker d$.
In dem kommutativen Diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im}\gamma & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\alpha} & D' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \beta''} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'''} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d & \longrightarrow & \ker d & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist die obere Zeile wegen $\ker \alpha = \operatorname{im}\gamma$ und die untere nach Definition von E' exakt.
Man erhält eine induzierte Abbildung β' mit $\deg \beta' = \deg \beta - \deg \alpha$.
Wegen $d = \beta\gamma$ induziert γ eine Abbildung $\ker d \xrightarrow{\gamma''} \ker \beta$.
In dem Diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d & \longrightarrow & \ker d & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma''} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker \beta & \xrightarrow{\mathrm{id}} & D' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert das linke Quadrat wegen $\gamma d = 0$ und ist die obere Zeile nach Definition von E' exakt.
Man erhält eine induzierte Abbildung γ' mit $\deg \gamma' = \deg \gamma$.
Insgesamt erhält man

$$\begin{array}{ccccc} D' & & \xrightarrow{\alpha'} & & D' \\ & {\scriptstyle \gamma'} \nwarrow & & \swarrow {\scriptstyle \beta'} & \\ & & E' & & \end{array}$$

Satz und Definition 2.1. $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)' := (E', D', \alpha', \beta', \gamma')$ *ist ein exaktes Paar mit* $\deg \alpha' = \deg \alpha$, $\deg \beta' = \deg \beta - \deg \alpha$ *und* $\deg \gamma' = \deg \gamma$ *und heißt* <u>*abgeleitetes (exaktes) Paar*</u> *von* $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)$.

Beweis. Wegen

- $x \in D' = \operatorname{im} \alpha$
  $\Rightarrow \beta'\alpha' x = [\beta\alpha^{-1}\alpha x] = [\beta x] = [0]$
- $x \in D' = \operatorname{im} \alpha$
  $\Rightarrow \gamma'\beta' x = \gamma\beta\alpha^{-1} x = 0$
- $[x] \in E'$
  $\Rightarrow \alpha'\gamma'[x] = \alpha\gamma x = 0$
- $x \in \ker \alpha' \subset \ker \alpha = \operatorname{im}\gamma$
  $\Rightarrow \exists y \in E : x = \gamma y$
  $\Rightarrow dy = \beta\gamma y = \beta x \in \beta D' = \beta \operatorname{im} \alpha = \beta \ker \beta = 0$
  $\Rightarrow y \in \ker d$
  $\Rightarrow x = \gamma'[y]$
- $x \in \ker \beta'$
  $\Rightarrow [0] = \beta' x = [\beta\alpha^{-1} x]$
  $\Rightarrow \beta\alpha^{-1} x \in \operatorname{im} d$
  $\Rightarrow \exists y \in E : \beta\alpha^{-1} x = dy = \beta\gamma y$
  $\Rightarrow \beta(\alpha^{-1} x - \gamma y) = 0$
  $\Rightarrow \alpha^{-1} x - \gamma y \in \ker \beta = \operatorname{im} \alpha$
  $\Rightarrow \exists z \in D : \alpha^{-1} x - \gamma y = \alpha z$
  $\Rightarrow x = \alpha(\alpha^{-1} x - \gamma y) = \alpha\alpha z = \alpha'\alpha z \in \operatorname{im} \alpha'$
- $[x] \in \ker \gamma'$
  $\Rightarrow 0 = \gamma'[x] = \gamma x$
  $\Rightarrow x \in \ker \gamma = \operatorname{im} \beta$
  $\Rightarrow \exists y \in D : x = \beta y$

$\Rightarrow dx = \beta\gamma\beta y = 0$
$\Rightarrow x \in \ker d$
$\Rightarrow [x] = [\beta y] = [\beta\alpha^{-1}\alpha y] = \beta'\alpha y \in \operatorname{im}\beta'$

ist $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)'$ ein exaktes Paar.
Die Aussage über die Grade der Abbildungen gilt nach Konstruktion. □

3. Spektralsequenzen exakter Paare

Definition 3.1.

1. Eine Spektralsequenz (m-graduierter Moduln) (E, d) ist eine Folge m-graduierter Differentialmoduln $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ mit $E^{r+1} = \mathrm{H}(E^r, d^r)$.
2. Eine Abbildung von Spektralsequenzen (m-graduierter Moduln) $(E, d) \xrightarrow{\tau} ({}'E, {}'d)$ ist eine Familie von Abbildungen m-graduierter Differentialmoduln $((E^r, d^r) \xrightarrow{\tau^r} ({}'E^r, {}'d^r))_{r\geq 1}$ mit $\tau^{r+1} = \mathrm{H}(\tau^r)$.

Bemerkung 3.2. Die Spektralsequenzen mit den Abbildungen von Spektralsequenzen bilden eine Kategorie.

Sei $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ ein exaktes Paar.
Man definiert

$$(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r) := \begin{cases} (D, E, \alpha, \beta, \gamma) & \text{falls } r = 1 \\ (D^{r-1}, E^{r-1}, \alpha^{r-1}, \beta^{r-1}, \gamma^{r-1})' & \text{falls } r \geq 2 \end{cases}$$

und $d^r := \beta^r\gamma^r$.

Satz und Definition 3.3. *$(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)_{r\geq 1}$ ist eine Folge exakter Paare und heißt abgeleitete Folge von $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus 2.1 durch Induktion über r. □

Satz 3.4. *$(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ bestimmt eine natürliche Spektralsequenz.*

Beweis. Nach Konstuktion und 3.3 ist $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ eine Spektralsequenz.
Die Natürlichkeit der Zuordnung bleibt zu zeigen. □

Der folgende Satz beschreibt die Spektralsequenz eines exakten Paares wie man es aus 5.3 erhält.

Satz 3.5. *Sei $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ ein exaktes Paar bigraduierter Moduln und* $\deg\alpha = (1, -1)$, $\deg\beta = (0, 0)$ *und* $\deg\gamma = (-1, 0)$.

1. $\deg\alpha^r = (1, -1)$, $\deg\beta^r = (1 - r, r - 1)$ *und* $\deg\gamma^r = (-1, 0)$.
2. d^r *ist von* $\beta(\alpha^{-1})^{r-1}\gamma$ *induziert und* $\deg d^r = (-r, r - 1)$.
3. $E^{r+1}_{p,q} = \ker d^r_{p,q} / \operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1}$

Beweis. Die Behauptung zeigt man mit 1.2 und 2.1 durch Induktion über r. □

4. Grenzwerte von Spektralsequenzen

Sei (E, d) eine Spektralsequenz.
Man hat dann kanonische Abbildungen

$$E^r \supset \ker d^r \xrightarrow{\pi^r} \ker d^r / \operatorname{im} d^r = E^{r+1} \supset \ker d^{r+1} \supset \operatorname{im} d^{r+1}$$

Definiert man

$$Z^r := \begin{cases} \ker d^1 & \text{falls } r = 1 \\ (\pi^1)^{-1} \cdots (\pi^{r-1})^{-1} \ker d^r & \text{falls } r \geq 2 \end{cases}$$

$$B^r := \begin{cases} \operatorname{im} d^1 & \text{falls } r = 1 \\ (\pi^1)^{-1} \cdots (\pi^{r-1})^{-1} \operatorname{im} d^r & \text{falls } r \geq 2 \end{cases}$$

so erhält man

$$0 \subset B^1 \subset B^2 \subset B^3 \subset \cdots \subset Z^3 \subset Z^2 \subset Z^1 \subset E^1$$

Definition 4.1.

$$Z^\infty := \bigcap_{r\geq 1} Z^r := (\bigcap_{r\geq 1} Z_p^r)_{p\in\mathbb{Z}^m}$$
$$B^\infty := \bigcup_{r\geq 1} B^r := (\bigcup_{r\geq 1} B_p^r)_{p\in\mathbb{Z}^m}$$
$$E^\infty := Z^\infty/B^\infty$$

E^∞ heißt Grenzwert von (E,d).

Bemerkung 4.2.

1. Ist $E_p^R = 0$, so ist $E_p^\infty = E_p^r = 0$ für alle $r > R$.
2. Ist $d^r = 0$, so ist $E^{r+1} = E^r$.
3. Ist $d^r = 0$ für alle $r \geq R$, so ist $E^\infty = E^r$ für alle $r \geq R$.

5. Spektralsequenzen von Komplexen mit Filtration

Definition 5.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und A ein Objekt in $\mathcal{C}$.
Eine Familie $FA = (F^pA)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\cdots \subset F^{p-1}A \subset F^pA \subset F^{p+1}A \subset \cdots \subset A$$

heißt Filtration von A.
(A, FA) heißt filtriertes Objekt in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 5.2. Aus einer Kategorie $\mathcal{C}$ erhält man auf kanonische Weise eine Kategorie von filtrierten Objekten in $\mathcal{C}$.

Von nun an ist $n = p + q$.

Satz 5.3. *Ein Komplex von Moduln $C_\bullet$ mit Filtration $FC_\bullet$ betimmt ein natürliches exaktes Paar bigraduierter Moduln $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)$ mit* $\deg\alpha = (1,-1)$, $\deg\beta = (0,0)$ *und* $\deg\gamma = (-1,0)$.

Beweis. Die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow F^{p-1}C_\bullet \longrightarrow F^pC_\bullet \longrightarrow F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet \longrightarrow 0$$

liefern exakte Sequenzen

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_n(F^{p-1}C_\bullet) \xrightarrow{\alpha_{p-1,q+1}} \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet) \xrightarrow{\beta_{p,q}} \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) \xrightarrow{\gamma_{p,q}} \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

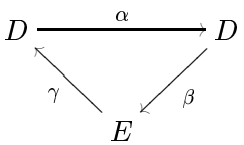
Setzt man

$$D_{p,q} := \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet)$$
$$E_{p,q} := \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet)$$

erhält man die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow D_{p-1,q+1,} \xrightarrow{\alpha_{p-1,q+1}} D_{p,q} \xrightarrow{\beta_{p,q}} E_{p,q} \xrightarrow{\gamma_{p,q}} D_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

und somit das exakte Dreieck



mit $\deg\alpha = (1,-1)$, $\deg\beta = (0,0)$ und $\deg\gamma = (-1,0)$.
Die Natürlichkeit der Konstuktion bleibt zu zeigen. □

Corollar 5.4. *Ein Komplex von Moduln mit Filtration betimmt eine natürliche Spektralsequenz bigraduierter Moduln.*

Beweis. Nach 5.3 bestimmt ein Komplex von Moduln mit Filtration ein natürliches exaktes Paar bigraduierter Moduln und dieses nach 3.4 eine natürliche Spektralsequenz bigraduierter Moduln. □

Satz 5.5. *Ist (E,d) die Spektralsequenz eines Komplexes von Moduln $C_\bullet$ mit Filtration $FC_\bullet$, so ist $d^1_{p,q}$ der Verbindungshomomorphismus*

$$\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet)$$

Beweis. Sei $(E,D,\alpha,\beta,\gamma)$ das exakte Paar von $C_\bullet$ bezüglich $FC_\bullet$.
Nach Definition ist $d^1_{p,q} = d_{p,q}$ die Abbildung

$$\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) \xrightarrow{\gamma_{p,q}} \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet) \xrightarrow{\beta_{p-1,q}} \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet)$$

wobei $\gamma_{p,q}$ Verbindungshomomorphismus ist und $\beta_{p-1,q}$ von der kanonischen Abbildung $F^{p-1}C_\bullet \longrightarrow F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet$ induziert wird.
Aus

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{p-1}C_\bullet & \longrightarrow & F^pC_\bullet & \longrightarrow & F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet & \longrightarrow & F^pC_\bullet/F^{p-2}C_\bullet & \longrightarrow & F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

folgt dann mit der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus, daß $d^1_{p,q}$ der Verbindungshomomorphismus

$$\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet)$$

ist. □

6. Konvergenz von Spektralsequenzen

Definition 6.1. Eine Filtration FM eines graduierten Moduls M heißt beschränkt, wenn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ für kleine $p \in \mathbb{Z}$ $F^pM_n = 0$ und für große $p \in \mathbb{Z}$ $F^pM_n = M_n$ ist.

Satz und Definition 6.2. *Sei (E,d) die Spektralsequenz eines Komplexes von Moduln $C_\bullet$ mit Filtration $FC_\bullet$ und $\Phi\,\mathrm{H}(C_\bullet)$ definiert durch $\Phi^p\,\mathrm{H}(C_\bullet) := \operatorname{im}\mathrm{H}(F^pC_\bullet \longrightarrow C_\bullet)$.*

1. *$\Phi\,\mathrm{H}(C_\bullet)$ ist eine natürliche Filtration von $\mathrm{H}(C_\bullet)$.*
2. *Ist $FC_\bullet$ beschränkt, so auch $\Phi\,\mathrm{H}(C_\bullet)$.*

$\Phi\,\mathrm{H}(C_\bullet)$ heißt von $FC_\bullet$ induzierte Filtration von $\mathrm{H}(C_\bullet)$.

Beweis.

1. Die Behauptung folgt aus der Funktoreigenschaft von H.
2. Sei $FC_\bullet$ beschränkt und $n \in \mathbb{Z}$.
   Für kleine $p \in \mathbb{Z}$ ist dann $F^pM_n = 0$, also $\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet) = 0$ und somit $\Phi^p\,\mathrm{H}_n(C_\bullet) = 0$.
   Für große $p \in \mathbb{Z}$ ist $F^pM_{n-1} = F^pM_n = M_n$, also $\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet) = \mathrm{H}_n(C_\bullet)$ und somit $\Phi^p\,\mathrm{H}_n(C_\bullet) = \mathrm{H}_n(C_\bullet)$.
   Also ist $\Phi\,\mathrm{H}(C_\bullet)$ beschränkt.

□

Man erhält $E^1_{p,q} = \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet)$ aus $FC_\bullet$ indem man zuerst Quotienten und dann Homologie bildet.
Bildet man ausgehend von $FC_\bullet$ zuerst Homologie und dann Quotienten so erhält man $\Phi^p\,\mathrm{H}_n(C_\bullet)/\Phi^{p-1}\,\mathrm{H}_n(C_\bullet)$.
Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 6.3. Sei H ein graduierter Modul.
Eine Spektralsequenz bigraduierter Moduln (E,d) konvergiert gegen H, wenn es eine beschränkte Filtration ΦH von H gibt mit $E^\infty_{p,q} \cong \Phi^pH_n/\Phi^{p-1}H_n$ für alle $p,q \in \mathbb{Z}$.
Man schreibt dann $E^2_{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} H_n$, wobei der Filtrationsindex unter dem Doppelpfeil steht.

Satz 6.4. *Sei (E,d) die Spektralsequenz eines Komplexes von Moduln $C_\bullet$ mit beschränkter Filtration $FC_\bullet$.*

1. *Für alle $p,q \in \mathbb{Z}$ ist $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$ für große r.*

2. $E^2_{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{H}_n(C_\bullet)$

Beweis.

1. Da $FC_\bullet$ beschränkt ist, gilt für große oder kleine r $F^{p+r-1}C_n = F^{p+r}C_n$ und somit

$$E^1_{p+r,q-r} = \mathrm{H}_n(F^{p+r}C_\bullet / F^{p+r-1}C_\bullet) = 0$$

Also ist nach 4.2 für große r

$$E^r_{p+r,q-r} = 0$$
$$E^r_{p-r,q+r} = 0$$

Da nach 3.5 $\deg d^r = (-r, r-1)$ ist, folgt für große r

$$d^r_{p,q}(E^r_{p,q}) \subset E^r_{p-r,q+r-1} = 0$$
$$\operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1} = d^r_{p+r,q-r+1}(E^r_{p+r,q-r+1}) = 0$$

Also ist für große r

$$(\ker d^r)_{p,q} = E^r_{p,q}$$
$$(\operatorname{im} d^r)_{p,q} = 0$$

und somit

$$E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} = E^r_{p,q}$$

2. Sei $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)_{r\geq 1}$ die abgeleitete Folge des exakten Paares $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ von $C_\bullet$ bezüglich $FC_\bullet$.
Mit 3.5 erhält man aus $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$ die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow E^r_{p+r-1,q-r+2} \longrightarrow D^r_{p+r-2,q-r+2} \xrightarrow{\alpha^r_{p+r-2,q-r+2}} D^r_{p+r-1,q-r+1} \xrightarrow{\beta^r_{p+r-1,q-r+1}} E^r_{p,q} \xrightarrow{\gamma^r_{p,q}} D^r_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

Sei $H := \mathrm{H}(C_\bullet)$ und ΦH die von $FC_\bullet$ induzierte Filtration von H.
Da $FC_\bullet$ beschränkt ist, gilt für große r

$$\begin{aligned} D^r_{p+r-1,q-r+1} &= \alpha_{p+r-2,q-r+2} \cdots \alpha_{p,q} D_{p,q} \\ &= \mathrm{H}_n(F^{p+r-2}C_\bullet \longrightarrow F^{p+r-1}C_\bullet) \cdots \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet \longrightarrow F^{p+1}C_\bullet)\, \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet) \\ &= \operatorname{im} \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet \longrightarrow F^{p+r-1}C_\bullet) \\ &= \operatorname{im} \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet \longrightarrow C_\bullet) \\ &= \Phi^p H_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D^r_{p-1,q} &= \alpha_{p-2,q+1} \cdots \alpha_{p-r,q+r-1} D_{p-r,q+r-1} \\ &= \alpha_{p-2,q+1} \cdots \alpha_{p-r,q+r-1}\, \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-r}C_\bullet) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält also für große r die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Phi^{p-1}H_n \longrightarrow \Phi^pH_n \longrightarrow E^\infty_{p,q} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

und somit

$$\Phi^pH_n / \Phi^{p-1}H_n \cong E^\infty_{p,q}$$

Da ΦH nach 6.2 beschränkt ist, folgt $E^2_{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} H_n$.

□

7. Entartete und sphärische Spektralsequenzen

Definition 7.1. Eine Spektralsequenz (E,d) heißt entartet, wenn es ein $R \geq 1$ und eine Familie $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ gibt mit $E^R_{p,n-p} = 0$ für $p \neq p_n$.

Satz 7.2. *Sei (E,d) die Spektralsequenz eines Komplexes von Moduln $C_\bullet$ mit beschränkter Filtration $FC_\bullet$.*
Ist (E,d) entartet, so ist mit Bezeichnungen aus 7.1 $\mathrm{H}_n(C_\bullet) \cong E^r_{p_n,n-p_n}$ für große r.

Beweis. Sei $H := \mathrm{H}(C_\bullet)$ und ΦH die von $FC_\bullet$ induzierte Filtration von H.
Nach 4.2 ist also für große r $E^r_{p,n-p} = 0$ für $p \neq p_n$ und somit nach 6.4

$$\Phi^p H_n/\Phi^{p-1}H_n \cong E^\infty_{p,n-p} = E^r_{p,n-p} = \begin{cases} E^r_{p_n,n-p_n} & \text{falls } p = p_n \\ 0 & \text{falls } p \neq p_n \end{cases}$$

Da ΦH nach 6.2 beschränkt ist, folgt

$$0 = \cdots = \Phi^{p_n-1}H_n \subset \Phi^{p_n}H_n = \cdots = H_n$$

mit $H_n = \Phi^{p_n}H_n/\Phi^{p_n-1}H_n \cong E^r_{p_n,n-p_n}$ für große r. □

Definition 7.3. Sei (E,d) eine Spektralsequenz.

1. (E,d) hat sphärische Basis, wenn es $R \geq 1$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ und $b-a \geq R$ gibt, so daß $E^R_{p,q} = 0$ ist für $p \neq a,b$.
2. (E,d) hat sphärische Faser, wenn es $R \geq 1$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq b$ und $a-b \geq R-1$ gibt, so daß $E^R_{p,q} = 0$ ist für $q \neq a,b$.

Satz 7.4. *Sei (E,d) die Spektralsequenz eines Komplexes von Moduln $C_\bullet$ mit beschränkter Filtration $FC_\bullet$.*

1. *Hat (E,d) sphärische Basis mit Bezeichnungen aus 7.3 und $N := b-a$, so gibt es eine natürliche exakte Sequenz*
$$\cdots \longrightarrow E^N_{b,n-b+1} \xrightarrow{d^N_{b,n-b+1}} E^N_{a,n-a} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^N_{b,n-b} \xrightarrow{d^N_{b,n-b}} E^N_{a,n-a-1} \longrightarrow \cdots$$
2. *Hat (E,d) sphärische Faser mit Bezeichnungen aus 7.3 und $N := a-b+1$, so gibt es eine natürliche exakte Sequenz*
$$\cdots \longrightarrow E^N_{n-b+1,b} \xrightarrow{d^N_{n-b+1,b}} E^N_{n-a,a} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^N_{n-b,b} \xrightarrow{d^N_{n-b,b}} E^N_{n-a-1,a} \longrightarrow \cdots$$

In beiden Fällen gilt $E^R = E^N$ und $E^\infty = E^{N+1}$.

Beweis.

1. Sei $H := \mathrm{H}(C_\bullet)$ und ΦH die von $FC_\bullet$ induzierte Filtration von H.
Da (E,d) sphärische Basis hat, ist nach 4.2
$$E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q} = 0 \text{ für } r \geq R \text{ und } p \neq a,b \tag{1}$$
Nach 6.4 ist
$$E^\infty_{p+r,q-r} \cong \Phi^{p+r}H_n/\Phi^{p+r-1}H_n \tag{2}$$
Da nach 6.2 ΦH beschränkt ist, erhält man wegen (1) und (2)
$$0 = \cdots = \Phi^{a-1}H_n \subset \Phi^a H_n = \cdots = \Phi^{b-1}H_n \subset \Phi^b H_n = \cdots = H_n$$
mit
$$E^\infty_{a,n-a} = \Phi^a H_n$$
$$E^\infty_{b,n-b} = H_n/\Phi^a H_n$$
und daraus die natürliche exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow E^\infty_{a,n-a} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^\infty_{b,n-b} \longrightarrow 0$$
Nach 3.5 ist
$$\deg d^r = (-r, r-1) \tag{3}$$

Mit (1) und (3) folgt $d^r = 0$ für $R \leq r < N$ oder $r > N$ und daraus mit 4.2

$$E^R = E^N$$
$$E^\infty = E^{N+1}$$

Aus (1) und (3) folgt auch

$$\ker d^N_{a,n-a} = E^N_{a,n-a}$$
$$\operatorname{im} d^N_{b+N,n-b-N+1} = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} E^\infty_{a,n-a} &= E^{N+1}_{a,n-a} \\ &= \ker d^N_{a,n-a} / \operatorname{im} d^N_{a+N,n-a-N+1} \\ &= E^N_{a,n-a} / \operatorname{im} d^N_{a+N,n-a-N+1} \\ &= \operatorname{coker} d^N_{a+N,n-a-N+1} \\ E^\infty_{b,n-b} &= E^{N+1}_{b,n-b} \\ &= \ker d^N_{b,n-b} / \operatorname{im} d^N_{b+N,n-b-N+1} \\ &= \ker d^N_{b,n-b} \end{aligned}$$

Man erhält also die natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} d^N_{a+N,n-a-N+1} \longrightarrow H_n \longrightarrow \ker d^N_{b,n-b} \longrightarrow 0$$

und daraus die natürliche exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow E^N_{a+N,n-a-N+1} \xrightarrow{d^N_{a+N,n-a-N+1}} E^N_{a,n-a} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^N_{b,n-b} \xrightarrow{d^N_{b,n-b}} E^N_{b-N,n-b+N-1} \longrightarrow \cdots$$

2. Die zweite Ausage zeigt man analog zur ersten.

□

8. Spektralsequenzen von Doppelkomplexen

Definition 8.1. Ein Doppelkomplex (von Moduln) $M = (M, {}'d, {}''d)$ besteht aus einem bigraduierten Modul M und Abbildungen bigraduierter Moduln $M \xrightarrow{'d} M$ und $M \xrightarrow{''d} M$ mit $\deg {}'d = (-1, 0)$ und $\deg {}''d = (0, -1)$, so daß ${}'d{}'d = 0$, ${}''d{}''d = 0$ und ${}'d{}''d + {}''d{}'d = 0$.

Bemerkung 8.2.

1. Ist $(M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomplex, so ist

$$\begin{array}{ccc} M_{p-1,q} & \xleftarrow{{}'d_{p,q}} & M_{p,q} \\ \downarrow{\scriptstyle {}''d_{p-1,q}} & & \downarrow{\scriptstyle {}''d_{p,q}} \\ M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{{}'d_{p,q-1}} & M_{p,q-1} \end{array}$$

   ein antikommutatives Diagram.
2. Ist $(M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomlex, so sind $(M, {}'d)$ und $(M, {}''d)$ bigraduierte Differentialmoduln und induzieren wiederum bigraduierte Differentialmoduln $(\mathrm{H}(M, {}'d), {}''\bar{d})$ und $(\mathrm{H}(M, {}''d), {}'\bar{d})$ mit von ${}'d$ und ${}''d$ induzierten Differentialen ${}'\bar{d}$ und ${}''\bar{d}$.

Definition 8.3. Sei $M = (M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomplex.

$$\begin{aligned} {}'\mathrm{H}(M) &:= \mathrm{H}(M, {}'d) & {}''\mathrm{H}(M) &:= \mathrm{H}(M, {}''d) \\ {}''\mathrm{H}\,{}'\mathrm{H}(M) &:= \mathrm{H}({}'\mathrm{H}(M), {}''\bar{d}) & {}'\mathrm{H}\,{}''\mathrm{H}(M) &:= \mathrm{H}({}''\mathrm{H}(M), {}'\bar{d}) \end{aligned}$$

Satz und Definition 8.4. *Sei $M = (M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomplex.*
Der Totalkomplex von M $\mathrm{Tot}_\bullet(M) = (\mathrm{Tot}_\bullet(M), d_\bullet)$ *ist definiert durch*

$$\mathrm{Tot}_n(M) := \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$
$$d_n := \sum_{p+q=n} {}'d_{p,q} + {}''d_{p,q}$$

$\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ *ist ein Komplex.*

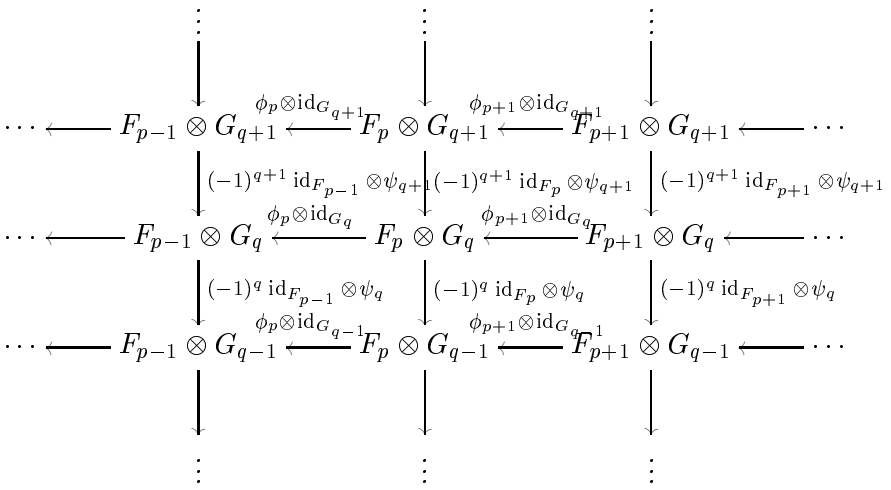
Beweis. Mit 8.1 und 8.2 zeigt man $d_{n+1}d_n = 0$. □

Beispiel 8.5. *Seien $F_\bullet = (F_\bullet, \phi_\bullet)$ und $G_\bullet = (G_\bullet, \psi_\bullet)$ Komplexe von Moduln.*

1. *Definiert man*

$$M_{p,q} := F_p \otimes G_q$$
$${}'d_{p,q} := \phi_p \otimes \mathrm{id}_{G_q}$$
$${}''d_{p,q} := (-1)^q \,\mathrm{id}_{F_p} \otimes \psi_q$$

so ist $M := (M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomplex

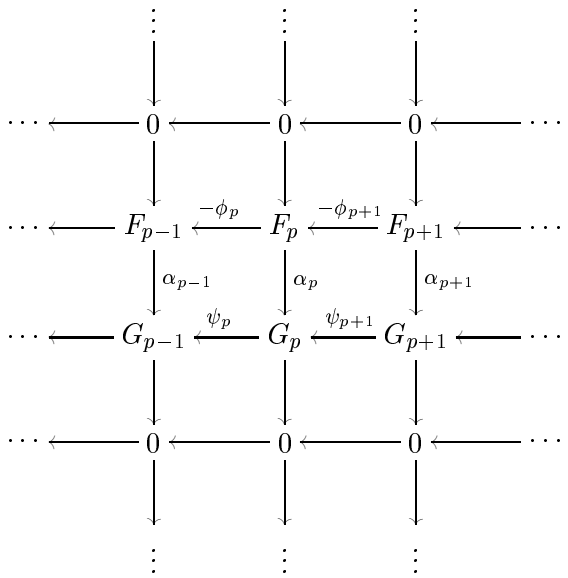


und $F_\bullet \otimes G_\bullet := \mathrm{Tot}_\bullet(M)$ heißt Tensorprodukt von $F_\bullet$ und $G_\bullet$.

2. *Sei $F_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} G_\bullet$ eine Kettenabbildung.*
Definiert man

$$M_{p,q} := \begin{cases} F_p & \text{falls } q = 1 \\ G_p & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$${}'d_{p,q} := \begin{cases} -\phi_p & \text{falls } q = 1 \\ \psi_p & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$${}''d_{p,q} := \begin{cases} \alpha_p & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist $M := (M, {}'d, {}''d)$ *ein Doppelkomplex*



und $\mathrm{C}_\bullet(\alpha_\bullet) := \mathrm{Tot}_\bullet(M)$ *heißt Abbildungskegel von* $\alpha_\bullet$.

Definition 8.6. Ist $M = (M, {}'d, {}''d)$ ein Doppelkomplex, so nennen wir ${}'F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ und ${}''F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ mit

$$
\begin{aligned}
{}'F^p\,\mathrm{Tot}_n(M) &:= \bigoplus_{r\le p} M_{r,n-r} \\
{}''F^q\,\mathrm{Tot}_n(M) &:= \bigoplus_{s\le q} M_{n-s,s}
\end{aligned}
$$

erste und zweite kanonische Filtration von $\mathrm{Tot}_\bullet(M)$.

Satz 8.7. *Sei* $M = (M, {}'d, {}''d)$ *ein Doppelkomplex und seien* ${}'E$ *und* ${}''E$ *die Spektralsequenzen zu den kanonischen Filtrationen* ${}'F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ *und* ${}''F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ *von* $\mathrm{Tot}_\bullet(M)$. *Dann ist*

$$
\begin{aligned}
{}'E^1 &= {}''\mathrm{H}(M) \quad & {}'E^2 &= {}'\mathrm{H}\,{}''\mathrm{H}(M) \\
{}''E^1 &= {}'\mathrm{H}(M)^t \quad & {}''E^2 &= {}''\mathrm{H}\,{}'\mathrm{H}(M)^t
\end{aligned}
$$

Beweis. Sei $C_\bullet := \mathrm{Tot}_\bullet(M)$, $FC_\bullet := {}'F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ und $E := {}'E$.
Die Differentiale von $F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet$ und $F^pC_\bullet/F^{p-2}C_\bullet$ werden mit $\bar{d}^p_\bullet$ und $\bar{\bar{d}}^p_\bullet$ bezeichnet. $\bar{d}^p_n$ ist von $d_n = \sum_{p+q=n} {}'d_{p,q} + {}''d_{p,q}$ induziert und

$$
\begin{aligned}
F^pC_n/F^{p-1}C_n &= \bigoplus_{r\le p} M_{r,n-r} \Big/ \bigoplus_{r\le p-1} M_{r,n-r} \\
&= M_{p,n-p} \\
&= M_{p,q} \\
F^pC_{n-1}/F^{p-1}C_{n-1} &= M_{p,q-1}
\end{aligned}
$$

Also ist $\bar{d}^p_n = {}''d_{p,q}$ und somit

$$E^1_{p,q} = \mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) = {}''\mathrm{H}_{p,q}(M)$$

Nach 5.5 ist $d^1_{p,q}$ der Verbindungshomomorphismus

$$\mathrm{H}_n(F^pC_\bullet/F^{p-1}C_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F^{p-1}C_\bullet/F^{p-2}C_\bullet)$$

und somit in

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M_{p,q}\oplus M_{p-1,q+1} & \xrightarrow{\pi} & M_{p,q} \\
 & & \| & & \| \\
F^{p-1}C_n/F^{p-2}C_n & \longrightarrow & F^pC_n/F^{p-2}C_n & \longrightarrow & F^pC_n/F^{p-1}C_n \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{d}_n^{p-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\bar{d}}_n^{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{d}_n^{p}} \\
F^{p-1}C_{n-1}/F^{p-2}C_{n-1} & \longrightarrow & F^pC_{n-1}/F^{p-2}C_{n-1} & \longrightarrow & F^pC_{n-1}/F^{p-1}C_{n-1} \\
\| & & \| & & \\
M_{p-1,q} & \xrightarrow{\iota} & M_{p,q-1}\oplus M_{p-1,q} & &
\end{array}$$

von $\iota^{-1}\bar{\bar{d}}_n^p\pi^{-1}$ induziert.
Da $\bar{\bar{d}}_n^p$ von $d_n=\sum_{p+q=n} {}'d_{p,q}+{}''d_{p,q}$ induziert ist, folgt $\iota^{-1}\bar{\bar{d}}_n^p\pi^{-1}={}'d_{p,q}$ und somit

$$E^2=\mathrm{H}(E^1,d^1)=\mathrm{H}({}''\mathrm{H}(M),{}'\bar{d})={}'\mathrm{H}\,{}''\mathrm{H}(M)$$

Die übrigen Aussagen zeigt man analog. □

Definition 8.8. Ein Doppelkomplex M heißt positiv, wenn $M_{p,q}=0$ ist für kleines $\min\{p,q\}$, und negativ, wenn $M_{p,q}=0$ ist für großes $\max\{p,q\}$.

Bemerkung 8.9. Ist M ein positiver oder negativer Doppelkomplex, so sind die kanonischen Filtrationen ${}'F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ und ${}''F\,\mathrm{Tot}_\bullet(M)$ beschränkt.

Satz 8.10. *Sei M ein positiver oder negativer Doppelkomplex.*

$$ {}'E^2_{p,q}={}'\mathrm{H}\,{}''\mathrm{H}(M)_{p,q}\underset{p}{\Longrightarrow}\mathrm{H}_n(\mathrm{Tot}_\bullet(M))$$

$$ {}''E^2_{q,p}={}''\mathrm{H}\,{}'\mathrm{H}(M)_{p,q}\underset{q}{\Longrightarrow}\mathrm{H}_n(\mathrm{Tot}_\bullet(M))$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 6.4 mit 8.7 und 8.9. □

Bemerkung 8.11. In diesem Skript wird eine homologische Theorie von Spektalsequenzen dargestellt. Eine kohomologischen Theorie erhält man durch Umkehrung der Filtrationen

$$F^n=F_{-n}$$

und Spiegelung der bigraduierten Moduln und Abbildungen bigraduierter Moduln am Ursprung. Insbesondere ist

$$E^r_{p,q}=E_r^{-p,-q}$$

Mit 8.10 und Cartan-Eilenberg-Auflösung von Komplexen zeigt man den folgenden Satz.

Satz 8.12 (Grothendieck). *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Kategorien von Moduln und $G:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ und $F:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ additive Funktoren.*

1. *Ist F rechtsexakt und GP links-F-azyklisch für projektive P in $\mathcal{A}$, dann gibt es für jeden Modul M in $\mathcal{A}$ eine Spektralsequenz $E=E(M)$ mit*
$$E^2_{p,q}=L_pF(L_qG(M))\underset{p}{\Longrightarrow}L_n(FG)(M)$$
2. *Ist F linksexakt und GI rechts-F-azyklisch für injektive I in $\mathcal{A}$, dann gibt es für jeden Modul M in $\mathcal{A}$ eine Spektralsequenz $E=E(M)$ mit*
$$E_2^{p,q}=R^pF(R^qG(M))\underset{p}{\Longrightarrow}R^n(FG)(M)$$

Bemerkung 8.13.

1. 8.12 gilt auch für abelsche Kategorien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genügend projektive bzw. injektive Objekte haben.
2. Es gibt eine Variante von 8.12 für Kofunktoren.

Mathias Schulze, Jakob-Locher-Strasse 16, 66482 Zweibrücken
E-mail address: mschulze@mathematik.uni-kl.de